日本数学会

2016年度年会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2016年3月

於　筑波大学

日本数学会

2016年度年会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2016年3月

於　筑波大学

無 限 可 積 分 系

3月18日(金)　第VIII会場

3月19日(土)　第VIII会場

A 型 Jackson 積分 と Ramanujan ${}_1\psi_1$ 和公式, Slater ${}_r\psi_r$ 変換公式 の 一般化

伊藤 雅彦 (東京電機大学・未来科学部)
野海 正俊 (神戸大学・理)

底 $q \in \mathbb{C}^*$ $(|q| < 1)$ に関して記号 $(u)_\infty = \prod_{i=0}^\infty (1-q^i u)$ を用いる. $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の関数 $\varphi = \varphi(z) = \varphi(z_1,\dots,z_n)$ に対して, $\langle \varphi, z\rangle$ を次のように定義する.

$$\langle \varphi, z\rangle = \int_0^{z\infty} \varphi(w)\Phi(w)\Delta(w)\frac{d_q w_1}{w_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_q w_n}{w_n} = (1-q)^n \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\varphi(zq^\nu)\Phi(zq^\nu)\Delta(zq^\nu).$$

ただし $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)\in\mathbb{Z}^n$ に対して $zq^\nu = (z_1q^{\nu_1},\dots,z_nq^{\nu_n})\in(\mathbb{C}^*)^n$ とする. ここで

$$\Phi(z) = (z_1z_2\cdots z_n)^\alpha \prod_{i=1}^n\prod_{m=1}^s \frac{(qa_m^{-1}z_i)_\infty}{(b_mz_i)_\infty}\prod_{1\le j<k\le n} z_j^{2\tau-1}\frac{(qt^{-1}z_k/z_j)_\infty}{(tz_k/z_j)_\infty},$$

$$\Delta(z) = \prod_{1\le j<k\le n}(z_j - z_k)$$

とする. ただし $q^\tau = t$ である. 和 $\langle\varphi,z\rangle$ が収束するとき, $\langle\varphi,z\rangle$ を **A 型 Jackson 積分**と呼ぶ. $\theta(u) = (u)_\infty(qu^{-1})_\infty$ とするとき,

$$\langle\!\langle \varphi, z\rangle\!\rangle = \frac{\langle\varphi,z\rangle}{\Theta(z)}, \qquad \Theta(z) = \prod_{i=1}^n \frac{z_i^\alpha}{\prod_{m=1}^s\theta(b_mz_i)}\prod_{1\le j<k\le n}\frac{z_j^{2\tau}\theta(z_j/z_k)}{\theta(tz_j/z_k)}$$

とおき, $\langle\!\langle \varphi, z\rangle\!\rangle$ を A 型 Jackson 積分の**正則化**と呼ぶ.

$$Z = Z_{s,n} = \{\mu = (\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_s)\in\mathbb{N}^s\,;\,\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s = n\}$$

とおくとき $|Z_{s,n}| = \binom{n+s-1}{n}$ である. $x = (x_1,x_2,\dots,x_s)\in(\mathbb{C}^*)^s$ と $\mu\in Z_{s,n}$ に対して

$$x_\mu = (\underbrace{x_1,x_1t,\dots,x_1t^{\mu_1-1}}_{\mu_1},\underbrace{x_2,x_2t,\dots,x_2t^{\mu_2-1}}_{\mu_2},\dots,\underbrace{x_s,x_st,\dots,x_st^{\mu_s-1}}_{\mu_s})\in(\mathbb{C}^*)^n \tag{1}$$

とする. Jackson 積分表示の差分 de Rham 理論 [2] により, $\langle\!\langle \varphi, z\rangle\!\rangle$ はランク $\binom{n+s-1}{n}$ の q-差分方程式を満たし, その方程式は z によらないことがわかっている. $\langle\!\langle \varphi, x_\mu\rangle\!\rangle$ $(\mu\in Z_{s,n})$ は解空間の基底をなし, $\langle\!\langle \varphi, z\rangle\!\rangle$ をその一次結合で書くことを接続公式と呼ぶ.

定理 1(接続公式). $\varphi(z)$ が $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の正則な対称函数ならば,

$$\langle\!\langle \varphi, z\rangle\!\rangle = \sum_{\lambda\in Z_{s,n}}\langle\!\langle \varphi, x_\lambda\rangle\!\rangle E_\lambda(x;z) \tag{2}$$

が成立. ここで, 接続係数 $E_\lambda(x;z)$ は具体的に次のように与えられる.

$$E_\lambda(x;z) = \sum_{\substack{K_1\sqcup\cdots\sqcup K_s\\=\{1,2,\dots,n\}}}\prod_{i=1}^s\prod_{k\in K_i}\left[\frac{\theta(q^\alpha b_1\cdots b_st^{n-1}z_k\prod_{\substack{1\le l\le s\\ l\ne i}}x_lt^{\lambda_l^{(k-1)}})}{\theta(q^\alpha b_1\cdots b_st^{n-1}\prod_{l=1}^s x_lt^{\lambda_l^{(k-1)}})}\prod_{\substack{1\le j\le s\\ j\ne i}}\frac{\theta(z_k\,x_j^{-1}t^{-\lambda_j^{(k-1)}})}{\theta(x_it^{\lambda_i^{(k-1)}}x_j^{-1}t^{-\lambda_j^{(k-1)}})}\right]. \tag{3}$$

ただし $\lambda_i^{(k)} = |K_i\cap\{1,2,\dots,k\}|$ で, 和は $|K_i| = \lambda_i$ $(i=1,2,\dots,s)$ を満たすような添字集合の分割 $K_1\sqcup\cdots\sqcup K_s = \{1,2,\dots,n\}$ の全体に亘る.

接続公式 (2) は Slater の ${}_r\psi_r$ 変換公式 [4, 式 (5.4.3), p.142] の一般化になっている. また (3) で表される函数 $E_\lambda(x;z)$ を **A 型楕円 Lagrange 補間函数**と呼ぶことにする.

本研究は科研費 [課題番号:(C)25400118 および (B)15H03626] の助成を受けたものである。

例 ($n=1$ の場合). $Z_{s,1}=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_s\}$ である．ただし $\epsilon_i=(0,\dots,0,\overset{i}{\breve{1}},0,\dots,0)$. このとき $E_{\epsilon_i}(x;z)=\dfrac{\theta(q^\alpha b_1\cdots b_s x_1\cdots x_s z/x_i)}{\theta(q^\alpha b_1\cdots b_s x_1\cdots x_s)}\displaystyle\prod_{\substack{1\le j\le s\\ j\ne i}}\dfrac{\theta(z/x_j)}{\theta(x_i/x_j)}$ となる．接続公式 (2) の $z=a_i$ $(i=1,\dots,s)$, $x_j=b_j^{-1}$ $(j=1,\dots,s)$ の場合は [3] に, $\varphi\equiv 1$ の場合は [8] に与えられている．また $\varphi\equiv 1$ の場合の接続公式 (2) は Slater の ${}_r\psi_r$ の変換公式と一致する [7].

例 ($s=1$ の場合). $Z_{1,n}=\{(n)\}$ であり, $x\in\mathbb{C}^*$ に対し, $x_{(n)}=(x,xt,\dots,xt^{n-1})$ である．このとき, 接続公式 (2) は以下のようになる ([5] 参照).

$$\langle\!\langle\varphi,z\rangle\!\rangle=\langle\!\langle\varphi,x_{(n)}\rangle\!\rangle E_{(n)}(x;z),\quad ただし\quad E_{(n)}(x;z)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta(q^\alpha b_1 t^{n-1}z_i)}{\theta(q^\alpha b_1 t^{n-1}xt^{i-1})}. \tag{4}$$

さらに, A 型楕円 Lagrange 補間函数 $E_\lambda(x;z)$ の性質を使うことにより次が導かれる.

定理 2. $B=B_{s,n}=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n\,;\,s-1\ge\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n\ge 0\}$ とする．Schur 函数 $\sigma_\lambda(z)=\det\left(z_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\le i,j\le n}/\Delta(z)$ に対して, 以下が成立する.

$$\begin{aligned}\det\Big(\langle\!\langle\sigma_\lambda,x_\mu\rangle\!\rangle\Big)_{\substack{\lambda\in B\\ \mu\in Z}}&=\{(1-q)(q)_\infty\}^{n\binom{n+s-1}{n}}\\&\times\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{(qt^{-(n-k+1)})_\infty^s}{(qt^{-1})_\infty^s}\frac{\theta(q^\alpha t^{n+k-2}\prod_{l=1}^s x_l b_l)\prod_{i=1}^s\prod_{j=1}^s(qa_i^{-1}b_j^{-1}t^{-(n-k)})_\infty}{(q^\alpha t^{n-k})_\infty(q^{1-\alpha}t^{-(n+k-2)}\prod_{i=1}^s a_i^{-1}b_i^{-1})_\infty}\right]^{\binom{s+k-2}{k-1}}\\&\times\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{r=0}^{n-k}\prod_{1\le i<j\le s}x_i t^r\theta(x_i^{-1}x_j t^{(n-k)-2r})\right]^{\binom{s+k-3}{k-1}}.\end{aligned}\tag{5}$$

例 ($s=1$ の場合 [5]). 上記公式と (4) を組み合わせると

$$\langle\!\langle 1,z\rangle\!\rangle=(1-q)^n(q)_\infty^n\prod_{j=1}^{n}\frac{(qt^{-j})_\infty(qa_1^{-1}b_1^{-1}t^{-(j-1)})_\infty\,\theta(q^\alpha b_1 t^{n-1}z_j)}{(qt^{-1})_\infty(q^\alpha t^{j-1})_\infty(q^{1-\alpha}a_1^{-1}b_1^{-1}t^{-(n+j-2)})_\infty}.$$

この公式は [1] で与えられ, 特に $z=(a_1,a_1t,\dots,a_1t^{n-1})$ のときは, Askey, Habsieger, Kadell, Evans によって与えられた q-Selberg 積分の公式と一致する．$n=1$ の場合は Ramanujan の ${}_1\psi_1$ 和公式 [4, 式 (5.2.1), p.138] と一致することから, (5) は ${}_1\psi_1$ 和公式の拡張となっている。

注. 以上, 定理 1, 定理 2 に対応する BC_n 型 Jackson 積分の場合の結果は [6] を参照のこと.

講演では A 型楕円 Lagrange 補間函数との関係, 接続公式 (2) や上記公式 (5) の証明について触れる予定である.

参考文献

[1] K. Aomoto: On elliptic product formulas for Jackson integrals associated with reduced root systems, J. Algebraic Combin. 8 (1998), 115–126.
[2] K. Aomoto and Y. Kato: A q-analogue of de Rham cohomology associated with Jackson integrals, Special functions (Okayama, 1990), 30–62, ICM-90 Satell. Conf. Proc., Springer, Tokyo, 1991.
[3] K. Aomoto and Y. Kato: Connection formula of symmetric A-type Jackson integrals, Duke Math. J. 74 (1994), 129–143.
[4] G. Gaspar and M. Rahman: *Basic hypergeometric series*, 2nd ed., Cambridge, 2004.
[5] M. Ito and P. J. Forrester: A bilateral extension of the q-Selberg integral, Trans. AMS, to appear.
[6] M. Ito and M. Noumi: A generalization of the Sears–Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type BC_n, arXiv:1506.07267.
[7] M. Ito and Y. Sanada: On the Sears–Slater basic hypergeometric transformations, Ramanujan J. 17 (2008), 245–257.
[8] K. Mimachi: Connection problem in holonomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan–Pochhammer type. Nagoya Math. J. 116 (1989), 149–161.

A型楕円Lagrange補間函数の構成法

伊藤 雅彦 (東京電機大学・未来科学部)
野海 正俊 (神戸大学・理)

A型Jackson積分の接続関係式 [1, 式 (2)] に現れる楕円Lagrange補間函数 $E_\mu(x;z)$ を, $z=(z_1,\dots,z_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ の函数として構成し, その性質を述べる ($\zeta=q^\alpha t^{n-1}b_1\cdots b_s$).

$\zeta\in\mathbb{C}^*$ を固定し, 次の条件 (1), (2) を満たす函数 $f(z)$ の全体を $H_{s,n}$ と書く.

(1) $f(z)$ は $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の対称な正則函数,

(2) $f(z)$ は q シフト $z_i\to qz_i$ に対して次の擬周期性を満たす:

$$T_{q,z_i}f(z)=f(z)/(-z_i)^s\zeta\quad(i=1,2,\dots,n).$$

$H_{s,n}$ の $\mathbb{C}$ 線型空間としての次元は $\binom{s+n-1}{n}$ である.

$$Z=Z_{s,n}=\{\mu=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_s)\in\mathbb{N}^s\,;\,\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s=n\}$$

とするとき $H_{s,n}$ の基底 $E_\lambda(x;z)$ $(\lambda\in Z_{s,n})$ で, 補間函数の性質

$$E_\lambda(x;x_\mu)=\delta_{\lambda\mu}\quad(\lambda,\mu\in Z_{s,n})\tag{1}$$

を満たすものを構成する. x_μ は $x=(x_1,\dots,x_s)\in(\mathbb{C}^*)^s$ に対して次で与えられた点.

$$x_\mu=(\underbrace{x_1,x_1t,\dots,x_1t^{\mu_1-1}}_{\mu_1},\underbrace{x_2,x_2t,\dots,x_2t^{\mu_2-1}}_{\mu_2},\dots,\underbrace{x_s,x_st,\dots,x_st^{\mu_s-1}}_{\mu_s})\in(\mathbb{C}^*)^n$$

以下, $e(u;v)=u\theta(v/u)$ とおく. $e(u;v)=-e(v;u)$, $e(qu;v)=(-v/u)e(u;v)$ が成立.

例 ($n=1$ の場合). $Z_{s,1}=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_s\}$ である. ただし $\epsilon_i=(0,\dots,0,\overset{i}{\breve{1}},0,\dots,0)$. $x=(x_1,\dots,x_s)$ に対し, $x_{\epsilon_i}=x_i\in\mathbb{C}^*$.

$$E_{\epsilon_i}(x;z)=\frac{e(z\,\zeta\prod_{k=1}^s x_k;x_i)}{e(x_i\zeta\prod_{k=1}^s x_k;x_i)}\prod_{\substack{1\le j\le s\\ j\ne i}}\frac{e(z\,;x_j)}{e(x_i;x_j)}\tag{2}$$

とすれば, $E_{\epsilon_i}(x;x_j)=\delta_{ij}$ を満たし, $\{E_{\epsilon_i}(x;z)\,;\,i=1,\dots,s\}$ は $H_{1,n}$ の基底をなす.

●補間函数 $E_\lambda(x;z)$ の構成法

$n\ge2$ の場合には $z=(z_1,\dots,z_n)$ に対して $E_\lambda(x;z)$ $(\lambda\in Z_{s,n})$ を帰納的に

$$E_\lambda(x;z_1,\dots,z_n)=\sum_{1\le k\le s;\,\lambda_k>0}E_{\lambda-\epsilon_k}(x;z_1,\dots.z_{n-1})E_{\epsilon_k}(xt^{\lambda-\epsilon_k};z_n).$$

で定義する. ただし, $xt^\mu=(x_1t^{\mu_1},\dots,x_st^{\mu_s})\in(\mathbb{C}^*)^s$. このとき,

定理 1.(双対 Cauchy 核) 条件 $\zeta\prod_{i=1}^s w_i=1$ のもとで,

$$\Psi(z,w):=\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^s e(z_i,w_j)=\sum_{\mu\in Z_{s,n}}E_\mu(x;z)F_\mu(x;w)\tag{3}$$

が成立. ここで, $x,w\in(\mathbb{C}^*)^s$ に対して

$$F_\mu(x;w):=\Psi(x_\mu;w)=\prod_{i=1}^s\prod_{j=1}^s e(x_i;w_j)_{\mu_i}$$

と定める. ただし, $e(u;v)_r=e(u;v)e(ut;v)\cdots e(ut^{r-1};v)$.

三角性 $w_{(\nu)}:=\big(x_1t^{\nu_1},x_2t^{\nu_2},\dots,x_{s-1}t^{\nu_{s-1}},(\zeta\prod_{k=1}^{s-1}x_kt^{\nu_k})^{-1}\big)\in(\mathbb{C}^*)^s$ のとき, $F_\mu(x;w_{(\nu)})=\prod_{i=1}^s\{e(x_i;(\zeta\prod_{k=1}^{s-1}x_kt^{\nu_k})^{-1})_{\mu_s}\prod_{j=1}^{s-1}e(x_i;x_jt^{\nu_j})_{\mu_i}\}$ となり, 結果的に行列 $\big(F_\mu(a;w_{(\nu)})\big)_{\mu,\nu\in Z}$ は上三角となり, 特に $\det\big(F_\mu(a;w_{(\nu)})\big)_{\mu,\nu\in Z}\ne0$ であることが確かめられる.

本研究は科研費 [課題番号:(C)25400118 および (B)15H03626] の助成を受けたものである。

系. $\zeta\prod_{i=1}^s w_i=1$ 上で $w\in(\mathbb{C}^*)^s$ の正則函数族 $\{F_\mu(x;w)\,;\mu\in Z_{s,n}\}$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立.

系. $\{E_\mu(x;z)\,;\mu\in Z_{s,n}\}$ は $\mathbb{C}$ 線形空間 $H_{s,n}$ の基底となり $E_\lambda(x;x_\mu)=\delta_{\lambda\mu}$.

●補間函数の再帰的関係式

定理 2. $n=p+q$ とする. $z=(z_1,\ldots,z_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ に対して, $z'=(z_1,\ldots,z_p)\in(\mathbb{C}^*)^p$ と $z''=(z_{p+1},\ldots,z_n)\in(\mathbb{C}^*)^q$ とおき, $z=(z',z'')$ と表す. このとき以下が成立する.

$$E_\lambda(x;z)=\sum_{\substack{\mu\in Z_{s,p},\,\nu\in Z_{s,q}\\ \mu+\nu=\lambda}}E_\mu(x;z')E_\nu(xt^\mu;z''). \tag{4}$$

※ (4) の証明には (3) と $F_\mu(x;w)$ の性質 $F_\mu(x;w)F_\nu(xt^\mu;w)=F_{\mu+\nu}(x;w)$ が使われる.

この漸化式 (4) を何度も使うと,

$$E_\lambda(x;z)=\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,s\}^n\\ \epsilon_{i_1}+\cdots+\epsilon_{i_n}=\lambda}}E_{\epsilon_{i_1}}(x;z_1)E_{\epsilon_{i_2}}(xt^{\epsilon_{i_1}};z_2)E_{\epsilon_{i_3}}(xt^{\epsilon_{i_1}+\epsilon_{i_2}};z_3)\cdots E_{\epsilon_{i_n}}(xt^{\epsilon_{i_1}+\cdots+\epsilon_{i_{n-1}}};z_n)$$

が得られるので, 式 (2) により補間函数 $E_\lambda(x;z)$ の**具体的表示**は以下のようになる.

系.

$$E_\lambda(x;z)=\sum_{\substack{K_1\sqcup\cdots\sqcup K_s\\ =\{1,2,\ldots,n\}}}\prod_{i=1}^s\prod_{k\in K_i}\left[\frac{e(z_k\,\zeta\prod_{l=1}^s x_lt^{\lambda_l^{(k-1)}};x_it^{\lambda_i^{(k-1)}})}{e(x_it^{\lambda_i^{(k-1)}}\zeta\prod_{l=1}^s x_lt^{\lambda_l^{(k-1)}};x_it^{\lambda_i^{(k-1)}})}\prod_{\substack{1\le j\le s\\ j\ne i}}\frac{e(z_k;x_jt^{\lambda_j^{(k-1)}})}{e(x_it^{\lambda_i^{(k-1)}};x_jt^{\lambda_j^{(k-1)}})}\right].$$

ただし $\lambda_i^{(k)}=|K_i\cap\{1,2,\ldots,k\}|$ で, 和は $|K_i|=\lambda_i$ $(i=1,2,\ldots,s)$ を満たすような添字集合の分割 $K_1\sqcup\cdots\sqcup K_s=\{1,2,\ldots,n\}$ の全体に亘る.

●二つの補間函数間の変換係数

$x,y\in(\mathbb{C}^*)^s, z\in(\mathbb{C}^*)^n$ に対して, $E_\mu(x;z)$ を $E_\nu(y;z)$ $(\nu\in Z_{s,n})$ によって展開する.

$$E_\mu(x;z)=\sum_{\nu\in Z_{s,n}}c_{\mu\nu}\,E_\nu(y;z).$$

このとき, 式 (1) より直ちに変換係数 $c_{\mu\nu}$ は $c_{\mu\nu}=E_\mu(x;y_\nu)$ と書ける. よって特に

$$E_\mu(x;z_\lambda)=\sum_{\nu\in Z_{s,n}}E_\mu(x;y_\nu)\,E_\nu(y;z_\lambda).$$

これより, 変換係数 $c_{\mu\nu}$ からなる行列 $E(x;y):=\big(E_\mu(x;y_\nu)\big)_{\mu,\nu\in Z_{s,n}}$ に対して次が成立.

