

✿ 日本数学会

2017年度年会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2017年3月

於 首都大学東京

✿ 日本数学会

2017年度年会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2017年3月

於 首都大学東京

無 限 可 積 分 系

3月26日(日) 第Ⅲ会場

10:30~11:30		(分)	頁
1	加藤 晃 史 (東大数理) クイバーのミューテーションと q -二項係数の等式	(15)	1
	水野 勇 磨 (東工大情報理工)		
	寺嶋 郁 二 (東工大情報理工)		
2	小寺 諒 介 (京大理) Higher level Fock spaces and affine Yangian	(15)	3
3	直井 克 之 (東京農工大工) $U_q(\mathbf{Lg})$ 加群に対するテンソル積と古典極限を取る操作の非可換性 について	(15)	5
4	竹山 美 宏 (筑波大数理物質) On the eigenfunctions for the multi-species q -Boson system	(15)	7
14:15~15:15 特別講演			
	Ivan Chi Ho Ip (京大理) Positive representation and cluster realization of quantum groups		9
15:30~16:30 特別講演			
	加藤 晃 史 (東大数理) Quiver mutation loops and partition q -series		23

3月27日(月) 第Ⅲ会場

10:15~12:00		(分)	頁
5	川上 拓 志 (青学大理工) 4次元 Painlevé 型方程式の完全な退化関式	(15)	37
6	長尾 秀 人 (明石工高専) q 差分ガルニエ系について	(15)	39
	山田 泰 彦 (神戸大理)		
7	長尾 秀 人 (明石工高専) q 差分ガルニエ系から q 差分パウルヴェエ系への簡約	(15)	41
	山田 泰 彦 (神戸大理)		
8	渋川 元 樹 (阪大情報) A generalization of multivariate Meixner, Charlier and Krawtchouk polynomials	(15)	43
9	大山 陽 介 (徳島大理工) q -超幾何級数 ${}_2\varphi_0(a, 0; -, q, x)$ の q -Stokes 現象	(15)	45
10	大山 陽 介 (徳島大理工) q -超幾何級数 ${}_1\phi_1(0; a; q, x)$ の q -Stokes 現象	(15)	47

クイバーのミュートーションと q -二項係数の等式

加藤晃史 (東大数理)*1

水野勇磨 (東工大情報理工)*2

寺嶋郁二 (東工大情報理工)*3

1. ミュートーション列 m の分配関数 Z_m

以下、クイバー Q はloopと2-cycleを持たない有向グラフのこととして、 Q の頂点の集合を $\{1, \dots, n\}$ と同一視する。クイバー Q の頂点 k に関して、 k でのミュートーションと呼ばれる新しいクイバー $\mu_k(Q)$ が定まる。 Q の頂点の有限列 $\mathbf{m} := (m_1, \dots, m_T)$ を与えると、 \mathbf{m} に関してミュートーションを繰り返し行うことで、 $Q(0) := Q$ を初期クイバーとするクイバーの離散的な時間発展

$$Q(0) \xrightarrow{\mu_{m_1}} Q(1) \xrightarrow{\mu_{m_2}} \dots \rightarrow Q(t-1) \xrightarrow{\mu_{m_t}} Q(t) \rightarrow \dots \xrightarrow{\mu_{m_T}} Q(T)$$

が定まる。 \mathbf{m} のことを Q のミュートーション列と呼ぶ。ミュートーション列 \mathbf{m} に対して、 c -ベクトルの sign coherence という性質から、 μ_{m_t} における符号 $\varepsilon_t \in \{-1, 1\}$ が定まる。

本研究では、 Q のミュートーション列 \mathbf{m} に対してその分配関数 Z_m を導入し、その性質を調べた[2]。分配関数の定義は以下で与えられる。

1. Q の各頂点 v に初期 s 変数 s_v を割り当てる。
2. 頂点 v でのミュートーションを行う際に、ミュートーション後のクイバーの頂点 v に新しい s 変数を割り当てる。
3. 各ミュートーション μ_{m_t} に対して k 変数 k_t と k^\vee 変数 k_t^\vee を割り当てる。
4. 各ミュートーション μ_{m_t} に対し、 s 変数と k, k^\vee 変数は次の関係式を満たす：

$$k_t = \begin{cases} s_v + s'_v - \sum_{a \rightarrow v} s_a & \text{if } \varepsilon_t = 1 \\ \sum_{v \rightarrow b} s_b - (s_v + s'_v) & \text{if } \varepsilon_t = -1 \end{cases} \quad (1)$$

$$k_t^\vee = \begin{cases} \sum_{v \rightarrow b} s_b - (s_v + s'_v) & \text{if } \varepsilon_t = 1 \\ s_v + s'_v - \sum_{a \rightarrow v} s_a & \text{if } \varepsilon_t = -1 \end{cases} \quad (2)$$

ただし、 s_v, s'_v はそれぞれミュートーション前後の頂点 $v = m_t$ に割り当てた s 変数である。

5. 各ミュートーション μ_{m_t} の重み $W(\mu_{m_t})$ を次式で定める。

$$W(\mu_{m_t}) = q^{-\frac{1}{2}\varepsilon_t k_t k_t^\vee} \begin{bmatrix} k_t + k_t^\vee \\ k_t \end{bmatrix}_{q^{\varepsilon_t}}.$$

本研究は科研費(課題番号:JP16K13752, JP16H03931, 25400083)の助成を受けたものである。

*1 e-mail: akishi@ms.u-tokyo.ac.jp

*2 e-mail: mizuno.y.aj@m.titech.ac.jp

*3 e-mail: tera@is.titech.ac.jp

ここで、

$$\left[\begin{matrix} a+b \\ a \end{matrix} \right]_q = \frac{(1-q^{b+1})(1-q^{b+2})\cdots(1-q^{b+a})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^a)}$$

は q -二項係数である。関係式 (1), (2) を用いて k^\vee 変数を k 変数と初期 s 変数で表すことによって、 $W(\mu_{m_t})$ を k 変数と初期 s 変数に関する関数と思うことにする。

6. 初期変数を $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$ として、分配関数 $Z_m(r)$ を重みの積の k 変数に関する多重和として定める。

$$Z_m(r) = \sum_{k \geq 0} \left(\prod_{t=1}^T W(\mu_{m_t}) \right) y^{\sum_{t=1}^T k_t \alpha_t}.$$

ここで、 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して y^α はクイバー Q から定まる非可換変数であり、 $\alpha_t = \varepsilon_t c_{m_t}(t-1)$ はミュートーション μ_{m_t} における符号 ε_t と c -ベクトル $c_{m_t}(t-1)$ の積である。分配関数 Z_m は初期変数 r に関する関数となる。

2. 主結果

$$\mathbb{E}(x; q) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + q^{n+\frac{1}{2}} x}.$$

を量子ダイログ関数とする。

定理 1 級数 $F(x) = \sum a_n x^n$ における x^n の係数を $[x^n]F(x)$ と表すこととする。このとき任意の $\beta \in \mathbb{Z}^n$ について

$$q^{\frac{1}{2}\langle \beta, r \rangle} ([y^\beta] Z_m(r)) = [y^\beta] \left((\mathbb{E}(y^{\alpha_1}; q^{\varepsilon_1}) \cdots \mathbb{E}(y^{\alpha_T}; q^{\varepsilon_T}))^{-1} (\mathbb{E}(q^{\langle \alpha_1, r \rangle} y^{\alpha_1}; q^{\varepsilon_1}) \cdots \mathbb{E}(q^{\langle \alpha_T, r \rangle} y^{\alpha_T}; q^{\varepsilon_T})) \right)$$

が成り立つ。

クイバー Q に対して framed quiver と呼ばれる ice quiver Q^\wedge が定まる。 Q^\wedge をミュートーション列 \mathbf{m} に関してミュートーションしていくことで、新しい ice quiver $\mu_{\mathbf{m}}(Q^\wedge)$ を得る。定理 1 と量子ダイログ関数についての既知の等式 [3, 4] を用いることで、異なるミュートーション列の分配関数の間に成り立つ等式を得ることができる。

定理 2 \mathbf{m} と \mathbf{m}' を Q のミュートーション列とする。もし ice quiver $\mu_{\mathbf{m}}(Q^\wedge)$ と $\mu_{\mathbf{m}'}(Q^\wedge)$ が frozen isomorphic であれば、 $Z_{\mathbf{m}} = Z_{\mathbf{m}'}$ である。

定理 2 は、 q -二項係数の様々な多重和の等式を系統的に得る方法を与える。

参考文献

- [1] Akishi Kato and Yuji Terashima. Quantum dilogarithms and partition q -series. *Communications in Mathematical Physics*, 338(1):457–481, 2015.
- [2] Akishi Kato, Yuma Mizuno, and Yuji Terashima. Quiver mutation sequences and q -binomial identities. preprint, arXiv:1611.05969.
- [3] Bernhard Keller. Cluster algebras and derived categories. In *Derived categories in algebraic geometry*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 123–183. Eur. Math. Soc., Zürich, 2012.
- [4] Kentaro Nagao. Quantum dilogarithm identities. In *Infinite analysis 2010—Developments in quantum integrable systems*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B28, pages 165–170. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2011.

Higher level Fock spaces and affine Yangian

小寺 諒介 (京都大学 大学院理学研究科)

1. アフィンヤンギアン

有限型 Cartan 行列に付随するヤンギアンは, Drinfeld によって導入された量子群である. その定義関係式 (Drinfeld 表示) を形式的にアフィン型 Cartan 行列のデータに置き換えたものがアフィンヤンギアンである. 但しアフィン A 型の場合は 2 パラメータを持ち, その場合の定義関係式は Guay [G] による.

本講演では, A 型アフィンヤンギアンの具体的な表現の構成について論文 [K1], [K2] の内容を紹介する.

2. 高レベル Fock 空間

L を 1 以上の整数とし, N を 3 以上の整数とする. 分割の集合を \mathcal{P} で表す.

L 個の整数の組 $\underline{c} \in \mathbb{Z}^L$ に対して, \mathcal{P}^L で添字づけられた基底 $\{|\underline{\lambda}, \underline{c}\rangle \mid \underline{\lambda} \in \mathcal{P}^L\}$ を持つ \mathbb{C} ベクトル空間を

$$F(\underline{c}) = \bigoplus_{\underline{\lambda} \in \mathcal{P}^L} \mathbb{C} |\underline{\lambda}, \underline{c}\rangle$$

とする. $F(\underline{c})$ は A 型アフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の作用を持つことが知られており, \underline{c} に付随するレベル L Fock 空間と呼ばれる. Uglov [U2] は $F(\underline{c})$ への A 型ヤンギアン $Y_h(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の作用を構成した.

3. アフィンヤンギアンの作用

A 型アフィンヤンギアンは生成元 $X_{i,r}^{\pm}, H_{i,r}$ ($i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を持つ. このうち $i = 0$ を除いた $X_{i,r}^{\pm}, H_{i,r}$ ($i = 1, \dots, N-1$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) はヤンギアン $Y_h(\mathfrak{sl}_N)$ の定義関係式を満たし, $r = 0$ の部分である $X_{i,0}^{\pm}, H_{i,0}$ ($i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$) はアフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の定義関係式を満たす.

定理 ([K2]) ヤンギアン $Y_h(\mathfrak{sl}_N)$ とアフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の高レベル Fock 空間 $F(\underline{c})$ への作用は, アフィンヤンギアンに拡張される.

この結果は, 高レベル q -Fock 空間に量子トロイダル代数が作用するという竹村-Uglov の結果 [TU] の退化版である.

証明について述べる. Schur-Weyl 型双対性 (Guay [G]) によって, 有限ウェッジ空間へのアフィンヤンギアンの作用が構成される. 高レベル Fock 空間は有限ウェッジ空間の極限として実現されるので, アフィンヤンギアンの作用がこの極限に拡張されることをチェックする.

一般に, Schur-Weyl 型双対性によって得られるアフィンヤンギアンの表現は, アフィン Lie 代数の表現としてはレベル 0 である. 上で述べた構成は, レベル 0 表現の極限としてレベル L 表現を実現している. 従って, 高レベル Fock 空間を Schur-Weyl 型双対性によって直接得ることはできないということに注意しておく.

4. レベル1の場合

アファインヤングリアンの表現としての高レベル Fock 空間の構造は、一般にはよくわかっていない。レベル1の場合には以下で述べるように詳しい構造がわかっている。

以下 $L = 1$ とし、整数 c に付随するレベル1 Fock 空間 $F(c)$ を考える。 $F(c)$ は無限変数の対称関数環と同一視される。 Uglov [U1] は、スピン Calogero-Sutherland 模型の研究をもとに、 $F(c)$ 上の対称双線型形式とそれに関する直交基底を導入し、 $\text{Jack}(\mathfrak{gl}_N)$ 対称関数と呼んだ。

[K1] では、この基底に関するヤングリアンの生成元 $X_{i,r}^\pm, H_{i,r}$ ($i = 1, \dots, N-1, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の作用を組合せ論的に記述した。この記述を用いて、籐多様体を用いて構成された表現と Fock 空間を比較する。アファイン A 型の基本ウェイト Λ_c と次元ベクトル $\mathbf{v} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ に付随する籐多様体 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \Lambda_c)$ を考える。トーラス同変ホモロジー群 $H = \bigoplus_{\mathbf{v}} H_*^{\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times}(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \Lambda_c))$ 上にはアファインヤングリアンの作用が定義される (Varagnolo [V])。パラメータが generic という仮定の下で、 H はトーラス固定点のクラスからなる基底を持ち、この基底に関するアファインヤングリアンの作用が具体的に記述できる。両基底への作用の式を比較することで次の定理を得る。

定理 ([K1]) レベル1 Fock 空間 $F(c)$ と籐多様体の同変ホモロジー群 H は、明示的な基底の対応によりアファインヤングリアンの表現として同型である。

この結果は、籐多様体の同変 K 群上に定義された量子トロイダル代数の表現とレベル1 q -Fock 空間が同型であるという長尾の結果 [N] の退化版である。

参考文献

- [G] Nicolas Guay, *Cherednik algebras and Yangians*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 57, 3551–3593.
- [K1] Ryosuke Kodera, *Affine Yangian action on the Fock space*, arXiv:1506.01246.
- [K2] Ryosuke Kodera, *Higher level Fock spaces and affine Yangian*, arXiv:1607.03237.
- [N] Kentaro Nagao, *K-theory of quiver varieties, q-Fock space and nonsymmetric Macdonald polynomials*, Osaka J. Math. **46** (2009), no. 3, 877–907.
- [TU] Kouichi Takemura and Denis Uglov, *Representations of the quantum toroidal algebra on highest weight modules of the quantum affine algebra of type \mathfrak{gl}_N* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. **35** (1999), no. 3, 407–450.
- [U1] Denis Uglov, *Symmetric functions and the Yangian decomposition of the Fock and basic modules of the affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{sl}}_N$* , Quantum many-body problems and representation theory, MSJ Mem., vol. 1, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1998, pp. 183–241.
- [U2] Denis Uglov, *Yangian actions on higher level irreducible integrable modules of $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$* , arXiv:9802048, 1998.
- [V] Michela Varagnolo, *Quiver varieties and Yangians*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), no. 4, 273–283.

$U_q(\mathbf{Lg})$ 加群に対するテンソル積と古典極限を取る 操作の非可換性について

直井 克之 (東京農工大学)*

1. はじめに

\mathfrak{g} を単純 Lie 代数とする。量子ループ代数 $U_q(\mathbf{Lg})$ の有限次元加群 V (で適切な仮定を満たすもの) が与えられたとき, $q = 1$ における極限を考えることで, ループ代数 $\mathbf{Lg} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ 上の加群 \overline{V} が得られる。これを V の古典極限と呼ぶ。

量子ループ代数 $U_q(\mathbf{Lg})$ は Hopf 代数であるから, $U_q(\mathbf{Lg})$ 加群 V_1, \dots, V_p が与えられたとき, そのテンソル積 $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ はやはり $U_q(\mathbf{Lg})$ 加群となる。よってその古典極限 $\overline{V_1 \otimes \dots \otimes V_p}$ を考えることが出来る。一方ループ代数 \mathbf{Lg} は Lie 代数であるから, それぞれの古典極限 $\overline{V_1}, \dots, \overline{V_p}$ のテンソル積 $\overline{V_1} \otimes \dots \otimes \overline{V_p}$ はやはり \mathbf{Lg} 加群となる。しかしながらこれら二つの \mathbf{Lg} 加群は一般に同型ではなく,

$$\overline{V_1 \otimes \dots \otimes V_p} \not\cong \overline{V_1} \otimes \dots \otimes \overline{V_p}$$

となることがしばしば起こる。すなわち量子ループ代数の有限次元加群に対し, テンソル積を取る操作と古典極限を取る操作は可換ではないのである。

そこで, 以下の問題を考えたい。

問題 テンソル積の古典極限 $\overline{V_1 \otimes \dots \otimes V_p}$ を, それぞれの古典極限 $\overline{V_1}, \dots, \overline{V_p}$ から構成することは可能か?

本講演では, 各 V_i が Kirillov-Reshetikhin 加群の場合に, この問題に対する一つの解答を与える [Nao16]。

2. 主定理を述べるための準備

主定理を述べるために必要な用語について, いくつか紹介する。 I を \mathfrak{g} の単純ルートの添え字集合とする。Kirillov-Reshetikhin (KR) 加群 $W_q^{i,\ell}(a)$ は, 3つのパラメータ $i \in I$, $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a \in \mathbb{C}(q)$ から定まる有限次元単純 $U_q(\mathbf{Lg})$ 加群である。 $\mathbb{C}(q)$ の局所部分環 \mathbf{A} を

$$\mathbf{A} = \{f(q)/g(q) \mid g(1) \neq 0\}$$

と定めるとき, $a \in \mathbf{A}^\times$ であれば $W_q^{i,\ell}(a)$ の古典極限 $\overline{W_q^{i,\ell}(a)}$ が定義できる。

\mathbf{Lg} の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}[t] := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ をカレント代数と呼ぶ。 $c \in \mathbb{C}$ に対し, $\mathfrak{g}[t]$ の自己同型 φ_c を

$$\varphi_c(x \otimes f(t)) = x \otimes f(t+c)$$

と定める。古典極限 $\overline{W_q^{i,\ell}(a)}$ を制限により $\mathfrak{g}[t]$ 加群とみなし, 引き戻し $\varphi_{-a(1)}^* \overline{W_q^{i,\ell}(a)}$ を考えると, この $\mathfrak{g}[t]$ 加群は同型を除いて a によらず, また次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群となることが知られている (次数付き極限)。この $\varphi_{-a(1)}^* \overline{W_q^{i,\ell}(a)}$ を以下, $W^{i,\ell}$ と表す。

本研究は科研費 (課題番号:16K17563) の助成を受けたものである。

キーワード: 量子ループ代数, 古典極限

* 〒184-8588 東京都小金井市中町 2-24-16 工学研究院 数理科学部門

e-mail: naoik@cc.tuat.ac.jp

web: <http://web.tuat.ac.jp/~naoik/link.html>

続いて fusion 積について述べる (cf. [FL99]). M^1, \dots, M^p を一元生成な次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群とし, それぞれの生成元を v_1, \dots, v_p と表す. また $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{C}$ を相異なる元とし, $M := \varphi_{c_1}^*(M^1) \otimes \dots \otimes \varphi_{c_p}^*(M^p)$ とおく. このとき M はやはり一元生成 $\mathfrak{g}[t]$ 加群となるが, もはや次数付き加群ではなくなってしまふ. そこで

$$M_k = U(\mathfrak{g}[t])_{\leq k}(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) \subseteq M$$

とおくことで M にフィルター $M_{-1} = 0 \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$ を定め, 付随する次数付き空間 $\bigoplus_k M_k/M_{k-1}$ を考えると, これは一元生成次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群となる. この加群を M^1, \dots, M^p の fusion 積と呼び, $M^1 * \dots * M^p$ と表す. 上の定義をより感覚的に述べれば, fusion 積とは一元生成であるという性質と次数付きであるという性質が保たれるように, テンソル積を変形したものである.

