日本数学会

2018年度年会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2018年3月

於　東京大学

日本数学会

2018年度年会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2018年3月

於　東京大学

無 限 可 積 分 系

3月20日(火)　第V会場

10:00〜11:30

			(分)	頁
1	小嶋健太郎 (中大理工) 佐藤　司 (中大理工) 竹村剛一 (中大理工)	q ホイン方程式の多項式解について	(15)	1
2	Zhijie Chen (Yau Math. Sci. Center) Ting-Jung Kuo (Nat. Taiwan Normal Univ.) Chang-Shou Lin (Nat. Taiwan Univ.) 竹村剛一 (中大理工)	Real-root property of the spectral polynomial of the Treibich–Verdier potential and related problems	(15)	3
3	星野　歩 (広島工大工) 白石潤一 (東大数理)	一列型 C, D 型 Macdonald 多項式の明示公式	(15)	5
4	伊藤雅彦 (琉球大理) 宮永愛子 (神戸大理) 野海正俊 (神戸大理)	G_2 型 Weyl 群不変な q 超幾何積分の行列式公式	(15)	7
5	伊藤公毅 (豊橋技科大)	q サイクルのホモロジー	(15)	9
6	朴　佳南 (神戸大理)	q 超幾何関数の一般化と, それを特殊解に持つモノドロミー保存変形	(15)	11

14:00〜15:30

			(分)	頁
7	大山陽介 (徳島大理工)	q-超幾何函数 ${}_r\phi_{r-1}(\mathbf{0};\boldsymbol{b};q,x)$ の接続問題	(15)	13
8	大山陽介 (徳島大理工)	q-超幾何函数 ${}_3\phi_2(a_1,a_2,a_3;b_1,0;q,x)$ の満たす差分方程式の q-Stokes 係数	(15)	15
9	神原北斗 竹田悠人 上野喜三雄 (早大理工)	モノドロミー保存変形への KZ 理論的アプローチにおける解の多重対数関数による展開	(15)	17
10	上野喜三雄 (早大理工)	モノドロミー保存変形への KZ 理論的アプローチと Schlesinger 方程式との関係	(10)	19
11	尾角正人 (阪市大理) A. Schilling (UC Davis) T. Scrimshaw (Univ. of Queensland)	アフィン非例外型のパスと艤装配位の全単射	(15)	21
12	髙﨑金久 (近畿大理工)	位相的頂点と Volterra 型可積分階層	(15)	23

15:45〜16:45　特別講演

木村太郎 (慶大自然科学研究教育センター)	箙ゲージ理論と箙 W 代数	25

3月21日(水)　第V会場

9:30〜10:30

10:45〜11:45　特別講演

q ホイン方程式の多項式解について

小嶋　健太郎　(中央大学大学院理工学研究科)
佐藤　司　(中央大学大学院理工学研究科)
竹村　剛一　(中央大学理工学部)

q ホイン方程式

本講演では、以下で定められる q ホイン方程式の解について考察する。

$$\begin{aligned}&(x-q^{h_1+1/2})(x-q^{h_2+1/2})f(x/q)+q^{\alpha_1+\alpha_2}(x-q^{l_1-1/2})(x-q^{l_2-1/2})f(qx) \\ &-\{(q^{\alpha_1}+q^{\alpha_2})x^2+Ex+q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+\alpha_1+\alpha_2)/2}(q^{\beta/2}+q^{-\beta/2})\}f(x)=0.\end{aligned} \tag{1}$$

これは q 差分方程式であるが、$f(x/q)$ などの係数はすべて x について 2 次多項式となっている。E **はアクセサリーパラメーター**と考えられる。また、$q \to 1$ **の極限においてホインの微分方程式**を得ることができる。

q ホイン方程式は Hahn の 1971 年の論文 [2] で得られていたが、[3] において 2 つの方法で再発見された。1 つは一粒子 Ruijsenaars-van Diejen 作用素の 4 回の退化であり、他方は q 差分パンルヴェ第六方程式を生み出す線形 q 差分方程式 ([1]) の特殊化である。

$x=0$ での級数解

q ホイン方程式に対して、$x=0$ のそばの解を

$$f(x)=x^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k, \quad c_0=1 \tag{2}$$

の形で探す。これは、線形常微分方程式の解を確定特異点のそばで解析する方法の類似である。本講演では $0<q<1$ を仮定する。ここで

$$\lambda_1=(h_1+h_2-l_1-l_2-\alpha_1-\alpha_2+\beta+2)/2,\ \lambda_2=(h_1+h_2-l_1-l_2-\alpha_1-\alpha_2-\beta+2)/2 \tag{3}$$

とおく。式 (2) を q ホイン方程式 に代入すると、次の関係式を得る。

$$(1-q^{\lambda-\lambda_1})(1-q^{\lambda-\lambda_2})=0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&c_n[q^{h_1+h_2}(1-q^{n+\lambda-\lambda_1})(1-q^{n+\lambda-\lambda_2})]=-c_{n-2}[q(1-q^{n-2+\lambda+\alpha_1})(1-q^{n-2+\lambda+\alpha_2})] \\ &+c_{n-1}[q^{1/2}(q^{h_1}+q^{h_2})+Eq^{n-1+\lambda}+(q^{l_1}+q^{l_2})q^{2(n-1+\lambda)+\alpha_1+\alpha_2-1/2}].\end{aligned} \tag{5}$$

ただし $n=1$ に対応して $c_{-1}=0$ とおいている。式 (4) より $\lambda=\lambda_1$ または $\lambda=\lambda_2$ とおく。$\lambda_1-\lambda_2(=\beta)$ は整数でないとすると、式 (5) により c_n が順次決まる。E を不定元とすると c_n は E についての n 次式となっており、改めて $c_n(E)$ と書くことにする。

多項式解を持つためのアクセサリーパラメーター E の条件式

Theorem 1 $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\}$ とし、$-\lambda_i - \alpha_j$ は 0 以上の整数とする。$N = -\lambda_i - \alpha_j$ とし、$E = E_0$ は $N+1$ 次方程式

$$c_{N+1}(E) = 0 \tag{6}$$

の解とする。このとき、q ホイン方程式は次の形の解をもつ。

$$f(x) = x^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{N} c_k(E_0) x^k. \tag{7}$$

式 (7) は x^{λ_i} と多項式の積の形であるので、これを多項式解と呼ぶことにする。

条件式 $c_{N+1}(E) = 0$ の解の実数性と非重複性

c_n についての三項間漸化式 (5) から Sturm 列の議論を使うことができ、次の定理が成り立つ。Theorem 1 で $i = 1$, $j = 1$ の場合について述べる。

Theorem 2 $N = -\lambda_1 - \alpha_1$ は 0 以上の整数とし、$0 < q < 1$ であって h_1, h_2, l_1, l_2, α_1, α_2, β はすべて実数とする。さらに、$N + \lambda_1 + \alpha_2 < 1$ ($\Leftrightarrow \alpha_2 - \alpha_1 < 1$) および $\lambda_1 - \lambda_2 > -1$ ($\Leftrightarrow \beta > -1$) を仮定する。このとき、$N+1$ 次方程式 (6) の解はすべて重複しない実数である。

超離散極限による $c_{N+1}(E) = 0$ の解の解析

条件式 (6) すなわち $c_{N+1}(E) = 0$ は、一般には明示的に解くことはできない。しかし、$q \to +0$ という超離散極限における $c_{N+1}(E) = 0$ の解の挙動は、場合によっては解明できる。定理 2 の設定に加え、$h_1 < h_2$, $l_1 < l_2$, $1 - l_2 + h_2 + \beta > 0$ を仮定し、$c_{N+1}(E) = 0$ の解を適切な順番に $E = E_0, E_1, \ldots, E_N$ とおく。

• $2 - l_1 - l_2 + 2h_2 + \beta > 0$ の場合、$q \to +0$ の極限で符号付き超離散化の意味で $E_k \sim -q^{1/2-k-\lambda_1+h_1}$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$ という挙動を示す。

• $1 \le m \le (N-1)/2$ をみたす自然数 m に対して $-4m - 2 < -l_1 - l_2 + 2h_2 + \beta < -4m + 1$ が成り立つ場合、$q \to +0$ の極限で次の挙動を示す。

$$E_k \sim \begin{cases} q^{(\alpha_1+\alpha_2+h_1+h_2)/2} & (k = 0, 1, \ldots, m-1) \\ -q^{(\alpha_1+\alpha_2+h_1+h_2)/2} & (k = m, m+1, \ldots, 2m) \\ -q^{1/2-k-\lambda_1+h_1} & (k = 2m, 2m+1, \ldots, N) \end{cases}$$

参考文献

[1] M. Jimbo, H. Sakai, A q-Analog of the Sixth Painlevé Equation. *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145–154

[2] W. Hahn, On linear geometric difference equations with accessory parameters, *Funkcial. Ekvac.* **14** (1971), 73–78.

[3] K. Takemura, Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and q-Painleve equations, *J. Integrable Systems* **2** (2017), xyx008, arXiv:1608.07265.

Real-root property of the spectral polynomial of the Treibich-Verdier potential and related problems

Zhijie Chen (Yau Mathematical Sciences Center, Beijing)
Ting-Jung Kuo (National Taiwan Normal University)
Chang-Shou Lin (National Taiwan University)
Kouichi Takemura (Chuo University)

$\wp(z) = \wp(z|\tau)$ を基本周期が $(1,\tau)$ のワイエルストラスの二重周期関数とし、$\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \tau$, $\omega_3 = 1+\tau$ とおく。半周期 $\frac{\omega_k}{2}$ $(k \in \{1,2,3\})$ に対応して $e_k = \wp(\frac{\omega_k}{2}|\tau)$ とおく。l_0, l_1, l_2, l_3 を定数として次の作用素を導入する。

$$H^{(l_0,l_1,l_2,l_3)} = -\frac{d^2}{dz^2} + q^{(l_0,l_1,l_2,l_3)}(z),\ q^{(l_0,l_1,l_2,l_3)}(z) = \sum_{k=0}^{3} l_k(l_k+1)\wp\left(z + \tfrac{\omega_k}{2}\right).$$

1990 年頃、Treibich と Verdier により $q^{(l_0,l_1,l_2,l_3)}(z)$ は**代数幾何的有限帯ポテンシャル**であること、すなわち次の定理が発見された。

Theorem 1 ([5]) l_0, l_1, l_2, l_3 がすべて整数のとき、ある奇数階の微分作用素

$$P_{2g+1} = \left(\frac{d}{dz}\right)^{2g+1} + \sum_{j=0}^{2g-1} b_j(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^{2g-1-j}$$

であって $H^{(l_0,l_1,l_2,l_3)}$ と可換であるものが存在する。

ここでの $q^{(l_0,l_1,l_2,l_3)}(z)$ は Treibich-Verdier potential と呼ばれている。P_{2g+1} を標準的にとったとき、$(P_{2g+1})^2 = Q(H^{(l_0,l_1,l_2,l_3)})$ が成り立つような $2g+1$ 次多項式

$$Q(E) = Q^{(l_0,l_1,l_2,l_3)}(E|\tau)$$

がとれ、これを $H^{(l_0,l_1,l_2,l_3)}$ に付随した**スペクトル多項式**と呼ぶ。超楕円曲線 $\nu^2 = Q(E)$ は E を固有値とするスペクトル問題

$$H^{(l_0,l_1,l_2,l_3)} f(x,E) = E f(x,E) \tag{1}$$

と密接に関わっている。とくに、$E = E_0$ が $Q(E_0) = 0$ をみたすことと、式 (1) において $f(x+1,E) = \pm f(x,E)$, $f(x+\tau,E) = \pm f(x,E)$ をみたす固有関数 $f(x,E_0)$ が存在することは同値である。

本講演では、以下の **(Q)** について考察する。

(Q): **与えられた非負整数** l_0, l_1, l_2, l_3 **に対し、すべての** $\tau \in i\mathbb{R}_{>0}$ **に対してスペクトル多項式** $Q^{(l_0,l_1,l_2,l_3)}(E|\tau)$ **の零点はすべて実数で非重複であるか。**

まず、$l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合、すなわち式 (1) が Lamé の微分方程式の場合は Ince により **(Q)** が肯定的であることが示されている。また、$l_2 = l_3 = 0$ の場合も [3] にて **(Q)** が肯定的であることが示されている。

ここで、以下の結果について報告する。

Theorem 2 ([1]) **(Q)** は、以下のそれぞれの場合にも肯定的である。すなわち、以下のそれぞれの場合の非負整数 l_0, l_1, l_2, l_3 に対し、すべての $\tau \in i\mathbb{R}_{>0}$ に対してスペクトル多項式 $Q^{(l_0,l_1,l_2,l_3)}(E|\tau)$ の零点はすべて実数で非重複である。

(i) $l_3 = 0$, $l_0 \geq l_1 + l_2 - 1$.

(ii) $l_0 + l_3 + 1 = l_1 + l_2$, $l_2 + l_3 \geq l_0 + l_1 + 1$, $l_1 + l_3 \geq l_0 + l_2 + 1$.

(iii) $l_0 + l_3 = l_1 + l_2 + 1$, $l_0 + l_1 \geq l_2 + l_3 + 1$, $l_0 + l_2 \geq l_1 + l_3 + 1$.

(i) は $l_2 = l_3 = 0$ の場合の拡張であるが、$Q^{(2,2,2,0)}(E|\tau)$ は $\tau \in i\mathbb{R}_{>0}$ の場合にも虚数解をもってしまうで条件 $l_0 \geq l_1 + l_2 - 1$ をそのまま外すことはできない。

ホインの微分方程式との関係

ところで、式 (1) はホインの微分方程式に書き換えられることが知られている。すなわち、各 $i \in \{1,2,3\}$ に対して $\tilde{\alpha}_i = -l_i/2$ または $(l_i+1)/2$ とすると式 (1) は 4 点 $\{e_1, e_2, e_3, \infty\}$ に確定特異点をもつ次の微分方程式に書き換えられる。

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{2\tilde{\alpha}_i + \frac{1}{2}}{x - e_i} \frac{df(x)}{dx} + \left(\frac{(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3 - \frac{l_0}{2})(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3 + \frac{l_0+1}{2})x}{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} \right.$$
$$\left. + \frac{\frac{E}{4} - e_1(\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3)^2 - e_2(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_3)^2 - e_3(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2)^2}{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} \right) f(x) = 0. \qquad (2)$$

Theorem 2 の証明の概略

$\tilde{\alpha}_i \in \{-l_i/2, (l_i+1)/2\}$ $(i = 1,2,3)$ に対して微分方程式 (2) が多項式解をもつための E の条件は、スペクトル多項式 $Q(E)$ の零点となっていることと同値となることが知られている。式 (2) の解を $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (x - e_2)^j$ で書くと c_j に対して 3 項間漸化式が得られる。Sturm 列の議論からこの級数が多項式として解をもつための E は実数であって非重複であることが示され、Theorem 2 (i) が証明される。Theorem 2 (ii), (iii) については、[4] での generalized Darboux transformation の結果を用いることで Theorem 2 (i) から導出される。

参考文献

[1] Z. Chen, T. Kuo, C. Lin and K. Takemura, Real-root property of the spectral polynomial of the Treibich-Verdier potential and related problems, arXiv:1610.02216.

[2] E. L. Ince, *Proc. R. Soc. Edinb.* **60** (1940), 83-99.

[3] K. Takemura, *Comm. Math. Phys.* **235** (2003), 467-494.

[4] K. Takemura, *J. Nonlinear Math. Phys.* **13** (2006), 584–611.

[5] A. Treibich and J.-L. Verdier, *Duke Math. J.* **68** (1992), 217–236.

一列型C, D型Macdonald多項式の明示公式

星野歩　(広工大工)
白石潤一　(東大数理)

1. 一列型Koornwinder多項式の明示公式

nを正の整数，$x=(x_1,\cdots,x_n)$を変数とする．a,b,c,d,q,tをAskey-Wilson/Koornwinder多項式のパラメータとする．$P_{(1^r)}(x|a,b,c,d|q,t)$を一列型分割(1^r) $(0\le r\le n)$に対するKoornwinder多項式とする．

Definition 1.1. 対称なLaurent多項式$G_r(x)$を次で定める：

$$\prod_{i=1}^n(1-yx_i)(1-y/x_i)=\sum_{r\ge0}(-1)^rG_r(x)y^r.$$

分割λの共役をλ'とする．[4] で与えられたBC型の核関数関係式を用いれば，m個の変数$y=(y_1,\cdots,y_m)$に関するKoornwinder差分作用素の固有関数を用いることで，lengthがm以下の分割λの共役λ'に対するn変数$(n\ge m)$のKoornwinder多項式$P_{\lambda'}(x|a,b,c,d|q,t)$を構成することができる．これを$m=1$の場合に適用する．Askey-Wilson多項式の四重級数表示[1] を用いることで次の定理を得る．

Theorem 1.2.

$$P_{(1^r)}(x|a,b,c,d|q,t)=\sum_{k,l,i,j\ge0}(-1)^{i+j}G_{r-2k-2l-i-j}(x)c_e(k,l;t^{n-r+1+i+j})c_o(i,j;t^{n-r+1}),$$

ここに

$$\begin{aligned}
c_e(k,l;s)=&\frac{(tc^2/a^2;t^2)_k(sc^2t;t^2)_k(s^2c^4/t^2;t^2)_k}{(t^2;t^2)_k(sc^2/t;t^2)_k(s^2a^2c^2/t;t^2)_k}\frac{(1/c^2;t)_l(s/t;t)_{2k+l}}{(t;t)_l(sc^2;t)_{2k+l}}\frac{1-st^{2k+2l-1}}{1-st^{-1}}a^{2k}c^{2l},\\
c_o(i,j;s)=&\frac{(-a/b;t)_i(scd/t;t)_i}{(t;t)_i(-sac/t;t)_i}\frac{(s;t)_{i+j}(-sac/t;t)_{i+j}(s^2a^2c^2/t^3;t)_{i+j}}{(s^2abcd/t^2;t)_{i+j}(sac/t^{3/2};t)_{i+j}(-sac/t^{3/2};t)_{i+j}}\\
&\times\frac{(-c/d;t)_j(sab/t;t)_j}{(t;t)_j(-sac/t;t)_j}b^id^j.
\end{aligned}$$

[2], [3] に従ってパラメータを特殊化すれば，一列型分割に対するC_n型Macdonald多項式は次で与えられる．

Theorem 1.3. $s=t^{n-r+1}$に対して，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
P^{(C_n)}_{(1^r)}(x|b;q,t)=&\sum_{0\le2k+2l\le r}G_{r-2k-2l}(x)\frac{(1/bq;t)_l(s/t;t)_{2k+l}}{(t;t)_l(sbq;q)_{2k+l}}\frac{1-st^{2k+2l-1}}{1-st^{-1}}(bq)^l\\
&\times\frac{(qt;t^2)_k(sbqt;t^2)_k(s^2b^2q^2/t^2;t^2)_k}{(t^2;t^2)_k(sbq/t;t^2)_k(s^2b^2q/t;t^2)_k}b^k.
\end{aligned}$$

特に，一列型D_n型Macdonald多項式$P^{(D_n)}_{(1^r)}(x|q,t)$は$P^{(D_n)}_{(1^r)}(x|q,t)=P^{(C_n)}_{(1^r)}(x|1;q,t)$より得られる．

2. 一列型 C, D 型 Macdonald 多項式の組合せ的明示公式

Definition 2.1.

$$F[m] := \frac{(1-t^m)(1-b^2qt^{m-2})(1+bt^{m-1})(1+bqt^{m-1})}{(1-b^2qt^{2m-3})(1-b^2qt^{2m-1})},$$

$$a_{r,j}^{(n)} := \begin{cases} 1 & j=0 \\ \displaystyle\sum_{\substack{d_0=n-r \\ 1\le d_k\le d_{k-1}+1 \text{ for } k=1,2,\cdots,j}} F[d_1]F[d_2]\cdots F[d_j] & j\ge 1, \end{cases}$$

ここに $n<r$ のときは $a_{r,j}^{(n)}=0$ と定める.

C_n 型 Weyl 群で不変な対称単項多項式を m_λ と書くことにすれば，次の定理を得る.

Theorem 2.2.

$$P_{(1^r)}^{(C_n)}(x|b;q,t) = \sum_{j=0}^{[\frac{r}{2}]} a_{r,j}^{(n)} m_{(1^{r-2j})}.$$

特に $b=1$ とすれば，$P_{(1^r)}^{(D_n)}(x|q,t)$ についての公式が得られる.

証明の概略：Theorem 1.3. より，次の定理を得る.

Theorem 2.3. $s=t^{n-r+1}$ に対して，次が成り立つ.

$$G_r(x) = \sum_{i=0}^{[\frac{r}{2}]} P_{(1^{r-2i})}^{(C_n)}(x|b;q,t)\frac{(-st^{-1},s;t)_{2i}}{(t^2,s^2;t^2)_i}(s^{-1}t)^i t^{-i(i-1)}$$
$$\times\ {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} -s^{-1}t^{-2i+3}/bq, -s^{-1}t^{-2i+3}/b, s^{-2}t^{-2i+2}, t^{-2i} \\ s^{-2}t^{-4i+5}/b^2q, -s^{-1}t^{-2i+2}, -s^{-1}t^{-2i+3} \end{matrix}; t^2, t^2\right].$$

また，$G_r(x)$ は二項係数を用いて次のように書ける.

$$G_r(x) = \sum_{j=0}^{[\frac{r}{2}]} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix} m_{(1^{r-2j})}.$$

Theorem 2.3. の左辺と右辺の $m_{(1^{r-2j})}$ の係数を比較することによって，Theorem 2.2. を得る.

参考文献

[1] A. Hoshino, M. Noumi and J. Shiraishi, Some transformation formulas associated with Askey-Wilson polynomials and Lassalle's formulas for Macdonald-Koornwinder polynomials. Mosc. Math. J. 15 (2015), no. 2, 293-318, 404-405.

[2] T. H. Koornwinder, Askey–Wilson polynomials for root systems of type BC, in Hypergeometric Functions on Domains of Positivity, Jack Polynomials, and Applications (Tampa, FL, 1991), *Contemp. Math.*, Vol. 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 189–204.

[3] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, *Sém. Lotha. Combin.* **45** (2000), Art. B45a.