定理 3. $x,y,z\in(\mathbb{C}^*)^s$ に対し,

$$E(x;z)=E(x;y)E(y;z),\quad E(x;x)=I,\quad E(y;x)=E(x;y)^{-1}.$$

系. $$\det E(x;y)=\prod_{k=1}^n\left[\frac{\theta(\zeta t^{k-1}\prod_{i=1}^s y_i)}{\theta(\zeta t^{k-1}\prod_{i=1}^s x_i)}\right]^{\binom{s+k-2}{k-1}}\left[\prod_{r=0}^{n-k}\prod_{1\le i<j\le s}\frac{e(y_it^r;y_jt^{(n-k)-r})}{e(x_it^r;x_jt^{(n-k)-r})}\right]^{\binom{s+k-3}{k-1}}.$$

※この行列式は, A 型 Jackson 積分の行列式公式 [1, 式 (5)] を証明する際に使われる.

注. 以上の定理に対応する BC_n 型楕円 Lagrange 補間函数の場合の結果は [2] を参照.

参考文献

[1] 伊藤, 野海: A 型 Jackson 積分と Ramanujan ${}_1\psi_1$ 和公式, Slater ${}_r\psi_r$ 変換公式の一般化, 本アブストラクト集

[2] M. Ito and M. Noumi: A generalization of the Sears–Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type BC_n, arXiv:1506.07267.

A generalization of the q-Chu–Vandermonde sum for basic hypergeometric series

上岡　修平　(京都大学)*

1. q-Chu–Vandermondeの和公式の一般化

Gaussの超幾何級数のq-類似であるq-超幾何級数

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; q, z\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a;q)_i (b;q)_i}{(c;q)_i (q;q)_i} z^i \tag{1} $$

を考える．ただし$(a;q)_i$はq-Pochhammer記号であり

$$ (a;q)_i = \prod_{k=0}^{i-1} (1 - aq^k) \tag{2} $$

$(i \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\})$により定義される．特に$a = q^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$のときq-超幾何級数(1)は(変数zに関して)高々n次の多項式になる．

q-超幾何級数(1)の満たす公式

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, a \\ c \end{matrix}; q, q\right) = \frac{(c/a;q)_n}{(c;q)_n} a^n, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{3} $$

を*q-Chu–Vandermonde* **の和公式**という(例えば[1, 2])．q-Chu–Vandermondeの和公式(3)は, q-二項定理やq-Pfaff–Saalschützの和公式と並んでq-超幾何級数の満たす基本的な和公式のひとつである(例えば[1, 2])．本講演ではq-Chu–Vandermondeの和公式(3)のひとつの一般化として, 次の和公式を紹介する．

定理 1 (K. [3])**.** 任意の$n \in \mathbb{N}$および不定元a, c, $p_1, \dots, p_{n-1}$, $q_1, \dots, q_{n-1}$に対して

$$ \sum_{i=0}^{n} \left\{ \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{\boldsymbol{p}^{\overline{k}}} - a \right) \right\} \sum_{i \geq \nu_i \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq 0} \prod_{k=i}^{n-1} \left(c\boldsymbol{q}^{\overline{k-\nu_k}} - \frac{1}{\boldsymbol{p}^{\overline{\nu_k}}} \right) = \prod_{k=0}^{n-1} (c\boldsymbol{q}^{\overline{k}} - a) \tag{4} $$

が成り立つ．ただし$\boldsymbol{p}^{\overline{k}} = p_1 \cdots p_k$, $\boldsymbol{q}^{\overline{k}} = q_1 \cdots q_k$である．また左辺の第2の和は, 弱い意味で単調減少な$n-i$個の非負整数の列$(\nu_i, \dots, \nu_{n-1})$で$\nu_i \leq i$を満たすもの全てにわたってとる．

和公式(4)は$p_1 = \cdots = p_{n-1} = q_1 = \cdots = q_{n-1} = q$のとき$q$-Chu–Vandermondeの和公式(3)に帰着する．この意味で和公式(4)はq-Chu–Vandermondeの和公式(3)の多パラメータ拡張を与えている．

2. 直交多項式への応用

変数zに関する多項式

$$ \mathcal{L}_n(z; a; p_1, p_2, \dots; q_1, q_2, \dots) = \sum_{i=0}^{n} z^i \left(\prod_{k=i}^{n-1} \boldsymbol{p}^{\overline{k}} \right) \sum_{i \geq \nu_i \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq 0} \prod_{k=i}^{n-1} \left(a\boldsymbol{q}^{\overline{k-\nu_k}} - \frac{1}{\boldsymbol{p}^{\overline{\nu_k}}} \right) \tag{5} $$

* 〒606-8501 京都市左京区吉田本町　京都大学大学院情報学研究科
e-mail: kamioka.shuhei.3w@kyoto-u.ac.jp

$(n \in \mathbb{N})$ を考える．多項式 (5) は $p_1 = p_2 = \cdots = q_1 = q_2 = \cdots = q$ のとき古典直交多項式のひとつである *little q-Laguerre (Wall)* **多項式** (例えば [4])

$$L_n(z; a/q; q) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} (a; q)_n \, {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, 0 \\ a \end{matrix} ; q, zq \right) \tag{6}$$

に帰着する．この意味で多項式 (5) は little q-Laguerre 多項式の多パラメータ拡張を与えている．little q-Laguerre 多項式の持つ直交性は次のように拡張される．

定理 2 (K. [3])**.** 多項式 (5) は

$$\langle \mathcal{L}_n(z; a; p_1, p_2, \ldots; q_1, q_2, \ldots), z^j \rangle = \delta_{n,j} \times a^n \prod_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}^{\overline{k}} (\boldsymbol{q}^{\overline{k}} - \boldsymbol{q}^{\overline{n}}) \tag{7}$$

を満たす．ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は

$$\langle z^i, z^j \rangle = \prod_{k=0}^{i-1} (1 - a \boldsymbol{p}^{\overline{k}} \boldsymbol{q}^{\overline{j}}), \qquad i, j \in \mathbb{N} \tag{8}$$

により定まる (非対称な) 双線形形式であり，$\delta_{n,j}$ は Kronecker のデルタである．

直交関係式 (7) は和公式 (4) を用いて証明することができる．これは little q-Laguerre 多項式 (6) の持つ直交性を q-超幾何級数に関する q-Chu–Vandermonde の和公式 (3) を用いて示すのと同じである．

定理 *2* の証明．(5) と (8) より (7) の左辺は

$$\left(\prod_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}^{\overline{k}} \right) \sum_{i=0}^{n} \left\{ \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{\boldsymbol{p}^{\overline{k}}} - a \boldsymbol{q}^{\overline{j}} \right) \right\} \sum_{i \geq \nu_i \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq 0} \prod_{k=i}^{n-1} \left(a \boldsymbol{q}^{\overline{k - \nu_k}} - \frac{1}{\boldsymbol{p}^{\overline{\nu_k}}} \right) \tag{9}$$

に等しい．和 $\sum_{i=0}^{n} \cdots$ に和公式 (4) を適用すれば直交関係式 (7) の右辺が得られる． □

多項式 (5) の 2 パラメータ変形として

$$\mathcal{L}_n^{(s,t)}(z; a; \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \mathcal{L}(z; a \boldsymbol{p}^{\overline{s}} \boldsymbol{q}^{\overline{t}}; p_{s+1}, p_{s+2}, \ldots; q_{t+1}, q_{t+2}, \ldots), \qquad s, t \in \mathbb{N} \tag{10}$$

を導入するとき多項式 (5) と**離散** *2* **次元戸田分子**との関係が明らかになる．これについては講演中に説明する．

参考文献

[1] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 96, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] M. E. H. Ismail, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[3] S. Kamioka, *Plane partitions with bounded size of parts and biorthogonal polynomials*, arXiv:1508.01674.

[4] R. Koekoek, P. A. Lesky, and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

Pseudo Wilson polynomials

渋川 元樹 (阪大情報)*

概 要

有限個の Jacobi 多項式からなる直交多項式系の Jacobi 変換を考えることで,
新たな有限個の直交多項式系とその諸性質を導出する.

Gauss の超幾何函数で定義される Jacobi 多項式

$$P_m^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(\alpha+1)_m}{m!} {}_2F_1\left(\begin{matrix}-m, m+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{matrix}; \frac{1-x}{2}\right)$$

について, $\alpha, \beta > -1$ に対して, 以下の直交関係式が成立することが知られている.

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!} \delta_{mn}.\end{aligned} \tag{1}$$

これとは別に, 自然数 N を fix したとき, $\alpha+\beta < -2N-1, \beta > -1, m, n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\int_{1}^{\infty} (x+1)^\alpha (x-1)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(-x) P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)\, dx \\ &= -\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(-n-\alpha-\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(-n-\alpha)n!} \delta_{mn}.\end{aligned} \tag{2}$$

という有限個の Jacobi 多項式からなる直交系も知られている ([1] 参照).

他方, 既知の直交系を Fourier 変換や Mellin 変換といった unitary 変換で写して新たな直交系を得るという研究も古くから知られている. Koornwinder は, Fourier-cosine 変換や Mehler-Fock 変換を特殊な場合として含む Jacobi 変換

$$\begin{aligned}J_{\alpha,\beta}(f)(\lambda) &:= \int_0^\infty f(t) \phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) \Delta_{\alpha,\beta}(t)\, dt, \\ \phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) &:= {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1+i\lambda), \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1-i\lambda)\\ \alpha+1\end{matrix}; -\mathrm{sh}^2 t\right), \\ \Delta_{\alpha,\beta}(t) &:= (2\mathrm{sh} t)^{2\alpha+1} (2\mathrm{ch} t)^{2\beta+1},\end{aligned}$$

および $f \in L^2(\mathbb{R}, \Delta_{\alpha,\beta}(t)\, dt), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, |\beta| \le \alpha+1$ に対して成立する Plancherel の定理

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f(t)|^2 \Delta_{\alpha,\beta}(t)\, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |J_{\alpha,\beta}(f)(\lambda)|^2 |c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^{-2}\, d\lambda, \\ c_{\alpha,\beta}(\lambda) &:= \frac{2^{\alpha+\beta+1-i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(i\lambda+\alpha+\beta+1)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(i\lambda+\alpha-\beta+1)\right)},\end{aligned}$$

キーワード：直交多項式, Askey スキーム, Jacobi 多項式, Jacobi 変換
* 〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山 1-1 大阪大学大学院情報科学研究科
e-mail: g-shibukawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

を用いて, Jacobi 多項式 (の直交関係式 (1)) から一般超幾何函数 ${}_4F_3$ で定まる Wilson 多項式

$$\frac{W_m(\lambda^2;a,b,c,d)}{(a+b)_m(a+c)_m(a+d)_m} := {}_4F_3\left(\begin{matrix} -m, -m+a+b+c+d-1, a+i\lambda, a-i\lambda \\ a+b, a+c, a+d \end{matrix}; 1\right)$$

およびその直交関係式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left|\frac{\Gamma(a+i\lambda)\Gamma(b+i\lambda)\Gamma(c+i\lambda)\Gamma(d+i\lambda)}{\Gamma(2i\lambda)}\right|^2 W_m(\lambda^2;a,b,c,d)\overline{W_n(\lambda^2;a,b,c,d)}\,d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(m+a+b)\Gamma(m+a+c)\Gamma(m+a+d)\Gamma(m+b+c)\Gamma(m+b+d)\Gamma(m+c+d)}{\Gamma(2m+a+b+c+d)} \\ &\quad \cdot (m+a+b+c+d-1)_m m!\delta_{mn}, \quad \mathrm{Re}\,(a,b,c,d) > 0, \end{aligned}$$

等の諸性質が得られることを示した [2],[3].

今回の発表では, 有限個の Jacobi 多項式からなる直交多項式系 (2) についても同様の計算を行い, 以下の ${}_4F_3$ から定まる有限個の直交系が得られること及びその退化や差分関係式等の諸性質を報告する.

定義 1. $\alpha-\delta<-1, \delta<1, |\beta|<\alpha+1$ に対し,

$$a := \frac{-\alpha+\delta+i\mu}{2}, b := \frac{-\alpha+\delta-i\mu}{2}, c := \frac{\alpha+\beta}{2}, d := \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

とおく. 自然数 N を fix して,

$$\begin{aligned} &PW_m(\lambda^2;a,b,c,d) \\ :=&\frac{(a+i\lambda)_{N-m}(a-i\lambda)_{N-m}}{\Gamma(a+c-m)\Gamma(a+d-m)}\frac{(-2N+m-a-b)_m}{m!} \\ &\cdot {}_4F_3\left(\begin{matrix} -m, -m+a+b+c+d, a+N-m+i\lambda, a+N-m-i\lambda \\ a+b+1+2N-2m, a+c-m, a+d-m \end{matrix}; 1\right). \end{aligned}$$

とする.

定理 2. $m,n \in \{0,1,\ldots,N\}$ について

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty PW_m(\lambda^2;a,b,c,d)\overline{PW_n(\lambda^2;a,b,c,d)} \\ &\cdot \left|\frac{\Gamma(a+i\lambda)\Gamma(b+i\lambda)\Gamma(c-N+i\lambda)\Gamma(d-N+i\lambda)}{\Gamma(2i\lambda)}\right|^2 d\lambda \\ &= -\frac{\Gamma(1+2N-m+a+b)\Gamma(m-2N-a-b)}{(2(N-m)+a+b)\Gamma(-m+a+b+c+d)m!}\delta_{mn}. \end{aligned}$$

参考文献

[1] R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer (2010).

[2] T. H. Koornwinder, *Special orthogonal polynomial systems mapped onto each other by the Fourier-Jacobi transform*, Orthogonal polynomials and applications, (1984), 174–183, LNM **1171**.

[3] T. H. Koornwinder, *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups*, Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications, (1984), 1–85, Math. Appl., Reidel, Dordrecht.

パデ法と q 差分ガルニエ系

長尾秀人（明石工業高等専門学校・一般科目）
山田泰彦（神戸大学大学院・理学研究科）

パデ近似を応用して， q 差分ガルニエ系に対する，時間発展方程式，ラックス形式および超幾何関数型特殊解の行列式表示を構成した．本講演では，その結果について報告する．

1. パデ法

パデ法とは，適当な特殊多項式の母関数 $Y(x)$ を与え, パデ近似の問題

$$Y(x) \equiv \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \ \ (mod \ \ x^{m+n+1}) \tag{1}$$

を設定して，$y(x) = P_m(x), Y(x)Q_n(x)$ を解に持つ 2 種類の 3 項間線形差分方程式

$$L_2(x) := \begin{vmatrix} y(x) & y(qx) & \overline{y}(x) \\ u(x) & u(qx) & \overline{u}(x) \\ v(x) & v(qx) & \overline{v}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad L_3(x) := \begin{vmatrix} y(x) & \overline{y}(x) & \overline{y}(x/q) \\ u(x) & \overline{u}(x) & \overline{u}(x/q) \\ v(x) & \overline{v}(x) & \overline{v}(x/q) \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

(ここで, $u(x) = P_m(x), \quad v(x) = Y(x)Q_n(x)$ とし，時間発展 $\overline{\bigcirc} = T(\bigcirc)$ と記す.) を構成して, パンルヴェ方程式, ラックス形式, 特殊解の 3 つを同時に求める方法である．パデ法の先行結果として，パンルヴェ方程式 VI，V，IV 型およびガルニエ系 [5] があり，離散パンルヴェ方程式では,

e-$E_8^{(1)}$	q-$E_8^{(1)}$	q-$E_7^{(1)}$	q-$E_6^{(1)}$	q-$D_5^{(1)}$	q-$A_4^{(1)}$	q-$(A_2+A_1)^{(1)}$
[4]	[6]	[2]	[1][2][3]	[1][2][3]	[2][3]	[2]

が知られている．

2. q-ガルニエ系の場合

- 母関数

$$Y(x) = \prod_{i=1}^{N+1} \frac{(a_i x)_\infty}{(b_i x)_\infty} \tag{3}$$

を与え，差分的時間発展を $T : (a_1, b_1) \mapsto (qa_1, qb_1)$ とし，パデ問題 (1) を設定する．ここで，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i)_j = \prod_{k=0}^{j-1}(1-\alpha_1 q^k)(1-\alpha_2 q^k)\cdots(1-\alpha_i q^k)$ とする．

- $y(x) = P_m(x), Y(x)Q_n(x)$ を解に持つ 2 種類の線形差分方程式 (2) を計算すると,

$$\begin{aligned} L_2(x) &= A_1(x)y(qx) - (x/b_1)_1 G(x)y(x) - (1-g_0)F(x)\overline{y}(x) = 0, \\ L_3(x) &= B_1(x/q)\overline{y}(x/q) - r(x/a_1)_1 G(x/q)\overline{y}(x) - (1-rg_0)\overline{F}(x/q)y(x) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

が得られる．ここで，

$$
\begin{aligned}
&A_i(x) = \frac{A(x)}{(a_i x)_1}, \quad A(x) = \prod_{i=1}^{N+1} (a_i x)_1, \quad B_i(x) = \frac{B(x)}{(b_i x)_1}, \quad B(x) = \prod_{i=1}^{N+1} (b_i x)_1, \\
&F(x) = 1 + \sum_{i=1}^{N} f_i x^i, \quad G(x) = \sum_{i=0}^{N-1} g_i x^i,
\end{aligned} \tag{5}
$$

$r = q^{-(m+n+1)}$ とし，$f_1 \ldots, f_N, g_0, \ldots, g_{N-1}$ は x に依存しない変数である．

- L_2, L_3 (4) の両立条件を考えると，$2N$ 変数 f_i, g_{i-1} $(i = 1, \ldots, N)$ に対する次の非線形差分方程式 (差分的時間発展方程式) が得られる．

$$
\begin{aligned}
&A_1(x) B_1(x) - r(a_1 x, b_1 x)_1 G(x) \underline{G}(x) = 0 \quad \text{for} \quad F(x) = 0, \\
&r A_1(x) B_1(x) - (1 - g_0)(1 - r g_0) F(x) \overline{F}(x) = 0 \quad \text{for} \quad G(x) = 0, \\
&f_N \overline{f}_N = \frac{(q r a_1 g_{N-1} - \prod_{i=2}^{N+1}(-b_i)/s)(b_1 g_{N-1} - s \prod_{i=2}^{N+1}(-a_i))}{(1 - g_0)(1 - r g_0)},
\end{aligned} \tag{6}
$$

ここで，$s = q^m$ である．これは q-ガルニエ方程式 [7] と等価である．

- (6) の自励化は，超楕円曲線に対する QRT 系の拡張と見なせる．

- (4) から，$y(x/q), y(x), y(qx)$ の 3 項間線形差分方程式 $L_1(x)$ が得られ，ラックス形式 $L_1(x), L_2(x)$ が構成される．

- $Y(x)$ は q-アペル・ロリチェラの多変数超幾何関数 [8] の母関数であり，対応する特殊解は，q-アペル・ロリチェラの多変数超幾何関数を要素とする行列式として構成される．

参考文献

[1] Ikawa Y., *Hypergeometric Solutions for the q-Painlevé Equation of Type* $E_6^{(1)}$ *by the Padé method*, Lett. Math. Phys., Volume **103**, Issue 7 (2013), 743–763.

[2] Nagao, H., *The Padé interpolation method applied to q-Painlevé equations*, Lett. Math. Phys. **105** (2015), no. 4, 503–521.

[3] Nagao, H., *The Padé interpolation method applied to q-Painlevé equations II (differential grid version)*, arXiv:1509.05892 .

[4] Noumi M., Tsujimoto S., and Yamada Y., *Padé interpolation for elliptic Painlevé equation*, Symmetries, integrable systems and representations, Springer Proc. Math. Stat., Volume **40** (2013), 463–482.

[5] Yamada Y., *Padé method to Painlevé equations*, Funkcial. Ekvac., **52** (2009), 83–92.

[6] Yamada Y., *A simple expression for discrete Painlevé equations*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B47** (2014), 087–095.

[7] Sakai H., *A q-analog of the Garnier system*, Funkcialaj Ekvacioj **48** (2005), 273–297.

[8] Sakai H., *Hypergeometric Solution of q-Schlesinger System of Rank Two*, Lett. Math. Phys. **73** (2005), 237–247.

q-超幾何関数 ${}_3\phi_2$ を解に持つ 4 階 q-パンルヴェ方程式

鈴木 貴雄　(近畿大学理工学部)*

1. はじめに

講演者は 2012 年春の学会において, 次の高階 q パンルヴェ方程式 q-$P_{(n,n)}$ を導入した:

$$\begin{cases} x_i(t) - x_{i-1}(t) = \dfrac{a_i x_i(qt)}{1 + x_i(qt)y_{i-1}(t)} - \dfrac{b_{i-1}x_{i-1}(qt)}{1 + x_{i-1}(qt)y_{i-1}(t)} \\ y_i(qt) - y_{i-1}(qt) = \dfrac{b_i y_i(t)}{1 + x_i(qt)y_i(t)} - \dfrac{a_i y_{i-1}(t)}{1 + x_i(qt)y_{i-1}(t)} \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ただし

$$b_0 = \frac{b_n}{q}, \quad x_0(t) = tx_n(t), \quad y_0(t) = \frac{y_n(t)}{qt}, \quad \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i^{1/2}}{b_i^{1/2}} \frac{1 + x_i(qt)y_i(t)}{1 + x_i(qt)y_{i-1}(t)} = \frac{1}{q^{1/4}}.$$

q-$P_{(n,n)}$ は $A^{(1)}_{2n-1}$ 型拡大アフィン・ワイル群対称性を持ち, また q-超幾何関数 ${}_n\phi_{n-1}$ によって記述される特殊解を持つ [2]. そして, 神保・坂井の q-$P_{\rm VI}$ [1] の高階化とみなすことが出来る.

