

✿ 日本数学会

2018年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2018年9月

於 岡山大学

✿ 日本数学会

2018年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2018年9月

於 岡山大学

無 限 可 積 分 系

9月24日(月) 第V会場

9:15~10:50		(分)	頁
1	加藤正輝 (神戸大理)	楕円ディガンマ関数の加法型公式	(15) 1
2	綾野孝則 (阪市大数研) V. M. Buchstaber (Steklov Math. Inst.)	種数3の超楕円曲線のシグマ因子上の有理型関数を退化させて得られる KdV 方程式の解について	(15) 3
3	鈴木貴雄 (近畿大理工)	自然数の分割 $(n+1, n+1, n+1)$ に対応する A 型ドリinfeld ト・ソコロフ階層の相似簡約	(15) 5
4	竹村剛一 (中大理工)	On q -deformations of the Heun equation	(15) 7
5	大山陽介 (徳島大理工)	q -超幾何関数 ${}_3\phi_2(a_1, a_2, a_3; 0, 0; q, x)$ の満たす差分方程式の q -Stokes 係数	(15) 9
6	伊藤雅彦 (琉球大理) 野海正俊 (神戸大理)	G_2 型 Gustafson q -ベータ積分の楕円化とその無限積表示について	(15) 11
11:00~12:00 特別講演			
	岩木耕平 (名大多元数理)	完全 WKB 解析と位相的漸化式	13
14:15~16:25			
7	水野勇磨 (東工大情報理工)	Jacobian matrices of Y-seed mutations and mutation networks	(15) 25
8	安東雅訓 (奈良学園大人間教育)	劣正則分割とグレイシャー対応	(15) 27
9	星野歩 (広島工大理) 白石潤一 (東大数理)	Matrix inversion for Koornwinder polynomials with one-column diagram	(15) 29
10	末武一馬 (名大多元数理) 粟田英資 (名大多元数理) 菅野浩明 (名大多元数理)	量子トロイダル代数に付随する (q, t) -KZ 方程式	(15) 31
11	小寺諒介 (神戸大理)	On Guay's evaluation map for affine Yangians	(15) 33
12	中津了勇 (摂南大理工) 高崎金久 (近畿大理工)	Hodge 積分と位相的頂点	(15) 35
13	国場敦夫 (東大総合文化) V. Pasquier (Univ. Paris-Saclay)	Matrix product solutions to the reflection equation from three dimensional integrability	(15) 37
14	尾角正人 (阪市大理) Jae-Hoon Kwon (ソウル大)	A 型一般化量子群の KR クリスタル	(15) 39
16:40~17:40 特別講演			
	池田岳 (岡山理大理)	K 理論的 Peterson 同型	41

楯円ディガンマ関数の加法型公式

加藤 正輝 (神戸大学)*

1. 序論

楯円関数の最も重要な性質の一つとして、加法公式が挙げられる。Eisenstein は、Weierstrass のゼータ関数

$$\zeta(z, \tau) := \frac{1}{z} + \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \left(\frac{1}{z - m - n\tau} + \frac{1}{m + n\tau} + \frac{z}{(m + n\tau)^2} \right)$$

の満たす加法公式を、余接関数の加法公式と、 $\zeta(z, \tau)$ が余接関数の無限和で表されることを用いて証明している。([6]を参照。)本講演では、このEisensteinのアイデアの拡張について考察する。

通常の余接関数の一般化として、二重正弦関数の対数微分で定義される二重余接関数 $\text{Cot}_2(x, (\omega_1, \omega_2))$ がある。(二重正弦関数については [4] を参照。) 講演者は、[2] において、(ほぼ一般的な条件下で) 二重余接関数が以下の加法型公式を満たすことを示した:

$$\begin{aligned} \text{Cot}_2^{(3)}(x, \omega) \text{Cot}_2(y, \omega) + \text{Cot}_2^{(3)}(x+y, \omega) \text{Cot}_2(y, \omega) - \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \text{Cot}_2^{(k)}(x+y, \omega) \text{Cot}_2^{(3-k)}(x, \omega) \\ = -6R(y, \omega_1 + \omega_2 - x, \omega) + 6R(y, x + y, \omega), \quad (1) \end{aligned}$$

ここに、 $\omega := (\omega_1, \omega_2)$ であり、

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, \omega) := - \sum_{(i,j)=(1,2),(2,1)} \frac{\pi}{\omega_i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \cot \frac{\pi}{\omega_i} (x_1 + k\omega_j) \zeta_2(4, x_2 + k\omega_j, \omega) \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \cot \frac{\pi}{\omega_i} (x_1 - k\omega_j) \zeta_2(4, x_2 - \omega_1 - \omega_2 - k\omega_j, -\omega) \right). \end{aligned}$$

とおいた。(1) は、通常の余接関数の加法公式、(古典的および高次の) Dedekind 和の相互法則、Lerch の関数等式、Ramanujan の公式、Euler の二重ゼータ値の満たすある関係式を含んでいる。([2],[3]を参照。)特に、(1) は、通常の余接関数の加法公式の一般化であるから、上で述べた Eisenstein のアイデアを、(1) にも適用することができる。本講演では、この Eisenstein のアイデアの一般化により、どのような公式が得られるかを紹介する。

2. 主結果

$\text{Im}(\tau_0), \text{Im}(\tau_1) > 0$ なる $\tau_0, \tau_1 \in \mathbb{C}$ に対して、 $\underline{\tau} := (\tau_0, \tau_1)$ とおき、楯円ガンマ関数 $\Gamma(z, \underline{\tau})$ を

$$\Gamma(z, \underline{\tau}) := \prod_{j_0, j_1=0}^{\infty} \frac{1 - e^{2\pi i((j_0+1)\tau_0 + (j_1+1)\tau_1 - z)}}{1 - e^{2\pi i(j_0\tau_0 + j_1\tau_1 + z)}}$$

* e-mail: mkato@math.kobe-u.ac.jp

と定め, $\tau > 0$ となる $\tau \in \mathbb{C}$ に対して, テータ関数 $\theta_0(z, \tau)$ を

$$\theta_0(z, \tau) := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - e^{2\pi i((j+1)\tau - z)})(1 - e^{2\pi i(j\tau + z)})$$

と定める. 次に, 楕円ディガンマ関数 $\psi_1(z, \tau)$ および関数 $\psi_0(z, \tau)$ を

$$\begin{aligned}\psi_1(z, \tau) &:= \frac{d}{dz} \log \Gamma(z, \tau), \\ \psi_0(z, \tau) &:= \frac{d}{dz} \log \theta_0(z; \tau)\end{aligned}$$

と定義する. さらに

$$\psi_3(z, \tau) := 2\pi i \sum_{j_0, j_1 \geq 0} (j_0 + 1)(j_1 + 1) \left(\frac{e^{2\pi i(z + j_0\tau_0 + j_1\tau_1)}}{1 - e^{2\pi i(z + j_0\tau_0 + j_1\tau_1)}} + \frac{e^{2\pi i((j_0+2)\tau_0 + (j_1+2)\tau_1 - z)}}{1 - e^{2\pi i((j_0+2)\tau_0 + (j_1+2)\tau_1 - z)}} \right)$$

とおく.

定理 1. $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ および $x, y \in \mathbb{C}$ を以下をみたすようにとる:

$$\begin{aligned}\varepsilon < \text{Im}(\tau_i), 0 < \text{Im}(x), \varepsilon < \text{Im}(y) < \varepsilon + \text{Im}(\tau_i), \text{Im}(x + y) < \text{Im}(\tau_0 + \tau_1). \\ (i = 0, 1).\end{aligned}$$

このとき以下の公式が成り立つ:

$$\begin{aligned}& \psi_1(x, \tau)\psi_1(y, \tau) + \psi_1(y, \tau)\psi_1(x + y, \tau) - \psi_1(x, \tau)\psi_1(x + y, \tau) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \psi_1(x + y - t - i\varepsilon, \tau) (\psi_0(y - t - i\varepsilon, \tau_0)\psi_0(t + i\varepsilon, \tau_1) + \psi_0(y - t - i\varepsilon, \tau_1)\psi_0(t + i\varepsilon, \tau_0)) dt \\ & \quad + 2\pi i (\psi_3(x + \tau_0 + \tau_1, \tau) + \psi_3(y + \tau_0 + \tau_1, \tau) + \psi_3(x + y, \tau)).\end{aligned}$$

定理 1 は, Weierstrass のゼータ関数の加法公式

$$(\zeta(x, \tau) + \zeta(y, \tau) - \zeta(x + y, \tau))^2 + \zeta^{(1)}(x, \tau) + \zeta^{(1)}(y, \tau) + \zeta^{(1)}(x + y, \tau) = 0$$

に加えて, 津村 [5] によって導入された二重 Eisenstein 級数の evaluation formula や Gangl-金子-Zagier [1] によって証明された二重 Eisenstein 級数の複シャッフフル関係式を含んでいる.

参考文献

- [1] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, Double zeta values and modular forms, in Automorphic forms and zeta functions, Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific (2006).
- [2] M. Kato, An addition type formula for the double cotangent function, Kodai Math J. **40** (2017), 468-491.
- [3] M. Kato, Double cotangent function and double zeta values, submitted.
- [4] N. Kurokawa and S. Koyama, Multiple sine functions, Forum Math. **15** (2003), 839-876.
- [5] H. Tsumura, Analogues of level- N Eisenstein series, Pac. J. Math. **255** (2012), 489-510.
- [6] A. Weil, Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer, Berlin, 1976.

種数3の超楕円曲線のシグマ因子上の有理型関数を退化させて得られるKdV方程式の解について

綾野 孝則 (阪市大数学研)*1

V. M. Buchstaber (ステクロフ数学研究所)*2

$Q(x) = x^7 + \lambda_4 x^5 - \lambda_6 x^4 + \lambda_8 x^3 - \lambda_{10} x^2 + \lambda_{12} x - \lambda_{14}$ ($\lambda_i \in \mathbb{C}$), $B = \{\lambda = (\lambda_4, \dots, \lambda_{14}) \in \mathbb{C}^6 \mid Q(x) \text{ は重根を持たない}\}$ とする。 $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = Q(x)\}$ とする。 $\lambda \in B$ ならば、 V は種数3の超楕円曲線である。しばらくの間、 $\lambda \in \mathbb{C}^6$ とする。 $\mathcal{F}(V^2)$ を V^2 の有理関数体とする。 J を $y_1^2 - Q(x_1)$ と $y_2^2 - Q(x_2)$ で生成される $\mathbb{C}[x_1, y_1, x_2, y_2]$ のイデアルとする。 $\mathcal{F}(V^2)$ は整域 $\mathbb{C}[x_1, y_1, x_2, y_2]/J$ の商体である。 $\text{Sym}^2(V)$ を V の2次の対称積とする。 $\mathcal{F}(V^2)$ の元で (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の入れ替えで不変なもの全体を $\mathcal{F}(\text{Sym}^2(V))$ とする。 [2] では次で定義される $u_2, u_4, u_5, u_7 \in \mathcal{F}(\text{Sym}^2(V))$ が導入されている。

$$u_2 = x_1 + x_2, \quad u_4 = (x_1 - x_2)^2, \quad u_5 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad u_7 = y_1 + y_2$$

u_2, u_4, u_5, u_7 は体 $\mathcal{F}(\text{Sym}^2(V))$ の \mathbb{C} 上の生成元になる ([1])。 [2] では、体 $\mathcal{F}(\text{Sym}^2(V))$ に作用する次のような微分作用素が導入されている。

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{x_1 - x_2} (\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1), \quad \mathcal{L}_5 = \frac{1}{x_1 - x_2} (x_2 \mathcal{D}_1 - x_1 \mathcal{D}_2)$$

$\mathcal{D}_k = 2y_k \partial_{x_k} + Q'(x_k) \partial_{y_k}$, ($k = 1, 2$) である。 [2] では、 $i = 3, 5$, $j = 2, 4, 5, 7$ に対して、 $\mathcal{L}_i u_j$ を u_2, u_4, u_5, u_7 の $\mathbb{Q}[\lambda_4, \dots, \lambda_{14}]$ の元を係数とする多項式として書き下している。

$\lambda \in B$ とする。 V 上の正則微分形式 $du = {}^t(-\frac{x^2}{2y} dx, -\frac{x}{2y} dx, -\frac{1}{2y} dx)$ をとる。 $\sigma(w) = \sigma(w_1, w_3, w_5)$ を V のシグマ関数とする ([3])。 $\Lambda = \{\int_\gamma du \mid \gamma \text{ は } V \text{ 上の閉曲線}\}$ とする。 σ は Λ の作用に関して準周期的な \mathbb{C}^3 上の正則関数である。 $W = \{w \in \mathbb{C}^3 \mid \sigma(w) = 0\}$ とする。シグマ関数の準周期性から、任意の $w \in W$, $\Omega \in \Lambda$ に対して $w + \Omega \in W$ となる。 $(\sigma) = \{w \in \mathbb{C}^3/\Lambda \mid \sigma(w) = 0\}$ をシグマ因子という。 \mathbb{C}^3 上の有理型関数 f で、任意の $w \in W$ と $\Omega \in \Lambda$ に対して $f(w + \Omega) = f(w)$ となるもの全体を $\mathcal{F}((\sigma))$ とする。 J^* を W 上で恒等的に0になる $\mathcal{F}((\sigma))$ の元全体とする。 $\mathcal{F}((\sigma)) = \mathcal{F}((\sigma))/J^*$ とする。 $\mathcal{F}((\sigma))$ は体になる ([1])。アーベル・ヤコビ写像

$$I : \text{Sym}^2(V) \rightarrow (\sigma), \quad (P_1, P_2) \mapsto \int_\infty^{P_1} du + \int_\infty^{P_2} du$$

により、次の体の同型が得られる ([1])。

$$I^* : \mathcal{F}((\sigma)) \rightarrow \mathcal{F}(\text{Sym}^2(V)), \quad f \mapsto f \circ I$$

この同型で u_i に対応する $\mathcal{F}((\sigma))$ の元は、 σ を用いて具体的に書き下せる ([1])。 $\sigma_i = \frac{\partial}{\partial w_i} \sigma$, $\sigma_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_j} \sigma$ とする。 $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_5$ に対応する $\mathcal{F}((\sigma))$ の微分作用素はそれぞれ次で書ける ([1])。

$$L_3 = \partial_{w_3} - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \partial_{w_1}, \quad L_5 = \partial_{w_5} - \frac{\sigma_5}{\sigma_1} \partial_{w_1}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 14K25, 14H40, 14H70

キーワード: 超楕円曲線、シグマ関数、アーベル・ヤコビ写像、KdV 方程式

*1 〒558-8585 大阪市住吉区杉本3丁目3番138号 大阪市立大学 数学研究所

e-mail: tayano7150@gmail.com

*2 8 Gubkina St. Moscow, 119991, Russia.

$\lambda \in \mathbb{C}^6$ とする。次のような新たな生成元 $v_2, v_4, v_5, v_7 \in \mathcal{F}(\text{Sym}^2(V))$ を考える。

$$v_2 = -u_2, \quad v_4 = (u_2^2 - u_4)/4, \quad v_5 = u_5, \quad v_7 = u_7 - u_2u_5$$

$\mathcal{F}(\text{Sym}^2(V))$ に作用する次の微分作用素 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3$ を考える。

$$\mathcal{T}_1 = -v_4^{-1}\mathcal{L}_5, \quad \mathcal{T}_3 = \mathcal{L}_3 - v_2v_4^{-1}\mathcal{L}_5$$

[2] で示された $\mathcal{L}_i u_j$ の u_2, u_4, u_5, u_7 による表示式を用いて計算すると以下の結果を得る。

Lemma 1 任意の $\lambda \in \mathbb{C}^6$ に対して、次が成立する。

$$\mathcal{T}_1^3 v_2 + (4\lambda_{12}v_4^{-3} + 8\lambda_{14}v_4^{-4}v_2 - 4)\mathcal{T}_3 v_2 + \{12v_2 + \lambda_{14}v_4^{-4}(v_2^2 - 4v_4)\}\mathcal{T}_1 v_2 = 0$$

$\lambda \in B$ とする。次のような \mathbb{C}^3 上の有理型関数を考える。

$$f_1 = \frac{\sigma_{1,1}}{\sigma_1}, \quad f_2 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}, \quad f_3 = \frac{\sigma_{1,3}}{\sigma_1}, \quad f_4 = \frac{\sigma_5}{\sigma_1}, \quad f_5 = \frac{\sigma_{3,3}}{\sigma_1}, \quad g_5 = \frac{\sigma_{1,5}}{\sigma_1}, \quad f_7 = \frac{\sigma_{3,5}}{\sigma_1}$$

$$E_2 = f_2, \quad E_4 = f_4, \quad E_5 = (f_1 f_2^2 + f_5 - 2f_2 f_3)/2, \quad E_7 = f_7 + f_1 f_2 f_4 - f_3 f_4 - f_2 g_5$$

$\mathcal{F}((\sigma))$ に作用する次の微分作用素 T_1, T_3 を考える。

$$T_1 = -f_4^{-1}L_5, \quad T_3 = L_3 - f_2 f_4^{-1}L_5$$

$[T_1, T_3] = 0, [T_1, T_3] = 0$ が成り立つ。

Lemma 2 $E_i \in \mathcal{F}((\sigma)), I^*(E_i) = v_i, T_1 \circ I^* = I^* \circ T_1, T_3 \circ I^* = I^* \circ T_3$ が成立

[3] では σ の原点における級数展開の係数が λ_i の有理数係数の多項式であることが示されている。よって、 σ は $\lambda \in B$ のみで定まる \mathbb{C}^3 上の正則関数である。即ち、 $\lambda_4, \dots, \lambda_{14}$ も変数と思うと、 $\sigma(w, \lambda)$ は $\mathbb{C}^3 \times B$ 上の関数である。上に述べた σ の級数展開の性質より、 $\sigma(w, \lambda)$ は $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^6$ 上の正則関数に拡張できる。即ち、曲線を退化させたとき、 σ の極限を考えることができる。 $\sigma(w^{(0)}, \mathbf{0}) = 0, \sigma_1(w^{(0)}, \mathbf{0}) \neq 0, \sigma_5(w^{(0)}, \mathbf{0}) \neq 0$ となる $w^{(0)} = (w_1^{(0)}, w_3^{(0)}, w_5^{(0)}) \in \mathbb{C}^3$ をとれる。 $(w^{(0)}, \mathbf{0})$ の周りの w_5 に関する $\sigma(w, \lambda) = 0$ の陰関数を $\varphi(w_1, w_3, \lambda)$ とする。 $F_i(t, \tau, \lambda) = E_i(t, \tau, \varphi(t, \tau, \lambda), \lambda)$ とする ($i = 2, 4, 5, 7$)。 F_i は $(w_1^{(0)}, w_3^{(0)}, \mathbf{0}) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^6$ の近傍で定義された 8 変数の正則関数である。Lemma 1, 2 より、以下の定理を得る。

Theorem 1 F_2, F_4 は以下の微分方程式を満たす。

$$\partial_t^3 F_2 + (4\lambda_{12}F_4^{-3} + 8\lambda_{14}F_4^{-4}F_2 - 4) \cdot (\partial_\tau F_2) + \{12F_2 + \lambda_{14}F_4^{-4}(F_2^2 - 4F_4)\} \cdot (\partial_t F_2) = 0$$

特に、 $\lambda_{12} = \lambda_{14} = 0$ とすると、 F_2 は KdV 方程式の解である。

$$\partial_t^3 F_2 - 4 \cdot (\partial_\tau F_2) + 12F_2 \cdot (\partial_t F_2) = 0$$

参考文献

- [1] T. Ayano, V. M. Buchstaber, "The field of meromorphic functions on a sigma divisor of a hyperelliptic curve of genus 3 and applications", *Functional Analysis and Its Applications*, Volume 51, Issue 3, pp.162–176, 2017.
- [2] V. M. Buchstaber, A.V. Mikhailov. "Infinite dimensional Lie algebras determined by the space of symmetric squares of hyperelliptic curves", *Functional Analysis and Its Applications*, Volume 51, Issue 1, pp.2–21, 2017.
- [3] A. Nakayashiki, "On Algebraic Expressions of Sigma Functions for (n, s) Curves", *Asian Journal of Mathematics*, Volume 14, Number 2, pp.175–212, 2010.