[4] K. Mimachi, A duality of MacDonald–Koornwinder polynomials and its application to integral representations. Duke Math. J. **107** (2001), no. 2, 265–281.

G_2型Weyl群不変なq超幾何積分の行列式公式

伊藤 雅彦 (琉球大学・理)
宮永 愛子 (神戸大学・理)
野海 正俊 (神戸大学・理)

本講演では, 例外型G_2型ルート系に付随したq超幾何積分を成分とする行列式がqガンマ函数の積で表示できることを紹介する. 以下, $q \in \mathbb{C}^*$を固定し $|q| < 1$とする.

$z = (z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$とし, G_2型Weyl 群不変な有理型函数$\Phi_{(s,l)}(z)$を

$$\Phi_{(s,l)}(z) = \frac{(z_1^{\pm1})_\infty((z_1z_2)^{\pm1})_\infty((z_1^2z_2)^{\pm1})_\infty(z_2^{\pm1})_\infty((z_1^3z_2)^{\pm1})_\infty((z_1^3z_2^2)^{\pm1})_\infty}{\prod_{i=1}^{s}(a_iz_1^{\pm1})_\infty(a_i(z_1z_2)^{\pm1})_\infty(a_i(z_1^2z_2)^{\pm1})_\infty\prod_{j=1}^{l}(t_jz_2^{\pm1})_\infty(t_j(z_1^3z_2)^{\pm1})_\infty(t_j(z_1^3z_2^2)^{\pm1})_\infty}$$

と定義する. ただしq階乗冪を$(x)_\infty = \prod_{i=0}^\infty(1-q^ix)$と書き, $\Phi_{(s,l)}(z)$の添字(s,l)は$\Phi_{(s,l)}(z)$に含まれるパラメータ$a_i \in \mathbb{C}^*$と$t_j \in \mathbb{C}^*$の個数に対応している.

まず, 本講演の背景となる先行結果を述べる. $\Phi_{(1,1)}(z)$と$\Phi_{(4,0)}(z)$を重み函数とする複素積分(**G_2型q超幾何積分**と呼ぶ)について, 以下の無限積表示が知られている.

命題 (無限積表示). $a = a_1 \in \mathbb{C}^*$, $t = t_1 \in \mathbb{C}^*$が$|a| < 1$, $|t| < 1$を満たすとき

$$\iint_{\mathbb{T}^2}\Phi_{(1,1)}(z)\omega(z) = \frac{12}{(q)_\infty^2}(qat^2)_\infty(qa^2t^3)_\infty\frac{(t)_\infty(qt)_\infty}{(t^2)_\infty(qt^3)_\infty}\frac{(a)_\infty(at)_\infty}{(a^2)_\infty(a^3t^3)_\infty}. \tag{1}$$

が成立する. また, $a_i \in \mathbb{C}^*$ $(1 \le i \le 4)$が$|a_i| < 1$を満たすとき次が成立する.

$$\iint_{\mathbb{T}^2}\Phi_{(4,0)}(z)\omega(z) = \frac{12}{(q)_\infty^2}\frac{(a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2)_\infty}{(a_1a_2a_3a_4)_\infty}\prod_{i=1}^4\frac{(a_i)_\infty}{(a_i^2)_\infty}\prod_{1\le i<j\le 4}\frac{1}{(a_ia_j)_\infty}\prod_{1\le i<j<k\le 4}\frac{1}{(a_ia_ja_k)_\infty}. \tag{2}$$

ただし積分路は$\mathbb{T}^2 = \{z = (z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid |z_i| = 1\ (i = 1, 2)\}$で, 記号$\omega(z)$は

$$\omega(z) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\frac{dz_1}{z_1}\frac{dz_2}{z_2}.$$

□

式(1)はG_2型のMacdonald定数項公式と同値な公式として知られており, 式(2)はGustafson [6,7]による. (G_2型に限らずルート系を一般にした場合のq超幾何積分の無限積表示については[3]を参照のこと.) さてMacdonald定数項公式との関係などから, 古典型ルート系に付随したq超幾何積分については, その楕円化も含めて様々な拡張が知られている. 積分の重み函数に含まれるパラメータの数を増やす方向では, [1,2,4,5]等がある. ところが, 例外型に対してはG_2型の場合でも, 上記q超幾何積分の公式(1), (2)の拡張は知られていなかった. そこで, 講演者らはq差分de Rhamの方法を使って式(1), (2)の単純な別証明を与えるところから出発し, その拡張である$\Phi_{(2,1)}(z)$, $\Phi_{(5,0)}(z)$及び$\Phi_{(3,1)}(z)$, $\Phi_{(6,0)}(z)$を重み函数とするG_2型q超幾何積分に対して, 以下の結果を得た.

$z = (z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$の函数$m_i(z)$, $h_i(z)$ $(i = 0, 1)$をそれぞれ

$$m_0(z) = 1, \quad m_1(z) = z_1 + z_1^{-1} + z_1z_2 + z_1^{-1}z_2^{-1} + z_1^2z_2 + z_1^{-2}z_2^{-1},$$

$$h_0(z) = \theta(\sqrt{q}z_1)\theta(\sqrt{q}z_1z_2)\theta(\sqrt{q}z_1^2z_2), \quad h_1(z) = \theta(-\sqrt{q}z_1)\theta(-\sqrt{q}z_1z_2)\theta(-\sqrt{q}z_1^2z_2)$$

とする. ただし$\theta(x) = (x)_\infty(qx^{-1})_\infty$とする.

本研究は科研費 [課題番号:(C)25400118, (B)15H03626] の助成を受けたものである.

定理 1 (行列式公式). $(s,l)=(2,1)$ または $(5,0)$ とする. $a_i\in\mathbb{C}^*$ $(i=1,2,\ldots)$ と $t=t_1\in\mathbb{C}^*$ がそれぞれ $|a_i|<1$ と $|t|<1$ を満たすとき次が成立する.

$$\det\left(\iint_{\mathbb{T}^2} m_i(z)h_j(z)\Phi_{(s,l)}(z)\omega(z)\right)_{i,j=0,1}=C_{(s,l)}. \tag{3}$$

ただし

$$C_{(2,1)}=c\,\frac{(qa_1^2a_2^2t^3)_\infty(qa_1^2a_2^2t^4)_\infty}{(qa_1a_2t^2)_\infty(a_1a_2)_\infty^2(a_1a_2t)_\infty(a_1^2a_2t)_\infty(a_1a_2^2t)_\infty}\frac{(t)_\infty^2(qt)_\infty}{(t^2)_\infty^2(qt^3)_\infty}\prod_{i=1}^{2}\frac{(a_i)_\infty(a_it)_\infty}{(a_i^2)_\infty(a_i^3t^3)_\infty},$$

$$C_{(5,0)}=c\,(a_1a_2a_3a_4a_5)_\infty(a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2)_\infty\prod_{i=1}^{5}\frac{(a_i)_\infty}{(a_i^2)_\infty}\prod_{1\le i<j\le 5}\frac{1}{(a_ia_j)_\infty^2}\prod_{1\le i<j<k\le 5}\frac{1}{(a_ia_ja_k)_\infty}.$$

上記 c はパラメータに依らない定数で, $c=2\sqrt{q}\,(-q)_\infty^2\Big(\dfrac{12}{(q)_\infty^2}\Big)^2$ である. □

$x,y\in\mathbb{C}^*$ に対し $e(x,y)=x+x^{-1}-y-y^{-1}=(1-xy)(1-xy^{-1})/x$, $\tilde{e}(x,y)=\theta(xy^{\pm1})/x$ と定める. $u\in\mathbb{C}^*$ に対し $z=(z_1,z_2)\in(\mathbb{C}^*)^2$ の函数 $E(u;z)$, $\tilde{E}(u;z)$ をそれぞれ

$$E(u;z)=e(z_1,u)e(z_1z_2,u)e(z_1^2z_2,u),\quad \tilde{E}(u;z)=\tilde{e}(z_1,u)\tilde{e}(z_1z_2,u)\tilde{e}(z_1^2z_2,u)$$

とする. ($\tilde{e}(x,y)\to e(x;y)$ $(q\to 0)$ より $E(u;z)$ は $\tilde{E}(u;z)$ の $q\to 0$ による極限となる.)

定理 2 (行列式公式). $(s,l)=(3,1)$ または $(6,0)$ とする. $a_i\in\mathbb{C}^*$ $(i=1,2,\ldots)$ と $t=t_1\in\mathbb{C}^*$ がそれぞれ $|a_i|<1$ と $|t|<1$ を満たすとき次が成立する.

$$\det\left(\iint_{\mathbb{T}^2} E(u_i;z)\tilde{E}(v_j;z)\Phi_{(s,l)}(z)\omega(z)\right)_{i,j=1,2,3,4}=C_{(s,l)}\prod_{1\le i<j\le 4}e(u_i,u_j)\,\tilde{e}(v_i,v_j). \tag{4}$$

ただし

$$C_{(3,1)}=\Big(\frac{12}{(q)_\infty^2}\Big)^4\frac{(qa_1a_2a_3t^2)_\infty(qa_1^2a_2^2a_3^2t^3)_\infty(qa_1^2a_2^2a_3^2t^4)_\infty}{(a_1a_2a_3)_\infty\prod_{1\le i<j\le3}(a_ia_j)_\infty^3(a_ia_jt)_\infty(a_i^2a_jt)_\infty(a_ia_j^2t)_\infty}$$
$$\times\frac{(t)_\infty^3(qt)_\infty^2}{(t^2)_\infty^3(qt^2)_\infty(qt^3)_\infty}\prod_{i=1}^{3}\frac{(a_i)_\infty^2(a_it)_\infty}{(a_i^2)_\infty^2(a_i^3t^3)_\infty},$$

$$C_{(6,0)}=\Big(\frac{12}{(q)_\infty^2}\Big)^4\frac{(a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2a_6^2)_\infty^2}{(a_1a_2a_3a_4a_5a_6)_\infty}\prod_{i=1}^{6}\frac{(a_i)_\infty^2}{(a_i^2)_\infty^2}\prod_{1\le i<j\le 6}\frac{1}{(a_ia_j)_\infty^3}\prod_{1\le i<j<k\le 6}\frac{1}{(a_ia_ja_k)_\infty}.\quad\square$$

定理 $1,2$ の証明の概要. 式 (3), (4) それぞれの左辺の積分が満たす (パラメータに関する) q 差分方程式を求めることで, 右辺の因子でパラメータに依存するものを決定する. また, それぞれの左辺を特殊化して $\Phi_{(1,1)}(z)$ や $\Phi_{(4,0)}(z)$ 等の場合に帰着させることによりパラメータに依らない因子を求める. 講演では, 上記行列式が満たす q 差分方程式の導出方法や, 特殊値の求め方等を紹介する予定である.

参考文献

[1] 伊藤, 野海: Selberg 型 BC_n 楕円超幾何積分の行列式公式, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会 無限可積分系セッション（山形大）講演アブストラクト, 17–18.

[2] K. Aomoto and M. Ito: A determinant formula for a holonomic q-difference system associated with Jackson integrals of type BC_n, Adv. Math. 221 (2009), 1069–1114.

[3] M. Ito: Askey–Wilson type integrals associated with root systems, Ramanujan J. 12 (2006),131–151.

[4] M. Ito and M. Noumi: A generalization of the Sears-Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type BC_n, Adv. Math. 299 (2016), 361–380.

[5] M. Ito and M. Noumi: Evaluation of the BC_n elliptic Selberg integral via the fundamental invariants, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017) 689–703.

[6] R. A. Gustafson: Some q-beta and Mellin–Barnes integrals on compact Lie groups and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 341 (1994), 69–119.

[7] R. A. Gustafson: A summation theorem for hypergeometric series very-well-poised on G_2, SIAM J. Math. Anal. 21 (1990), 510–522.

qサイクルのホモロジー

伊藤公毅　(豊橋技術科学大学)*

1. 導入と復習

ジャクソン積分に現れる積分路(qサイクル)は, コンパクトではない局所有限サイクルのq類似に過ぎない. そこで, 本講演では「コンパクト」なqサイクルとして(一応)機能しうる概念を(複素)1次元の場合に提案し, これを用いて, ジャクソン積分の正則化を与える.

以下, $\{b_\chi(t)\}_{\chi\in\mathbb{Z}}$を有理函数$b_\chi(t)=\frac{b_\chi^+(t)}{b_\chi^-(t)}\in\mathbb{C}(t)$の族で, $b_{\chi+\chi'}(t)=b_\chi(t)b_{\chi'}(q^\chi t)$を満たすものとする.

$$D_+ := \bigcup_{\chi\geq 0}\left\{\, t^+\in\mathbb{C}^* \,\middle|\, b_\chi^- = 0 \,\right\},\quad D_- := \bigcup_{\chi\leq 0}\left\{\, t^-\in\mathbb{C}^* \,\middle|\, b_\chi^- = 0 \,\right\}$$

とおき, サイト${}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)$を, その下部圏が

$$U=U^+\cup U^-,\quad U^+\subset\mathbb{C}^*\setminus D_+,\quad U^-\subset\mathbb{C}^*\setminus D_-$$

を満たす開集合$U\subset\mathbb{C}^*$を対象とし, 被覆族は

$$\bigcup U_i^+ = U^+,\quad \bigcup U_i^- = U^-,\quad \bigcup U_i^{+-} = U^{+-}$$

を満たすものとして定める. ここで, $U^\pm$は最大$q^{\pm\mathbb{Z}_{\geq 0}}$-不変開部分集合を表す. この${}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)$上の層$\mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1\setminus D)}$を以下で定める:

$$\mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1\setminus D)} := \left\{\, f\in\mathscr{O}_{q(\mathbb{P}^1\setminus D)} \,\middle|\, (b_\chi^-\sigma_q^\chi - b_\chi^+)f=0 \,\right\}$$

2. qサイクルのホモロジー

以下では, $\pi : {}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)\longrightarrow\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}} =: E_q$を射影が定める自然なサイトの射とする. 先ず, $q^\nu A_0 := \left\{\, q^\nu t^+\in\mathbb{C}^* \,\middle|\, q\leq|t^+|\leq 1 \,\right\}$, $\partial^+ q^\nu A_0 := \left\{\, q^\nu t^+\in\mathbb{C}^* \,\middle|\, |t^+|=q \,\right\}$とおき, ${}_q(\mathbb{P}^1\setminus D)$上の層$\mathbb{C}_{q^\nu A_0}$, $\mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0}$を

$$\mathbb{C}_{q^\nu A_0}(U) := \begin{cases}\mathbb{C} & (U\cap q^\nu A_0\neq\emptyset)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases},\quad \mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0}(U) := \begin{cases}\mathbb{C} & (U\cap\partial^+ q^\nu A_0\neq\emptyset)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

で定め,

$$\mathcal{S}^0_{q^{\mathbb{Z}}} := \prod_{\nu\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0},\quad \mathcal{S}^0_{E_q} := \pi^{-1}\left\{\, s\in\prod_{p\in E_q}\mathbb{C}_p(U) \,\middle|\, \mathrm{supp}\ s\text{は局所有限} \,\right\}$$

$$\mathcal{S}^{-1}_{q^{\mathbb{Z}}} := \prod_{\nu\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0},\quad \mathcal{S}^{-1}_{E_q} := \pi^{-1}\,(E_q\text{上の高々1位の極を持つ有理型1次微分形式})$$

本研究は科研費(課題番号:17K05199)の助成を受けたものである。

*e-mail: `koki@las.tut.ac.jp`

とおく．ここで, $\mathbb{C}_p$ は点 p を台とする摩天楼層を表す．この準備の下,

$$\mathcal{S}^0 := \mathcal{S}^0_{q^{\mathbb{Z}}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^0_{E_q}, \quad \mathcal{S}^{-1} := \left(\mathcal{S}^{-1}_{q^{\mathbb{Z}}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^0_{E_q}\right) \oplus \left(\mathcal{S}^0_{q^{\mathbb{Z}}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^{-1}_{E_q}\right), \quad \mathcal{S}^{-2} := \mathcal{S}^{-1}_{q^{\mathbb{Z}}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^{-1}_{E_q}$$

とおき, $1 \otimes 1 \in (\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_p$ が定める $\mathcal{S}^0$ の元を $\langle q^\nu p \rangle$, $1 \otimes 1 \in (\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_p$ が定める $\mathcal{S}^{-1}$ の元を $\langle q^{\nu+1} p, q^\nu p \rangle$,

$$\frac{1}{1-q} \otimes 2\pi\sqrt{-1}\xi \in (\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^{-1}_{E_q}$$

が定める $\mathcal{S}^{-1}$ の元を $C(0; q^\nu) \otimes \xi$,

$$\frac{1}{1-q} \otimes 2\pi\sqrt{-1}\xi \in (\mathbb{C}_{q^\nu A_0}/\mathbb{C}_{\partial^+ q^\nu A_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^{-1}_{E_q}$$

が定める $\mathcal{S}^{-2}$ の元を $A(0; q^{\nu+1}, q^\nu) \otimes \xi$ と表すことにする．

$$S_k({}_q(\mathbb{P}^1 \setminus D), \mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)}) := \Gamma_c({}_q(\mathbb{P}^1 \setminus D), \mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)} \otimes \mathcal{S}^{-k})$$

とおき, 複体 $S_\bullet({}_q(\mathbb{P}^1 \setminus D), \mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)})$ の境界作用素 ∂ は

$$\begin{aligned}
\partial\left(s \otimes A(0; q^{\nu+1}, q^\nu) \otimes \xi\right) &:= -\sum_p \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}\,\operatorname*{res}_p s\pi^*\xi}{1-q}\right) s \otimes \langle q^{\nu+1} p, q^\nu p \rangle \\
&\qquad + s \otimes C(0; q^\nu) \otimes \xi - s \otimes C(0; q^{\nu+1}) \otimes \xi \\
\partial(s \otimes \langle q^{\nu+1} p, q^\nu p \rangle) &:= s \otimes \langle q^\nu p \rangle - s \otimes \langle q^{\nu+1} p \rangle \\
\partial\left(s \otimes C(0; q^\nu) \otimes \xi\right) &:= \sum_p \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}\,\operatorname*{res}_p s\pi^*\xi}{1-q}\right) s \otimes \langle q^\nu p \rangle
\end{aligned}$$

で定める．ここで, $\sum_p$ は $s\pi^*\xi$ の A_0 上のすべての極に亘っての和である．この複体のホモロジーを q サイクルのホモロジーとよび,

$$H_k({}_q(\mathbb{P}^1 \setminus D), \mathscr{L}_{q(\mathbb{P}^1 \setminus D)})$$

と記すことにする．

以下,

$$s_+ := t^\alpha \prod_{i=1}^m \frac{(a_i' t; q)_\infty}{(a_i t; q)_\infty}, \quad s_- := t^\alpha \prod_{i=1}^m \frac{(a_i' t; q)_\infty}{(a_i t; q)_\infty} t^{\alpha_i} \frac{\theta(a_i t)}{\theta(a_i' t)}$$

とおく．但し, $\theta(\mathsf{x}) := (\mathsf{x}; q)_\infty (q/\mathsf{x}; q)_\infty (q; q)_\infty$ で定義される．ジャクソン積分 $\displaystyle\int_{0 \cdot p}^{\infty \cdot p} s_+ f \frac{d_q t}{t}$ の正則化は, q サイクル

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-q)\theta'(1)}{2\pi\sqrt{-1}\theta(q^{-\alpha})} s_+ \otimes C(0; q^{\nu_+}) \otimes t^{-\alpha} \frac{\theta(q^{-\alpha} t/p)}{\theta(t/p)} \frac{dt}{t} + \sum_{\nu=\nu_-}^{\nu_+} s_+ \otimes \langle q^{\nu+1} p, q^\nu p \rangle \\
&\qquad - \frac{(1-q)\theta'(1)}{2\pi\sqrt{-1}\theta(q^{-\alpha_-})} s_- \otimes C(\infty; q^{\nu_-}) \otimes t^{-\alpha_-} \frac{\theta(q^{-\alpha_-} t/p)}{\theta(t/p)} \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

と $f \frac{d_q t}{t}$ とのペアリングで得られる．ここで, $C(\infty; q^{\nu_-}) := -C(0; q^{\nu_-})$ である．また, ν_+ はループの内部に (ν_- はループの外部に), p の q スパイラル $q^{\mathbb{Z}} p$ 以外の極を含まないようにとっておく．

q超幾何関数の一般化と, それを特殊解に持つモノドロミー保存変形

朴　佳南　(神戸大学)

概　　要

Tsuda[1] は微分の場合に超幾何関数の拡張式を特殊解に持つモノドロミー保存変形を求めた．そのq類似を求めることが目標である．まず, q 超幾何関数 [2][3] の拡張式 $\mathcal{F}_{N,M}$ を定義する．その積分表示を用いて, それが満たすパフ系を求める．次に, それを簡約化して得られる係数行列は, その作り方から両立条件を満たすので, それを参考にラックス形式をつくり, モノドロミー保存変形を得る．本稿では, $N=1$ の場合について述べる．

1. q超幾何関数の一般化 $\mathcal{F}_{M,N}$

1.1. 級数 $\mathcal{F}_{M,N}$ の定義

q超幾何級数の拡張式 $\mathcal{F}_{M,N}$ を, 次のように定義する

$$\mathcal{F}_{M,N}\left(\begin{matrix}\{a_i\},\{b_j\}\\ \{c_i\}\end{matrix};\{y_j\}\right)=\sum_{n_j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{M}\frac{(a_i)_{|n|}}{(c_i)_{|n|}}\prod_{j=1}^{N}\frac{(b_j)_{n_j}}{(q)_{n_j}}\prod_{j=1}^{N}y_j^{n_j}. \tag{1}$$

ここで, $|n|=\sum_{j=1}^{N}n_j$, $(a)_n=(1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a)=\frac{(a)_\infty}{(q^na)_\infty}$. 積分表示は

$$\mathcal{F}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{c_j\},\{a_i\}\\ \{b_jc_j\}\end{matrix};\{x_i\}\right)=\frac{(\{c_j\})_\infty}{(\{b_jc_j\})_\infty}\prod_{j=1}^{N}\frac{(b_j)_\infty}{(q)_\infty}\sum_{n_j}\prod_{i=1}^{M}\frac{(x_ia_iq^{|n|})_\infty}{(x_iq^{|n|})_\infty}\prod_{j=1}^{N}\frac{(q^{1+n_j})_\infty}{(b_jq^{n_j})_\infty}c_j^{n_j}. \tag{2}$$

2. $\mathcal{F}_{1,M}$ を特殊解に持つモノドロミー保存変形

$\mathcal{F}_{1,M}$ を特殊解に持つモノドロミー保存変形について述べる.