3. 主定理

定理 3.1 ([Nao16, Theorem 3.1]). KR 加群の列 $W_q^{i_1, \ell_1}(a_1), \dots, W_q^{i_p, \ell_p}(a_p)$ に対し, 以下を仮定する.

- (i) 全ての $1 \leq k \leq p$ に対し, $a_k \in \mathbf{A}^\times$ である.
- (ii) $W_q^{i_1, \ell_1}(a_1) \otimes \dots \otimes W_q^{i_p, \ell_p}(a_p)$ は, 最高ウェイトベクトルから生成される一元生成 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群である.
- (iii) $a_1(1) = \dots = a_p(1)$ が成り立つ.

このとき, $\mathfrak{g}[t]$ 加群としての同型

$$\overline{W_q^{i_1, \ell_1}(a_1) \otimes \dots \otimes W_q^{i_p, \ell_p}(a_p)} \cong \varphi_c^*(W^{i_1, \ell_1} * \dots * W^{i_p, \ell_p})$$

が成り立つ. ただし $c = a_k(1)$ とおいた.

仮定 (i), (ii) は, 定理に現れる古典極限たちを定義するために必要な仮定である. また (iii) は本質的な仮定ではない. 実際簡単な議論により, 上の定理から以下が示せる.

系 3.2. 上の定理の仮定 (i), (ii) が満たされているとする. このとき $\mathfrak{g}[t]$ 加群としての同型

$$\overline{W_q^{i_1, \ell_1}(a_1) \otimes \dots \otimes W_q^{i_p, \ell_p}(a_p)} \cong \bigotimes_{c \in \mathbb{C}^\times} \varphi_c^* \left(\bigast_{k; a_k(1)=c} W^{i_k, \ell_k} \right)$$

が成り立つ.

参考文献

- [FL99] B. Feigin and S. Loktev. On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule. In *Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications*, volume 194 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 61–79. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [Nao16] K. Naoi. Tensor products of Kirillov-Reshetikhin modules and fusion products. *to appear in IMRN*, 2016. arXiv:1604.02577.

On the eigenfunctions for the multi-species q -Boson system

竹山 美宏 (筑波大学数理物質系)*

論文 [3] では, GL 型のアフィンヘッケ代数にパラメータを添加した変形を考え, その表現を使って, 可積分確率過程である q -ボゾン系 [2] の多種粒子版を構成した. この構成法では, ヘッケ代数の表現を使って生成作用素の固有関数を自然に作るができる. 今回の講演では, このようにして得られた固有関数が, q -ボゾン代数とその表現を使って表されることについて述べる [4].

以下, パラメータ $0 < q < 1$ と, 正の整数 r を固定する. 論文 [3] で定義された多種粒子 q -ボゾン系とは, $1, 2, \dots, r$ のいずれかの番号のついた有限個のボゾン粒子が, 1 次元格子 \mathbb{Z} 上を動く連続時間マルコフ連鎖である. 状態間の推移率は次で定める. あるサイトから 1 つの粒子が -1 だけ動く推移のみが起こり得る. 番号 $1, \dots, r$ の粒子がそれぞれ m_1, \dots, m_r 個あるサイトから, 番号 b の粒子が動く推移率は

$$\frac{1 - q^{2m_b}}{1 - q^2} q^{2 \sum_{p=b+1}^r m_p}$$

で定める. この推移で各番号の粒子の個数は保存される. そこで, 番号 a の粒子の個数を k_a ($a = 1, \dots, r$), 全部の粒子の個数を $k = \sum_{a=1}^r k_a$ とし, 以下 k_1, \dots, k_r (≥ 1) を固定する.

粒子の配置全体のなす集合を, 以下で定める集合 $\mathcal{S}_{k_1, \dots, k_r}$ によって実現する. まず

$$\begin{aligned} L_k^+ &= \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k \mid x_1 \geq \dots \geq x_k \}, \\ I_{k_1, \dots, k_r} &= \{ \vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_k) \in \{1, \dots, r\}^k \mid \#\{j \mid \nu_j = a\} = k_a \ (1 \leq \forall a \leq r) \} \end{aligned}$$

と定める. そして, 集合 $\mathcal{S}_{k_1, \dots, k_r}$ を次で定める.

$$\mathcal{S}_{k_1, \dots, k_r} = \{ (\vec{x}, \vec{\nu}) \in L_k^+ \times I_{k_1, \dots, k_r} \mid \text{For any } 1 \leq i \leq k, \text{ if } x_i = x_{i+1} \text{ then } \nu_i \leq \nu_{i+1} \}$$

このとき, $\mathcal{S}_{k_1, \dots, k_r}$ の要素 $(\vec{x}, \vec{\nu})$ に対し, サイト x_1, \dots, x_k にそれぞれ番号 ν_1, \dots, ν_k の粒子を置くことで, k 個の粒子の配置が定まる. この対応により $\mathcal{S}_{k_1, \dots, k_r}$ を多種粒子 q -ボゾン系の状態空間と見なす.

集合 $\mathcal{S}_{k_1, \dots, k_r}$ 上の複素数値関数全体のなす集合を $F(\mathcal{S}_{k_1, \dots, k_r})$ とする. 状態 $(\vec{x}, \vec{\nu})$ から $(\vec{y}, \vec{\mu})$ への推移率を $q(\vec{x}, \vec{\nu} \mid \vec{y}, \vec{\mu})$ で表す. このとき, $F(\mathcal{S}_{k_1, \dots, k_r})$ 上の線形作用素 \mathcal{H} を

$$(\mathcal{H}h)(\vec{x}, \vec{\nu}) = \sum_{\substack{(\vec{y}, \vec{\mu}) \in \mathcal{S}_{k_1, \dots, k_r} \\ (\vec{y}, \vec{\mu}) \neq (\vec{x}, \vec{\nu})}} q(\vec{x}, \vec{\nu} \mid \vec{y}, \vec{\mu}) \{ h(\vec{y}, \vec{\mu}) - h(\vec{x}, \vec{\nu}) \} \quad (h \in F(\mathcal{S}_{k_1, \dots, k_r}))$$

で定め, 多種粒子 q -ボゾン系の生成作用素 (backward generator) と呼ぶ.

q -ボゾン代数 \mathcal{B} を, 次の関係式を満たす生成元 $\beta_a, \beta_a^*, q^{\pm N_a}$ ($1 \leq a \leq r$) をもつ代数として定義する.

$$q^{N_a} \beta_a = q^{-1} \beta_a q^{N_a}, \quad q^{N_a} \beta_a^* = q \beta_a^* q^{N_a}, \quad \beta_a \beta_a^* = 1 - q^2 q^{2N_a}, \quad \beta_a^* \beta_a = 1 - q^{2N_a}$$

ただし, 異なる添字をもつ生成元は可換とする. \mathcal{B} の Fock 表現 $\mathcal{F} = \bigoplus_{m_1, \dots, m_r \geq 0} \mathbb{C} \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ とその双対 $\mathcal{F}^* = \bigoplus_{m_1, \dots, m_r \geq 0} \mathbb{C} \langle m_1, \dots, m_r \mid$ を

$$\begin{aligned} q^{N_a} \langle m_1, \dots, m_r \rangle &= q^{m_a} \langle m_1, \dots, m_r \rangle, & \beta_a^* \langle m_1, \dots, m_r \rangle &= \langle m_1, \dots, m_a + 1, \dots, m_r \rangle, \\ \beta_a \langle m_1, \dots, m_r \rangle &= (1 - q^{2m_a}) \langle m_1, \dots, m_a - 1, \dots, m_r \rangle, \\ \langle m_1, \dots, m_r \mid q^{N_a} &= q^{m_a} \langle m_1, \dots, m_r \mid, & \langle m_1, \dots, m_r \mid \beta_a &= (1 - q^{2(m_a+1)}) \langle m_1, \dots, m_a + 1, \dots, m_r \mid, \\ \langle m_1, \dots, m_r \mid \beta_a^* &= \begin{cases} 0 & (m_a = 0) \\ \langle m_1, \dots, m_a - 1, \dots, m_r \mid & (m_a \geq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

本研究は科研費 (基盤 (C) 課題番号:24600106) の助成を受けたものである.

* e-mail: takeyama@math.tsukuba.ac.jp

web: <http://researchmap.jp/takeyama/>

で定める. 以下, $|\mathbf{0}\rangle = |0, \dots, 0\rangle \in \mathcal{F}$, $\langle \mathbf{0}| = \langle 0, \dots, 0| \in \mathcal{F}^*$ と略記する.

1次元格子 \mathbb{Z} の各サイト i に, q -ボゾン代数のコピー $\mathcal{B}^{(i)} = \langle \beta_{a,i}, \beta_{a,i}^*, q^{\pm N_{a,i}} (1 \leq a \leq r) \rangle$ を対応させる. $i \neq j$ のとき $\mathcal{B}^{(i)}$ と $\mathcal{B}^{(j)}$ は可換であるとする. サイト i における L -operator $L^{(i)}(z) = (L^{(i)}(z))_{a,b=0}^r$ を次で定義する.

$$L^{(i)}(z)_{00} = 1 + zq^{2\sum_{p=1}^r N_{p,i}}, \quad L^{(i)}(z)_{0a} = \beta_{a,i}^*, \quad L^{(i)}(z)_{a0} = z\beta_{a,i}q^{2\sum_{p=a+1}^r N_{p,i}} \quad (1 \leq a \leq r),$$

$$L^{(i)}(z)_{ab} = \begin{cases} 0 & (1 \leq a < b \leq r) \\ zq^{2\sum_{p=a+1}^r N_{p,i}} & (1 \leq a = b \leq r) \\ z\beta_{a,i}\beta_{b,i}^*q^{2\sum_{p=a+1}^r N_{p,i}} & (1 \leq b < a \leq r) \end{cases}$$

この L -operator は Yang-Baxter 方程式 $\check{R}_{12}(z/w)L^{(1)}(z)L^{(2)}(w) = L^{(1)}(w)L^{(2)}(z)\check{R}_{12}(z/w)$ を満たす [1]. ただし, R 行列は次で定まるものである (E_{ab} は行列単位).

$$\check{R}(z) = (z - q^2) \sum_{a=1}^r E_{aa} \otimes E_{aa} + (1 - q^2) \sum_{1 \leq a < b \leq r} (zE_{aa} \otimes E_{bb} + E_{bb} \otimes E_{aa})$$

$$+ (z - 1) \sum_{1 \leq a < b \leq r} (E_{ab} \otimes E_{ba} + q^2 E_{ba} \otimes E_{ab})$$

$M' \leq M$ を満たす整数 M', M について, 区間 $[M', M]$ 上の monodromy 行列 $\mathbb{T}^{[M', M]}(z)$ を

$$\mathbb{T}^{[M', M]}(z) = L^{(M')}(z)L^{(M'+1)}(z) \cdots L^{(M-1)}(z)L^{(M)}(z)$$

で定め, $\mathbb{T}^{[M', M]}(z)$ の $(a, 0)$ 成分を $C_a^{[M', M]}(z)$ で表す ($1 \leq a \leq r$). そして, 真空ベクトルとその双対を

$$|\text{vac}\rangle_{[M', M]} = |\mathbf{0}\rangle \otimes |\mathbf{0}\rangle \otimes \cdots \otimes |\mathbf{0}\rangle \in \mathcal{F}^{(M')} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^{(M)}$$

$${}_{[M', M]}\langle \text{vac}| = \langle \mathbf{0}| \otimes \langle \mathbf{0}| \otimes \cdots \otimes \langle \mathbf{0}| \in (\mathcal{F}^*)^{(M')} \otimes \cdots \otimes (\mathcal{F}^*)^{(M)}$$

とし, これらに関する行列要素を $\langle \cdot \rangle_{[M', M]}$ で表す. ただし $\mathcal{F}^{(i)}$, $(\mathcal{F}^*)^{(i)}$ はそれぞれサイト i における Fock 表現とその双対のコピーである. このとき, 次のことが成り立つ.

定理 [4]

I_{k_1, \dots, k_r} の元 $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ と, パラメータ $\vec{z} = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ に対し, $\mathcal{S}_{k_1, \dots, k_r}$ 上の関数 $E_{\vec{z}}^{\vec{\mu}}$ を

$$E_{\vec{z}}^{\vec{\mu}}(\vec{x}, \vec{\nu}) = \lim_{\substack{M' \rightarrow \infty \\ M' \rightarrow -\infty}} \prod_{i=1}^k \frac{z_i^{M'-1}}{(1+z_i)^M} \langle \prod_{1 \leq i \leq k} C_{\mu_i}^{[M', M]}(z_i) \prod_{1 \leq i \leq k} \beta_{\nu_i, x_i}^* \rangle_{[M', M]}$$

で定める. このとき, $E_{\vec{z}}^{\vec{\mu}}$ は生成作用素 \mathcal{H} の固有関数で, その固有値は $\sum_{i=1}^k z_i^{-1}$ である.

この定理は, 論文 [3] でヘッケ代数の表現を使って構成した固有関数と, 上の関数 $E_{\vec{z}}^{\vec{\mu}}$ が等しいことを, k に関する数学的帰納法を使って証明することにより得られる.

参考文献

- [1] Garbali, A., de Gier, A. and Wheeler, M., A new generalisation of Macdonald polynomials, preprint, arXiv:1605.07200.
- [2] Sasamoto, T. and Wadati, M., Exact results for one-dimensional totally asymmetric diffusion models, *J. Phys. A* **31** (1998), no. 28, 6057–6071.
- [3] Takeyama, Y., Algebraic construction of multi-species q -Boson system, preprint, arXiv:1507.02033.
- [4] Takeyama, Y., On the eigenfunctions for the multi-species q -Boson system, preprint, arXiv:1606.00578.

Positive representations and cluster realization of quantum groups

Ivan Chi-Ho IP (Kyoto University)*

Abstract

For each simple Lie algebra \mathfrak{g} , I will talk about a new presentation of an embedding of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ into certain quantum torus algebra, described by a quiver diagram, using the previous construction of positive representations of split real quantum groups. We will discuss its relation to cluster structure of framed G -local system described recently by Le, and a factorization of the universal R matrix which corresponds to a sequence of quiver mutations giving the half-Dehn twist of the triangulation of a twice-punctured disk with two marked points. This generalizes the well-known result of Faddeev for type A_1 and the recent work of Schrader-Shapiro for type A_n .

1. Introduction

Let $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ be the quantum group generated by E, F, K subject to the usual relations, and let \mathfrak{D} be the Drinfeld's double of its Borel part with generators E, F, K, K' such that $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2) = \mathfrak{D}/\langle KK' = 1 \rangle$. In [2], Faddeev found an intriguing realization of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ and its Drinfeld's double in terms of a quantum torus algebra \mathcal{D} , which is generated by $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ subject to the relations

$$w_i w_{i+1} = q^{-2} w_{i+1} w_i, \quad w_i w_{i+2} = w_{i+2} w_i, \quad i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Then we have the embedding of the form:

$$\begin{aligned} E &\mapsto \frac{\sqrt{-1}}{q - q^{-1}}(w_1 + w_2), & K &\mapsto qw_2w_3, \\ F &\mapsto \frac{\sqrt{-1}}{q - q^{-1}}(w_3 + w_4), & K' &\mapsto qw_4w_1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

This embedding using the Weyl-type relations can be used to construct the so-called modular double in the regime where $|q| = 1$, important in many non-compact analysis of quantum field theories. Furthermore, the image of the reduced R -matrix can be factorized into a product of 4 quantum dilogarithms Ψ_q :

$$\overline{R} = \Psi_q(w_1 \otimes w_3) \Psi_q(w_1 \otimes w_4) \Psi_q(w_2 \otimes w_3) \Psi_q(w_2 \otimes w_4). \quad (1.3)$$

These properties motivate the study of a new class of representations for $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ by Teschner *et al.* [1, 13, 14] in quantum Liouville theory, and was later generalized to higher rank split real quantum groups $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ through the notion of *positive representations* [4, 6, 7].

This work was supported by KAKENHI JP16K17571.

2010 Mathematics Subject Classification: 17B37, 13F60.

Keywords: Quantum groups, positive representations, cluster algebra, R -matrix.

*e-mail: ivan.ip@math.kyoto-u.ac.jp

web: <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ivan.ip/>

Furthermore, Kashaev [10] shows that the R matrix can be identified with an element of the mapping class group of twice punctured disk, which corresponds to the half-Dehn twist rotating one puncture about the other. If we triangulate the punctured disk, this transformation can be expressed as a sequence of four flips of the triangulations (see Figure 9). Hence one can identify the factorization (1.3) with the flips of triangulations, and this fact has been used for example to reconstruct Kashaev's knot invariant in [5]. In a more general setting, such factorization also appears as a decomposition into S -tensors under embedding into tensor powers of Heisenberg double [9] and recently studied in [16] to obtain invariants of colored ideal triangulations.

In [15], the above embedding as well as the factorization of R matrix has been generalized to the case of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$, following the quantum cluster structure associated to the moduli spaces of framed PGL_n -local systems [3]. In our work [8], we generalize the embedding of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ and the factorization of R matrix for all simple types of \mathfrak{g} , using the construction of positive representations. We then relate the combinatorics of our construction to the cluster structure of general framed G -local system recently studied by Le [11, 12].

Although our work [8] is done on a formal algebraic level, we remark that our construction can be easily generalized to the split-real setting, since all the monomials of the embedding constructed out of the quantum cluster variables are manifestly positive self-adjoint if we reconsider the split-real form. In particular, we can replace the (inverse of) quantum dilogarithm function Ψ_q with its non-compact counterpart $g_b(x)$, and properties that are compatible with Faddeev's modular double can also be recovered by applying the transcendental relations (3.2) to the quantum cluster variables.

2. Quantum cluster \mathcal{X} -tori

First we recall the definition of the quantum cluster \mathcal{X} -tori following [3, 15].

Definition 2.1 (Quantum torus algebra). *A seed \mathbf{i} is a tuple (I, I_0, B, D) where I is a finite set, $I_0 \subset I$ is a subset called the frozen subset, $B = (b_{ij})_{i,j \in I}$ a skew-symmetrizable \mathbb{Q} -valued matrix called the exchange matrix, and $D = \text{diag}(d_i)$ a diagonal matrix called the multiplier.*

Let q be a formal parameter. We define the quantum torus algebra $\mathcal{X}_{\mathbf{i}}$ associated to the seed \mathbf{i} to be an associative algebra over $\mathbb{C}(q^{\min(d_i)})$, defined by generators $X_i^{\pm 1}, i \in I$ subject to the relations

$$X_i X_j = q_i^{-2b_{ij}} X_j X_i, \quad i, j \in I, \quad q_i := q^{d_i}. \quad (2.1)$$

The generators X_i are called the quantum cluster variables, and they are said to be frozen if $i \in I_0$. We denote by $\mathbf{T}_{\mathbf{i}}$ the non-commutative field of fraction of $\mathcal{X}_{\mathbf{i}}$.