自然数の分割 $(n+1, n+1, n+1)$ に対応する A 型 ドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約

鈴木 貴雄 (近畿大学理工学部)*

概 要

ドリンフェルト・ソコロフ階層はKP階層のアフィン・リー代数についての一般化であり、特に $A_n^{(1)}$ 型の場合には自然数 $(n+1)$ の分割によって特徴付けられる。論文 [1, 2] では、 $A_{2n+1}^{(1)}$ 型の階層のうち自然数の分割 $(n+1, n+1)$ に対応するものについて考察し、その相似簡約のポワソン構造とハミルトン系表示を与えた。本講演では、 $A_{3n+2}^{(1)}$ 型の階層のうち自然数の分割 $(n+1, n+1, n+1)$ に対応するものについて、同様の考察を行う。

$A_{(m+1)(n+1)-1}^{(1)}$ 型ドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約を、次のように与える:

$$\partial_i(\widehat{U}) - [U_i, \widehat{U}] = 0, \quad [U_i, t_1\Lambda_i + \dots + t_{m+1}\Lambda_{m+1}] - [\widehat{U}, \Lambda_i] = 0, \quad \widehat{U} = \rho + \sum_{i=1}^{m+1} t_i U_i, \quad (1)$$

$$U_i \in \mathfrak{g}_0, \quad \Lambda_i \in \mathfrak{s}_1, \quad \rho \in \mathfrak{s}_0 \quad (i = 1, \dots, m+1).$$

ここで、 Λ_i と ρ は分割 $(n+1)^{m+1}$ に対応するハイゼンベルグ部分代数の生成元である。その他のアフィン・リー代数の記号については論文 [2] を参照のこと。このとき、微分作用素 $\partial_1, \dots, \partial_{m+1}$ の間には1つだけ関係式が存在するので、 $t_{m+1} = 1$ と規格化しておく。

補題 1. \mathfrak{g}_0 上のポワソン括弧を、次のように定める:

$$\{(x|\widehat{U}), (y|\widehat{U})\} = (n+1)([y, x]|\widehat{U}) \quad (x, y \in \mathfrak{g}_0). \quad (2)$$

このとき、方程式系 (1) は次のハミルトン系として表される:

$$\partial_i((x|\widehat{U})) = \{H_i, (x|\widehat{U})\}, \quad H_i = \frac{(U_i|\widehat{U})}{2(n+1)} \quad (x \in \mathfrak{g}_0, i = 1, \dots, m+1). \quad (3)$$

実は、ハミルトン系 (1) に含まれる見かけの従属変数の数は、実質の方程式系の階数より多い。そこで、変数の数を減らして適切な正準座標系を取るために、次のゲージ変換を行う:

$$\mathcal{M} := e^{w_0} \left(\vartheta - \rho - \sum_{j=1}^{m+1} t_j U_j - \sum_{j=1}^{m+1} t_j \Lambda_j \right) e^{-w_0} \in \mathfrak{b}_+, \quad w_0 \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{n}_-. \quad (4)$$

ここで、 ϑ はハイゼンベルグ部分代数に付随する grading operator である。このとき、

$$\mathcal{B}_i := \partial_i - W_0(\partial_i - U_i - \Lambda_i)W_0^{-1} \in \mathfrak{b}_+ \quad (i = 1, \dots, m+1),$$

とおくと、方程式系 (1) より次が導かれる:

$$[\partial_i - \mathcal{B}_i, \mathcal{M}] = 0 \quad (i = 1, \dots, m+1), \quad \mathcal{M} = \vartheta - \rho - \sum_{i=1}^{m+1} t_i \mathcal{B}_i. \quad (5)$$

この方程式系のハミルトン系表示を与えるために、 \mathcal{M} に関するポワソン括弧を次のように定める:

$$\{(x|\mathcal{M}), (y|\mathcal{M})\} = (n+1)([y, x]|\mathcal{M}) \quad (x, y \in \mathfrak{n}_-). \quad (6)$$

本研究は科研費(課題番号:15K04911)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 34M55, 39A13

* 〒577-8502 東大阪市小若江3-4-1 近畿大学理工学部

e-mail: suzuki@math.kindai.ac.jp

以下, $m = 2$ の場合について考える. 方程式系 (5) の下で, 従属変数を次のように取り直す:

$$\begin{aligned}\lambda_{3j} &= (e_{3j+1,3j+2}|w_0) + \frac{1}{2}(e_{3j+1}|w_0)(e_{3j+2}|w_0), & \lambda_{3j+1} &= -(e_{3j+1}|w_0), & \lambda_{3j+2} &= -(e_{3j+2}|w_0), \\ \mu_{3j} &= -(f_{3j+1,3j+2}|\mathcal{M}), & \mu_{3j+1} &= -(f_{3j+1}|\mathcal{M}), & \mu_{3j+2} &= -(f_{3j+2}|\mathcal{M}) - (e_{3j+1}|w_0)(f_{3j+1,3j+2}|\mathcal{M}),\end{aligned}$$

ただし $j = 0, \dots, n$ とする. このとき, ポワソン括弧 (6) より次が得られる.

補題 2. 従属変数 λ_i, μ_i ($i = 0, \dots, 3n+2$) は次を満たす:

$$\{\mu_i, \lambda_j\} = (n+1)\delta_{i,j}, \quad \{\mu_i, \mu_j\} = \{\lambda_i, \lambda_j\} = 0. \quad (7)$$

更に, ポワソン括弧 (7) からゲージ変換 (4) を逆に辿ることで, \mathfrak{g}_0 上のポワソン括弧 (2) が導かれる¹. これにより, 方程式系 (5) は正準座標を用いてハミルトン系の形で書き直される.

定理 3. 正準座標 λ_j, μ_j ($j = 0, \dots, 3n+2$) は, 次のハミルトン系を満たす:

$$\partial_i(\lambda_j) = \{H_i, \lambda_j\}, \quad \partial_i(\mu_j) = \{H_i, \mu_j\} \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

ただし, ハミルトニアンは次のように与えられる:

$$H_i = \frac{(U_i|\hat{U})}{2(n+1)} = \frac{(\mathcal{B}_i - \partial_i(w_0) - \frac{1}{2}\text{ad } w_0(\partial_i(w_0))|\vartheta - \mathcal{M})}{2(n+1)} \quad (i = 1, 2).$$

次の補題のおかげで, 方程式系 (8) の階数は 4 減って $(6n+2)$ 階の系に帰着する².

補題 4. 次の関係式が成り立つ:

$$\sum_{j=0}^n (\lambda_{3j}\mu_{3j} + \lambda_{3j+i}\mu_{3j+i}) = (n+1)\eta_i \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

ただし η_1 と η_2 は定数とする.

最後に次の補題を与えておく.

補題 5. 方程式系 (8) において $t_2 = 1$ を仮定すると, 次の関係式が成り立つ:

$$\sum_{j=0}^n \mu_{3j+2} = 0.$$

上の補題のおかげで, 方程式系 (8) は $6n$ 階の常微分方程式系に帰着する. 特に $n = 1$ のときには, Even4 超幾何関数を特殊解として持つ 6 次元パルヴェ方程式 ([3]) と一致する³.

参考文献

- [1] K. Fuji and T. Suzuki, *Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A and fourth order Painlevé systems*, Funkcial. Ekvac. **53** (2010) 143–167.
- [2] T. Suzuki, *A class of higher order Painlevé systems arising from integrable hierarchies of type A*, AMS Contemp. Math. **593** (2013) 125–141.
- [3] T. Suzuki, *Six-dimensional Painlevé systems and their particular solutions in terms of rigid systems*, J. Math. Phys. **55** (2014) 102902.
- [4] T. Suzuki, *Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A, Higher order Painlevé systems and τ -Functions*, submitted.

¹ これは一般の $m \geq 3$ について成り立つと期待しているが, 証明はまだ出ていない.

² スペクトル型 $\{(2n+1, 1), (2n+1, 1), (2n+1, 1), (2^{n+1}), (1^{2n+2})\}$ のフックス系のモノドロミー保存変形として得られると予想しているが, 証明はまだ出ていない.

³ これは 2015 年春の数学会で発表した内容である.

On q -deformations of the Heun equation

竹村 剛一 (中央大学理工学部)

ホイン (Heun) の微分方程式はリーマン球面上で 4 点 $\{0, 1, t, \infty\}$ に確定特異点をもつ 2 階線形微分方程式の標準形であるが、その q -差分版として次の q -ホイン方程式が Hahn により提唱されていた ([1])。

$$\{a_0 + a_1x + a_2x^2\}g(x/q) + \{b_0 + b_1x + b_2x^2\}g(x) + \{c_0 + c_1x + c_2x^2\}g(qx) = 0.$$

ただし、 $a_0a_2c_0c_2 \neq 0$ を仮定する。 $q \rightarrow 1$ の極限においてホインの微分方程式が導出される。

q -ホイン方程式は、Ruijsenaars-van Diejen 作用素を 4 回退化されることで得られる作用素

$$\begin{aligned} A^{(4)} = & x^{-1}(x - q^{h_1+1/2}t_1)(x - q^{h_2+1/2}t_2)T_{q^{-1}} \\ & + q^{\alpha_1+\alpha_2}x^{-1}(x - q^{l_1-1/2}t_1)(x - q^{l_2-1/2}t_2)T_q \\ & - \{(q^{\alpha_1} + q^{\alpha_2})x + q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+\alpha_1+\alpha_2)/2}(q^{\beta/2} + q^{-\beta/2})t_1t_2x^{-1}\} \end{aligned}$$

$(T_{q^{-1}}g(x) = g(x/q), T_qg(x) = g(qx))$ の固有値 E に対応する固有関数、すなわち

$$A^{(4)}g(x) = Eg(x).$$

として記述できる ([3])。ここで Ruijsenaars-van Diejen 系とはホインの方程式の楕円関数表示の差分版として考えられる差分方程式系である ([2])。また、[3] において他の退化版の作用素も得られている。とくに、3 回退化と 2 回退化の作用素は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} A^{(3)} = & x^{-1} \prod_{n=1}^3 (x - q^{h_n+1/2}t_n)T_{q^{-1}} + x^{-1} \prod_{n=1}^3 (x - q^{l_n-1/2}t_n)T_q \\ & - (q^{1/2} + q^{-1/2})x^2 + \sum_{n=1}^3 (q^{h_n} + q^{l_n})t_nx + q^{(l_1+l_2+l_3+h_1+h_2+h_3)/2}(q^{\beta/2} + q^{-\beta/2})t_1t_2t_3x^{-1}, \\ A^{(2)} = & x^{-2} \prod_{n=1}^4 (x - q^{h_n+1/2}t_n)T_{q^{-1}} + x^{-2} \prod_{n=1}^4 (x - q^{l_n-1/2}t_n)T_q - (q^{1/2} + q^{-1/2})x^2 \\ & + \sum_{n=1}^4 (q^{h_n} + q^{l_n})t_nx + \prod_{n=1}^4 q^{(h_n+l_n)/2}t_n \left[- (q^{1/2} + q^{-1/2})x^{-2} + \sum_{n=1}^4 \left(\frac{1}{q^{h_n}t_n} + \frac{1}{q^{l_n}t_n} \right) x^{-1} \right]. \end{aligned}$$

ここで、 q -ホイン方程式の変異形 (variants) を、 $E \in \mathbf{C}$ としたときの $A^{(3)}g(x) = Eg(x)$, $A^{(2)}g(x) = Eg(x)$ としてそれぞれ定義する。 $A^{(3)}g(x) = Eg(x)$ は、3 次の多項式 $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ を用いて

$$a(x)g(x/q) + b(x)g(x) + c(x)g(qx) = 0 \quad (1)$$

という形で表現されるが、 $A^{(4)}g(x) = Eg(x)$ の場合と違って各多項式の係数たちは関係式で縛られている。 $A^{(2)}g(x) = Eg(x)$ の場合は各々の多項式は 4 次となる。

本講演では、多項式 $a(x), b(x), c(x)$ の係数たちの関係式を、 q -差分方程式に対する確定特異点の話を用いて特徴付けを行う。

ここで、式 (1) において $a(x), b(x), c(x)$ はそれぞれ 3 次式と仮定し、 $a(x), c(x)$ については零点から $a(x) = (x - q^{h_1+1/2}t_1)(x - q^{h_2+1/2}t_2)(x - q^{h_3+1/2}t_3)$, $c(x) = (x - q^{l_1-1/2}t_1)(x - q^{l_2-1/2}t_2)(x - q^{l_3-1/2}t_3)$ と書いておく。ここで $b(x)$ を

$$b(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

とおく。 $A^{(3)}g(x) = Eg(x)$ を式 (1) の形に書いたときには、定数 b_3, b_2, b_1, b_0 は特定されている。 (b_3, b_2) については式 (2))

特徴付けとして、式 (1) での確定特異点 $x = \infty$ での特性指数を $-1/2, 1/2$ とし、さらに $x = \infty$ は見かけの特異点 (non-logarithmic) と仮定する。このとき、 b_3, b_2 は以下のように決定される。

$$b_3 = -(q^{1/2} + q^{-1/2}), \quad b_2 = \sum_{n=1}^3 (q^{h_n} + q^{l_n})t_n. \quad (2)$$

また、 b_0 については、確定特異点 $x = 0$ での特性指数の差を β とすることで $b_0 = q^{(l_1+l_2+l_3+h_1+h_2+h_3)/2}(q^{\beta/2} + q^{-\beta/2})t_1t_2t_3$ となる。

これらの値は、 $A^{(3)}g(x) = Eg(x)$ を式 (1) の形に書いたときの b_3, b_2, b_0 の値と一致しており、 q -差分方程式に対する確定特異点の話で特徴付けができた ([4])。 $b_1 = E$ については $x = 0, \infty$ での局所データとは独立であり、それゆえに E をアクセサリパラメーターとみなすことができる。

また、 $A^{(3)}g(x) = Eg(x)$ の $q \rightarrow 1$ の極限を考えることで、無限遠点を含まない 4 点 $\{0, t_1, t_2, t_3\}$ のみに確定特異点をもつ微分方程式の q -変形とみなすことができる。

$A^{(2)}g(x) = Eg(x)$ についても類似の特徴付けができる ([4])。

また、 q -ホイン方程式やその変異形について、準可解性についても結果が得られた ([4])。これは、 q -ホイン方程式などの特殊解の構成に応用できる。

参考文献

- [1] W. Hahn, On linear geometric difference equations with accessory parameters, *Funkcial. Ekvac.* **14** (1971), 73–78.
- [2] S. N. M. Ruijsenaars, Integrable BC_N analytic difference operators: Hidden parameter symmetries and eigenfunctions, NATO Science Series **132**, 217–261, Kluwer, Dordrecht, 2004.
- [3] K. Takemura, Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and q -Painleve equations, *J. Integrable Systems* **2** (2017), xyx008.
- [4] K. Takemura, On q -deformations of the Heun equation, *SIGMA* **14** (2018), paper 061, 16 pages.

q -超幾何関数 ${}_3\phi_2(a_1, a_2, a_3; 0, 0; q, x)$ の満たす差分方程式の q -Stokes 係数

大山 陽介 (徳島大学大学院社会産業理工学研究部理工学域) ¹

超幾何級数 ${}_3\phi_2(a_1, a_2, a_3; 0, 0; q, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, a_2, a_3; q)_n}{(q; q)_n} x^n$ の満たす差分方程式

$$\left[x \prod_{j=k}^3 (1 - a_k \sigma_q) - (1 - \sigma_q) \right] y(z) = 0$$

の接続問題を考える.

■ 記号 : $q \in \mathbb{C}^*$, $0 < |q| < 1$ に対して q -階乗積 (q -shifted factorial):

$$(a; q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - aq^j), \quad (a; q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - aq^j), \quad (a_1, a_2, \dots, a_m; q)_n = \prod_{j=1}^m (a_j; q)_n.$$

q -超幾何級数 [GR] ${}_r\phi_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, x)$

$$:= \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_n}{(b_1, \dots, b_s; q)_n (q; q)_n} \left\{ (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right\}^{1+s-r} x^n.$$

テータ関数 $\theta_q(x) := \theta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{k(k-1)/2} x^k = (q, -x, -q/x; q)_\infty$.

この方程式は原点が ramified な不確定特異点になり, 非超幾何型の発散級数を係数にもつ. この方程式の大域解析に関しては Watson [W] が考察しているが, Stokes 現象を扱っていない上, 結果がわかりにくかったため現代的な q -発散級数の扱いを行う.

■ 無限遠における局所解はすべて収束級数で表示され

$$y_{1,\infty}(x) = \frac{\theta(-a_1 x)}{\theta(-x)} {}_1\phi_2 \left(\begin{matrix} a_1 \\ qa_1/a_2, qa_1/a_3 \end{matrix}; q, \frac{q^3 a_1}{a_2 a_3 x} \right),$$

であり, $y_{2,\infty}(x), y_{3,\infty}(x)$ は a_1, a_2, a_3 を cyclic に変えることで得る.

原点での解を表すために独立変数 $x \rightarrow x^2$ を変えて

$$\left\{ x^2 (1 - a_1 \sigma_p) (1 - a_2 \sigma_p) (1 - a_3 \sigma_p) - (1 - \sigma_p) \right\} u(x) = 0,$$

ここで $p^2 = q$.

¹本研究は科研費 (課題番号:6K05176) の助成を受けたものである. また, フランス・Lille 大学の Changui Zhang 氏との共同研究である.

■ 原点における局所解は

$$\begin{aligned} u_{1,0}(x) &= {}_3\phi_2(a_1, a_2, a_3; 0, 0; q, x^2) \\ u_{2,0}(x) &= \theta_p(\sqrt{a_1 a_2 a_3 / p^3} x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \\ u_{3,0}(x) &= \theta_p(-\sqrt{a_1 a_2 a_3 / p^3} x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n (-x)^n \end{aligned}$$

となり, $u_{2,0}(x), u_{3,0}(x)$ は超幾何級数ではない発散級数で表される.

■ 接続公式 1

$u_{1,\infty}(x)$ の代わりに $y_{1,\infty}(x) = {}_3\phi_2(a_1, a_2, a_3; 0, 0; q, x)$ に戻せば、Thomae の接続公式 [T] の単純な極限によって接続公式を得る：

$$y_{1,0}(x) = \frac{(a_2, a_3; q)_{\infty}}{(a_2/a_1, a_3/a_1; q)_{\infty}} y_{1,\infty}(x) + \text{idem}(a_1; a_2, a_3)$$

以下でも、 $u_{2,0}(x), u_{3,0}(x)$ の代わりに元の方程式の解を直接考えるのでそれを $y_{2,0}(x), y_{3,0}(x)$ とする。

■ 接続公式 2

$y_{2,0}^*(x)$ を $y_{2,0}(x)$ の q -Borel-Lapalce 変換像とすると

$$\begin{aligned} y_{2,0}^*(x) &= \frac{(q/a_1; q)_{\infty}}{(a_2/a_1, a_3/a_1; q)_{\infty}} \frac{\theta(-x, -a_1 q x / \beta_1, -a_2 q / \beta_1, -a_3 q / \beta_1)}{\theta(-a_1 x, -q x / \beta_1, -s_3 / \beta_1, -q^2 / \beta_1)} y_{1,\infty}(x) \\ &\quad + \text{idem}(a_1; a_2, a_3). \end{aligned}$$

ここで β_1 は resummation のために入るパラメタ。

■ 手法 q -Borel 変換 $\mathcal{B}_q^{\pm} : \mathbb{C}[[t]] \rightarrow \mathbb{C}[[\tau]]$ を次で定める

$$\mathcal{B}_q^{\pm} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] := \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\pm n(n-1)/2} \tau^n.$$

\mathcal{B}_q^+ の逆変換として q -Laplace 変換 $\mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]}$ を次の Jackson 積分で定める：

$$\mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]}(\varphi)(x) := \frac{1}{1-q} \int_0^{\lambda\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\theta_q(\tau/x)} \frac{d_q \tau}{\tau} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\varphi(q^n \lambda)}{\theta_q(q^n \lambda/x)}.$$

■ 文献：

[GR] Gasper, G., Rahman, M.; Basic Hypergeometric Series, 2nd ed, Cambridge (2004).

[T] Thomae, J.; Les séries Heineennes supérieures, ou les séries de la forme ..., *Ann. Mat. Pura Appl.* **4** (1870), 105–138.

[W] Watson, G. N.; The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, *Trans. Camb. Phil. Soc.* **21** (1910), 281–299.

G_2 型 Gustafson q -ベータ積分の 楕円化とその無限積表示について

伊藤 雅彦 (琉球大学・理)

野海 正俊 (神戸大学・理)

本講演では、 G_2 型ルート系に付随するある楕円超幾何積分が楕円ガンマ函数の積で具体的に表示できることを紹介する。

背景.

議論の出発点となる G_2 型 Gustafson q -積分から紹介する. 1980年代から1990年代にかけて R. A. Gustafson は, Macdonald 定数項恒等式の研究との関連で, Weyl 群不変な q -級数や q -積分に関する (Macdonald 定数項恒等式とは異なる) 先駆的な一連の結果を得ている. (各ルート系における分類は [7] を参照.) Weyl 群が古典型 (A_n 型, BC_n 型など) の場合の Gustafson の公式は, その $q \rightarrow 1$ の極限として, Dixon の公式 [6, 1905年] (Dirichlet 積分のガンマ函数による積表示 [5, p. 359, 例2] の拡張) を含んでいる. この意味で, Gustafson の公式は, ベータ函数型多重積分のガンマ函数積表示の q -類似と言える. Spiridonov の結果に代表される 21 世紀以降に発見された多くの楕円版超幾何積分の公式は, $p \rightarrow 0$ の極限として Gustafson の q -積分の結果を含むような構成になっている. また講演者らも, 楕円超幾何積分に対して q -差分 de Rham の方法 (Stokes の公式の q -類似) を使った証明法を提案していることは, 日本数学会において紹介してきた [2, 3, 4, 8, 9].

一方, 1990年から1994年にかけて, Weyl 群が例外型 G_2 型の場合に関しても Gustafson は次の命題に示される q -積分の公式を得ている. 以下 $|q| < 1$ である $q \in \mathbb{C}^*$ を固定し, 記号 $(x; q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i x)$ および $(x_1, \dots, x_k; q)_\infty = (x_1; q)_\infty \cdots (x_k; q)_\infty$ を用いる.

命題 (Gustafson [10, 11]). $a_k \in \mathbb{C}^*$ ($1 \leq k \leq 4$) は $|a_k| < 1$ を満たすとする. このとき以下の複素 2 重積分に関する無限積表示が成立する:

$$\begin{aligned} & \frac{(q; q)_\infty^2}{12(2\pi\sqrt{-1})^2} \iint_{\mathbb{T}^2} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq 3} (z_i z_j, z_i^{-1} z_j, z_i z_j^{-1}, z_i^{-1} z_j^{-1}; q)_\infty}{\prod_{i=1}^3 \prod_{k=1}^4 (a_k z_i, a_k z_i^{-1}; q)_\infty} \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \\ &= \frac{(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2; q)_\infty}{(a_1 a_2 a_3 a_4; q)_\infty} \prod_{i=1}^4 \frac{(a_i; q)_\infty}{(a_i^2; q)_\infty} \prod_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{1}{(a_i a_j; q)_\infty} \prod_{1 \leq i < j < k \leq 4} \frac{1}{(a_i a_j a_k; q)_\infty}. \end{aligned} \quad (1)$$

ただし $z_3 = z_1^{-1} z_2^{-1}$ で, 積分路は $\mathbb{T}^2 = \{(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid |z_i| = 1 \ (i = 1, 2)\}$ を表す.