事実 1.1 ([2])**.** q-$P_{(2,2)}$ の下で 2 つの従属変数を

$$x(t) = \frac{t(x_2(t) - x_1(t))\xi_1(t)}{\xi_2(t)}, \quad y(t) = \frac{x_2(qt)(qt + x_1(qt)y_2(t))\psi_1(t)}{(1 + x_2(qt)y_2(t))\psi_2(t)},$$

ただし

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= qtx_1(t)y_1(t) - x_1(t)y_2(t) - qtx_2(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t) - (b_1 - a_1)qt, \\ \xi_2(t) &= (tx_2(t) - x_1(t))(x_2(t) - x_1(t))(y_2(t) - qty_1(t)) \\ &\quad + (b_1 - a_1)qtx_1(t) + \{(a_2 - b_1)t - (a_2 - a_1)\}qtx_2(t), \\ \psi_1(t) &= (1 - a_1b_1q^{1/2}t)x_2(qt)y_2(t) + qt - a_1b_1q^{1/2}t, \\ \psi_2(t) &= a_2(1 - a_1b_1q^{1/2}t)x_1(qt)x_2(qt)y_2(t) \\ &\quad + a_1(qt - a_2b_1q^{1/2}t)x_1(qt) + (a_2 - a_1)qtx_2(qt), \end{aligned}$$

と定義すると, これらは q-$P_{\rm VI}$ を満たす.

　一般に, q-$P_{(n,n)}$ は $2n$ 階の差分方程式系であることが期待されるが, 2012 年春の時点で得られていた方程式系は上に記したように $2n+1$ 階であり, 一般の $n \geq 3$ に対して $2n$ 個の良い従属変数を定めることは, 上の事実を見ても分かるように困難であった. そして今回, $n = 3$ の場合に q-$P_{\rm VI}$ に似た形の 4 階差分方程式系を得ることが出来たので, その結果を報告する.

本研究は科研費 (課題番号:15K04911) の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 34M55, 39A13
* 〒577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学理工学部
e-mail: suzuki@math.kindai.ac.jp

2. 4階q-パンルヴェ方程式 q-$P_{(3,3)}$ の新しい表記

以下では, $\bar{f}=f|_{t\to t/q}$ という表記を用いる.

定理 2.1. q-$P_{(3,3)}$ の下で4つの従属変数を

$$
\begin{aligned}
&x=-\frac{t(x_2(t)-x_1(t))}{x_1(t)-tx_3(t)}, \quad x'=-\frac{t(x_3(t)-x_2(t))}{x_1(t)-tx_3(t)},\\
&y=\frac{a_2qtx_2(qt)(1+x_1(qt)y_1(t))}{x_1(qt)(1+x_2(qt)y_1(t))}, \quad y'=\frac{a_3qtx_3(qt)(1+x_2(qt)y_2(t))}{x_2(qt)(1+x_3(qt)y_2(t))},
\end{aligned}
$$

と定義すると, これらは次の差分方程式系を満たす.

$$
\begin{aligned}
x\bar{x}&=\frac{qt(x+tx'-t)(\bar{y}-ta_2)(\bar{y}-tb_1)\bar{y}'}{(x+x'-t)(a_1\bar{y}\bar{y}'-qt)(b_3\bar{y}\bar{y}'-q^2t)},\\
x'\bar{x}'&=\frac{q(x+tx'-t)\bar{y}(\bar{y}'-ta_3)(\bar{y}'-tb_2)}{(x+x'-1)(a_1\bar{y}\bar{y}'-qt)(b_3\bar{y}\bar{y}'-q^2t)},\\
y\bar{y}&=\frac{q^3(x+tx'-t)(yy'x+q^2t^2a_2b_1x'-a_2a_3b_1b_2t^2y)}{(x+x'-1)(a_1a_3b_2b_3yy'x+q^4tx'-a_3b_2q^2ty)},\\
y'\bar{y}'&=\frac{qt^2(x+x'-t)(a_1a_3b_2b_3yy'x+q^4tx'-a_3b_2q^2ty)}{(x+tx'-t)(a_1b_3yy'x+a_1a_2b_1b_3q^2t^2x'-ty)}.
\end{aligned}
$$

この差分方程式系は q-P_{VI} を含む. もう少し詳しく述べると, $x'=0, b_2=a_3$ という条件を課すと $y'=b_2qt$ が得られ, このとき残りの従属変数 x,y の満たす差分方程式は q-P_{VI} そのものとなる.

参考文献

[1] M. Jimbo and H. Sakai, A q-analog of the sixth Painlevé equation, Let. Math. Phys. **38** (1996) 145-154.

[2] T. Suzuki, A q-analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q-Painlevé system, AMS Contemp. Math. **651** (2015) 25-38.

大久保型方程式を保つ畳み込みの解析

近内　翔太郎　(神戸大学・理)*

概　要

大久保型方程式に対して, 結果が再び大久保型方程式となるような middle convolution のクラスを考察し, その具体的な構成法と応用について述べる。

Schlesinger 型常微分方程式 $\frac{d}{dx}Y = \sum_{k=1}^{r} \frac{A_k}{x-t_k} Y$ $(A_k \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}))$ の留数行列の組を $\boldsymbol{A} = (A_1, \dots, A_r)$ で表す。r 個のパラメータの組 $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して,

$$\mathrm{add}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{A}) = (A_1 + a_1, \dots, A_r + a_r) \tag{1}$$

を $\boldsymbol{A}$ の addition と呼ぶ。$\boldsymbol{A}$ の middle convolution は次のように 3 段階で定義される。

第 1 段階 (畳込み). Schlesinger 型方程式の留数行列の組 $\boldsymbol{A}$ に対し, $nr \times nr$ 行列の組

$$\boldsymbol{B} = (B_1, \dots, B_r); \quad B_k = \begin{pmatrix} & & O & & \\ A_1 & \cdots & A_k + \mu & \cdots & A_r \\ & & O & & \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, r) \tag{2}$$

と Schlesinger 型方程式 $\frac{d}{dx}Z = \sum_{k=1}^{r} \frac{B_k}{x-t_k} Z$ を対応させる操作を $\mathrm{c}_\mu(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$ で表し, $\boldsymbol{A}$ の畳込みと呼ぶ。

第 2 段階 (K 簡約). 留数行列 A_k $(k = 1, \dots, r)$ の階数を n_k とする. 各 A_k を

$$A_k = P_k Q_k; \quad P_k \in \mathrm{Mat}(n, n_k; \mathbb{C}),\ Q_k \in \mathrm{Mat}(n_k, n; \mathbb{C}) \tag{3}$$

と分解し, ブロック行列 Q を

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_r \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(\widetilde{n}, nr; \mathbb{C}) \quad (\widetilde{n} = \sum_{k=1}^{r} n_k) \tag{4}$$

で定義すると, $QB_k = \widetilde{B}_k Q$ を満たす $\widetilde{B}_k \in \mathrm{Mat}(\widetilde{n}; \mathbb{C})$ が一意に定まる. この $\widetilde{\boldsymbol{B}} = (\widetilde{B}_1, \dots, \widetilde{B}_r)$ と Schlesinger 型方程式 $\frac{d}{dx}\widetilde{Z} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\widetilde{B}_k}{x-t_k} \widetilde{Z}$ を $\boldsymbol{B}$ の K 簡約と呼ぶ。

第 3 段階 (L 簡約). $\widetilde{B} = \sum_{k=1}^{r} \widetilde{B}_k$ の階数を $\widehat{n}$ とする. これを 2 つの行列の積

$$\widetilde{B} = P_0 Q_0; \quad P_0 \in \mathrm{Mat}(\widetilde{n}, \widehat{n}; \mathbb{C}),\ Q_0 \in \mathrm{Mat}(\widehat{n}, \widetilde{n}; \mathbb{C}) \tag{5}$$

に分解する。このとき $Q_0 \widetilde{B}_k = \widehat{B}_k Q_0$ $(k = 1, \dots, r)$ を満たす行列の組 $\widehat{\boldsymbol{B}} = (\widehat{B}_1, \dots, \widehat{B}_r)$ と Schlesinger 型方程式 $\frac{d}{dx}\widehat{Z} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\widehat{B}_k}{x-t_k} \widehat{Z}$ が一意に定まる。この一連の操作を $\mathrm{mc}_\mu(\boldsymbol{A}) = \widehat{\boldsymbol{B}}$ で表し, $\boldsymbol{A}$ の middle convolution と呼ぶ。

以下では $\boldsymbol{A}$ に対応する Schlesinger 型方程式は, 型 $(n_1, \dots, n_r)$ の大久保型方程式であって, ブロック行列 $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{r}$ を用いて

$$(x - T)\frac{d}{dx}Y = AY; \qquad T = \mathrm{diag}(t_1 I_{n_1}, \dots, t_r I_{n_r}) \tag{6}$$

と表される場合を考える。このとき次の定理が成立する。

*e-mail: `konnai@math.kobe-u.ac..jp`

定理 1. 大久保型方程式 $(x-T)\frac{d}{dx}Y = AY$ において, 1個の添字 $k \in \{1,\dots,r\}$ を選び, $\mathrm{Ker}(A_{kk}+c)=0$, $\mathrm{Ker}(A_{kk}-\rho)=0$ と仮定する。このとき

$$\boldsymbol{A}^{mc} = \mathrm{add}_{(0,\dots,\rho,\dots,0)} \circ \mathrm{mc}_{-\rho-c} \circ \mathrm{add}_{(0,\dots,c,\dots,0)}(\boldsymbol{A}) = (A_1^{mc},\dots,A_r^{mc}) \tag{7}$$

は, 次の行列 A^{mc} の定める大久保型方程式 $(x-T)\frac{d}{dx}W = A^{mc}W$ と同値である。

$$A^{mc} = \begin{pmatrix} & & & A_{1k}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} & (\rho+c)\xi_1 & & & \\ & A_{ij}-(\rho+c)\delta_{ij} & & \vdots & \vdots & & A_{ij} & \\ & & & A_{k-1,k}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} & (\rho+c)\xi_{k-1} & & & \\ A_{k1} & \dots & A_{k,k-1} & A_{kk} & 0 & A_{k,k+1} & \dots & A_{kr} \\ \eta_1 & \dots & \eta_{k-1} & 0 & \rho & \eta_{k+1} & \dots & \eta_r \\ & & & A_{k+1,k}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} & (\rho+c)\xi_{k+1} & & & \\ & A_{ij} & & \vdots & \vdots & & A_{ij}-(\rho+c)\delta_{ij} & \\ & & & A_{rk}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} & (\rho+c)\xi_r & & & \end{pmatrix}$$

ここで $\xi_i \in \mathrm{Mat}(n_i, n_k; \mathbb{C})$, $\eta_j \in \mathrm{Mat}(n_k, n_j; \mathbb{C})$ は次の関係式を満たすものとする。

$$\xi_i\eta_j = A_{ij} - \rho - A_{ik}(A_{kk}-\rho)^{-1}A_{kj} \quad (i,j=1,\dots,r, i,j \neq k) \tag{8}$$

この定理は方程式に対するものであるが, 類似の定理がモノドロミー行列のレベルでも成立し, 解の基本行列の接続係数の追跡に応用することができる。講演ではそれらについても述べる。

例. n 階の一般超幾何微分方程式 $(x-T)\frac{d}{dx}Y = A^{(n)}Y$ は, middle convolution

$$\boldsymbol{A}^{(n)} = \mathrm{add}_{(\rho,0)} \circ \mathrm{mc}_{-\rho-c} \circ \mathrm{add}_{(c,0)}(\boldsymbol{A}^{(n-1)}) \tag{9}$$

によって, 帰納的に構成することが出来る。上記の定理を繰り返し用いて, パラメータを適当に置き換えると, $A^{(n)}$ が

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha_{n-1} & 1 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}; \quad a_{nj} = -\frac{\prod_{k=1}^{n}(\rho_k-\alpha_j)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{n-1}(\alpha_k-\alpha_j)} \quad (j=1,\dots,n-1) \tag{10}$$

と表示されることが示される。ここで $\rho_1,\dots,\rho_n$ は, $A^{(n)}$ の固有値を表す。

参考文献

[1] N.M. Katz: *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University Press, Princeton, 1996.

[2] K. Okubo: *On the Group of Fuchsian Equations*, Seminar Reports of Tokyo Metropolitan University, 1987.

[3] M. Dettweiler and S. Reitter: Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, J. Algebra **318** (2007), 1–24.

[4] S. Konnai. Connection coefficients and monodromy representations for a class of Okubo systems of ordinary differential equations (in preparation)

Stokes現象と絡み目について

廣恵 一希 (城西大学)*

代数的な線形常微分方程式の分岐不確定特異点と平面代数曲線の芽の特異点の類似性について考える．例えば微分方程式の局所 Fourier 変換と代数曲線のブローアップの類似性，また微分方程式の特異点の小松-Malgrange 不確定度と平面曲線の特異点の Milnor 数や交叉数の類似性などが既に報告されている（例えば [1]）．本講演では平面代数曲線の特異点の絡み目構造の類似として，分岐不確定特異点を持つ微分方程式に付随した絡み目を定義する．そして微分方程式の不変量と絡み目不変量との対応を与え，さらに分岐不確定特異点を持つ微分方程式のモノドロミー保存変形が対応する絡み目のイソトピーを引き起こすことを説明する．これは代数曲線の同特異性 (equisingularity) が対応する絡み目のイソトピーを引き起こす事実の類似と思える．さらにモノドロミー保存変形によって動く Stokes 因子たちの間の関係式と組み紐関係式の相関にも触れたい．

参考文献

[1] K. Hiroe, “Local Fourier transform and blowing up”, preprint, arXiv:1406.5788.

本研究は科研費 (課題番号:26800072) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14H20, 14H50, 34M25, 34M35, 34M40
キーワード：Stokes phenomenon, link invariants
* 〒350-0295 埼玉県坂戸市けやき台 1-1 城西大学 理学部数学科
e-mail: kazuki@josai.ac.jp
web: http://researchmap.jp/kazukiadvb/

KZ方程式に付随したモノドロミー保存変形の正則解について

上野 喜三雄 (早稲田大学 理工学術院)*

モジュライ空間 $\mathcal{M}_{0,6}$ 上のKZ方程式を，その上の立方体座標 (z, w_1, w_2) で表示したものを3変数KZ方程式と呼び，これを3KZと表記する．3KZにおいて，z を主変数，$w = (w_1, w_2)$ をパラメータとみなして，つぎの方程式系（3KZに付随したモノドロミー保存変形）を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial z} = \left(\dfrac{X}{z} + \dfrac{Y}{1-z} + \dfrac{w_1 Z^{(1)}}{1-zw_1} + \dfrac{w_1 w_2 Z^{(3)}}{1-zw_1w_2}\right) L \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial w_1} = \left(\dfrac{X_0^{(1)}}{w_1} + \dfrac{Y_0^{(1)}}{1-w_1} + \dfrac{zZ^{(1)}}{1-zw_1} + \dfrac{w_1 Z_0^{(2)}}{1-w_1w_2} + \dfrac{zw_2 Z^{(3)}}{1-zw_1w_2}\right) L \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial w_2} = \left(\dfrac{X_0^{(2)}}{w_2} + \dfrac{Y_0^{(2)}}{1-w_2} + \dfrac{w_2 Z_0^{(2)}}{1-w_1w_2} + \dfrac{zw_1 Z^{(3)}}{1-zw_1w_2}\right) L \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$X_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, $Z_0^{(2)}$ は定数行列であり，$X = X(w)$, $Y = Y(w)$, $Z^{(1)} = Z^{(1)}(w)$, $Z^{(3)} = Z^{(3)}(w)$ は w の関数を成分とする行列である．この方程式系を3MPDと表記する．定数行列 $X_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, $Z_0^{(2)}$ に応じて3MPDが決まるものと考える．ただし，定数行列 $X_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, $Z_0^{(2)}$ はつぎの条件をみたしているとする．

$$\begin{cases} \left[X_0^{(1)}, X_0^{(2)}\right] = \left[X_0^{(1)}, Y_0^{(2)}\right] = \left[X_0^{(2)}, Y_0^{(1)}\right] = 0, \\ \left[Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}\right] = -\left[Y_0^{(1)}, Z_0^{(2)}\right] = \left[Y_0^{(2)}, Z_0^{(2)}\right] = -\left[X_0^{(1)} - X_0^{(2)}, Z_0^{(2)}\right]. \end{cases} \tag{2}$$

その上で，3MPDの可積分条件をみることにより次の非線形方程式系が得られるが，これを変形方程式2DEと表記することにしよう．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial w_1} = \left[\dfrac{X_0^{(1)}}{w_1} + \dfrac{Y_0^{(1)}}{1-w_1} + \dfrac{w_2 Z_0^{(2)}}{1-w_1w_2}, X\right], \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial w_1} = \left[\dfrac{X_0^{(1)}}{w_1} + \dfrac{Y_0^{(1)} + Z^{(1)}}{1-w_1} + \dfrac{w_2(Z_0^{(2)} + Z^{(3)})}{1-w_1w_2}, Y\right], \\[2ex] \dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial w_1} = \left[\dfrac{X_0^{(1)} - X + Y}{w_1} + \dfrac{Y_0^{(1)} + Y}{1-w_1} + \dfrac{w_2 Z_0^{(2)}}{1-w_1w_2}, Z^{(1)}\right], \\[2ex] \dfrac{\partial Z^{(3)}}{\partial w_1} = \left[\dfrac{X_0^{(1)} - X + Y}{w_1} + \dfrac{Y_0^{(1)}}{1-w_1} + \dfrac{w_2(Y + Z_0^{(2)})}{1-w_1w_2}, Z^{(3)}\right]. \end{cases} \tag{3}$$

本研究は科研費 (課題番号:25400054) の助成を受けたものである．

*e-mail: `uenoki@waseda.jp`

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial X}{\partial w_2} = \left[\dfrac{X_0^{(2)}}{w_2} + \dfrac{Y_0^{(2)}}{1-w_2} + \dfrac{w_1 Z_0^{(2)}}{1-w_1 w_2}, X\right], \\[2ex]
\dfrac{\partial Y}{\partial w_2} = \left[\dfrac{X_0^{(2)}}{w_2} + \dfrac{Y_0^{(2)}}{1-w_2} + \dfrac{w_1 (Z_0^{(2)} + Z^{(3)})}{1-w_1 w_2}, Y\right], \\[2ex]
\dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial w_2} = \left[\dfrac{X_0^{(2)}}{w_2} + \dfrac{Y_0^{(2)} + Z^{(3)}}{1-w_2} + \dfrac{w_1 Z_0^{(2)}}{1-w_1 w_2}, Z^{(1)}\right], \\[2ex]
\dfrac{\partial Z^{(3)}}{\partial w_2} = \left[\dfrac{X_0^{(2)} - X + Y + Z^{(1)}}{w_2} + \dfrac{Y_0^{(2)} + Z^{(1)}}{1-w_2} + \dfrac{w_1 (Y + Z_0^{(2)})}{1-w_1 w_2}, Z^{(3)}\right].
\end{cases}
\tag{4}
$$

さて，変形方程式 2DE (3)，(4) の，原点 $w=(0,0)$ の近傍で正則な解を考察しよう．この解の初期値を $X_0 = X(0,0),\ Y_0 = Y(0,0),\ Z_0^{(1)} = Z^{(1)}(0,0),\ Z_0^{(3)} = Z^{(3)}(0,0)$ とおく．

定理 1 行列 $X_0,\ Y_0,\ Z_0^{(1)},\ Z_0^{(3)}$ が 条件

$$
\begin{cases}
\left[X_0^{(1)}, X_0\right] = \left[X_0^{(2)}, X_0\right] = 0, \\
\left[X_0^{(1)}, Y_0\right] = \left[X_0^{(2)}, Y_0\right] = 0, \\
\left[X_0^{(1)} - X_0 + Y_0, Z_0^{(1)}\right] = \left[X_0^{(2)}, Z_0^{(1)}\right] = 0, \\
\left[X_0^{(1)} - X_0 + Y_0, Z_0^{(3)}\right] = \left[X_0^{(2)} - X_0 + Y_0, +Z_0^{(1)} Z_0^{(3)}\right] = 0.
\end{cases}
\tag{5}
$$

及び

$$
\begin{cases}
(l+1)\mathrm{Id} - \mathrm{ad}\left(X_0^{(\alpha)}\right) \quad 可逆 \quad (l \geq 0,\ \alpha = 1,2) \\
(l+1)\mathrm{Id} - \mathrm{ad}\left(X_0^{(1)} - X_0 + Y_0\right) \quad 可逆 \quad (l \geq 0), \\
(l+1)\mathrm{Id} - \mathrm{ad}\left(X_0^{(2)} - X_0 + Y_0 + Z_0^{(1)}\right) \quad 可逆 \quad (l \geq 0)
\end{cases}
\tag{6}
$$

をみたすとする．このとき，初期値を $X_0,\ Y_0,\ Z_0^{(1)},\ Z_0^{(3)}$ とする，2DE (3)，(4) の原点における正則解 $X(w),\ Y(w),\ Z^{(1)}(w),\ Z^{(3)}(w)$ が一意的に存在する．