In the case considered, we usually write $q = q_l$ when $d_i = 1$ corresponding to long roots, while $q_s = q^{\frac{1}{2}}$ for $d_i = \frac{1}{2}$ in type BCF and $q_s = q^{\frac{1}{3}}$ for $d_i = \frac{1}{3}$ in type G_2 corresponding to short roots. Then we will associate to each seed \mathbf{i} a quiver Q following the rules using thick and thin arrows in Figure 1. In general, each arrow $i \xrightarrow{w_{ij}} j$ has weight $w_{ij} := d_i b_{ij} = -w_{ji}$ associated to it.

There are two important isomorphisms between $\mathbf{T}_{\mathbf{i}}$: permutation and mutation. A permutation of seed

$$\sigma : \mathbf{i} \longrightarrow \mathbf{i}'$$

is a bijection $\sigma : I \longrightarrow I'$ which induces an isomorphism $\sigma^* : \mathbf{T}_{\mathbf{i}'} \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{i}}$. We also have the cluster mutation defined as follows:

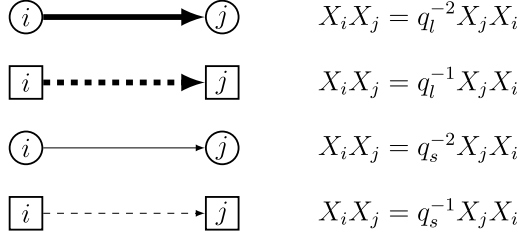


Figure 1: Arrows between nodes and their algebraic meaning.

Definition 2.2 (Cluster mutation). *Given a pair of seeds $\mathbf{i} = (I, I_0, B, D)$, $\mathbf{i}' = (I', I'_0, B', D')$ and an element $k \in I \setminus I_0$, a cluster mutation in direction k is an isomorphism $\mu_k : \mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i}'$ such that $\mu_k(I_0) = I'_0$,*

$$b'_{\mu_k(i), \mu_k(j)} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + \frac{b_{ik}|b_{kj}| + |b_{ik}|b_{kj}}{2} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$d'_{\mu_k(i)} = d_i,$$

and accordingly there is a quiver mutation $Q^i \rightarrow Q^{i'}$ associated to the change of B .

Definition 2.3 (Quantum cluster mutation). *The cluster mutation in direction k , $\mu_k : \mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i}'$, induces an isomorphism $\mu_k^q : \mathbf{T}_{i'} \rightarrow \mathbf{T}_i$ called the quantum cluster mutation, defined by*

$$\mu_k^q(\widehat{X}_i) = \begin{cases} X_k^{-1} & \text{if } i = k, \\ X_i \prod_{r=1}^{|b_{ki}|} (1 + q_i^{2r-1} X_k) & \text{if } i \neq k \text{ and } b_{ki} \leq 0, \\ X_i \prod_{r=1}^{b_{ki}} (1 + q_i^{2r-1} X_k^{-1})^{-1} & \text{if } i \neq k \text{ and } b_{ki} \geq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

where we denote by \widehat{X}_i the quantum cluster variables corresponding to $\mathcal{X}_{i'}$.

We note that the quantum cluster mutation μ_k^q can be written as a composition of two homomorphisms

$$\mu_k^q = \mu_k^\# \circ \mu'_k, \quad (2.4)$$

where $\mu'_k : \mathbf{T}_{i'} \rightarrow \mathbf{T}_i$ is a monomial transformation, while $\mu_k^\# : \mathbf{T}_i \rightarrow \mathbf{T}_i$ is a conjugation by the quantum dilogarithm function

$$\Psi_q := \prod_{r=0}^{\infty} (1 + q^{2r+1} x)^{-1}, \quad (2.5)$$

such that

$$\mu_k^\# := Ad_{\Psi_{q_k}(X_k)}. \quad (2.6)$$

Finally, we have an operation called *amalgamation* of two quivers Q, Q' (and the corresponding quantum torus algebra) given by identifying certain subsets of the frozen nodes I_0, I'_0 of both quivers, and superimposing the arrows of both quivers.

3. Positive representations \mathcal{P}_λ of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_\mathbb{R})$

In [4, 6, 7], a special class of representations called the *positive representations* is constructed for split real quantum groups $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_\mathbb{R})$ (and its modular double, which is not needed in this paper). Here $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_\mathbb{R})$ is defined to be $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ endowed with the star structure

$$E_i^* = E_i, \quad F_i^* = F_i, \quad K_i^* = K_i, \quad (3.1)$$

and necessarily $|q_i| = 1$ for every $i \in I$, whence we let $q_i = e^{\pi\sqrt{-1}b_i^2} \in \mathbb{C}$ for $b_i \in \mathbb{R}$. We assume the q_i 's are not root of unity for simplicity.

Below we let $n = \text{rank}(\mathfrak{g})$, $w_0 \in W$ be the longest element of the Weyl group with length $N = l(w_0)$, and let n_i be the number of s_i appearing in w_0 for simple root i . Generalizing the work of Teschner *et al.* [1, 14] on $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$, we have

Theorem 3.1 (Positive representations). *There exists a family of irreducible representations \mathcal{P}_λ of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_\mathbb{R})$ parametrized by $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, such that*

- The generators $\{E_i, F_i, K_i\}$ are represented by positive (unbounded) essentially self-adjoint operators on $L^2(\mathbb{R}^N)$.
- Let $\tilde{q} = e^{\pi i b^{-2}}$. Define (for rescaled generators)

$$\tilde{e}_i := e_i^{\frac{1}{b_i^2}}, \quad \tilde{f}_i := f_i^{\frac{1}{b_i^2}}, \quad \tilde{K}_i := K_i^{\frac{1}{b_i^2}}. \quad (3.2)$$

- in type ADE, $\{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \tilde{K}_i\}$ generates $\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U}_{\tilde{q}}(\mathfrak{g}_\mathbb{R})$,
- in type BCFG, $\{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \tilde{K}_i\}$ generates the Langlands dual $\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U}_{\tilde{q}}(L\mathfrak{g}_\mathbb{R})$.
- the generators $\{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \tilde{K}_i\}$ commute weakly with $\{e_i, f_i, K_i\}$ up to a sign.

We call the family \mathcal{P}_λ the **positive representations** of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_\mathbb{R})$ and its modular double $\mathcal{U}_{q\tilde{q}}(\mathfrak{g}_\mathbb{R}) := \mathcal{U} \otimes \tilde{\mathcal{U}}$. The explicit representations of \mathcal{P}_λ has a particular nice form:

Theorem 3.2. [4, 6, 7]

- Each rescaled generators can be represented by polynomials generated by the positive operators

$$\{e^{\pm\pi b_i x_i}, e^{\pm 2\pi b_i p_i}\}_{i=1, \dots, N},$$

where $p_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_i}$ are the momentum operators such that $[p_i, x_i] = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}$, and each monomial terms are positive essentially self-adjoint.

- There exists a unitary equivalence Φ between positive representations corresponding to different reduced words, hence the representation does not depend on the choice of reduced expression of w_0 .

We have seen that in the theory of positive representations of split real quantum groups, the representation carries a real structure and the operators are represented by unbounded positive operators on certain Hilbert spaces. However in this work, we will focus on the representation formally, so all the generators and relations are treated on the algebraic level. Hence if we define formally

$$X_i^{\pm 1} = e^{\pm\pi b_i x_i}, \quad Y_i^{\pm 1} = e^{\pm 2\pi b_i p_i}, \quad (3.3)$$

then algebraically we have for $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} X_i Y_i &= q_i Y_i X_i, \\ X_i Y_j &= Y_j X_i, \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{3.4}$$

As a corollary, if we just consider the quantum torus algebra $\mathbb{C}[\mathbf{T}_q]$ generated by the elements $\langle X_i^{\pm 1}, Y_i^{\pm 1} \rangle_{i=1, \dots, N}$ subjected to (3.4), we obtain

Corollary 3.3. *The positive representations give an embedding of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ into $\mathbb{C}[\mathbf{T}_q]$, generalizing the Feigin's homomorphism $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}) \longrightarrow \mathbb{C}[\mathbf{T}_q]$.*

In fact, let $w_0 = s_{i_1} \dots s_{i_N}$ be a reduced expression, and define the notation

$$[u]e(2p) := e^{\pi b u + 2\pi b p} + e^{-\pi b u + 2\pi b p}, \tag{3.5}$$

where $b := b_i$ is rescaled according to the variables u and p . Then one can present the generators of \mathfrak{f}_i explicitly as

$$\mathfrak{f}_i = \sum_{k: i_k=i} \left[2\lambda_i + \sum_{j=1}^{k-1} a_{i_j i} v_j - v_k \right] e(2p_k), \tag{3.6}$$

$$K_i = e^{\pi b(-\lambda_i - \sum_{j=1}^N a_{i_j i} v_j)}. \tag{3.7}$$

In particular, by (3.5), we can rewrite the \mathfrak{f}_i generators as

$$\mathfrak{f}_i := F_i^{n_i, -} + \dots + F_i^{1, -} + F_i^{1, +} + F_i^{2, +} + \dots + F_i^{n_i, +} \tag{3.8}$$

This has the properties that each $F_i^{k, \pm}$ is a monomial that q_i^{-2} commute to all the terms on its right. In fact the Feigin's homomorphism is equivalent to the $+$ part of such expression, hence the positive representations generalize Feigin's homomorphism by taking certain “double” of the map.

On the other hand, the hard part is the expression for the generators \mathfrak{e}_i , which has been computed in a case-by-case study. If $i_N = i$, we have explicitly

$$\mathfrak{e}_i = [v_N]e(-2p_N) := E_i^- + E_i^+. \tag{3.9}$$

Otherwise, it is given by

$$\mathfrak{e}_i = \Phi \circ [v_N]e(-2p_N)\Phi^* \tag{3.10}$$

where Φ is the unitary equivalence that relates \mathcal{P}_λ to the reduced expression where $w_0 = w' s_i$ ends with the root i , according to Theorem 3.2. By expanding the expression, one finds that it is written explicitly with an “initial term” given by

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_i &= [v_j]e(-2p_j + \dots) + \dots \\ &:= \dots + E_i^- + E_i^+ + \dots \end{aligned} \tag{3.11}$$

4. Embedding of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

Now we are ready to construct the quantum torus algebra $\mathcal{D}_\mathfrak{g}$ in the favor of [15] that will provide a clear description of the embedding of the generators of the quantum group $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$.

Definition 4.1. Define $2N + 2n$ variables indexed by

$$S = \{f_i^{-n_i}, \dots, f_i^{n_i}\}_{i \in I} \cup \{e_i^0\}_{i \in I} \simeq \{1, \dots, 2N + 2n\}$$

as follows: For each $i \in I$, we take the consecutive “ratio” of the monomial terms of \mathbf{f}_i as:

$$X_{f_i^k} = \begin{cases} F_i^{n_i, -} & k = -n_i, \\ q_i F_i^{k, -} (F_i^{k-1, -})^{-1} & n < 0, \\ q_i F_i^{1, +} (F_i^{1, -})^{-1} & k = 0, \\ q_i F_i^{k+1, +} (F_i^{k, +})^{-1} & k > 0, \\ q_i K_i^{-1} (F_i^{n_i, +})^{-1} & k = n_i. \end{cases} \quad (4.1)$$

and take the ratio of the initial terms (3.11) of \mathbf{e}_i by defining

$$X_{e_i^0} = q_i E_i^+ (E_i^-)^{-1} = e(-2v_j). \quad (4.2)$$

We note that each X_k are self-adjoint. Moreover, since all X_k are expressed formally as a monomial, we have

$$X_j X_k = q_j^{-2b_{jk}} X_k X_j \quad (4.3)$$

for some skew-symmetrizable exchange matrix $B = (b_{jk})$ and $q_j := q_i$ if $j = f_i^k$ or e_i^0 . By abuse of notation, we will use the same variables for the definition below:

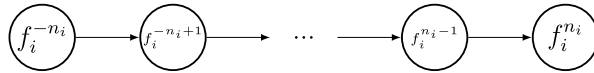
Definition 4.2. We define the quantum torus algebra $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ to be the algebra generated by the elements

$$X_{f_i^{-n_i}}, \dots, X_{f_i^{n_i}}, X_{e_i^0}, \quad i = 1, \dots, n$$

subject to the relations (4.3).

The corresponding $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ -quiver is associated to the seed (S, S_0, B, D) where $D = \text{diag}(d_i)$ and the frozen nodes are $S_0 = \{f_i^{-n_i}\}_{i \in I} \cup \{f_i^{n_i}\}_{i \in I}$.

As a result, we have the following “ F_i -paths” according to the rule in Figure 1, giving the embedding of the \mathbf{f}_i generators explicitly:



The embedding of the generators \mathbf{e}_i can also be presented similarly by “ E_i -paths” on the $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ -quiver (cf. Example 4.4)

Then we have our first main result:

Theorem 4.3. For each choice of reduced expression of w_0 , we have an embedding of algebra arising from the construction of positive representations \mathcal{P}_{λ} :

$$\iota : \mathcal{D}_{\mathfrak{g}} \hookrightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{g}}, \quad (4.4)$$

which induces an embedding of the quantum group into a quotient of $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{g}} / \langle \iota(K_i) \iota(K_i') = 1 \rangle. \quad (4.5)$$

Furthermore, the unitary equivalence Φ for \mathcal{P}_{λ} inducing the change of reduced expression of w_0 corresponds to quiver mutations of $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$. The Coxeter relation in type A, B, G corresponds to 1, 3, 11 quiver mutations respectively.

Example 4.4. The \mathcal{D}_g -quiver in type A_2, B_2, G_2 , and the embedding of generators e_i :

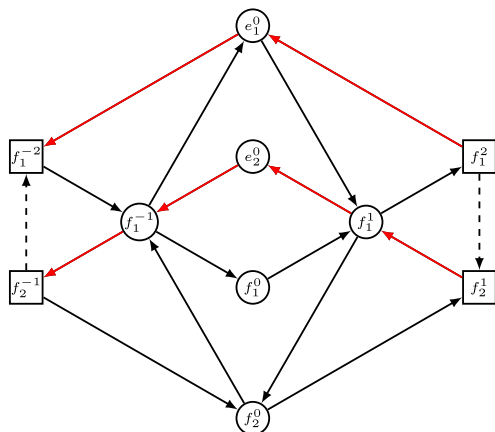


Figure 2: A_2 -quiver, with the E_i -paths highlighted

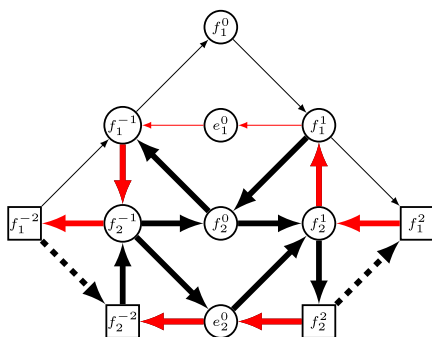


Figure 3: B_2 -quiver, with the E_i -paths highlighted.

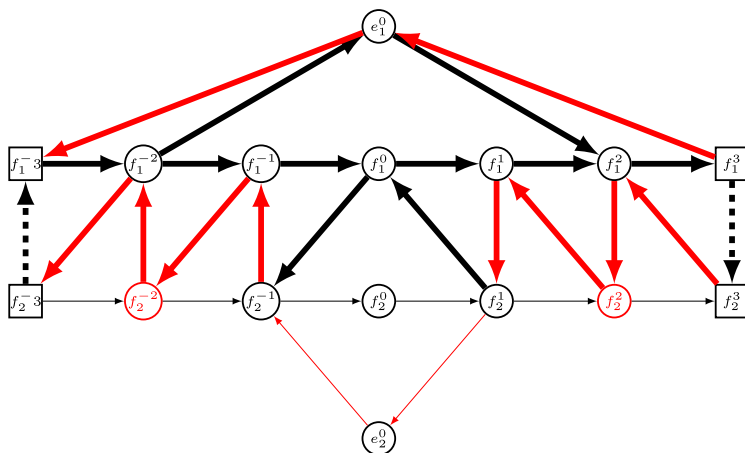


Figure 4: G_2 -quiver, with the E_i -paths highlighted.

5. Basic quivers

In fact, one can see from the Example 4.4 above that the $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ -quiver is symmetric in the sense that it is given by amalgamation of some quivers Q and \tilde{Q} , where \tilde{Q} is obtained by a mirror image of Q along the vertical axis, together with flipping all the arrows. One can arrange these quivers onto triangles so that they correspond to a triangulation of the disk with one puncture and two marked points.

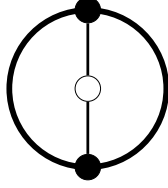


Figure 5: Triangulation of a disk with one puncture and two marked points.

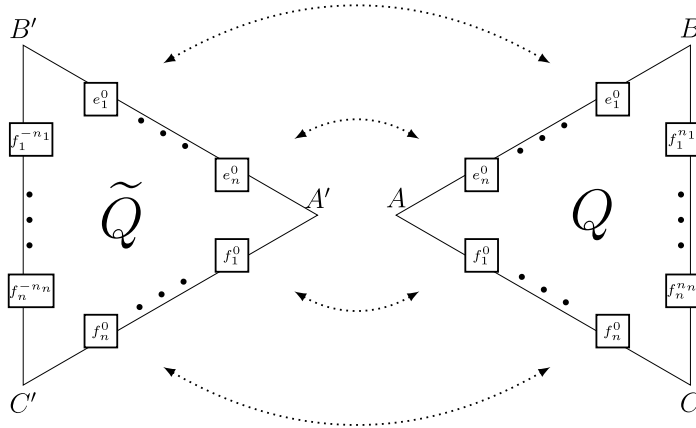


Figure 6: Amalgamating the quivers Q and \tilde{Q} giving the $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ -quiver.

We can provide a characterization of such quivers as follows:

Definition 5.1. A basic quiver Q for $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ corresponding to the word $w_0 = s_{i_1} \dots s_{i_N}$ is a quiver associated to a triangle ABC such that

- the amalgamation of Q and \tilde{Q} along two edges gives the $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ -quiver;
- $\mathcal{M}(Q)$ is identical to the quiver \tilde{Q} (with certain nodes identified), where \mathcal{M} is the quiver mutation flipping w_0 to $s_{i_N} \dots s_{i_1}$;
- Q is identical to the quiver $\mathcal{M}_{\theta}(Q)$ (with certain nodes identified), where \mathcal{M}_{θ} is the quiver mutation changing w_0 to $s_{\theta(i_1)} \dots s_{\theta(i_N)}$, and θ is the Dynkin involution.

Theorem 5.2. For each \mathfrak{g} of simple Lie type, there exists a unique basic quiver Q .

In the classical case, as well as type G_2 , the basic quiver Q is mutation equivalent to the cluster structures of framed G -local system on a disk with 3 marked points, recently discovered by Le [11, 12], where the corresponding longest element w_0 is chosen to be

the powers of a Coxeter element $w_c^{h/2}$. It is known that such framed G -local system carries a cluster ensemble structure $(\mathcal{A}_{G,S}, \mathcal{X}_{G',S})$ which is deeply connected to higher Teichmüller theory [3]. Hence the construction in this work may provide clues for explicitly constructing such theory and its quantization.