註. 前回の日本数学会で, 講演者らと宮永愛子は, (1) の左辺の積分でパラメータ a_k の個数を増やしたものを成分とする行列の行列式に関する結果を報告した. その行列式も無限積表示があり, 公式 (1) は自然に拡張される. その具体形については [1] を参照のこと.

G_2 型楕円 Gustafson 積分.

本講演のタイトルは公式 (1) の楕円化のことを指している. 公式 (1) の楕円化については, 2007年2月に講演者の一人がその予想を Spiridonov に伝え, 後に Spiridonov–Vartanov がそのことを論文中 ([13, p. 213, 予想 (36)] または [12, p. 859, 予想 (13.1) = (13.2)] の説明を参照のこと) に記しているが, 長らく証明は得られていなかった. 今回, q -差分 de Rham の方法を使って, その証明を与えたことを報告する.

本研究は科研費 [課題番号: (B)15H03626, (C)18K03339] の助成を受けたものである.

Ruijsenaars の楕円ガンマ函数は

$$\Gamma(x; p, q) = \frac{(pq/x; p, q)_\infty}{(x; p, q)_\infty}, \quad (x; p, q)_\infty = \prod_{i,j=0}^{\infty} (1 - p^i q^j x) \quad (|p| < 1, |q| < 1)$$

により定義される. また記号 $\Gamma(x_1, \dots, x_k; p, q) = \Gamma(x_1; p, q) \cdots \Gamma(x_k; p, q)$ を用いる.

定理. $a_k \in \mathbb{C}^*$ ($1 \leq k \leq 5$) は $|a_k| < 1$ を満たすとする. $z_1 z_2 z_3 = 1$ とし, 平衡条件

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 = pq$$

の下で以下が成立する:

$$\begin{aligned} & \frac{(p; p)_\infty^2 (q; q)_\infty^2}{12 (2\pi\sqrt{-1})^2} \iint_{\mathbb{T}^2} \frac{\prod_{i=1}^3 \prod_{k=1}^5 \Gamma(a_k z_i, a_k z_i^{-1}; p, q)}{\prod_{1 \leq i < j \leq 3} \Gamma(z_i z_j, z_i^{-1} z_j, z_i z_j^{-1}, z_i^{-1} z_j^{-1}; p, q)} \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \\ &= \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma(a_i^2; p, q)}{\Gamma(a_i; p, q)} \prod_{1 \leq i < j \leq 5} \Gamma(a_i a_j; p, q) \prod_{1 \leq i < j < k \leq 5} \Gamma(a_i a_j a_k; p, q) \prod_{1 \leq i < j < k < l \leq 5} \Gamma(a_i a_j a_k a_l; p, q). \end{aligned} \quad (2)$$

註. $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = \sqrt{pq}$ のとき, $\Gamma(z; p, q) = 1/\Gamma(pq/z; p, q)$ を使うと, 公式 (2) の右辺は

$$\prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma(a_i^2; p, q)}{\Gamma(a_i; p, q) \Gamma(a_i \sqrt{pq}; p, q)} \prod_{1 \leq i < j \leq 5} \frac{\Gamma(a_i a_j; p, q)}{\Gamma(a_i a_j \sqrt{pq}; p, q)}$$

と変形できる [13, p. 213, 予想 (36)]. さらに, 公式 (2) において $a_5 \rightarrow a_5 \sqrt{p}$ とシフトした後で, $p \rightarrow 0$ の極限をとれば, 直ちに Gustafson の公式 (1) が得られる.

証明の概要. 公式 (2) の左辺の積分が満たす (パラメータに関する p または q シフトの) 差分方程式を求めることで, 左辺が右辺の因子に定数倍の違いを除き一致することを示す. 差分方程式はテータ函数の関係式として与えられる. また左辺の境界値を BC_1 型の場合の公式に帰着させることにより, 定数倍の部分の値を決定する. 講演では, 公式 (2) の左辺が満たす差分方程式の導出方法や, 境界値の求め方等を紹介する予定である.

参考文献

- [1] 伊藤, 宮永, 野海: G_2 型 Weyl 群不変な q 超幾何積分の行列式公式, 日本数学会 2018 年度年会 無限可積分系セッション (東大) 講演アブストラクト, 6–7.
- [2] 伊藤, 野海: Selberg 型 BC_n 楕円超幾何積分の行列式公式, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会 無限可積分系セッション (山形大) 講演アブストラクト, 17–18.
- [3] 伊藤, 野海: Gustafson–Rakha 和公式の楕円化, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会 無限可積分系セッション (関西大) 講演アブストラクト, 1–2.
- [4] 伊藤, 野海: BC 型楕円多重和公式の基本不変式による導出, 日本数学会 2015 年度年会 無限可積分系セッション (明治大) 講演アブストラクト, 9–10.
- [5] 高木貞治: 解析概論 改訂第三版, 岩波書店, 1961.
- [6] A. L. Dixon: Generalizations of Legendre’s formula $KE' - (K - E)K' = \frac{1}{2}\pi$, Proc. London Math. Soc. 3 (1905), 206–224.
- [7] M. Ito: Askey–Wilson type integrals associated with root systems, Ramanujan J. 12 (2006), 131–151.
- [8] M. Ito and M. Noumi: Derivation of a BC_n elliptic summation formula via the fundamental invariants, Constr. Approx. 45 (2017), 33–46.
- [9] M. Ito and M. Noumi: Evaluation of the BC_n elliptic Selberg integral via the fundamental invariants, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017) 689–703.
- [10] R. A. Gustafson: Some q -beta and Mellin–Barnes integrals on compact Lie groups and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 341 (1994), 69–119.
- [11] R. A. Gustafson: A summation theorem for hypergeometric series very-well-poised on G_2 , SIAM J. Math. Anal. 21 (1990), 510–522.
- [12] V. P. Spiridonov, G. S. Vartanov: Elliptic hypergeometry of supersymmetric dualities, Comm. Math. Phys. 304 (2011), 797–874.
- [13] V. P. Spiridonov, G. S. Vartanov: Superconformal indices for $\mathcal{N} = 1$ theories with multiple duals, Nuclear Phys. B 824 (2010), 192–216. [arXiv:0811.1909]

完全 WKB 解析と位相的漸化式

岩木 耕平 (名古屋大学多元数理科学研究科)*

概 要

Eynard-Orantin によって導入された位相的漸化式と完全 WKB 解析の関わりについて概説する. 特に, 位相的漸化式から計算される相関関数や自由エネルギーと, Schrödinger 型線形微分方程式の WKB 解や Voros 係数, さらに Painlevé 方程式の解 (τ -函数) との関係について述べる.

1. 背景

目標は位相的漸化式と呼ばれる枠組みが完全 WKB 解析に与える様々な知見について紹介することであるが, まず研究の背景として, WKB 解や Voros 係数の完全 WKB 解析における役割, また Painlevé 方程式の WKB 解析について説明しておきたい. 完全 WKB 解析の入門書として, [河竹] を挙げておくので, 詳細はそちらを参照して頂きたい.

1.1. WKB 解と Voros 係数

Voros ([V]) により創始された完全 WKB 解析 (exact WKB analysis) とは, (定常的)1次元 Schrödinger 方程式

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x) \right) \psi(x, \hbar) = 0 \quad (1.1)$$

のような, 小さなパラメータ \hbar (あるいは大きなパラメータ $\eta = \hbar^{-1}$) を含む特異摂動型の微分方程式に対する手法である. \hbar に関する形式級数として構成される (1.1) の WKB 解

$$\psi(x, \hbar) = \exp \left(\frac{1}{\hbar} \int^x \sqrt{Q(x)} dx - \frac{1}{4} \log Q(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^m \int^x S_m(x) dx \right) \quad (1.2)$$

の Borel 和として得られる解析的な解が主役である. Stokes グラフと呼ばれる x -平面内のグラフにより WKB 解の Borel 和の性質は規定され, 接続公式などを exact に記述できることが完全 WKB 解析の強みである.

以下, $Q(x)$ は有理函数であるとする. WKB 解の対数微分として得られる形式級数 $S(x, \hbar) = d \log \psi(x, \hbar) / dx = \sum_{m=-1}^{\infty} \hbar^m S_m(x)$ の各係数は漸化式

$$S_{-1}(x)^2 = Q(x), \quad 2S_{-1}(x)S_0(x) + \frac{dS_{-1}(x)}{dx} = 0, \quad (1.3)$$

$$2S_{-1}(x)S_{m+1}(x) + \sum_{\substack{m_1+m_2=m \\ m_1, m_2 \geq 0}} S_{m_1}(x)S_{m_2}(x) + \frac{dS_m(x)}{dx} = 0 \quad (1.4)$$

本研究は科研費 (課題番号:16K17613, 16H06337, 16K05177, 17H06127) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 34M60, 34M55, 81T45

キーワード: 完全 WKB 解析, Voros 係数, Painlevé 方程式, 位相的漸化式

* 〒464-8602 愛知県名古屋市長千種区不老町 名古屋大学多元数理科学研究科

e-mail: iwaki@math.nagoya-u.ac.jp

を満たしており、機能的に求めることができる。これらの係数は $\sqrt{Q(x)}$ を用いて表される 2 価関数であり、特に $Q(x)$ の零点に特異性を持っていることが特徴である。同じことだが、これらは $y^2 = Q(x)$ で定義される Riemann 面 Σ 上の有理型関数である。 Σ は (1.1) の古典極限と呼ばれ、元の x -平面の 2 重被覆である。

適当な仮定の下で、 $m \geq 1$ ならば、 $Q(x)$ の極を端とする $S_m(x)$ の積分が定義できる。特に、 $Q(x)$ のある特異点から特異点までの路 γ に沿った積分により得られる形式級数

$$V_\gamma(\hbar) = \int_\gamma (S(x, \hbar) - \hbar^{-1} S_{-1}(x) - S_0(x)) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^m \int_\gamma S_m(x) dx \quad (1.5)$$

は (1.1) の (γ に付随する) **Voros** 係数と呼ばれる。Voros 係数は、以下の点において完全 WKB 解析の研究において重要な概念である：

- モノドロミーの計算への応用: 完全 WKB 解析の顕著な応用として、(1.1) の形の 2 階線形微分方程式の (Stokes グラフが非退化という条件下で) 解の接続公式・モノドロミー行列の計算手法が与えられた ([佐青河竹, 河竹])。それによると、 Σ 上の周期積分 $\oint_\alpha S(x, \hbar) dx$ ($\alpha \in H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$) として定まる形式級数の Borel 和が、特性指数だけでは記述できないモノドロミー行列の非自明な成分を記述する。周期積分は (積分路を分割することで) いくつかの Voros 係数の和として表すことが可能であり、ゆえに Voros 係数は周期積分よりも基本的な対象であると同時に、複素領域上の微分方程式論において極めて重要な対象である。
- パラメトリック Stokes 現象の解析: Stokes グラフが退化した場合には、Borel 変換が持つ“動かない特異点”により WKB 解の Borel 総和可能性は損なわれる ([V, DDP])。この動かない特異点が引き起こす Stokes 現象はパラメトリック **Stokes** 現象と呼ばれる。(次の例 1.1 の方程式が含む λ のようなパラメータが変化する際に起こることが名前由来である。) 実はパラメトリック Stokes 現象の解析は Voros 係数の Borel 変換が持つ特異点の解析に帰着される (例えば [AKT, KoT])。また、パラメトリック Stokes 現象を記述する公式は完全 WKB 解析とクラスター代数との関係 ([IN]) においても重要であり、特に Voros 係数の指数 $\exp(V_\gamma)$ として得られる形式級数の Borel 和がクラスター変数を実現する。

例 1.1 $Q(x)$ が 2 次の多項式の場合、方程式 (1.1) は適当な変数変換で次の **Weber** 方程式に帰着できる：

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{x^2}{4} - \lambda \right) \right) \psi(x, \hbar) = 0. \quad (1.6)$$

ここで $\lambda \in \mathbb{C}$ は定数である。漸化式 (1.4) から初めの数項を求めると以下ようになる：

$$S_{-1}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 4\lambda}, \quad S_0(x) = -\frac{x}{2(x^2 - 4\lambda)}, \quad S_1(x) = -\frac{3x^2 - 8\lambda}{4(x^2 - 4\lambda)^{5/2}},$$

$$S_2(x) = -\frac{3x(x^2 + 6\lambda)}{(x^2 - 4\lambda)^4}, \quad S_3(x) = -\frac{297x^4 + 2928x^2\lambda + 1216\lambda^2}{16(x^2 - 4\lambda)^{11/2}}.$$

$S_1(x)$ 以降は $x \rightarrow \infty$ を端点とする積分が定義できることに注意されたい。特に $\lambda \neq 0$ の場合に、被覆写像 $\Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ による $x = \infty$ の異なる 2 つの逆像 ∞_1, ∞_2 を結ぶ路に対し

て定まる Weber 方程式 (1.6) の Voros 係数は次で与えられる ([T]):

$$V(\hbar) = \int_{\infty_2}^{\infty_1} \left(S(x, \hbar) - \hbar^{-1} S_{-1}(x) - S_0(x) \right) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2^{1-2m} - 1) B_{2m}}{2m(2m-1)} \left(\frac{\hbar}{\lambda} \right)^{2m-1}. \quad (1.7)$$

ここで, B_{2m} は Bernoulli 数であり, 次で定義される.

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} t^m.$$

Voros 係数 (1.7) の Borel 和はガンマ函数により与えられ, それが Weber 方程式 (1.6) の不確定特異点 $x = \infty$ の周りの Stokes 行列の非自明な成分を記述する. また, (1.7) の具体形を用いることで Borel 変換が持つ特異点における外来微分 (alien derivative) が計算でき, 結果としてパラメトリック Stokes 現象が exact に解析される. (この場合, [IN] により対応するクラスター代数は自明な A_1 -型となる.)

1.2. Painlevé 方程式

河合-竹井は, (1.1) のような特異摂動型線形方程式のモノドロミー保存変形 ([岡]) を考えることで, 非線形方程式である **Painlevé** 方程式に対する完全 WKB 解析の拡張を試みた ([KT], [河竹, §4]). 例えば, 小さなパラメータを含んだ Painlevé I 型方程式

$$(P_1) : \quad \hbar^2 \frac{d^2 q}{dt^2} = 6q^2 + t$$

は, 線形偏微分方程式系

$$\left[\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{x-q} \frac{\partial}{\partial x} - (4x^3 + 2tx + 2H) + \hbar \frac{p}{x-q} \right] \psi(x, t, \hbar) = 0 \quad (1.8)$$

$$\left[\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2(x-q)} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial x} - p \right) \right] \psi(x, t, \hbar) = 0 \quad (1.9)$$

(ただし $p = \hbar dq/dt$, $H = p^2/2 - 2q^3 - tq$) の両立条件を記述する. 河合-竹井は, (1.8) の WKB 解や Stokes グラフの性質などを元に, Painlevé 方程式の 2-パラメータ解を構成し, 変わり点や Stokes 曲線の概念を導入, そして変わり点における WKB 解析的変換論を確立するなど, Painlevé 方程式の非線形 Stokes 現象を論じる枠組みを整備した. 講演者も [I] において Painlevé 方程式に (非線形) Voros 係数の概念を導入してパラメトリック Stokes 現象を解析するなど, 多少貢献したつもりであるが, やはり 2-パラメータ解の解析的性質に関するさらなる研究が必要であると感じている¹. また, 完全 WKB 解析の枠組みにおいて, Painlevé 方程式の理論において非常に重要な τ -函数が果たすべき役割も明確でない. I 型の場合, (P_1) の解 $q(t, \hbar)$ に対して

$$\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} \log \tau(t, \hbar) = -q(t, \hbar) \quad (1.10)$$

として定まるのが τ -函数である. (q を Wierstrass の \wp -函数の類似と思つた際の, σ -函数の類似が τ -函数である.) 2012 年に Lisovsky らによって示された共形場理論を用いた 2-パラメータ解の構成² ([GIL]) との関係や, 明らかにすべきことは数多くある.

¹2018 年度年会 (於: 東京大学) の函数方程式論分科会の特別講演において, 竹井義次氏によりこの問題への楯円函数を用いた一つのアプローチが提唱された.

²Lisovsky らは確定特異点型である Painlevé VI 型方程式およびそのいくつかの合流により得られる Painlevé 方程式の τ -函数を構成した. 不確定特異点型の共形場理論を用いた τ -函数の構成については名古屋創氏により議論 (予想) されている ([N1, N2]) が, 最も不確定度が高い (P_1) については, 共形場理論を用いた 2-パラメータ解の構成法は現時点で知られていないようである.

1.3. 位相的漸化式との繋がり

ここまで、背景として完全 WKB 解析における Voros 係数の重要性、Painlevé 方程式の WKB 解析における現状について簡単に述べた。講演者は近年、完全 WKB 解析の理論の発展、および他分野への応用を目指し、数理物理分野で注目を集めている位相的漸化式 (topological recursion) と完全 WKB 解析との関係性を探っている。位相的漸化式とは、行列模型におけるループ方程式の一般化として、Eynard と Orantin に導入されたものであり、与えられた代数曲線から“相関関数”や“分配関数 (自由エネルギー)”と呼ばれる量を機能的に与えるアルゴリズムである。具体的な定義は次節で紹介する。

位相的漸化式と WKB 解析の関係については 2012 年ごろから [GS, DM, BE] などでも明らかにされてきた。それらの先行研究に触発され、[IKoT] では超幾何微分方程式、およびその合流によって得られる 2 階の線形微分方程式の Voros 係数が³、古典極限として得られる代数曲線から位相的漸化式により定まる自由エネルギーの差分として記述できることを明らかにした (神戸大学の小池達也氏、竹井優美子氏との共同研究)。特に、(1.7) に現れた Bernoulli 数が³、実は Harer-Zagier ([HZ]) による Riemann 面のモジュライ空間の Euler 標数の表示に現れる Bernoulli 数と同じ起源を持つことなどが明らかになった (例 2.5 参照)。また Painlevé 方程式については、[IM, IMS, IS] において、0-パラメータ解³ $q(t, \hbar) = \sum_{m=0}^{\infty} \hbar^m q_m(t)$ に対応する τ -関数

$$\tau(t, \hbar) = \exp \left(\sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} F_g(t) \right) \quad (1.11)$$

も位相的漸化式の分配関数として計算できることを示した (Lyon の Oliver Marchal 氏、Virginia の Axel Saenz 氏との共同研究)。これらの事実は全て、「WKB 解を定める漸化式 (1.4) の中に位相的漸化式が含まれている」という観測に基づいている。講演ではこれらの結果を紹介したい。

2. Eynard-Orantin の位相的漸化式と量子曲線

[EO1] で導入された位相的漸化式は、数学的には「コンパクト Riemann 面 \mathcal{C} およびその上の 2 つの有理型関数 x, y の組が与えられたとき、 \mathcal{C} の直積空間上の微分形式の族 $\{W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)\}_{g \geq 0, n \geq 1}$ と数列 $\{F_g\}_{g \geq 0}$ を帰納的に定める漸化式」である。行列模型の言葉を流用して、インプットとして与えられるデータ (\mathcal{C}, x, y) はスペクトル曲線、アウトプットの $W_{g,n}$ は相関関数、 F_g は自由エネルギーとそれぞれ呼ばれる。位相的漸化式は一見しても何が計算されているのか分からない不思議な漸化式であるが、適切に選ばれたスペクトル曲線から様々な幾何学的不変量が $W_{g,n}$ や F_g として計算されており (例 2.4 参照)、それ故にこの漸化式は研究者の興味を集めている。[EO2] は位相的漸化式のレビュー論文であるので、興味を持たれた方はそちらも参照されたい。

2.1. 位相的漸化式

位相的漸化式とは、次のスペクトル曲線を初期データとする漸化式である。

定義 2.1 ([BE, Definition 2.1]; cf. [EO1, §3]) コンパクト Riemann 面 \mathcal{C} 、および有理型関数 $x, y : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ であって、 dx と dy が共通零点を持たないようなものの組 (\mathcal{C}, x, y) をスペクトル曲線と呼ぶ。

³ 積分定数を含まないのこのように呼ばれる。これは 2-パラメータ解を最も退化させたものである。

以下では $C = \mathbb{P}^1$ で、 z をその標準的な座標とし、 x, y が z の有理関数である場合のみを考える。また、 R を写像 $x : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ の分岐点 (dx の零点または x の2位以上の極) 全体の集合とし、分岐点は全て単純であることも仮定しておく。この仮定により、各 $r \in R$ の近傍における z の局所共役点 \bar{z} ($x(z) = x(\bar{z})$ かつ $y(z) \neq y(\bar{z})$ を満たす点) が定まる。これらの準備の下、位相的漸化式は次のように定式化される。

定義 2.2 ([EO1, Definition 4.2]) 与えられたスペクトル曲線 (C, x, y) から、以下の漸化式で定まる C 上の有理型多重微分 $W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ ($g \geq 0, n \geq 1$) を、 (g, n) -型の相関関数と呼ぶ:

$$W_{0,1}(z_1) = y(z_1)dx(z_1), \quad (2.1)$$

$$W_{0,2}(z_1, z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2}, \quad (2.2)$$

$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{r \in R} \operatorname{Res}_{z=r} K_r(z_0, z) \left[W_{g-1, n+1}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1, \dots, n\}}} W_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) W_{g_2, 1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right]. \quad (2.3)$$

ここで、

$$K_r(z_0, z) = \frac{1}{2} \frac{\int_{w=\bar{z}}^{w=z} W_{0,2}(w, z_0)}{(y(z) - y(\bar{z}))dx(z)} \quad (2.4)$$

であり、また (2.3) の最後の和は $\{1, \dots, n\}$ の (空集合も許す) 任意の分割に関する和であり、 $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_m$) とすると $W_{g, m+1}(z, z_I) = W_{g, m+1}(z, z_{i_1}, \dots, z_{i_m})$ である。また、和における $'$ は $(g_1, I) = (0, \emptyset)$ および $(g_2, J) = (0, \emptyset)$ なる場合を除外することを意味する。

注意 1 ここでは $C = \mathbb{P}^1$ の場合を扱っているが、一般に C の種数が高い場合は $(H_1(C, \mathbb{Z}))$ のシンプレクティック基底を固定した上で $W_{0,2}(z_1, z_2)$ を Bergman 核 ([EO1, §3.1.5]) と呼ばれる有理型双微分に選ぶ。(2.2) は \mathbb{P}^1 上の Bergman 核に他ならない。

位相的漸化式は、点付き Riemann 面の退化 (図 2.1) を模式的に表していると解釈でき、特に $\chi = 2g - 2 + n$ に関する漸化式になっている。相関関数 $W_{g,n}$ は以下の性質を持つことが知られている ([EO1]):

- $W_{g,n}$ は各変数 z_i について C 上の有理型微分であり、 $2g - 2 + n \geq 1$ ならば $C \setminus R$ 上で正則。(特に、 $x(z)$ の極が分岐点でなければ、そこで $W_{g,n}$ は正則になる。)
- $W_{g,n}$ は変数 z_1, \dots, z_n に関して対称 (変数の任意の置換の下で不変)。
- $x(z)$ および $y(z)$ がある複素パラメータ λ に正則に依存している場合、(スペクトル曲線に対する仮定がみたされるような λ -平面の領域上で) $W_{g,n}$ は λ に関して正則。さらに、そのパラメータ λ がある条件を満たせば、 $W_{g,n}$ の λ に関する微分を記述する公式を書き下すことができる ([EO1, §5])。

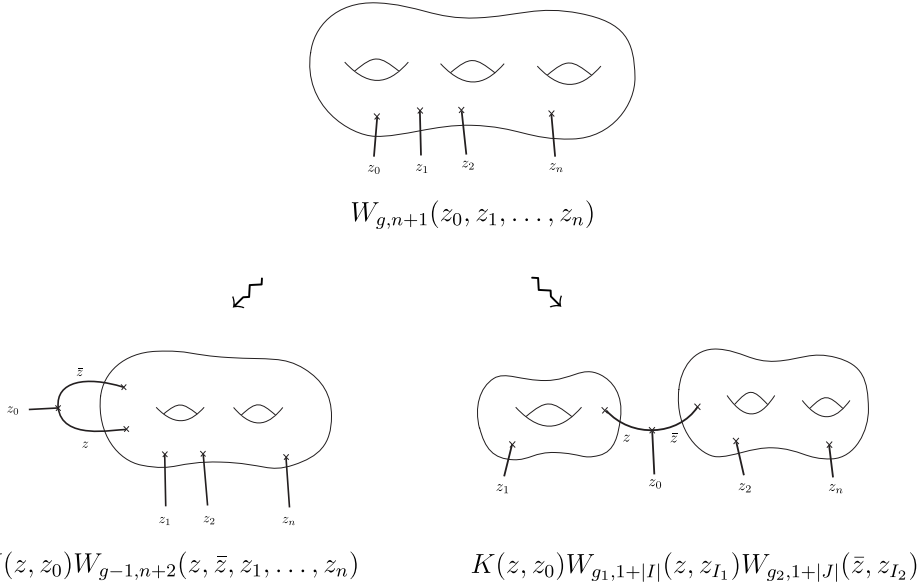


図 2.1: 位相的漸化式と点付き Riemann 面の退化.