定理 2 3変数KZ方程式は変形方程式2DEの定数解として特徴づけられる．

複素鏡映群に関するbraid群の表現について

原岡　喜重　(熊本大自然)*

Artinのbraid群B_nは，平面上のn点を始点および終点の集合とするn本の組み紐のなす群として定義される。平面を複素平面$\mathbb{C}$と思い，そのn点の1次からn次までの基本対称式の組を$\mathbb{C}^n$の点と見ると，B_nは基本群$\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus D)$ととらえることができる。ここで$D$は判別式の零点集合を表す。基本対称式は対称群$S_n$に関する不変多項式の基底であるが，$S_n$を有限鏡映群，あるいは有限複素鏡映群と思うことで，braid群の自然な拡張を考えることができる。すなわち有限次元線形空間Vに働く有限複素鏡映群Gに対して，Gの作用によるregular orbitsの空間は，判別式と呼ばれるある多項式の零点集合の補空間として表される。その空間の基本群が，Gに関するbraid群である。

群が定義されたので，その表現を求めるというのは自然な問題であろうが，上記の定義においては判別式の零点集合の補空間という幾何学的な対象が現れていることが重要であり，その幾何学的構造が表現全体に構造を与えることになる。

Gを$\mathbb{C}^n$に働く有限既約複素鏡映群，ΔをGに対する判別式とし([1])，Dをその零点集合とする。Gに関するbraid群Bは

$$B = \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus D)$$

により定義される。$\mathbb{C}^n$のcompact化としてたとえば$\mathbb{P}^n$を考え，無限遠超平面をH_∞とおくと，

$$B = \pi_1(\mathbb{P}^n \setminus (D \cup H_\infty)$$

ととらえることもできる。$\hat{D} = D \cup H_\infty$とおき，$\hat{D}$の既約分解を

$$\hat{D} = \bigcup_j D_j$$

とする。すると各D_jに対し，monodromy（D_jを正の向きに1周し他のD_kは回らないloop, 以下では(+1)-loopと呼ぶことにする）の$\pi_1(\mathbb{P}^n \setminus (D \cup H_\infty))$における共役類は$D_j$により一意的に定まる([2])。

表現

$$\rho : B \to \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$$

を考える。各D_jに対する(+1)-loopの像の共役類はD_jのみにより決まるので，それをD_jにおける局所モノドロミーと呼ぶ。各既約成分における局所モノドロミーによってρが同型を除いて一意的に定まるとき，ρをrigidという。これはKatzによるrigid局所系の概念([3])を高次元の場合に拡張したものである。このような見方は，Riemann-Hilbert対応によって表現に対応するregular holonomic系を考えることから得られた。regular holonomic系においては局所モノドロミーは有限の手順で求めることができるので，局所モノドロミーをあらかじめ指定した場合に（monodromy）表現が構成できるか，というのは自然な問である。

この講演では，3次primitive有限既約複素鏡映群に関するbraid群の3次元表現を考察する。そのような群はShephard-Toddの分類[4]においてG_k $(k = 23, 24, 25, 26, 27)$

本研究は科研費(基盤(B), 15H03628)の助成を受けたものである。

*e-mail: `haraoka@kumamoto-u.ac.jp`

として与えられている。G_k に関する braid 群を $B^{(k)}$ とおく。$B^{(23)}, B^{(25)}$ の表示は齋藤-石部 [5] で求められており，また $B^{(24)}, B^{(27)}$ の表示については Bessis-Michel [6] で求められたものを用いた。（$B^{(26)}$ については自前のものを求める必要があった。）たとえば $B^{(23)}$ の表示は

$$B^{(23)} = \langle a, b, c \mid ababa = babab, bc = cb, aca = cac \rangle$$

で与えられるが，この場合判別式の零点集合 D_{23} は既約であって，a, b, c はいずれもその既約な D_{23} に対する (+1)-loop となる。特に a, b, c は互いに共役である。表現

$$\rho : B^{(23)} \to \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$$

を考える。

定理　既約な表現 ρ は，D_{23} における局所モノドロミーのスペクトル型が $(21), (111), ((111))$ の場合にのみ存在する。そのとき ρ は rigid であり，具体的に記述することができる。それぞれの既約表現において，局所モノドロミーの固有値が modulus 1 の場合，不変 Hermite 形式が定数倍を除いて一意的に存在する。

スペクトル型は Jordan 標準形の型を表すデータである ([2] を参照)。局所モノドロミーの固有値が modulus 1 というのは，対応する holonomic 系の特性指数が実数ということに相当する。

Artin の braid 群の表現については多くの研究があるが，局所モノドロミー・スペクトル型に基づく表現の分類，rigidity，不変 Hermite 形式の存在・構成といった観点は今までなかったのではないだろうか。これらの観点は regular holonomic 系との関わりで重要である。

G_k の 3 次元表現は，加藤-関口 [7] が構成した free divisor を特異 locus とする holonomic 系（齋藤 [8] の提唱した uniformization equation）の monodromy 表現を求めるために研究した。rigidity によって，求めた ρ が monodromy 表現に一致することがわかる。

参考文献

[1] P. Orlik and H. Terao, Arrangements of hyperplanes, Springer-Verlag, 1992.

[2] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015.

[3] N. M. Katz, Rigid Local Systems, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996.

[4] G. C. Shephard and A. J. Todd, Finite reflection groups, Canad. J. Math., **6** (1954), 274-304.

[5] K. Saito and T. Ishibe, Monoids in the fundamental groups of the complement of logarithmic free divisors in $\mathbb{C}^3$, J. Algebra, **344** (2011), 137-160.

[6] D. Bessis and J. Michel, Explicit presentations for exceptional braid groups, Experimental Math. **13** (2004), 257-266.

[7] M. Kato and J. Sekiguchi, Uniformization systems of equations with singularities along the discriminant sets of complex reflection groups of rank three, Kyushu J. Math., **68** (2014), 181-221.

[8] K. Saito, On the uniformization of complements of discriminant loci, RIMS Kokyuroku **287** (1977), 117-137.

Twisted wild character varieties

山川 大亮 (東京工業大学 大学院理工学研究科)*

概　要

Alekseev–Malkin–Meinrenkenの擬ハミルトン空間の理論を用いて，Boalchはwild character varietyと呼ばれる代数多様体の上のポアソン構造を構成した．本稿では，最近Boalchとの共同研究により得られたwild character varietyの拡張と，その上のポアソン構造を構成するのに有効な擬ハミルトン空間の理論の拡張について述べる．

はじめに

本稿では，Philip Boalchとの共同研究により得られた結果[5]について解説する．

Σを滑らかな複素射影代数曲線，$\alpha\subset\Sigma$を空でない有限集合とし，$\Sigma^\circ=\Sigma\setminus\alpha$とおく．$\Sigma^\circ$上の代数的ベクトル束とその上の接続からなる組$(\mathcal{V},\nabla)$を，$\alpha$に特異点を持つ$\Sigma$上の**有理型接続**と呼ぶ．有理型接続の特異点は，確定特異点と呼ばれるある種tameなものと，不確定特異点と呼ばれるwildなものの二種類に分かれる．

確定特異点型接続，すなわち特異点が全て確定特異点であるような有理型接続については，次のDeligne [6]の結果がよく知られている：αに特異点を持つΣ上の確定特異点型接続$(\mathcal{V},\nabla)$に対し，その水平切断の芽のなすΣ°上の有限次元複素ベクトル空間の局所系$\ker\nabla$を対応させる事で，両者の圏の間の同値関手が定まる．この圏同値を**リーマン・ヒルベルト対応**と呼ぶ．

αにおけるΣの有向実ブローアップを$\pi\colon\widehat{\Sigma}\to\Sigma$としよう．従って$\widehat{\Sigma}$は境界付き実曲面であり，その境界$\partial$の連結成分は$\alpha$の各点の$\pi$による逆像（向きの付いた$S^1$）で与えられる．$\pi_1(\widehat{\Sigma})\simeq\pi_1(\Sigma^\circ)$に注意して，$\Sigma^\circ$上の局所系の代わりに$\widehat{\Sigma}$上の局所系を考えよう．基点の集合$\beta\subset\partial$を境界の各連結成分との交わりが1点となるように取る．このときβにおける枠を備えた$\widehat{\Sigma}$上の階数nの局所系の同型類全体と，βを基点集合とする$\widehat{\Sigma}$の基本亜群の表現空間

$$\mathrm{Hom}(\Pi_1(\widehat{\Sigma},\beta),\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$$

の間に全単射がある（モノドロミー表現を取る写像）．この表現空間は群$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\beta:=\mathrm{Map}(\beta,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$の自然な作用について，Alekseev–Malkin–Meinrenken [1]によって導入された**擬ハミルトン空間**の構造を持ち，特にアフィン商

$$\mathcal{M}_{\mathrm{B}}:=\mathrm{Hom}(\Pi,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))/\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\beta\simeq\mathrm{Hom}(\pi_1(\widehat{\Sigma}),\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))/\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

はポアソン構造を持つ．なお$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$を一般の連結複素簡約代数群にしても同様の事がいえる．空間$\mathcal{M}_{\mathrm{B}}$を**character variety**と呼ぶ．

ここで擬ハミルトン空間について少し述べておこう（詳しくは第3節を参照）．連結複素簡約群Gが作用するシンプレクティック代数多様体(M,ω)と，運動量写像と呼ばれる射$\mu\colon M\to(\mathrm{Lie}\,G)^*$からなる組$(M,\omega,\mu)$をハミルトン$G$空間と呼ぶ．擬ハミルト

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻
e-mail: `yamakawa@math.titech.ac.jp`

ン空間はハミルトン空間の「乗法的類似物」といえるもので，ハミルトン空間の運動量写像がリー環の双対空間に値を取る一方，擬ハミルトン空間の運動量写像は作用する群に値を取る．先程の基本亜群の表現空間の場合，運動量写像は各基点における境界成分に沿ったモノドロミーで与えられる．

ところでリーマン・ヒルベルト対応は不確定特異点型接続に対しても拡張されており（例えば [14] を参照），その場合に有理型接続に対応するものをストークスデータもしくは一般モノドロミーデータと呼ぶ．Boalch [4] は，不確定特異点が全て「不分岐」と呼ばれる性質を持つ場合に，$\widehat{\Sigma}$ からいくつかの点を除いて得られる補助的な曲面 $\widetilde{\Sigma}$，及びその基本亜群の表現空間のある特別な部分多様体（**ストークス表現**の空間）

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi_1(\widetilde{\Sigma},\beta),\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))\subset\mathrm{Hom}(\Pi_1(\widetilde{\Sigma},\beta),\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$$

を導入し，ある簡約部分群 $\mathbf{H}\subset\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\beta$ の作用に関するこの空間内の軌道がストークスデータの同型類をパラメータ付ける事を示した．更に，この部分多様体が擬ハミルトン $\mathbf{H}$ 空間の構造を持つ事を示し，その系としてアフィン商 (**wild character variety**)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi_1(\widetilde{\Sigma},\beta),\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))/\mathbf{H}$$

の上にポアソン構造が定まる事を示した（実際には $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が一般の複素簡約群になった場合でも示されている）．この場合の運動量写像も，やはり各境界成分に沿ったモノドロミー（有理型接続の**形式的モノドロミー**と呼ばれるものに対応する）を考える事で得られる．

今回 [5] で得られた結果は，不分岐とは限らない一般の場合への上の結果の拡張である．これを紹介するため本稿の構成を次のようにした：第 1 節でストークス表現の空間を導入するための準備を行い，第 2 節で (twisted) wild character variety をアフィン代数多様体として導入する．不分岐の場合と異なり，一般の場合にはストークス表現の空間に擬ハミルトン空間の構造が自然には入らない．何故なら，境界に沿ったモノドロミーが一般には $\mathbf{H}$ の元でないからである．この問題を解決するのに有効な，擬ハミルトン空間の概念そのものの拡張について第 3 節で述べ，それを用いて第 4 節で主定理を述べる．なお，話を分かりやすくするため基本的に構造群が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の場合に限って述べるが，[5] では一般の（連結）複素簡約構造群の場合，更には構造群が「局所定数で動く」場合も扱っている．第 4 節でこのような構造群の一般化にも少し触れる．

1. 有理型接続の形式的分類理論と次数付き局所系

この節ではよく知られている有理型接続の形式的分類理論を手短に紹介する．

Σ を滑らかな複素代数曲線とする．基点 $0\in\Sigma$ を取り，簡単のため点 0 で消える局所座標 z を固定する．$\Sigma\setminus\{0\}$ 上の接続 $(\mathcal{V},\nabla)$ に対し，射 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}(\!(z)\!)\to\Sigma\setminus\{0\}$ で引き戻す事で $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}(\!(z)\!)$ 上の接続，すなわち $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ 上の有限次元ベクトル空間 V とライプニッツ則を満たす $\mathbb{C}$ 線形写像 $\nabla\colon V\to V\,dz$ からなる対 (V,∇) が得られる．形式的分類とは，$\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}(\!(z)\!)$ 上の接続の分類を指す．

1.1. Hukuhara–Turrittin の定理

$\mathcal{P}=\bigcup_{r\in\mathbb{Z}_{>0}}\mathbb{C}(\!(z^{1/r})\!)$ をピュイズー級数体，$\mathcal{R}=\bigcup_{r\in\mathbb{Z}_{>0}}\mathbb{C}[\![z^{1/r}]\!]$ を負べきの項を持たないピュイズー級数からなる部分環とし，

$$\mathcal{Q}=\mathcal{P}/\mathcal{R}\simeq\bigcup_{r\in\mathbb{Z}_{>0}}z^{-1/r}\mathbb{C}[z^{-1/r}]$$

とおく．モノドロミー$\sigma\colon \mathcal{P}\to\mathcal{P}$, $\sigma(z^a)=e^{2\pi\sqrt{-1}a}z^a$は$\mathcal{R}$を保ち，$\mathcal{Q}$の変換を誘導する．

次はHukuhara [7] とTurrittin [12] の結果を言い換えたものである．

定理 1.1. $\operatorname{Spec}\mathbb{C}(\!(z)\!)$ 上の接続(V,∇)の圏と，$\mathcal{Q}$次数付き有限次元複素ベクトル空間

$$W=\bigoplus_{q\in\mathcal{Q}}W_q$$

とWの線形自己同型M_Wからなる対(W,M_W)で$M_W(W_q)=W_{\sigma(q)}$, $q\in\mathcal{Q}$ を満たすものの圏の間に直和・テンソル積を保つ圏同値がある．

大雑把に言えば，接続(V,∇)に対しWは形式解のなすベクトル空間，M_Wは形式解のモノドロミーによって与えられる．これの証明は例えば[14]にある．

$\Sigma\setminus\{0\}$上の接続$(\mathcal{V},\nabla)$が定める$\operatorname{Spec}\mathbb{C}(\!(z)\!)$上の接続に対$(W,M_W)$が対応するとき，$\sigma$不変集合$\mathrm{Irr}:=\{\,q\in\mathcal{Q}\mid\dim W_q\neq 0\,\}$の元を接続$(\mathcal{V},\nabla)$の特異点$0$における**固有値**と呼ぶ事がある．$\mathrm{Irr}=\{0\}$であるとき，点$0\in\Sigma$を接続$(\mathcal{V},\nabla)$の**確定特異点**という．$\mathrm{Irr}\neq\{0\}$で$\mathrm{Irr}$への$\sigma$の作用が自明であるときは**不分岐不確定特異点**，Irrへのσの作用が非自明であるときは**分岐不確定特異点**という．

Wの$\mathcal{Q}$次数付きベクトル空間としての同型類を$(\mathcal{V},\nabla)$の$0\in\Sigma$における**不確定類**という．$\langle\sigma\rangle\subset\operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{Q})$を$\sigma$によって生成される巡回群とすると，階数$n$の接続の不確定類と軌道集合$\mathcal{Q}/\langle\sigma\rangle$ 上の$\mathbb{Z}_{\geq 0}$値関数$I\mapsto n_I$で

$$\sum_{I\in\mathcal{Q}/\langle\sigma\rangle}n_I\cdot\#I=n$$

を満たすものは1対1に対応する（ただし$\#I$はIの濃度を表す）．

1.2. 次数付き局所系による言い換え

$\pi\colon\widehat{\Sigma}\to\Sigma$を$\Sigma$の$0$における有向実ブローアップとし，$\partial=\pi^{-1}(0)\simeq S^1$とおく．定理1.1に現れる対$(W,M_W)$は，$W$を$\partial$のある点におけるファイバー，$M_W$をモノドロミーとする$\partial$上のベクトル空間の局所系を定める．$\operatorname{Spec}\mathbb{C}(\!(z)\!)$上の接続のこのような見方は接続の大域的分類について述べる上で有用である．Wが持つ次数付けを局所系の言葉で言い換えるために，対$(\mathcal{Q},\sigma)$に対応する局所系を次のように定義しておこう．

∂の各開区間Uに対し，0を中心とし中心角がUで与えられる扇形領域の芽$\operatorname{Sect}(U)$が定まる．その上の正則関数qの$z=0$における芽で，

$$q=\sum_{i=1}^{k}a_iz^{-i/r}\qquad(a_i\in\mathbb{C},\ r,k\in\mathbb{Z}_{>0})$$

の形で表されるもの全体を$\mathcal{I}(U)$とする．$\mathcal{I}(U)$達はファイバーが$\mathcal{Q}$と同型な∂上のベクトル空間の局所系を定めるが，これをあえて集合の局所系，すなわち被覆空間$\pi\colon\mathcal{I}\to\partial$とみなす．すると$\mathcal{I}$の連結成分と$\mathcal{Q}$における$\langle\sigma\rangle$軌道の間に自然な全単射がある．連結成分$I\in\pi_0(\mathcal{I})$に対し，被覆$\pi\colon I\to\partial$の次数を$\operatorname{ram}(I)$とおけば，これは対応する$\langle\sigma\rangle$軌道の元の個数に等しく，各元は$z^{-1/r}$, $r=\operatorname{ram}(I)$の多項式である．その次数を$\deg(I)$と書き，$\operatorname{lev}(I):=\deg(I)/\operatorname{ram}(I)$を$I$（またはその元）の**レベル**と呼ぶ．

定義 1.2. $\mathcal{L}$ を ∂ 上の有限次元ベクトル空間の局所系とする．各点 $b\in\partial$ におけるファイバー $\mathcal{L}_b$ が $\mathcal{I}_b$ による次数付け

$$\mathcal{L}_b=\bigoplus_{q\in\mathcal{I}_b}\mathcal{L}_{b,q}$$

を備えており，これが $\mathcal{I}$ の局所系構造と次の意味で両立するとき，$\mathcal{L}$ を ∂ 上の $\mathcal{I}$ **次数付き局所系**という：∂ における任意の道 $\gamma\colon[0,1]\to\partial$ に対し，$\mathcal{I}$, $\mathcal{L}$ における γ に沿った平行移動を共に γ_* で表したとき，

$$\gamma_*(\mathcal{L}_{\gamma(0),q})=\mathcal{L}_{\gamma(1),\gamma_*(q)}\qquad(q\in\mathcal{I}_{\gamma(0)})$$

が成り立つ．

先の定理を $\mathcal{I}$ 次数付き局所系の言葉で言い換えると次のようになる（Deligne による）：

定理 1.3. $\operatorname{Spec}\mathbb{C}(\!(z)\!)$ 上の接続のなす圏と ∂ 上の $\mathcal{I}$ 次数付き局所系のなす圏は同値である．

また接続の不確定類を $\mathcal{I}$ 次数付き局所系の言葉で言い換えると次のようになる：

定義 1.4. ∂ 上の $\mathcal{I}$ 次数付き局所系の局所同型類を**不確定類**と呼ぶ．

従って二つの $\mathcal{I}$ 次数付き局所系 $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ が同じ不確定類に属すための必要十分条件は，任意の $b\in\partial$ に対し $\mathcal{L}_b$ と $\mathcal{L}'_b$ が $\mathcal{I}_b$ 次数付きベクトル空間として同型となる事である．

1.3. POMとストークス群

∂ 上の被覆空間 $\mathcal{I}$ は特別な点を持つ．

定義 1.5. 次の条件を満たす点 $q\in\mathcal{I}$ を **POM** (point of maximal decay) と呼ぶ：q を $q=a_kz^{-k/r}+a_{k-1}z^{-(k-1)/r}+\cdots$ と書いたとき，$a_kz^{-k/r}$ が $\pi(q)\in\partial$ の定める半直線 $\mathbb{R}_{>0}\pi(q)$ 上で負の実数となる．

各連結成分 $I\in\pi_0(\mathcal{I})$ は，その上に丁度 $\deg(I)$ 個の POM を持つ事が容易に確かめられる．

$\mathcal{L}$ を ∂ 上の $\mathcal{I}$ 次数付き局所系とする．このとき $\operatorname{End}\mathcal{L}=\operatorname{Lie}(\operatorname{Aut}\mathcal{L})$ も $\mathcal{I}$ 次数付き局所系となる．各 $d\in\partial$ に対し，$\mathcal{I}_d$ のすべての POM q に渡る $(\operatorname{End}\mathcal{L}_d)_q$ の直和を sto_d と定める．これは $\operatorname{End}\mathcal{L}_d$ の冪零部分リー環である事が知られている．そこで

$$\mathbb{S}\mathrm{to}_d=\exp(\mathrm{sto}_d)\subset\operatorname{Aut}\mathcal{L}_d$$

とおく．

定義 1.6. 集合 $\mathbb{A}:=\{\,d\in\partial\mid\dim\mathrm{sto}_d>0\,\}$ の元を**特異方向**と呼び，各 $d\in\mathbb{A}$ に対し $\mathbb{S}\mathrm{to}_d$ を特異方向 d に付随する**ストークス群**と呼ぶ．