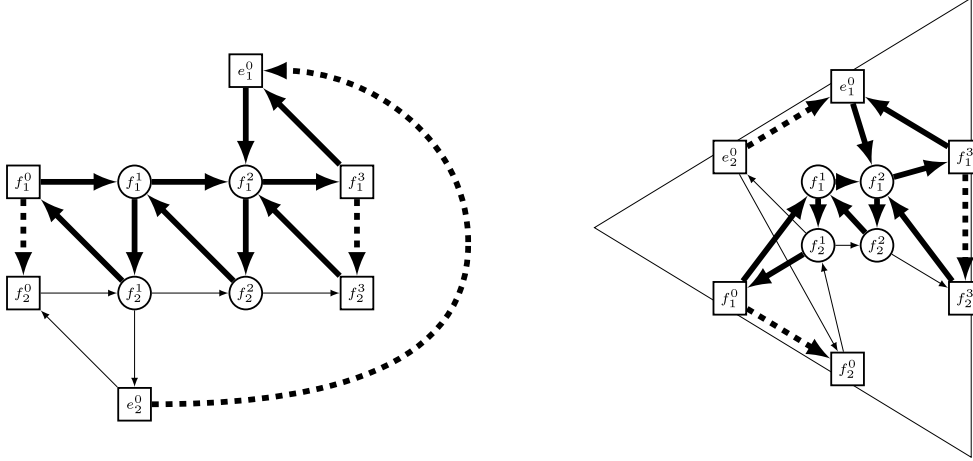


Figure 7: Basic quiver Q in type G_2 arranged in a triangle. One checks that amalgamation of this quiver with its mirror image \tilde{Q} recovers the $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ -quiver in Figure 4.

6. Factorization of universal R -matrix

The coalgebra structure of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ can naturally be represented by amalgamation of two $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ quivers, associated to triangulations of a disk with two punctures and two marked points on the boundary:

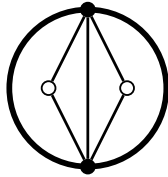


Figure 8: Triangulation of a disk with two punctures and two marked points.

Recall that the universal R -matrix of the quantum group $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ is an element in certain completion of the tensor square

$$\mathcal{R} \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \quad (6.1)$$

and it gives the braiding relation:

$$\mathcal{R} \Delta(X) = \Delta^{op}(X) \mathcal{R}, \quad X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \quad (6.2)$$

Given a reduced expression $w_0 = s_{i_1} \dots s_{i_N}$, one can construct a product formula

$$\mathcal{R} = \mathcal{K} \bar{R} \quad (6.3)$$

Here the *Cartan part* is given by

$$\mathcal{K} = \prod_{ij} q_i^{(A^{-1})_{ij} H_i \otimes H_j} \quad (6.4)$$

where A is the Cartan matrix, and formally we write $K_i =: q_i^{H_i}$. The *reduced R-matrix* is given by products of the quantum dilogarithm

$$\bar{\mathcal{R}} = \prod_{k=1}^N \Psi_{q_{i_k}}(\mathbf{e}_{\alpha_k} \otimes \mathbf{f}_{\alpha_k}) \quad (6.5)$$

Here the non-simple-roots are $\mathbf{e}_{\alpha_k} := T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{k-1}} \mathbf{e}_{i_k}$, and similarly for \mathbf{f}_{α_k} , where T_{i_j} are the (normalized) Lusztig's isomorphisms.

Now using the embedding found in (3.8), we can rewrite the monomials as

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= F_i^{n_i, -} + \dots + F_i^{1, -} + F_i^{1, +} + \dots + F_i^{n_i, +} \\ &= \sum_{i_k=i} X_k^- + \sum_{i_k=i} X_k^+, \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

Then we obtain the following factorization of the reduced R matrix:

Theorem 6.1. *Under the embedding $\iota \otimes \iota$, the reduced R matrix factorized as*

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \Psi_{q_{i_N}}(\mathbf{e}_{i_N} \otimes X_N^-) \dots \Psi_{q_{i_2}}(\mathbf{e}_{i_2} \otimes X_2^-) \Psi_{q_{i_1}}(\mathbf{e}_{i_1} \otimes X_1^-) \cdot \\ &\quad \Psi_{q_{i_1}}(\mathbf{e}_{i_1} \otimes X_1^+) \Psi_{q_{i_2}}(\mathbf{e}_{i_2} \otimes X_2^+) \dots \Psi_{q_{i_N}}(\mathbf{e}_{i_N} \otimes X_N^+). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Since $\mathbf{e}_i = \Phi[u]e(-2p)\Phi^*$ for some unitary transformation by (3.10), and

$$[u]e(-2p) = e^{\pi b_i(u-2p)} + e^{\pi b_i(-u-2p)},$$

each \mathbf{e}_i can also be split into

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^- + \mathbf{e}_i^+$$

where

$$\mathbf{e}_i^\pm := \Phi e^{\pi b_i(\mp u - 2p)} \Phi^*.$$

Then we have

Corollary 6.2. *Under the embedding $\iota \otimes \iota$, the reduced R matrix can also be factorized as*

$$\bar{R} = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4, \quad (6.7)$$

where

$$\begin{aligned} R_1 &= \Psi_{q_{i_N}}(\mathbf{e}_{i_N}^- \otimes X_N^-) \dots \Psi_{q_{i_2}}(\mathbf{e}_{i_2}^- \otimes X_2^-) \Psi_{q_{i_1}}(\mathbf{e}_{i_1}^- \otimes X_1^-), \\ R_2 &= \Psi_{q_{i_N}}(\mathbf{e}_{i_N}^+ \otimes X_N^-) \dots \Psi_{q_{i_2}}(\mathbf{e}_{i_2}^+ \otimes X_2^-) \Psi_{q_{i_1}}(\mathbf{e}_{i_1}^+ \otimes X_1^-), \\ R_3 &= \Psi_{q_{i_1}}(\mathbf{e}_{i_1}^- \otimes X_1^+) \Psi_{q_{i_2}}(\mathbf{e}_{i_2}^- \otimes X_2^+) \dots \Psi_{q_{i_N}}(\mathbf{e}_{i_N}^- \otimes X_N^+), \\ R_4 &= \Psi_{q_{i_1}}(\mathbf{e}_{i_1}^+ \otimes X_1^+) \Psi_{q_{i_2}}(\mathbf{e}_{i_2}^+ \otimes X_2^+) \dots \Psi_{q_{i_N}}(\mathbf{e}_{i_N}^+ \otimes X_N^+). \end{aligned}$$

It turns out that we can further decompose the terms involving the generators $\mathbf{e}_i \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, using the explicit embedding given in Theorem 4.3 for the chosen reduced expression of w_0 . We can decompose $\Psi_{q_i}(\mathbf{e}_i^\pm)$ into products of the form

$$\Psi_{q_i}(\mathbf{e}_i^\pm) = \prod \Psi_q(X_{\dots}), \quad (6.8)$$

where each argument is given by certain cluster monomials X_{\dots} . In particular, each Ψ_q^* will correspond to a *single* quiver mutation according to (2.6).

Finally let

$$P(X \otimes Y) := Y \otimes X. \quad (6.9)$$

Note that $P \circ Ad_{\mathcal{R}}$ acts as identity on the coalgebra structure, hence it naturally corresponds to an automorphism of seed $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i}$. Then we arrive at the last main result:

Theorem 6.3. *We have*

$$P \circ Ad_{\mathcal{R}} = \mu_{i_1}^q \dots \mu_{i_T}^q \circ \sigma^* \quad (6.10)$$

for some mutation sequence $\mu_{i_T} \dots \mu_{i_1} : \mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i}'$ realizing the half-Dehn twist, and $\sigma : \mathbf{i}' \simeq \mathbf{i}$ is a permutation of the quiver returning to the original seed. The factors R_1, R_2, R_3, R_4 in (6.7) correspond to the sequences of quiver mutations realizing the 4 flips of triangulations giving the half-Dehn twist as follows:

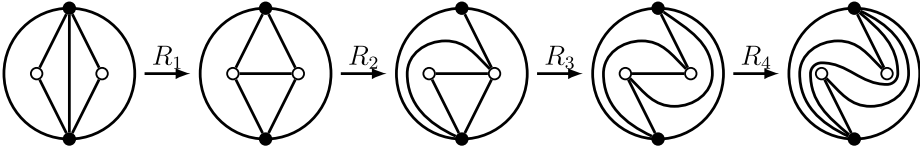


Figure 9: Half-Dehn twist.

The number T of quiver mutations are given by the following table

$$T = \begin{cases} \frac{2}{3}n(n+1)(n+2) & \text{Type } A_n \\ \frac{4}{3}n(4n^2-1) & \text{Type } B_n \text{ and } C_n \\ \frac{4}{3}n(n-1)(4n-5) & \text{Type } D_n \\ 1196 & \text{Type } E_6 \\ 3464 & \text{Type } E_7 \\ 12064 & \text{Type } E_8 \\ 976 & \text{Type } F_4 \\ 144 & \text{Type } G_2 \end{cases}$$

such that each flip of triangulations are given by $\frac{T}{4}$ quiver mutations.

The quiver mutations realizing a single flip of triangulations is interesting in its own right, and it is essential in any higher Teichmüller theories. The sequence of flips for the case of type A_n is well-known, while the other cases realizing the half-Dehn twist appear to be new.

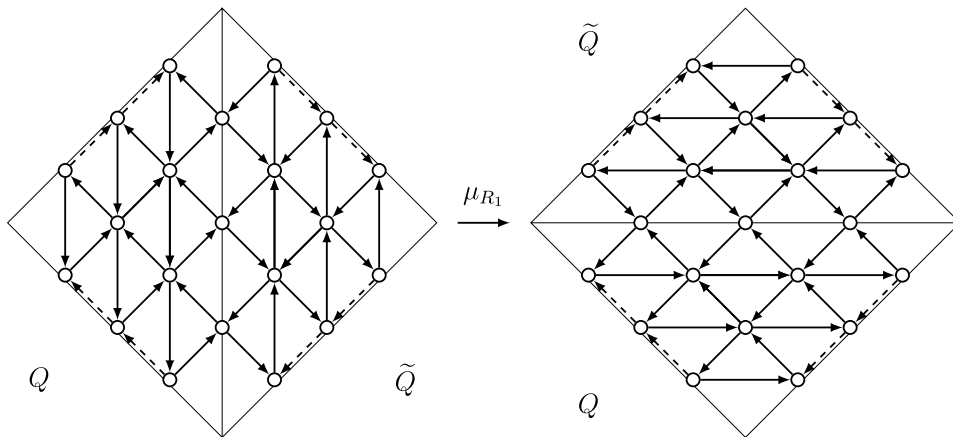


Figure 10: Flipping of triangles in type A_n requires $\binom{n+2}{3}$ quiver mutations

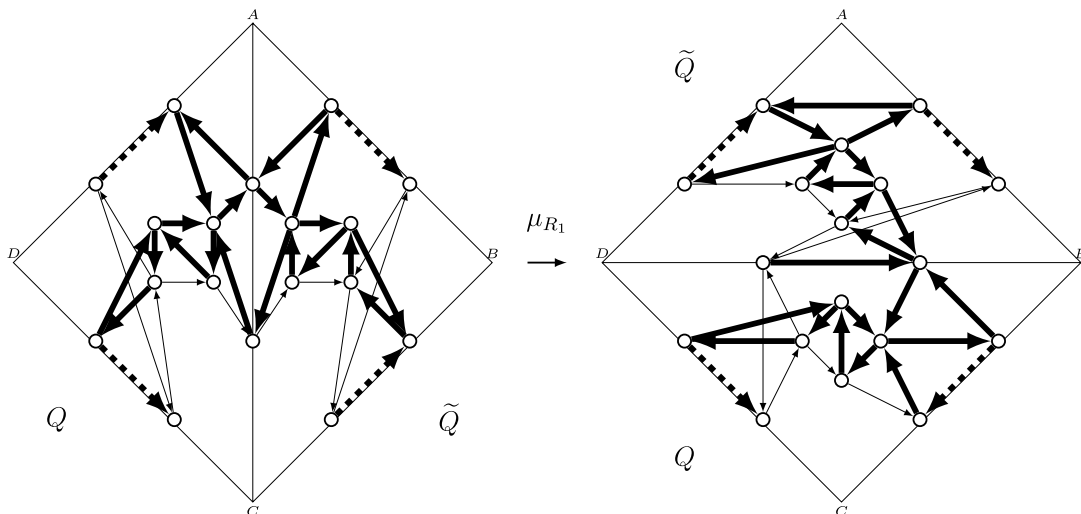


Figure 11: Flipping of triangles in type G_2 requires 36 quiver mutations

References

- [1] A.G. Bytsko, K. Teschner, *R-operator, co-product and Haar-measure for the modular double of $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$* , Comm. Math. Phys., **240**, (2003), 171-196.
- [2] L.D. Faddeev, *Modular double of quantum group*, arXiv:math/9912078v1 [math.QA], (1999).
- [3] V. Fock, A. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, Publications Mathématiques de l’IHÉS, **103**, (2006): 1-211.
- [4] I. Frenkel, I. Ip, *Positive representations of split real quantum groups and future perspectives*, Int. Math. Res. Notices, **2014** (8), (2014), 2126-2164.
- [5] K. Hikami, R. Inoue, *Braiding operator via quantum cluster algebra*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47** (47), (2014): 474006.

- [6] I. Ip, *Positive representations of split real simply-laced quantum groups*, arXiv:1203:2018, (2012)
- [7] I. Ip, *Positive representations of split real non-simply-laced quantum groups*, J. Alg (2015) **425**, (2015), 245-276.
- [8] I. Ip, *Cluster realization of $U_q(\mathfrak{g})$ and factorizations of the universal R -matrix* arXiv 1612.05641 (2016)
- [9] R. Kashaev, *The Heisenberg double and the pentagon relation*, Algebra i Analiz **8**(4) (1996), 63-74.
- [10] R. Kashaev, *The quantum dilogarithm and Dehn twists in quantum Teichmüller theory*, Physics and Combinatorics (2000, Nagoya), World Sci. Publ., River Edge, NJ (2001): 63-81.
- [11] I. Le, *Cluster structures on higher Teichmüller spaces for classical groups*, arXiv:1603.03523, (2016).
- [12] I. Le, *An approach to cluster structures on moduli of local systems for general groups* arXiv:1606.00961, (2016).
- [13] B. Ponsot, J. Teschner, *Liouville bootstrap via harmonic analysis on a noncompact quantum group*, arXiv: hep-th/9911110, (1999).
- [14] B. Ponsot, J. Teschner, *Clebsch-Gordan and Racah-Wigner coefficients for a continuous series of representations of $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$* , Comm. Math. Phys., **224**, (2001), 613-655.
- [15] G. Schrader, A. Shapiro, *A cluster realization of the $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ R -matrix from quantum character varieties*, arXiv:1607.00271 (2016).
- [16] S. Suzuki, *The universal quantum invariant and colored ideal triangulations*, arXiv:1612.08262 (2016).

Quiver mutation loops and partition q -series

加藤 晃史 (東京大学)*

2017年3月26日

1. はじめに

Kontsevich による homological mirror 対称性の提唱以降、双対性の解明にとって、その圏論的な意味付けや定式化を与えることがますます重要になっている。特に近年では、弦理論やゲージ理論の状態の空間には三角圏の構造が入ることが明らかにされ、双対性の理解のためには「分配関数=安定状態の数え上げの母関数」を知ることが極めて重要になってきている。こうした双対性は、Donaldson-Thomas 不変量や Gromov-Witten 不変量、3次元双曲多様体の Chern-Simons 不変量など、数学の様々な分野でそれぞれ定義される不変量の間に関係を予言する。

不思議なことに、これらの high-tech 数学を駆使して議論される数学的・数理物理的対象には、簾(えびら, quiver) と、その変異(mutation) という単純な組合せ論的データが共通して現れ、遺伝子のように理論の全体構造を統制している。「遺伝情報」の「発現」のしかたは様々あれど、それらに共通する本質的なデータを直接調べられないだろうか?たとえば、その良い不変量は何であろうか?

簾とその変異については、Fomin-Zelevinski, Fock-Goncharov らによって導入された団代数(cluster algebra)の果たす役割は極めて大きい。このような単純で美しい代数系による実現は、ただちに可積分系・低次元トポロジー・表現論・代数幾何学・WKB 解析などの分野への応用されている。(たとえば中西知樹氏の特別講演[22]を参照。)

数理物理的な観点から眺めると、cluster 変数や cluster 変換は力学変数とその代数関係式を扱うため、運動方程式を用いた古典論であると言える。では簾やその変異が与えられた時、対応する自然な場の量子論は何であろうか?

quiver をある時刻における離散化された「空間」と考え、mutation をその離散的「時間発展」とみなすと、変異列(mutation sequence)は、空間の離散的・非一様な時間発展と見なせる。もしその上でうまく定義された統計力学模型を考えることができれば、それは非自明な時空構造(重力)を反映した場の理論の模型であると考えられ、幾何学の量子化という観点からも興味深い研究対象となるだろう。

筆者は寺嶋郁二氏(東京工業大学)との共同研究で、与えられた簾変異の列 γ (quiver mutation loop = exchange graph 上のループ)に対し、分配 q 級数 $Z(\gamma)$ と呼ばれる母関数を定義し、そのいくつかの興味深い性質を明らかにした[11, 12]。

分配 q 級数 $Z(\gamma)$ は、可解格子模型の状態和の処方箋、つまり局所的に定義された重み(Boltzmann weight)の積を可能なすべての配位にわたって足し上げるという形で定義される。定義が比較的単純であるにもかかわらず、以下のような著しい性質を持つことが証明できる。(1) $Z(\gamma)$ は簾変異の列 γ の反転操作や巡回シフトのもとで不変であり、圏論的なモノドロミーの不変量と考えられる。(2) 簾変異の列 γ の変形に対し、量子ダイログ関係式に現れるのと同様なペンタゴン関係式を満たす。(3) ADE

2017年度日本数学会年会(2017年3月)無限可積分系セッション特別講演予稿

* 〒153-8914 東京都東京都目黒区駒場3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

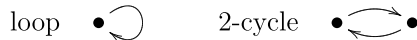
e-mail: akishi@ms.u-tokyo.ac.jp

型ディンキン図形やそのペアから自然に定義される分配 q 級数は、アフィン・リー環に附随する coset 型共形場理論に現れるフェルミ型指標公式に一致し、適当な q ベキ補正のもとで $Z(\gamma)$ は保型形式となる。(4) reddening sequence というクラスの簇変異列 γ に対しては、分配級数は量子ダイログの順序積と本質的に一致する。後者は B. Keller が定義した combinatorial Donaldson-Thomas invariant にほかならず、これは Kontsevich-Soibelman が定義した 3-Calabi-Yau 圏の不変量 (安定対象の数え上げ母関数) の組合せ論的ヴァージョン、あるいは位相的弦理論の分配関数と関連している。

本稿では、証明や計算の細部は論文 [11, 12] に譲り、論文には盛り込めなかった分配 q 級数を考えるに至った背景などについてやや詳しく述べたいと思う。簇やその変異に関連する分野、特にクラスター代数・多元環の表現論・代数幾何の導来圏への応用等は近年活発に研究され、関連する文献は膨大である。本稿では、分配 q 級数の説明に直接関係のあるもの限定して引用させていただいたことをあらかじめお断りしておきたい。興味のある方は、キーワード等から文献を検索していただければ幸いである。

2. 簇とその変異

簇 (quiver) とは、頂点集合 Q_0 と有向辺集合 Q_1 (矢, arrow) からなるグラフ (1 次元複体) $Q = (Q_0, Q_1)$ のことであり、本稿では loop や 2-cycle を持たない有限グラフと仮定する。