定義 2.3 ([EO1, Definition 4.3]) スペクトル曲線 (\mathcal{C}, x, y) に対して, 次で定まる $F_g \in \mathbb{C}$ を (種数 g の) 自由エネルギーと呼ぶ:

$$F_g = \frac{1}{2-2g} \sum_{r \in R} \operatorname{Res}_{z=r} \Phi(z) W_{g,1}(z) \quad (g \geq 2). \quad (2.5)$$

ここで, $z_0 \in \mathcal{C} \setminus R$ を一般の点として, $\Phi(z) = \int_{z_0}^z y(z) dx(z)$ である. $g = 0, 1$ に対する自由エネルギー F_0, F_1 は, 上とは異なる方法で定義される ([EO1, §4.2.2, §4.2.3] 参照).

F_g は, スペクトル曲線の, $dx \wedge dy$ を保つあるクラスの変換の下で不変なのでシンプレクティック不変量とも呼ばれる ([EO1, Section 7]). F_g の母関数

$$F(\hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} F_g \quad (2.6)$$

も自由エネルギーと呼ばれ, その指数 $Z = \exp(F)$ は分配函数と呼ばれる.

例 2.4 Airy 曲線

$$x(z) = z^2, \quad y(z) = z \quad (2.7)$$

($R = \{0, \infty\}$, $\bar{z} = -z$) をスペクトル曲線に選ぶと, $2g - 2 + n \geq 1$ に対して

$$W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2^{3g-3+n}} \sum_{\substack{d_1 + \dots + d_n \\ = 3g-3+n}} \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g,n} \prod_{i=1}^n \frac{(2d_i - 1)!!}{z_i^{2d_i+1}} dz_i \quad (2.8)$$

となる ([E]). ここで, $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g,n} \in \mathbb{Q}$ は (1 点 {pt} をターゲットとする) Gromov-Witten 不変量と呼ばれる量で, 種数 g の点付き Riemann 面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上の交叉理論を用いて定義される ([Kon]): $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g,n} = \int_{\mathcal{M}_{g,n}} c_1(\mathcal{L}_1)^{d_1} \dots c_1(\mathcal{L}_n)^{d_n}$. Airy 曲線の種数が高い自由エネルギーは自明である: $F_g = 0$ ($g \geq 2$).

例 2.5 Weber 曲線

$$x(z) = \lambda^{1/2}(z + z^{-1}), \quad y(z) = \frac{\lambda^{1/2}}{2}(z - z^{-1}) \quad (2.9)$$

($\lambda \in \mathbb{C}^*$ は定数, $R = \{1, -1\}$, $\bar{z} = z^{-1}$) をスペクトル曲線に選ぶと, $g \geq 2$ に対して

$$F_g = \chi(\mathcal{M}_g)\lambda^{2-2g} \quad (2.10)$$

となる. ここで,

$$\chi(\mathcal{M}_g) = \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \quad (2.11)$$

は種数 g の Riemann 面のモジュライ空間の Euler 標数であり, 上のように Bernoulli 数を用いて表されることが知られている ([HZ]).

2.2. 量子曲線

ここ数年, WKB 解析と位相的漸化式を結びつける量子曲線 (quantum curve) の理論が急速に発展した ([GS, DM, BE]). これは, 「スペクトル曲線が [BE] の意味で admissible であれば, $W_{g,n}$ の積分の母函数がある微分方程式の WKB 解になっている」ことを主張しており, 特にその微分方程式の古典極限として定まる Riemann 面 (のパラメータ表示) がまさにインプットのスペクトル曲線となっているので上の呼び名がついた. これは WKB 解の係数が満たす漸化式が位相的漸化式と密接に関わっていることを意味している. 例えば, Airy 曲線に関しては次の事実が知られている.

定理 2.6 ([Z]) Airy 曲線 (2.7) から定まる相関函数を $W_{g,n}$ とし,

$$\begin{aligned} \psi(x, \hbar) = \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int^z W_{0,1}(z) + \frac{1}{2} \int^z \int^z \left(W_{0,2}(z_1, z_2) - \frac{dx(z_1)dx(z_2)}{(x(z_1) - x(z_2))^2} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{g \geq 0, n \geq 1 \\ 2g-2+n \geq 1}} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n!} \int_\infty^z \cdots \int_\infty^z W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \right] \Big|_{z=z(x)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

(ただし $z(x) = \sqrt{x}$ は, 分岐点を除いて定まる $x: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の逆函数) は, Airy 方程式

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - x \right) \psi = 0 \quad (2.13)$$

の WKB 解である.

この定理は, WKB 解の係数が満たす漸化式 (1.4) と位相的漸化式 (2.3) を比較することで証明される. Airy 方程式の WKB 解の係数は有理数として順に定まってゆくが, 上の結果は ((2.8) に現れているように) それがモジュライ空間上での交叉理論という, 一見無関係にも見える幾何学的背景を持っていることを表しており, 非常に興味深い. また, $\psi(x, \hbar)$ が満たす微分方程式 (2.13) の古典極限として生じる代数曲線 $y^2 - x = 0$ をパラメータ表示したものがまさに Airy 曲線 (2.7) である. このような理由で, (2.12) なる形の形式級数が満たす微分方程式 (2.13) は量子曲線と呼ばれるのである⁴.

ここで, 「完全 WKB 解析において重要な Voros 係数の, 位相的漸化式における対応物は何か?」という自然な問いが生じる. 次節では, 超幾何微分方程式およびその合流で得られる 2 階の微分方程式に対して, この課題に関する解答を与える.

⁴ただし, 一般には (2.12) の形の母函数が満たす Schrödinger 型の微分方程式のポテンシャルは $Q = Q_0(x) + \hbar Q_1(x) + \hbar^2 Q_2(x) + \cdots$ のように \hbar -補正が必要である. スペクトル曲線が [BE] の admissibility という仮定を満たせばこの補正項は高々有限個の項からなることが知られている.

3. Voros 係数と自由エネルギー

この節では [IKoT] の主結果を、次の方程式を例にとって紹介する:

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x, \hbar) \right) \psi = 0, \quad Q(x, \hbar) = \frac{x + 4\lambda^2}{4x^2} - \hbar^2 \frac{1}{4x^2}. \quad (3.1)$$

これは Bessel 方程式と同値な Schrödinger 型方程式であるので、ここでは Bessel 方程式と呼ぶことにする. ([IKoT] では Gauss の超幾何微分方程式およびその合流で得られる方程式に対して、ここで紹介するものと同様の結果を得ている.) λ は零でない複素パラメータとする. この方程式の古典極限 $y^2 = (x + 4\lambda^2)/(4x^2)$ を、

$$x(z) = 4\lambda^2(z^2 - 1), \quad y(z) = \frac{z}{4\lambda(z^2 - 1)} \quad (3.2)$$

とパラメータ表示することでスペクトル曲線とみなし、それを Bessel 曲線と呼ぶことにする. ($R = \{0, \infty\}$, $\bar{z} = -z$.) $W_{g,n}$ および F_g を、Bessel 曲線 (3.2) から定まる相関関数および自由エネルギーとする. この時、次が成り立つ:

定理 3.1 ([IKoT, §4])

(a) 形式級数

$$\begin{aligned} \psi(x, \hbar) = \exp & \left[\frac{1}{\hbar} \int^z W_{0,1}(z) + \frac{1}{2} \int^z \int^z \left(W_{0,2}(z_1, z_2) - \frac{dx(z_1)dx(z_2)}{(x(z_1) - x(z_2))^2} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{g \geq 0, n \geq 1 \\ 2g-2+n \geq 1}} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n! 2^n} \int_{\bar{z}}^z \cdots \int_{\bar{z}}^z W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \right] \Big|_{z=z(x)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

は Bessel 方程式 (3.1) の WKB 解である.

(b) Bessel 方程式 (3.1) の古典極限 Σ 上で $x = 0$ に対応する 2 点間を結ぶ路に沿った積分として定まる Bessel 方程式 (3.1) の Voros 係数 $V(\lambda, \hbar)$ と、Bessel 曲線 (3.2) の自由エネルギー $F(\lambda, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} F_g(\lambda)$ の間には、次の関係式が成立する:

$$V(\lambda, \hbar) = F\left(\lambda + \frac{\hbar}{2}, \hbar\right) - F\left(\lambda - \frac{\hbar}{2}, \hbar\right) - \hbar^{-1} \frac{\partial F_0(\lambda)}{\partial \lambda}. \quad (3.4)$$

(c) Bessel 曲線 (3.2) の自由エネルギーは 3 項間漸化式

$$F(\lambda + \hbar, \hbar) - 2F(\lambda, \hbar) + F(\lambda - \hbar, \hbar) = -\log \left(256\lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{\hbar^2}{\lambda^2} \right) \right) \quad (3.5)$$

を満たす. これを解くことで、 F_g の具体形が次のように求まる:

$$F_g(\lambda) = -\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \frac{1}{(2\lambda)^{2g-2}} \quad (g \geq 2) \quad (3.6)$$

量子曲線の公式 (3.3) と、自由エネルギーのパラメータに関する微分公式から (3.4) を導く、というのが証明の方針である. 超幾何方程式やその合流から得られる方程式に対しても、古典極限が定めるスペクトル曲線の自由エネルギーに対して (3.6) と同様の明

示公式が与えられる. 例えば Gauss の超幾何微分方程式のスペクトル曲線の自由エネルギーは (特性指数 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_\infty$ が一般的な場合に) 次で与えられる

$$F_g = \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \left\{ \frac{1}{(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_\infty)^{2g-2}} + \frac{1}{(\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_\infty)^{2g-2}} + \frac{1}{(\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_\infty)^{2g-2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{(\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_\infty)^{2g-2}} - \frac{1}{(2\lambda_0)^{2g-2}} - \frac{1}{(2\lambda_1)^{2g-2}} - \frac{1}{(2\lambda_\infty)^{2g-2}} \right\} \quad (g \geq 2)$$

これより Voros 係数の Bernoulli 多項式を用いた明示的な表示を得ることもできる. 一般に, 一つの方程式から積分路を指定するごとに複数の Voros 係数が定まるが, それらはいずれも (スペクトル曲線から標準的に定義される) 自由エネルギーの様々なパラメータに関する差分として得られており, ゆえに自由エネルギーは Voros 係数よりも内在的な量である.

4. Painlevé 方程式の τ -関数と分配関数

Painlevé 方程式の τ -関数が完全 WKB 解析の枠組みでどのように自然に理解されるべきか, という問いの答えに講演者はまだ辿り着いていないが, 少なくとも §2 で紹介した位相的漸化式と WKB 解析の関係性の中から, 分配関数として τ -関数が現れることは [IM, IS, IMS] で証明できた. ここでは (P_1) を例にとり, 特に [IS] の結果を紹介する.

(P_1) の 0-パラメータ解 $q(t, \hbar) = \sum_{m=0}^{\infty} \hbar^m q_m(t)$ が係数に代入された線形方程式 (1.8) の古典極限として定まる代数曲線は

$$y^2 = 4(x - q_0(t))^2(x + 2q_0(t)) \quad (4.1)$$

(ただし $q_0(t) = \sqrt{-t/6}$) のように 2 重点を持つ種数 0 の曲線となっている⁵. これを

$$x(z) = z^2 - 2q_0(t), \quad y(z) = 2z(z^2 - 3q_0(t)) \quad (4.2)$$

とパラメータ表示することでスペクトル曲線 (の, Painlevé 方程式の独立変数 t でパラメータ付けらえた変形族) とみなし, 位相的漸化式を適用して $W_{g,n}$ および F_g を定義する. ただし, $t = 0$ においては dx と dy が共通零点を持ち, スペクトル曲線の仮定を満たさないので, 以下では $t \neq 0$ とする. (ちなみに, この除外された $t = 0$ は [KT] の意味での (P_1) の変わり点である.) 以上の準備の下, 次が成り立つ.

定理 4.1 ([IS])

(a) 形式級数

$$\psi(x, t, \hbar) = \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int^z W_{0,1}(z) + \frac{1}{2} \int^z \int^z \left(W_{0,2}(z_1, z_2) - \frac{dx(z_1)dx(z_2)}{(x(z_1) - x(z_2))^2} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{g \geq 0, n \geq 1 \\ 2g-2+n \geq 1}} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n! 2^n} \int_{\bar{z}}^z \cdots \int_{\bar{z}}^z W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \right] \Big|_{z=z(x)} \quad (4.3)$$

は, 0-パラメータ解が代入された偏微分方程式系 (1.8), (1.9) の WKB 解である.

⁵ 次数の勘定からは種数 1 の楕円曲線になると期待されるが, 実際は (4.1) のように退化する. 他の全ての Painlevé 方程式についても, 0-パラメータ解を扱う限りは同様に古典極限は種数 0 で 2 重点を持っている. このとは [KT] で明らかにされた.

(b) スペクトル曲線(4.2)が定める分配関数

$$\exp(F(t, \hbar)) = \exp\left(\sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} F_g(t)\right) \quad (4.4)$$

は (P_1) の τ -関数である. すなわち, 次が成り立つ:

$$q(t, \hbar) = -\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} F(t, \hbar) \quad (4.5)$$

上の結果 (a) は, (P_1) に付随する線形方程式 (1.8) は量子曲線であることを意味している. 特に, 係数に含まれる q や p は \hbar -展開を持つので, 量子曲線 (1.8) は無限個の \hbar -補正項を持っている. その補正項が Painlevé 方程式の解の展開係数により統制されていることなどを明らかにしたことが, 従来の量子曲線の結果との大きな違いである. [BCD] で議論されているように, admissible でないスペクトル曲線に対する量子曲線の理論の構築は難航しているようだが, 個人的には Painlevé 方程式が規定するような変形理論を用いた \hbar -補正項のコントロールが有効であると感じている.

神保-三輪-上野 ([JMU]) は, Painlevé 方程式に付随する線形方程式系 (1.8), (1.9) の解から τ -関数を得る公式を与えたが, それが位相的漸化式におけるある公式と整合的であり, 従って結果 (a) の系として後者の τ -関数に関する結果 (b) が従う. ちなみに, 結果 (b) は [IMS] において 6 種類全ての Painlevé 方程式に対して拡張されている. ただし, これらは全て, 0-パラメータ解という, Painlevé 方程式の解の初期値空間の中のある特別な 1 点に対する結果であり, より一般の解への結果の拡張は重要な課題として残っている.

ここまで見たように, Voros 係数や Painlevé 方程式との関係における位相的漸化式は, 今のところ形式級数としての性質を記述する理論であった. 形式級数の計算を越えて, 解析的なモノドロミー保存変形や Riemann-Hilbert 問題に, 位相的漸化式の枠組みが如何に応用されるのかを探ることは興味深い話題であるように思う. そして, そこには (ここでは触れられなかった) 完全 WKB 解析による exact な Stokes 現象の解析など, 日本の研究グループが得意とする手法が有効に活用されるであろう, と期待している.

参考文献

- [AKT] Aoki, T., Kawai, T. and Takei, Y., The Bender-Wu analysis and the Voros theory, II, *Adv. Stud. Pure Math.* **54** (2009), Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009, pp. 19–94.
- [BCD] Bouchard, V., Chidambaram, N. and Dauphinee, T., Quantizing Weierstrass; arXiv:1610.00225.
- [BE] Bouchard, V. and Eynard, B., Reconstructing WKB from topological recursion, *Journal de l'Ecole polytechnique – Mathématiques*, **4** (2017), pp. 845–908.
- [DDP] Delabaere, E., Dillinger, H. and Pham, F., Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptique, *Annales de l'Institut Fourier*, **43** (1993), 163–199.
- [DM] Dumitrescu, O. and Mulase, M., Lectures on the topological recursion for Higgs bundles and quantum curves; arXiv:1509.09007.
- [E] Eynard, B., Intersection numbers of spectral curves; arXiv:1104.0176.
- [EO1] Eynard, B. and Orantin, N., Invariants of algebraic curves and topological expansion, *Communications in Number Theory and Physics*, **1** (2007), pp. 347–452; arXiv:math-ph/0702045.
- [EO2] Eynard, B. and Orantin, N., Topological recursion in enumerative geometry and random matrices, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009), 293001 (117pp).

- [GIL] Gamayun, O., Iorgov, N. and Lisovyy, O., Conformal field theory of Painlevé VI, *JHEP* **10** (2012), 038; arXiv:1207.0787.
- [GS] Gukov, S. and Sulkowski, P., A-polynomial, B-model, and quantization, *JHEP*, **2012** (2012), 70.
- [HZ] Harer, J. and Zagier, D., The Euler characteristic of the moduli space of curves, *Invent. Math.*, **85** (1986), 457–485.
- [I] Iwaki, K. Parametric Stokes phenomenon for the second Painlevé equation with a large parameter, *Funkcial. Ekvac.*, **57** (2014), 173–243.
- [IKoT] Iwaki, K., Koike, T. and Takei, Y., Voros Coefficients for the Hypergeometric Differential Equations and Eynard-Orantin’s Topological Recursion; arXiv:1805.10945.
- [IM] Iwaki, K. and Marchal, O., Painlevé 2 equation with arbitrary monodromy parameter, topological recursion and determinantal formulas, *Ann. Henri Poincaré*, **18** (2017), 2581–2620; arXiv:1411.0875.
- [IMS] Iwaki, K., Marchal, O. and Saenz, A., Painlevé equations, topological type property and reconstruction by the topological recursion, *J. Geom. Phys.*, **124** (2018), 16–54; arXiv:1601.02517.
- [IN] Iwaki, K. and Nakanishi, T., Exact WKB analysis and cluster algebras, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), 474009.
- [IS] Iwaki, K. and Saenz, A., Quantum Curve and the First Painlevé Equation, *SIGMA.*, (12), 2016; arXiv:1507.06557.
- [JMU] Jimbo, M., Miwa, T. and Ueno, K., Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and τ -function, *Phys. D* **2** (1981), 306–352.
- [KT] Kawai, T. and Takei, Y., WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. I, *Adv. Math.* **118** (1996), 1–33.
- [KoT] Koike, T. and Takei, Y., On the Voros coefficient for the Whittaker equation with a large parameter – Some progress around Sato’s conjecture in exact WKB analysis, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **47** (2011), pp. 375–395.
- [Kon] Kontsevich, M., Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, *Comm. Math. Phys.*, **147** (1992), 1–23.
- [N1] Nagoya, H., Irregular conformal blocks, with an application to the fifth and fourth Painlevé equations, *J. Math. Phys.* **56** (2015), 123505; arXiv:1505.02398.
- [N2] Nagoya, H., Remarks on irregular conformal blocks and Painlevé III and II tau functions; arXiv:1804.04782.
- [T] Takei, Y., Sato’s conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, *RIMS Kôkyûrôku Bessatsu*, **B10** (2008), pp. 205–224.
- [V] Voros, A., The return of the quartic oscillator – The complex WKB method, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **39** (1983), pp. 211–338.
- [Z] Zhou, J., Intersection numbers on Deligne-Mumford moduli spaces and quantum Airy curve; arXiv:1206.5896.
- [岡] 岡本和夫, パンルヴェ方程式, 岩波書店, 2009.
- [河竹] 河合隆裕, 竹井義次., 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 1998.
(English version: Kawai, T. and Takei, Y., *Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory*, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs, vol. 227. 2005.)
- [佐青河竹] 佐藤幹夫, 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析, 数理研講究録 **750**. 1991, PP. 43–51 (金子晃記).