集合 $\mathbb{A}$ は $\mathcal{L}$ の不確定類のみに依る事に注意しよう．また $\mathcal{I}$ 次数付き局所系 $\mathcal{L},\mathcal{L}'$ が局所同型であれば，同型 $\mathcal{L}_d\xrightarrow{\simeq}\mathcal{L}'_d$ で両者のストークス群は移り合う．この意味でストークス群も不確定類のみに依る概念である．

2. Twisted wild character varieties

この節でストークス局所系を導入し，これを用いて有理型接続の大域的分類に関する既知の結果（リーマン・ヒルベルト対応）を言い換える．

2.1. ストークス局所系とリーマン・ヒルベルト対応

Σをコンパクトリーマン面（境界を持っても良い），$\alpha \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$を有限部分集合とし，$\Sigma^\circ = \Sigma \setminus \alpha$とおく．$\pi\colon \widehat{\Sigma} \to \Sigma$を$\alpha$における$\Sigma$の有向実ブローアップとし，その境界$\partial$は空でないと仮定する．定義から，$\partial$は$\Sigma$の境界$\partial\Sigma$と有向実ブローアップでできた新たな境界$\pi^{-1}(\alpha)$の和である．

各$i \in \alpha$に対し，前に定義した$\mathcal{I}$に相当する$\pi^{-1}(i)$上の局所系$\mathcal{I}_i \to \pi^{-1}(i)$が定まる．$\pi^{-1}(i)$における階数$n$の不確定類$Q_i$を任意に取って$\mathbf{Q} = (Q_i)$とする．

定義 2.1. 組$\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma, \alpha, \mathbf{Q})$を階数$n$の**不確定曲線**と呼ぶ．

不確定曲線$\boldsymbol{\Sigma}$に次のような実曲面$\widetilde{\Sigma}$を付随させる．$\mathbb{A}_i \subset \pi^{-1}(i)$を不確定類$Q_i$の特異方向のなす集合とし，$\mathbb{A} = \bigcup \mathbb{A}_i \subset \partial$とおく．また各$\pi^{-1}(i)$の小さな管状近傍$N_i$を取る．各$d \in \mathbb{A}_i$から$N_i$の境界$\overline{N}_i \setminus N_i$に向かって線分を互いに交わらないよう引き，その終点を$e(d) \in \overline{N}_i \setminus N_i$として

$$\widetilde{\Sigma} = \widehat{\Sigma} \setminus \{\, e(d) \mid d \in \mathbb{A} \,\}$$

とおく．各$d \in \mathbb{A}$に対し，dを基点とし$e(d)$の周りを一周する単純閉曲線γ_dを取る．

定義 2.2. $\boldsymbol{\Sigma}$上の**ストークス局所系**とは，$\widetilde{\Sigma}$上の階数nの局所系$\mathcal{L}$で次の条件を満たすものをいう．

(1) $\mathcal{L}$の各N_iへの制限はQ_iを不確定類とする$\mathcal{I}_i$次数付き局所系の構造を持つ．

(2) $\mathcal{L}$の各γ_dに沿ったモノドロミーはストークス群$\mathbb{S}\mathrm{to}_d \subset \operatorname{Aut} \mathcal{L}_d$に属す．

ここで$\mathcal{I}_i$はN_i上の局所系へ自明な方法で延長している．ストークス局所系の同型の定義は明らかであろう：$\widetilde{\Sigma}$上の局所系としての同型であって，各N_iに制限したとき$\mathcal{I}_i$次数付き局所系の同型となるものである．

このストークス局所系に枠を付ける事を考えよう．境界∂の各連結成分の基点を一つずつ取り，それら基点の集合を$\beta \subset \partial$とする．各$b \in \partial$に対し，bを含む∂の唯一の連結成分を∂_bと書く．各$i \in \alpha$に対し，不確定類Q_iに属す$\pi^{-1}(i)$上の$\mathcal{I}_i$次数付き局所系$\mathcal{L}_i$を取る．基点$b \in \beta \cap \pi^{-1}(i)$におけるファイバー$(\mathcal{L}_i)_b$は$(\mathcal{I}_i)_b$次数付きベクトル空間である．$(\mathcal{L}_i)_b$の基底を任意に取り，それによって$\mathbb{C}^n$に$(\mathcal{I}_i)_b$次数付きベクトル空間の構造を入れたものを$F_b$とおく．また$b \in \beta \cap \partial\Sigma$に対しては，$F_b = \mathbb{C}^n$とおき，これを自明な次数付けを持つベクトル空間とみなす．F_bを基点bにおける**標準ファイバー**と呼ぼう．

定義 2.3. $\boldsymbol{\Sigma}$上のストークス局所系$\mathcal{L}$と，各$b \in \beta$におけるファイバー$\mathcal{L}_b, F_b$の次数付きベクトル空間としての同型$\varphi_b\colon F_b \xrightarrow{\simeq} \mathcal{L}_b$からなる組$(\mathcal{L}, (\varphi_b))$を**枠付きストークス局所系**という．

各$b \in \beta$に対し，F_bの次数付きベクトル空間としての自己同型全体を$H_b \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$とし，$\mathbf{H} = \prod_{b \in \beta} H_b$とおく．各$H_b$は複素簡約群であり，$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{\Sigma}, n)$を$\boldsymbol{\Sigma}$上の枠付きストークス局所系の同型類全体とすると，これには枠の取り替えによって$\mathbf{H}$が作用する．

有理型接続のリーマン・ヒルベルト対応（例えば[13]を参照）を我々のストークス局所系の言葉で言い換えると次のようになる：

定理 2.4. Σ が滑らかな複素射影代数曲線であるとき，α に特異点を持ち各 $i \in \alpha$ における不確定類が Q_i で与えられる Σ 上の階数 n の有理型接続の同型類と，$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{B}}(\mathbf{\Sigma}, n)$ の $\mathbf{H}$ 軌道（すなわち $\mathbf{\Sigma}$ 上のストークス局所系の同型類）の間に全単射がある．

2.2. 形式的モノドロミーと両側主等質空間

$(\mathcal{L}, (\varphi_b))$ を枠付きストークス局所系とする．各 $b \in \beta$ を基点とする，∂_b に沿った $\mathcal{L}$ のモノドロミーを考えよう．これを同型 φ_b で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に移したものを M_b とおき（従って $\mathcal{L}$ のモノドロミーは $\varphi_b M_b \varphi_b^{-1} \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{L}_b$ である），枠付きストークス局所系の基点 b における**形式的モノドロミー**と呼ぶ．$b \in \beta \cap \pi^{-1}(\alpha)$ のとき，$i = \pi(b)$ とおき F_b が $(\mathcal{I}_i)_b$ 次数付きベクトル空間 $(\mathcal{L}_i)_b$ の基底を固定して得られたものであった事を思い出して，$P_b \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を $\mathcal{L}_i$ の基点 b におけるモノドロミーの（その基底に関する）行列表現とすると，

$$P_b^{-1} M_b \in H_b$$

が成り立つ．実際，σ を $(\mathcal{I}_i)_b$ の b を基点とするモノドロミーとすると，各 $q \in (\mathcal{I}_i)_b$ に対し $\mathbb{C}^n$ の次数 q の斉次元は M_b によって次数 $\sigma(q)$ の斉次元に移り，その後 P_b^{-1} によって次数 q の斉次元に移る．よって M_b は剰余類

$$H(\partial_b) := P_b H_b = H_b P_b \subset G$$

に値を取る．

代数群 G の**主等質空間**とは，G が単純推移的に作用する代数多様体の事であった．G が左右両側から単純推移的に作用し，それらが互いに可換であるような代数多様体をここでは G の**両側主等質空間**と呼ぶ事にする．次は明らかであろう：

命題 2.5. $H(\partial_b)$ は H_b の両側主等質空間である．

$b \in \beta \cap \partial\Sigma$ に対し $H(\partial_b) = G$ とおき，

$$\mathbf{H}(\partial) = \prod_{b \in \beta} H(\partial_b)$$

と定める．これは $\mathbf{H}$ の両側主等質空間である．

2.3. 基本亜群のストークス表現

$\Pi = \Pi_1(\widetilde{\Sigma}, \beta)$ を $\widetilde{\Sigma}$ の β を基点集合とする基本亜群，すなわち β の元を対象とし，$b, b' \in \beta$ に対し b から b' への道のホモトピー類を射 $b \to b'$ とする圏とし，Π から群 G への射全体を $\mathrm{Hom}(\Pi, G)$ と書く（ここでもちろん G は対象が 1 点のみからなる亜群とみなしている）．定義から $\mathrm{Hom}(\Pi, G)$ の元 ρ は，β の点を結ぶ道のホモトピー類全体から G への写像 $[\gamma] \mapsto \rho(\gamma)$ で，γ_1 の始点と γ_2 の終点が一致する限り

$$\rho(\gamma_1\gamma_2) = \rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)$$

が成り立つようなものを指す．

各特異方向 $d \in \mathbb{A}_i$ に対し，λ_d を $\pi^{-1}(i)$ に沿って $b \in \beta \cap \pi^{-1}(i)$ から d へ向かう円弧とする．λ_d に沿った平行移動によって，$\mathcal{L}_i$ のストークス群 $\mathbb{S}\mathrm{to}_d \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{L}_i)_d$ を $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}_i)_b \simeq \mathrm{Aut}\,F_b = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群と同一視する．また

$$\widehat{\gamma}_d = \lambda_d^{-1} \circ \gamma_d \circ \lambda_d \in \Pi \qquad (d \in \mathbb{A})$$

とおき，各境界成分 ∂_b を b を基点とする閉曲線と与えられた向きによって同一視する．

定義 2.6. Π の n 次元**ストークス表現**とは，$\mathrm{Hom}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の元 ρ で次の条件を満たすものをいう：

(1) 各 $b \in \beta$ に対し $\rho(\partial_b) \in H(\partial_b)$ が成り立つ．

(2) 各特異方向 $d \in \mathbb{A}$ に対し $\rho(\widehat{\gamma}_d) \in \mathbb{S}\mathrm{to}_d$ が成り立つ．

n 次元ストークス表現全体を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ と表す．

$\mathrm{Hom}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ には群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\beta$ が自然に作用する事に注意しよう．具体的に書けば，$g = (g_b) \in G^\beta$, $\rho \in \mathrm{Hom}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ 及び道 $\gamma\colon b_1 \to b_2$ に対し

$$(g \cdot \rho)(\gamma) = g_{b_2}\rho(\gamma)g_{b_1}^{-1}$$

によって定義される．この作用を部分群 $\mathbf{H} \subset G^\beta$ に制限したものは，ストークス表現全体 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ を保つ．

命題 2.7. モノドロミーを取る事により，$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{B}}(\mathbf{\Sigma}, n)$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の間に $\mathbf{H}$ 同変な全単射が定まる．特に，$\mathbf{\Sigma}$ 上のストークス局所系の同型類と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の $\mathbf{H}$ 軌道は 1 対 1 対応する．

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ がアフィン代数多様体の構造を持つ事は明らかであろう．

定義 2.8. アフィン商

$$\mathcal{M}_{\mathrm{B}}(\mathbf{\Sigma}, n) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))/\mathbf{H} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))]^{\mathbf{H}}$$

を **(twisted) wild character variety** と呼ぶ．

主結果の一つは次のように述べられる：

定理 2.9. $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}(\mathbf{\Sigma}, n)$ はポアソン構造を持つ．

ここで最も基本的な場合にストークス表現の空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の代数多様体としての構造を見ておこう．

Σ として $\mathbb{C}$ 内の原点 0 を中心とする閉円板を取る．原点における階数 n の不確定類 Q を固定し，不確定曲線 $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \{0\}, Q)$ を考えよう．付随する曲面 $\widetilde{\Sigma}$ の境界 ∂ の連結成分は，Σ の境界 ∂_1 と有向実ブローアップして新たにできる境界 ∂_0 の二つである．それぞれの基点 $b_i \in \partial_i$ と Q に属す ∂_0 上の次数付き局所系 $\mathcal{L}$ を取り，それらを用いて標準ファイバー F_0, F_1 を定めれば，n 次元ストークス表現のなす空間

$$\mathcal{A}(Q) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$$

ができる．

補題 2.10. $\mathbf{H}$ 同変な同型

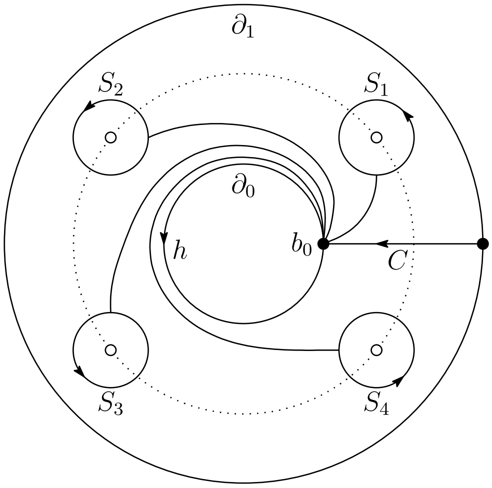
$$\mathcal{A}(Q) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times H(\partial_0) \times \prod_{d \in \mathbb{A}} \mathbb{S}\mathrm{to}_d(Q)$$

が存在する．ただし $\mathbf{H} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times H_0$ は右辺の空間に

$$(g, k) \cdot (C, h, (S_d)) = (kCg^{-1}, khk^{-1}, (kS_dk^{-1}))$$

で作用する．

これは，次の図（$\#\mathbb{A} = 4$ の場合）のように Π を生成する道を取る事で直ちに示される．



3. 両側主等質空間に値を取る運動量写像

定理 2.9 は，不確定特異点が全て不分岐の場合に Boalch [2, 3, 4] によって示された．そこでの証明のアイディアは，Alekseev–Malkin–Meinrenken [1] によって導入された擬ハミルトン空間を用いる事であった．最初に述べた通り，擬ハミルトン空間はハミルトン空間の乗法的類似物であり，ハミルトン空間の運動量写像がリー環の双対空間に値を取る一方，擬ハミルトン空間の運動量写像は作用する群に値を取る．Boalch は，不分岐の場合に空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ に擬ハミルトン $\mathbf{H}$ 空間の構造が定まり，その運動量写像は形式的モノドロミーの逆元で与えられる事を示した．

分岐不確定特異点がある場合には，先に述べたように形式的モノドロミーの住処が群 $\mathbf{H}$ ではなく両側主等質空間 $\mathbf{H}(\partial)$ である．そこで，擬ハミルトン空間の概念を運動量写像が両側主等質空間に値を取れるように拡張する事を考える．

3.1. 両側主等質空間と外部自己同型群

代数群 G とその自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ の半直積 $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$ を考えよう．積は

$$(g, \phi)(h, \psi) = (g\phi(h), \phi\psi)$$

で与えられる．各 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ に対し

$$G(\phi) = \{\, (g, \phi) \mid g \in G \,\} \subset G \ltimes \mathrm{Aut}(G)$$

とおけば，これは埋め込み $G \hookrightarrow G \ltimes \mathrm{Aut}(G)$ を通して G が両側から作用し，G の両側主等質空間の構造を持つ．$G(\phi)$ は G の右移動を ϕ でねじったものである．

$\mathbb{G}$ を任意の両側主等質空間としたとき，各 $x \in \mathbb{G}$ が定める同型写像 $G \to \mathbb{G},\ g \mapsto gx$ の逆写像を簡単に $y \mapsto yx^{-1}$ と表し，同様に $g \mapsto xg$ の逆写像を $y \mapsto x^{-1}y$ と表す事にすると，写像

$$\phi_x \colon G \to G; \quad g \mapsto xgx^{-1} = (xg)x^{-1}$$

は G の自己同型であり，これが代表する外部自己同型群 $\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ の元 $[\mathbb{G}]$ は x の取り方に依らない．対応 $\mathbb{G} \mapsto [\mathbb{G}]$ によって G の両側主等質空間の同型類と $\mathrm{Out}(G)$ の元は1対1に対応し，$\phi \mapsto G(\phi)$ が逆写像を誘導する．

$\mathrm{Out}(G)$ の群演算に対応する両側主等質空間の演算は次のようにして与えられる．二つの両側主等質空間 $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ に対しその積 $\mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2$ は

$$\mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2 = \mathbb{G}_1 \times_G \mathbb{G}_2, \qquad [x_1, x_2] = [x_1 g^{-1}, g x_2] \ (g \in G)$$

と定義される．各 $[x_1, x_2] \in \mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2$ は $x_1 x_2$ と書かれ x_1, x_2 の積と呼ばれる．また両側主等質空間 $\mathbb{G}$ に対し，そのコピー $\{\, x^{-1} \,|\, x \in \mathbb{G} \,\}$ に G を

$$g x^{-1} = (x g^{-1})^{-1}, \quad x^{-1} g = (g^{-1} x)^{-1} \quad (x \in \mathbb{G},\ g \in G)$$

によって作用させたものを $\mathbb{G}^{-1}$ と書く事にすれば，G の両側主等質空間の自然な同型

$$\mathbb{G} \cdot \mathbb{G}^{-1} \simeq \mathbb{G}^{-1} \cdot \mathbb{G} \simeq G$$

がある（xx^{-1}, $x^{-1}x$ $(x \in \mathbb{G})$ が G の単位元に対応する）．各 $x^{-1} \in \mathbb{G}^{-1}$ を $x \in \mathbb{G}$ の逆元と呼ぶ．

G の両側主等質空間 $\mathbb{G}$ への G 作用 $x \overset{g}{\mapsto} gxg^{-1}$ を $\mathbb{G}$ における**共役作用**と呼ぶ．$\mathbb{G} = G(\phi)$ のとき，点 $x = (u, \phi) \in G(\phi)$ の $g \in G$ による共役は

$$(g, 1)(u, \phi)(g^{-1}, 1) = (gu\phi(g)^{-1}, \phi)$$

で与えられる．G の自身への作用 $u \mapsto gu\phi(g)^{-1}$ は**ねじれ共役作用**等と呼ばれ，G が複素単純代数群の場合等に詳しく調べられている（例えば [11] を参照）．

3.2. 両側主等質空間に値を取る運動量写像

以降 G を（連結）複素簡約代数群とし，そのリー環 $\mathfrak{g}$ 上の随伴作用不変な非退化対称双線形形式 $(\ ,\ )$ を固定する．G の両側主等質空間は対応する $\mathrm{Out}(G)$ の元が $(\ ,\ )$ を保つもののみを考える．

G の両側主等質空間 $\mathbb{G}$ が与えられたとき，G のモーレー・カルタン形式の類似物である $\mathbb{G}$ 上の左不変 $\mathfrak{g}$ 値1次微分形式 θ，右不変 $\mathfrak{g}$ 値1次微分形式 $\overline{\theta}$ が

$$\theta_x(X) = x^{-1} X, \quad \overline{\theta}_x = X x^{-1} \quad (x \in \mathbb{G},\ X \in T_x\mathbb{G})$$

によって定まる．ここで例えば $x^{-1}X \in \mathfrak{g}$ は写像 $\mathbb{G} \to G$, $y \mapsto x^{-1}y$ の X 微分である．これらを $\mathbb{G}$ **上のモーレー・カルタン形式**と呼ぶ事にする．

定義 3.1. G が作用する滑らかな複素代数多様体 M が

- M 上の G 不変2次微分形式 ω,
- G のある両側主等質空間 $\mathbb{G}$ への（共役作用に関し）G 同変な射 $\mu\colon M \to \mathbb{G}$

を備え，次の条件を満たすとき，M を**（ねじれ）擬ハミルトン G 空間**と呼び，μ をその**運動量写像**と呼ぶ．

(QH1) $d\omega = \frac{1}{12}\mu^*(\theta, [\theta, \theta])$.

(QH2) $\omega(v_X,\cdot)=\mu^*(\theta+\overline{\theta},X)$ $(X\in\mathfrak{g})$. ここで $v_X|_p=\frac{d}{dt}(e^{-tX}\cdot p)|_{t=0}$ $(p\in M)$.

(QH3) $\operatorname{Ker}\omega_p\cap\operatorname{Ker}(d\mu)_p=\{0\}$ $(p\in M)$.