定義 2.1 行列 A, B を

$$A=dX_1^{-1}X_2\cdots X_{2M-1}^{-1}X_{2M}, \tag{3}$$
$$B=X_{2M}^{-1}X_{2M-1}, \tag{4}$$

とする．ただし, d は対角行列, $X_i=\begin{pmatrix}u_i & 1\\ z & c_i/u_i\end{pmatrix}$ とする．このとき

$$B(qz,t)\cdot A(z,t)=A(z,qt)\cdot B(z,t), \tag{5}$$

によって定まる方程式を考える

この方程式 (5) に対して, 次のことが成り立つ.

定理 2.1 (5) で定義されるモノドロミー保存変形は, $\mathcal{F}_{1,M}$ で表される解を持つ.

ここでは, 証明の概要を述べる. $\mathcal{F}_{1,M}$ の積分表示から得られる方程式の係数が, (3) のように表されることを示せばよい. まず, $\mathcal{F}_{1,M}$ の積分表示からパフ系を求める. $N=1$ の場合の積分表示 (2) における被積分関数を

$$\Phi = u_1^{\gamma_1}\frac{(\frac{qu_1}{u_0})_\infty}{(\frac{b_1u_1}{u_0})_\infty}\prod_{i=1}^{M}\frac{(a_ix_iu_1)_\infty}{(x_iu_1)_\infty},\ (u_0=1) \tag{6}$$

とおくと

$$\Psi_0=\Phi p_0,\ \Psi_{1,i}=\Phi p_{1,i},\ (1\le i\le M) \tag{7}$$

が, パフ系の解の基底になる. ここで, $p_0=1$, $p_{1,i}=(1-b_1u_1)\prod_{k=1}^{i-1}\frac{1-x_ku_1}{1-a_kx_ku_1}\cdot\frac{1}{1-a_ix_iu_1}$ である. 互換の積を $\rho=\sigma_M\cdots\sigma_1$ ($\sigma_i=\{x_i\leftrightarrow x_{i+1}, a_i\leftrightarrow a_{i+1}\}$) とおくと, $\mathcal{F}_{1,M}$ のパフ系として次を得る [5]

$$T_{x_M}(\Psi_0)=\frac{x_M-b_1}{a_Mx_M-b_1}\ \rho(\Psi_0)+\frac{(a_M-1)x_M}{a_Mx_M-b_1}\rho(\Psi_{1,1}), \tag{8}$$

$$T_{x_M}(\Psi_{1,i})=\rho(\Psi_{1,i+1})\ (i\neq M), \tag{9}$$

$$T_{x_M}(\Psi_{1,M})=\frac{q^{\gamma_1}(1-b_1)}{a_Mx_M-b_1}\left[\rho(\psi_0)+\frac{a_Mx_M-1}{1-b_1}\rho(\Psi_{1,1})-a_Mx_M\right]. \tag{10}$$

他変数に対する q シフトは, 置換 σ_i を用いることによって求められる. ここで, $\overrightarrow{\Psi}=(\Psi_0,\cdots,\Psi_M)$ とおく. このパフ系は行列の積で次のように表すことができる

$$T_{x_M}\overrightarrow{\Psi}=\overrightarrow{\Psi}A, \tag{11}$$

$$A=R_{M-1}R_{M-2}\cdots R_1Q_M. \tag{12}$$

この行列 R_i, Q_M は $(M+1)$ 次正方行列である. これに対して, パラメーター $a_M=1$ と特殊化すると, パフ系の未知関数 Ψ_0, Ψ_1, $\cdots$,Ψ_M のうち,Ψ_M だけが x_M に依存するようになる. $\frac{\Psi_1}{\Psi_0}$ $\cdots$ $\frac{\Psi_{M-1}}{\Psi_0}$ を x_1, $\cdots$, x_{M-1} にのみ依存する関数として, それぞれ r_1, r_2, $\cdots$ r_{M-1} とおくと, 式 (11)(12) は Ψ_0 と Ψ_M だけの連立方程式として, 次のように表せる

$$\begin{aligned}T_{x_M}(\Psi_0,\Psi_M)=(\Psi_0,\Psi_M)\prod_{k=1}^{M}&\begin{pmatrix}\frac{1}{r_{2M-i}} & 1\\ x_M & r_{2M-i}x_{2M-i}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{r_{2M-i}} & 1\\ x_M & a_{2M-i}r_{2M-i}x_{2M-i}\end{pmatrix}\\ &\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ x_M & b_1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ x_M & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & q^{-\gamma_1}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{13}$$

これと (3) を見比べて, 結果を得る (行列 B も同様).

参考文献

[1] Teruhisa Tsuda, Hypergeometric solution of a certain polynomial hamiltonian system of isomonodromy type, Quart. J. Math, 63 (2012), 489–505.

[2] E.Heine, Uber die Reihe..., Reine Angew.Math., 32 (1846), 210–212.

[3] E.Heine, Untersuchungen uber die Reihe..., Reine Angew.Math., 34 (1847), 285–328.

[4] Kajiwara.,Noumi M., and Yamada Y., q-Painleve systems arising from q-KP hierarchy, Lett. Math. Phys. 62(2002),259–268

[5] Katsuhisa Mimachi, Holonomic q-difference system associated with the basic hypergeometric series ${}_{n+1}\varphi_n$,Tohoku.Math.J.,45(1993), 485–490

q-超幾何函数 ${}_r\phi_{r-1}(\mathbf{0};\boldsymbol{b};q,x)$ の接続問題

大山 陽介（徳島大学大学院社会産業理工学研究部理工学域）[1]

超幾何級数 ${}_r\phi_{r-1}(0,0,...,0;b_1,...,b_{r-1};q,x)$ の満たす差分方程式の接続問題を考える．$\sigma_q u(x)=u(xq)$ として，

$$\left[z\prod_{j=k}^{r}(1-a_k\sigma_q)-\left(-\frac{\sigma_q}{q}\right)^r\right]y(z)=0.$$

を考えるところ (b_k と a_j との関係はあとでわかる）だが，原点での解が分岐するので代わりに $z=x^r$, $p^r=q$ と置いて p-差分方程式

$$\left[x^r\prod_{k=1}^{r}(1-a_k\sigma_p)-\left(-\frac{\sigma_p}{q}\right)^r\right]u(x)=0. \tag{1}$$

をとり、この方程式の接続問題を考える．$a_1a_2\cdots a_r\neq 0$ は仮定する．

■記号：$q\in\mathbb{C}^*$，$0<|q|<1$ に対して q-階乗積 (q-shifted factorial):
$(a;q)_n=\prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j)$, $(a;q)_\infty=\prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j)$, $(a_1,a_2,...,a_m;q)_n=\prod_{j=1}^{m}(a_j;q)_n$.
q-超幾何級数 [GR] ${}_r\phi_s(a_1,\dots,a_r;b_1,\dots,b_s;q,x)$

$$:=\sum_{n\geq 0}\frac{(a_1,\dots,a_r;q)_n}{(b_1,\dots,b_s;q)_n(q;q)_n}\left\{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right\}^{1+s-r}x^n.$$

テータ函数 $\theta_q(x):=\theta(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{k(k-1)/2}x^k=(q,-x,-q/x;q)_\infty$.

■ 無限遠における (1) の局所解の一つ（ここで a_j と b_k の関係がつく）は

$$u_{1,\infty}(x)=\frac{\theta_p(-a_1x)}{\theta_p(-x)}{}_r\phi_{r-1}\left(\begin{matrix}0,0,...,0\\ p^ra_1/a_2,p^ra_2/a_3,...,p^ra_1/a_r\end{matrix};p^r,\frac{1}{a_1a_2\cdots a_rx^r}\right)$$

であり、他の $u_{2,\infty}(x),...,u_{r,\infty}(x)$ は $a_1,a_2,...,a_r$ を cyclic に変えることで得る．
　1 の原始 r 乗根 ω を一つ取って

$$u_{j,0}(x)=\frac{1}{\theta_p(-\omega^jp^{(1-r)/2}x)}v_j(x),\quad v_j(x)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n^{(j)}x^n,$$

となるような原点における (1) の局所解がとれる ($j=0,1,2,...,r-1$). この無限和は収束級数であり，以下では $v_0^{(j)}=1$ とする．この解は一般には超幾何級数では表示されない（$r=2$ の場合は例外的に超幾何級数と関係がつく).

[1]本研究は科研費 (課題番号:6K05176) の助成を受けたものである。

■主定理■ [O]

$(u_{0,0}, u_{1,0}, ..., u_{r-1,0})$ と $(u_{1,\infty}, ..., u_{r,\infty})$ の間の接続公式は

$$v_j(x) = \frac{1}{(q, a_2/a_1, ..., a_r/a_1; q)_\infty} \frac{\theta_p(-\omega^j p^{(1-r)/2} a_1 x)\theta_p(-x)}{\theta_p(-\omega^j p^{(1-r)/2} x)\theta_p(-a_1 x)} u_{1,\infty}(x) + \mathrm{idem}(a_1; a_2, ..., a_r).$$

ここで, "idem $(a_1; a_2, ..., a_r)$" は a_1 をそれぞれ $a_2, a_3, ..., a_r$ と入れ替えてできる $r-1$ 個の項である.

■手法　q-Borel 変換 $\mathcal{B}_q^- : \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[\tau]]$ を次で定める：

$$\mathcal{B}_q^- \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] := \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{-n(n-1)/2} \tau^n.$$

以下，使う関係式は次の二つである

$$\mathcal{B}_q^-(x^m \sigma_q^n f) = q^{-m(m-1)/2} \tau^m \sigma_q^{n-m} \mathcal{B}_q^-(f).$$

$$x^m \sigma_q^n \left[\frac{1}{\theta_q(cx)} f(x) \right] = \frac{q^{n(n-1)/2} c^n}{\theta_q(cx)} x^{m+n} \sigma_q^n f(x).$$

q-Borel 変換 $\mathcal{B}_q^-$ の逆変換が q-Laplace 変換 $\mathcal{L}_q^-$ になる：

$$\mathcal{L}_q^- \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\varepsilon} \varphi(\tau) \theta_q(x/\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

■命題　整数 $m > 0$ に対して $p^m = q$ とおく. $s + m \leqq r$ と仮定する. $s + m = r$ のときはさらに $|q^{(1+m)/2} b_1 \cdots b_s / a_1 a_2 \cdots a_r x^m| < 1$ と仮定する. 複素積分

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\varepsilon} \frac{\prod_{j=1}^{s} (b_j \tau; q)_\infty}{\prod_{k=1}^{r} (a_k \tau; q)_\infty} \theta_p(x/\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

において $\prod_{k=1}^{r} (a_k \tau; q)_\infty$ は $|\tau| \leqq \varepsilon$ で零点を持たないとする. このとき

$$\begin{aligned} I = {} & \frac{(b_1/a_1, ..., b_s/a_1; q)_\infty}{(q, a_2/a_1, ..., a_r/a_1; q)_\infty} \theta_p(a_1 x) \\ & \times {}_{s+m}\phi_{r-1} \left(\begin{matrix} qa_1/b_1, ..., qa_1/b_s, \mathbf{0}_m \\ qa_1/a_2, ..., qa_1/a_r \end{matrix} ; q, \frac{(-1)^r q^{r-s+(1-m)/2} b_1 \cdots b_s}{a_1^{m+s-r+1} a_2 \cdots a_r x^m} \right) \\ & + \mathrm{idem}(a_1; a_2, ..., a_r). \end{aligned}$$

主定理はこの命題から簡単な計算で得られる. $r = 2$ の場合は第 1 種 Jackson q-Bessel 函数の接続公式 [Z] と本質的に同じである.

■文献：

[GR] Gasper, G., Rahman, M.; Basic Hypergeometric Series, 2nd ed, Cambridge (2004).

[O] Ohyama, Y.; Connection formula of basic hypergeometric series ${}_r\phi_{r-1}(\mathbf{0}; \boldsymbol{b}; q, x)$, *J. Math. Tokushima Univ.*, **51** (2017), 29–36.

[Z] Zhang, C.; Sur les fonctions q-Bessel de Jackson, *J. Approx. Theory* **122** (2003), 208–223.

q-超幾何函数 ${}_3\phi_2(a_1, a_2, a_3; b_1, 0; q, x)$ の満たす差分方程式の q-Stokes 係数

大山 陽介（徳島大学大学院社会産業理工学研究部理工学域）[1]

超幾何級数 ${}_3\phi_2(a_1, a_2, a_3; b_1, 0; q, x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1, a_2, a_3; q)_n}{(b_1; q)_n (q; q)_n} x^n$ の満たす差分方程式

$$\left[x \prod_{j=k}^{3} (1 - a_k \sigma_q) - (1 - \sigma_q) \left(1 - \frac{b_1}{q} \sigma_q \right) \right] y(z) = 0$$

の接続問題を考える．記号については前講演 abstract を参照されたい．

この方程式は原点が不確定特異点になり，非超幾何型の発散級数を係数にもつ．この方程式についてはすでに Watson [W] が考察しているが，Stokes 現象を扱っていないので解析が不十分であったので，q-Stokes 係数の決定を目標とする．

■ 無限遠における局所解はすべて収束級数で表示され

$$y_{1,\infty}(x) = \frac{\theta(-a_1 x)}{\theta(-x)} {}_2\phi_2 \left(\begin{matrix} a_1, a_1 q/b_1 \\ a_1 q/a_2, a_1 q/a_3 \end{matrix} ; q, \frac{q^2 b_1}{a_2 a_3 x} \right)$$

であり，$y_{2,\infty}(x), y_{3,\infty}(x)$ は a_1, a_2, a_3 を cyclic に変えることで得る．

■ 原点における局所解は

$$\begin{aligned} y_{1,0}(x) &= {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, 0 \end{matrix} ; q, x \right), \\ y_{2,0}(x) &= \frac{\theta(-x)}{\theta(-qx/b_1)} {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} a_1 q/b_1, a_2 q/b_1, a_3 q/b_1 \\ q^2/b_1, 0 \end{matrix} ; q, x \right), \\ y_{3,0}(x) &= \theta(-a_1 a_2 a_3 x/b_1 q) \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n, \qquad w_0 = 1. \end{aligned}$$

となり，$y_{3,0}(x)$ は超幾何級数ではない発散級数で表される．

■ 収束級数である $y_{1,0}(x)$, $y_{2,0}(x)$ の無限遠での接続係数は Thomae の接続公式 [T] の単純な極限であるが， $y_{3,0}(x)$ は発散するので単純な極限ではない．

■主定理■

$(u_{0,0}, u_{1,0}, ..., u_{r-1,0})$ と $(u_{1,\infty}, ..., u_{r,\infty})$ の間の接続公式は

$$\begin{aligned} y_{1,0}(x) &= \frac{(a_2, a_3, b_1/a_1; q)_\infty}{(b_1, a_2/a_1, a_3/a_1; q)_\infty} y_{1,\infty}(x) + \mathrm{idem}(a_1; a_2, a_3), \\ y_{2,0}(x) &= \frac{(a_2 q/b_1, a_3 q/b_1, q/a_1; q)_\infty}{(q^2/b_1, a_2/a_1, a_3/a_1; q)_\infty} \frac{\theta(-x, -a_1 q x/b_1)}{\theta(-a_1 x, -qx/b_1)} y_{1,\infty}(x) + \mathrm{idem}(a_1; a_2, a_3), \\ \tilde{y}_3(x, \lambda) &= \frac{(q, b_1/a_1, q/a_1; q)_\infty}{(a_2/a_1, a_3/a_1; q)_\infty} \frac{\theta(-s_3 x/q b_1, q a_1 b_1 x/s_3 \lambda, q a_2 b_1/s_3 \lambda, q a_3 b_1/s_3 \lambda)}{\theta(-a_1 x, x/\lambda, q b_1^2/s_3 \lambda, q^2 b_1/s_3 \lambda)} y_{1,\infty}(x) \\ &\quad + \mathrm{idem}(a_1; a_2, a_3). \end{aligned}$$

[1]本研究は科研費 (課題番号:6K05176) の助成を受けたものである．また，フランス・Lille 大学の Changgui Zhang 氏との共同研究である．

■手法　q-Borel 変換 $\mathcal{B}_q^{\pm} : \mathbb{C}[[t]] \to \mathbb{C}[[\tau]]$ を次で定める

$$\mathcal{B}_q^{\pm}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] := \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\pm n(n-1)/2}\tau^n.$$

$\mathcal{B}_q^{+}$ の逆変換として q-Laplace transform $\mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]}$ を次の Jackson 積分で定める：

$$\mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]}(\varphi)(x) := \frac{1}{1-q}\int_0^{\lambda\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\theta_q(\tau/x)}\frac{d_q\tau}{\tau} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\varphi(q^n\lambda)}{\theta_q(q^n\lambda/x)}.$$

$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ とおく．$v(\xi) = \mathcal{B}_q^{+}(w)$ は次の差分方程式（$s_3 = a_1a_2a_3$）：

$$(1+s_3\xi/a_1b_1q)(1+s_3\xi/a_2b_1q)(1+s_3\xi/a_3b_1q)v(\xi q) = (1+s_3\xi/b_1^2q)(1+s_3\xi/b_1q^2)v(\xi).$$

を満たすので

$$v(\xi) = \frac{(-s_3\xi/qa_1b_1, -s_3\xi/qa_2b_1, -s_3\xi/qa_2b_1)_\infty}{(-s_3\xi/q^2b_1, -s_3\xi/qb_1^2)_\infty}.$$

ここで

$$\tilde{y}_3(x,\lambda) = \theta(-s_3x/b_1q)\mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]} \circ \mathcal{B}_q^{+}(w).$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]}\left\{\frac{(-s_3\xi/qa_1b_1, -s_3\xi/qa_2b_1, -s_3\xi/qa_2b_1)_\infty}{(q, -s_3\xi/q^2b_1, -s_3\xi/qb_1^2)_\infty}\right\}\\
&= \frac{1}{1-q}\int_0^{\lambda\infty} \frac{(-s_3\xi/qa_1b_1, -s_3\xi/qa_2b_1, -s_3\xi/qa_2b_1)_\infty}{(q, -s_3\xi/q^2b_1, -s_3\xi/qb_1^2)_\infty\theta(\xi/x)}\frac{d_q\xi}{\xi}\\
&= \sum_{\xi\in[\lambda;q]} \frac{(-s_3\xi/qa_1b_1, -s_3\xi/qa_2b_1, -s_3\xi/qa_2b_1)_\infty}{(q, -s_3\xi/q^2b_1, -s_3\xi/qb_1^2)_\infty\theta(\xi/x)}
\end{aligned}$$

この最後の式は ${}_3\phi_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2;q,x)$ が満たす差分方程式の原点での第 3 の解になる

$$f(x) = \frac{1}{\theta(-s_3x/b_1b_2)}{}_3\phi_2\left(\begin{matrix}a_1q/b_2, a_2q/b_2, a_3q/b_2\\ q^2/b_2, b_1q/b_2\end{matrix};q,x\right).$$

から $b_2 \to 0$ の適当な極限で得られるので，Thomae の接続公式を用いて q-Stokes 係数が決定できる．

簡単のために分岐のない場合に接続公式を書いたが、${}_3\phi_2(a_1,a_2,a_3;0,0;q,x)$ のように分岐する場合も扱える．前講演と合わせ，分岐する場合にも収束・発散いずれの場合も接続公式が計算できる．

■文献：

[T] Thomae, J.; Les séries Heinéennes supérieures, ou les séries de la forme ..., *Ann. Mat. Pura Appl.* **4** (1870), 105–138.

[W] Watson, G. N.; The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, *Trans. Camb. Phil. Soc.* **21** (1910), 281–299.