簇 Q の頂点 k における変異 (mutation) とは、 Q から新しい簇 $Q' = \mu_k(Q)$ を作る以下のような操作である。 Q' の頂点集合は Q のそれと同じであり、 Q' の矢は、規則

- 1) $i \rightarrow k \rightarrow j$ という長さが 2 の経路があれば、 $i \rightarrow j$ という長さ 1 の経路を追加する。
- 2) 頂点 k を source または target とする矢の向きをすべて反転させる。
- 3) もし新たに 2-cycle が生じた場合、それを構成する 2 辺を取り除く。

をこの順序で適用して定まるものとする。一般に、変異は対合的 $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$ であることが知られている。

簇 Q の頂点を $1, 2, \dots, n$ と番号付けしたとき、 $b_{ij} = |\{(i \rightarrow j) \in Q_1\}| - |\{(j \rightarrow i) \in Q_1\}|$ を (i, j) 成分とする反対称行列 $B = (b_{ij})$ を対応させると、これは次の全単射を与える：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{loop や 2-cycle を持たない簇} \\ Q_0 = \{1, \dots, n\} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{反対称な } n \text{ 次整数正方行列} \\ B = (b_{ij}) \end{array} \right\}$$

この対応のもと、簇変異は Fomin-Zelevinsky [3, 4] が定義した行列変異 (matrix mutation) に一致し、 $Q' = \mu_k(Q)$ に対応する行列 B' は次で与えられる：

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ または } j = k \text{ のとき} \\ b_{ij} + \text{sgn}(b_{ik}) \max(b_{ik} b_{kj}, 0) & \text{その他} \end{cases}$$

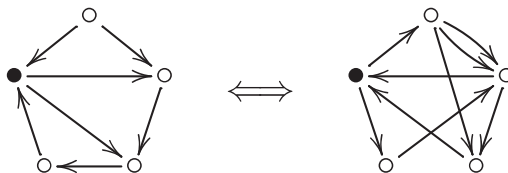


図 1: 簇変異の例：左右の簇は黒丸の頂点での変異を通じて互いに移り合う。

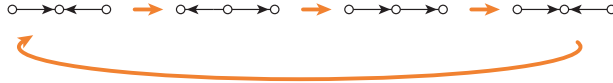


図 2: 変異ループの例

3. 変異列と変異ループ

引き続いて行われる一連の変異を**変異列 (mutation sequence)**と呼ぶ。変異の際に頂点のラベルは不変であるという暗黙の約束のもとでは、変異列は変異が起こる頂点の列で指定できる。すなわち頂点集合 Q_0 をアルファベットとする長さ T の列 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ は、 $Q(0) := Q, Q(t) := \mu_{m_t}(Q(t-1)), (1 \leq t \leq T)$ で定義される箭の列

$$Q(0) \xrightarrow{\mu_{m_1}} Q(1) \xrightarrow{\mu_{m_2}} \dots \rightarrow Q(t-1) \xrightarrow{\mu_{m_t}} Q(t) \rightarrow \dots \xrightarrow{\mu_{m_T}} Q(T) \quad (1)$$

を表す。 $Q(0)$ を始箭 (initial quiver), $Q(T)$ を終箭 (final quiver) と呼ぶ。

箭 Q が n 個の頂点を持つ時、 n 通りの mutation $\mu_1(Q), \dots, \mu_n(Q)$ が考えられる。 Q に変異を繰り返し行なって得られるすべての箭 (の同型類) を頂点集合とし、2つの箭 Q', Q'' が頂点 k に関する変異で互いに移り合うときに、それらをラベル k を持つ無向辺で結ぶことにより、 n -regular (各頂点から n 本の辺が出ている) グラフ $\mathbb{X}(Q)$ が得られる。これを **quiver exchange graph** と呼ぶ¹。 $\mathbb{X}(Q)$ が有限グラフであるための必要十分条件も知られている。[21]

Quiver exchange graph $\mathbb{X}(Q)$ は、quiver Q と変異でつながるすべての箭を分類する空間であるから、一種の (離散的な) モジュライ空間とみなすことができる。その幾何学的構造はどのようなものであろうか? 箭変異列 (1) は、 $Q(0)$ を始点、 $Q(T)$ を終点とする、 $\mathbb{X}(Q)$ 上の長さ T の経路を表している。 $\mathbb{X}(Q)$ 上「閉曲線」に相当するのが**変異ループ (mutation loop)** である。すなわち、変異ループ $\gamma = (Q, \mathbf{m}, \varphi)$ とは、 Q を始箭 $Q(0)$ とする変異列 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ であって、頂点の入れ替え $\varphi: Q(T)_0 \xrightarrow{\sim} Q(0)_0$ が始箭 $Q(0)$ と終箭 $Q(T)$ の同型を誘導するような、変異列の特別な場合である。

例えば、図2は、 A_3 型箭 $Q = (1 \rightarrow 2 \leftarrow 3)$ を始箭とし、 $\mathbf{m} = (2, 1, 3)$, $\varphi = \text{id}$ と置いたときの変異ループ $\gamma = (Q; \mathbf{m}, \varphi)$ を表している。この場合は、境界条件 φ として $\text{id}: 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3$ の代わりに「ひねり」を加えて $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1$ をとることも可能であるが、これは異なる変異ループと見なす。

4. 幾何学的動機づけ

本研究の基本的な問題意識は「変異ループに対する良い不変量は何か?」である。なぜこのような問題に興味があり、特に何をもって「良い」不変量と見なすのかを説明するために、低次元トポロジーからの動機を述べたい。

4.1. quiver とリーマン面の三角形分割

箭や団代数は、もともとリーマン面の理想三角形分割と密接な関係がある。いま、種数 g で p 個の puncture を持つ、連結で向き付けられたリーマン面 $\Sigma = \Sigma_{g,p}$ を考える²。 Σ

¹ クラスター代数の文脈で exchange graph という場合は、各頂点に対応させるのは quiver ではなく、cluster 変数の並び “seed” であり、頂点の同一視のされかたが異なる。

² 簡単のため Σ は境界を持たないと仮定するが、境界がある場合も係数 (frozen variable) 付き cluster 代数の立場から興味深い。また、完備双曲構造が入るための条件 $2g - 2 + p \geq 0$ も仮定する。

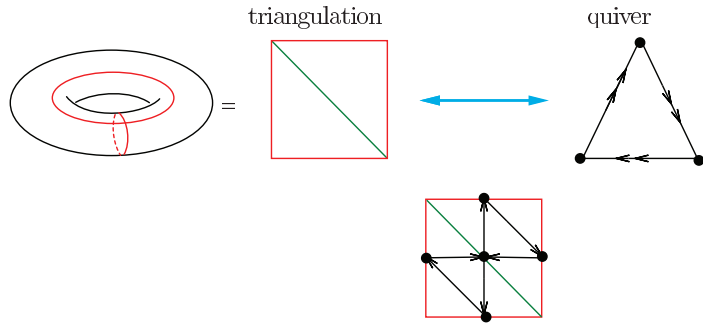


図 3: トーラスの理想三角形分割と、対応する箭

上の単純弧 (simple arc) で、端点が puncture にあるものを up to isotopy で考えよう。 Σ の理想三角形分割 (ideal triangulation) とは、互いに交わらない有限個の弧の集合 \mathcal{T} で、それ以上は arc の本数が増やせないものことである。このとき、 $\Sigma \setminus \mathcal{T}$ は三角形の非交和に分割されている。arc の本数 n と三角形の個数 t はそれぞれ $n = 6g - 6 + 3p$, $t = 2g - 2 + 2p$ で与えられる。

理想三角形分割 \mathcal{T} に対し、次のルールで頂点数が $n = |\mathcal{T}|$ の箭 $Q_{\mathcal{T}}$ が定まる³ :

- \mathcal{T} の各辺の中点に $Q_{\mathcal{T}}$ の頂点を置く。
- 各理想三角形について、その3辺の中点を、順に時計回りに3本の矢でつなぐ。

図3は、1点穴あきトーラス $\Sigma_{1,1}$ の場合の例である。

Σ の向きを保つ微分同相 φ が与えられたとき、 \mathcal{T} の各 arc を φ で一斉に動かすことで、新しい理想三角形分割 \mathcal{T}' が定まる。こうして、 Σ の理想三角形分割全体の集合には、写像類群 $\pi_0(\text{Diff}_+(\Sigma))$ が自然に作用する。

Σ 上の任意の二つの理想三角形分割 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ は、flip という操作 (Whitehead move とも言う) を有限回行って移り合うことが知られている。ただし、辺 e に関する flip とは、辺 e を共有する2つの三角形からなる四角形の対角線が e, e' であるとき、arc e を取り去って e' 置き換える操作である (図4左)。flip 操作は四角形の外側について何も変更を加えないという意味で局所的である。辺 e における flip で理想三角形分割 \mathcal{T} が \mathcal{T}' に変わる時、対応する箭 $Q_{\mathcal{T}}$ と $Q_{\mathcal{T}'}$ はまさしく mutation で移り合っている (図4右)。つまり、理想三角形分割 \mathcal{T} と箭 $Q_{\mathcal{T}}$ の対応を通して、写像類群の作用を変異列を用いて調べられるのである。

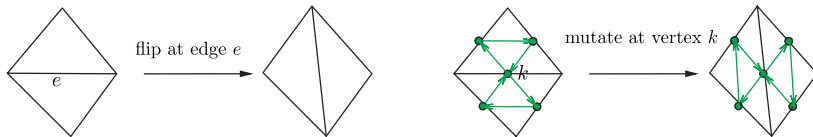


図 4: flip (左) と箭変異 (右)

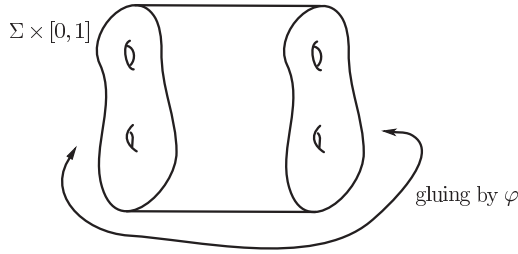


図 5: mapping torus

4.2. 変異ループと 3 次元多様体

では、変異「ループ」が自然であるような幾何学的設定は何だろうか？再びリーマン面で考えてみよう。リーマン面 Σ とその向きを保つ同相写像 $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ が与えられた時、mapping torus とは

$$M_\varphi := (\Sigma \times [0, 1]) / (1, x) \sim (0, \varphi(x))$$

で定義される 3 次元多様体である。 M_φ は Σ をファイバーとする S^1 上の曲面束の構造を持つ (図 5)。 $[0, 1]$ を S^1 に丸める際に用いられる貼り合わせデータ = 境界条件 φ の性質は、多様体 M_φ の性質に反映する。たとえば、 φ が pseudo-Anosov であることと M_φ が双曲多様体の構造を持つことは同値であることが知られている ([23] 参照)。

前節で $\varphi \in \text{Diff}_+(\Sigma)$ を flip / mutation の列との関係を見た。mapping cylinder M_φ は φ で特徴づけられる図形だから、 φ を表す変異列は、 M_φ をどのように組み立てていけば良いかという時系列をコード化していると考えられる。実際、2次元面の三角形分割に対する flip 操作を、1次元高い 3次元の理想四面体を順次貼り付ける操作とみなせば、 M_φ を理想単体の積み上げ (stacking) たものとして理解できる。言い換えれば、変異ループは、 M_φ の理想単体分割 (理想四面体分割) を記述する。

トポロジーの立場からは、写像類 φ や mapping cylinder M_φ のトポロジーこそが重要であって、理想単体分割は、便利ではあるが人為的・副次的な存在である。この立場では、「良い不変量」は M_φ のトポロジーに依存しても、その理想単体分割のしかたには依るべきではない。

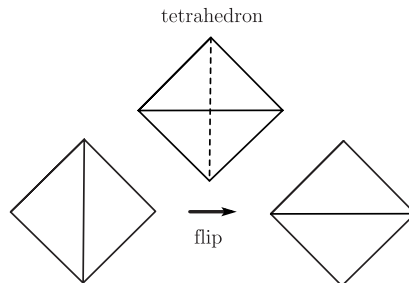


図 6: flip 操作と理想四面体 : 辺を挟む四角形と理想四面体の 2 面が辺どうしで重なるように貼り付けると、元の辺は隠され、flip された辺が手前に見えている。

³ひとつの三角形の 2 辺が貼り合わされている (self-folded triangle) 場合には若干の修正が必要。詳しくは [24] を参照のこと。

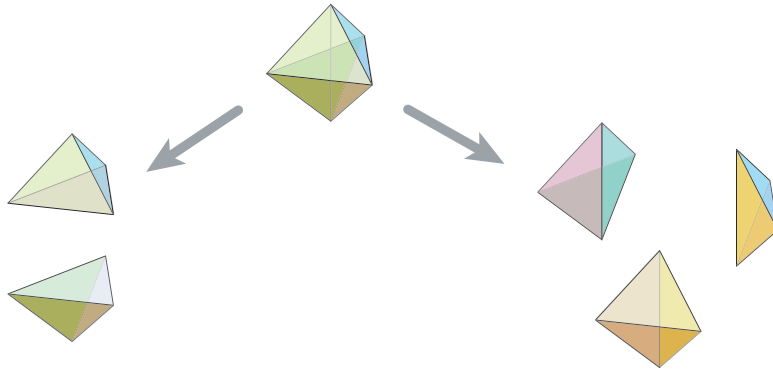


図 7: Pachner 2-3 move

任意の三角形分割が flip 列で移り合うことの 3 次元版として、「3 次元多様体の理想単体分割が図 7 に示すような Pachner 2-3 move で移り合う」ことが知られている。

理想四面体の積み上げ方を指定する変異ループは、 $\mathbb{X}(Q)$ 上の閉曲線であった。Pachner 2-3 move を行うことは、この変異ループを局所的に「経路変更」することにあたる。特に、変異列の長さ = 理想四面体の個数も変化する。変異ループの「良い不変量」がもしあるならば、それは、このような経路変更のもとで不変であるという性質 (pentagon relation) を備えているべきだし、逆にそれさえ成り立てば、単体分割のしかたに依らないことが保証される。

以上を標語的にまとめれば表 1 のようになる。

4.3. 運動方程式としてのクラスター変換

M_φ が双曲構造を許容する場合、位相構造は幾何構造も決定するので、各理想四面体の「形」もまた簇変異列 = 四面体の貼り合わせで決定される。理想四面体の形は shape parameter という複素数で特徴づけられるが、それらがうまく貼り合う条件としてクラスター変換を理解することができる。⁴ 数理物理的な観点からは、cluster 変換は力学変数である shape parameter とその代数関係式 = 運動方程式を扱っているという意味で、場の古典論であると言える。では場の量子論の相当するものは何だろうか？

Combinatorics	Geometry
Quiver	Triangulation of a surface
Mutation	Tetrahedron
Mutation sequence	Surface diffeomorphism
Pentagon move	Pachner 2-3 move
Mutation loop	Surface bundle over S^1

表 1: 簇変異と 3 次元幾何学との対比

⁴ 紙数の関係で詳細には触れられないが、Penner, Fock, Teschner, Gekhtman-Shapiro-Vainshtein, Fock-Goncharov, Fomin-Shapiro-Thurston, Nagao-Terashima-Yamazaki, Hikami-Inoue らの研究を参照。

4.4. 経路積分による量子化＝分配関数

一口に量子化と言っても (i) 代数的：非可換変形、 \mathcal{D} -加群、… (ii) 幾何学的：幾何学的量子化、symplectic/Poisson 構造、… (iii) 組合せ論的：統計力学的状態和、経路積分、格子模型、… など様々なアプローチがある。我々は叢変異列といった組合せ論的データから出発するので、それと相性が良い (iii) の方針をとろう、

分配関数 (partition function) とは、統計力学における状態和、あるいは場の量子論における経路積分で定義され、「すべての可能な状態にわたり、自然な重みをつけて足し上げた母関数」を指す。場の量子論では「可能な状態」は時空の各点に配置された場 (ゲージ場、スピンなど) の総体であり、その重みは局所的な重みの時空間全体に渡る積で表される。これは「時空内で離れた場は独立に振る舞う」という「場の局所性」からの自然な要請である。4.2節で議論した mapping torus \leftrightarrow 理想四面体の積み重ね \leftrightarrow 叢変異列、という対応を手掛かりにすれば、一般の叢とその変異列 (1) でも、 $0 \leq t \leq T$ (離散的) 時刻、 $Q(t)$ を時刻 t における空間方向とするような図形を考え、さらに変異ループ γ の場合は、始叢と終叢を境界条件 φ で貼り合わせるのが自然であろう。こうして $\gamma = (Q, \mathbf{m}, \varphi)$ から得られる図形 (有向グラフ) を \mathfrak{M}_γ とすれば、これは mapping torus M_φ の役割を果たす (図8)。結局、我々の目的は、「 \mathfrak{M}_γ を時空とするような場の量子論 (統計モデル) を構成せよ。」ということになる。

5. 分配 q 級数の定義

5.1. 格子模型とのアナロジー

通常の格子模型は、格子 Λ 上の各点 i に乗っている自由度 s_i (spin, color, ...) と、局所的な重み (Boltzmann weight) $W(\{s_i\})$ を与えれば模型は完全に規定され、その分配関数は状態和

$$Z = \sum_{s_i: i \in \Lambda} \prod W(\{s_i\})$$

で与えられる。たとえば、IRF 型の可解格子模型では、face と呼ばれる正方形に対して重み W が定義される (図9左)。格子模型に特定の時間方向は無いが、ある方向を時間軸と思えば、時間発展は face を順次付け加えてゆく操作にあたる (図10)。この (量子力学的) 時間発展では、 i 番目のくぼみに face を貼り付けるときに限って $s_i \rightarrow s'_i$ という spin 変数の変化 (quantum jump) が可能であることに注意する (図9右)。

我々の場合も、グラフ \mathfrak{M}_γ の各頂点にスピンの自由度がのっていると考え、これを s

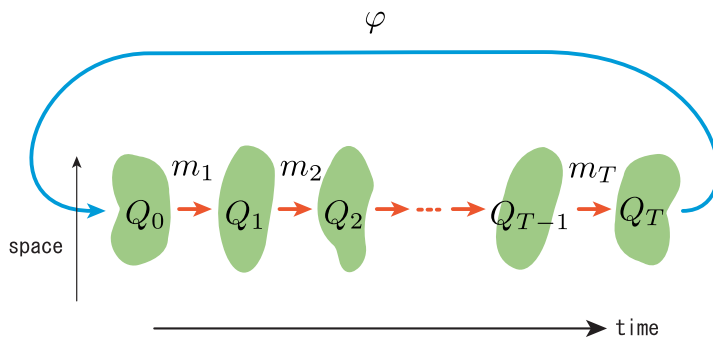


図 8: 叢変異ループ γ が定める時空グラフ \mathfrak{M}_γ

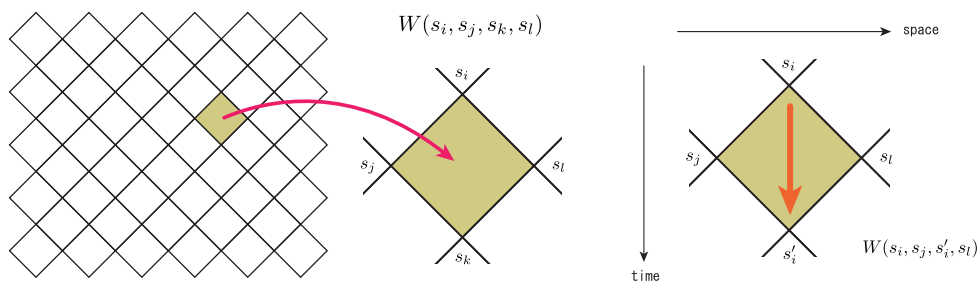


図 9: IRF model の Boltzmann weight (左) と face の添加が表す局所的な時間発展 (右)