$\mathbb{G}\simeq G$ のとき，M は Alekseev–Malkin–Meinrenken の意味の擬ハミルトン G 空間である．従って上の定義は彼らのそれを運動量写像が一般の両側主等質空間に値を取れるように拡張したものといえる．なお我々がこれを導入した直後，G がコンパクトリー群，M が可微分多様体の場合にほぼ同じ概念を Meinrenken [10] も導入している．

G の余随伴軌道がハミルトン G 空間の構造を持つ事の乗法的類似として，G の共役類には包含写像を運動量写像とする擬ハミルトン G 空間の構造が入る事がよく知られている．この事実は次のように拡張される．

例 3.2. G の両側主等質空間 $\mathbb{G}$ の任意の共役類（共役作用に関する軌道）$\mathcal{C}\subset\mathbb{G}$ は，包含写像 $\mathcal{C}\hookrightarrow\mathbb{G}$ を運動量写像とする擬ハミルトン G 空間の構造を持つ．微分形式 ω は次式で与えられる：

$$\omega_x(v_X,v_Y)=\frac{1}{2}(X,\operatorname{Ad}_x Y)-\frac{1}{2}(Y,\operatorname{Ad}_x X)\qquad(x\in\mathcal{C},\ X,Y\in\mathfrak{g}).$$

ここで $\operatorname{Ad}_x\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ は x が定める G の自己同型 ϕ_x の単位元における微分である．

更に，任意の両側主等質空間 $\mathbb{G}$（特に G）も擬ハミルトン $G\times G$ 空間の構造を持つ事が次のようにして分かる．

例 3.3. $\mathbb{G}$ を G の両側主等質空間とする．$\mathbb{G}\times\mathbb{G}$ に $G\times G$ の両側主等質空間としての構造を

$$(g_1,g_2)(x,y)=(g_1x,yg_2^{-1}),\quad(x,y)(g_1,g_2)=(xg_2,g_1^{-1}y)$$

によって入れたものを $\mathbb{H}$ とすると，対角集合 $\{\,(x,x)\,|\,x\in\mathbb{G}\,\}\simeq\mathbb{G}$ は $\mathbb{H}$ の共役類である．よって G の任意の両側主等質空間 $\mathbb{G}$ は擬ハミルトン $G\times G$ 空間の構造を持つ．なお $G\times G$ の $\mathbb{G}$ への作用は $(g_1,g_2)\cdot x=g_1xg_2^{-1}$ で与えられる．

元々の擬ハミルトン G 空間について知られている事柄の多くは主等質空間に値を取る場合に拡張される．代表的なものを挙げておこう：

(1) アフィン代数多様体である擬ハミルトン G 空間 M に対し，そのアフィン商 $M/G=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[M]^G$ にポアソン構造が定まる．

(2) $\mathbb{G},\mathbb{H}$ をそれぞれ複素簡約群 G,H の両側主等質空間とし，M を擬ハミルトン $G\times H$ 空間でその運動量写像を

$$(\mu_G,\mu_H)\colon M\to\mathbb{G}\times\mathbb{H}$$

とする． また $\mathcal{C}\subset\mathbb{G}$ を共役類とする．もし $\mu_G^{-1}(\mathcal{C})$ に G が自由に作用し幾何的商 $M/\!\!/_{\mathcal{C}}\,G:=\mu_G^{-1}(\mathcal{C})/G$ が代数多様体として存在すれば，$M/\!\!/_{\mathcal{C}}\,G$ に擬ハミルトン H 空間の構造が定まる．これを M の $\mathcal{C}$ に沿った**擬ハミルトン簡約**と呼ぶ．なお $\mathbb{G}=G,\mathcal{C}=\{1\}$ の場合はこれを単に $M/\!\!/G$ と書く．

(3) $\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2$ を G の両側主等質空間とし，$\mathbb{H}$ を別の複素簡約群 H の両側主等質空間とする．自明な方法で $\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2\times\mathbb{H}$ を $G\times G\times H$ の両側主等質空間とみなす．M を運動量写像

$$(\mu_1,\mu_2,\mu_H)\colon M\to\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2\times\mathbb{H}$$

を持つ擬ハミルトン$G\times G\times H$空間とすると，Gの対角作用とHの作用に関してMに

$$(\mu_1\cdot\mu_2,\mu_H)\colon M\to\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\times\mathbb{H}$$

を運動量写像とする擬ハミルトン$G\times H$空間の構造が定まる．その微分形式ω_{diag}は，元の微分形式ωから次のようにして得られる：

$$\omega_{\mathrm{diag}}=\omega-\frac{1}{2}(\mu_1^*\theta,\mu_2^*\overline{\theta}).$$

特に$i=1,2$に対し，$\mathbb{H}_i$を複素簡約群H_iの両側主等質空間，M_iを$\mathbb{G}_i\times\mathbb{H}_i$値運動量写像を持つ擬ハミルトン$G\times H_i$空間とすると，直積$M_1\times M_2$は自然に擬ハミルトン$G\times G\times H_1\times H_2$空間の構造を持つため，今述べた方法により，$M_1\times M_2$に（$\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\times\mathbb{H}_1\times\mathbb{H}_2$値運動量写像を持つ）擬ハミルトン$G\times H_1\times H_2$空間の構造が定まる．これを$M_1\circledast M_2$と書き$M_1$と$M_2$の**フュージョン**と呼ぶ．

(4) 上で$\mathbb{G}_2=\mathbb{G}_1^{-1}$の場合，擬ハミルトン簡約$M_1\underset{G}{\leftrightarrows}M_2:=(M_1\circledast M_2)/\!\!/G$が存在すればそれを$M_1$と$M_2$の**貼りあわせ**と呼ぶ．例えば(2)の状況で$\mathcal{C}^{-1}\subset\mathbb{G}^{-1}$を$\mathcal{C}$の元の逆元からなる共役類とすると，$M\underset{G}{\leftrightarrows}\mathcal{C}^{-1}\simeq M/\!\!/_{\mathcal{C}}\,G$である．

例 3.4. $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$をGの両側主等質空間とする．前の例で述べた方法で$\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2^{-1}$に擬ハミルトン$G\times G$空間の構造を入れ，それらのフュージョン$\mathbf{D}(\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2):=\mathbb{G}_1\circledast\mathbb{G}_2^{-1}$を考えると，これの運動量写像は$\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\times\mathbb{G}_1^{-1}\cdot\mathbb{G}_2^{-1}$に値を取ると考えて良い事が分かる．実際，$\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_1$に前の例で述べた方法で両側主等質空間の構造を入れたものを$\mathbb{H}_1$とし，同様の方法で$\mathbb{G}_2^{-1}$から得られるものを$\mathbb{H}_2$とすると，両側主等質空間の同型

$$\mathbb{H}_1\cdot\mathbb{H}_2\xrightarrow{\simeq}\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\times\mathbb{G}_1^{-1}\cdot\mathbb{G}_2^{-1};\qquad(x_1,y_1)\cdot(x_2^{-1},y_2^{-1})\mapsto(x_1y_2,y_1^{-1}x_2^{-1})$$

が得られる．このとき運動量写像は

$$\mathbb{G}_1\circledast\mathbb{G}_2^{-1}\to\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\times\mathbb{G}_1^{-1}\cdot\mathbb{G}_2^{-1};\qquad(x_1,x_2^{-1})\mapsto(x_1x_2,x_1^{-1}x_2^{-1})$$

で与えられる．これはGの**ダブル**と呼ばれる擬ハミルトン$G\times G$空間$\mathbf{D}(G):=G\times G$の一般化である．更に(3)で述べた方法により，Gの対角作用に関し$\mathbf{D}(\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2)$に擬ハミルトン$G$空間の構造を入れたものを$\mathbb{D}(\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2)$と書く．これの運動量写像は$\mathbb{G}_1$と$\mathbb{G}_2$の「交換子」$\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\cdot\mathbb{G}_1^{-1}\cdot\mathbb{G}_2^{-1}$に値を取る．

4. 主定理と一般化

定理2.9は，次の主定理の系として得られる：

定理 4.1. ストークス表現の空間$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$は滑らかなアフィン代数多様体で，形式的モノドロミーの逆元を取る写像

$$\mu\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))\to\mathbf{H}(\partial)^{-1};\quad\rho\mapsto(\rho(\partial_b)^{-1})_{b\in\beta}$$

を運動量写像とする擬ハミルトン$\mathbf{H}$空間の構造を持つ．

特に，補題2.10で扱った$\mathcal{A}(Q)$に擬ハミルトン空間の構造が定まる．実は一般の場合はフュージョンを用いて

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))\simeq\mathcal{A}(Q_1)\circledast\cdots\circledast\mathcal{A}(Q_m)\circledast\mathbb{D}(G,G)^{\circledast g}/\!\!/\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

と表される（ここで$m=\#\alpha$とおいた）．

4.1. Twisted fission spaces

補題2.10で扱った$\mathcal{A}(Q)$に擬ハミルトン空間の構造が定まる事を示せば，定理4.1の主張が従う．実は$\mathcal{A}(Q)$自身も，より基本的な擬ハミルトン空間 (fission space) をいくつか貼り合わせて得られる．

Gを複素簡約群とする．次のようなデータが与えられたとしよう：

- Gのある放物型部分群のレヴィ部分群H.
- H共役で保たれるGの冪単部分群U_i, $i=1,2,\dots,s$.
- Gの主等質空間$\mathbb{G}$.
- $H\times H$不変部分多様体$\mathbb{H}\subset\mathbb{G}$でそれ自身が$H$の主等質空間となるもの．

このとき

$$U_{is+j}=\mathbb{H}^{-i}U_j\mathbb{H}^i\subset G \qquad (i\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s)$$

とおくと，全てのU_j, $j\in\mathbb{Z}$はH共役で保たれる冪単部分群である．

今$l\in\mathbb{Z}_{>0}$が存在して任意の$j\in\mathbb{Z}$に対し次が成り立つと仮定しよう：

(1) $U_{j+2l}=U_j$.

(2) 部分群$U_{j+1},U_{j+2},\dots,U_{j+l}$は，$H$をレヴィ部分群とするある放物型部分群$P_+$の冪単根基$U_+$に含まれ，かつ積を取る写像

$$U_{j+l}\times\cdots\times U_{j+2}\times U_{j+1}\to U_+;\quad (S_{j+l},\dots,S_{j+2},S_{j+1})\mapsto S_{j+l}\cdots S_{j+2}S_{j+1}$$

は代数多様体としての同型である．また$U_{j+l+1},\dots,U_{j+2l}$はP_+と opposite な放物型部分群P_-の冪単根基U_-に含まれ，これについても同様の事が成り立つ．

このとき

$$\mathcal{A}=G\times\mathbb{H}\times\prod_{i=1}^{s}U_i$$

とおき，群$G\times H$を$\mathcal{A}$に

$$(g,k)\cdot(C,h,(S_i))=(kCg^{-1},khk^{-1},(kS_ik^{-1}))$$

によって作用させ，また$G\times H$同変な写像$\mu=(\mu_G,\mu_H)\colon\mathcal{A}\to\mathbb{G}\times\mathbb{H}^{-1}$を

$$\mu_G(C,h,(S_i))=C^{-1}hS_s\cdots S_1C,\quad \mu_H(C,h,(S_i))=h^{-1}$$

と定める．更に$\mathcal{A}$上の微分形式ωを

$$2\omega=(C^*\overline{\theta},\mathrm{Ad}_b\,C^*\overline{\theta})+(C^*\overline{\theta},b^*\overline{\theta}_{\mathbb{G}})+(C_s^*\overline{\theta},h^*\theta_{\mathbb{H}})-\sum_{i=1}^{s}(C_i^*\theta,C_{i-1}^*\theta).$$

と定義する．ただし$\theta,\overline{\theta}$はG上のモーレー・カルタン形式，$\overline{\theta}_{\mathbb{G}},\theta_{\mathbb{H}}$は$\mathbb{G},\mathbb{H}$上のモーレー・カルタン形式（上線が付いたものは右不変）で，

$$C_i=S_i\cdots S_2S_1C\colon\mathcal{A}\to G,\qquad b=hS_s\cdots S_2S_1\colon\mathcal{A}\to\mathbb{G}$$

とおいた．

補題 4.2. $(\mathcal{A}, \omega, \mu)$ は擬ハミルトン $G \times H$ 空間である．

このようにして得られる擬ハミルトン空間 $\mathcal{A}$ を **(twisted) fission space** と呼ぶ．空間 $\mathcal{A}(Q)$ は，複素簡約群の包含列

$$H_0 = K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_r \subset K_{r+1} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

各 K_i の両側主等質空間

$$H(\partial_0) = \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_{r+1} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

及び運動量写像が $\mathbb{K}_{i+1} \times \mathbb{K}_i^{-1}$ に値を取る擬ハミルトン $K_{i+1} \times K_i$ 空間の構造を備えた fission space $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$ を適当に取れば

$$\mathcal{A}(Q) \simeq \mathcal{A}_1 \underset{K_2}{\circledast} \mathcal{A}_2 \underset{K_3}{\circledast} \cdots \underset{K_r}{\circledast} \mathcal{A}_r$$

と表す事ができる．この $\mathcal{A}(Q)$ の fission space による分解は，ストークス群の**レベル分解**（[4, 8, 9] 参照）

$$\mathbb{S}\mathrm{to}_d \simeq \mathbb{S}\mathrm{to}_d(k_1) \times \mathbb{S}\mathrm{to}_d(k_2) \times \cdots \times \mathbb{S}\mathrm{to}_d(k_r)$$

に付随して起こる．ここで $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ は $\mathrm{End}\,\mathcal{L}_d$ 内に非自明な斉次元を持つ次数 q 達のレベルを並べたものであり，$\mathbb{S}\mathrm{to}_d(k)$ は，$\mathrm{lev}(q) = k$ を満たす全ての POM q に渡る $(\mathrm{End}\,\mathcal{L}_d)_q$ の直和をリー環とする $\mathbb{S}\mathrm{to}_d$ の連結閉部分群である．各 $\mathcal{A}_i$ を構成する冪単部分群 U_j, $j = 1, 2, \ldots, s$ は $\mathbb{S}\mathrm{to}_d(k_i)$, $d \in \mathbb{A}$ で与えられる．

4.2. 構造群の一般化

これまでの話は全て接続の構造群が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の場合を扱っていたが，[5] では一般の複素簡約群 G を構造群とするストークス局所系を導入し，そのモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{\Sigma}, G)$ に関してもポアソン構造の構成を行っている．これについて少し述べる．

定理 1.1 は複素簡約構造群の場合へ次のように一般化される．まず複素 n 次元ベクトル空間と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の主等質空間[1]の間に対応がある事を思い出そう．実際，W が n 次元ベクトル空間であれば，$\mathbb{C}^n$ から W への線形同型全体 $\mathbb{G}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の主等質空間であり，逆に主等質空間 $\mathbb{G}$ に対し，$W = \mathbb{G} \times_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \mathbb{C}^n$ は n 次元ベクトル空間の構造を持つ．この対応の下で $\mathrm{GL}(W)$ と主等質空間の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,\mathbb{G}$ は自然に同型になる．次にベクトル空間 W の有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群 X による次数付けと，X を指標格子とするトーラス $T_X = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{C}^\times)$ の W への作用が対応する事を思い出して，$\mathbb{Z}$ 加群 $\mathcal{Q}$ を「指標格子」とする副トーラス $T_{\mathcal{Q}}$ を考える（$\mathcal{Q}$ は有限生成でない事に注意しよう）．なおこの副トーラスは [9] にも現れる．$\mathcal{Q}$ のモノドロミー自己同型 σ は $T_{\mathcal{Q}}$ の自己同型 σ を誘導する．よって定理 1.1 にある対 (W, M_W) は，

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の主等質空間 $\mathbb{G}$,
- $\mathbb{G}$ の自己同型 $M \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{G}$,
- 群準同型 $\varphi\colon T_{\mathcal{Q}} \to \mathrm{Aut}\,\mathbb{G}$ で，$\mathcal{Q}$ のある有限生成部分自由 $\mathbb{Z}$ 加群 X を指標格子とするトーラス T_X への自然な全射 $T_{\mathcal{Q}} \twoheadrightarrow T_X$ と代数群の射 $T_X \to \mathrm{Aut}\,\mathbb{G}$ の合成として表されるようなもの

[1] 特に断らない限り主等質空間の作用は右作用であると約束する．

からなる三つ組で，任意の $t \in T_{\mathcal{Q}}$ に対し $\varphi(\sigma(t)) = M\varphi(t)M^{-1}$ を満たすものと対応する．この三つ組は一般の複素簡約構造群 G の場合に直ちに拡張され，そのようなものの圏と $\operatorname{Spec}\mathbb{C}(\!(z)\!)$ 上の G 接続の圏は同値になる．

G **局所系**とは，G の主等質空間をファイバーとする局所系の事であった．上の三つ組の定義を基にすれば，円 ∂ 上の $\mathcal{I}$ **次数付き** G **局所系**の概念を定義する事は容易である．不確定類，ストークス群といった概念も自然に拡張され，それらを用いて不確定曲線上の**ストークス** G **局所系**や，付随する基本亜群 Π のストークス表現の空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, G)$ が定義される．定理4.1はその場合でも正しい．

4.3. 構造群のねじれ

[5]では，更に複素簡約構造群が局所定数で動く状況を扱っている．すなわち，複素簡約群 G を固定して，ファイバーが G と同型な代数群の局所系 $\mathcal{G}$ を取り，各点におけるファイバーがその点における $\mathcal{G}$ のファイバーの主等質空間であるような局所系（$\mathcal{G}$ **局所系**）を G 局所系の代わりに用いるのである．$\mathcal{G}$ 局所系のある点 b を基点とする閉曲線に沿ったモノドロミーの住処は，$\mathcal{G}$ 自身のモノドロミーを $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_b)$ としたとき両側主等質空間 $\mathcal{G}_b(\phi)$ と同一視される．この場合にも不確定類や不確定曲線，その上の**ストークス** $\mathcal{G}$ **局所系**といった概念が定義される．またストークス表現の空間も $\mathrm{Hom}(\Pi, G \rtimes \mathrm{Aut}(G))$ のある部分集合として定義され，定理4.1も拡張される．

参考文献

[1] A. Alekseev, A. Malkin, and E. Meinrenken, *Lie group valued moment maps*, J. Differential Geom. **48** (1998), no. 3, 445–495.

[2] P. Boalch, *Quasi-Hamiltonian geometry of meromorphic connections*, Duke Math. J. **139** (2007), no. 2, 369–405.

[3] ______, *Through the analytic Halo: fission via irregular singularities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 7, 2669–2684.

[4] ______, *Geometry and braiding of Stokes data; fission and wild character varieties*, Ann. of Math. (2) **179** (2014), no. 1, 301–365.

[5] P. Boalch and D. Yamakawa, *Twisted wild character varieties*, arXiv:1512.08091.

[6] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics **163**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[7] M. Hukuhara, *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires. II*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. **5** (1937), no. 3-4, 123–166.

[8] M. Loday-Richaud, *Stokes phenomenon, multisummability and differential Galois groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44** (1994), no. 3, 849–906.

[9] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Elementary acceleration and multisummability. I*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **54** (1991), no. 4, 331–401.

[10] E. Meinrenken, *Convexity for twisted conjugation*, arXiv:1512.09000.

[11] T. A. Springer, *Twisted conjugacy in simply connected groups*, Transform. Groups **11** (2006), no. 3, 539–545.

[12] H. L. Turrittin, *Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point*, Acta Math. **93** (1955), 27–66.

[13] M. van der Put and M.-H. Saito, *Moduli spaces for linear differential equations and the Painlevé equations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 7, 2611–2667.

[14] M. van der Put and M. F. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **328**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

Algebraic construction of multi-species q-Boson system

竹山 美宏　(筑波大学数理物質系)*

先の論文 [6] では, アフィンヘッケ代数の変形を定義し, その表現を使って可積分な確率過程の Q 行列を構成した. ここで得られた確率過程は, q-Hahn 系の連続時間極限 [1, 4] であり, q-Boson 系 [5] の拡張となっている. 今回の講演では, 以上の結果を表現論的に拡張することにより「多種の粒子が運動する q-Boson 系」と見なされる確率過程が得られることについて述べる [7]. 以下の構成は Emsiz-Opdam-Stokman によるデルタボーズガスの拡張 [2] の差分化になっている.

2 以上の正の整数 k(粒子数) を固定する. GL_k 型のアフィンヘッケ代数の変形 $\mathcal{A}_k$ を, 生成元 $X_i^{\pm 1} (1 \le i \le k)$, $T_i (1 \le i < k)$ と次の関係式によって定義する.

$$
\begin{aligned}
&(T_i - 1)(T_i + q) = 0 \quad (1 \le i < k), \qquad T_i T_{i+1} T_i = T_i T_{i+1} T_i \quad (1 \le i \le k-2), \\
&T_i T_j = T_j T_i \quad (|i-j| > 1), \quad X_i X_j = X_j X_i \quad (i, j = 1, \ldots, k), \\
&X_{i+1} T_i - T_i X_i = T_i X_{i+1} - X_i T_i = (1-q) X_{i+1} + \alpha \quad (1 \le i < k), \\
&X_i T_j = T_j X_i \quad (i \ne j, j+1).
\end{aligned}
$$

ただし α, q はパラメータである. $T_i (1 \le i < k)$ が生成する部分代数 $\mathcal{H}_k$ は, A_{k-1} 型のヘッケ代数と同型である. $\alpha = 0$ のとき $\mathcal{A}_k$ は GL_k 型のアフィンヘッケ代数となる.

k 次元ユークリッド空間 $V = \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{R} v_i$ とその双対 $V^* = \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{R} \epsilon_i$ を用意し, A_{k-1} 型ルート系の単純ルート $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ を $a_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ で実現する. Weyl 群とその生成元を $W = \langle s_1, \ldots, s_{k-1} \rangle$ とする.

M は左 $\mathcal{H}_k$-加群であるとする. $L = \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z} v_i$ とし, M に値を取る L 上の関数全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $F(L, M)$ とする. Weyl 群 W は $F(L, M)$ に左から作用する. また, $(\widehat{T}_i f)(x) = T_i . f(x)$ $(1 \le i < k, f \in F(L, M), x \in L)$ によって $\mathcal{H}_k$ の作用が定まる. ただし . は $\mathcal{H}_k$ の M への作用である.