9

モノドロミー保存変形へのKZ理論的アプローチにおける解の多重対数関数による展開

神原北斗，竹田悠人，上野 喜三雄　(早大·理工)

2015年の秋季総合分科会において，KZ方程式の変形としてモノドロミー保存変形を捉える枠組みについて講演した．今回はその続きである．その1では**1変数の変形方程式の正則解が多重対数関数により展開される**ことを示す．

モジュライ空間 $\mathcal{M}_{0,5}$ のKZ方程式を，その上の立方体座標 (z,w) で表示したものを**2変数KZ方程式**と呼び**2KZ**と記す：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial z} = \left(\dfrac{X_0}{z} + \dfrac{Y_0}{1-z} + \dfrac{wZ_0}{1-zw}\right) L, \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial w} = \left(\dfrac{X_0^{(1)}}{w} + \dfrac{Y_0^{(1)}}{1-w} + \dfrac{zZ_0}{1-zw}\right) L. \end{cases} \tag{1}$$

ここで係数行列 $X_0, Y_0, Z_0, X_0^{(1)}, Y_0^{(1)}$ はすべて定数行列であり，積分可能条件

$$\begin{cases} [X_0^{(1)}, X_0] = [X_0^{(1)}, Y_0] = [X_0^{(1)} - X_0 + Y_0, Z_0] = O, \\ [Y_0^{(1)}, X_0] = [Y_0^{(1)} + Z_0, Y_0] = [Y_0^{(1)} + Y_0, Z_0] = O \end{cases} \tag{2}$$

をみたすとする．ここで z を主変数，w をパラメータとして，2KZの変形を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial z} = \left(\dfrac{X(w)}{z} + \dfrac{Y(w)}{1-z} + \dfrac{wZ(w)}{1-zw}\right) L, \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial w} = \left(\dfrac{X_0^{(1)}}{w} + \dfrac{Y_0^{(1)}}{1-w} + \dfrac{zZ(w)}{1-zw}\right) L \end{cases} \tag{3}$$

ただし，$X_0^{(1)}, Y_0^{(1)}$ は定数行列であり，$X(w), Y(w), Z(w)$ は w の関数を成分とする行列である．この方程式系を**2DKZ**と記す．2DKZの積分可能条件としてつぎの非線形微分方程式系が得られる：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial w} &= \left[\dfrac{X_0^{(1)}}{w} + \dfrac{Y_0^{(1)}}{1-w}, X\right], \\ \\ \dfrac{\partial Y}{\partial w} &= \left[\dfrac{X_0^{(1)}}{w} + \dfrac{Y_0^{(1)} + Z}{1-w}, Y\right], \\ \\ \dfrac{\partial Z}{\partial w} &= \left[\dfrac{X_0^{(1)} - X + Y}{w} + \dfrac{Y_0^{(1)} + Y}{1-w}, Z\right]. \end{cases} \tag{4}$$

これを**1変数の変形方程式**と呼び**1DE**と記す．この方程式の原点 $w=0$ における正則解全体の構造を調べることが当面の目標である．

まず，$F = X, Y, Z$ に対して，$F(w) = F_0 + \widehat{F}(w)$, $\widehat{F}(0) = O$ とおくと，つぎの事実が簡単な計算によって得られる．

命題 1 X_0, Y_0, Z_0 が**正則性条件** (5)

$$\left[X_0^{(1)}, X_0\right] = \left[X_0^{(1)}, Y_0\right] = \left[X_0^{(1)} - X_0 + Y_0, Z_0\right] = 0 \tag{5}$$

をみたすとき，$\widehat{X}(w), \widehat{Y}(w), \widehat{Z}(w)$ はつぎの方程式系をみたす．

$$\begin{cases} w\dfrac{\partial \widehat{X}}{\partial w} = \dfrac{w}{1-w}\left[Y_0^{(1)}, X_0\right] + \left[X_0^{(1)} + \dfrac{wY_0^{(1)}}{1-w}, \widehat{X}\right], \\ w\dfrac{\partial \widehat{Y}}{\partial w} = \dfrac{w}{1-w}\left[Y_0^{(1)} + Z_0, Y_0\right] + \left[X_0^{(1)} + \dfrac{w(Y_0^{(1)} + Z_0)}{1-w}, \widehat{Y}\right] + \dfrac{w}{1-w}\left[\widehat{Z}, Y_0\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{w}{1-w}\left[\widehat{Z}, \widehat{Y}\right], \\ w\dfrac{\partial \widehat{Z}}{\partial w} = \dfrac{w}{1-w}\left[Y_0^{(1)} + Y_0, Z_0\right] + \left[X_0^{(1)} - X_0 + Y_0 + \dfrac{w(Y_0^{(1)} + Y_0)}{1-w}, \widehat{Z}\right] \\ \qquad + \left[-\widehat{X} + \widehat{Y}, Z_0\right] + \dfrac{w}{1-w}\left[\widehat{Y}, Z_0\right] + \left[-\widehat{X} + \widehat{Y}, \widehat{Z}\right] + \dfrac{w}{1-w}\left[\widehat{Y}, \widehat{Z}\right]. \end{cases} \tag{6}$$

方程式 (6) に**正則なパラメータをもつ多成分の Briot-Bouquet 方程式**の理論を適用してつぎを示すことができる．

命題 2 (1) 行列 X_0, Y_0, Z_0 が正則性条件 (5) の他に，**固有値条件**

$$\mathrm{ad}(X_0^{(1)}), \quad \mathrm{ad}\big(X_0^{(1)} - X_0 + Y_0\big) \quad \text{が正整数の固有値を持たない} \tag{7}$$

をみたすとき， 初期値を $X(0) = X_0, Y(0) = Y_0, Z(0) = Z_0$ とする 1DE (4) の原点での正則解 $X(w), Y(w), Z(w)$ が唯一つ存在する．

(2) (1) で存在が保証された解は，十分小さいパラメータ $X_0^{(1)}, Y_0^{(1)}$ と十分小さい初期値 X_0, Y_0, Z_0 に正則に依存する．

この命題からつぎを得る．

命題 3 1DE の正則解 $X(w), Y(w), Z(w)$ をパラメータ $X_0^{(1)}, Y_0^{(1)}$ と初期値 X_0, Y_0, Z_0 について展開するとき，その展開係数は**多重対数関数 (MPL)** により表示できる．

証明の方針を述べる．(証明できているのは $n = 2$ の場合のみである．)

· $X_0^{(1)}, Y_0^{(1)}, X_0, Y_0, Z_0$ を生成元に持ち基本関係式を正則性条件 (5) とするリー環を考える．このリー環は，$\mathcal{M}_{0,5}$ において $w = 0$ で定義される因子芽の基本群のリー環と $w = 1$ で定義される因子芽の基本群のリー環の自由積の部分リー環になっている．このリー環の n 次元表現の同値類の空間を**階層分割（strarification）**して，その各階層上で (6) に基づいて正則解をパラメータと初期値について原点の近傍で展開し，展開係数の間に成立する漸化式を導く．

· 漸化式より，展開係数を順次積分して MPL で表示する．その際，非線形項から生じる MPL 同士の積は**シャッフル積**を使って MPL の線型和に直す．

課題： 一般の n の場合も含めて，展開係数の**完全表示**を求めること．

モノドロミー保存変形へのKZ理論的アプローチとSchlesinger方程式との関係

上野 喜三雄 (早大·理工)

この講演の目標は，**前の講演で導入した変形方程式 1DE**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial w} &= \Big[\dfrac{X_0^{(1)}}{w} + \dfrac{Y_0^{(1)}}{1-w}, X\Big], \\ \dfrac{\partial Y}{\partial w} &= \Big[\dfrac{X_0^{(1)}}{w} + \dfrac{Y_0^{(1)}+Z}{1-w}, Y\Big], \\ \dfrac{\partial Z}{\partial w} &= \Big[\dfrac{X_0^{(1)}-X+Y}{w} + \dfrac{Y_0^{(1)}+Y}{1-w}, Z\Big]. \end{cases} \tag{1}$$

と Schlesinger 方程式の関係を考察することである．

$X_0^{(1)}, Y_0^{(1)}$ に対して，線型微分方程式

$$\frac{dG}{dw} = \Big(\frac{X_0^{(1)}}{w} + \frac{Y_0^{(1)}}{1-w}\Big)G \tag{2}$$

を考える．これは w を変数とする **1 変数 KZ 方程式（1KZ）** である．この方程式の基本解行列をひとつ選び，それを $G = G(w)$ とおく．(1) の未知関数を $\widetilde{F} = G^{-1}FG$ $(F = X, Y, Z)$ とゲージ変換するとつぎの非線形微分方程式系を得る．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{X}}{\partial w} = O, \quad \dfrac{\partial \widetilde{Y}}{\partial w} = \dfrac{1}{1-w}[\widetilde{Z}, \widetilde{Y}], \\ \dfrac{\partial \widetilde{Z}}{\partial w} = -\dfrac{1}{w}[\widetilde{X}, \widetilde{Z}] + \dfrac{1}{w(1-w)}[\widetilde{Y}, \widetilde{Z}] \end{cases} \tag{3}$$

この方程式系を $\widetilde{\mathbf{1DE}}$ と記す．$\widetilde{1DE}$ は，2DKZ（前の講演を参照）において $\widetilde{L} := G^{-1}L$ とゲージ変換して得られる線型微分方程式系の積分可能条件と同値である．さらに $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_w$ を

$$\widetilde{A}_0 := -\widetilde{X} + \widetilde{Y} + \widetilde{Z}, \quad \widetilde{A}_1 := -\widetilde{Y}, \quad \widetilde{A}_w := -\widetilde{Z}. \tag{4}$$

と定める．このとき方程式系 (3) は

$$\frac{\partial \widetilde{A}_0}{\partial w} = \frac{1}{w}[\widetilde{A}_w, \widetilde{A}_0], \quad \frac{\partial \widetilde{A}_1}{\partial w} = \frac{1}{w-1}[\widetilde{A}_w, \widetilde{A}_1], \tag{5}$$

と同値であり，$\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_w = -\widetilde{X} =: \widetilde{A}_\infty$ が成立している.（$\widetilde{X}$ が定数行列であることに注意せよ.）この方程式 (5) は **1 変数 Sclesingher 方程式**に他ならない．これを **1SE** と記す．

この 1DE と 1SE の対応関係を用いると，**1DE の定数解から 1SE の解を構成できる**ことに気が付く．つぎの事実に注意しよう.（2015 年総会における講演で言及している.）

命題 1 原点 $w=0$ で正則な1DEの解 $X(w), Y(w), Z(w)$ が定数解であるための必要十分条件は $X_0=X(0), Y_0=Y(0), Z_0=Z(0)$ が2KZの積分可能条件（前の講演を参照）

$$\begin{cases} [X_0^{(1)}, X_0]=[X_0^{(1)}, Y_0]=[X_0^{(1)}-X_0+Y_0, Z_0]=O, \\ [Y_0^{(1)}, X_0]=[Y_0^{(1)}+Z_0, Y_0]=[Y_0^{(1)}+Y_0, Z_0]=O \end{cases} \tag{6}$$

をみたすことである．

例： **Appell** の $F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;z,zw)$ を特徴づける2KZはつぎの係数をもつ：

$$X_0^{(1)}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-\beta\\0&0&p+\beta\end{pmatrix},\quad Y_0^{(1)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\beta'&-\beta\\0&-\beta'&\beta\end{pmatrix}$$
$$X_0=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&p&0\\0&0&p\end{pmatrix},\quad Y_0=\begin{pmatrix}0&0&0\\\alpha\beta&q&\beta\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Z_0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\alpha\beta'&\beta'&p+\alpha+\beta'\end{pmatrix}$$

（ここで，$p=1-\gamma, q=\alpha+\beta+p$ とおいた.）これに対応する $\widetilde{1DE}$ の解 $\widetilde{X}(w), \widetilde{Y}(w), \widetilde{Z}(w)$ を計算するとつぎのようになる．関数系 $\bar{g}_j$ $(j=2,3)$ を

$$\bar{g}_2={}_2F_1(-p,\beta',1-p-\beta\,;w),\quad \bar{g}_3=w^{p+\beta}{}_2F_1(\beta,\beta+\beta'+p,1+\beta+p\,;w)$$

として，

$$\widetilde{X}(w)=\mathrm{diag}(0,p,p),\quad \widetilde{Y}(w)=\begin{pmatrix}-\alpha\beta/p & -*_2/p & -*_3/p\\ \alpha\beta\widetilde{g}_2 & *_2\widetilde{g}_2 & *_3\widetilde{g}_2\\ \alpha\beta\widetilde{g}_3 & *_2\widetilde{g}_3 & *_3\widetilde{g}_3\end{pmatrix}$$

ただし，$\bar{g}_j'=\partial\bar{g}_j/\partial w$, $(j=2,3)$，

$$\begin{aligned} *_j&=(\alpha\beta/p+q)\bar{g}_j+\big((\beta-q)w/p\big)\bar{g}_j' \quad (j=2,3),\\ \widetilde{g}_2&=(w/p\Delta)\bar{g}_3',\quad \widetilde{g}_3=-(w/p\Delta)\bar{g}_2',\\ \Delta&=\big((p+\beta)/p\big)w^{p+\beta}(1-w)^{-\beta-\beta'} \end{aligned}$$

とおいている．最後に $\widetilde{Z}(w)$ は

$$\widetilde{Z}(w)=\begin{pmatrix}-\alpha\beta/p & -\sharp_2/p & -\sharp_3/p\\ (\alpha\beta'/p\Delta)(w\bar{g}_3'-\bar{g}_3) & (\sharp_2/p\Delta)(w\bar{g}_3'-\bar{g}_3) & (\sharp_3/p\Delta)(w\bar{g}_3'-\bar{g}_3)\\ (\alpha\beta'/p\Delta)(-w\bar{g}_2'+\bar{g}_2) & (\sharp_2/p\Delta)(-w\bar{g}_2'+\bar{g}_2) & (\sharp_3/p\Delta)(-w\bar{g}_2'+\bar{g}_2)\end{pmatrix}$$

（ただし，$\sharp_j=\alpha\beta'+\beta'\bar{g}_j+\big((q-\beta')w/p\big)\bar{g}_j'$ $(j=2,3)$）と計算される．

命題 2 上で求めた $\widetilde{X}(w), \widetilde{Y}(w), \widetilde{Z}(w)$ に対して対応関係 (4) により $\widetilde{A}_0(w), \widetilde{A}_1(w), \widetilde{A}_w(w)$ を定めれば，これは1SEの解を与える．この解は原点 $w=0$ において $w^{p+\beta}$ の特異性を持っている．

コメント： ここで考察した対応関係は2変数の **2DE** と **2SE** に拡張することができる．

11

アフィン非例外型のパスと艤装配位の全単射

尾角 正人 (阪市大理)
Anne Schilling (カリフォルニア大デーヴィス校)
Travis Scrimshaw (クイーンズランド大)

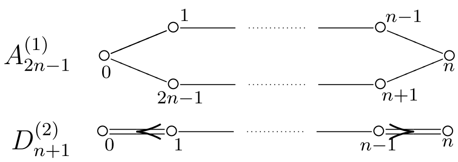
パス (K R クリスタルのテンソル積の最高ウェイト元) と艤装配位との間の KKR 型全単射 [3] は講演者らが [2] 以来取り組んでいる課題だが，このたび非例外型のアフィンリー環に対しては解決をみたので報告する [6]．アイデアは簡単で，simply-laced な A 型と D 型での全単射 [4, 5] を使う．非例外型では simply-laced でない場合のパスは A 型または D 型のパスに埋め込まれるので，その像が A,D 型の全単射によってちょうどその型の艤装配位へ写されることを見ればよい．

$$\mathcal{P}(B) \hookrightarrow \mathcal{P}(\widehat{B}) \simeq \mathcal{RC}(\widehat{B}) \hookleftarrow \mathcal{RC}(B)$$

最も簡単な $D^{(2)}_{n+1}$ 型のときに詳しく見てみる．

1. $D^{(2)}_{n+1}$ 型の場合

1.1. ディンキン図の folding



$A^{(1)}_{2n-1}$ 型ディンキン図には $\sigma(i) = 2n - i$ なる自己同型がある．また $A^{(1)}_{2n-1}$ 型 KR クリスタル $B^{r,s}_A$ には，$\sigma(e^A_i b) = e^A_{\sigma(i)}\sigma(b), \sigma(f^A_i b) = f^A_{\sigma(i)}\sigma(b)$ なる写像 $\sigma : B^{r,s}_A \to B^{\sigma(r),s}_A$ が存在する．

$$\widehat{B}^{r,s} = \begin{cases} B^{r,s}_A \otimes B^{2n-r,s}_A & \text{if } r < n, \\ B^{n,s}_A & \text{if } r = n \end{cases}$$

とおくと，$\widehat{B}^{r,s}$ の σ 不変な部分集合上には，$e_i = e^A_i e^A_{2n-i}$ $(i \neq 0, n)$, $e_n = e^A_n$ (f_i も同様) により $D^{(2)}_{n+1}$-クリスタル構造が入る．

1.2. 箱削除 lh

KKR 型全単射で基本的なパス上での操作 lh は，より広い A 型クリスタル上での操作の合成として以下のように定義する．

$$B^{1,1}_A \otimes B^{2n-1,1}_A \otimes B^{\bullet} \xrightarrow{\mathrm{lh}^A} B^{2n-1,1}_A \otimes B^{\bullet} \xrightarrow{\sigma} B^{1,1}_A \otimes \sigma(B^{\bullet})$$
$$\xrightarrow{\mathrm{lh}^A} \sigma(B^{\bullet}) \xrightarrow{\sigma} B^{\bullet}$$

列スプリット ls，箱スプリット lb も同様に定義される．

1.3. 可換図式

以下の図式により $D_{n+1}^{(2)}$ 型のときに全単射 Φ が構成される．記号の意味は講演で説明する．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(B) \arrow[rrr, dotted, "\Phi"] \arrow[dr, hook, "\mathrm{emb}"'] \arrow[ddd, "\mathrm{lx}"'] & & & \mathcal{RC}(B) \arrow[dl, hook', "\mathrm{emb}"] \arrow[ddd, "\xi"] \\
& \mathcal{P}(\widehat{B}) \arrow[r, "\Phi^A"] \arrow[d, "\widehat{\mathrm{lx}}"'] & \mathcal{RC}(\widehat{B}) \arrow[d, "\widehat{\xi}"] & \\
& \mathcal{P}(\widehat{B}') \arrow[r, "\Phi^A"'] & \mathcal{RC}(\widehat{B}') & \\
\mathcal{P}(B') \arrow[rrr, "\Phi"'] \arrow[ur, hook, "\mathrm{emb}"] & & & \mathcal{RC}(B') \arrow[ul, hook', "\mathrm{emb}"']
\end{tikzcd}
$$

2. 主結果

1. 非例外型のアフィンリー環に対して，パスの集合から艤装配位の集合への全単射 Φ が存在する．

2. Φ をある involution θ で捻った $\tilde{\Phi} = \theta \circ \Phi$ のもとで，パスと艤装配位の重み（energy と charge）が保存される．

3. パスの側で組合せ R を施しても艤装配位は変化しない．

２の帰結として $X = M$ 予想の証明もすべての非例外型の場合に得られた．よって，[1, Theorem 5.4] のアフィンリー環/単純リー環の分岐関数のフェルミ公式は非例外型の場合に正しいことが示された．

参考文献

[1] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, Contemporary Math. **248** (1999) 243–291.

[2] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, *Paths, crystals and fermionic formulae*, MathPhys Odyssey 2001, 205–272, Prog. Math. Phys. **23**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.

[3] S. V. Kerov, A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Combinatorics, the Bethe ansatz and representations of the symmetric group*, Zap.Nauchn. Sem. (LOMI) **155** (1986) 50–64. (English translation: J. Sov. Math. **41** (1988) 916–924.)

[4] A. N. Kirillov, A. Schilling and M. Shimozono, *A bijection between Littlewood-Richardson tableaux and rigged configurations*, Selecta Math. (N.S.) **8** (2002) no. 1, 67–135.

[5] M. Okado, R. Sakamoto, A. Schilling and T. Scrimshaw, *Type $D_n^{(1)}$ rigged configuration bijection*, J. Algebr. Comb., **46** 341–401 (2017).

[6] M. Okado, A. Schilling and T. Scrimshaw, *Rigged configuration bijection and proof of the $X = M$ conjecture for nonexceptional affine types*, arXiv:1707.04876.

位相的頂点とVolterra型可積分階層

高崎金久　(近畿大学理工学部)

1．2個の分割に対する位相的頂点とその母函数

r を正整数，q を形式的変数（あるいは $|q|<1$ という数）として，2個の整数分割 $\lambda=(\lambda_i)_{i=1}^\infty$, $\mu=(\mu_i)_{i=1}^\infty$ を足にもつ位相的頂点（two-partition topological vertex）

$$W_{\lambda\mu}(r)=q^{(r+1)\kappa(\lambda)/2+(r^{-1}+1)\kappa(\mu)/2}\sum_{\eta\in\mathcal{P}}s_{\lambda/\eta}(q^{-\rho})s_{\mu/\eta}(q^{-\rho}) \tag{1}$$

を考える（正確にいえば，本当の位相的頂点はその $(-1)^{|\lambda|+|\mu|}$ 倍である）．ここで $\mathcal{P}$ は整数分割全体の集合，$\kappa(\lambda)$ は λ の2次Casimir値

$$\kappa(\lambda)=\sum_{i=1}^\infty\left((\lambda_i-i+1/2)^2-(-i+1/2)^2\right)$$

であり，$s_{\lambda/\eta}(q^{-\rho}), s_{\mu/\eta}(q^{-\rho})$ は無限変数 $\boldsymbol{x}=(x_i)_{i=1}^\infty$ の歪Schur函数 $s_{\lambda/\eta}(\boldsymbol{x}), s_{\mu/\eta}(\boldsymbol{x})$ の $q^{-\rho}=(q^{i-1/2})_{i=1}^\infty$ での値を表す．$W_{\lambda\mu}(r)$ は複素安定曲線のモジュライ空間 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ のHodge積分に対する組合せ論的表示に現れる [1].

Zhou は離散変数 $s\in\mathbb{Z}$ に依存する補正項 $c(s,\lambda)=2s|\lambda|+s(4s^2-1)/12$ とべき和変数 $t_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^\infty(x_i)^k$, $\bar{t}_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^\infty(y_i)^k$ のSchur函数 $S_\lambda(\boldsymbol{t})=s_\lambda(\boldsymbol{x})$, $S_\mu(\bar{\boldsymbol{t}})=s_\mu(\boldsymbol{y})$（行列式公式で再定義する）を用いて母函数

$$\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})=\sum_{\lambda,\mu\in\mathcal{P}}q^{(r+1)c(s,\lambda)/2+(r^{-1}+1)c(s,\mu)/2}W_{\lambda\mu}(r)S_\lambda(\boldsymbol{t})S_\mu(-\bar{\boldsymbol{t}}) \tag{2}$$

を構成し，この母函数が2次元戸田階層の τ 函数であることを示した [2].