Jacobian matrices of Y-seed mutations and mutation networks

水野勇磨 (東工大情報理工)*

1. Y種子とミューテーション列

Fomin と Zelevinsky の導入したクラスター代数は多くの数学の分野と関係しながら発展してきた。クラスター代数の理論において中心的な役割を果たすものの一つに Y 種子のミューテーションがあり, [FZ07] において詳しく調べられている。

正の整数 n を固定する。組 (B, Y) が Y 種子 (Y-seed) であるとは, $B = (B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ が反対称化可能な $n \times n$ 行列で $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ が y_1, \dots, y_n 上の引き算を含まない有理関数の n つ組であるときをいう。各 $1 \leq k \leq n$ に対して Y 種子の変異 (mutation) μ_k とは, 次で定まる Y 種子の変換 $(B, Y) \mapsto \mu_k(B, Y) = (\tilde{B}, \tilde{Y})$ である:

$$\tilde{B}_{ij} = \begin{cases} -B_{ij} & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ B_{ij} + B_{ik}B_{kj} & \text{if } B_{ik} > 0 \text{ and } B_{kj} > 0, \\ B_{ij} - B_{ik}B_{kj} & \text{if } B_{ik} < 0 \text{ and } B_{kj} < 0, \\ B_{ij} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\tilde{Y}_i = \begin{cases} Y_k^{-1} & \text{if } i = k, \\ Y_i(Y_k^{-1} + 1)^{-B_{ki}} & \text{if } i \neq k, B_{ki} \geq 0, \\ Y_i(Y_k + 1)^{-B_{ki}} & \text{if } i \neq k, B_{ki} \leq 0. \end{cases}$$

$m = (m_1, \dots, m_T)$ を $\{1, \dots, n\}$ 内の整数の列として, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_T)$ を $\{1, \dots, n\}$ の置換の列とする。このとき, $(B(0), Y(0)) = (B, y)$ を初期 Y 種子とする Y 種子の遷移が得られる:

$$(B(0), Y(0)) \xrightarrow{\sigma_1 \circ \mu_{m_1}} (B(1), Y(1)) \xrightarrow{\sigma_2 \circ \mu_{m_2}} \dots \xrightarrow{\sigma_T \circ \mu_{m_T}} (B(T), Y(T)).$$

ここで, 置換の作用は $\sigma_t(B)_{ij} = B_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}$ および $\sigma(Y)_i = Y_{\sigma^{-1}(i)}$ によって定める。

f_γ を $f_\gamma(y) = Y(T)$ によって定めて, $J_\gamma(y)$ をそのヤコビ行列とする:

$$J_\gamma(y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

ここで, f_i は $f_\gamma(y)$ の i 番目の成分とする。さらに, $n \times n$ 行列 $K_\gamma(y)$ を次で定める:

$$K_\gamma(y) = \begin{pmatrix} f_1(y) & & \\ & \ddots & \\ & & f_n(y) \end{pmatrix}^{-1} J_\gamma(y) \begin{pmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{pmatrix}.$$

本研究は科研費(課題番号:JP18J22576)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 13F60, 57M27

キーワード: cluster algebras

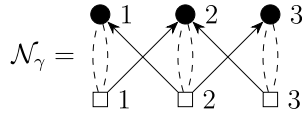
* 〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系
e-mail: mizuno.y.aj@m.titech.ac.jp

2. ミューテーション・ネットワーク

ミューテーション列 γ から、ミューテーション・ネットワークと呼ばれるグラフ \mathcal{N}_γ を定義することができる。ミューテーション・ネットワークはもともとは場の理論の研究において導入された [TY14]。定義は講演で説明するが、例えば γ をミューテーション列

$$\underline{1} \rightarrow 2 \rightarrow 3 \xrightarrow{\mu_1} 1 \leftarrow \underline{2} \rightarrow 3 \xrightarrow{\mu_2} 1 \rightarrow 2 \leftarrow \underline{3} \xrightarrow{\mu_3} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

としたときは(ただし、反対称可能行列をクイバーを用いて表している),



となる。ミューテーション・ネットワークは二種類の頂点(四角の頂点と黒丸の頂点)および三種類の辺(点線と四角から黒丸への矢印と黒丸から四角への矢印)からなる。辺の種類が三つあることから、 γ の隣接行列として三つの行列 N_0, N_+ および N_- を得る。上の例においては

$$N_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。これらの行列が $T \times T$ の正方行列であるとき、 γ を fully-mutated という。

3. 主定理

ミューテーション・ネットワークの隣接行列を用いて、二つの行列 A_+, A_- を定める:

$$A_+ = N_0 - N_+, A_- = N_0 - N_-.$$

また、各 $t = 1, \dots, T$ について $z_{t,+}$ および $z_{t,-}$ を次で定める:

$$z_{t,+} = \frac{Y_{m_t}}{Y_{m_t} + 1}, z_{t,-} = \frac{1}{Y_{m_t} + 1}.$$

ここで、簡単のため $Y_{m_t}(t-1)$ を Y_{m_t} と書いた。 $Z_+(y)$ および $Z_-(y)$ を $T \times T$ の対角行列で、 t 番目の成分がそれぞれ $z_{t,+}$ および $z_{t,-}$ であるものとする。

Theorem 1 ([M]). γ を fully mutated なミューテーション列とする。このとき

$$\det(I_n - K_\gamma(y)) = \det(A_+ Z_-(y) + A_- Z_+(y)).$$

この公式は Y 種子の遷移の最後の状態から得られる値と、ミューテーションが行われる場所での情報から得られる値を結びつける公式になっている。特に、定理の左辺は $n \times n$ 行列であり、定理の右辺は $T \times T$ 行列である。さらに、左辺は $Y(T)$ にしかよらない値であるが、右辺がそうであることは定義からはまったく明らかではない。

参考文献

[FZ07] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. IV. Coefficients*, *Compos. Math.* **143** (2007), no. 1, 112–164.

[M] Y. Mizuno, *Jacobian matrices of Y -seed mutations*, <http://arxiv.org/abs/1805.00044>.

[TY14] Y. Terashima and M. Yamazaki, *$\mathcal{N} = 2$ theories from cluster algebras*, *PTEP* **2014** (2014), no. 2, 023B01.

劣正則分割とグレイシャー対応

安東雅訓 (奈良学園大学)

1 始めに

本稿では、水川-山田 [1] における定理の組合せ論的な解釈を行う。講演の方では r -版から r -版とした定理の拡張も紹介する。

2 分割

自然数の広義減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell), \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell \geq 1$ を分割と呼ぶ。成分の個数 $\ell(\lambda) := \ell$ を λ の長さ、成分の総和 $|\lambda| := \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i$ を λ の大きさと呼ぶ。分割全体の集合を \mathcal{P} 、大きさ n の分割全体の集合を $\mathcal{P}(n)$ で表す。また分割 λ に対し、 λ の持つ成分 k の個数を $m_k(\lambda)$ で表す。 $(1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} \dots)$ を λ の別表示とし、同じ分割を表わすものとする。

\mathcal{P} の部分集合、

$$\mathcal{RP}_r = \{\lambda \in \mathcal{P} \mid \forall k, m_k(\lambda) < r\}, \mathcal{CP}_r = \{\lambda \in \mathcal{P} \mid \forall k, m_{rk}(\lambda) = 0\}.$$

をそれぞれ r -正則分割、 r -類正則分割の集合と呼ぶ。次の結果はよく知られている。

命題 2.1. 任意の自然数 n, r に対し、次が成り立つ。

$$\#\mathcal{RP}_r(n) = \#\mathcal{CP}_r(n).$$

二つの集合の間の全単射写像としてグレイシャー対応 g_r が知られている。 r -類正則分割 λ に対し、同じ大きさの成分が r 個以上あればそれらを結合し r 倍の大きさの成分とする。これを操作が出来なくなるまで繰り返し、得られた分割が $g_r(\lambda)$ である。またこのときの結合の回数を $c_r(\lambda)$ で表す。 λ が $\mathcal{CP}_r(n)$ 全体を動くときの $c_r(\lambda)$ の総和を $c_{r,n}$ で表す。

例. $r = 2, \lambda = (1^7)$

$$(1^7) \mapsto (21^5) \mapsto (2^2 1^3) \mapsto (2^3 1) \mapsto (421) = g_2(1^7).$$

従って、 $c_2(1^7) = 4$.

$\mathcal{P}(n)$ の別の部分集合、

$$\mathcal{R}'\mathcal{P}_r = \{\lambda \in \mathcal{P} \mid \exists k, m_k \geq r\}.$$

を考える。これは r 個以上現れる成分が丁度 1 種である分割全体の集合であり、 r -劣正則分割の集合と呼ぶ。 $\mathcal{R}'\mathcal{P}_r(n)$ と $c_{r,n}$ の間には次の関係がある。

命題 2.2. 2 以上の自然 r に対し、次が成り立つ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{r,n} q^n = \sum_{\lambda \in \mathcal{CP}_r} c_r(\lambda) q^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{R}'\mathcal{P}_r} q^{|\lambda|} = \frac{(q^r; q^r)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} \sum_{k \geq 1} \frac{q^{rk}}{1 - q^{rk}}.$$

3 水川-山田の $X - Y$

定義 3.1. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell) = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$, $j \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ に対し、

$$x_{r,j}(\lambda) := \#\{i \mid \lambda_i \equiv j \pmod{r}\} = \sum_{k \equiv j \pmod{r}} m_k(\lambda), \quad y_{r,j}(\lambda) := \#\{i \mid m_i(\lambda) \geq j\},$$

$$X_{r,j,n} := \sum_{\lambda \in \mathcal{CP}_r(n)} x_{r,j}(\lambda), \quad Y_{r,j,n} := \sum_{\lambda \in \mathcal{RP}_r(n)} y_{r,j}(\lambda).$$

定理 3.2 (水川-山田 [1]). $X_{r,j,n} - Y_{r,j,n}$ の値は j に依らずに決まり、その値は $c_{r,n}$ に等しい。

次の集合を考えよう。

$$A_{r,j,n} := \{(\lambda; k, \ell) \mid \lambda \in \mathcal{CP}_r(n), k \equiv j \pmod{r}, 1 \leq \ell \leq m_k\}.$$

各分割 λ が $x_{r,j}(\lambda)$ 回現れていることが分り、 $\#A_{r,j,n} = X_{r,j,n}$. ここから $\mathcal{P}(n)$ への次の写像を考える。

$$\begin{array}{ccc} \varphi_r : A_{r,j,n} & \longrightarrow & \mathcal{P}(n) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\lambda; k, \ell) & \longmapsto & \mu \end{array}.$$

ここで、 $\mu = g_r(\lambda \setminus (k^\ell)) \cup (\ell^k)$ という、「 λ から長方形を引き抜いた後に、グレイシャー対応で移し、抜いた長方形をひっくり返して戻す」写像である。このとき、

定理 3.3. $\varphi_r(A_{r,j,n}) \subset \mathcal{R}'\mathcal{P}_r(n) \sqcup \mathcal{RP}_r(n)$ ^{*1} であり、像の重複度は、 $\mathcal{R}'\mathcal{P}_r(n)$ の部分は全て 1、 $\mathcal{RP}_r(n)$ の部分は各分割 μ で $y_{r,j}(\mu)$ 。

系 3.4. 任意の j に対し次が成り立つ。

$$X_{r,j,n} = |A_{r,j,n}| = |\mathcal{R}'\mathcal{P}_r(n)| + \sum_{\mu \in \mathcal{RP}_r(n)} y_{r,j}(\mu) = c_{r,n} + Y_{r,j,n}.$$

参考文献

- [1] Mizukawa H. and Yamada H.-F., Arithmetic identities for class regular partitions, *Hokkaido Math. J.* 47 (2018), 205-221.

^{*1} = としたいところだが、 $y_{r,j}(\mu) = 0$ となる μ と j の組合せがある。

Matrix inversion for Koornwinder polynomials with one-column diagram

星野歩 (広工大工)
白石潤一 (東大数理)

1. Four-fold summation formula for Koornwinder polynomials with one-column diagram

n を正の整数, $x = (x_1, \dots, x_n)$ を変数とする. a, b, c, d, q, t を Askey-Wilson/Koornwinder 多項式のパラメタとする. $P_{(1^r)}(x|a, b, c, d|q, t)$ を一列型分割 (1^r) ($0 \leq r \leq n$) に対する Koornwinder 多項式とする.

Definition 1.1. 対称な Laurent 多項式 $E_r(x)$ を次で定める :

$$\prod_{i=1}^n (1 - yx_i)(1 - y/x_i) = \sum_{r \geq 0} (-1)^r E_r(x) y^r.$$

Theorem 1.2.

$$P_{(1^r)}(x|a, b, c, d|q, t) = \sum_{k, l, i, j \geq 0} (-1)^{i+j} E_{r-2k-2l-i-j}(x) \tilde{\mathcal{C}}_e(k, l; t^{n-r+1+i+j}) \hat{c}_o(i, j; t^{n-r+1}),$$

ここに

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_e(k, l; s) &= \frac{(tc^2/a^2; t^2)_k (sc^2t; t^2)_k (s^2c^4/t^2; t^2)_k (1/c^2; t)_l (s/t; t)_{2k+l}}{(t^2; t^2)_k (sc^2/t; t^2)_k (s^2a^2c^2/t; t^2)_k (t; t)_l (sc^2; t)_{2k+l}} \frac{1 - st^{2k+2l-1}}{1 - st^{-1}} a^{2k} c^{2l}, \\ \hat{c}_o(i, j; s) &= \frac{(-a/b, s, sac/t, sad/t, scd/t, -s^2a^2cd/t^3; t)_i}{(t, s^2abcd/t^2; t)_i (-s^2a^2cd/t^3, -s^2a^2cd/t^2; t^2)_i} b^i \\ &\quad \times \frac{(-c/d, t^i s, -t^i sa^2/t, t^{2i} s^2 a^2 c^2/t^3; t)_j}{(t, t^{2i} s^2 a^2 cd/t^2; t)_j (t^{2i} s^2 a^2 c^2/t^3; t^2)_j} d^j. \end{aligned}$$

2. Matrix inversion for Koornwinder polynomials with one-column diagram

下三角行列 $\mathcal{M}(u, v; x, y; q)$ を次で定める :

$$\mathcal{M}_{r, r-2i}(u, v; x, y; q) = y^i v^i \frac{(x/y; q)_i}{(q; q)_i} \frac{(uq^{r-2i}; q)_{2i}}{(uq^{r-i}; q)_i (uyq^{r-2i+1}; q)_i} \quad (r, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor).$$

このとき, $\mathcal{M}(u, v; x, y; q) \mathcal{M}(u, v; y, x; q) = \mathcal{M}(u, v; x, z; q)$ を満たす ([B], p.1, Theorem, [L], p.5, Corollary). 特に, $\mathcal{M}(u, v; x, y; q)$ と $\mathcal{M}(u, v; y, x; q)$ は互いに逆行列となる.

ここで, $d(u, v)_r$ と下三角行列 $\tilde{\mathcal{M}}(u, v; x, y; t)$ を次で定める :

$$\begin{aligned} d(u, v)_r &= \frac{(t^2 v^{1/2}; t)_r}{(u^{1/2}; t)_r} (u^{1/4}/v^{3/4})^r, \\ \tilde{\mathcal{M}}_{r, r-2i}(u, v; x, y; t) &= \mathcal{M}_{r, r-2i}(u, v; x, y; t^2) \times d(u, v)_r / d(u, v)_{r-2i} \\ &= \frac{(x/y; t^2)_i}{(t^2; t^2)_i} \frac{(v^{1/2} t^{r-2i+2}; t)_{2i}}{(u^{1/2} t^{r-2i}; t)_{2i}} \frac{(ut^{2r-4i}; t^2)_{2i}}{(uxt^{2r-2i}; t^2)_i (uyt^{2r-4i+2}; t^2)_i} (yu^{1/2}/v^{1/2})^i. \end{aligned}$$

本研究は科研費 (課題番号 16K05186 および 15K04808) の助成を受けたものである.

このとき, $\widetilde{\mathcal{M}}(u, v; x, y; t)$ と $\widetilde{\mathcal{M}}(u, v; y, x; t)$ は互いに逆行列となる.

同様に, 行列 $\mathcal{B}(x, y; q)$ を次で定める:

$$\mathcal{B}_{i,j}(x, y; q) = y^{i-j} \frac{(x/y; q)_{i-j}}{(q; q)_{i-j}} \frac{1}{(xq^{i+j}; q)_{i-j} (yq^{2j+1}; q)_{i-j}}.$$

このとき, $\mathcal{B}(x, y; q)$ と $\mathcal{B}(y, x; q)$ は互いに逆行列となる ([K], p.3, Corollary).

ここで, $g(\mathbf{u}, v)_r$ と下三角行列 $\mathcal{N}(\mathbf{u}, v; x, y; t)$ ($\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$) を次で定める:

$$g(\mathbf{u}, v)_r = v^{-r} (u_1; t)_r (u_2; t)_r (u_3; t)_r (u_4; t)_r,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{r,r-i}(\mathbf{u}, v, x, y; t) &= \mathcal{B}_{r,r-i}(xv, yv; t) \times g(\mathbf{u}, v)_r / g(\mathbf{u}, v)_{r-i} \\ &= y^i \frac{(x/y; t)_i (u_1 t^{r-i}; t)_i (u_2 t^{r-i}; t)_i (u_3 t^{r-i}; t)_i (u_4 t^{r-i}; t)_i}{(t; t)_i (xvt^{2r-i}; t)_i (yvt^{2r-2i+1}; t)_i} \quad (r, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}). \end{aligned}$$

このとき, $\mathcal{N}(\mathbf{u}, v; x, y; t)$ と $\mathcal{N}(\mathbf{u}, v; y, x; t)$ は互いに逆行列となる.

Theorem 2.1. Koornwinder 多項式のパラメタを1つずつ特殊化すると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} &P_{(1^r)}(x|a, b, c, d|q, t) \\ &= \sum_{i \geq 0} \mathcal{N}_{r,r-i}(-1/b, 1/a, -t^{-2n+1}/acd, t^{-n}, t^{-n+1}/ac, t^{-n+1}/ad, t^{-n+1}/cd; t) \\ &\quad \times P_{(1^{r-i})}(x|a, -a, c, d|q, t), \\ &P_{(1^r)}(x|a, -a, c, d|q, t) \\ &= \sum_{j \geq 0} \mathcal{N}_{r,r-j}(-1/d, 1/c, t^{-2n+1}/a^2c, t^{-n}, t^{-n+1}/a^2, t^{-n+1}/ac, -t^{-n+1}/ac; t) \\ &\quad \times P_{(1^{r-j})}(x|a, -a, c, -c|q, t), \\ &P_{(1^r)}(x|a, -a, c, -c|q, t) \\ &= \sum_{k \geq 0} \widetilde{\mathcal{M}}_{r,r-2k}(t^{-2n+2}/c^4, t^{-2n-4}, c^2/ta^2, 1/t^2; t) P_{(1^{r-2k})}(x|t^{1/2}c, -t^{1/2}c, c, -c|q, t), \\ &P_{(1^r)}(x|t^{1/2}c, -t^{1/2}c, c, -c|q, t) = \sum_{l \geq 0} \mathcal{M}_{r,r-2l}(t^{-n}, t, 1/c^2, 1; t) E_{r-2l}(x). \end{aligned}$$

以上より, 次を得る.

$$\begin{aligned} &P_{(1^r)}(x|a, b, c, d|q, t) \\ &= \sum_{i,j,k,l \geq 0} \mathcal{N}_{r,r-i}(-1/b, 1/a, -t^{-2n+1}/acd, t^{-n}, t^{-n+1}/ac, t^{-n+1}/ad, t^{-n+1}/cd; t) \\ &\quad \times \mathcal{N}_{r-i,r-i-j}(-1/d, 1/c, t^{-2n+1}/a^2c, t^{-n}, t^{-n+1}/a^2, t^{-n+1}/ac, -t^{-n+1}/ac; t) \\ &\quad \times \widetilde{\mathcal{M}}_{r-i-j,r-i-j-2k}(t^{-2n+2}/c^4, t^{-2n-4}, c^2/ta^2, 1/t^2; t) \\ &\quad \times \mathcal{M}_{r-i-j-2k,r-i-j-2k-2l}(t^{-n}, t, 1/c^2, 1; t) E_{r-i-j-2k-2l}(x). \end{aligned}$$

参考文献

- [B] D. M. Bressoud, A matrix inverse, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 446–448.
- [K] C. Krattenthaler, A new matrix inverse. Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 47–59.
- [L] M. Lassalle, Some conjectures for Macdonald polynomials of type B, C, D . Sem. Lothar. Combin. **52**, (2004), Art. B52h, 24 pp. (electronic).