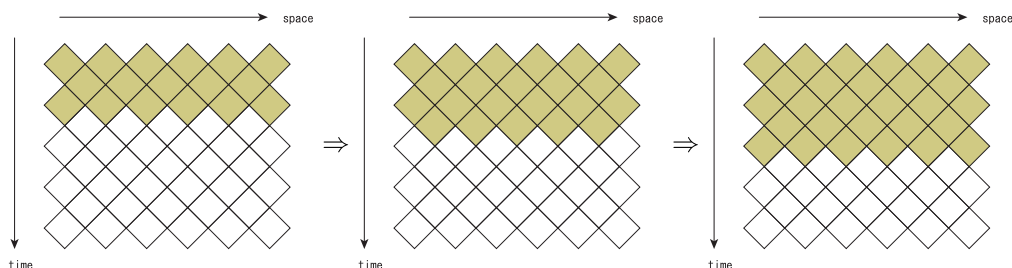


図 10: 時間発展 : 1 行付け加える

変数 (s -variable) と名付ける。face の貼り付けに相当するのは理想四面体の貼り付け、すなわち籐変異であるから、各変異に対して局所的な重みの規則を与えれば良い。ただし、グラフ \mathfrak{M}_γ は正方格子のような一様性を持たないため注意が必要である。

以上のように考えれば、統計模型を乗せる有向グラフ \mathfrak{M}_γ の作りかたは自ずと決まる。まず、すべての時刻の籐の非交和 $Q(0) \sqcup Q(1) \sqcup \dots \sqcup Q(T)$ を用意する、 $Q(t-1)$ と $Q(t)$ が頂点 m_t での変異の前後の籐ならば、この変異の影響を受けなかった頂点や矢は同一視されなければならないが、多少なりとも影響を受けた頂点や矢は同一視してはいけない。最後に最後に始籐と終籐を境界条件 φ で貼り合わせる。こうして得られる有向グラフが \mathfrak{M}_γ である。

5.2. 変異の重みと分配 q 級数

今までの考察から、各 mutation に対して局所的重み (Boltzmann weight) を定義し、変異列全体としての重みは、各変異の重みの積と定めるのが自然である。

まずは、単独の変異に注目しよう。籐 Q の各頂点に s -変数の値が割り当てられているとき、頂点 i での変異を行うとする。 s_i はこの変異が起こる直前までの頂点 i の s -変数の値であり、この変異が起こった直後にはそれは別の値 s'_i に変化し得る。 i 以外の頂点 j の s -変数の値 s_j ($j \neq i$) は変化しない。このとき、頂点 i での変異 $\mu_i : Q \rightarrow Q'$ に対する重みを次で定義する：

$$W = \frac{q^{\frac{1}{2}(s_i + s'_i - \sum_{j:j \rightarrow i} s_j)(s_i + s'_i - \sum_{l:i \rightarrow l} s_l)}}{(q)_{s_i + s'_i - \sum_{j:j \rightarrow i} s_j}}$$

ただし、 $(q)_n = (1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)$ は q -Pochhammer 記号である。 s -変数と

$$k = s_i + s'_i - \sum_{j:j \rightarrow i \in Q_1} s_j, \quad k^\vee = s_i + s'_i - \sum_{l:i \rightarrow l \in Q_1} s_l$$

という関係で定義される力学変数 k, k^\vee を導入すれば、変異の重みは $W = \frac{q^{\frac{1}{2}kk^\vee}}{(q)_k}$ と簡潔に表される。

長さ T の変異列 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ の場合、各変異ごとに k -変数が必要になるため、全部で T 個の k 変数の組 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_T)$ を考えることになる。

k 変数と s 変数の線型関係は、箭変異列の大域的（特に境界条件）の情報が影響を受ける。上では s 変数を用いて k 変数を表したが、この線型関係を逆解きして、 s 変数を k 変数を用いて表すことができる場合 (admissible mutation loop) を考えよう。

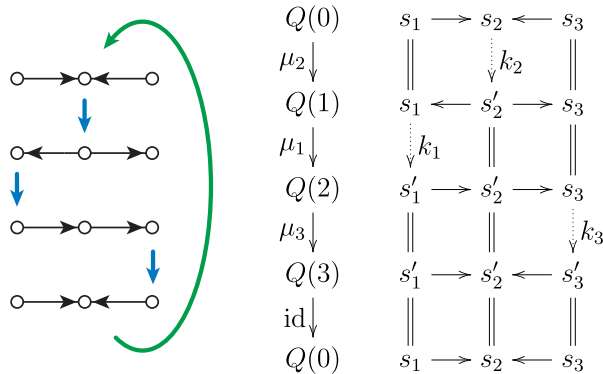
変異ループ $\gamma = (Q, \mathbf{m}, \varphi)$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_T)$ に対し、その分配 q 級数を

$$Z(\gamma) := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^T} \prod_{t=1}^T W(m_t),$$

と定義する。但し、 $W(m_t)$ は t 番目の変異の重みであり、 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ である。見かけ上、境界条件 φ は $Z(\gamma)$ に現れないが、上で述べた k 変数と s 変数の関係を通じて影響を与えている。

5.3. 分配級数の計算例

Section 3 で扱った A_3 型 Dynkin quiver $Q = (1 \rightarrow 2 \leftarrow 3)$ を始箭とする変異ループ $\gamma = (Q, \mathbf{m}, \text{id})$, $\mathbf{m} = (2, 1, 3)$ で分配 q 級数を計算しよう。下図の右側は、mapping cylinger にあたるグラフ \mathfrak{M}_γ を表している。ただし、各頂点には対応する s 変数を書き込んである。 \mathfrak{M}_γ のそれぞれの縦方向の 2 重線の上で s 変数は一定値をとり、点線の矢印で表された mutation でのみ変化し得る。



k, k^\vee 変数と s 変数の関係は

$$\begin{aligned} k_2 &= s_2 + s'_2 - s_1 - s_3, & k_1 &= s_1 + s'_1 - s'_2, & k_3 &= s_3 + s'_3 - s'_2. \\ k_2^\vee &= s_2 + s'_2, & k_1^\vee &= s_1 + s'_1, & k_3^\vee &= s_3 + s'_3. \end{aligned}$$

で与えられる。境界条件から $s_i = s'_i$ ($i = 1, 2, 3$) が課されるので、この関係を用いて s 変数を k 変数で表すことができる。

$$\begin{aligned} s_1 = s'_1 &= \frac{1}{4} (3k_1 + 2k_2 + k_3), & s_2 = s'_2 &= \frac{1}{2} (k_1 + 2k_2 + k_3), \\ s_3 = s'_3 &= \frac{1}{4} (k_1 + 2k_2 + 3k_3). \end{aligned}$$

従って、 γ の重みは各

$$\begin{aligned} W(\gamma) &= \frac{q^{\frac{1}{2}(s_2+s'_2-s_1-s_3)(s_2+s'_2)}}{(q)_{s_2+s'_2-s_1-s_3}} \frac{q^{\frac{1}{2}(s_1+s'_1-s_2)(s_1+s'_1)}}{(q)_{s_1+s'_1-s_2}} \frac{q^{\frac{1}{2}(s_3+s'_3-s'_2)(s_3+s'_3)}}{(q)_{s_3+s'_3-s'_2}} \\ &= \frac{q^{\frac{3}{4}k_1^2+k_1k_2+k_2^2+k_2k_3+\frac{3}{4}k_3^2+\frac{1}{2}k_3k_1}}{(q)_{k_1}(q)_{k_2}(q)_{k_3}}. \end{aligned}$$

k 変数について和をとることにより、分配 q 級数

$$Z(\gamma) = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{3}{4}k_1^2+k_1k_2+k_2^2+k_2k_3+\frac{3}{4}k_3^2+\frac{1}{2}k_3k_1}}{(q)_{k_1}(q)_{k_2}(q)_{k_3}} \in \mathbb{N}[[q^{1/4}]] \quad (2)$$

を得る。実はまさに同じ式が coset conformal field theories の指標公式として現れている [13]。この $Z(\gamma)$ は

$$Z(\gamma) = \frac{1}{(q)_{\infty}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{3}{4}n^2}, \quad (3)$$

と書き直すことができ、この表式から $q^{-\frac{1}{4}}Z(\gamma)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ のあるレベルの合同部分群に関して保型関数であることがわかる。

分配 q 級数 (2) は、対称行列 $D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ を用いて

$$Z(\gamma) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^3} \frac{q^{\mathbf{k}^T D \mathbf{k}}}{(q)_{k_1}(q)_{k_2}(q)_{k_3}}$$

と書くことができるが、 D は A_3 型 Cartan 行列の逆行列になっている！

$$D^{-1} = C_{A_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

この現象は、次節で述べる形で一般化される。

6. Fermionic formula

各頂点が source か sink のいずれかであるような簾を alternating という。このとき、長さが2以上の経路が存在しないので、変異の規則は単に矢の向きを変える操作となる。

Keller [14] は、 Y -system の周期性予想を証明するため、alternating Dynkin quiver のペア Q, Q' から、 $Q \square Q'$ と書かれる新しい簾を定義した (図 12)。 $Q \square Q'$ は、自然に定義されるテンソル積 $Q \otimes Q'$ において、(Q の sink, *) という頂点に出入りする Q' 由来

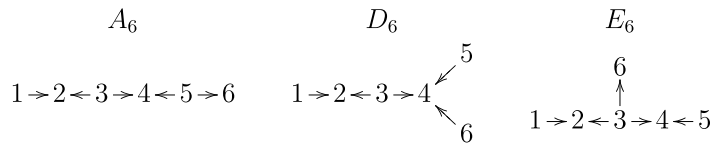


図 11: ADE 型の alternating quiver

の辺の向きを反転させることで得られる箭であり、 $Q \square Q'$ の頂点は \oplus と \ominus の 2 種類に分類される。この $Q \square Q'$ に対し、先にすべての \oplus 頂点で変異し、そのあとで \ominus 頂点で変異するという変異列 $\mathbf{m} = \mathbf{m}_+ \mathbf{m}_-$ で $Q \square Q'$ は自分自身に戻り、 $\gamma = (Q \square Q', \mathbf{m}, \text{id})$ は mutation loop となる。

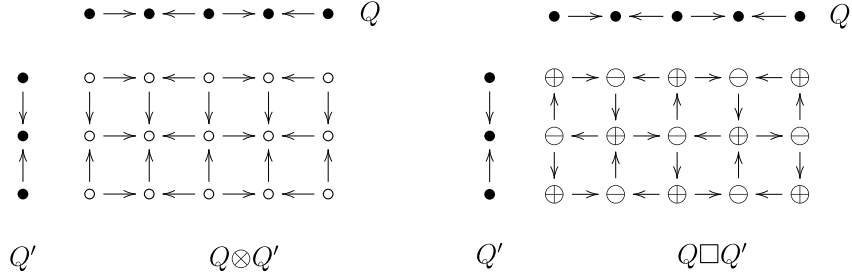


図 12: Dynkin 箭 Q, Q' のテンソル積 $Q \otimes Q'$ (左) と四角積 $Q \square Q'$ (右)

定理 1 ADE 型の alternating quiver の四角積 $Q \square Q'$ と、上で説明した変異ループ $\gamma = (Q \square Q', \mathbf{m}, \text{id})$ とする。このとき

$$Z(\gamma) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} \frac{q^{\frac{1}{2} \mathbf{k}^\top (C_Q \otimes C_{Q'}^{-1}) \mathbf{k}}}{(q)_{\mathbf{k}}}$$

特に、 Q' が A_n 型るとき、 $Z(\gamma)$ は国場-中西-鈴木が予想した fermionic character formula と一致する。これは Q 型アフィン・リー環 $U(\hat{\mathfrak{g}})$ の subquotient module に附随して定義される共形場理論である “Parafermionic system” の指標公式を組合せ論的に与える表式であって、 $X = M$ 予想 (定理) など、量子群の表現論とも密接な関係がある。

7. Pentagon move と分配 q 級数の不変性

4 節で説明したように、箭変異列が「良い不変量」であるためには、Pachner 2-3 move に相当する変形 (経路変更) に対して不変であることが必要である。

Pachner 2-3 move に相当する $\mathbb{X}(Q)$ 上の経路変更として、pentagon move を導入する。これは図 13 のように $\mathbb{X}(Q)$ 上で Q_{in} から Q_{out} に至る経路を交換する操作であり、変異列の局所的な変更

$$\gamma = (Q; \gamma_1, \mu_x, \mu_y, \gamma_2) \quad \longleftrightarrow \quad \gamma' = (Q; \gamma_1, \mu_y, \mu_x, \mu_y, (xy), \gamma_2) \quad (4)$$

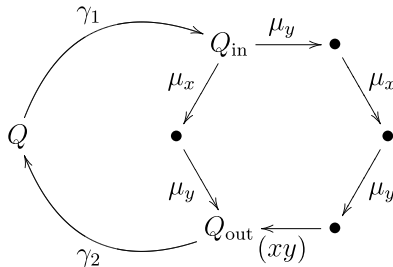


図 13: Exchange graph $\mathbb{X}(Q)$ から見た pentagon move

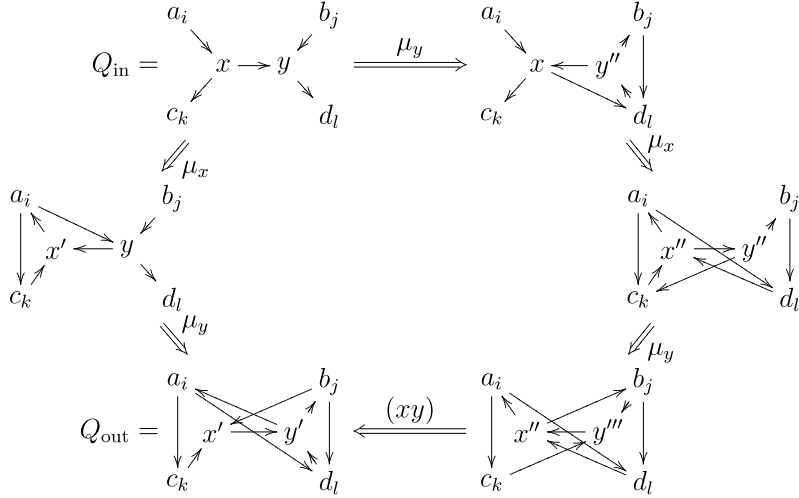


図 14: Pentagon move における籠変異の詳細

で表される。ただし、この move を適用するには、頂点 x, y は Q_{in} 上で 1 本の矢 $x \rightarrow y$ で結ばれていなければならない。実際この条件のもとで $(\mu_x, \mu_y)(Q_{\text{in}})$ と $(\mu_y, \mu_x, \mu_y, (xy))(Q_{\text{in}})$ は籠として同型であり、2 つの経路が Q_{out} で合流することが保証される (図 14)。

定理 2 (Generalized pentagon identity) 分配 q 級数 $Z(\gamma)$ は変異ループ γ の pentagon move の下で不変。すなわち (4) の経路 γ, γ' に対し $Z(\gamma) = Z(\gamma')$ が成立する。定理の証明は、 s 変数の関係を丹念に追い、次の恒等式に帰着させることで得られる。

$$\frac{1}{(q)_m (q)_n} = \sum_{\substack{r, s, t \geq 0 \\ m = r + s \\ n = s + t}} \frac{q^{rt}}{(q)_r (q)_s (q)_t}.$$

8. おわりに

紙数の関係で、非可換トーラスに値をとる分配 q 級数とその量子ダイログとの関係、reddening mutation sequence, Keller の定義した組合せ論的 Donaldson-Thomas 不変量との関係について [12] は割愛せざるを得なかった。これらについては講演では例を用いて説明する予定である。また、関連する話題として、水野勇磨氏 (東工大) も加えた共同研究 [10] では、分配 q 級数の変異の重みを q 二項係数に置き換えた不変量について考察し、様々な q -binomial identity を系統的に得る手法を開発した。

分配 q 級数は組合せ論的データのみから定義され、籠が表す数学的対象の詳細には依らないため、3次元の幾何や双対性研究への有力なツールとなることを期待している。

参考文献

- [1] S. Cecotti, A. Neitzke, and C. Vafa. R -twisting and 4d/2d correspondences. *arXiv preprint arXiv:1006.3435*, 2010.
- [2] B. Feigin and A. Stoyanovsky. Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold. *arXiv preprint hep-th/9308079*, 1993.

- [3] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras I: Foundations. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(2):497–529, 2002.
- [4] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras IV: Coefficients. *Compositio Mathematica*, 143(01):112–164, 2007.
- [5] G. Georgiev. Combinatorial constructions of modules for infinite-dimensional Lie algebras, I. Principal subspace. *J. Pure Appl. Algebra*, 112(3):247–286, 1996.
- [6] G. Georgiev. Combinatorial constructions of modules for infinite-dimensional Lie algebras, II. Parafermionic space. *arXiv preprint q-alg/9504024*, 1995.
- [7] G. Hatayama, A. N. Kirillov, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada. Character formulae of \widehat{sl}_n -modules and inhomogeneous paths. *Nucl. Phys. B*, 536(3):575 – 616, 1998.
- [8] Inoue, R., Iyama, O., Keller, B., Kuniba, A., and Nakanishi, T. (2010). “Periodicities of T and Y -systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type B_r .” arXiv preprint arXiv:1001.1880.
- [9] V. G. Kač and D. H. Peterson. Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms. *Adv. Math.*, 53:125 – 264, 1984.
- [10] A. Kato, Y. Mizuno, Y. Terashima “Quiver mutation sequences and q -binomial identities” preprint [arXiv:1611.05969]
- [11] A. Kato, Y. Terashima, “Quiver mutation loops and partition q -series” *Comm. Math. Phys.* **336** (2015) 811–830 [arXiv:1403.6569]
- [12] A. Kato, Y. Terashima “Quantum dilogarithms and partition q -series” *Comm. Math. Phys.* **338** (2015) 457–481 [arXiv:1408.0444]
- [13] R. Kedem, T. Klassen, B. McCoy, and E. Melzer. Fermionic quasi-particle representations for characters of $(G^{(1)})_1 \times (G^{(1)})_1 / (G^{(1)})_2$. *Phys. Lett. B*, 304(3):263 – 270, 1993.
- [14] B. Keller. The periodicity conjecture for pairs of Dynkin diagrams. *Ann. Math.(2)*, 177(1):111–170, 2013.
- [15] A. Kuniba, T. Nakanishi, and J. Suzuki. Characters in conformal field theories from thermodynamic Bethe ansatz. *Modern Phys. Lett. A*, 8(18):1649–1659, 1993.
- [16] J. Lepowsky and M. Primc. *Structure of the standard modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$* , volume 46 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1985.
- [17] A. Stoyanovsky and B. Feigin. Functional models for representations of current algebras and semi-infinite Schubert cells. *Funct. Anal. Appl.*, 28(1):55–72, 1994.
- [18] Y. Terashima and M. Yamazaki. $N = 2$ theories from cluster algebras. *Prog. Theor. Exp. Phys.* 023B01, 2014.
- [19] M. Terhoeven. Lift of dilogarithm to partition identities. *arXiv preprint hep-th/9211120*, 1992.
- [20] D. Zagier. The dilogarithm function. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry II*, pp. 3–65. Springer, Berlin, 2007.
- [21] A. Felikson, M. Shapiro and P. Tumarkin, Skew-symmetric cluster algebras of finite mutation type. *Journal of the European Mathematical Society*. 14(4):1135–1180, 2012.
- [22] 中西知樹「団代数とその応用」2011年度日本数学会秋期総合分科会(2011年9月信州大学)無限可積分系セッション特別講演
- [23] Fathi, Albert. “Travaux de Thurston sur les surfaces.” *Asterisque* (1979): 66-67.
- [24] Fomin, S., Shapiro, M., and Thurston, D. (2008). “Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I: Cluster complexes.” *Acta Mathematica*, 201(1), 83-146.