本講演では，Lax 形式における考察に基づいて，この2次元戸田階層の特殊解が Volterra 型（いわゆる hungry Volterra）可積分階層と関係することを示したい．これはDubrovin らが Hamliton 形式と Virasoro 条件に基づく考察から予想して [3, 6]，$r=1$（本来の Volterra 階層に相当する）の場合に証明したこと [4, 5] を別の方向から説明していると考えられる．

2．Lax形式における考察

(2) の τ 函数のフェルミオン表示から，この特殊解は次のような1変数差分作用素（あるいはそれを表現する $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 行列）の因子分解問題によって特徴付けられることがわかる：

$$\exp\left(\sum_{k=1}^\infty t_k\Lambda^k\right)U\exp\left(-\sum_{k=1}^\infty\bar{t}_k\Lambda^{-k}\right)=W^{-1}\bar{W}. \tag{3}$$

ここで $U,W,\bar{W}$ はそれぞれ

$$U=q^{(r+1)(s-1/2)^2/2}\cdot\prod_{i=1}^\infty(1-q^{i-1/2}\Lambda^{-1})^{-1}\cdot\prod_{i=1}^\infty(1-q^{i-1/2}\Lambda)^{-1}\cdot q^{(r^{-1}+1)(s-1/2)^2/2},$$

$$W=1+\sum_{k=1}^\infty w_k\Lambda^{-k},\quad \bar{W}=\sum_{k=0}^\infty\bar{w}_k\Lambda^k,\quad \Lambda=e^{\partial_s},\quad \bar{w}_0\neq 0$$

科学研究費 No. 25400111, No. 15K04912

という差分作用素であり（Λ は s のシフトを表す），$w_k, \bar{w}_k$ は $s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}$ の函数である．U に対して $W, \bar{W}$ を求めることができれば，

$$L = W\Lambda W^{-1}, \quad \bar{L} = \bar{W}\Lambda^{-1}\bar{W}^{-1}$$

で定義される $L, \bar{L}$ は2次元戸田階層のLax方程式系の解である．

因子分解問題 (3) を直接的に解くことは難しいが，U はすでに因子分解された形をしているので，そこから初期時刻における $W, \bar{W}$ の初期値 $W_0 = W|_{\boldsymbol{t}=\bar{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{0}}$, $\bar{W}_0 = \bar{W}|_{\boldsymbol{t}=\bar{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{0}}$ を

$$\begin{aligned} W_0 &= q^{(r+1)(s-1/2)^2/2} \cdot \prod_{i=1}^{\infty}(1 - q^{i-1/2}\Lambda^{-1}) \cdot q^{-(r+1)(s-1/2)^2/2}, \\ \bar{W}_0 &= q^{(r+1)(s-1/2)^2/2} \cdot \prod_{i=1}^{\infty}(1 - q^{i-1/2}\Lambda)^{-1} \cdot q^{(r^{-1}+1)(s-1/2)^2/2} \end{aligned} \tag{4}$$

というように読み取ることができる．これから $L, \bar{L}$ の初期値 $L_0 = L|_{\boldsymbol{t}=\bar{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{0}}$, $\bar{L}_0 = \bar{L}|_{\boldsymbol{t}=\bar{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{0}}$ も具体的に求められるが，よく調べてみれば，それらは分数階差分作用素

$$\mathcal{L}_0 = \Lambda^{1/(r+1)} - q^{-r-1/2}q^{(r+1)(s-1/2)}\Lambda^{-r/(r+1)}$$

のべき乗と次のように関係していることがわかる：

$$L_0 = \mathcal{L}_0^{r+1} = (-1)^{r+1}\bar{L}_0^r. \tag{5}$$

これは次のより基本的な等式（s を連続変数として成立する）からの帰結である：

$$W_0\Lambda^{1/(r+1)}W_0^{-1} = \mathcal{L}_0 = -\bar{W}_0\Lambda^{-r/(r+1)}\bar{W}_0^{-1}. \tag{6}$$

$\mathcal{L}_0$ は分数格子 $\frac{1}{r+1}\mathbb{Z}$ 上のポテンシャル $u = u(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})$ をもつ差分作用素

$$\mathcal{L} = \Lambda^{1/(r+1)} - u\Lambda^{-r/(r+1)}$$

に対するLax方程式系

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_k} = [A_k, \mathcal{L}], \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{t}_k} = [\bar{A}_k, \mathcal{L}], \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

の初期値とみなせる．ここで $A_k, \bar{A}_k$ は u とその整数シフトの多項式を係数とする整数階差分作用素である（A_k は Λ の非負整数べき，$\bar{A}_k$ は Λ の負整数べきからなる）．(7) は一般化された（Liu ら [6] の用語では分数型）Volterra階層のLax表示である．$r = 1$ の場合が本来のVolterra階層に相当する．部分格子 $\mathbb{Z} \subset \frac{1}{r+1}\mathbb{Z}$ の上では，この分数型Volterra階層は2次元戸田階層と

$$L = \mathcal{L}^{r+1} = (-1)^{r+1}\bar{L}^r \tag{8}$$

という関係で結ばれている．

今回の考察はLax形式に限定した発見的なものであり，未解明の部分を多く残している．今後の課題は τ 函数レベルでの考察やDubrovinらの結果との関係を探ることである．

参考文献

[1] C.-C.-M. Liu, K. Liu and J. Zhou, Formula of two-partition Hodge integrals, arXiv:0310272.

[2] J. Zhou, Hodge integrals and integrable hierachies, Lett. Math. Phys. **93** (2010), 55–71.

[3] B. Dubrovin, S.-Q. Liu, D. Yang and Y. Zhang, Hodge integrals and tau-symmetric integrable hierarchies of Hamiltonian evolutionary PDEs, Adv. Math. **293** (2016), 382–435.

[4] B. Dubrovin and D. Yang, On cubic Hodge integrals and random matrices, arXiv:1606.03720.

[5] B. Dubrovin, S.-Q. Liu, D. Yang and Y. Zhang, Hodge-GUE correspondence and the discrete KdV equation, arXiv:1612.02333.

[6] S.-Q. Liu, D. Yang and Y. Zhang, Fractional Volterra Hierarchy, arXiv:1702.02840.

Quiver gauge theory and quiver W-algebra

箙ゲージ理論と箙W代数

Taro Kimura ♣ 木村太郎　(Keio University ♠ 慶應義塾大学)*

Abstract

We provide a brief introduction to quiver W-algebra, which is a gauge theory construction of W-algebra. We show that the gauge theory partition function is generated by the screening charge, and the generating current of the W-algebra is given by the qq-character, a double quantization of the character for the fundamental representations associated with the quiver.

1. Introduction and summary

The Virasoro algebra, and the W-algebra in general, is a symmetry algebra describing the infinite dimensional conformal symmetry appearing in several fields of physics, e.g., string theory, critical phenomena in statistical mechanics, mathematical physics. The q-deformation of Virasoro/W-algebra was introduced in the middle of 1990s [1, 2], but its physical realization, namely a physical system for which the q-Virasoro/W-algebra plays a role as the symmetry algebra, has not been found for a long time. In the late 2000s, a new physical realization of conformal algebra was proposed, called the AGT relation [3], which shows a connection between 4d supersymmetric gauge theory and 2d conformal field theory. In this case, the conformal algebra is naturally q-deformed by considering 5d gauge theory compactified on a circle $\mathbb{R}^4 \times S^1$ [4].

Another realization of the q-conformal algebra is quiver W-algebra [5, 6, 7], which relates Γ-quiver gauge theory in 5d to the q-deformed algebra $W_{q_1,q_2}(\Gamma)$, while the AGT relation states a connection between G-gauge symmetric theory and W-algebra $W_{q_1,q_2}(G)$. Indeed a duality exchanges Γ and G, and explains a relation of these two connections with the conformal algebra. The formalism of quiver W-algebra gives rise to several new features as follows:

Affine and hyperbolic W-algebras [5]

For finite type simply-laced quiver, $\Gamma = ADE$, the algebra $W_{q_1,q_2}(\Gamma)$ reproduces the construction by Frenkel–Reshetikhin [8]. If we start with non-finite type quiver, namely affine or hyperbolic quiver, we obtain a new family of W-algebras, associated with affine/hyperbolic Lie algebra.

Elliptic deformation of W-algebras [6]

The q-deformed algebra arises from 5d gauge theory on $\mathbb{R}^4 \times S^1$. Applying our formalism to 6d gauge theory compactified on a torus $\mathbb{R}^4 \times T^2$, we obtain the elliptic deformation of W-algebras.

2000 Mathematics Subject Classification: 81T60, 81R10.
Keywords: Quiver gauge theory, W-algebra, Seiberg–Witten theory..

* e-mail: `taro.kimura@keio.jp`
web: `http://user.keio.ac.jp/~k_tar/`

Fractional quiver gauge theory [7]

Considering a quiver consisting of vertices and edges, inevitably it turns out to be simply-laced. Utilizing a connection between gauge theory and W-algebras, we define the fractional quiver gauge theory, reproducing the W-algebras associated to non-simply-laced Lie algebras, which also implies fractionalization of quiver variety.

In this article, we explain basic aspects of quiver W-algebra, including the operator-valued gauge theory partition function (Z-state), and the construction of the generating current for the algebra, which is given by the double quantization of characters associated with quiver (qq-character.) Please refer to the original papers [5, 6, 7] for details. See also a review article [9] and the shortened version in Japanese [10].

Acknowledgements

The author's work was supported in part by Keio Gijuku Academic Development Fund, JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (No. JP17K18090), MEXT-Supported Program for the Strategic Research Foundation at Private Universities "Topological Science" (No. S1511006), JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research on Innovative Areas "Topological Materials Science" (No. JP15H05855), and "Discrete Geometric Analysis for Materials Design" (No. JP17H06462).

2. Quiver gauge theory

Gauge theory is a quantum field theory, which owes its dynamics to a gauge field $A \in \mathfrak{g}$, a Lie algebra valued one-form field defined on a spacetime. It has a symmetry under the gauge transformation $A \to gAg^{-1} + gdg^{-1}$ with $g \in G$ (adjoint representation), where G is the gauge group, the Lie group associated with the algebra $\mathfrak{g}$.

Quiver gauge theory, in general, has several gauge fields transforming under the corresponding multiple gauge groups, characterized by a quiver graph Γ.[1] Let Γ be a quiver with a set of nodes (vertices) Γ_0 and arrows (directed edges) Γ_1. An edge from the node i to j is denoted by $e : i \to j$. We assign a gauge group $\mathrm{U}(n_i)$ to each node $i \in \Gamma_0$ under which a gauge field A_i transforms in adjoint representation, $A_i \to g_i A_i g_i^{-1} + g_i dg_i^{-1}$ with $g_i \in \mathrm{U}(n_i)$. For each edge $e : i \to j$ we assign a field transforms in bifundamental representation of $\mathrm{U}(n_i)$ and $\mathrm{U}(n_j)$, namely $(\bar{\mathbf{n}}_i, \mathbf{n}_j)$.

2.1. Equivariant localization

We consider four-dimensional Euclidean spacetime $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ for gauge theory. We define the field strength (curvature; two-form) from the gauge field $F_i = dA_i + A_i^2$ for the node $i \in \Gamma_0$. We are in particular interested in the instanton (anti-self-dual; ASD) configuration, $*F_i = -F_i$, which can be a solution to the classical e.o.m (Yang–Mills equation). Such a configuration is characterized by instanton (2nd Chern) numbers:

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Tr}\, F_i^2 = k_i \,. \tag{1}$$

We define a set of gauge group ranks $n = (n_i)_{i \in \Gamma_0}$ and instanton numbers $k = (k_i)_{i \in \Gamma_0}$. We denote the instanton moduli space by $\mathcal{M}_{n,k}$ described using the ADHM construction. Then we define the gauge theory partition function

$$Z = \sum_k \mathfrak{q}^k \int_{\mathcal{M}_{n,k}} 1 \tag{2}$$

[1] We basically follow the notation of [5, 6, 7].

where $\mathfrak{q}^k = \prod_{i\in\Gamma_0} \mathfrak{q}_i^{k_i}$ with $\mathfrak{q}_i = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\tau_i\right)$, and $(\tau_i)_{i\in\Gamma_0}$ is the complexified gauge coupling constant. We remark that this simplified partition function can be derived using the path integral formalism with extended supersymmetry.

Evaluation of the integral over the instanton moduli space can be performed by applying the equivariant K-theoretic localization (See, for example, [11]): The integral is localized on discrete fixed points under the torus action, given by $(\nu_{i,\alpha})_{\alpha=1,\ldots,n_i} := (e^{a_{i,\alpha}})_{\alpha=1,\ldots,n_i} \in \mathrm{U}(1)^{n_i} \subset \mathrm{U}(n_i)$ for gauge symmetry, and $(q_1, q_2) := (e^{\epsilon_1}, e^{\epsilon_2}) \in \mathrm{U}(1)^2 \subset \mathrm{SO}(4)$ for spacetime rotation symmetry. We define $q = q_1 q_2 = e^{\epsilon_1+\epsilon_2}$. The fixed point is labeled by the multiple partition $(\lambda_{i,\alpha})_{i\in\Gamma_0,\alpha=1,\ldots,n_i}$, satisfying the non-increasing condition $\lambda_{i,\alpha,1} \geq \lambda_{i,\alpha,2} \geq \cdots \geq 0 = \cdots = 0$. We have two vector bundles, whose Chern characters are given by

$$N_i = \sum_{\alpha=1}^{n_i} \nu_{i,\alpha}\,, \qquad K_i = \sum_{\alpha=1}^{n_i} \sum_{(s_1,s_2)\in\lambda_{i,\alpha}} q_1^{s_1-1} q_2^{s_2-1} \nu_{i,\alpha}\,. \tag{3}$$

Then we define (the character of) the universal sheaves from these two bundles evaluated at the fixed point $(\lambda_{i,\alpha})$

$$\mathbf{Y}_i = N_i - (1-q_1)(1-q_2)K_i = \begin{cases} (1-q_1)\displaystyle\sum_{x\in\mathcal{X}_i} x \\ (1-q_2)\displaystyle\sum_{x\in\mathcal{X}_i^{\mathrm{T}}} x \end{cases}\,, \tag{4}$$

where we define

$$\mathcal{X}_i = \left\{ x_{i,\alpha,k} = q_1^{k-1} q_2^{\lambda_{i,\alpha,k}} \nu_{i,\alpha} \right\}_{\alpha=1,\ldots,n_i,\, k=1,\ldots,\infty}\,, \qquad \mathcal{X} = \bigsqcup_{i\in\Gamma_0} \mathcal{X}_i \tag{5a}$$

$$\mathcal{X}_i^{\mathrm{T}} = \left\{ x_{i,\alpha,k}^{\mathrm{T}} = q_1^{\lambda_{i,\alpha,k}^{\mathrm{T}}} q_2^{k-1} \nu_{i,\alpha} \right\}_{\alpha=1,\ldots,n_i,\, k=1,\ldots,\infty}\,, \qquad \mathcal{X}^{\mathrm{T}} = \bigsqcup_{i\in\Gamma_0} \mathcal{X}_i^{\mathrm{T}} \tag{5b}$$

with the transposed partition denoted by $(\lambda_{i,\alpha}^{\mathrm{T}})_{i\in\Gamma_0,\alpha=1,\ldots,n_i}$. The map $(\lambda_{i,\alpha,k}) \to (x_{i,\alpha,k})$ corresponds to that from the Young diagram to the Maya diagram. We remark that the first expression is manifestly symmetric under exchange $q_1 \leftrightarrow q_2$, but it becomes not manifest in the second one.

We define the degree-m character of the universal sheaf, obtained through the Adams operation,

$$\mathbf{Y}_i^{[m]} = (1-q_1^m) \sum_{x\in\mathcal{X}_i} x^m\,, \tag{6}$$

which is given by a degree-m power sum symmetric polynomial of infinitely many variables. This is called the gauge invariant; single trace; chiral ring; observable in the context of supersymmetric gauge theory. Then we define the t-extended partition function [11, 12]

$$Z(t) = \sum_k \mathfrak{q}^k \int_{\mathcal{M}_{n,k}} \exp\left(\sum_{i\in\Gamma_0} \sum_{m=1}^{\infty} t_{i,m} \mathbf{Y}_i^{[m]} \right)\,, \tag{7}$$

which plays a role as the generating function: The derivative with the conjugate t-variable gives rise to the expectation value of the observable

$$\left\langle \mathbf{Y}_i^{[m]} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t_{i,m}} \log Z(t) \Big|_{t \to 0} . \tag{8}$$

This operator average is taken with respect to the plain partition function (2) given by $Z(t=0) = Z$.

3. Z-state

Since, as mentioned above, the universal sheaf character is given by the power sum polynomial with infinite variables, we can consider the operator formalism using the free field realization. (See, for example, [13] and also [14].) Namely, identifying the derivative with the t-variable with the observable, $t_{i,-m} := \partial / \partial t_{i,m} \leftrightarrow \mathbf{Y}_i^{[m]}$, we obtain the Heisenberg algebra, $[t_{i,-m}, t_{j,m'}] = \delta_{i,j} \delta_{m,m'}$. In this sense, the t-variable is promoted to the operator generating the Fock space $\mathcal{F} = \mathbb{C}[[t_{i,1}, t_{i,2}, \cdots]] |0\rangle$ with the vacuum state annihilated by any negative modes $t_{i,-m}|0\rangle = 0$ for $m > 0$. Thus, the t-extended partition function, depending on the t-variables, is also promoted to an operator. From this point of view, we define the Z-state through the operator/state correspondence,

$$|Z\rangle = Z(t)|0\rangle . \tag{9}$$

It has been shown that the Z-state for Γ-quiver gauge theory compactified on a circle $\mathbb{R}^4 \times S^1$ is generated by the screening charge associated with quiver W-algebra $W_{q_1,q_2}(\Gamma)$:

Z-state [5]

Let $\mathsf{i} : \mathcal{X} \to \Gamma_0$, such that $\mathsf{i}(x) = i$ for $x \in \mathcal{X}_i$. Then the Z-state is generated by screening charges of the algebra $W_{q_1,q_2}(\Gamma)$,

$$|Z\rangle = \prod_{x \in \mathring{\mathcal{X}}}^{\succ} \mathsf{S}_{\mathsf{i}(x),x} |0\rangle . \tag{10}$$

The configuration $\mathring{\mathcal{X}}$ is defined with the empty configuration $(\lambda_{i,\alpha}) = \emptyset$,

$$\mathring{\mathcal{X}}_i = \{\mathring{x}_{i,\alpha,k} = q_1^{k-1} \nu_{i,\alpha}\}_{\alpha=1,\ldots,n_i, k=1,\ldots,\infty} , \quad \mathring{\mathcal{X}} = \bigsqcup_{i \in \Gamma_0} \mathring{\mathcal{X}}_i . \tag{11}$$

The screening charge is defined as a discrete sum (could be formulated using Jackson integral) of the screening current

$$\mathsf{S}_{i,x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_{i,q_2^k x} \tag{12}$$

with the free field realization

$$S_{i,x} = : \exp \left(s_{i,0} \log s + \tilde{s}_{i,0} + \sum_{m \neq 0} s_{i,m} \, x^{-m} \right) : \tag{13}$$

and the commutation relations

$$\left[s_{i,m},\, s_{j,m'}\right] = -\frac{1}{m}\frac{1-q_1^m}{1-q_2^{-m}}\, c_{ji}^{[m]}\delta_{m+m',0}\,, \quad \left[\tilde{s}_{i,0},\, s_{j,m}\right] = -\beta\delta_{0,m}c_{jk}^{[0]}\,, \quad \beta = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\,. \tag{14}$$

The matrix $(c_{ij}^{[m]})$ is the mass-deformed q-Cartan matrix, which is reduced to the ordinary quiver Cartan matrix in the limit $m \to 0$,

$$\begin{aligned} c_{ij}^{[m]} &= (1+q^{-m})\delta_{ij} - \sum_{e:i\to j}\mu_e^{-m} - \sum_{e:j\to i}\mu_e q^{-m} \\ &\xrightarrow{m\to 0}\ 2\delta_{ij} - \#(e: i\to j) - \#(e: j\to i) \end{aligned} \tag{15}$$

where $(\mu_e)_{e\in\Gamma_1}$ is the multiplicative bifundamental mass parameter. The mass deformation plays an essential role to define the algebra, in particular, associated to the affine quiver. See Sec. 5. We remark the transposition $c_{ji}^{[m]} = q^{-m}c_{ij}^{[-m]}$.

The Z-state (10) is responsible for the vector and bifundamental hypermultiplets. To obtain the (anti)fundamental hypermultiplet contribution, we insert additional vertex operators

$$|Z\rangle = \left(\prod_{x\in\mathcal{X}_{\mathrm{f}}}\mathsf{V}_{\mathsf{i}(x),x}\right)\left(\prod_{x\in\mathring{\mathcal{X}}}^{\succ}\mathsf{S}_{\mathsf{i}(x),x}\right)\left(\prod_{x\in\mathcal{X}_{\mathrm{af}}}\mathsf{V}_{\mathsf{i}(x),x}\right)|0\rangle \tag{16}$$

where $\mathcal{X}_{\mathrm{f}} = \{\mu_{i,f}\}_{i\in\Gamma_0, f=1,\ldots,n_i^{\mathrm{f}}}$ and $\mathcal{X}_{\mathrm{af}} = \{\tilde{\mu}_{i,f}\}_{i\in\Gamma_0, f=1,\ldots,n_i^{\mathrm{af}}}$ are sets of the multiplicative fundamental and antifundamental mass parameters, obeying the OPE

$$\mathsf{V}_{i,x}S_{i,x'} = \left(\frac{x'}{x};q_2\right)_\infty^{-1} :\mathsf{V}_{i,x}S_{i,x'}:\,, \qquad S_{i,x'}\mathsf{V}_{i,x} = \left(q_2\frac{x}{x'};q_2\right)_\infty :\mathsf{V}_{i,x}S_{i,x'}:\,. \tag{17}$$

The q-Pochhammer symbol is defined as $(z;q)_n = \prod_{m=0}^{n-1}(1-zq^m)$.

Since the dual vacuum obeys $\langle 0|t_{i,m} = 0$ for $m > 0$, the plain partition function given by imposing $t = 0$ is correspondingly given as a correlator

$$Z(t=0) = \langle 0|Z(t)|0\rangle\,. \tag{18}$$

Such a correlator realization of the partition function (18) resembles the AGT relation [3], which states that the gauge theory partition function with gauge group G is given by a conformal block of $W(G)$ algebra, while quiver W-algebra is sensitive to quiver structure, but not to G. The relation between these two descriptions is understood as a base/fibre (geometry); spectral (integrable system); S-duality (string theory). We also remark that the expression (18) immediately leads to the discretized version of the Dotsenko–Fateev integral

$$Z(t=0) = \sum_{\mathcal{X}} Z_{\mathcal{X}}(t=0) = \sum_{\mathcal{X}}\langle 0|\left(\prod_{x\in\mathcal{X}_{\mathrm{f}}}\mathsf{V}_{\mathsf{i}(x),x}\right)\left(\prod_{x\in\mathcal{X}}^{\succ}S_{\mathsf{i}(x),x}\right)\left(\prod_{x\in\mathcal{X}_{\mathrm{af}}}\mathsf{V}_{\mathsf{i}(x),x}\right)|0\rangle\,. \tag{19}$$

Namely, each contribution from the fixed point configuration $\mathcal{X}$ is given by a correlator of the screening currents with the vertex operators. In other words, the screening current generates the contribution associated with a specific configuration

$$|Z_{\mathcal{X}}\rangle = \left(\prod_{x\in\mathcal{X}_{\mathrm{f}}} \mathsf{V}_{\mathrm{i}(x),x} \right) \left(\prod_{x\in\mathcal{X}}^{\succ} S_{\mathrm{i}(x),x} \right) \left(\prod_{x\in\mathcal{X}_{\mathrm{af}}} \mathsf{V}_{\mathrm{i}(x),x} \right) |0\rangle \,. \tag{20}$$

Although this correlator involves infinitely many operators, one can truncate the number of screening charges by considering the codimension-2 defect. See, for example, [15].