量子トロイダル代数に付随する (q, t) -KZ 方程式

末武一馬 (名古屋大学)

粟田英資 (名古屋大学)

菅野浩明 (名古屋大学)

量子トロイダル代数は、共形場理論において重要な変形 W 代数を内包している。一方で量子トロイダル代数の表現論は超対称ゲージ理論と密接に関係する。4次元超対称ゲージ理論におけるインスタントン解の数え上げ母関数である Nekrasov 分配関数が、2次元共形場理論の相関関数に一致するという AGT 対応が知られているが、量子トロイダル代数の表現論を考える事は (拡張された)AGT 対応の実現を与えている。その具体例として本講演では、量子トロイダル代数の絡作用素から構成される相関関数が KZ 方程式の差分版である (q, t) -KZ 方程式に従い、Nekrasov 関数とその解を与えること [3]、また一般の A_n 型量子トロイダル代数への拡張が ALE_n 空間上のゲージ理論へ対応する事 [4] を紹介する。

以下 \mathcal{U} により A_n 型量子トロイダル代数 ($n \in \mathbb{N}$) を表す。 \mathcal{U} はパラメタとして (q, \mathfrak{d}) もしくは (q_1, q_3) を持ち、便宜に応じて使い分ける。 \mathcal{U} には余積構造が定義でき、これを Δ により表す。 \mathcal{U} の表現として $\mathcal{F}_u^{(0,1)}$, $\mathcal{F}_u^{(1,N)}$ がよく知られている。ここで $u \in \mathbb{C}$ は表現が持つパラメタ、 $N \in \mathbb{Z}$ である。詳細は省略するが $\mathcal{F}_u^{(0,1)}$ は分割 λ によりパラメタ付けられた基底 $\{|\lambda\rangle\}$ をもち、 $\mathcal{F}_u^{(1,N)}$ は自由場表示で与えられる [4]。

\mathcal{U} の絡作用素 Φ および双対絡作用素 Φ^*

$$\begin{aligned} \Phi(v) : \mathcal{F}_v^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_u^{(1,N)} &\rightarrow \mathcal{F}_w^{(1,N+1)}, & a\Phi &= \Phi\Delta(a), & a \in \mathcal{U}, \\ \Phi^*(v) : \mathcal{F}_w^{(1,N+1)} &\rightarrow \mathcal{F}_u^{(1,N)} \otimes \mathcal{F}_v^{(0,1)}, & \Delta(a)\Phi^* &= \Phi^*a, & a \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

に対して、その λ -成分 $\Phi^\lambda : \mathcal{F}_u^{(1,N)} \rightarrow \mathcal{F}_w^{(1,N+1)}$, $\Phi_\lambda^* : \mathcal{F}_w^{(1,N+1)} \rightarrow \mathcal{F}_u^{(1,N)}$ を

$$\Phi^\lambda = \Phi(|\lambda\rangle \otimes \bullet), \quad \Phi^* = \sum_\lambda \Phi_\lambda^*(\bullet) \otimes |\lambda\rangle$$

により定義する。非自明な事実として、 $w = -uv$ においてのみこのような作用素が存在し、自由場表示を用いて書き下せる事が知られている [2][4]。 $\mathcal{F}_v^{(0,1)}$ の最低重みベクトル $|\emptyset\rangle$ とその双対 $\langle\emptyset|$ を用いて絡作用素の積からなる相関関数を

$$\mathcal{G}^{(n,m)} = \mathcal{G}^{(n,m)}(v|\vec{z}, \vec{\lambda}; \vec{w}, \vec{\mu}) = \langle\emptyset|\Phi_{\mu_1}^*(w_1) \cdots \Phi_{\mu_m}^*(w_m)\Phi^{\lambda_1}(z_1) \cdots \Phi^{\lambda_n}(z_n)|\emptyset\rangle$$

により定義すると次の差分方程式系 ((q, t) -KZ 方程式) が得られる [3][4]:

$$\begin{aligned} q^{-2z_k\partial_{z_k} + v\partial_v} \cdot \mathcal{G}^{(n,m)} \\ = q^{(n-m)|\lambda_k|_0} \prod_{\ell=1}^m \mathcal{R}_{\lambda_k\mu_\ell}(z_k/qw_\ell)^{-1} \prod_{i<k} \mathcal{R}_{\lambda_k\lambda_i}(z_k/q^2z_i) \prod_{k<j} \mathcal{R}_{\lambda_j\lambda_k}(z_j/z_k)^{-1} \mathcal{G}^{(n,m)}, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{-2w_k\partial_{w_k} - v\partial_v} \cdot \mathcal{G}^{(n,m)} \\ = q^{(m-n)|\mu_k|_0} \prod_{i<k} \mathcal{R}_{\mu_k\mu_i}(w_k/w_i) \prod_{k<j} \mathcal{R}_{\mu_j\mu_k}(q^2w_j/w_k)^{-1} \prod_{\ell=1}^n \mathcal{R}_{\lambda_\ell\mu_k}(qz_\ell/w_k) \mathcal{G}^{(n,m)}. \quad (2) \end{aligned}$$

ここで $|\lambda|_0 = \#\{(i, j) \in \lambda \mid i - j \equiv 0\}$, $\mathcal{R}_{\lambda\mu}(z)$ は絡作用素の正規積から得られる因子

$$\mathcal{R}_{\lambda\mu}(z) = \mathfrak{q}^{-H(\lambda, \mu)} \frac{\tilde{G}_{\lambda\mu}(z)}{\tilde{G}_{\lambda\mu}(\mathfrak{q}^{-2}z)}, \quad \Phi_\mu^*(w)\Phi^\lambda(z) = \tilde{G}_{\lambda\mu}(\mathfrak{q}^{-1}z/w) : \Phi_\mu^*(w)\Phi^\lambda(z) ;,$$

$H(\lambda, \mu) = \#\{s \in \lambda \mid h_{\mu, \lambda}(s) \equiv 0\} + \#\{t \in \mu \mid h_{\lambda, \mu}(t) \equiv 0\}$, $h_{\lambda, \mu}(s) = a_\mu(s) + \ell_\lambda(s) + 1$ は相対フック長である. ただし \equiv は n を法とした等号を意味する. 本講演では (q, t) -KZ 方程式 (1),(2) が, Kac-Moody 代数に対する通常の KZ 方程式と同様のアイデアで導出出来る事を紹介する.

また (q, t) -KZ 方程式 (1),(2) の解は次式で与えられる:

$$\mathcal{G}^{(n, m)}(v \mid \vec{z}, \vec{\lambda}; \vec{w}, \vec{\mu}) = v^{|\vec{\lambda}|_0 - |\vec{\mu}|_0} \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m F_{\lambda_i \mu_j} \left(\mathfrak{q}^{-1} \frac{z_i}{w_j} \right)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} F_{\lambda_j \lambda_i} \left(\mathfrak{q}^{-2} \frac{z_j}{z_i} \right) \prod_{1 \leq k < \ell \leq m} F_{\mu_\ell \mu_k} \left(\frac{w_\ell}{w_k} \right)},$$

$$F_{\lambda\mu}(z) = z^{-\frac{1}{2}(H(\lambda, \mu) + |\mu|_0 - |\lambda|_0)} \tilde{G}_{\lambda\mu}(z).$$

さらに規格化された因子 $G_{\lambda\mu}(z) = \tilde{G}_{\lambda\mu}(z)/\tilde{G}_{\emptyset\emptyset}(z)$, $G_{\emptyset\emptyset}(z) = 1$ は ALE 空間における Nekrasov 因子 [5]

$$N_{\lambda\mu}(u; q_1, q_3) = \prod_{\substack{s \in \lambda \\ h_{\mu, \lambda}(s) \equiv 0}} (1 - u q_1^{a_\lambda(s)} q_3^{-\ell_\mu(s) - 1}) \prod_{\substack{t \in \mu \\ h_{\lambda, \mu}(t) \equiv 0}} (1 - u q_1^{-a_\mu(t) - 1} q_3^{\ell_\lambda(t)}).$$

に一致する事が証明できる: $G_{\lambda\mu}(u) = N_{\lambda\mu}(u)$. すなわち (q, t) -KZ 方程式 (1),(2) の解は Nekrasov 分配函数により与えられる.

今後の課題として (q, t) -KZ 方程式 (1),(2) の更なる解析が求められる.

参考文献

- [1] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, J. Alg. **380**, 78 – 108 (2013).
- [2] H. Awata, B. Feigin and J. Shiraishi, JHEP **1203**, 041 (2012)
- [3] H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov, Y. Ohkubo and Y. Zenkevich, Phys. Rev. D **96**, no. 2, 026021 (2017)
- [4] H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, K. Suetake and Y. Zenkevich, JHEP **1803**, 192 (2018)
- [5] S. Fujii and S. Minabe, SIGMA **13**, 052 (2017)

On Guay's evaluation map for affine Yangians

小寺 諒介 (神戸大学 大学院理学研究科)

1. アファインヤングリアン

N を 3 以上の整数とする. アファインヤングリアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ は二つのパラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{C}$ を持ち, 次の生成元と関係式で定義される結合代数である.

生成元: $x_{i,r}^+, x_{i,r}^-, h_{i,r}$ ($i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

関係式:

$$\begin{aligned} [h_{i,r}, h_{j,s}] &= 0, & [x_{i,r}^+, x_{j,s}^-] &= \delta_{ij} h_{i,r+s}, & [h_{i,0}, x_{j,r}^\pm] &= \pm a_{ij} x_{j,r}^\pm, \\ [h_{i,r+1}, x_{j,s}^\pm] - [h_{i,r}, x_{j,s+1}^\pm] &= \pm a_{ij} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \{h_{i,r}, x_{j,s}^\pm\} - m_{ij} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} [h_{i,r}, x_{j,s}^\pm], \\ [x_{i,r+1}^\pm, x_{j,s}^\pm] - [x_{i,r}^\pm, x_{j,s+1}^\pm] &= \pm a_{ij} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \{x_{i,r}^\pm, x_{j,s}^\pm\} - m_{ij} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} [x_{i,r}^\pm, x_{j,s}^\pm], \\ \sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [x_{i,r_{w(1)}}^\pm, [x_{i,r_{w(2)}}^\pm, \dots, [x_{i,r_{w(1-a_{ij})}}^\pm, x_{j,s}^\pm] \dots]] &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

但し $\{x, y\} = xy + yx$ とし, $a_{ij} = 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}$, $m_{ij} = \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}$ とする. 以下では $\hbar = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ とおく.

2. evaluation 写像

$\hat{\mathfrak{gl}}_N = \mathfrak{gl}_N \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ を \mathfrak{gl}_N に付随するアファイン Lie 代数とする. c は中心元である. $\hat{\mathfrak{gl}}_N$ の元 $X \otimes t^s$ ($X \in \mathfrak{gl}_N$) を $X(s)$ と略記する. また, $E_{i,j}$ を (i, j) 成分が 1 で他が 0 の $N \times N$ 行列とし, \mathfrak{gl}_N の元と見なす. $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の Chevalley 生成元を x_i^\pm, h_i ($i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$) とする. 主定理の定式化には, $U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$ の適切な完備化 $U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)_{\text{comp},+}$ が必要となる. 詳しくは [K2, Definition 2.5] を見よ.

定理 1 ([G], [K2] Theorem 3.8) K, α を複素数とし, パラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ に関する条件 $(K + N)\varepsilon_1 = -K\varepsilon_2$ を仮定する. このとき, 次を満たす代数準同型 $\text{ev}_\alpha^+: Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N) \rightarrow U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)_{\text{comp},+}/(c - K)$ がただ一つ存在する.

$$\begin{aligned} \text{ev}_\alpha^+(x_{i,0}^+) &= x_i^+, & \text{ev}_\alpha^+(x_{i,0}^-) &= x_i^-, & \text{ev}_\alpha^+(h_{i,0}) &= h_i, \\ \text{ev}_\alpha^+(x_{i,1}^+) &= \begin{cases} (\alpha - N\varepsilon_1)x_0^+ + \hbar \sum_{s \geq 0} \sum_{k=1}^N E_{N,k}(-s)E_{k,1}(s+1) & (i=0), \\ (\alpha - i\varepsilon_1)x_i^+ \\ + \hbar \sum_{s \geq 0} \left(\sum_{k=1}^i E_{i,k}(-s)E_{k,i+1}(s) + \sum_{k=i+1}^N E_{i,k}(-s-1)E_{k,i+1}(s+1) \right) & (i \neq 0), \end{cases} \\ \text{ev}_\alpha^+(x_{i,1}^-) &= \begin{cases} (\alpha - N\varepsilon_1)x_0^- + \hbar \sum_{s \geq 0} \sum_{k=1}^N E_{1,k}(-s-1)E_{k,N}(s) & (i=0), \\ (\alpha - i\varepsilon_1)x_i^- \\ + \hbar \sum_{s \geq 0} \left(\sum_{k=1}^i E_{i+1,k}(-s)E_{k,i}(s) + \sum_{k=i+1}^N E_{i+1,k}(-s-1)E_{k,i}(s+1) \right) & (i \neq 0), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{ev}_\alpha^+(h_{i,1}) = \begin{cases} (\alpha - N\varepsilon_1)h_0 - \hbar E_{N,N}(E_{1,1} - K) \\ + \hbar \sum_{s \geq 0} \sum_{k=1}^N \left(E_{N,k}(-s)E_{k,N}(s) - E_{1,k}(-s-1)E_{k,1}(s+1) \right) & (i=0), \\ (\alpha - i\varepsilon_1)h_i - \hbar E_{i,i}E_{i+1,i+1} \\ + \hbar \sum_{s \geq 0} \left(\sum_{k=1}^i E_{i,k}(-s)E_{k,i}(s) + \sum_{k=i+1}^N E_{i,k}(-s-1)E_{k,i}(s+1) \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^i E_{i+1,k}(-s)E_{k,i+1}(s) - \sum_{k=i+1}^N E_{i+1,k}(-s-1)E_{k,i+1}(s+1) \right) & (i \neq 0) \end{cases}$$

この写像は、ここに書いたものとは少し異なる表示で Guay [G, Section 6, pp. 462–463] によって導入されたが、

- 論文には証明はなく、
- パラメータに関する条件が必要なことも書かれていなかった。

論文 [K1] でその性質を調べるにあたり、[K2] で表示を整理し改めて証明を与えた。

3. evaluation 加群

$(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$ を \mathfrak{gl}_N のドミナント整ウエイト、 K を正の整数とし、付随する $\hat{\mathfrak{gl}}_N$ のレベル K のドミナント整ウエイトを Λ とする。最高ウエイト Λ を持つ可積分既約最高ウエイト加群を $L(\Lambda)$ とし、その最高ウエイトベクトルを v_Λ とする。定理 1 により、 $(K+N)\varepsilon_1 = -K\varepsilon_2$ の条件の下で $L(\Lambda)$ は $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ 加群の構造を持つ。さらに、[K1, Corollary 4.19] により、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \neq 0$ の下でこの加群は既約である。

定理 2 ([K2] Theorem 4.1) すべての $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ と $r \geq 0$ に対して

$$x_{i,r}^+ v_\Lambda = 0, \quad h_{i,r} v_\Lambda = a_i^r \langle h_i, \Lambda \rangle v_\Lambda$$

が成り立つ。但し

$$a_i = \begin{cases} \alpha + (\lambda_N + K)\hbar & (i=0), \\ \alpha + \left(\lambda_i + \frac{i}{N}K \right) \hbar & (i \neq 0) \end{cases}$$

である。

謝辞

この研究は JSPS 科研費 17H06127, 18K13390 の助成を受けたものです。

参考文献

- [G] Nicolas Guay, *Affine Yangians and deformed double current algebras in type A*, Adv. Math. **211** (2007), no. 2, 436–484.
- [K1] Ryosuke Kodera, *Braid group action on affine Yangian*, arXiv:1805.01621.
- [K2] Ryosuke Kodera, *On Guay's evaluation map for affine Yangians*, arXiv:1806.09884.

Hodge 積分と位相的頂点

中津 了勇 (摂南大学理工学部)

高崎 金久 (近畿大学理工学部)

A conjectural formula expressing the generating series of three-partition Hodge integrals in terms of topological vertex of topological string theory is proved. The proof is given by utilizing the recent result on quantum torus symmetry of random skew plane partition.

1. Three-partition Hodge 積分とその生成母関数

$\mathcal{M}_{g,n}$ を種数 g の n 点付き連結リーマン面のモジュライ空間, $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ を $\mathcal{M}_{g,n}$ のドリーニュ・マンフォードのコンパクト化とする. モジュライ空間上の積分

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{i_1} \cdots \psi_n^{i_n} \lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_g^{j_g}$$

を Hodge 積分と総称する. $\psi_i = c_1(\mathbb{L}_i)$, $\lambda_j = c_j(\mathbb{E})$ はモジュライ空間の自然な複素線束 \mathbb{L}_i と Hodge 束 \mathbb{E} のチャーン類を表し, これらを ψ -類, λ -類と言う. Three-partition Hodge 積分は 3 つの整数分割を組み入れた Hodge 積分である. 整数分割 $\mu^{(a)} = (\mu_i^{(a)})_{i=1}^\infty$ ($a = 1, 2, 3$) をまとめて, $\vec{\mu} = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)})$ で表す. $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ を満たす $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ を変数とする, 非負整数 g と $\vec{\mu}$ でラベル付けされた関数

$$G_{g, \vec{\mu}}(\vec{w}) = \frac{(\sqrt{-1})^{l(\vec{\mu})}}{|\text{Aut}(\vec{\mu})|} \prod_{a=1}^3 \prod_{i=1}^{l(\mu^{(a)})} \left\{ w_{a+1} \prod_{j=1}^{\mu_i^{(a)}} \left(1 + \frac{\mu_i^{(a)} w_{a+1}}{j w_a} \right) \right\} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g, l(\vec{\mu})}} \prod_{a=1}^3 \frac{\bigwedge_g^\vee(w_a) w_a^{l(\mu^{(a)})-1}}{\prod_{i=1}^{l(\mu^{(a)})} (w_a - \mu_i^{(a)} \psi_i^{(a)})}, \quad (1)$$

$$l(\vec{\mu}) = \sum_{a=1}^3 l(\mu^{(a)}), \quad \text{Aut}(\vec{\mu}) = \prod_{a=1}^3 \text{Aut}(\mu^{(a)}),$$

$$\psi_i^{(a)} = c_1(\mathbb{L}_i^{(a)}), \quad i = 1, 2, \dots, l(\mu^{(a)}), \quad \bigwedge_g^\vee(u) = u^g - \lambda_1 u^{g-1} + \cdots + (-1)^g \lambda_g$$

を three-partition Hodge 積分という. その生成母関数を次のようにパラメタ λ と $p^{(a)} = (p_k^{(a)})_{k=1}^\infty$ を用いて定める:

$$G(\lambda; \vec{p}; \vec{w}) = \sum_{\vec{\mu}} G_{\vec{\mu}}(\lambda; \vec{w}) \prod_{a=1}^3 p_{\mu^{(a)}}^{(a)}, \quad (2)$$

$$\vec{p} = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}), \quad G_{\vec{\mu}}(\lambda; \vec{w}) = \sum_{g=0}^\infty \lambda^{2g-2+l(\vec{\mu})} G_{g, \vec{\mu}}(\vec{w}), \quad p_{\mu^{(a)}}^{(a)} = \prod_{i=1}^{l(\mu^{(a)})} p_{\mu_i^{(a)}}^{(a)}.$$

2. 生成母関数の還元公式とシューア関数展開

特殊値 $\vec{w}_* = (1, 1, -2)$ において $\vec{\mu} = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)})$ の Hodge 積分は $\vec{\mu} = (\emptyset, \mu^{(1)} \cup \mu^{(2)}, \mu^{(3)})$ の場合に帰着する. $\vec{\mu}$ の 1 つ以上の分割が空であるものは two-(one-)partition Hodge 積分と呼ばれる (研究対

象としての時系列は逆順である). よって, three-partition Hodge 積分と two-partition Hodge 積分の生成母関数の間には \vec{w}_* で成り立つ直接的な関係がある. これは生成母関数 (2) が \vec{w}_* で満たす関係式

$$\exp\left(G(\lambda; (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}); \vec{w}_*)\right) = \exp\left(G(\lambda; (0, p^+, p^{(3)}); \vec{w}_*)\right) \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} p_m^{(1)} p_{2m}^{(2)}\right), \quad (3)$$

$$p^+ = (p_k^+)_{k=1}^{\infty}, \quad p_k^+ = (-1)^{k-1} p_k^{(1)} + p_k^{(2)}$$

にまとめられる. 右辺の乗数因子は形式的に導入した安定でない代数曲線 ($g = 0, n = 2$) に起因する異常項である.

J. Li, C. C. M. Li, K. Liu, J. Zhou は生成母関数 (2) の \vec{w} -依存性を決定した. 彼らは Hodge 積分 (1) が \mathbb{C}^3 の相対グロモフ・ウィッテン不変量の部分として現れるにも関わらず, 不変量自体が \vec{w} に依らないことを示し, その事実を用いて累乗化した生成母関数 (非連結リーマン面のモジュライ空間への一般化に相当する) の \vec{w} -依存性の明示式を得ている:

$$\exp(G(\lambda; \vec{p}; \vec{w})) = \sum_{\vec{\mu}} \tilde{C}_{\vec{\mu}}(\lambda) e^{\frac{\sqrt{-1}}{2} \lambda \sum_{a=1}^3 \kappa(\mu^{(a)}) w_{a+1}/w_a} \prod_{a=1}^3 s_{\mu^{(a)}}, \quad (4)$$

$$\kappa(\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (\mu_i - 2i + 1), \quad s_{\mu}^{(a)} = \sum_{\nu} \frac{\chi_{\mu}(\nu)}{z_{\nu}} p_{\nu}^{(a)} \quad (\text{the Frobenius formula}).$$

シュア関数展開 (4) を (3) に代入することにより, \vec{w} -非依存な因子 $\tilde{C}_{\vec{\mu}}(\lambda)$ の還元公式が得られる. これと two-partition の場合の結果を合わせることににより, J. Li, C. C. M. Li, K. Liu, J. Zhou は $\tilde{C}_{\vec{\mu}}(\lambda)$ の複雑な表現論的表示を得ている. いくつかの数値実験の結果から, 彼らはこの因子が位相的頂点であると予想している.