4次元 Painlevé 型方程式の完全な退化図式

川上 拓志 (青山学院大学)*

Painlevé 方程式は, Painlevé と Gambier によって発見された 6 つの (ないし 8 つの) 非線型常微分方程式である. Painlevé 方程式は個々にバラバラに存在するわけではなく, 退化操作により互いに結びついている. その関係を表した図を退化図式という.

Painlevé 方程式はそれぞれ, ある線型方程式のモノドロミー保存変形を記述するのであるが, Painlevé 方程式の退化は, 対応する線型方程式の「特異点の合流」及び「HTL 標準形の退化」によって引き起こされていると思うことができる.

モノドロミー保存変形方程式は一般に Hamilton 系の形に表すことができる. 表題の「Painlevé 型方程式」という言葉は「モノドロミー保存変形を記述する Hamilton 系」という意味で使っている. その意味で, Painlevé 方程式は相空間が 2 次元の Painlevé 型方程式であるが, その次に位置する, 相空間が 4 次元であるような Painlevé 型方程式の分類をすることが本研究の目的である.

講演者は, 坂井秀隆氏, 中村あかね氏との共同研究 [2] において, 不分岐型線型方程式に付随する 4 次元 Painlevé 型方程式の退化図式を構成した. この退化は付随する線型方程式の「特異点の合流」に対応する.

しかし, 2 次元の (すなわち元来の Painlevé 方程式の) 場合にそうであったように, 分岐型線型方程式に付随する Painlevé 型方程式も考えなければ, 完全な退化図式は得られない.

講演者は, 4 次元 Painlevé 型方程式の完全なリストを得るために, [2] に引き続いてさらに「HTL 標準形の退化」を可能な限り行うことによって, 分岐型線型方程式に付随するものも含む, 4 次元 Painlevé 型方程式の「完全な」退化図式を構成した. その結果, ([2] で得られたものと合わせると) 計 40 個の 4 次元 Painlevé 型方程式を得た.

線型方程式の退化の様子を表す図は多少複雑であるが, 対応する Painlevé 型方程式の間の退化の関係を Hamiltonian を用いて図示すると次ページのようなになる. H の上下に添え字でいろいろ書かれている記号が, 4 次元 Painlevé 型方程式の Hamiltonian を表している. 線型方程式の退化図式, Hamiltonian, Lax pair の具体形やその他説明等は [1] を参照していただきたい.

4 次元の場合, 退化図式の源となる Painlevé 型方程式は 4 つあるが, それらの退化を追跡していくと, その内 3 つの流れが交わり, 行列 Painlevé 方程式 (と我々が呼ぶ方程式, 図中の H_*^{Mat}) の退化図式が孤立している様子が見て取れる.

参考文献

- [1] H. Kawakami, Four-dimensional Painlevé-type equations associated with ramified linear equations I: Matrix Painlevé systems, arXiv:1608.03927, II: Sasano systems, arXiv:1609.05263, III: Garnier systems and Fuji-Suzuki systems, in preparation.
- [2] H. Kawakami, A. Nakamura, and H. Sakai, Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations, arXiv:1209.3836.

* 〒 252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺 5-10-1 青山学院大学 理工学部
e-mail: kawakami@gem.aoyama.ac.jp

3. スカラー型ラックス形式 (NY2016[1])

時間発展方向を $T_1 : (a_1, b_1) \mapsto (qa_1, qb_1)$ とし, $\bar{X} := T_1(X)$, $\underline{X} := T_1^{-1}(X)$ と表す. また拘束条件として $\prod_{i=1}^{N+1} \frac{a_i}{b_i} = q \prod_{i=1}^2 \frac{c_i}{d_i}$ を課す. q 差分ガルニエ系のスカラー型ラックス形式は次のようになる.

$$\begin{aligned} L_2(x) &:= F(f, x)\bar{y}(x) - A_1(x)y(qx) + (x - b_1)G(g, x)y(x), \\ L_3(x) &:= F(\bar{f}, \frac{x}{q})y(x) + (x - a_1)G(g, \frac{x}{q})\bar{y}(x) - qc_1c_2B_1(\frac{x}{q})\bar{y}(\frac{x}{q}), \end{aligned} \quad (8)$$

ここで $A(x) = \prod_{i=1}^{N+1}(x - a_i)$, $B(x) = \prod_{i=1}^{N+1}(x - b_i)$, $A_1(x) = \frac{A(x)}{x - a_1}$, $B_1(x) = \frac{B(x)}{x - b_1}$, $F(f, x) = \sum_{i=0}^N f_i x^i$, $G(g, x) = \sum_{i=0}^{N-1} g_i x^i$. q 差分ガルニエ系の時間発展方程式 ([1]) は次で与えられる.

$$c_1c_2A_1(x)B_1(x) - (x - a_1)(x - b_1)G(g, x)G(\underline{g}, x) = 0 \quad \text{for } F(f, x) = 0, \quad (9)$$

$$qc_1c_2A_1(x)B_1(x) - F(f, x)F(\bar{f}, x) = 0 \quad \text{for } G(g, x) = 0, \quad (10)$$

$$f_N \bar{f}_N = q(g_{N-1} - c_1)(g_{N-1} - c_2), \quad f_0 \bar{f}_0 = a_1 b_1 (g_0 - e_1)(g_0 - e_2), \quad (11)$$

ここで $e_i = \frac{d_i v}{a_i b_i}$, $v = \prod_{i=1}^{N+1} (-a_i)$. 時間発展方程式の未知変数は $\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{\bar{f}_N}{f_0}, g_0, \dots, g_{N-1}$ の $2N$ 個である.

4. 別方向の時間発展

時間発展方向として $T_2 : (c_2, d_2) \mapsto (qc_2, qd_2)$ をとり $\bar{X} := T_2(X)$, $\underline{X} := T_2^{-1}(X)$ と表す. 拘束条件は **3** と同様である. この場合の q 差分ガルニエ系のスカラー型ラックス形式は次のようになる.

$$\begin{aligned} L_2(x) &:= F(f, x)\bar{y}(x) - A(x)y(qx) + G(g, x)y(x), \\ L_3(x) &:= \frac{x}{q}F(\bar{f}, \frac{x}{q})y(x) + G(g, \frac{x}{q})\bar{y}(x) - qc_1c_2B(\frac{x}{q})\bar{y}(\frac{x}{q}), \end{aligned} \quad (12)$$

記号 $A(x), B(x), F(f, x)$ は **3** と同じで, G のみ $G(g, x) = \sum_{i=0}^{N+1} g_i x^i$ とする ($g_0 = d_2 A(0)$, $g_{N+1} = c_1$). q 差分ガルニエ系の時間発展方程式は次で与えられる.

$$G(g, x)G(\underline{g}, x) = c_1c_2A(x)B(x) \quad \text{for } F(f, x) = 0, \quad (13)$$

$$xF(f, x)F(\bar{f}, x) = qc_1c_2A(x)B(x) \quad \text{for } G(g, x) = 0, \quad (14)$$

時間発展方程式の未知変数は, 変数 $\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{\bar{f}_N}{f_0}, \frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_N}{g_0}$ の $2N$ 個である.

5. 各方程式系の関係

上記 **1-4** は全て等価な線形差分方程式のモノドロミー保存変形を記述している. 特に **2, 4** は変形方向も同じである. 後者は, 連続極限では微分ガルニエ系のシュレジンガー変換に相当する.

参考文献

- [1] Nagao H., and Yamada Y., *Study of q -Garnier system by Padé method*, arXiv:1601.01099 [nlin.SI].
- [2] Sakai H., *A q -analogue of the Garnier system*, Funkcialaj Ekvacioj **48** (2005), 273–297.
- [3] Suzuki T., *A q -analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q -Painlevé system*, AMS Contemp. Math. **651** (2015), 25–38.

q 差分ガルニエ系から q 差分パルヴェ系への簡約

長尾秀人 (明石工業高等専門学校・一般科目)

山田泰彦 (神戸大学大学院・理学研究科)

q 差分ガルニエ系から q 差分パルヴェ系への簡約は、坂井氏による 2×2 行列型ラックス形式を用いた q - $D_5^{(1)}$ 型 [2], q - $E_6^{(1)}$ 型 [3] が知られている. 論文 [1] では, q 差分ガルニエ系のある時間発展方向に対する, スカラー型ラックス形式, 時間発展方程式 (および超幾何型行列式解を), それぞれ簡単な表現で構成した. さらに, q 差分ガルニエ系から q - $E_7^{(1)}$ 型パルヴェ方程式への簡約を与えた. また, その時間発展方程式の初期値空間は, 興味深い点配置になっている. 本講演では, それらの結果について報告する.

1. q - $D_5^{(1)}$ 型への簡約 (Sakai 2005 [2]), q - $E_6^{(1)}$ 型への簡約 (Sakai 2006 [3])

q 差分ガルニエ系の 2×2 行列型ラックス形式 ([2]) は次で与えられる.

$$Y(qx, t) = \mathcal{A}(x, t)Y(x, t), \quad Y(x, qt) = \mathcal{B}(x, t)Y(x, t), \quad Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x, t) \\ y_2(x, t) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$(i) \quad \mathcal{A}(x, t) = A_0 + A_1 + \dots + A_{N+1}x^{N+1}, \quad (2)$$

$$(ii) \quad A_{N+1} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} t\theta_1 & 0 \\ 0 & t\theta_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$(iii) \quad \det \mathcal{A}(x) = \kappa_1 \kappa_2 \prod_{i=1}^2 (x - t\alpha_i) \prod_{i=3}^{2N+2} (x - \alpha_i), \quad \kappa_1 \kappa_2 \prod_{i=1}^{2N+2} \alpha_i = \theta_1 \theta_2. \quad (4)$$

ラックス形式 (1) の両立条件 $\mathcal{A}(x, qt)\mathcal{B}(x, t) = \mathcal{B}(qx, t)\mathcal{A}(x, t)$ が q 差分ガルニエ系の時間発展方程式 ([2]) である. その未知変数は $2N$ 個である.

- $N = 1$ の場合, ラックス形式及び時間発展方程式が q - $D_5^{(1)}$ 型になる [2].
- $N = 2$ の場合, 条件 $q\kappa_1 = \kappa_2$ (と他の 2 条件) の下で, ラックス形式及び時間発展方程式が q - $E_6^{(1)}$ 型になる [3].

2. q - $D_5^{(1)}$ 型, q - $E_6^{(1)}$ 型および q - $E_7^{(1)}$ 型への簡約 (NY 2016 [1])

時間発展方向を $T_1 : (a_1, b_1) \mapsto (qa_1, qb_1)$ とし, $\bar{X} := T_1(X)$, $\underline{X} := T_1^{-1}(X)$ と表す. また拘束条件として $\prod_{i=1}^{N+1} \frac{a_i}{b_i} = q \prod_{i=1}^2 \frac{c_i}{d_i}$ を課す. q 差分ガルニエ系のスカラー型ラックス形式 ([2] と等価) は次で与えられる.

$$\begin{aligned} L_2(x) &:= F(f, x)\bar{y}(x) - A_1(x)y(qx) + (x - b_1)G(g, x)y(x), \\ L_3(x) &:= F(\bar{f}, \frac{x}{q})y(x) + (x - a_1)G(g, \frac{x}{q})\bar{y}(x) - qc_1c_2B_1(\frac{x}{q})\bar{y}(\frac{x}{q}), \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $A(x) = \prod_{i=1}^{N+1}(x - a_i)$, $B(x) = \prod_{i=1}^{N+1}(x - b_i)$, $A_1(x) = \frac{A(x)}{x - a_1}$, $B_1(x) = \frac{B(x)}{x - b_1}$, $F(f, x) = \sum_{i=0}^N f_i x^i$, $G(g, x) = \sum_{i=0}^{N-1} g_i x^i$. q 差分ガルニエ系の時間発展方程式 ([2] と等価) は次で与えられる.

$$c_1c_2A_1(x)B_1(x) - (x - a_1)(x - b_1)G(g, x)G(\bar{g}, x) = 0 \quad \text{for } F(f, x) = 0, \quad (6)$$

$$qc_1c_2A_1(x)B_1(x) - F(f, x)F(\bar{f}, x) = 0 \quad \text{for } G(g, x) = 0, \quad (7)$$

$$f_N \bar{f}_N = q(g_{N-1} - c_1)(g_{N-1} - c_2), \quad f_0 \bar{f}_0 = a_1 b_1 (g_0 - e_1)(g_0 - e_2), \quad (8)$$

ここで $e_i = \frac{d_i \nu}{a_i b_i}$, $\nu = \prod_{i=1}^{N+1} (-a_i)$. 時間発展方程式の未知変数は $\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_N}{f_0}, g_0, \dots, g_{N-1}$ の $2N$ 個である.

• スカラー型ラックス形式および時間発展方程式が, $N = 1$ の場合で q - $D_5^{(1)}$ 型に簡約されることと, $N = 2$ の場合で q - $E_6^{(1)}$ 型に簡約されることは, **1** と同様である.

• $N = 3$ の場合, 条件 $c_1 = c_2$, $d_1 = d_2$, $f_0(t) = f_3(t) = 0$, $g_0(t) = e_1$ および $g_2(t) = c_1$ の下で, 変数変換 $f = -\frac{\bar{f}}{f_2}$ and $g = \frac{g_1}{c_1}$ を用いると, スカラー型ラックス形式および時間発展方程式が q - $E_7^{(1)}$ 型になる. 時間発展方程式

$$\begin{aligned} \left\{ g + \left(f + \frac{e_1}{c_1 f} \right) \right\} \left\{ \bar{g} + \left(f + \frac{qe_1}{c_1 \bar{f}} \right) \right\} &= \frac{(f - a_2)(f - a_3)(f - a_4)(f - b_2)(f - b_3)(f - b_4)}{f^2(f - a_1)(f - b_1)}, \\ \frac{(1 - x_1/f)(1 - x_1/\bar{f})}{(1 - x_2/f)(1 - x_2/\bar{f})} &= \frac{x_2^2(x_1 - a_2)(x_1 - a_3)(x_1 - a_4)(x_1 - b_2)(x_1 - b_3)(x_1 - b_4)}{x_1^2(x_2 - a_2)(x_2 - a_3)(x_2 - a_4)(x_2 - b_2)(x_2 - b_3)(x_2 - b_4)}, \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, $x = x_1, x_2$ は方程式 $g + \left(x + \frac{e_1}{c_1 x} \right) = 0$ を満たす.

この時間発展方程式の初期値空間の 8 点配置は, $(f, g) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 座標の直線と放物線上にそれぞれ 2 点と 6 点がある. この点配置は, $(1, 1)$ 次曲線 2 本からなる標準的な点配置と適当な座標変換で等価になる.

参考文献

- [1] Nagao H., and Yamada Y., *Study of q -Garnier system by Padé method*, arXiv:1601.01099 [nlin.SI].
- [2] Sakai H., *A q -analog of the Garnier system*, Funkcialaj Ekvacioj **48** (2005), 273–297.
- [3] Sakai H., *Lax form of the q -Painlevé equation associated with the $A_2^{(1)}$ surface*, J. Phys. A: Math. Gen., **39** (2006), 12203–12210.

A generalization of multivariate Meixner, Charlier and Krawtchouk polynomials

渋川 元樹 (阪大情報)*

概 要

[1] で導入した多変数 Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式について, 結合定数 β についての連続変形に対しても [1] で示した母函数, 直交関係式, 差分方程式が成り立つことを述べる.

定義 1. 多変数 Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式をそれぞれ以下のように定義する.

$$M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) := \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \frac{\binom{n}{r}_{\mathbf{k}}}{(\alpha)_{\mathbf{k}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{|\mathbf{k}|}, \quad (1)$$

$$C_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; a) := \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \frac{\binom{n}{r}_{\mathbf{k}}}{(\alpha)_{\mathbf{k}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \left(-\frac{1}{a}\right)^{|\mathbf{k}|}, \quad (2)$$

$$K_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; p, N) := \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \frac{\binom{n}{r}_{\mathbf{k}}}{(-N)_{\mathbf{k}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{p}\right)^{|\mathbf{k}|} \quad (\mathbf{m} \subset N = (N, \dots, N)). \quad (3)$$

但し $n = r + \frac{1}{\beta}r(r-1)$, \mathbf{m}, \mathbf{k} は整数の分割, $d_{\mathbf{m}}$ はベータ函数 B を用いて

$$d_{\mathbf{m}} := \prod_{1 \leq p < q \leq r} \frac{m_p - m_q + \frac{1}{\beta}(q-p) B\left(m_p - m_q, \frac{1}{\beta}(q-p-1) + 1\right)}{\frac{1}{\beta}(q-p) B\left(m_p - m_q, \frac{1}{\beta}(q+1-p)\right)}$$

と表される定数とし, $(\mathbf{s})_{\mathbf{k}}$ は $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$ に対して定まる一般階乗ベキ

$$(\mathbf{s})_{\mathbf{k}} := \prod_{j=1}^r \left(s_j - \frac{1}{\beta}(j-1)\right)_{k_j} \quad ((\alpha)_{\mathbf{k}} \text{ は } ((\alpha, \dots, \alpha)_{\mathbf{k}} \text{ とみなす})$$

であり, $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_r$ とする. 更に r 変数の Jack 多項式 $P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}$ を用いて,

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{(\frac{2}{\beta})}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) := \frac{P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}{P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}(1, \dots, 1)}$$

とにおいて, 一般 (Jack) 二項係数 $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}}$ を

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{(\frac{2}{\beta})}(1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_r) = \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \Phi_{\mathbf{k}}^{(\frac{2}{\beta})}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

で定める.