4. Quiver W-algebra

We define another vertex operator, called the Y-operator:

$$\mathsf{Y}_{i,x} = \ q_1^{\tilde{\rho}_i} : \exp\left(y_{i,0} + \sum_{m\neq 0} y_{i,m}\, x^{-m} \right) : \tag{21}$$

where $(\tilde{\rho})_{i\in\Gamma_0}$ is the Weyl vector in the simple root basis (as long as $\det(c_{ij}^{[0]}) \neq 0$), and the commutation relations are defined

$$\Big[y_{i,m},\, s_{j,m'} \Big] = -\frac{1}{m}(1-q_1^m)\delta_{i,j}\delta_{m+m',0}\,, \qquad \Big[\tilde{s}_{i,0}, y_{j,0} \Big] = -\delta_{ij}\log q_1\,. \tag{22}$$

The OPE of Y-operator and the screening current is then given by

$$\mathsf{Y}_{i,x} S_{j,x'} = \frac{1-x'/x}{1-q_1 x'/x} : \mathsf{Y}_{i,x} S_{j,x'} : , \quad S_{j,x'} \mathsf{Y}_{i,x} = q_1^{-1} \frac{1-x/x'}{1-q_1^{-1}x/x'} : \mathsf{Y}_{i,x} S_{j,x'} : \quad (i=j) \tag{23}$$

while this OPE becomes trivial if $i \neq j$. It gives rise to the commutation relation

$$\Big[\mathsf{Y}_{i,x},\, S_{j,x'} \Big] = \left(1-q_1^{-1}\right) \delta\left(q_1 \frac{x'}{x} \right) : \mathsf{Y}_{i,x} S_{j,x'} : \tag{24}$$

where the multiplicative δ-function is defined $\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n$. The Y-operator average is computed using the OPE factor as follows:

$$\langle 0 | \mathsf{Y}_{i,x} | Z_{\mathcal{X}} \rangle = q_1^{\tilde{\rho}_i} \prod_{x\in\mathcal{X}_i} \frac{1-x'/x}{1-q_1 x'/x} \langle 0 | Z_{\mathcal{X}} \rangle \tag{25}$$

Since we have

$$\prod_{x\in\mathcal{X}_i} \frac{1-x'/x}{1-q_1 x'/x} = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} -\frac{x^{-m}}{m} \mathbf{Y}_i^{[m]} \right) , \tag{26}$$

the Y-operator average plays a role of the generating function of the observable (8).

One can construct the generators of W-algebras using this Y-operator (the q-Sugawara construction): It has been shown in [5] that the generating currents of quiver W-algebra $W_{q_1,q_2}(\Gamma)$ is given by the operator-valued qq-character associated with quiver Γ, which turns out to be a commutant of the screening charge. We define the iWeyl reflection incorporated by the A-operator

$$\mathsf{Y}_{i,x} \ \longrightarrow \ \mathsf{Y}_{i,x}\, \mathsf{A}_{i,q^{-1}}^{-1} \tag{27}$$

with the definition

$$\mathsf{A}_{i,x} = q_1 : \exp\left(a_{i,0} + \sum_{m\neq 0} a_{i,m}\, x^{-m}\right) : \tag{28}$$

where

$$a_{i,m} = \sum_{j\in\Gamma_0} y_{j,m}\, c_{ji}^{[m]} \,. \tag{29}$$

Thus the A-operator is written in terms of the Y-operators. Let us write down the commutation relations for the free fields:

$$\left[y_{i,m},\, y_{j,m'}\right] = -\frac{1}{m}(1-q_1^m)(1-q_2^m)\, \tilde{c}_{ij}^{[-m]}\, \delta_{m+m',0}\,, \tag{30}$$

$$\left[a_{i,m},\, a_{j,m'}\right] = -\frac{1}{m}(1-q_1^m)(1-q_2^m)\, c_{ji}^{[m]}\, \delta_{m+m',0}\,. \tag{31}$$

where $(\tilde{c}_{ij}^{[m]})$ is the inverse of the q-Cartan matrix (15). We remark that, in the limit $q_1(q_2) \to 1$, these commutation relations become trivial due to the factor $(1-q_1^n)(1-q_2^n)$, which implies the quantum algebra becomes the classical commutative algebra: It still holds the Poisson structure even in this limit.

The Y and A operators play roles of the weight and root vectors: The Weyl reflection is generated by the root vector. Then the qq-character is given by

$$\mathsf{T}_{i,x} = \mathsf{Y}_{i,x} + \mathsf{Y}_{i,x}\, \mathsf{A}_{i,q^{-1}}^{-1} + \cdots \,. \tag{32}$$

Monomials generated by the reflection may include the Y-operators both in numerator and denominator. We apply the iWeyl reflection as long as the Y-operator appears in the numerator, which terminates within finite processes for finite type quiver $\Gamma = ADE$, while it becomes an infinite series for affine/hyperbolic quiver. We remark that the qq-character has the integral formula from the quiver variety associated with the quiver Γ. See [16] for details.

Although the Y-operator does not commute with the screening charge as shown in (24), the qq-character $\mathsf{T}_{i,x}$ commutes with the screening charge

$$\left[\mathsf{T}_{i,x}, \mathsf{S}_{j,x'}\right] = 0\,, \tag{33}$$

which implies the following:

The operator-valued qq-character provides the free field realization of the generating current of the algebra $W_{q_1,q_2}(\Gamma)$, which is a commutant of the associated screening charge.

Let us demonstrate this statement with an example.

4.1. A_1 quiver

Let us consider the simplest example: A_1 quiver, consisting of a single node without any edges. In this case, the fundamental qq-character is given by

$$\mathsf{T}_{1,x} = \mathsf{Y}_{1,x} + \mathsf{Y}_{i,q^{-1}x}^{-1} \tag{34}$$

which turns out to be the generating current of the q-deformed Virasoro algebra [2]. Then, in the classical limit, it is reduced to the fundamental representation character of SU(2).

We can also consider higher representations of SU(2). The spin-$\frac{\ell}{2}$ ($(2\ell+1)$-dimensional) representation character is given by $\chi_\ell = y^\ell + y^{\ell-1} + \cdots + y^{-\ell}$. Then the corresponding qq-character is generated by the product of the Y-operators with ℓ arguments $\mathsf{w} = (w_f)_{f=1,\ldots,\ell}$,

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{1,\mathsf{w}} &= :\mathsf{Y}_{1,w_1}\cdots\mathsf{Y}_{1,w_\ell}: + \cdots \\ &= \sum_{I\cup J=\{1,\ldots,\ell\}} \prod_{i\in I, j\in J} \mathcal{S}\left(\frac{w_i}{w_j}\right) : \prod_{i\in I} \mathsf{Y}_{1,w_i}\mathsf{Y}^{-1}_{1,q^{-1}w_j} : . \end{aligned} \tag{35}$$

where

$$\mathcal{S}(z) = \frac{(1-q_1 x)(1-q_2 x)}{(1-x)(1-qx)} . \tag{36}$$

We remark that this qq-character contains 2^ℓ terms, so that one cannot see decomposition into the irreducible representations of SU(2). Nevertheless, the q-character [17] of the corresponding representation is obtained from the qq-character in the limit $(w_f) \to (q_1^{f-1}w)$, and then taking $q_2 \to 1$, since $\mathcal{S}(q_1^{-1}) = 0$ and $\mathcal{S}(q_1^n) \overset{q_2\to 1}{\to} 1$ for $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1,0\}$.

In particular, the case with $\ell = 2$ plays an important role to characterize the algebra $W_{q_1,q_2}(A_1)$. Namely, one can obtain the OPE of the generating current $\mathsf{T}_{1,x}$ [2]

$$f\left(\frac{x'}{x}\right)\mathsf{T}_{1,x}\mathsf{T}_{1,x'} - f\left(\frac{x}{x'}\right)\mathsf{T}_{1,x'}\mathsf{T}_{1,x} = -\frac{(1-q_1)(1-q_2)}{1-q}\left(\delta\left(q\frac{x'}{x}\right) - \delta\left(q\frac{x}{x'}\right)\right) \tag{37}$$

with the delta function $\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n$, and the scalar factor arising from the OPE of Y-operators $f(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q_1^n)(1-q_2^n)}{n(1+q^n)} z^n\right)$. See the commutation relation of the y-oscillators (30).

5. Affine quiver W-algebra

The formalism discussed in Sec. 4 is applicable to any quiver, including affine and hyperbolic quivers. Here let us consider the simplest affine quiver $\widehat{A}_0$, consisting of a single node with a loop edge. In this case, the mass deformation plays an essential role for the q-Cartan matrix:

$$c^{[m]} = 1 + q^{-m} - \mu^{-m} - \mu^m q^{-m} \overset{m\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{38}$$

The parameter $\mu \in \mathbb{C}^\times$ is called the multiplicative adjoint mass of 5d $\mathcal{N} = 1^*$ theory. In the massless limit, $\mu = 1$, the q-Cartan matrix becomes trivial.

The qq-character is generated by the local reflection

$$\mathsf{Y}_{1,x} \longrightarrow \mathcal{S}(\mu^{-1}) : \mathsf{Y}^{-1}_{1,q^{-1}}\mathsf{Y}_{1,\mu^{-1}x}\mathsf{Y}_{1,\mu q^{-1}x} : . \tag{39}$$

A remarkable feature of the affine quiver is that the qq-character does not terminate within finite terms since the affine character is in general given by an infinite series.

In addition, the coefficients appearing in the qq-character are given by the Nekrasov function with dual variables. See [5, 9] for details. In general, the qq-character of $\widehat{\Gamma}$-quiver theory on the ALE space $\widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma'}$ is dual to that of $\widehat{\Gamma}'$-quiver theory on $\widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma}$. This duality is interpreted as a generalization of [18], which is naturally understood using the 8-dimensional setup, called the gauge origami [16].

6. Quiver elliptic W-algebra

The quiver W-algebra discussed so far arises from the 5d quiver gauge theory defined on $\mathbb{R}^4 \times S^1$. Starting with the 6d gauge theory on $\mathbb{R}^4 \times T^2$, one can define the elliptic deformation of W-algebras. Let p be the elliptic nome $p = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau) \in \mathbb{C}^\times$ with the modulus of the torus T^2 denoted by τ. In this case the partition function is given by applying the elliptic class to the Chern characters,

$$\mathbb{I}_p\left[\sum_k x_k\right] = \prod_k \theta(x_k^{-1}; p) \tag{40}$$

with $\theta(z;p) = (z;p)_\infty (pz^{-1};p)_\infty$, which is reduced to the Dolbeault index in the limit $p \to 0$. To obtain the free field realization, we apply the Clavelli–Shapiro's doubling trick [19]. For example, the Y-operator is given by

$$\mathsf{Y}_{i,x} = \ q_1^{\tilde{\rho}_i} : \exp\left(y_{i,0} + \sum_{m\neq 0} \left(y_{i,m}^{(+)}\, x^{-m} + y_{i,m}^{(-)}\, x^{+m} \right) \right) : \tag{41}$$

with

$$\left[y_{i,m}^{(\pm)}, y_{j,m'}^{(\pm)} \right] = \mp \frac{1}{m}(1-q_1^{\pm m})(1-q_2^{\pm m})\, \tilde{c}_{ij}^{[\mp m]}\, \delta_{m+m',0}\,. \tag{42}$$

See [6] for details.

7. Fractional quiver W-algebra

We define a fractional quiver (Γ, d), which is a quiver Γ decorated with a set of parameters $(d_i)_{i\in\Gamma_0}$. We assume $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ so that it plays a role of the root length of the corresponding algebra. We define a gauge theory partition function depending on (d_i) by replacing the equivariant parameter as $(q_1, q_2) \to (q_1^{d_i}, q_2)$. The universal sheaf for the node $i \in \Gamma_0$ is given by

$$\mathbf{Y}_i = (1-q_1^{d_i}) \sum_{x\in\mathcal{X}_i} x =: \left(\sum_{r=0}^{d_i-1} q_1^r \right) \mathbf{y}_i \tag{43}$$

where $(\mathbf{y}_i)_{i\in\Gamma_0}$ is the fractionalization of the universal sheaf

$$\mathbf{y}_i = (1-q_1) \sum_{x\in\mathcal{X}_i} x\,. \tag{44}$$

The fictionalized sheaf plays a fundamental role to construct the fractional quiver W-algebra, which reproduces the q-deformed W-algebra of [8] for $\Gamma \neq ADE$. The symmetrization of the q-Cartan matrix (15) is then given by

$$b_{ij} = \frac{1-q_1^{d_i}}{1-q_1}(1+q_1^{-d_i}q_2^{-1})\delta_{ij} - \sum_{e:i\to j} \mu_e^{-1} \frac{(1-q_1^{d_i})(1-q_1^{-d_j})}{(1-q_1)(1-q_1^{-d_{ij}})} - \sum_{e:j\to i} \mu_e q_1^{-d_{ij}} q_2^{-1} \frac{(1-q_1^{d_i})(1-q_1^{-d_j})}{(1-q_1)(1-q_1^{-d_{ij}})} \tag{45}$$

where we omit the degree of the character and $d_{ij} = \gcd(d_i, d_j)$. See [7] for details.

References

[1] E. Frenkel and N. Reshetikhin, "Quantum affine algebras and deformations of the virasoro and $\mathcal{W}$-algebras," *Commun. Math. Phys.* **178** (1996) 237–264, `q-alg/9505025 [math.QA]`.

[2] J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, and S. Odake, "A Quantum deformation of the Virasoro algebra and the Macdonald symmetric functions," *Lett. Math. Phys.* **38** (1996) 33–51, `arXiv:q-alg/9507034 [math.QA]`.

[3] L. F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, "Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories," *Lett. Math. Phys.* **91** (2010) 167–197, `arXiv:0906.3219 [hep-th]`.

[4] H. Awata and Y. Yamada, "Five-dimensional AGT Conjecture and the Deformed Virasoro Algebra," *JHEP* **01** (2010) 125, `arXiv:0910.4431 [hep-th]`.

[5] T. Kimura and V. Pestun, "Quiver W-algebras," `arXiv:1512.08533 [hep-th]`.

[6] T. Kimura and V. Pestun, "Quiver elliptic W-algebras," `arXiv:1608.04651 [hep-th]`.

[7] T. Kimura and V. Pestun, "Fractional quiver W-algebras," `arXiv:1705.04410 [hep-th]`.

[8] E. Frenkel and N. Reshetikhin, "Deformations of $\mathcal{W}$-algebras associated to simple Lie algebras," *Comm. Math. Phys.* **197** (1998) 1–32, `q-alg/9708006 [math.QA]`.

[9] T. Kimura, "Double quantization of Seiberg–Witten geometry and W-algebras," `arXiv:1612.07590 [hep-th]`.

[10] T. Kimura, "Quantum Field Theory, Quantum Geometry, and Quantum Algebras (in Japanese)," *Math. Sci.* **653** (2017) 56–63, `arXiv:1705.05099 [hep-th]`.

[11] H. Nakajima and K. Yoshioka, "Lectures on instanton counting," *CRM Proc. Lec. Notes* **38** (2003) 31–102, `arXiv:math/0311058 [math.AG]`.

[12] A. Marshakov and N. A. Nekrasov, "Extended Seiberg–Witten theory and integrable hierarchy," *JHEP* **01** (2007) 104, `arXiv:hep-th/0612019`.

[13] J. Shiraishi, *Lectures on Quantum Integrable Systems (in Japanese)*. Saiensu-Sha, 2003.

[14] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces*. American Mathematical Society, 1999.

[15] M. Aganagic and N. Haouzi, "ADE Little String Theory on a Riemann Surface (and Triality)," `arXiv:1506.04183 [hep-th]`.

[16] N. Nekrasov, "BPS/CFT correspondence: non-perturbative Dyson–Schwinger equations and qq-characters," *JHEP* **03** (2016) 181, `arXiv:1512.05388 [hep-th]`.

[17] E. Frenkel and N. Reshetikhin, "The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of $\mathcal{W}$-algebras," in *Recent Developments in Quantum Affine Algebras and Related Topics*, vol. 248 of *Contemp. Math.*, pp. 163–205. Amer. Math. Soc., 1999. `math/9810055 [math.QA]`.

[18] H. Nakajima, "Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac–Moody algebras," *Duke Math.* **76** (1994) 365–416.

[19] L. Clavelli and J. A. Shapiro, "Pomeron factorization in general dual models," *Nucl. Phys.* **B57** (1973) 490–535.

楕円Felderhof模型と楕円Schur関数

茂木康平　(東京海洋大学)*

最近、Korepin [1] とIzergin [2] によるドメイン壁分配関数のIzergin-Korepin解析を波動関数に拡張することにより、6頂点模型の波動関数の明示表式を系統的に導出する方法を見出した [3]。この手法は楕円多項式の概念を用いることにより、楕円量子可積分系 に適用することも可能である。以下、Felderhof模型やPerk-Schultz模型の楕円類似に相当する模型 [4,5] に適用して得た結果について述べる。楕円Felderhof模型 [5] は補助空間 W_a と量子空間 $\mathcal{F}_j$ のテンソル積 $W_a \otimes \mathcal{F}_j$ に作用する L 演算子

$$L_{aj}(u,v|p,q|h)$$
$$= \begin{pmatrix} [u-v+p+q] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{[h]^{1/2}[h+2p+2q]^{1/2}[u-v+q-p]}{[h+2p]^{1/2}[h+2q]^{1/2}} & \frac{[2p]^{1/2}[2q]^{1/2}[-u+v+q+p+h]}{[h+2p]^{1/2}[h+2q]^{1/2}} & 0 \\ 0 & \frac{[2p]^{1/2}[2q]^{1/2}[u-v+q+p+h]}{[h+2p]^{1/2}[h+2q]^{1/2}} & \frac{[h]^{1/2}[h+2p+2q]^{1/2}[u-v-q+p]}{[h+2p]^{1/2}[h+2q]^{1/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [-u+v+p+q] \end{pmatrix},$$

で定義される。ここで、$[u]$ はテータ関数 $[u]=H(\pi i u)$, $\quad H(u)=2\mathrm{sinh}u\prod_{n=1}^{\infty}(1-2\mathbf{q}^{2n}\cosh(2u)+\mathbf{q}^{4n})(1-\mathbf{q}^{2n})$ である。

L 演算子の積であるモノドロミー行列の補助空間に関する行列要素である B 演算子

$$B(u|v_1,\dots,v_M|p|q_1,\dots,q_M|h)$$
$$= {}_a\langle 0|L_{a1}(u,v_1|p,q_1|h)L_{a2}(u,v_2|p,q_2|h+2\overline{q_1})\cdots L_{aM}(u,v_M|p,q_M|h+2\overline{q_{M-1}})|1\rangle_a,$$

$(\overline{q_j}=\sum_{k=1}^{j}q_k)$ の積の行列要素として波動関数 $W_{M,N}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|x_1,\dots,x_N|h)$ と双対波動関数 $\overline{W_{M,N}}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|\overline{x_1},\dots,\overline{x_N}|h)$ を

$$W_{M,N}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|x_1,\dots,x_N|h)$$
$$= \langle x_1\cdots x_N|B(u_N|v_1,\dots,v_M|p|q_1,\dots,q_M|h+2(N-1)p)$$
$$\times\cdots\times B(u_2|v_1,\dots,v_M|p|q_1,\dots,q_M|h+2p)B(u_1|v_1,\dots,v_M|p|q_1,\dots,q_M|h)|\Omega\rangle_M,$$
$$\overline{W_{M,N}}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|\overline{x_1},\dots,\overline{x_N}|h)$$
$$= {}_M\langle\overline{\Omega}|B(u_N|v_1,\dots,v_M|p|q_1,\dots,q_M|h+2(N-1)p)$$
$$\times\cdots\times B(u_2|v_1,\dots,v_M|p|q_1,\dots,q_M|h+2p)B(u_1|v_1,\dots,v_M|p|q_1,\dots,q_M|h)|\overline{x_1}\cdots\overline{x_N}\rangle,$$

として定義する。ここで、$|\Omega\rangle_M := |0\rangle_1\otimes\cdots\otimes|0\rangle_M$ と ${}_M\langle\overline{\Omega}| := {}_1\langle 1|\otimes\cdots\otimes {}_M\langle 1|$ はそれぞれスピンが全て上向きの状態と全て下向きの状態である。また、$\langle x_1\cdots x_N|$ と $|\overline{x_1}\cdots\overline{x_N}\rangle$ はそれぞれ下向きスピンの列 $1\le x_1<\cdots<x_N\le M$ と上向きスピンの列 $1\le\overline{x_1}<\overline{x_2}<\cdots<\overline{x_N}\le M$ をラベルする状態である。波動関数と双対波動関数に関して以下が成立する。

定理1　波動関数と双対波動関数に関して以下の等式が成立する。

$$W_{M,N}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|x_1,\dots,x_N|h)$$
$$= \prod_{1\le j<k\le N}[u_j-u_k+2p]S_{M,N}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|x_1,\dots,x_N|h).$$

本研究は科研費 (課題番号:16K05468) の助成を受けたものである。

* 〒135-0044 東京都江東区越中島 2-2-20　東京海洋大学 海洋工学部
e-mail: `kmoteg0@kaiyodai.ac.jp`
web: `https://sites.google.com/site/motegikohei/`

$$
\begin{aligned}
&\overline{W_{M,N}}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|\overline{x_1},\dots,\overline{x_N}|h)\\
=\ &\prod_{1\le j<k\le N}[u_j-u_k+2p]\overline{S_{M,N}}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|\overline{x_1},\dots,\overline{x_N}|h).
\end{aligned}
$$