L の群環 $\mathbb{C}[L]$ を $\mathbb{C}[e^{\pm v_1}, \ldots, e^{\pm v_k}]$ と同一視する. 写像 $\check{I}_i : \mathbb{C}[L] \to \mathbb{C}[L]$ $(1 \le i < k)$ を

$$
\check{I}_i(P) = (P - P s_i) \frac{\alpha e^{v_{i+1}} + 1 - q}{1 - e^{-v_i + v_{i+1}}}
$$

で定義する. ただし W の右作用 $P s_i$ は $e^x w = e^{w^{-1} x}$ $(x \in L, w \in W)$ で定める. 非退化な pairing $\mathbb{C}[L] \times F(L, M) \to M$ を $(e^x, f) = f(x)$ $(x \in L, f \in F(L, M))$ で定め, 写像 $\widehat{I}_i : F(L, M) \to F(L, M)$ を $(\check{I}_i(P), f) = (P, \widehat{I}_i(f))$ $(\forall P \in \mathbb{C}[L])$ で定義する. さらに, シフト作用素 $(t_i f)(x) = f(x - v_i)$ $(1 \le i \le k, f \in F(L, M), x \in L)$ を考えると, 次のことが言える.

命題 $F(L, M)$ 上の $\mathcal{A}_k$ の表現 ρ が $\rho(X_i) = t_i$, $\rho(T_i) = \widehat{T}_i s_i + \widehat{I}_i$ により定まる.

$L_+ = \{x \in L \,|\, \forall i : a_i(x) \ge 0\}$ とする. $x \in L$ に対し $wx \in L_+$ を満たす W の最短元 w を w_x で表す. W の元 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ (reduced expr.) に対し $T_w = T_{i_1} \cdots T_{i_r}$ と定める. このとき, propagation operator $G : F(L, M) \to F(L, M)$ を $(Gf)(x) = T_{w_x}^{-1} . ((\rho(T_{w_x}) f)(w_x x))$ で定める.

$x \in L$ に対し $d_i^{\pm}(x) = \#\{p \,|\, p \gtrless i, \epsilon_i(x) = \epsilon_p(x)\}$ $(1 \le i \le k)$ とおき, $\sigma_x \in \mathfrak{S}_k$ を $w_x v_i = v_{\sigma_x(i)}$ $(\forall i)$ により定める. このとき, $T_i^{(\pm)}(x) \in \mathcal{H}_k$ $(1 \le i \le k)$ を次で定義する.

$$
\begin{aligned}
T_i^{(-)}(x) &= T_{w_x}^{-1} \left(T_{\sigma_x(i)-1}^{-1} \cdots T_{\sigma_x(i)-d_i^-(x)}^{-1} \right) \left(T_{\sigma_x(i)-d_i^-(x)}^{-1} \cdots T_{\sigma_x(i)-1}^{-1} \right) T_{w_x}, \\
T_i^{(+)}(x) &= T_{w_x}^{-1} \left(\sum_{j=\sigma_x(i)}^{\sigma_x(i)+d_i^+(x)-1} \left(T_{\sigma_x(i)}^{-1} \cdots T_{j-1}^{-1} \right) T_j^{-1} \left(T_{j-1} \cdots T_{\sigma_x(i)} \right) \right) T_{w_x}.
\end{aligned}
$$

本研究は科研費 (基盤 (C) 課題番号:24600106) の助成を受けたものである。
* e-mail: takeyama@math.tsukuba.ac.jp
web: http://researchmap.jp/takeyama/

定理 次で定まる $H : F(L,M) \to F(L,M)$ について $HG = G(\sum_{i=1}^{k} t_i)$ が成り立つ.

$$(Hf)(x) = \sum_{i=1}^{k} q^{d_i^-(x)} T_i^{(-)}(x). \Big(f(x - v_i) - \alpha T_i^{(+)}(x).f(x) \Big) \quad (f \in F(L,M), x \in L)$$

さらに, 次の部分空間 $F_0(L,M)$ は H に関して不変である.

$$F_0(L,M) = \{ f \in F(L,M) \,|\, f(s_i x) = T_i^{-1}.f(x) \text{ if } a_i(x) \geq 0 \, (1 \leq i < k) \}$$

正の整数 N(粒子の種類) を固定する. ベクトル空間 $(\mathbb{C}^N)^{\otimes k}$ には, R 行列の作用によって $\mathcal{H}_k$-加群の構造が入る [3]. そこで以下では $M = (\mathbb{C}^N)^{\otimes k}$ の場合を考える.

$1, 2, \ldots, N$ のいずれかの番号のついた k 個のボゾン粒子を考える. 1 次元の格子 $\mathbb{Z}$ にこれらの粒子を並べた配置全体のなす集合を $\mathcal{S}$ とする. このとき, $\mathcal{S}$ 上の複素数値関数全体のなすベクトル空間 $F(\mathcal{S})$ と $F_0(L, (\mathbb{C}^N)^{\otimes k})$ の間には同型写像がある (講演で簡単な場合の例を挙げる). この同型を $\psi : F(\mathcal{S}) \to F_0(L, (\mathbb{C}^N)^{\otimes k})$ と書く. さらに上で定義した作用素 H の $F_0(L,M)$ への制限を H^+ とする.

定理 $0 < q < 1, \alpha = -(1-q)$ とする. このとき, $Q = \psi^{-1} H^+ \psi - k$ は $\mathcal{S}$ に値を取る連続時間マルコフ連鎖の Q 行列 (transition rate matrix) となる.

この定理で得られた Q 行列が定める確率過程は以下のように記述される. $\mathbb{Z}$ 上に $1, 2, \ldots, N$ のいずれかの番号のついた k 個の粒子がある. 同じサイトに複数の粒子があってもよい. これらのうち 1 個の粒子が, サイト i から $i-1$ に, i に関して独立に動く. 番号 a の粒子が m_a 個あるサイトから $(1 \leq a \leq N)$, 番号 b の粒子が動くレートは

$$\frac{1 - q^{m_b}}{1 - q} q^{\sum_{a=b+1}^{N} m_a}$$

である. 特に $N = 1$ の場合は q-Boson 系におけるレートと定数倍を除いて一致するので, ここで得られた確率過程は q-Boson 系の拡張となっている.

以上の表現論的な枠組みにおいては, Q 行列に対する固有関数も (少なくとも原理的には) 自然に構成できる. 時間があればこの点についても簡単に述べる予定である.

参考文献

[1] Barraquand G. and Corwin I., The q-Hahn asymmetric exclusion process, preprint, `arXiv:1501:03445`.

[2] Emsiz, E., Opdam, E. M., and Stokman, J. V., Trigonometric Cherednik algebra at critical level and quantum many-body problems, *Selecta Math.* **14** (2009), no. 3-4, 571–605.

[3] Jimbo, M., A q-analogue of $U(gl(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **11** (1986), no. 3, 247–252.

[4] Povolotsky, A. M., On the integrability of zero-range chipping models with factorized steady states, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46** (2013), 465205.

[5] Sasamoto, T. and Wadati, M., Exact results for one-dimensional totally asymmetric diffusion models, *J. Phys. A* **31** (1998), no. 28, 6057–6071.

[6] Takeyama, Y., A deformation of affine Hecke algebra and integrable stochastic particle system, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47** (2014), 465203.

[7] Takeyama, Y., Algebraic construction of multi-species q-Boson system, preprint, `arXiv:1507.02033`.

多状態TAZRP

国場 敦夫　(東大総合文化)
丸山 翔也　(東大総合文化)
尾角 正人　(阪市大理)

秋の学会で報告したn-TASEPのいわば姉妹版を構成したので報告する．

1. n-TAZRP

サイト数Lの周期的一次元格子を考える．各サイトは$i \in \mathbb{Z}_L$でラベルされ，状態$\sigma_i = (\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$をとるものとする．これは$n$種ある粒子のうち$j$番目のものが$\sigma_i^j$個ある状態を表す．サイト上の状態は枠が一行のヤング盤$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ $(1 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_r \leq n)$で表示することもできる．$(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$をそれぞれ2サイトでの状態のペアとし，$(\beta_1, \dots, \beta_r)$を$\beta$のヤング盤表示とするとき

$$(\alpha, \beta) > (\gamma, \delta) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \gamma = \alpha \cup \{\beta_1, \dots, \beta_k\},\ \delta = (\beta_{k+1}, \dots, \beta_r)\ \text{ for some } k \in [1, r]$$

と定義する．ただし，$\alpha \cup \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$は多重集合としての和集合である．任意の隣り合うサイト$(i, i+1)$で，その状態(α, β)が$(\alpha, \beta) > (\gamma, \delta)$なる$(\gamma, \delta)$に一定の遷移確率で移るダイナミクスに従う確率過程をn-TAZRP(totally asymmetric zero range process)という．たとえば，状態$(235, 12446)$は次の状態の1つに等確率で移る．

$$(1235, 2446), (12235, 446), (122345, 46), (1223445, 6), (12234456, \emptyset)$$

n-TAZRPダイナミクスはn種の粒子の重複度$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$を保存するので，状態は$\mathbf{m}$によって定まるセクター

$$S(\mathbf{m}) = \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_L),\, \sigma_i = (\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \mid \sum_{i=1}^{L} \sigma_i^a = m_a, \forall a \in [1, n]\}$$

に分かれる．時刻tに配置$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_L)$をとる(相対)確率を$P(\boldsymbol{\sigma}; t)$とし，$|P(t)\rangle = \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in S(\mathbf{m})} P(\boldsymbol{\sigma}; t)\, |\boldsymbol{\sigma}\rangle$ とおくと，n-TAZRPは次のマスター方程式で特徴づけられる．

$$\frac{d}{dt}|P(t)\rangle = H|P(t)\rangle, \qquad H = \sum_{i \in \mathbb{Z}_L} h_{i,i+1}, \qquad h\,|\alpha, \beta\rangle = \sum_{\gamma, \delta} h_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta}\, |\gamma, \delta\rangle\,,$$

$$h_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta} = 1\ ((\alpha, \beta) > (\gamma, \delta)),\ = -|\beta|\ ((\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)),\ = 0\ (\text{otherwise}).$$

ここで，$h_{i,i+1}$は$i, i+1$番目の成分にh，他の成分には1で作用する．我々は$H|P(t)\rangle = 0$となる状態（定常状態）に興味がある．これは，Lとセクター$\mathbf{m}$によってただ1つに定まるので$\left|\bar{P}_L(\mathbf{m})\right\rangle$と表す.

2. 組合せRと multiline process

セクター$S(\mathbf{m})$の重複度$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^n$に対し$\ell_a = m_a + m_{a+1} + \cdots + m_n$ $(1 \leq a \leq n)$と定め，次のようにおく．

$$B(\mathbf{m}) = B_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes B_{\ell_n}, \quad B_\ell = \{(x_1, \dots, x_L) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \mid x_1 + \cdots + x_L = \ell\}$$

B_ℓは$U_q(\widehat{sl}_L)$のℓ次対称テンソル表現に付随する結晶基底である．サイト$i+1$からiへ小さい種から順にk個の粒子が移動するプロセスをτ_i^kで表す.

Proposition 1. $(i,a,k) \in \mathbb{Z}_L \times [1,n] \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，$\tilde{\tau}^k_{i,a} = \tau^k_i \,(a=1), = 1\,(a \in [2,n])$ とおく．このとき，写像 $T^k_{i,a}$ と組合せ R の合成により定義される射影 π が定義できて次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd} B(\mathbf{m}) \arrow[r, "T^k_{i,a}"] \arrow[d, "\pi"'] & B(\mathbf{m}) \arrow[d, "\pi"] \\ S(\mathbf{m}) \arrow[r, "\tilde{\tau}^k_{i,a}"'] & S(\mathbf{m}) \end{tikzcd}$$

n-TASEP のときは π にあたるものが [2] で与えられており，ℓ 次反対称テンソル表現に付随する結晶基底の組合せ R により再定式化がされている [3].

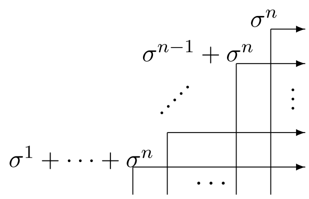
3. 主結果

n-TASEP のときと全く同様に，次の結果が得られる [4].

Theorem 2. *n-TAZRP* の定常状態は $|\bar{P}_L(\mathbf{m})\rangle = \sum_{\mathbf{x}\in B(\mathbf{m})} |\pi(\mathbf{x})\rangle$ と表せる．

$\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$ に対し，X_σ を

$$X_\sigma = \sum$$



で定義する．各交点にはフォック空間 F に働く $q=0$ 振動子代数に値をとる頂点模型があり，和 $\sum$ は与えられた境界条件を満たす頂点模型のすべての状態にわたってとる．

Theorem 3. *n-TAZRP* の定常状態は，次のように行列積を使っても表せる．

$$|\bar{P}_L(\mathbf{m})\rangle = \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in S(\mathbf{m})} \mathbb{P}(\boldsymbol{\sigma})|\boldsymbol{\sigma}\rangle, \quad \mathbb{P}(\sigma_1, \ldots, \sigma_L) = \mathrm{Tr}_{F^{\otimes n(n-1)/2}}(X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_L})$$

Theorem 3 の導出は [1] に倣って示すこともできる．$\mathrm{Tr}(X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_L})$ が定常状態の確率であるためには $X_\alpha \hat{X}_\beta - \hat{X}_\alpha X_\beta = \sum_{\gamma,\delta} h^{\alpha,\beta}_{\gamma,\delta} X_\gamma X_\delta$ となる $\hat{X}_\alpha \in \mathrm{End}(F^{\otimes n(n-1)/2})$ が見つかればよい．実際これは，４面体方程式を満たす３次元格子模型の層転送行列の可換性を使って構成される [5].

参考文献

[1] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquier, Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation, J. Phys. A: Math. Gen. **26** 1493–1517 (1993).

[2] P. A. Ferrari and J. B. Martin, Stationary distributions of multi-type totally asymmetric exclusion processes, Ann. Probab. **35** (2007) 807–832.

[3] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and combinatorial R, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015) 34FT02 (19pp).

[4] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: I. Multiline process and combinatorial R, in preparation.

[5] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: II. Hat relation and tetrahedron equation, in preparation.

箱玉系の線形化に対する初等的アプローチ

筧 三郎 (立教大学理学部)
Jonathan J.C. Nimmo (グラスゴー大学)
辻本 諭 (京都大学大学院情報学研究科)
Ralph Willox (東京大学大学院数理科学研究科)

箱玉系に対する「逆散乱法」[1] では，箱玉系の状態と，“rigged configuration” と呼ばれる組合せ論的対象とを対応付けることで，系の時間発展が線形化されることを主張する．論文 [1] におけるこの予想は，[2, 3] において証明された．論文 [2] においては，系の状態を行数が 2 の行列で表し，その行列を操作することで証明が行われている．また，[3] においてはクリスタル理論の立場からの証明が与えられている．本研究では，この「rigged configuration による線形化」という定理に対して，より初等的かつ簡明な証明を与えることを第 1 の目的とする．

“Rigged configuration” とは，具体的にはヤング図形と数字の組 (rigging) のことであり，可積分量子スピン系に対するベーテ方程式の根の研究から生まれた概念である．論文 [4] では，rigged configuration によって箱玉系の時間発展が線形化されるという事実を利用して，周期箱玉系の初期問題の解を与えている．一方，間田・泉・時弘の研究 [5] では，“10-elimination” という定式化により周期箱玉系の初期問題の解が与えている．これら 2 つの手法が等価であることは [6] で考察されている．

上述の成果において,「線形化」という事実は大変重要であるが，その証明は (少なくとも筆者にとっては) 複雑なものである．また，間田らの “10-elimination” という定式化自体は，クリスタル理論を経由する必要がないという意味で初等的であるが，その後の組合せ論的議論は複雑である．本研究では，上述の成果をふまえた上で，“10-elimination” と “01-elimination” を同時に考えることで,「時間発展の線形化」という事実の証明が著しく簡略化されることを示す.

箱玉系の状態は，“0”, “1” の半無限列で，以下の条件を持つものとする:

$$\mathcal{U} = \{\{u_n\}_{n=0,1,2,\dots}\,;\ u_0 = 0,\ u_n = 0 \text{ or } 1,\ u_n = 1 \text{ となる } n \text{ は有限個}\}.$$

さらに，$\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ に含まれる部分列 “10” の個数を $N_{10}(\mathbf{u})$ で表し，条件 $N_{10}(\mathbf{u}) = N$ である $\mathcal{U}$ の部分集合を $\mathcal{U}_N$ で表すことにする.

ここでは簡単のため，最も基本的な場合の時間発展を考える．系の時間発展 $T : \mathcal{U}_N \to \mathcal{U}_N$ は次のように与えられる [7]:

i) $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ に含まれる “10” をすべて “arc” でつなぐ.

ii) i) でつないだ “10” を無視して，残りの数列中の “10” をすべて “arc” でつなぐ. この操作を，“1” がなくなるまで繰り返す.

iii) つながれた “1” と “0” とをすべて入れ替える.

次に，写像 $\Phi_{10} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ を，$\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ に含まれる “10” を消去して左に詰めることで定義する (“10-elimination”)．01-elimination Φ_{01} も同様に定義すると，次が成り立つのは明らかであろう:

本研究は科研費 (課題番号:23540252, 25400110, 15K04893) の助成を受けたものである.

命題 1. $\Phi_{10} = \Lambda \circ \Phi_{01}$ (ただし $\Lambda : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ は右方向へのシフトとする).

命題 2. $T \circ \Phi_{10} = \Phi_{01} \circ T$.

写像 Φ_{10} は明らかに可逆ではなく，可逆にするには消去した “10” の位置を記録する必要がある．その際に,「ある場所における 1 つの “10 消去” が $\mathcal{U}_N \to \mathcal{U}_{N-1}$ となるときのみ記録する」というルールを採用する．具体的には，次の例のように考える:

例 1. $\mathbf{u} = 0110011101010011001000\cdots$

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbf{u} & : & 0\,1\,\overset{\frown}{1\,0}\,0\,1\,1\,\overset{\frown}{1\,0}\,\overset{\frown}{1\,0}\,\overset{\frown}{1\,0}\,0\,1\,\overset{\frown}{1\,0}\,0\,\overset{\frown}{1\,0}\,0\,0\cdots \\ \Rightarrow & \Phi_{01}(\mathbf{u}) & : & 0\,1\overset{\times}{|}0\,1\,1\overset{\times}{|}\overset{\bigcirc}{|}\overset{\bigcirc}{|}0\,1\overset{\times}{|}0\overset{\bigcirc}{|}0\,0\cdots \\ & n & : & 0\,1\;\;2\,3\,4\;\;\;\;\;\;5\,6\;\;7\;\;8\,9\cdots \end{array}$$

ここで $\overset{\bigcirc}{|}$ は記録する 10 消去，$\overset{\times}{|}$ は記録しない 10 消去に対応しており，消去は右から左の順に行うと考えている．(「記録する 10 消去」は，[5] の “0-soliton” に対応する．)

例 1 の場合は，$\{4, 4, 7\}$ というデータを記録することになる．これを $\rho_{10}(\mathbf{u}) = \{4, 4, 7\}$ と表すことにする．一般の $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ に対しても，同様にして $\rho_{10}(\mathbf{u})$ が定められる．01 消去に付随するデータ $\rho_{01}(\mathbf{u})$ も，同様にして定義できる．上述の ρ_{10} なる写像は，論文 [2] において導入された，$A_1^{(1)}$ の場合の rigged configuration の計算法と等価である．以上の準備の下で，以下の命題を示すことができる:

命題 3. $\rho_{10} = \rho_{01} \circ T$.

命題 4. 任意の $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ に対して，$\rho_{10}(\mathbf{u}) = \rho_{01}(\mathbf{u}) + \{1, \ldots, 1\}$.

箱玉系の時間発展の線形化という事実は，命題 1 ～ 4 からの帰結として得られる．命題 1 ～ 3 の成立はほぼ自明であり，議論を要するのは 命題 4 のみであるが，命題 4 も比較的単純な場合分けで証明できる．さらに，有限容量の運搬車による時間発展に対しても，同様の手法で時間発展が線形化されることを示すことができる．詳細については，講演の際に述べる．

参考文献

[1] 国場敦夫・尾角正人・高木太一郎・山田泰彦，箱玉系の頂点作用素と分配関数，数理解析研究所講究録 **1302** (2003), 91–107.

[2] T. Takagi, Inverse scattering method for a soliton cellular automaton, *Nucl. Phys.* **B707** (2005), 577–601 .

[3] A. Kuniba, M. Okado, R. Sakamoto, T. Takagi and Y. Yamada, Crystal interpretation of Kerov-Kirillov-Reshetikhin bijection, *Nucl. Phys.* **B740** (2006), 299–327.

[4] A. Kuniba, T. Takagi and A. Takenouchi, Bethe ansatz and inverse scattering transform in a periodic box-ball system, *Nucl. Phys.* **B747** (2006), 354–397.

[5] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, On the initial value problem of a periodic box-ball system, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006), L617–L623.

[6] A.N. Kirillov and R. Sakamoto, Relationships between two approaches: rigged configurations and 10-eliminations, *Lett. Math. Phys.* **89** (2009), 51–65.

[7] D. Yoshihara, F. Yura and T. Tokihiro, Fundamental cycle of a periodic box-ball system, *J. Phys. A*：*Math. Gen.* **36**, 99–121 (2003).