キーワード : multivariate orthogonal polynomials

* 〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 1-5 大阪大学大学院情報科学研究科
e-mail: g-shibukawa@ist.osaka-u.ac.jp

定理 2 (母函数). \mathscr{D} を長さ r の整数の分割の集合, $z_1, \dots, z_r < 1$ とすると,

$$\prod_{j=1}^r (1 - z_j)^{-\alpha} \Phi_{\mathbf{x}}^{(\frac{2}{\beta})} \left(\frac{1 - \frac{1}{c} z_1}{1 - z_1}, \dots, \frac{1 - \frac{1}{c} z_r}{1 - z_r} \right) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathscr{D}} d_{\mathbf{n}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{n}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{n}}} M_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) \Phi_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(z_1, \dots, z_r), \quad (4)$$

$$e^{\sum_{j=1}^r z_j} \Phi_{\mathbf{x}}^{(\frac{2}{\beta})} \left(1 - \frac{1}{a} z_1, \dots, 1 - \frac{1}{a} z_r \right) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathscr{D}} d_{\mathbf{n}} \frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{n}}} C_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; a) \Phi_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(z_1, \dots, z_r), \quad (5)$$

$$\prod_{j=1}^r (1 + z_j)^N \Phi_{\mathbf{x}}^{(\frac{2}{\beta})} \left(\frac{1 - \frac{1-p}{p} z_1}{1 + z_1}, \dots, \frac{1 - \frac{1-p}{p} z_r}{1 + z_r} \right) = \sum_{\mathbf{n} \subset N} \binom{N}{\mathbf{n}} \frac{1}{\frac{1}{\beta}} K_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; p, N) \Phi_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(z_1, \dots, z_r). \quad (6)$$

定理 3 (直交関係式). $\alpha > \frac{n}{r} - 1$, $0 < c, p < 1$, $a > 0$ のとき, 任意の分割 \mathbf{m}, \mathbf{n} について,

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathscr{D}} d_{\mathbf{x}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{x}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}} c^{|\mathbf{x}|} M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) M_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) = \frac{c^{-|\mathbf{m}|}}{(1-c)^{r\alpha}} \frac{1}{d_{\mathbf{m}}} \frac{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}{(\alpha)_{\mathbf{m}}} \delta_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \geq 0, \quad (7)$$

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathscr{D}} d_{\mathbf{x}} \frac{a^{|\mathbf{x}|}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}} C_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; a) C_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; a) = a^{-|\mathbf{m}|} e^{ra} \frac{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}{d_{\mathbf{m}}} \delta_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \geq 0, \quad (8)$$

$$\sum_{\mathbf{x} \subset N} \binom{N}{\mathbf{x}} \frac{1}{\frac{1}{\beta}} p^{|\mathbf{x}|} (1-p)^{rN-|\mathbf{x}|} K_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; p, N) K_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; p, N) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{|\mathbf{m}|} \binom{N}{\mathbf{m}} \frac{1}{\frac{1}{\beta}} \delta_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \geq 0. \quad (9)$$

定理 4 (差分方程式).

$$\tilde{a}_j(\mathbf{x}) := \prod_{k \neq j} \frac{x_j - x_k - \frac{1}{\beta}(j-k-1)}{x_j - x_k - \frac{1}{\beta}(j-k)},$$

とすると, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{m} \in \mathscr{D}$ について,

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{x}} (c-1) |\mathbf{m}| M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) &= \sum_{j=1}^r d_{\mathbf{x}+\epsilon_j} \tilde{a}_j(-\mathbf{x} - \epsilon_j) \left(x_j + \alpha - \frac{d}{2}(j-1) \right) c M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x} + \epsilon_j; \alpha, c) \\ &\quad - \sum_{j=1}^r d_{\mathbf{x}} (x_j + (x_j + \alpha)c) M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) \\ &\quad + \sum_{j=1}^r d_{\mathbf{x}-\epsilon_j} \tilde{a}_j(\mathbf{x} - \epsilon_j) \left(x_j + \frac{d}{2}(r-j) \right) M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x} - \epsilon_j; \alpha, c). \end{aligned} \quad (10)$$

多変数 Charlier, Krawtchouk 多項式についても同様の差分関係式が成り立つ.

参考文献

- [1] G. Shibukawa: *Multivariate Meixner, Charlier and Krawtchouk polynomials*, J. Lie Theory, **26** (2016), 439–477.

q -超幾何級数 ${}_2\varphi_0(a, 0; -; q, x)$ の q -Stokes 現象

大山 陽介 (徳島大学大学院理工学研究部)¹

■主目的 一般に発散する q -超幾何級数 ${}_2\varphi_0(a, 0; -; q, x)$ を形式解に持つ q -差分方程式

$$[q\text{-Weber}] \quad u(q^2x) - (1 - aqx)u(qx) - qxu(x) = 0.$$

の接続問題を考える ($a \neq 0$)。原点・無限遠での局所 (形式) 解の一つとして以下のものが取れる:

$$u_1^\circ(x) = {}_2\varphi_0(a, 0; -; q, x), \quad u_2^\circ(x) = \frac{1}{\theta(-qx)} {}_1\varphi_1\left(\frac{q}{a}; 0; q, aqx\right),$$

$$v_1^\circ(x) = \frac{\theta(-aqx)}{\theta(-qx)} {}_2\varphi_0\left(a, 0; -; q, \frac{1}{a^2x}\right), \quad v_2^\circ(x) = \frac{(q; q)_\infty}{\theta(-ax)} {}_1\varphi_1\left(\frac{q}{a}; 0; q, \frac{q}{ax}\right).$$

${}_1\varphi_1$ は収束級数、 ${}_2\varphi_0$ は一般に発散級数である。

■主定理 ■ 発散級数 $u_1^\circ(x)$ の総和をとった有理型函数 $f_1(x, \lambda)$ に対して次が成り立つ:

$$f_1(x, \lambda) = \frac{(q; q)_\infty}{(q/a; q)_\infty} \frac{\theta(a\lambda)}{\theta(\lambda)} \frac{\theta(ax/\lambda)}{\theta(x/\lambda)} \frac{\theta(-x)}{\theta(-ax)} u_2^\circ(x) + \frac{1}{(q/a; q)_\infty} v_2^\circ(x).$$

■記号: $q \in \mathbb{C}^*$ and $0 < |q| < 1$. q -無限積:

$$(a; q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - aq^j), \quad (a; q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - aq^j), \quad (a_1, a_2, \dots, a_m; q)_n = \prod_{j=1}^m (a_j; q)_n.$$

◇テータ函数 $\theta_q(x) := \theta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{k(k-1)/2} x^k = (q, -x, -q/x; q)_\infty$. その関係式

$$\theta(q^k x) = q^{-k(k-1)/2} x^{-k} \theta(x) \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad x\theta(1/x) = \theta(x), \quad \theta(1/x) = \theta(qx).$$

◇超幾何級数

$${}_r\phi_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_n}{(b_1, \dots, b_s; q)_n (q; q)_n} \left\{ (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right\}^{1+s-r} x^n.$$

■手法 発散級数の総和を考える。 q -Borel 変換 $\mathcal{B}_q^\pm : \mathbb{C}[[t]] \rightarrow \mathbb{C}[[\tau]]$

$$\mathcal{B}_q^\pm \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] := \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\pm n(n-1)/2} \tau^n.$$

と q -差分作用素 $\sigma_q[f(t)] = f(tq)$ は $\mathcal{B}_q^\pm(t^m \sigma_q^n) = q^{\pm m(m-1)/2} \tau^m \sigma_q^{\pm m} \mathcal{B}_q^\pm$ という関係がある。 q -Laplace 変換 $L_{q;1}^{[\lambda]} \varphi(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\varphi(q^n \lambda)}{\theta_q(q^n \lambda/x)}$ は \mathcal{B}_q^+ の形式的な逆変換になる。

¹本研究は科研費 (課題番号:6K05176) の助成を受けたものである。

◆ q -Laplace 変換に関する主補題： $\varphi(\xi) = \frac{\theta(a\xi)}{\theta(b\xi)} \sum_{m \geq 0} c_m \xi^{-m}$ に対して

$$L_{q;1}^{[\lambda]} \varphi(x) := \frac{\theta(a\lambda)\theta(qax/b\lambda)}{\theta(b\lambda)\theta(qx/\lambda)} \sum_{m \geq 0} c_m q^{-m(m-1)/2} (b/aqx)^m.$$

◆ [準備 1] q -合流超幾何級数が満たす差分方程式：

$$(1 - abqx)y(q^2x) - \{1 - (a + b)qx\}y(qx) - qxy(x) = 0. \quad (1)$$

原点・無限遠での局所解として以下のものが取れる ($y_1^{(0)}$ は発散級数, 他は収束)：

$$y_1^{(0)}(x) = {}_2\varphi_0(a, b; -, q, x), \quad y_2^{(0)}(x) = \frac{(abx; q)_\infty}{\theta(-qx)} {}_2\varphi_1\left(\frac{q}{a}, \frac{q}{b}; 0; q, abx\right),$$

$$y_1^{(\infty)}(x) = \frac{\theta(-aqx)}{\theta(-qx)} {}_2\varphi_1\left(a, 0; \frac{aq}{b}; q, \frac{q}{abx}\right), \quad y_2^{(\infty)}(x) = \frac{\theta(-bqx)}{\theta(-qx)} {}_2\varphi_1\left(b, 0; \frac{bq}{a}; q, \frac{q}{abx}\right).$$

◇ Slater の変換公式： ${}_1\varphi_1(a; c; q, x) = (ax/c; q)_\infty {}_2\varphi_1(c/a, 0; c; q, ax/c)$.

◇ 接続公式： q -Borel-Laplace 変換 $\tilde{y}_1^{(0)}(x, \lambda) := L_{q;1}^{[\lambda]} \circ \mathcal{B}_q^+(y_1^{(0)})(x)$ として

$$\tilde{y}_1^{(0)}(x, \lambda) = \frac{(b; q)_\infty}{(b/a; q)_\infty} \frac{\theta(a\lambda)}{\theta(\lambda)} \frac{\theta(qax/\lambda)}{\theta(qx/\lambda)} \frac{\theta(-qx)}{\theta(-aqx)} y_1^{(\infty)}(x)$$

$$+ \frac{(a; q)_\infty}{(a/b; q)_\infty} \frac{\theta(b\lambda)}{\theta(\lambda)} \frac{\theta(qbx/\lambda)}{\theta(qx/\lambda)} \frac{\theta(-qx)}{\theta(-bqx)} y_2^{(\infty)}(x). \quad (2)$$

$$y_2^{(0)}(x) = \frac{(q/a; q)_\infty}{(q, b/a; q)_\infty} y_1^{(\infty)}(x) + \frac{(q/b; q)_\infty}{(q, a/b; q)_\infty} y_2^{(\infty)}(x). \quad (3)$$

◇ 注：接続公式 (??) は、 ${}_2\varphi_1$ の接続公式からの退化極限として得られる。接続公式 (??) は、(??) を q -Laplace 変換して、 q -Laplace 変換に関する主補題を適用して得る。

◆ 補題: $a_1 a_2 \cdots a_n / b_1 b_2 \cdots b_n = 1$ とする. このとき

$$f(x) = \frac{\theta(a_1 x) \theta(a_2 x) \cdots \theta(a_n x)}{\theta(b_1 x) \theta(b_2 x) \cdots \theta(b_n x)}$$

は $f(zq^n) = f(z)$ ($n \in \mathbb{Z}$) となり、 $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ 上の楕円関数を定める。

■ 略証： (??) で $b \rightarrow 0$ とすると $[q$ -Weber] になる。局所解のうち $y_2^{(\infty)}$ のみそのままでは極限が取れないので楕円関数を掛けて別の解 $\tilde{y}_2^{(\infty)}$ を取る。変換公式より

$$\tilde{y}_2^{(\infty)}(x) := \frac{\theta(-abx)}{\theta(-ax)} \frac{\theta(-qx)}{\theta(-bqx)} y_2(x) = \frac{\theta(-abx)}{\theta(-ax)} {}_2\varphi_1\left(b, 0; \frac{bq}{a}; q, \frac{q}{abx}\right)$$

$$= \frac{(q, abx; q)_\infty (q/abx; q)_\infty}{\theta(-ax)} {}_2\varphi_1\left(b, 0; \frac{bq}{a}; q, \frac{q}{abx}\right) = \frac{(q, abx; q)_\infty}{\theta(-ax)} {}_1\varphi_1\left(\frac{q}{a}; \frac{bq}{a}; q, \frac{q}{ax}\right).$$

(??), (??) で、 $\tilde{y}_2^{(\infty)}$ に差し替えた上で $y_1^{(\infty)}(x)$ を消去すると、

$$\tilde{y}_1^{(0)}(x, \lambda) = C_1(x, \lambda; b) y_2^{(0)}(x) + C_2(x, \lambda; b) \tilde{y}_2^{(\infty)}(x)$$

なる関係式を得る。 $b \rightarrow 0$ の極限を取ると、 $\tilde{y}_2^{(0)}(x), \tilde{y}_2^{(\infty)}(x)$ はそれぞれ u_2^0, v_2^0 になる。 $f_1(x, \lambda) = \lim_{b \rightarrow 0} \tilde{y}_1^{(0)}(x, \lambda)$ と定める。

いったん $b = \mu q^n$ において極限 $n \rightarrow \infty$ を取ると、接続係数は μ の楕円関数になるが、実は μ によらないことがわかって、主定理を得る。

q -超幾何級数 ${}_1\phi_1(0; a; q, x)$ の q -Stokes 現象

大山 陽介 (徳島大学大学院理工学研究部)¹

■記号などはアブストラクトの前ページ参照

■主目的 $a \neq 0$ として q -超幾何級数 ${}_1\phi_1(0; a; q, x)$ を解に持つ q -差分方程式

$$(HE) \quad qtv(tq) + [1 - (a + q)t]v(t) + atv(t/q) = 0$$

の接続問題を考える。原点・無限遠での局所解の一つとして以下のものが取れる：

$$v_1^{(0)}(t) = \theta(-qt) \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m, \quad v_2^{(0)}(t) = \frac{1}{\theta(-aqt)} \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m.$$

$$v_1^{(\infty)}(t) = {}_1\phi_1(0; a; q, 1/t), \quad v_2^{(\infty)}(t) = \frac{\theta(-qt)}{\theta(-at)} {}_1\phi_1(0; q^2/a; q, q/at).$$

$u_1(t) = \sum b_m t^m$ は発散して、 $u_2(t) = \sum c_m t^m$ は収束する。 $b_0 = 1, c_0 = 1$.

■手法 q -発散級数の総和を考えるさいに $p^2 = q$ として、 p -Borel-Laplace 変換 $f_p(t, \lambda) =: L_{p;1}^{[\lambda]} \circ \mathcal{B}_p^+(u_1(t))$ をとる。 $\tilde{v}_1^{(0)}(t, \lambda; p) = \theta(-qt)f_p(t, \lambda)$ は有理型函数解になっている。

◇ q -Laplace 変換に関する主補題:

$$\varphi(\xi) = \frac{\theta(a\xi)}{\theta(b_1\xi)\theta(b_2\xi)} \sum_{m \geq 0} c_m \xi^{-2m}$$

に対して

$$L_{q;1}^{[\lambda]} \varphi(x) := \frac{\theta_q(a\lambda)\theta_{q^2}(aq^2x/b_1b_2\lambda^2)}{\theta_q(b_1\lambda)\theta_q(b_2\lambda)\theta_q(qx/\lambda)} \sum_{m \geq 0} c_m q^{-m(m-1)} (b_1b_2/aq^2x)^m.$$

◇ Hahn の変換公式 ${}_0\phi_1(-; a^2q; q^2, a^2qx^2) = (x; q)_\infty \cdot {}_2\phi_1(a, -a; a^2; q, x)$.

◆ [参考] ${}_2\phi_1(a, b; c; q, z)$ が満たす差分方程式：

$$[(c - abqz)\sigma_q^2 - (c + q - (a + b)qz)\sigma_q + q(1 - z)] {}_2\phi_1(a, b; c; q, z) = 0.$$

◇ ${}_2\phi_1$ の接続公式:

$$\begin{aligned} {}_2\phi_1(a, b; c; q; x) &= \frac{(b, c/a; q)_\infty \theta(-ax)}{(c, b/a; q)_\infty \theta(-x)} {}_2\phi_1(a, aq/c; aq/b; q, cq/abx) \\ &\quad + \frac{(a, c/b; q)_\infty \theta(-bx)}{(c, a/b; q)_\infty \theta(-x)} {}_2\phi_1(b, bq/c; bq/a; q, cq/abx). \end{aligned}$$

¹本研究は科研費 (課題番号:6K05176) の助成を受けたものである。

■定理 (HE) の接続公式は次の通り :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1^{(0)}(t, \lambda; p) &= \frac{\theta_q(a\lambda)\theta_q(ap\lambda)}{(q/a; q)_\infty\theta_q(-ap\lambda^2)} \frac{\theta(-qt)\theta_q(-pt/\lambda^2)}{\theta_q(pt/\lambda)\theta_q(qt/\lambda)} v_1^{(\infty)}(t) \\ &\quad + \frac{\theta_q(q\lambda)\theta_q(qp\lambda)}{(a/q; q)_\infty\theta_q(-ap\lambda^2)} \frac{\theta(-at)\theta_q(-pqt/a\lambda^2)}{\theta_q(pt/\lambda)\theta_q(qt/\lambda)} v_2^{(\infty)}(t), \\ v_2^{(0)}(t) &= \frac{1}{(q; q)_\infty(q/a; q)_\infty} v_1^{(\infty)}(t) + \frac{q}{a \cdot (q; q)_\infty(a/q; q)_\infty} v_2^{(\infty)}(t). \end{aligned}$$

■略証 : $u_1(t)$ が満たす q -差分方程式 $\{\sigma_q - [1 - (a+q)t] + at^2\sigma_q^{-1}\}u_1(t) = 0$ で、 $p^2 = q$ として $u_1(t)$ が満たす p -差分方程式は次の通り :

$$\{\sigma_p^2 - [1 - (a+p^2)t] + at^2\sigma_p^{-2}\}u_1(t) = 0.$$

これを p -Borel 変換して $\varphi(\tau) = \mathcal{B}_p^+(u_1)(\tau)$ が満たす方程式

$$\{\sigma_p^2 + (a+p^2)\tau\sigma_p - (1 - ap\tau^2)\}\varphi(\tau) = 0$$

を ${}_2\phi_1$ で解こう。 $c^2 = ap$ として $g(\tau) = (-c\tau; p)_\infty\varphi(\tau)$ が満たす p -差分方程式

$$\{(1 + cp\tau)\sigma_p^2 + (c^2/p + p^2)\tau\sigma_p - (1 - c\tau)\}g(\tau) = 0$$

を考えると $g(\tau) = {}_2\phi_1(-c/p, -p^2/c; -p; p, c\tau)$ より

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{(-c\tau; p)_\infty} {}_2\phi_1(-c/p, -p^2/c; -p; p, c\tau).$$

◇ $\varphi(\tau)$ の無限遠での挙動は、 ${}_2\phi_1$ の接続公式と

$$\frac{1}{(-c\tau; p)_\infty} = \frac{(p; p)_\infty}{\theta_p(-c\tau; p)} (-p/c\tau; p)_\infty$$

を合わせるにより定まる。Hahn の変換公式を用いて $\varphi(\tau)$ の無限遠での展開は

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \frac{(p, p^2/c, -p^2/c; p)_\infty}{(-p, p^3/c^2; p)_\infty} \frac{\theta_p(c^2\tau/p)}{\theta_p(c\tau)\theta_p(-c\tau)} {}_0\phi_1(-; c^2/p; p^2, p/\tau^2) \\ &\quad + \frac{(p, c/p, -c/p; p)_\infty}{(-p, c^2/p^3; p)_\infty} \frac{\theta_p(p^2\tau)}{\theta_p(c\tau)\theta_p(-c\tau)} {}_0\phi_1(-; p^5/c^2; p^2, p^7/c^4\tau^2). \end{aligned}$$

主補題を用いて p -Laplace 変換したあと、無限積などを base 変換して前半を得る。

◇後半は $\mathcal{B}_q^-(u_2)(\tau) = \frac{1}{(-q^2\tau; q)_\infty(-aq\tau; q)_\infty}$ より

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\varepsilon} \frac{1}{(-q^2\tau; q)_\infty(-aq\tau; q)_\infty} \theta_q(t/\tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

となるので留数計算すると導かれる。

■文献: Ohyama, Y.; q -Stokes phenomenon of a basic hypergeometric series ${}_1\phi_1(0; a; q, x)$, *J. Math. Tokushima Univ.*, **50** (2016), 49–60.