$S_{M,N}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|x_1,\dots,x_N|h)$ および $\overline{S_{M,N}}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|\overline{x_1},\dots,\overline{x_N}|h)$ は以下で定義される楕円Schur関数である。

$$
\begin{aligned}
&S_{M,N}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|x_1,\dots,x_N|h)\\
=\ &\sum_{\sigma\in S_N}\prod_{1\le j<k\le N}\frac{1}{[u_{\sigma(j)}-u_{\sigma(k)}]}\prod_{j=1}^N\prod_{k=x_j+1}^M[u_{\sigma(j)}-v_k-q_k+p]\\
&\times\prod_{j=1}^N\frac{[h+2jp+2\overline{q_M}]^{1/2}[2p]^{1/2}[2q_{x_j}]^{1/2}}{[h+2(j-1)p+2\overline{q_M}]^{1/2}[h+2Np+2\overline{q_{x_j-1}}]^{1/2}[h+2(N-j)p+2\overline{q_{x_j}}]^{1/2}}\\
&\times\prod_{j=1}^N[-u_{\sigma(j)}+v_{x_j}+h+(2N-1)p+q_{x_j}+2\overline{q_{x_j-1}}]\prod_{j=1}^N\prod_{k=1}^{x_j-1}[u_{\sigma(j)}-v_k+p+q_k],\\
&\overline{S_{M,N}}(u_1,\dots,u_N|v_1,\dots,v_M|\overline{x_1},\dots,\overline{x_N}|h)\\
=\ &\sum_{\sigma\in S_N}\prod_{1\le j<k\le N}\frac{1}{[u_{\sigma(k)}-u_{\sigma(j)}]}\prod_{j=1}^N\prod_{k=\overline{x_j}+1}^M[-u_{\sigma(j)}+v_k+q_k+p]\\
&\times\prod_{j=1}^N\frac{[h+2(j-1)p]^{1/2}[2p]^{1/2}[2q_{\overline{x_j}}]^{1/2}}{[h+2jp]^{1/2}[h+2\overline{q_{\overline{x_j}-1}}]^{1/2}[h+2\overline{q_{\overline{x_j}}}]^{1/2}}\\
&\times\prod_{j=1}^N[-u_{\sigma(j)}+v_{\overline{x_j}}+h+p+q_{\overline{x_j}}+2\overline{q_{\overline{x_j}-1}}]\prod_{j=1}^N\prod_{k=1}^{\overline{x_j}-1}[u_{\sigma(j)}-v_k-p+q_k].
\end{aligned}
$$

定理1はBump-Brubaker-Friedberg [6], Bump-McNamara-Nakasuji [7] の結果の楕円類似に相当する。定理1の応用として、ドメイン壁分配関数からfactorial Schur関数の双対Cauchy公式を導出するBump-McNamara-Nakasuji [7] のアイデアを楕円Felderhof模型に適用することにより、以下を得た。

定理2　以下の楕円Schur関数の双対Cauchy等式が成立する。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\sqcup\overline{x}=\{1,2,\dots,n+m\}}S_{n+m,n}(u_1,\dots,u_n|v_1,\dots,v_{n+m}|x_1,\dots,x_n|h)\\
&\times\overline{S_{n+m,m}}(w_1,\dots,w_m|v_1,\dots,v_{n+m}|\overline{x_1},\dots,\overline{x_m}|h+2np)\\
=\ &\frac{[h+\sum_{j=1}^{n+m}v_j-\sum_{j=1}^n u_j-\sum_{j=1}^m w_j+(n+m)p+\sum_{j=1}^{n+m}q_j]}{[h+2\sum_{j=1}^{n+m}q_j]^{1/2}[h+2(n+m)p]^{1/2}}\\
&\times\prod_{j=1}^{n+m}[2p]^{1/2}[2q_j]^{1/2}\prod_{1\le j<k\le n+m}[v_k-v_j+q_j+q_k]\prod_{j=1}^n\prod_{k=1}^m[u_j-w_k+2p].
\end{aligned}
$$

ここで和記号 $\displaystyle\sum_{x\sqcup\overline{x}=\{1,2,\dots,n+m\}}$ は、$x\sqcup\overline{x}=\{1,2\dots,n+m\}$ を満たす $x=\{x_1,\dots,x_n\}$ $(1\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le n+m)$ と $\overline{x}=\{\overline{x_1}\dots\overline{x_m}\}$ $(1\le\overline{x_1}<\overline{x_2}<\cdots<\overline{x_m}\le n+m)$ の組全てに関して和をとるという意味である。

参考文献

[1] V.E. Korepin, Commun. Math. Phys. **86**, 391 (1982).

[2] A. Izergin, Sov. Phys. Dokl. **32**, 878 (1987).

[3] K. Motegi, arXiv:1703.07924, arXiv:1704.03575, arXiv:1704.07035.

[4] T. Deguchi, P. Martin, Int. J. Mod. Phys. A **7**, Suppl. 1A, 165 (1992).

[5] D. Bump, P. McNamara, M. Nakasuji, Comm. Math. Univ. St. Pauli **63**, 23 (2014).

[6] O. Foda, M. Wheeler, M. Zuparic, J. Stat. Mech. P02001 (2008).

[7] B. Brubaker, D. Bump, S. Friedberg, Commun. Math. Phys. **308**, 281 (2011).

Bruhat order of Weyl groupoids

山根　宏之 (Hiroyuki YAMANE) (富山大学理工学研究部 (Univ. of Toyama))*1
Iván ANGIONO (Córdoba Univ., The Argentine Republic)*2

1. Introduction

Axiomatic treatment of the Weyl groupoids has been introduced by [5]. The Weyl groupoids have been applied to study of representation theory of generalized quantum groups [2, 3, 4, 6, 7, 8, 9]. Here we explain the main result of [1].

2. Main result

Let I be a non-empty finite set. Let V be a free $\mathbb{Z}$-module with a $\mathbb{Z}$-basis $\{v_i | i \in I\}$, so $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} V = |I|$ and $V = \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}v_i$. Let $\mathfrak{P}(V)$ be a power set of V. Let $\mathfrak{B}(V)$ be a set of all $\mathbb{Z}$-bases of V, so $\mathfrak{B}(V) \subset \mathfrak{P}(V)$.

Let $R \in \mathfrak{P}(V)$. Assume $R \neq \emptyset$. For $B \in \mathfrak{B}(V)$, let $R^{B,+} := \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} B$ and $R^{B,-} := \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} B$. We say that B is *a base* of R if the following (x) and (y) hold:

(x) $R = R^{B,+} \cup R^{B,-}$.
(y) $\forall \alpha \in B$, $\mathbb{Z}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$.

Let $\mathcal{B}(R)$ be a set of all bases of R, so $\mathcal{B}(R) \subset \mathfrak{B}(V)$.

Let $R \in \mathfrak{P}(V)$. Assume $R \neq \emptyset$. Let $\mathbb{B}$ be a non-empty subset of $\mathcal{B}(R)$. We say that $(R, \mathbb{B})$ is *a generalized root system* [5] (see also [4, 8]) if

$$\forall B \in \mathbb{B},\ \forall \alpha \in B,\ \exists \tau_\alpha(B) \in \mathbb{B},\ R^{\tau_\alpha(B),+} \cap R^{B,-} = \{-\alpha\}.$$

For $R \in \mathfrak{P}(V)$, let $\mathcal{M}(R)$ be the set of all maps from I to R.

Theorem 1 [4, 5, 8]. *Let $(R, \mathbb{B})$ be a generalized root system. Then there exist a non-empty subset $\check{\mathbb{B}}$ of $\mathcal{M}(R)$ and bijections $\tau_i : \check{\mathbb{B}} \to \check{\mathbb{B}}$ $(i \in I)$ satisfying* (a)-(c) *below.*

(a) *The map $\varphi : \check{\mathbb{B}} \to \mathcal{M}(R)$ defined by $\varphi(\pi) := \pi(I)$ is injection.*
(b) $\varphi(\check{\mathbb{B}}) = \mathbb{B}$.
(c) $\forall \pi \in \check{\mathbb{B}}$, $\forall i \in I$, $(\tau_i(\pi))(I) = \tau_{\pi(i)}(\pi(I))$.

In particular, for $\pi \in \check{\mathbb{B}}$ and $i, j \in I$, there exist $N^\pi_{ij} \in \mathbb{Z}$ such that $(\tau_i(\pi))(j) = \pi(j) + N^\pi_{ij}\pi(i)$, which implies that $N^\pi_{ii} = -2$ and $N^\pi_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(j \neq i)$. Moreover, $(\tau_i)^2 = \mathrm{id}_{\check{\mathbb{B}}}$ and $N^{\tau_i(\pi)}_{ij} = N^\pi_{ij}$.

Let $\mathbb{J}$ be the set of all maps $f : \mathbb{N} \to I$.

Let $(R, \mathbb{B})$ be a generalized root system. For $\pi \in \check{\mathbb{B}}$ and $i \in I$, define the $\mathbb{Z}$-module automorphism $s^\pi_i : V \to V$ by $s^\pi_i(v_j) := v_j + N^\pi_{ij} v_i$. For $\pi \in \check{\mathbb{B}}$ and $f \in \mathbb{J}$, let $\pi_{f,0} := \pi$

This work was partially supported by KAKENHI (16K05095).
2000 Mathematics Subject Classification: 16T05, 17B37.
Keywords: Weyl groupoids, Nichols algebras.
*1 e-mail: `hiroyuki@math.sci-u.toyama.ac.jp`
web: `http://www3.u-toyama.ac.jp/hiroyuki/`
*2 e-mail: `angiono@famaf.unc.edu.ar`

and $\pi_{f,t} := \tau_{f(t)}(\pi_{f,t-1})$, and let $1^\pi s_{f,0} := \mathrm{id}_V$ and $1^\pi s_{f,t} = (1^\pi s_{f,t-1}) \circ s_{f(t)}^{\pi_{f,t}}$. Let

$$\ell^\pi_{f,t} := \min\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \exists g \in \mathbb{J},\, 1^\pi s_{g,r} = 1^\pi s_{f,t}\}.$$

Theorem 2 [5]. *We have*

$$\ell^\pi_{f,t} = |R^{\pi_{f,t}(I),+} \cap R^{\pi,-}|.$$

In particular, if $1^\pi s_{f,t} = 1^\pi s_{g,r}$*, then* $\pi_{f,t} = \pi_{g,r}$.

Let $(R, \mathbb{B})$ be a generalized root system. Let $\check{\mathbb{B}}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ be non-empty subsets of $\check{\mathbb{B}}$ such that

(i) $\cup_{\lambda\in\Lambda}\check{\mathbb{B}}_\lambda = \mathbb{B}$ and $\check{\mathbb{B}}_\lambda \cap \check{\mathbb{B}}_\mu = \emptyset$ $(\lambda \neq \mu)$.

(ii) For $\lambda \in \Lambda$ and π, $\pi' \in \check{\mathbb{B}}_\lambda$, defining the $\mathbb{Z}$-module automorphism $p : V \to V$ by $p(\pi(i)) := \pi'(i)$ $(i \in I)$, we have $p(R^{\pi(I),+}) = R^{\pi'(I),+}$.

(iii) $\forall\lambda \in \Lambda$, $\forall i \in I$, $\exists \mu \in \Lambda$, $\tau_i(\check{\mathbb{B}}_\lambda) = \check{\mathbb{B}}_\mu$.

For π, $\pi' \in \check{\mathbb{B}}$, we write $\pi \equiv \pi'$ if $\{\pi, \pi'\} \subset \check{\mathbb{B}}_\lambda$ for some $\lambda \in \Lambda$.

Theorem 3 [1]. *Assume that* $\ell^\pi_{f,k} = k$ *and* $1^\pi s_{f,k} = 1^\pi s_{g,k}$. *Assume that there exists a non-empty proper subset* $S = \{i_1, \ldots, i_x\}$ $(i_{t-1} < i_t)$ *of* $\{1, \ldots, k\}$ *such that* $\pi_{f,t-1} \equiv \pi_{f,t}$ $(t \in \{1, \ldots, k\} \setminus S)$ *and* $\ell^\pi_{f',x} = x$, *where* $f' \in \mathbb{J}$ *is such that* $f'(1) := i_1$, $\ldots$, $f'(x) := i_x$. *Then there exists a non-empty proper subset* $T = \{j_1, \ldots j_x\}$ $(j_{t-1} < j_t)$ *of* $\{1, \ldots, k\}$ *such that* $\pi_{g,t-1} \equiv \pi_{g,t}$ $(t \in \{1, \ldots, k\} \setminus T)$ *and* $1^\pi s_{f',x} = 1^\pi s_{g',x}$, *where* $g' \in \mathbb{J}$ *is such that* $g'(1) := j_1$, $\ldots$, $g'(x) := j_x$. *(Note that* $|S| = x = |T|$*.)*

References

[1] Iván Angiono, Hiroyuki Yamane, Bruhat order and nil-Hecke algebras for Weyl groupoids, to appear in Journal of Algebra and Its Applications, arXiv:1709.08572.

[2] Iván Angiono, Hiroyuki Yamane, The R-matrix of quantum doubles of Nichols algebras of diagonal type, J. Math. Phys. 56, 021702 (2015).

[3] Saeid Azam, Hiroyuki Yamane, Malihe Yousofzadeh, Classification of Finite Dimensional Irreducible Representations of Generalized Quantum Groups via Weyl Groupoids, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 51 (2015), no. 1, 59-130.

[4] Punita Batra, Hiroyuki Yamane, Centers of Generalized Quantum Groups, to appear in Journal of Pure and Applied Algebra, arXiv:1309.1651.

[5] István Heckenberger and Hiroyuki Yamane, A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto's theorem, Mathematishe Zeitschrift, 259 (2008), 255-276.

[6] István Heckenberger and Hiroyuki Yamane, Drinfel'd doubles and Shapovalov determinants, Revista de la Union Matematica Argentina, Volumen 51, no 2 (2010), 107-146.

[7] Naihuan Jing, Kailash Misra, Hiroyuki Yamane, Kostant-Lusztig $\mathbb{A}$-bases of Multiparameter Quantum Groups, to appear in Contemporary Math., arXiv:1709.0857.

[8] Hiroyuki Yamane, Generalized root systems and the affine Lie superalgebra $\mathrm{G}^{(1)}(3)$, São Paulo Journal of Mathematical Sciences, Volume 10, Issue 1, (2016), 9-19.

[9] Hiroyuki Yamane, Iwahori-Hecke type algebras associated with Lie superalgebras A(m,n), B(m,n), C(n) and D(m,n). RIMS Kôkyûroku Bessatsu B11 (2009), 197-222.

Screening operators and $\mathfrak{sl}_2$ action on the lattice vertex operator algebras of type A_1

橋本 義武 (東京都市大学)*1
松本 拓也 (名古屋大学)*2
土屋 昭博 (Kavli IPMU)*3

概 要

本講演では、Belavin-Polyakov-Zamolodchikov(BPZ) によって提案された 2 次元共形場場理論の基本的な模型である「ミニマル模型」の 1 変数 ϵ による Virasoro 対称性を保った marginal 変形を考える。特に、形式的冪級数環 $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[\epsilon]]$ とその商体 $\mathcal{K} = \mathbb{C}((\epsilon))$ の対 $(\mathcal{K}, \mathcal{O})$ の上で理論を展開する事により、BPZ 理論の特徴を説明すると共に、その拡張についても議論する。

1. 研究の目的

2 次元共形場理論は、統計物理学や弦理論など、幅広い応用を持つ場の量子論であり、その表現論的構造を調べることは、基本的で重要な問題である。その基礎となったのは、1984 年に A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov(以下、BPZ) らによって提出された、いわゆる「BPZ ミニマル模型」である [1]。本講演の出発点もここにある。彼らは、共形不変性が 2 次元においては無限次元の Virasoro 代数に拡大することに注目し、その表現論を巧みに場の量子論の枠組みに取り入れることによって、最も基本的な物理量である相関関数を決定する情報を、Virasoro 代数の表現論から抽出することに成功した。BPZ の議論でポイントとなるのは、Virasoro 代数の中心 (中心電荷と呼ばれる) が特別な値；

$$c_{p_+,p_-} = 1 - 6\frac{(p_+ - p_-)^2}{p_+p_-} \qquad \text{(但し } (p_+, p_-) \text{ は互いに素な 2 以上の正の整数)}$$

をとるとき、Virasoro 加群に加算無限個の特異ベクトルが現れ、その表現が著しく退化するという点である。一方、中心電荷が一般の値の場合は、そのような特殊な現象は起こらない。

我々の目的は、2 次元共形不変性すなわち Virasoro 対称性を保ったまま、理論全体を 1 変数 ϵ によって変形し（これを「marginal 変形」と呼ぶことにする）、その表現論的構造を丁寧に調べることである。具体的には、この marginal 変形によって、BPZ が注目した中心電荷の特殊値 c_{p_+,p_-} と一般の値での現象を、1 変数 ϵ によって interpolate する理論を構成することが目標である。

本研究は科研費 (課題番号:17K05194(A.T.), 及び 16K17567(T.M.)) の助成を受けたものである。
*1 〒 158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1
e-mail: yhashimo@tcu.ac.jp
*2 〒 464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町
e-mail: takuya.matsumoto@math.nagoya-u.ac.jp
*3 〒 277-8583 千葉県柏市柏の葉 5-1-5
e-mail: akihiro.tsuchiya@ipmu.jp

2. 方法と結果

そのため方法として、ボソン (Heisenberg 代数) を用いた virasoro 代数の自由場表示を用いる。その理由は、Virasoro 加群の intertwiner 演算子である screening 作用素を具体的に構成できるという点にある。screening 作用素を定義するには、twisted de Rham 理論の枠組みの中で積分のサイクルを具体的に作る必要があるが、これは [2] で行われた。

次に、理論の marginal 変形を議論するために、変数 ϵ に関する形式的冪級数環 $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[\epsilon]]$ とその商体 $\mathcal{K} = \mathbb{C}((\epsilon))$ を用意し、理論全体を $\mathcal{K}$ と $\mathcal{O}$ の対 $(\mathcal{K}, \mathcal{O})$ 上で展開する事を意識する。BPZ ミニマル模型は、$\mathcal{O}$ 上の理論を $\mathbb{C}$ 上へ簡約することによって、再現される [4]。$\mathcal{O}$ 上での Virasoro 加群を解析するためには、$\mathcal{O}$ 上で Screening 作用素を定義する必要があるが、この「繰り込み」が可能であることは [6] によって示された。このように $\mathcal{O}$ 上で Virasoro 代数や W 代数の表現論を展開する事は、Virasoro 代数の Fock 表現を明らかにした B. L. Feigin, D. B. Fuchs [3] で用いられた Jantzen filtration をより自然な形で実現している。

さらに、BPZ ミニマル模型を部分商として含んだより大きな代数として、A_1 型格子頂点作用素代数があるが、$\mathcal{O}$ 上の Screening 作用素を考えることにより、格子頂点作用素代数に作用する Virasoro intertwiner 演算子 E, F を構成することができる [4]。これは、BPZ のミニマル模型を Screening 作用素の定義する cohomology によって特徴づけた $\mathbb{C}$ 上の Felder 複体 [5] の $\mathcal{O}$ 上への持ち上げであり、[6, 7] の精密化でもある。

参考文献

[1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” Nucl. Phys. B 241 (1984) 333-380.

[2] A. Tsuchiya and Y. Kanie, “Fock space representations of the Virasoro algebra – Intertwining operators,” Publ. RIMS, Kyoto Univ. 22 (1986) 259–327.

[3] B. L. Feigin and D. B. Fuchs, “Representations of the Virasoro algebra,” Representations of Lie Groups and Related Topics, Adv. Stud. Contemp. Math., Gordon and Breach, New York, 7 (1990) 465-554.

[4] Y. Hashimoto, T. Matsumoto and A. Tsuchiya, in preparation.

[5] G. Felder, “BRST approach to minimal models,” Nuc. Phy. B 317 (1989) 215–236.

[6] A. Tsuchiya and S. Wood, “On the Extended W-Algebra of Type $\mathfrak{sl}_2$ at Positive Rational Level,” International Mathematics Research Notices, Volume 2015, Issue 14, 1 January 2015, Pages 5357-5435, [arXiv:1302.6435 [math.QA]].

[7] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, and I. Y. Tipunin, “Logarithmic extensions of minimal models: Characters and modular transformations,” Nucl. Phys. B757 (2006) 303–343, [arXiv:hep-th/0606196].