3. 位相的頂点

位相的頂点の方法は 3 次元トーリック Calabi-Yau 多様体 X の全種数のグロモフ・ウィッテン不変量を計算する方法である. そのアルゴリズムは, X の扇から 3 個グラフ Γ_X を構成し, これをファインマン図形に見立てて計算を行うというものである. そのファインマン規則によれば, 3 個頂点は位相的頂点と呼ばれる Chern-Simon 理論のリンク不変量の積

$$C_{\vec{\mu}}(q) = q^{\kappa(\mu^{(1)})/2} s_{\mu^{(2)}}(q^{-\rho}) \sum_{\eta} s_{\mu^{(1)}/\eta}(q^{-t\mu^{(2)}-\rho}) s_{\mu^{(3)}/\eta}(q^{-\mu^{(2)}-\rho}), \quad (5)$$

$$q^{-\rho} = (q^{i-1/2})_{i=1}^{\infty}, \quad q^{-\mu^{(a)}-\rho} = (q^{-\mu_i^{(a)}+i-1/2})_{i=1}^{\infty}$$

で与えられる重み (近年用いられている定義に従う) に置き換わる. $C_{\vec{\mu}}(q)$ の複素自由フェルミオン系による表示に対して, ランダム平面分割 (溶解結晶模型) で用いた量子トラス代数のシフト対称性をランダム歪平面分割まで拡張した一般化されたシフト対称性を援用することにより, 次の結果を得る.

定理 $q = e^{-\sqrt{-1}\lambda}$ とするとき, 次の恒等式が任意の $\vec{\mu} = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)})$ で成り立つ:

$$\tilde{C}_{\vec{\mu}}(\lambda) = q^{-\kappa(\vec{\mu})/2} C_{\vec{\mu}}(q), \quad (6)$$

ここで $\kappa(\vec{\mu}) = \sum_{a=1}^3 \kappa(\mu^{(a)})$ である. シュア関数展開 (4) の右辺に (6) 式を代入すれば, three-partition Hodge 積分の累乗化した生成母関数の $C_{\vec{\mu}}(q)$ による展開が得られる.

Matrix product solutions to the reflection equation from three dimensional integrability

国場敦夫 (東大総合文化)

Vincent Pasquier (Univ. Paris Saclay)

1 量子反射方程式

バルクと境界に於ける量子可積分系の基礎方程式は

$$\text{Yang-Baxter 方程式 (YBE): } R_{12}(x)R_{13}(xy)R_{23}(y) = R_{23}(y)R_{13}(xy)R_{12}(x), \quad (1)$$

$$\text{反射方程式 (RE): } R_{12}(xy^{-1})K_2(x)R_{21}(xy)K_1(y) = K_1(y)R_{12}(xy)K_2R_{21}(x)(xy^{-1}) \quad (2)$$

である。近年の研究により、YBE 方程式に対し、行列積の構造を持つ解を組織的に構成する方法が発見され、関与する量子群の表現や可積分確率過程への応用等が開拓されている。これは

$$\text{四面体方程式 (Tetrahedron eq. TE): } R_{124}R_{135}R_{236}R_{456} = R_{456}R_{236}R_{135}R_{124}$$

の簡約によるもので、3次元可積分性の一つの応用を与えている。鍵となるアイデアは、TE を $(R_{124}R_{135}R_{236}) = R_{456}(R_{236}R_{135}R_{124})R_{456}^{-1}$ と表し、YBE を補助空間 4,5,6 に働く作用素に昇格させ、

$$\text{TE} = \text{YBE up to conjugation}$$

と捉える事である。R 行列 R_{ij} を更に補助空間 k に働く R_{ijk} に置き換えるという意味で TE は YBE の量子化の一つと言ってもよい。同様のアイデアを RE に適用し、RE up to conjugation に該当する関係式

$$(L_{12}K_2L_{21}K_1)\mathcal{K} = \mathcal{K}(K_1L_{12}K_2L_{21}) \quad (3)$$

を考える。 L_{ij}, K_i は空間 i, j 以外に補助空間にも働く作用素であり、 \mathcal{K} が conjugation である。4つの因子に対応する補助空間を 1,2,3,4 でラベルして頭を書く

$$L_{123}K_{24}L_{215}K_{16}\mathcal{K}_{3456} = \mathcal{K}_{3456}K_{16}L_{125}K_{24}L_{213} \quad (4)$$

となる。(3) 及び (4) を量子反射方程式と呼ぶ。

2 量子反射方程式の解

以下 q は generic とする。 $F_q = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}|m\rangle, F_q^* = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}\langle m|$ を q boson の Fock 空間とその双対とし、 $\langle m|m'\rangle = \delta_{mm'}(q^2)_m$ とする。ただし $(q)_m = \prod_{j=1}^m (1 - q^j)$ 。生成、消滅、粒子数演算子を

$$\mathbf{a}^+|m\rangle = |m+1\rangle, \quad \mathbf{a}^-|m\rangle = (1 - q^{2m})|m-1\rangle, \quad \mathbf{h}|m\rangle = m|m\rangle, \quad \mathbf{k} = q^{\mathbf{h} + \frac{1}{2}}.$$

により導入する。 $F_{q^2}, F_{q^2}^*, \mathbf{A}^+, \mathbf{A}^-, \mathbf{K}$ は $F_q, F_q^*, \mathbf{a}^+, \mathbf{a}^-, \mathbf{k}$ で q を q^2 で置き換えた対応物とする。 $V = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1$ を 2次元空間として

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & \mathbf{A}^- & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^+ & -\mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{End}(V \otimes V \otimes F_{q^2}), \quad K = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^+ & -\mathbf{k} \\ \mathbf{k} & \mathbf{a}^- \end{pmatrix} \in \text{End}(V \otimes F_q). \quad (5)$$

と定義する。このとき量子反射方程式 (4) は $\mathcal{K} \in \text{End}(F_{q^2} \otimes F_q \otimes F_{q^2} \otimes F_q)$ に対する 16 個の連立方程式 (線形補助問題) となる。例を一つ挙げておく。

$$(1 \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{K} \otimes \mathbf{a}^-)\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbf{A}^+ \otimes \mathbf{a}^- \otimes \mathbf{K} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{K} \otimes \mathbf{a}^+ \otimes \mathbf{A}^- \otimes \mathbf{k} + \mathbf{K} \otimes \mathbf{k} \otimes 1 \otimes \mathbf{a}^-).$$

\mathcal{K} の規格化は、一般性を失うことなく $\mathcal{K}(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ により定めてよい。

命題 ([3]) L, K (5) および量子座標環 $A_q(C_2)$ の intertwiner \mathcal{K} [2, The.3.4] は $\text{End}(V \otimes V \otimes F_{q^2} \otimes F_q \otimes F_{q^2} \otimes F_q)$ に於いて量子反射方程式 (4) を満たす。

3 応用：反射方程式の行列積解

Fock 空間の元 $\langle \chi_s | \in F_{q^2}^*$, $|\chi_s\rangle \in F_{q^2}$, $\langle \eta_s | \in F_q^*$, $|\eta_s\rangle \in F_q$ ($s = 1, 2$) を次の様に定義する.

$$\langle \chi_s | = \sum_{m \geq 0} \frac{\langle sm |}{(q^{2s^2})_m}, \quad |\chi_s\rangle = \sum_{m \geq 0} \frac{|sm\rangle}{(q^{2s^2})_m}, \quad \langle \eta_s | = \sum_{m \geq 0} \frac{\langle sm |}{(q^{s^2})_m}, \quad |\eta_s\rangle = \sum_{m \geq 0} \frac{|sm\rangle}{(q^{s^2})_m}. \quad (6)$$

予想 ([3, eq. (78)]) $\mathcal{K}(|\chi_s\rangle \otimes |\eta_k\rangle \otimes |\chi_s\rangle \otimes |\eta_k\rangle) = |\chi_s\rangle \otimes |\eta_k\rangle \otimes |\chi_s\rangle \otimes |\eta_k\rangle$ ($1 \leq s \leq k \leq 2$).

以下自然数 n 対して $\mathbf{V} = V^{\otimes n}$ とおき, 識別のために適宜 $\overset{1}{\mathbf{V}} = \overset{1}{V} \otimes \dots \otimes \overset{1}{V}$ 等とラベルする.

$S_{1,2}^{\text{tr}}(z), S_{1,2}^{s,s'}(z) \in \text{End}(\overset{1}{\mathbf{V}} \otimes \overset{2}{\mathbf{V}})$ ($s, s' = 1, 2$) および $K_1^{\text{tr}}(z), K_1^{k,k'}(z) \in \text{End}(\overset{1}{\mathbf{V}})$ ($k, k' = 1, 2$) を以下の行列積により定義する.

$$S_{1,2}^{\text{tr}}(z) = \text{Tr}_a(z^{\mathbf{h}_a} L_{1,2,1a} \cdots L_{1,2,na}), \quad K_1^{\text{tr}}(z) = \text{Tr}_a(z^{\mathbf{h}_a} K_{1,1a} \cdots K_{1,na}),$$

$$S_{1,2}^{s,s'}(z) = \langle \chi_s | z^{\mathbf{h}_a} L_{1,2,1a} \cdots L_{1,2,na} | \chi_{s'} \rangle, \quad K_1^{k,k'}(z) = \langle \eta_k | z^{\mathbf{h}_a} K_{1,1a} \cdots K_{1,na} | \eta_{k'} \rangle.$$

ここで, トレースやペアリングをとる補助空間 (auxiliary space) を a とラベルした. 一般に $S(z)$ が (1) を満たし, 対 $(S(z), K(z))$ が (2) を満たすとき RE の解と呼ぶ.

定理 ([3]) 以下の表の 2 行目の対 $(S^{\text{tr}}(z), K^{\text{tr}}(z))$ は RE の解である. また, 上の予想を認めると 3 行目以降の対も RE の解である.

\mathfrak{g}	R 行列	K 行列
$A_{n-1}^{(1)}$	$S^{\text{tr}}(z)$	$K^{\text{tr}}(z)$
$D_{n+1}^{(2)}$	$S^{1,1}(z)$	$K^{1,1}(z), K^{1,2}(z), K^{2,1}(z), K^{2,2}(z)$
$B_n^{(1)}$	$S^{2,1}(z)$	$K^{2,1}(z), K^{2,2}(z)$
$\tilde{B}_n^{(1)}$	$S^{1,2}(z)$	$K^{1,2}(z), K^{2,2}(z)$
$D_n^{(1)}$	$S^{2,2}(z)$	$K^{2,2}(z)$

規格化を度外視するとこれらは皆 z, q の有理式であり, trigonometric な解である. 具体形については [3, App.C] を参照のこと. $U_q(\mathfrak{g})$ は R 行列の付随する量子アフィン代数で, 関与する有限次元表現は, A 型では反対称テンソル表現, それ以外ではスピン表現である. この R 行列に関する部分の結果 [4] は全て定理である. 最近 G_2 型反射方程式についても類似の結果 [1] が得られている.

参考文献

- [1] A.K., Matrix product solutions to the G_2 reflection equation, arXiv:1804.04305, J. Int. Sys. to appear.
- [2] A.K. and M. Okado, Tetrahedron and 3D reflection equations from quantized algebra of functions, J. Phys. A: Math.Theor. **45** 465206 (27pp) (2012).
- [3] A.K. and V. Pasquier, Matrix product solutions to the reflection equation from three dimensional integrability, J. Phys. A: Math.Theor. **51** 255204 (26pp) (2018).
- [4] A.K. and S. Sergeev, Tetrahedron equation and quantum R matrices for spin representations of $B_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ and $D_{n+1}^{(2)}$, Commun. Math. Phys. **324** 695–713 (2013).

A型一般化量子群のKRクリスタル

尾角 正人 (阪市大理)
Jae-Hoon Kwon (ソウル国立大)

A型一般化量子群は一般線形超リー代数 $\mathfrak{gl}(M|N)$ に付随する量子群のアフィン類似である。四面体方程式を2次元簡約して得られる R 行列の対称性として導入された [1]. この代数に対してもアフィン量子群のKRクリスタルに相当するものが構成できたので紹介したい [2].

1. A型一般化量子群 $U(\epsilon)$

1.1. 生成元・関係式

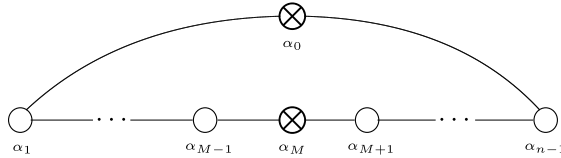
$\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ ($\epsilon_i = 0, 1$) に対し, $U(\epsilon)$ は生成元を e_i, f_i, k_i ($i \in I := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) とし関係式が

$$k_i e_j k_i^{-1} = D_{ij} e_j, \quad k_i f_j k_i^{-1} = D_{ij}^{-1} f_j, \quad e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}}$$

やセール関係式で与えられる代数である。ここで D_{ij} は

$$D_{ij} = \prod_{k \in \{i, i+1\} \cap \{j, j+1\}} q_k^{2\delta_{ij}-1}, \quad q_k = (-1)^{\epsilon_k} q^{(-1)^{\epsilon_k}}$$

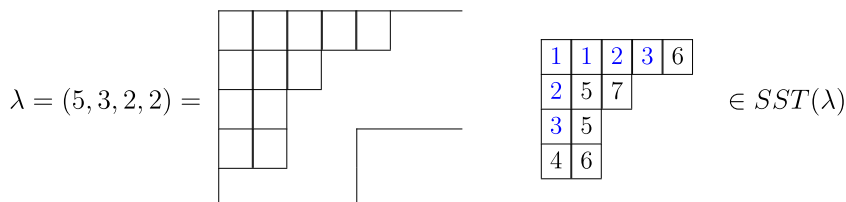
で与えられる。通常の量子展開環と同じ余積等の公式でホップ代数になる。ここでは $\epsilon = \epsilon_{M|N} = (0^M, 1^N)$ の場合を考える。このときのディンキン図は以下のようになる。



\otimes は odd root とよばれるルートに対応する。

1.2. 多項式表現とその結晶基底

$\bar{U}(\epsilon_{M|N})$ を $i \in I \setminus \{0\}$ なる e_i, f_i, k_i で生成される $U(\epsilon_{M|N})$ の部分代数とすると, この代数は $U_q(\mathfrak{gl}(M|N))$ と同型になる。 $U_q(\mathfrak{gl}(M|N))$ には多項式表現という表現の圏が定義され, それに属する表現は結晶基底を持つことが知られている [3]. 多項式表現は $(M|N)$ 鉤分割 ($\lambda_{M+1} \leq N$ を満たす分割 λ) によってパラメトライズされ, λ に付随する多項式表現の結晶基底は λ を台とし, 2種類の文字 $\mathbb{I}_0 = \{1, \dots, M\}, \mathbb{I}_1 = \{M+1, \dots, M+N\}$ が升目に入れられた盤で表わされる。ただし, \mathbb{I}_0 の文字は半標準で, \mathbb{I}_1 のは反半標準 (左右と上下の隣接関係が半標準と逆) となっている。以下に $M = 3, N = 4$ の例を挙げる。



2. KR クリスタル

2.1. フュージョン構成

$\lambda = (s)$ に付随する $\overline{\mathcal{U}}(\epsilon_{M|N})$ の表現は容易に $\mathcal{U}(\epsilon_{M|N})$ の表現に持ち上がる. この表現を [1] で得られている R 行列を用いて r 重にフュージョンすると $\overline{\mathcal{U}}(\epsilon_{M|N})$ の表現としては $\lambda = (s^r)$ に付随する表現が得られる. さらに [4] のテクニックでこの表現にも結晶基底が存在することを示すことができる. これを $B^{r,s}$ で表し Kirillov-Reshetikhin (KR) クリスタルとよぶことにする.

2.2. 0 作用

$B^{r,s}$ 上での柏原作用素 \tilde{e}_i, \tilde{f}_i の作用は $i \neq 0$ の場合は [3] に同じであるので, ここでは $i = 0$ の場合のみ説明する. まず σ という $B^{r,s}$ の元 T 上の組合せ論的操作を, T の \mathbb{I}_1 の文字を取り除き jeu de taquin によって \mathbb{I}_0 の文字を長方形の盤の右下へもっていき, T の \mathbb{I}_1 の文字は左上へもっていく, という風にして定義する. 以下は $M = 3, N = 4$ の例である.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} \in B^{3,5} \quad \text{のとき} \quad \sigma(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ \hline 5 & 7 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 7 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

この σ を使って $\tilde{e}_0 = \sigma^{-1} \circ \tilde{e}_0^\sigma \circ \sigma$, $\tilde{f}_0 = \sigma^{-1} \circ \tilde{f}_0^\sigma \circ \sigma$ とすればよい. ここで $\tilde{e}_0^\sigma, \tilde{f}_0^\sigma$ はディンキン図から α_M を除いたときの $\overline{\mathcal{U}}(\epsilon_{N|M})$ での \tilde{e}_0, \tilde{f}_0 の作用である.

2.3. 組合せ R 行列とヤン・バクスター方程式

$\mathcal{U}(\epsilon_{M|N})$ の順序を入れ替えたテンソル積表現への intertwiner である R 行列の $q \rightarrow 0$ 極限として, KR クリスタルでの組合せ R 行列 $R : B^{r_1, s_1} \otimes B^{r_2, s_2} \rightarrow B^{r_2, s_2} \otimes B^{r_1, s_1}$ が存在する. $R(T_1 \otimes T_2) = \tilde{T}_2 \otimes \tilde{T}_1$ であるための必要十分条件は

$$\text{col}(T_2) \rightarrow T_1 = \text{col}(\tilde{T}_2) \rightarrow \tilde{T}_1$$

である. ここで $\text{col}(T_2)$ は T_2 の文字を日本語読みした語で, $\text{col}(T_2) \rightarrow T_1$ は $\text{col}(T_2) = w_1 \cdots w_l$ を w_1 から T_1 に column insertion して得られる盤である. エネルギー関数 $H(T_1 \otimes T_2)$ という量もあり, これらを求める組合せ論的な規則は A 型アフィン量子群の KR クリスタルの場合と形式的には全く同じである [5]. また, 組合せ R 行列は以下のヤン・バクスター方程式を満たす.

$$(R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1) = (1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R)$$

参考文献

- [1] A. Kuniba, M. Okado, S. Sergeev, *Tetrahedron equation and generalized quantum groups*, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015) 304001 (38p).
- [2] J.-H. Kwon and M. Okado, *Kirillov-Reshetikhin modules of generalized quantum group of type A*, arXiv:1804.05456.
- [3] G. Benkart, S.-J. Kang, M. Kashiwara, *Crystal bases for the quantum superalgebra $U_q(\mathfrak{gl}(m; n))$* , J. Amer. Math. Soc. **13** (2000) 295-331.
- [4] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Perfect crystals of quantum affine Lie algebras*, Duke Math. J. **68** (1992) 499-607.
- [5] M. Shimozono, *Affine type A crystal structure on tensor products of rectangles, Demazure characters, and nilpotent varieties*, J. Algebraic Combin. **15** (2002) 151-187.

K 理論的 Peterson 同型

可積分系からのアプローチ

池田 岳 (岡山理科大学)*

2018年9月24日

概 要

Peterson 同型は、旗多様体の量子コホモロジー環と、 G に付随するアフィン・グラスマン多様体のホモロジー環との関係を与えるものである。可積分系を用いることによって、 $G = SL_n$ の場合に K -理論版の Peterson 同型 (の候補) を構成した。この講演の内容は岩尾慎介氏、前野俊昭氏との共同研究 [7] に基づく。

1. Peterson 同型

Peterson 同型 ([24], [19]) とは、旗多様体 G/B の量子コホモロジー環 $QH^*(G/B)$ と、 G に付随するアフィン・グラスマン多様体 \mathcal{G}_G のホモロジー $H_*(\mathcal{G}_G)$ との関係を与えるものである。ここで G は単連結な複素線型代数群であり、 B はそのボレル部分群である。アフィン・グラスマン多様体は

$$\mathcal{G}_G := G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O}), \quad \mathcal{O} := \mathbb{C}[[t]], \quad \mathcal{K} := \text{Frac } \mathcal{O} = \mathbb{C}((t))$$

と定義され、ind-variety の構造を持つ。 T を B に含まれる極大トーラスとし、 \mathfrak{t} を T のリー環とすると、 T -同変版 $QH_T^*(G/B)$ 、 $H_T^*(\mathcal{G}_G)$ が定義され、いずれも $S = \text{Sym}(\mathfrak{t}^*)$ 上の可換代数の構造を持つ。ホモロジーが環構造 (Pontryagin 積) を持つことは注目に値する。Peterson 同型は、両者の適当な局所化どうしの環同型

$$QH_T^*(G/B)_{loc} \cong H_T^*(\mathcal{G}_G)_{loc}$$

が存在するという内容である。それぞれの環には自然な「シューベルト基底」が存在し、上記の同型はその基底どうしの間にも簡明な関係を与える。この結果は Peterson の講義 [24] において述べられ、Lam-Shimozono [19] によって証明された。

$QH_T^*(G/B)$ のシューベルト基底に関する積構造定数は、 T -同変 Gromov-Witten 不変量として知られ、幾何学的に興味のある量である。その量が、Peterson 同型を介して、アフィン・グラスマン多様体の側からも計算できる理屈である。そういう背景があつて、アフィン・シューベルト・カルキュラスは、この10年来、大変な勢いで研究されてきた。そのきっかけとなったのは、Lam [14] によって、 $H_*(\mathcal{G}_{SL_n})$ の対称関数による記述が確立されて、シューベルト基底を組合せ論的に捕まえられるようになった (Shimozono の予想) ことである。古典的なグラスマン多様体のシューベルト・カルキュラスが、対称関数との関わりを通して興味を持たれてきたことを思い起こすとき、Lam の結果が十分に刺激的であつたことが想像出来る。

本研究は科研費 (課題番号:15K04832, 18K03261) の助成を受けたものである。

* 〒700-0005 岡山市北区理大町 1-1 岡山理科大学理学部応用数学科

e-mail: ike@xmath.ous.ac.jp

web: <https://www.xmath.ous.ac.jp/~ike/>

2. 戸田格子

さて, Lam の結果などを説明する前に, 戸田格子の復習をしてみる. おなじみのラックス行列

$$L = \begin{pmatrix} z_1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ q_1 & z_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & z_3 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_{n-2} & z_{n-1} & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & q_{n-1} & z_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

からはじめよう. $\sum_{i=1}^n z_i = 0$ を仮定しておく. z_i は i 番目の粒子の運動量, q_i は i 番目と $i+1$ 番目の粒子の相互作用を記述する (指数型) ポテンシャル・エネルギーと関係している. $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ を時間変数として, 運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial t_i} = [A_i, L], \quad A_i = (-L)_{<}^i \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

と書かれる. ここに $(\cdot)_{<}$ は行列の狭義下三角部分を意味する. L の特性多項式

$$\det(t \cdot 1_n - L) = t^n - I_1(z, q)t^{n-1} + I_2(z, q)t^{n-2} + \cdots + (-1)^n I_n(z, q)$$

の係数は保存量になっている (等スペクトル変形). ただし $I_1(z, q) = \sum_{i=1}^n z_i = 0$ とした. $\gamma = (\gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ に対して等スペクトル多様体

$$Z_\gamma := \{(z, q) \in \mathbb{C}^{2n-1} \mid I_j(z, q) = \gamma_j \ (1 \leq j \leq n)\}$$

(ただし $\gamma_1 = 0$) を考える. とくに, $\gamma_i = 0 \ (1 \leq i \leq n)$ のとき, Z_γ を Z_{nil} と書くことにする. $(z, q) \in Z_{\text{nil}}$ に対してラックス行列 $L = L(z, q)$ は冪零だからである.