Modular transformation properties and the Verlinde formula

佐藤 僚（東大数理）

1　背景と概要

$\mathcal{N}=2$ **超共形代数**と呼ばれる無限次元 Lie 超代数は，M. Ademollo らによって Virasoro 代数を Lie 部分代数に含むような超対称類似として導入された．以下では，中心電荷 c をもつ $\mathcal{N}=2$ 超共形代数に付随して定まる単純頂点作用素超代数を L_c と表記する．互いに素な整数の組 $(p,p')\in\mathbb{Z}_{\geq 2}\times\mathbb{Z}_{\geq 1}$ によって中心電荷が

$$c=c_{p,p'}:=3(1-2a)\quad\left(a:=\frac{p'}{p}\right)$$

と表わされるときの既約 L_c-加群（自動的に既約最高ウェイト加群）は，

- $p'=1$ の場合：有限個のユニタリ極小系列（Di Vecchia ら）
- $p'>1$ の場合：連続パラメータを持つ非可算無限の系列（Adamović）

と分類されている．前者の場合，ユニタリ極小系列の指標は古典的なテータ関数を用いて記述することができ（Matsuo），指標のなす線形空間がモジュラー群 $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用に関して不変であることが知られていた（Ravanini–Yang）．その一方で，後者の場合にはある一部の離散的なパラメータに対応する既約 L_c-加群の指標（以下では**非典型指標**と呼ぶ）に限っては，Appell–Lerch 和と呼ばれる有理型関数を用いて記述されることが知られていた（Gorelik–Kac）．しかし，Appell–Lerch 和に対するモジュラー変換則は，テータ関数と Mordell 積分によって記述される “余剰項” をもつため，非典型指標のなす線形空間はモジュラー変換で閉じていないことが知られていた（cf. Semikhatov–Taormina–Tipunin, Kac–Wakimoto）．

本講演では，$p'>1$ の場合にすべての既約 L_c-加群の指標公式を決定し，それらのモジュラー変換則を既約指標のみを用いて記述した [Sat17] の主結果を概説する．

2　主結果と予想

Theorem 2.1 ([Sat17, Theorem 3.7 および 4.12])**.** 任意の $\lambda \in \mathscr{S}_{p,p'}$ および $(\mu, x) \in K_{p,p'} \times (\mathbb{C} \setminus S)$ に対して，指標のモジュラー S-変換則

$$\mathbf{A}_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{u}{\tau}, t - \frac{u^2}{6\tau}\right) = \sum_{\lambda' \in \mathscr{S}_{p,p'}} S^{aa}_{\lambda,\lambda'} \mathbf{A}_{\lambda'}(\tau, u, t) + \sum_{\mu'' \in K_{p,p'}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x''\, S^{at}_{\lambda,(\mu'',x'')} \mathbf{T}_{\mu'';x''}(\tau, u, t),$$

$$\mathbf{T}_{\mu;x}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{u}{\tau}, t - \frac{u^2}{6\tau}\right) = \sum_{\mu' \in K_{p,p'}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, S^{tt}_{(\mu,x),(\mu',x')} \mathbf{T}_{\mu';x'}(\tau, u, t)$$

が成立する．展開係数の具体表示は [Sat17] を参照のこと．

ここで得られた展開係数を用いて Verlinde 公式の類似（cf. Creutzig–Ridout）を考えることで，ある L_c-加群間の絡作用素の次元（つまり，$\mathbb{P}^1$ 上の 3 点共形ブロックの次元）に関する次の予想を得る．

Conjeture 2.2 ([Sat17, Conjecture 5.1])**.** モジュラー S-行列から得られる

$$N^{(\mu_2;x_2)}_{\lambda,(\mu_1;x_1)} := \sum_{\mu' \in K_{p,p'}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x' \frac{S^{at}_{\lambda,(\mu';x')} S^{tt}_{(\mu_1;x_1),(\mu';x')} \overline{S^{tt}_{(\mu_2;x_2),(\mu';x')}}}{S^{at}_{\mathsf{vac},(\mu';x')}}.$$

は，$\begin{pmatrix} & \mathcal{L}_{\mu_1;ix_1} \\ \mathcal{L}_\lambda & \mathcal{L}_{\mu_1;ix_1} \end{pmatrix}$ 型の絡作用素（intertwining operator）の次元に一致する．

Remark 2.3. この予想は Kazama–Suzuki コセット構成を介して Kac–Wakimoto 認容レベルにおける Verlinde 公式の類似 [CR13] と関連する．

参考文献

[CR13] T. Creutzig and D. Ridout. Modular data and Verlinde formulae for fractional level WZW models II. *Nucl. Phys. B*, 875(2):423–458, 2013.

[Sat17] R. Sato. Modular invariant representations of the $\mathcal{N} = 2$ superconformal algebra. *arXiv preprint arXiv:1706.04882*, 2017.

シューベルト・カルキュラスの視点からの Hall-Littlewood関数の一般化・母関数表示と応用

成瀬　弘　(山梨大学)*

1. 背景

筆者は、シューベルト・カルキュラスに関連して登場する対称函数やシューベルト類を代表するシューベルト多項式について、ここ数年間研究を進めてきた。その中で、コホモロジー理論について知られている種々の結果を K 理論の場合に拡張するという事をいくつか行ってきた。(cf. [2],[5],[7]) その過程で、K 理論に限らずその他の種々のコホモロジー理論についても同様の拡張ができる可能性があると感じ、いくつかの場合について一般のコホモロジー理論への拡張の作業を行ってきた。ここでは、さらにシューベルト・カルキュラスの枠組みを含むより一般的な状況に対応するものとして、Hall-Littlewood 函数について一般コホモロジーの場合にどのようなものが考えられるかについての考察結果を報告したい。Hall-Littlewood 函数は、パラメータとなる変数 t を含み、この t を特殊化することでシューア函数 ($t = 0$ の場合) やシューア Q 函数 ($t = -1$ の場合) を得ることができる。そこで、この Hall-Littlewood 函数を考えることで、種々の結果を統一的に理解できることが期待できると考えられる。実際、ここでは特にこの一般化された Hall-Littlewood 函数の母函数表示を求める (cf.[13]) ことで、コホモロジーの積構造の特殊な場合の計算を比較的容易に行うことができる。また、K-理論においてシューベルト類を代表する多項式が行列式表示やパッフィアン表示を持つことが文献 [2] で示されたが、この事も母函数表示から自然に導びくことができる。なお、ここで報告する事柄の多くは、岡山大学の中川征樹氏との共同研究に基づくものである。(特に、文献 [11],[12] など)

2. 一般コホモロジー理論を規定する形式群について

ここでは、形式群から作られる一般コホモロジー理論について簡単に説明する。トポロジーの分野では、複素コボルディズム MU がこの一般コホモロジーを統制する。代数幾何の範疇では、代数的コボルディズムの理論が作られている。(cf.[9]) これらの詳細についての説明はここではできないが、基本的な演算として形式群が重要な役割を果たしている。

2.1. 形式群

形式群（より正確には、１次元の可換な形式群）とは、次の性質をみたす２変数の形式冪級数 $F(x, y) \in R[[x, y]]$ のことをいう。(R は、可換環とする。)

本研究は科研費 (課題番号:16H03921) 「シューベルト・カルキュラスの深化」の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 05E05, 14L05, 55N22, 19L41, 14N15
キーワード：Hall-Littlewood 函数, Schur 函数, 形式群, 一般コホモロジー, シューベルト・カルキュラス
* 〒400-8510 山梨県甲府市武田4-4-37　山梨大学 大学院総合研究部
e-mail: hnaruse@yamanashi.ac.jp
web: http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~hnaruse/

(1) $F(x,y)$ は、次の形をしている。

$$F(x,y) = x + y + \sum_{i,j\geq 1} a_{i,j} x^i y^j, \quad (a_{i,j} \in R)$$

(2) 変数 x, y について可換である。

$$F(x,y) = F(y,x)$$

(3) 結合法則をみたす。

$$F(x, F(y,z)) = F(F(x,y), z)$$

形式群と $\mathbb{Z}$ 上の共形場に関しては、文献 [6] があり、興味深い。

2.2. $\log_F(x)$ **と** $\exp_F(x)$

形式群 $F(x,y) \in R[[x,y]]$ に対して、

$$F(x,y) = \exp_F(\log_F(x) + \log_F(y))$$

をみたす $\log_F(x)$ と $\exp_F(x)$ を考える。一般には、このようなものは存在するとは限らないが、R がトーションを持たない可換環の場合は、$R \otimes \mathbb{Q}$ を係数にもつ $\log_F(x), \exp_F(x) \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$ が、以下のように作れる。

$$\log_F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{C}P^n] \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ここで、$\mathbb{C}P^n$ は、複素 n 次元射影空間で $[\mathbb{C}P^n]$ は、そのコホモロジー類を表す。例えば、$F_m(x,y) = x + y + \beta xy$ のとき、$[\mathbb{C}P^n] = (-\beta)^n$ である。

$\log_F(x)$ と $\exp_F(x)$ を用いて $[t]_F$ 倍を次で定める。

$$[t]_F\ x := \exp_F(t \log_F(x)).$$

$t = n$ 自然数のとき、

$$[n]_F\ x = \overbrace{x +_F x +_F \cdots +_F x}^{n}$$

である。$[-1]_F x = \bar{x}$ は、逆元であり、$F(x, \bar{x}) = 0$ を満たす。

例　$F_m(x,y) = x + y + \beta xy$ とする。このとき、

$$\bar{x} = \frac{-x}{1+\beta x},\ \exp_{F_m}(x) = \frac{e^{\beta x} - 1}{\beta},\ \log_{F_m}(x) = \frac{\log(1+\beta x)}{\beta},$$

$$[t]_{F_m}\ x = tx + \frac{t(t-1)}{2!}\beta x^2 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\beta^{n-1} x^n + \cdots$$

である。

2.3. 楕円コホモロジー

一般の楕円曲線は、5 個のパラメータ $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6$ を用いて、

$$y^2 + \mu_1 xy + \mu_3 y = x^3 + \mu_2 x^2 + \mu_4 x + \mu_6$$

と表され、これに対応する形式群は、Buchstaber と Bunkova により文献 [1] で決定されている。特に、μ_1, μ_2 のみ残して、$\mu_i = 0,\ i = 3, 4, 6$ とした場合は、

$$F_{E_{\mu_1,\mu_2}}(x, y) = \frac{x + y - \mu_1 xy}{1 + \mu_2 xy}$$

となる。(Hyperbolic type と呼ばれる。) また、μ_2, μ_4 のみ残して、$\mu_i = 0,\ i = 1, 3, 6$ とした場合は、$\delta = \mu_2,\ \varepsilon = \mu_2^2 - 4\mu_4$ とおき、$S_{\delta,\varepsilon}(x) := 1 - 2\delta x^2 + \varepsilon x^4$ として、

$$F_{Ell_{\delta,\varepsilon}}(x, y) = \frac{x\sqrt{S_{\delta,\varepsilon}(y)} + y\sqrt{S_{\delta,\varepsilon}(x)}}{1 - \varepsilon x^2 y^2}$$

となる。(このとき、$\exp_F(x) = sn(x; \delta, \varepsilon)$ は elliptic sine で $(\exp_F(x)')^2 = S_{\delta,\varepsilon}((\exp_F(x))$。)

これらの場合は、Krichever 形式群となり、可積分系と関係がある。[1]

2.4. $P_F(z)$

形式群

$$F(x, y) = x + y + \sum_{i,j\geq 1} a_{i,j} x^i y^j \in A[[x, y]],$$

に対して、$P_F(z) \in A[[z]]$ を次のように定める。

$$P_F(z) := 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{1,i} z^i$$

これは、次のようにも表される。第 1 変数での偏微分を $F_1(x, y) := \partial_x F(x, y)$ と表すとき、

$$P_F(z) = F_1(0, z)$$

である。また、$P_F(x, y) \in A[[x, y]]$ を

$$P_F(x, y) := \frac{x - y}{F(x, \bar{y})}$$

で、定める。このとき $F(x, y)$ が、結合法則を満たすことを用いて次が示せる。

補題 1 $P_F(x, y)$ は、可逆であり $P_F(x, x) = P_F(x)$ となっている。

例　$F_m(x, y) = x + y + \beta xy$ とする。このとき、

$$P_{F_m}(x, y) = 1 + \beta y,\ \ P_{F_m}(x) = 1 + \beta x$$

である。

3. 形式群Fで一般化されたHall-Littlewood函数

Hall-Littlewood函数 (cf. [10]) には、いくつかの変種が存在する。通常は、分割λに添え字付けされているがここでは、その母函数を考えるため正整数列$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ で添え字付けされる対称函数として以下のように定める。変数$x_1, \ldots, x_n$に対して、$r \leq n$ とする。

Aを係数環とし、形式冪級数$T(x, y)$, 形式Laurent級数 $H(z)$ を用意しておく。形式群$F(x, y)$に対して、一般化されたHall-Littlewood函数を定める。

定義 2 F, T, H に対する一般化された Hall-Littlewood 函数 $\mathcal{Q}^F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(x_1, \ldots, x_n; T, H)$ を、次の式で定める。

$$\mathcal{Q}^F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(x_1, \ldots, x_n; T, H) := \sum_{w \in S_n/(S_1^r \times S_{n-r})} w\left(x_1^{[\lambda_1]} \cdots x_r^{[\lambda_r]} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{i < j \leq n} \frac{T(x_i, x_j)}{F(x_i, \bar{x}_j)} \right),$$

ここで、正整数kに対して$x^{[k]} := H(x)T(x, x)x^{k-1}$ とおいた。またwは、対称群のコセットの代表を動き、変数$x_1, \ldots, x_n$の置換として作用する。このように対称群で軌道和を取る操作は、幾何学的にはpush-forwardの写像にあたる。cf.[11],[12]

通常は、TとHを、次のように特殊化した場合を考える。すなわち、

$T(x, y) = F(x, [t]_F \bar{y}), H(x) = \frac{1}{T(x)}$のとき、$x^{[k]} = x^k$で、このとき$HP^F$を定める。

$T(x, y) = F(x, [t]_F \bar{y}), H(x) = 1$のとき、$x^{[k]} = F(x, [t]_F \bar{x})x^{k-1}$で、このとき$HQ^F$を定める。

定義 3 tを不定元とし、$HP^F_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t), HQ^F_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)$ を次で定める。

$$HP^F_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) := \sum_{w \in S_n/(S_1^r \times S_{n-r})} w\left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_r^{\lambda_r} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{i < j \leq n} \frac{F(x_i, [t]_F(\bar{x}_j))}{F(x_i, \bar{x}_j)} \right)$$

$$HQ^F_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t) := \sum_{w \in S_n/(S_1^r \times S_{n-r})} w\left(x_1^{[\lambda_1]^F} \cdots x_r^{[\lambda_r]^F} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{i < j \leq n} \frac{F(x_i, [t]_F(\bar{x}_j))}{F(x_i, \bar{x}_j)} \right)$$

ここで、正整数$k > 0$に対して、$x^{[k]^F} := F(x, [t]_F(\bar{x}))x^{k-1}$ とする。

簡単のため、次の定理では$H(z)$は、形式冪級数とする。

定理 4 （母函数表示）[13]

$A(z) := \dfrac{H(z)}{P_F(z)} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{T(z, x_i)}{F(z, \bar{x}_i)}$ とおき、$r \leq n$に対して

$$A(z_1, \ldots, z_r) := \prod_{k=1}^{r} A(z_k) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{F(z_j, \bar{z}_i)}{T(z_j, z_i)}.$$

と定める。このとき、正整数の列$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ に対して、$A(z_1, \ldots, z_r)$ における$z^{-\lambda} := z_1^{-\lambda_1} \cdots z_r^{-\lambda_r}$ の係数は、$\mathcal{Q}^F_\lambda(x_1, \ldots, x_n; T, H)$である。すなわち、次が成立する。

$$[z^{-\lambda}]A(z_1, \ldots, z_r) = \mathcal{Q}^F_\lambda(x_1, \ldots, x_n; T, H)$$

ここで、$[z^{-\lambda}]f(z)$は、$f(z)$の$z^{-\lambda}$の係数を取ることを表す。

注意 5 $H(z)$ が位数 k の極を持つときは、$\lambda_1, \ldots, \lambda_r > k$ に対して、同様のことが成立する。

系 6 [12]

$$[z^{-\lambda}]\left(\prod_{k=1}^{r}\left(\frac{1}{P_F(z_k)}\prod_{i=1}^{n}\frac{F(z_k,[t]\bar{x}_i)}{F(z_k,\bar{x}_i)}\right)\prod_{1\le i<j\le r}\frac{F(z_j,\bar{z}_i)}{F(z_j,[t]\bar{z}_i)}\right)=HQ_\lambda^F(x_1,\ldots,x_n;t),$$

$$[z^{-\lambda}]\left(\prod_{k=1}^{r}\left(\frac{z_k}{P_F(z_k)F(z_k,[t]\bar{z_k})}\prod_{i=1}^{n}\frac{F(z_k,[t]\bar{x}_i)}{F(z_k,\bar{x}_i)}\right)\prod_{1\le i<j\le r}\frac{F(z_j,\bar{z}_i)}{F(z_j,[t]\bar{z}_i)}\right)=HP_\lambda^F(x_1,\ldots,x_n;t)$$

$F(x,y)=x+y$ の場合の通常コホモロジーのときは、HQ^F は通常の Hall-Littlewood Q 函数となり、上記の系はその知られた母函数表示となる。$t=0$ や $t=-1$ の場合の代数的コボルディズムでのこれらに対応する幾何学的な構成については、[3],[4] を参照の事。

4. connective K 理論の場合の具体例と応用

ここでは、connective K 理論の場合に、具体形に関する結果と応用について述べる。以下では、$x\oplus y=F_m(x,y)=x+y+\beta xy=$, $x\ominus y=F_m(x,\bar{y})=\dfrac{x-y}{1+\beta y}$ の記号を用いる。

系 7 (Determinant-Pfaffian formula)[2] $F=F_m(x,y)=x+y+\beta xy$ とし、λ を長さ r の分割とする。$T(x,y)=F(x,[t]\bar{y})$ で $H(z)=1$ ないし $H(z)=\frac{z}{T(z,z)}$ とおく。

このとき、$t=0$ で、次の式を得る。

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(x_1,\ldots,x_n) &= \det\left([z_i^{-(\lambda_i+j-i)}]\frac{1}{(1+\beta z_i)^{r-i}}A(z_i)\right)_{r\times r}\\ &= \det\left([z_i^{-(\lambda_i+j-i)}]\frac{1}{(1+\beta z_i)^{j-i}}A(z_i)\right)_{r\times r},\end{aligned}$$

$t=-1$ のときは、次の Pfaffian 公式を得る。(r は偶数とする。)

$$\mathcal{Q}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(x_1,\ldots,x_n)=\mathrm{Pf}\left([z_i^{-\lambda_i}z_j^{-\lambda_j}]\frac{1}{(1+\beta z_i)^{r-i-1}}\frac{1}{(1+\beta z_j)^{r-j}}A(z_i)A(z_j)\frac{z_j\ominus z_i}{z_j\oplus z_i}\right)_{r\times r}.$$

補題 8

$$\frac{z_2\ominus z_1}{z_2\oplus z_1}=\sum_{i\ge j\ge 0}g_{i,j}z_1^i z_2^{-j}$$

ここで $g_{i,j}:=(-1)^i\beta^{i-j}\left(2\binom{i}{j}+\binom{i}{j+1}-\delta_{j,0}\right)$ $\delta_{i,j}$ は Kronecker の delta 記号。

母函数の式に、この補題を用いることで、K 理論的な Schur$Q$-函数 $GQ_\lambda=GQ_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ (GQ,GP については [5] を参照) について、2 行の分割し対応するものを 1 行の積の和で表す式や、1 行の GQ,GP の積の分解にあたる Pieri 公式の特別の場合が得られる。

命題 9 $k > \ell > 0$に対し、次が成立する。

$$GQ_{k,\ell} = \sum_{j=0}^{\ell}\sum_{i=j}^{\infty} c_{i,j} GQ_{k+i} GQ_{\ell-j}$$

ここで、

$$c_{i,j} = \begin{cases} g_{i,j} & (0 \leq j < \ell) \\ (-1)^i \beta^{i-j} \left(2\binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j}\right) & (j = \ell). \end{cases}$$

命題 10 $k \geq l > 0$に対して、

$$\begin{aligned} (1)\ GQ_k \times GQ_l &= (GQ_{k,l} + 2\beta GQ_{k+1,l} + \beta^2 GQ_{k+2,l}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{l-1} (2GQ_{k+i,l-i} + 3\beta GQ_{k+1+i,l-i} + \beta^2 GQ_{k+2+i,l-i}) \\ &\quad + (2GQ_{k+l,0} + \beta GQ_{k+l+1,0}) \end{aligned}$$

(2) $GP_k \times GP_1 = GP_{k,1} + \beta GP_{k+1,1} + GP_{k+1}$

$k \geq l \geq 2$のとき、

$$\begin{aligned} GP_k \times GP_l &= (GP_{k,l} + 2\beta GP_{k+1,l} + \beta^2 GP_{k+2,l}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{l-2} (2GP_{k+i,l-i} + 3\beta GP_{k+1+i,l-i} + \beta^2 GP_{k+2+i,l-i}) \\ &\quad + (2GP_{k+l,1} + 2\beta GP_{k+l+1,1}) \\ &\quad + GP_{k+l}. \end{aligned}$$

5. 今後の課題

今後の課題として以下が考えられる。

1. BCD型のHall-Littlewood函数の一般化

2.Hyperbolic type などの楕円コホモロジーの場合の具体形を記述する。

3. tを1のべき根に特殊化した場合の多項式の意味について（p-compact群と関係している。）

4.Hall-Littlweood函数をSchur函数で展開したときの係数の具体形を求める。(Kostka係数の一般化となる。)

5. ホモロジーのSchubert基底に対応する多項式についても、母函数表示を求める問題がある。例えば、次の例がある。

Dual stable Grothendieck polynomial $g_\lambda(y_1, y_2, \ldots) \in \mathbb{Z}[\beta][[y_1, y_2, \ldots]]$ は、次で定義される。

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_\lambda G_\lambda(x) g_\lambda(y).$$

命題 11 長さrの分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ $(r \leq n)$に対して、次が成立する。

$$[u^\lambda] \left(\prod_{k=1}^{r}\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1 - y_j u_k}\right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{u_i \ominus u_j}{u_i} = g_\lambda(y_1, \ldots, y_m)$$

c.f.[8]

参考文献

[1] V. M. Buchstaber and E. Yu. Bunkova, Krichever formal groups Functional Analysis and Its Applications, Volume 45,99-116 (2011).

[2] T.Hudson,T.Ikeda,T.Matsumura and H.Naruse, Degeneracy Loci Classes in K-theory - Determinantal and Pfaffian Formula, Advances in Mathematics Volume 320,115–156, 2017.

[3] T.Hudson and T.Matsumura, Segre classes and Kempf-Laksov formula in algebraic cobordism, arXiv:1602.05704

[4] T.Hudson and T.Matsumura, Symplectic and odd orthogonal Pfaffian formulas for algebraic cobordism, ,arXiv:1710.07093.

[5] T.Ikeda and H.Naruse, K-theoretic analogues of factorialSchur P- and Q- functions , Adv. Math. 243 (2013), no. 1, 22–66.

[6] T.Katsura, Y.Shimizu and K.Ueno, Formal groups and conformal field theory over $\mathbb{Z}$, Adv. Stud. Pure Math. 19, 347–366 (1989).

[7] A.N.Kirillov and H.Naruse, Construction of double Grothendieck polynomials of classical types using Id-Coxeter algebras , Tokyo Journal of Mathematics, Vol.39 no.3,(2017), 695–728.

[8] A. Lascoux and H.Naruse, Finite sum Cauchy identity for dual Grothendieck polynomials, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. Volume 90, No.7(2014), 87—91.

[9] M.Levine and Morel, Alegbraic Cobordism, Springer 2007.

[10] I.G.Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.

[11] M.Nakagawa and H.Naruse, The universal Gysin formulas for the universal Hall-Littlewood functions, to appear in Contemporary Mathematics AMS, arXiv:1604.00451v2.

[12] M.Nakagawa and H.Naruse, Generating functions for the universal Hall-Littlewood P- and Q-functions ,arXiv:1705.04791.

[13] H. Naruse, Elementary proof and application of the generating function for generalized Hall-Littlewood functions , arXiv:1705.02856.