冪零な初期値のもとに戸田方程式を解こう. 冪零行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から出発する. ここで

$$g = \exp \left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i \Lambda^i \right) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(t) \Lambda^k = \begin{pmatrix} 1 & h_1 & h_2 & \cdots & \cdots & h_{n-1} \\ 0 & 1 & h_1 & h_2 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & h_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & h_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

によって $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ の多項式 $h_i = h_i(t)$ ($1 \leq i \leq n-1$) を定める. さらに, 上記の行列の右上の正方形に関する小行列式として「tau関数」を

$$\tau_{n-i} := \begin{vmatrix} h_{n-i} & \cdots & h_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-2i+1} & \cdots & h_{n-i} \end{vmatrix} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

と定める. また $\tau_0 = \tau_n = 1$ としておく.

$B \subset SL_n$ を上三角行列全体がなすボレル部分群とし, w_0 を S_n の最長元に対応する置換行列とする. $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ が τ_i ($1 \leq i \leq n-1$) の零点でないとき, 対角成分がすべて 1 の下三角行列 n であって (2) の g に対して

$$gn^{-1} \in w_0 B$$

をみたすものが一意的に存在する. このとき $L = -n\Lambda n^{-1}$ は (1) のラックス行列の形をしていて, 戸田方程式をみたす. より明示的には次が成り立つ.

定理 2.1 (戸田方程式の冪零解). 次の関数

$$z_i = \frac{\partial \ln \tau_i}{\partial t_1} - \frac{\partial \ln \tau_{i-1}}{\partial t_1} \quad (1 \leq i \leq n), \quad q_i = \frac{\tau_{i-1} \tau_{i+1}}{\tau_i^2} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

は冪零な初期値に関する戸田方程式の (有理的な) 解である.

注意: p_i を i 次の冪対称関数とし, 時間変数 t_i を p_i/i と同一視するとき, h_i は i 次の完全対称関数に対応する.

3. 戸田格子と Peterson 同型の関係

ここまでの内容が幾何学的にはどのように解釈できるかを [20] にしたがって説明する. 量子側については次の結果がよく知られている.

定理 3.1 ([4],[10]). 環同型

$$QH^*(SL_n/B) \cong \mathbb{C}[Z_{\text{nil}}] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, q_1, \dots, q_{n-1}] / \langle I_j(z, q) \mid 1 \leq j \leq n \rangle$$

が存在する.

SL_n のラングランズ双対群は $G^\vee = PGL_n(\mathbb{C})$ である. Λ を G^\vee のリー環 \mathfrak{g}^\vee の元とみて, Λ の中心化群

$$C_\Lambda := \{g \in G^\vee \mid Ad(g)(\Lambda) = \Lambda\}$$

を考える. アフィン側については次が知られている.

定理 3.2 ([5], [24]). 環同型

$$H_*(\mathcal{G}_{SL_n}) \cong \mathbb{C}[C_\Lambda] = \mathbb{C}[h_1, \dots, h_{n-1}]$$

が存在する.

タウ関数 τ_i ($1 \leq i \leq n-1$) が $\mathbb{C}[h_1, \dots, h_{n-1}]$ の元であることに注意して

$$C_\Lambda^\circ := \{g \in C_\Lambda \mid \tau_i(g) \neq 0 \ (1 \leq i \leq n-1)\}$$

によって C_Λ のザリスキー開集合を定める。また,

$$Z_{\text{nil}}^\circ := \{(z, q) \in Z_{\text{nil}} \mid q_i \neq 0 \ (1 \leq i \leq n-1)\}$$

によって Z_{nil} のザリスキー開集合を定める。

定理 3.3 ([13]). 戸田格子の冪零解からアフィン多様体の同型

$$Z_{\text{nil}}^\circ \cong C_\Lambda^\circ$$

が得られる。

ここで

$$QH^*(SL_n/B)_{\text{loc}} := \mathbb{C}[Z_{\text{nil}}^\circ], \quad H_*(\mathcal{G}_{SL_n})_{\text{loc}} := \mathbb{C}[C_\Lambda^\circ]$$

とするとき

系 3.4. 環同型

$$QH^*(SL_n/B)_{\text{loc}} \cong H_*(\mathcal{G}_{SL_n})_{\text{loc}}.$$

が存在する。

実は、これが Peterson 同型である。たまたま2つの環が同型になっただけでなく、シューベルト類の対応も簡明に与えられることを次節で説明する。

4. シューベルト類の対応

$B \subset SL_n$ を上三角行列からなるボレル部分群とする。 $w \in S_n$ および $1 \leq i \leq n$ に対して

$$V_i^w = \langle \mathbf{e}_{w(1)}, \dots, \mathbf{e}_{w(i)} \rangle \subset \mathbb{C}^n$$

とおく。 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は \mathbb{C}^n の標準基底である。旗

$$0 \subset V_1^w \subset \dots \subset V_n^w = \mathbb{C}^n$$

を SL_n/B の元とみなすとき e_w と書く。 $B_- \subset SL_n$ を下三角行列からなるボレル部分群とすると

$$\Omega_w := \overline{B_- e_w} \subset SL_n/B$$

をシューベルト多様体と呼ぶ。コホモロジー環 (\mathbb{C} 係数) $H^*(SL_n/B)$ は Ω_w に付随する元 σ_w ($w \in S_n$) たちからなる基底を持つ。 σ_w をシューベルト類と呼ぶ。 $\ell(w)$ を w の長さ (あるいは転倒数) とするとき σ_w の次数は $2\ell(w)$ 次である。積構造定数 c_{wv}^u は

$$\sigma_w \sigma_v = \sum_{u \in S_n} c_{wv}^u \sigma_u$$

により定まる (非負整数である)。量子コホモロジー環は係数環 $\mathbb{C}[q] := \mathbb{C}[q_1, \dots, q_{n-1}]$ 上、量子シューベルト類 σ_w^q ($w \in S_n$) により生成される自由加群である。 $H^*(SL_n/B)$ の積がパラメータ q_1, \dots, q_{n-1} によって変形されている。その積を $*$ で表すとき、

$$\sigma_w^q * \sigma_v^q = \sum_{u \in S_n} c_{wv}^u(q) \sigma_u^q, \quad c_{wv}^u(q) \in \mathbb{C}[q]$$

と展開したとき $c_{wv}^u(q)$ の各係数が Gromov–Witten 不変量により与えられる。

\tilde{S}_n をアフィン対称群とする。 \tilde{S}_n/S_n の最短代表系を \tilde{S}_n^0 で表すとき $H_*(\mathcal{G}_{SL_n})$ は $x \in \tilde{S}_n^0$ で添え字付けられる元 ξ_x たちからなる基底を持つ。すべての成分が $(n-1)$ 以下であるような分割全体の集合を \mathcal{B}_{n-1} で表す。

補題 4.1. 自然な全単射 $\tilde{S}_n^0 \cong \mathcal{B}_{n-1}$ が存在する。

定理 4.2 ([14]). $x \in \tilde{S}_n^0$ が $\lambda \in \mathcal{B}_{n-1}$ に対応するとき、同型 $H_*(\mathcal{G}_{SL_n}) \cong \mathbb{C}[h_1, \dots, h_{n-1}]$ によりシューベルト類 ξ_x に対応する元は *Lascoux-Lapointe-Morse* により導入された多項式 $s_\lambda^{(n-1)}$ と一致する。

$s_\lambda^{(n-1)}$ は k -Schur 関数と呼ばれ、Macdonald 多項式と関連する問題の中で Lascoux-Lapointe-Morse [21] が導入した。その詳しい表示などはここでは述べないが、以下のことに注意しておく。

- $s_\lambda^{(n-1)}$ ($\lambda \in \mathcal{B}_{n-1}$) は $\mathbb{C}[h_1, \dots, h_{n-1}]$ の基底をなす。
- $s_\lambda^{(n-1)} = s_\lambda + (\text{低次の項})$ 。
- $s_{R_i}^{(n-1)}$ はシユーア関数 $s_{R_i} (= \tau_{n-i})$ と一致する。ただし、ここで R_i は横が $(n-i)$ で縦が i の長方形のヤング図形である。
- より一般に、 λ がある R_i に含まれれば $s_\lambda^{(n-1)}$ はシユーア関数 s_λ と一致する ([22])。
- $s_{R_i \cup \lambda}^{(n-1)} = s_{R_i}^{(n-1)} \cdot s_\lambda^{(n-1)}$ ([22])。

なお、任意の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ に対してシユーア関数を $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i + j - i})_{1 \leq i, j \leq r}$ と定義する。 h_i は i 次の完全対称関数である。

定理 4.3 ([20]). $w \in S_w$ に対して (明示的に定まる) $\lambda(w) \in \mathcal{B}_{n-1}$ が存在して、量子シューベルト類 σ_w^q は *Peterson* 同型により

$$\frac{s_{\lambda(w)}^{(n-1)}}{\prod_{i \in \text{Des}(w)} \tau_i} \in \mathbb{C}[h_1, \dots, h_{n-1}][\tau_1^{-1}, \dots, \tau_{n-1}^{-1}]$$

に写される。ここで $\text{Des}(w) = \{i \mid 1 \leq i \leq n-1, w(i) > w(i+1)\}$ である。

5. K -理論的 Peterson 同型

以上の結果の K -理論的類似を見つけたい。旗多様体の量子 K -理論は Givental-Lee [6] により調べられている。またアフィン・グラスマン多様体の K -理論は Lam-Schilling-Shimozono [17] による研究がある。これらの理論については後ほど説明することにして、[7] の結果に至るまでの発見的な考えの道筋を述べることにする。

- Givental-Lee [6] の結果をみると、環 $QK(SL_n/B)$ が関係式

$$\sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I = k}} \prod_{j \in I} z_j \prod_{j \in I, j+1 \notin I} (1 - Q_j) = \binom{n}{k} \quad (1 \leq k \leq n)$$

によって定義されると予想できる (Kirillov-Maeno の予想 [11])。ここで z_i は $V_i \in SL_n/B$ において V_i/V_{i-1} をファイバーとする直線束 \mathcal{L}_i の類に対応する。 $Q = (Q_1, \dots, Q_{n-1})$ はノビコフ変数と呼ばれる変形パラメーターである。

- シューア関数 s_λ は無限次元グラスマン多様体のホモロジーのシューベルト類とみなせる. その K -理論の類似は Lam-Pylyavskyy [16] の dual stable Grothendieck 多項式である. それは次の公式により定義できる:

$$g_\lambda = \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{i-j}{k} h_{\lambda_i+j-i-k} \right).$$

タウ関数の表示にこれが使えるはず.

- “保存量” がみたすべき等式の元になるはずの関係式

$$\sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I|=k} \prod_{i \in I, i+1 \notin I} \frac{\tilde{\tau}_i}{\tau_i} \prod_{j \notin I, j+1 \in I} \frac{\hat{\tau}_j}{\tau_j} = \binom{n}{k},$$

$$\tau_i = g_{R_i}, \quad \tilde{\tau}_i = g_{R_i} - g_{R_i^*}, \quad \hat{\tau}_i = \sum_{\mu \subset R_i} g_\mu$$

を予想した (2015年12月). ただし $R_i^* = ((n-i)^{i-1}, n-i-1)$.

- 上の保存量を持つ可積分系を探した. 答えはラックス行列が $L = AB^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & -1 & & & & \\ & z_2 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & z_{n-1} & -1 & \\ & & & & z_n & \\ & & & & & z_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -Q_1 z_1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & -Q_{n-1} z_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

の形で与えられる Ruijsenaars [25] の relativistic 戸田格子方程式 (岩尾慎介氏).

Kirillov-Maeno の予想は肯定的に解決された ([7] の出版が決まった後).

定理 5.1 ([1], [12]). 次の環同型がある:

$$QK(SL_n/B) \cong \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, Q_1, \dots, Q_{n-1}]/I,$$

$$I = \left\langle \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I=k}} \prod_{j \in I} z_j \prod_{j \in I, j+1 \notin I} (1 - Q_j) - \binom{n}{k} \mid 1 \leq k \leq n \right\rangle.$$

アフィン・グラスマン多様体の K ホモロジー環については次が知られている.

定理 5.2 ([17]). 次の環同型がある:

$$K_*(\mathcal{G}_{SL_n}) \cong \mathbb{C}[h_1, \dots, h_{n-1}].$$

以上を背景として, 次の結果を得た:

定理 5.3 ([7]). 以下の定義をする:

$$QK(SL_n/B)_{\text{loc}} := QK(SL_n/B)[Q_1^{-1}, \dots, Q_{n-1}^{-1}],$$

$$K_*(\mathcal{G}_{SL_n})_{\text{loc}} := \mathbb{C}[h_1, \dots, h_{n-1}][\tau_1^{-1}, \dots, \tau_{n-1}^{-1}, \hat{\tau}_1^{-1}, \dots, \hat{\tau}_{n-1}^{-1}].$$

このとき、環同型 $\Phi : QK(SL_n/B)_{\text{loc}} \rightarrow K_*(\mathcal{G}_{SL_n})_{\text{loc}}$ が

$$z_i \mapsto \frac{\tau_i \hat{\tau}_{i-1}}{\hat{\tau}_i \tau_{i-1}}, \quad Q_i \mapsto \frac{\tau_{i-1} \tau_{i+1}}{\tau_i^2}$$

により定まる。

Proof. 幕単初期条件のもとで relativistic 戸田格子を解けばよい。 \square

以上、保存量の明示形を手掛かりにして非自明な環同型を構成したわけだが、この同型が幾何学的に正しいものである保証があるわけではない。 T 同変版の K -理論的 Peterson 同型の定式化（予想）が Lam-Li-Mihalcea-Shimozono [15] によって提出された。また、最近、加藤 [9] は半無限旗多様体を介して K -理論的 Peterson 同型を与えている。これらの結果と定理 5.3 の関係は現時点では（私には）よくわかっていない。

以下、定理 5.3 の写像が好ましい性質を持つ状況証拠について述べる。Lenart-Maeno [23] は定理 5.1 の表示においてシューベルト多様体 Ω_w の構造層の類（の量子変形） $[\mathcal{O}_{\Omega_w}] \in QK(SL_n/B)$ を代表すると予想される多項式

$$\mathfrak{G}_w^q \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_{n-1}, Q_1, \dots, Q_{n-1}]$$

（量子 Grothendieck 多項式）を構成している。

予想 5.4 ([7]). $\lambda \in \mathcal{B}_{n-1}$ に対して多項式 $\tilde{g}_\lambda \in \mathbb{C}[h_1, \dots, h_{n-1}]$ が存在して、任意の $w \in S_n$ に対して

$$\Phi(\mathfrak{G}_w^q) = \frac{\tilde{g}_{\lambda(w)}}{\prod_{i \in \text{Des}(w)} \tau_i}$$

が成り立つ。

[17] は「 K 理論的 k -Schur 関数」を定義している。我々は最初、 $\tilde{g}_{\lambda(w)}$ が K 理論的 k -Schur 関数と一致することを期待したが、それは正しくない。しかし、具体例を調べると、ヤング図形の大きさに関するフィルターの先頭項は一致しているようである。また、具体例において $\tilde{g}_{\lambda(w)}$ を K 理論的 k -Schur 関数の線型結合として表示するとき「正値性」が観察される。

予想 5.4 に関して、次の部分的な結果がある。

定理 5.5 ([7]). $w \in S_n$ が d -Grassmannian 元るとき、すなわち

$$w(1) < \dots < w(d), \quad w(d+1) < \dots < w(n)$$

をみたすとき $\mu_i = n - i + 1 - w(d - i + 1)$ ($1 \leq i \leq d$) とすると

$$\Phi(\mathfrak{G}_w^q) = \frac{g_\mu}{\tau_d}$$

が成り立つ。

最後に、関連することと未解決問題について述べておく。 $G = SL_n$ に対しては、 T 同変の (コ) ホモロジーの場合に特殊多項式の観点からのさらなる研究 [18] がある。他の古典型の場合には、(コ) ホモロジーの場合に限っても、Peterson 同型を具体的な多項式レベルまで詳細に計算することは非常に面白い問題である。これは、古典型の量子コ

ホモロジーにおいてシューベルト類を代表する良い多項式を求めるという長く未解決の問題と関連して興味深い。量子 K 理論に関しては、可積分系を通して、Givental-Kim 型の表示が可能であるはずである。その際に、いわゆる J 関数の解析 ([2] など) が鍵になるのは間違いないと思われる ([8] など) が、まだそのような理論は完成していない。アフィン・グラスマン多様体の K ホモロジー側については [3] に「相対論的戸田方程式」の構造が現れているようにも見える。

参考文献

- [1] Anderson, D., Chen, L. and Tseng, H.-H., “On the quantum K -ring of the flag manifold.” arXiv: 1711.08414v1.
- [2] Braverman, A. and Finkelberg, M. “Finite difference quantum Toda lattice via equivariant K -theory.” *Transform. Groups*, **10** (3-4), pp.363–386, 2005.
- [3] Bezrukavnikov, R., Finkelberg, M., and Mirković, I. “Equivariant homology and K -theory of affine Grassmannians and Toda lattices.” *Compos. Math.*, **141** (03), pp.746–768, 2005.
- [4] Givental, A. and Kim, B., 1995, “Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices.” *Comm. Math. Phys.* **168**, no. 3: 609–41.
- [5] Ginzburg, V., “Perverse sheaves on a Loop group and Langlands’ duality.” preprint, arXiv:alg-geom/9511007
- [6] Givental, A. and Lee, Y.-P., 2003, “Quantum K -theory on flag manifolds, finite-difference Toda lattices and quantum groups.” *Invent. Math.* **151**, no. 1: 193–219.
- [7] Ikeda, T., Iwao, S., Maeno, T., “Peterson isomorphism in K -theory and relativistic Toda lattice.” *Int. Math. Res. Notices*, rny051, 2018.
- [8] Iritani, H. Milanov, T. and Tonita, V. “Reconstruction and convergence in quantum K -theory via difference equations.” *Int. Math. Res. Not.*, **2015** (11), pp.2887–2937, 2015.
- [9] Kato, S., “Loop structure on equivariant K -theory of semi-infinite flag manifolds.” preprint arXiv: 1805.01718v4.
- [10] Kim, B., 1999, “Quantum cohomology of flag manifolds G/B and quantum Toda lattices.” *Ann. of Math.* **149**: 129–48.
- [11] Kirillov, A. N. and T. Maeno. “A note on quantum K -theory of flag varieties and some quadric algebras.” *in preparation*.
- [12] Koroteev, P., Pushkar, P. P., Smirnov, A. Zeitlin, A. M., “Quantum K -theory of Quiver Varieties and Many-Body Systems.” arXiv:1705.10419.
- [13] Kostant, B., 1979, “The Solution to a Generalized Toda Lattice and Representation Theory.” *Adv. Math.* **34**: 195–338.
- [14] Lam, T., “Schubert polynomials for the affine Grassmannian, *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), 259–281.
- [15] Lam, T., Li, C., Mihalcea, L., and Shimozono, M., “A conjectural Peterson isomorphism in K -theory.” preprint, arXiv:1705.03435v1
- [16] Lam, T. and Pylyavskyy, P., 2007, “Combinatorial Hopf algebras and K -homology of Grassmannians.” *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2007**, no. 24 Art. ID rnm125, 48 pp.
- [17] Lam, T., Schilling, A., and Shimozono, M., 2010, “ K -theory Schubert calculus of the affine Grassmannian.” *Compos. Math.* **146**, no. 4: 811–52.
- [18] Lam, T. and Shimozono, M., “From double quantum Schubert polynomials to k -double Schur functions via the Toda lattice.” arXiv:1109.2193
- [19] Lam, T. and Shimozono, M., 2010, “Quantum cohomology of G/P and homology of

- affine Grassmannian.” *Acta Math.* 204, no. 1: 49–90.
- [20] Lam, T. and Shimozono M., 2012, “From quantum Schubert polynomials to k -Schur functions via the Toda lattice.” *Math. Res. Lett.* 19: 81–93.
- [21] Lapointe, L., Lascoux, A., and Morse, J., 2003, “Tableau atoms and a new Macdonald positivity conjecture.” *Duke Math. J.* 116, no. 1: 103–46.
- [22] Lapointe, L. and Morse, J., 2007, “A k -tableau characterization of k -Schur functions.” *Adv. Math.* 213, no. 1: 183–204.
- [23] Lenart, C. and Maeno, T., “Quantum Grothendieck polynomials.” arXiv:0608232
- [24] Peterson, D. “Quantum cohomology of G/P .” Lecture notes, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, Spring 1997.
- [25] Ruijsenaars, S., 1990, “Relativistic Toda systems.” *Comm. Math. Phys.* 133, no. 2: 217–47.