離散空間曲線の運動に対する行列式解と Pfaffian 解

廣瀬 三平 (芝浦工大教育イノベ)
井ノ口 順一 (筑波大数理物質)
梶原 健司 (九大 IMI)
松浦 望 (福岡大理)
太田 泰広 (神戸大理)

空間曲線の時間的な変形の典型例として, 局所誘導近似のもとでの渦糸の運動がよく知られている. 弧長パラメータ x と時間 t について, 渦糸方程式は $\gamma_t = \gamma_x \times \gamma_{xx}$ で与えられ, 曲線 γ と Frenet 枠 (T, N, B) は,

$$\gamma = \begin{pmatrix} (H+H^*)/F \\ i(H-H^*)/F \\ x-(2\log F)_z \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{\kappa F^3}\begin{pmatrix} (f^{*2}-g^{*2})G+(f^2-g^2)G^* \\ i((f^{*2}+g^{*2})G-(f^2+g^2)G^*) \\ -2f^*g^*G-2fgG^* \end{pmatrix},$$

$$T = \frac{1}{F^2}\begin{pmatrix} gf^*+fg^* \\ i(gf^*-fg^*) \\ ff^*-gg^* \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\kappa F^3}\begin{pmatrix} -i(f^{*2}-g^{*2})G-(f^2-g^2)G^* \\ (f^{*2}+g^{*2})G+(f^2+g^2)G^* \\ i(2f^*g^*G-2fgG^*) \end{pmatrix},$$

のように τ 函数 F, G, H, f, g を用いて書かれる. ここで, * は複素共役, z は補助変数, κ は曲率であり $\kappa = 2|G|/F$ によって与えられる. 複素曲率 $u = 2G/F$ は非線形 Schrödinger(NLS) 方程式 $iu_t = u_{xx} + \frac{1}{2}|u|^2 u$ に従う. 以上を離散化し, 離散空間曲線の可積分な時間発展および付随するソリトン方程式に対して, 行列式解や Pfaffian 解を構成することを目的とする.

離散曲線 γ_n の場合,

$$T_n = \frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{|\gamma_{n+1}-\gamma_n|}, \quad N_n = B_n \times T_n, \quad B_n = \frac{T_{n-1}\times T_n}{|T_{n-1}\times T_n|},$$

によって枠を定める. $|\gamma_{n+1}-\gamma_n| = 1$ の場合の典型的なソリトン解は, 二重 Wronski 行列式 $\tau_n^\nu(k)$ とゲージ因子 $\mathcal{G}_n(k)$,

$$\tau_n^\nu(k) = \begin{vmatrix} \left(p_i^{n+j-1}(1-p_i)^{-k}e^{\xi_i} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N+\nu} & \left(-(\frac{1}{p_i})^{j-1} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N-\nu} \\ \left((\frac{1}{p_i^*})^{n+j-1}(1-\frac{1}{p_i^*})^{-k}e^{-\xi_i^*} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N+\nu} & \left((p_i^*)^{j-1} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N-\nu} \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{G}_n(k) = \prod_{i=1}^{N}(p_i^*)^n(1-\frac{1}{p_i^*})^k e^{\xi_i^*}, \quad \xi_i = -\frac{1+p_i}{1-p_i}\frac{z}{2}+\theta_i,$$

を用いて,

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} (H_{n+1}+H_{n+1}^*)/F_n \\ i(H_{n+1}-H_{n+1}^*)/F_n \\ n-(2\log F_n)_z \end{pmatrix}, \quad T_n = \frac{1}{F_{n+1}F_n}\begin{pmatrix} g_{n+1}f_n^*+f_ng_{n+1}^* \\ i(g_{n+1}f_n^*-f_ng_{n+1}^*) \\ f_nf_n^*-g_{n+1}g_{n+1}^* \end{pmatrix},$$

のように与えられる．ただし，

$$F_n = \tau_n^0(0)\mathcal{G}_n(0), \quad H_n = \tau_n^1(2)\mathcal{G}_n(2), \quad f_n = \tau_n^0(-1)\mathcal{G}_n(-1), \quad g_n = -\tau_n^1(1)\mathcal{G}_n(1),$$

である．ここで p_i, θ_i は $|p_i| > 1$ なる定数である．このとき複素共役条件と正則性条件,

$$\left(\tau_{n+k}^{\nu}(k)\mathcal{G}_{n+k}(k)\right)^* = (-1)^{k\nu}\tau_n^{-\nu}(-k)\mathcal{G}_n(-k), \quad F_n > 0,$$

がみたされる．θ_i に時間依存性を導入することによって, 離散曲線の時間的な変形を考えることができる．その際, 複素共役条件を満足する変形のみが許される．離散曲線の複素曲率が従う方程式として, 離散化された NLS 方程式が現れる．

離散 NLS 方程式にはいくつかのバージョンが知られている．広田-辻本による離散 NLS 方程式には行列式解があることがわかっている．一方, 広田-辻本の離散 NLS 方程式から変数変換でえられる方程式,

$$b(u_{n+1}^{t+1} - u_n^t) = a(u_{n+1}^t - u_n^{t+1})\Gamma_{n+1}^t, \quad \frac{\Gamma_{n+1}^t}{\Gamma_n^t} = \frac{1+|u_n^t|^2}{1+|u_n^{t+1}|^2},$$

は $u_n^t = G_n^t/F_n^t$, $\Gamma_n^t = F_n^t F_{n-1}^{t+1}/F_n^{t+1}F_{n-1}^t$ とおくことにより,

$$b(G_{n+1}^{t+1}F_n^t - G_n^t F_{n+1}^{t+1}) = a(G_{n+1}^t F_n^{t+1} - G_n^{t+1}F_{n+1}^t), \quad F_{n+1}^t F_{n-1}^t - F_n^t F_n^t = |G_n^t|^2,$$

と双線形化され, 自然に Pfaffian 解をもつ．実際, 第一の双線形方程式は離散 mBKP 階層の方程式であり, 第二の双線形方程式は複素 mKdV 階層を BKP 階層に埋め込むときに現れる一次元戸田格子方程式である．ソリトン解は Pfaffian の成分を

$$(i,j) = \sum_{\nu=1}^{2N}\sum_{\mu=1}^{2N}\frac{p_\nu - p_\mu}{p_\nu + p_\mu}\varphi_\nu^i\varphi_\mu^j, \quad (d,i) = \sum_{\nu=1}^{2N}\varphi_\nu^i,$$

$$\varphi_\nu^i = (\frac{1+\alpha p_\nu}{1-\alpha p_\nu} + \frac{1-\alpha p_\nu}{1+\alpha p_\nu})^i(\frac{1+\alpha p_\nu}{1-\alpha p_\nu})^n(\frac{1+\beta p_\nu}{1-\beta p_\nu})^t c_\nu, \quad \alpha = \frac{a+b}{2}, \quad \beta = \frac{a-b}{2},$$

と定めることにより,

$$F_n^t = \begin{cases} \mathrm{Pf}(N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{even}, \\ \mathrm{Pf}(d, N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{odd}, \end{cases}$$

$$G_n^t = \begin{cases} \mathrm{Pf}(d, N, N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{even}, \\ \mathrm{Pf}(N, N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{odd}, \end{cases}$$

で与えられる．ここで複素共役条件と正則性条件のために $p_{N+\nu} = -p_\nu^*$ $(1 \le \nu \le N)$ ととり, さらに c_ν を適切にとる．c_ν の具体形は複雑である．

References

[1] S. Hirose, J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura, Y. Ohta, dNLS flow on Discrete Space Curves, MI Lecture Note Vol.64 (Kyushu University, 2015), 93-102, arXiv: 1511.08076.

[2] 本学会幾何学分科会における松浦による講演.

BKP 階層の解の展開について

執行　洋子 (津田塾大学)

変数 $x=(x_1,x_3,x_5,\cdots)$, $\quad y=(y_1,y_3,y_5,\cdots)$ に対して, BKP 階層 [1] は次のような双線形方程式で与えられる.

$$\oint e^{-2\tilde{\xi}(y,k)}\tau(x-y-2[k^{-1}]_o)\tau(x+y+2[k^{-1}]_o)\frac{dk}{2\pi ik}=\tau(x-y)\tau(x+y) \tag{1}$$

但し,

$$[\alpha]_o=(\alpha,\frac{\alpha^3}{3},\frac{\alpha^5}{5},\cdots),\qquad \tilde{\xi}(x,k)=\sum_{n=1}^{\infty}x_{2n-1}k^{2n-1}$$

とする.

任意の形式的ベキ級数 $\tau(x)$, $x=(x_1,x_3,x_5,\cdots)$ はシューアの Q 関数を用いて以下のように展開される.

$$\tau(x)=\sum_{\mu}\xi_\mu Q_\mu(\frac{x}{2}) \tag{2}$$

但し, 係数 ξ_μ は

$$\xi_\mu=2^{-l(\mu)}Q_\mu(\tilde{\partial})\tau(x)|_{x=0} \tag{3}$$

と定義され, μ は strict partition とする.

定理 1 **[4]** ベキ級数 $\tau(x)$(但し, $\tau(0)\neq 0$) が *BKP* 階層の解であるための必要十分条件は, 係数 ξ_μ, $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_l)$ が

$$\xi_{(\mu_1,\cdots,\mu_n)}=\mathrm{Pf}(\xi_{(\mu'_i,\mu'_j)})_{1\leq i.j\leq 2n} \tag{4}$$

を満たすことである. 但し, $\mathrm{Pf}(\xi_{(\mu_i,\mu_j)})_{1\leq i.j\leq 2n}$ は $\xi_{(\mu_i,\mu_j)}$ を成分とする反対称行列のパフィアンとする. さらに, $\mu'=(\mu'_1,\cdots,\mu'_{2n})$ は *strict* な分割 μ から得られる以下のような分割とする:

$$\mu'=\begin{cases}(\mu_1,\cdots,\mu_l,0), & \text{if } l \text{ is odd},\\ (\mu_1,\cdots,\mu_l), & \text{if } l \text{ is even.}\end{cases}$$

今回この定理を $\tau(0)\neq 0$ であるタウ関数に拡張した.

定理 2 べき級数 $\tau(x)$ を

$$\tau(x)=Q_\lambda(\frac{x}{2})+\sum_{\mu}\xi_\mu Q_\mu(\frac{x}{2}) \tag{5}$$

と展開したとき, $\tau(x)$ が BKP 階層の解であることと展開係数 ξ_μ が次の式を満たすこととは同値である. $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{2L-1})$ のとき,

$$\begin{cases}\xi_{(\mu_1,\cdots,\mu_{2l-1})}=\mathrm{Pf}((i,j))_{i,j\in\{\Lambda^{(1)},\cdots,\Lambda^{(2L-1)},\mu_1,\cdots,\mu_{2l-1}\}},\\ \xi_{(\mu_1,\cdots,\mu_{2l})}=\mathrm{Pf}((i,j))_{i,j\in\{\Lambda,\Lambda^{(1)},\cdots,\Lambda^{(2L-1)},\mu_1,\cdots,\mu_{2l}\}},\end{cases}$$

$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{2L})$ のとき,

$$\begin{cases}\xi_{(\mu_1,\cdots,\mu_{2l-1})}=\mathrm{Pf}((i,j))_{i,j\in\{\Lambda,\Lambda^{(1)},\cdots,\Lambda^{(2L)},\mu_1,\cdots,\mu_{2l-1}\}},\\ \xi_{(\mu_1,\cdots,\mu_{2l})}=\mathrm{Pf}((i,j))_{i,j\in\{\Lambda^{(1)},\cdots,\Lambda^{(2L)},\mu_1,\cdots,\mu_{2l}\}},\end{cases}$$

但し, パフィアンの成分 (i,j) は以下のように定義する:

$$\begin{aligned}&(\Lambda^{(i)},\mu)=\xi_{(\lambda_1,\cdots,\hat{\lambda}_i,\cdots,\lambda_L,\mu)},\ (\Lambda,\mu)=\xi_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_L,\mu)},\\ &(\mu_i,\mu_j)=\xi_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_L,\mu_i,\mu_j)},\ (\Lambda,\Lambda^{(i)})=(\Lambda^{(i)},\Lambda^{(j)})=0,\end{aligned}$$

参考文献

[1] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Transformation group for soliton equations, Nonlinear Integrable Systems-Classical Theory and Quantum Theory-, Ed. by M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1983).

[2] Y.C. You, Polynomial solutions of the BKP hierarchy and projective representations of symmetric groups, in infinite dimensional Lie algebrasa and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World sci.1989, 449-466.

[3] Y. Shigyo, On addition formulae of KP, mKP and BKP hierarchies, SIGMA 9 (2013), 035, 16 pages.

[4] Y. Shigyo, Giambelli type formulae in the BKP hierarchy, arxiv:1503.07977v1.

A generalization of Jacobi inversion formulae to telescopic curves on all the strata

綾野　孝則　(大阪市立大学)*

1. はじめに

X を種数 g の超楕円曲線、$du = {}^t(du_1, \ldots, du_g)$ を X 上の正則微分形式、$S^k(X)$ を X の k 次の対称積とする $(1 \le k \le g)$。アーベル・ヤコビ写像

$$S^k(X \backslash \infty) \to \mathbb{C}^g \quad : \quad D = \sum_{i=1}^{k} P_i \to u = \sum_{i=1}^{k} \int_{\infty}^{P_i} du$$

に対して、$P_i = (x_i, y_i)$ の座標を u から表示する問題をヤコビの逆問題という。D が一般因子であれば、超楕円シグマ関数を用いて P_i の座標は u から表示できることが知られている。この結果は松谷氏らにより (n, s) 曲線の特別な場合である $y^r = f(x)$ で定義される曲線に一般化された [2]。さらに [2] では、その系として、$y^r = f(x)$ に付随するシグマ関数の零点の位数に関する性質を示している。本発表では telescopic 曲線 [3]((n, s) 曲線を含む) にまで松谷氏らの結果を一般化し、[2] で示されたシグマ関数の零点の性質が telescopic 曲線の場合でも成り立つことを報告する。

2. シグマ関数

Klein により導入された超楕円シグマ関数は、近年、Buchstaber 氏や中屋敷氏 [4] らにより (n, s) 曲線にまで一般化された。さらに、[1] では telescopic 曲線にまでシグマ関数が拡張されている。telescopic 曲線 [3] とは次のような代数曲線である。$m \ge 2$ に対して、 $A_m = (a_1, ..., a_m)$ をある条件を満たす自然数列とする。このとき、A_m から $m-1$ 個の m 変数多項式 $F_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(2 \le i \le m)$ が定まる。X^{aff} を F_i の共通零点の集合とする。X^{aff} は $\mathbb{C}^m$ のアフィン代数曲線になる。X^{aff} は非特異であるとし、X を X^{aff} に対応するコンパクトリーマン面とする。X は X^{aff} に唯一つの点 ∞ を付け加えたものと思える。X を $(a_1, ..., a_m)$ に付随する telescopic 曲線という。∞ にのみ極を持つ有理型関数のなすベクトル空間の基底は、A_m から定まるある集合 $B(A_m) \subset \mathbb{Z}_{\ge 0}^m$ を用いて、$x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in B(A_m)$ と書けるので、それを ∞ における極位数の小さい順に並べ替えたものを φ_i, $i \ge 0$ とする。$\varphi_0 = 1$ である。g を X の種数とする。[2] と同様に telescopic 曲線に対しても次の記号を定義する。$D = \sum_{i=1}^{k} P_i \in S^k(X \backslash \infty)$ に対して、

$$\psi_k^{(i)}(D) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(P_1) & \cdots & \varphi_k(P_1) \\ 1 & \varphi_1(P_2) & \cdots & \varphi_k(P_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_1(P_k) & \cdots & \varphi_k(P_k) \end{vmatrix}, \quad \mu_{k,i}(D) = \frac{\psi_k^{(i)}(D)}{\psi_k^{(k)}(D)}, \quad (0 \le i \le k)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 14K25, 14H50
キーワード：ヤコビの逆問題、シグマ関数、Telescopic 曲線、シグマ関数の零点
* 〒558-8585　大阪市住吉区杉本3丁目3番138号　大阪市立大学　数学研究所
e-mail: tayano7150@gmail.com

とする。$\psi_k^{(i)}(D)$ の (i) は $i+1$ 番目の列を除くことを表す。種数 g の telescopic 曲線 X に対して、algebraic bilinear form $\widehat{\omega}(P,Q)$ は、∞ にのみ極を持つ第２種微分形式 dr_i が存在して、$\widehat{\omega}(P,Q)=d_Q\Omega(P,Q)+\sum_{i=1}^{g}du_i(P)dr_i(Q)$ と書ける [4, 1]。$P=(x_1,\ldots,x_m), Q=(y_1,\ldots,y_m)\in X$、$G=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{2\le i,j\le m}$ とする。$\Omega(P,Q)$ は $X\times X$ 上の 1-form、$du_i(P)=\frac{\varphi_{i-1}(P)}{\det G(P)}dx_1$ は X 上の正則微分形式である。さらに、$dr_g(Q)=\frac{\varphi_g(Q)}{\det G(Q)}dy_1$ ととれる。X に付随するシグマ関数 $\sigma(u)=\sigma(u_1,\ldots,u_g)$ とは、$(X,\{du_i\},\widehat{\omega},\infty)$ から定まる $\mathbb{C}^g$ 上の正則関数である [4, 1]。$\sigma_i(u)=\frac{\partial}{\partial u_i}\sigma(u)$ とする。

3. ヤコビの逆問題の一般化

$D=\sum_{i=1}^{k}P_i\in S^k(X\backslash\infty)$ に対して、$u=\sum_{i=1}^{k}\int_{\infty}^{P_i}du$ とする。このとき、$y^r=f(x)$ で定義される曲線 [2] と同様に、telescopic 曲線に対しても次の定理が成り立つ。

定理 1 (1) $k=g$ のとき　　$D\in S^g(X\backslash\infty)$ が一般因子ならば、

$$\frac{\sigma_i(u)\sigma_g(u)-\sigma_{gi}(u)\sigma(u)}{\sigma(u)^2}=(-1)^{g-i+1}\mu_{g,i-1}(D),\quad (1\le i\le g)$$

(2) $k=g-1$ のとき　　$D\in S^{g-1}(X\backslash\infty)$ が一般因子ならば、

$$\frac{\sigma_i(u)}{\sigma_g(u)}=(-1)^{g-i}\mu_{g-1,i-1}(D),\quad (1\le i\le g)$$

(3) $k\le g-2$ のとき　　$D\in S^k(X\backslash\infty)$ が一般因子ならば、

$$\frac{\sigma_i(u)}{\sigma_{k+1}(u)}=\begin{cases}(-1)^{k-i+1}\mu_{k,i-1}(D) & (1\le i\le k+1)\\ 0 & (k+2\le i\le g)\end{cases}$$

また、定理 1 を用いると、[2] と同様に telescopic 曲線に対してもシグマ関数の零点の位数に関する次の性質が従う。

系 1 $\sum_{i=1}^{k-1}P_i$ を一般因子とする。$u^{(k-1)}=\sum_{i=1}^{k-1}\int_{\infty}^{P_i}du$ とする。$\mathrm{ord}_{\infty}(\varphi_i)=N(i)$ とする。z_k を P_k の ∞ の周りでの局所座標とする。m,n をそれぞれ $\sigma_{k+1}(u),\sigma_i(u)$ の $u=u^{(k-1)}$ での零点の位数とする $(1\le i\le k)$。即ち、

$$\sigma_{k+1}(u^{(k-1)}+\int_{\infty}^{P_k}du)=C_1(u^{(k-1)})z_k^m+O(z_k^{m+1}),\quad C_1(u^{(k-1)})\ne 0$$

$$\sigma_i(u^{(k-1)}+\int_{\infty}^{P_k}du)=C_2(u^{(k-1)})z_k^n+O(z_k^{n+1}),\quad C_2(u^{(k-1)})\ne 0$$

このとき、$m=n+N(k)-N(k-1)$ が成り立つ。

参考文献

[1] T. Ayano, "Sigma functions for telescopic curves", Osaka J. Math., Volume 51, Number 2 (2014), 459-481.

[2] S. Matsutani and E. Previato, "Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the C_{rs} curve $y^r=f(x)$", J. Math. Soc. Japan, Volume 60, Number 4 (2008), 1009-1044.

[3] S. Miura, "Linear codes on affine algebraic curves", Trans. IEICE J81-A (1998), 1398-1421.

[4] A. Nakayashiki, "On algebraic expressions of sigma functions for (n,s) curves", Asian J. Math. 14 (2010), 175-211.

Ruijsenaars 作用素の双対 Cauchy 型核関数の関数等式および特殊な場合における固有関数

齋藤 洋介 (大阪市立大学数学研究所)

Ruijsenaars 模型は Calogero-Moser 系の q-変形として導入された楕円関数的な量子多体系であるが, その固有関数については不明なことが多い. ここでは, Ruijsenaars 作用素の双対 Cauchy 型核関数の関数等式に注目することで, 特殊な場合における Ruijsenaars 作用素の固有関数を構成できることについて説明する.

$q, t \in \mathbb{C}^\times$ を $|q|<1$, $|t^{-1}|<1$ を満たす複素数とする. $|p|<1$ なる複素数に対し $(x;p)_\infty := \prod_{n\geq 0}(1-xp^n)$ $(x\in\mathbb{C})$, $\Theta_p(x) := (p;p)_\infty (x;p)_\infty (px^{-1};p)_\infty$ $(x\in\mathbb{C}^\times)$ とおく. q-シフト作用素を $T_{q,x}f(x) := f(qx)$ とおく. 次で定義される Ruijsenaars 作用素 $H_N(q,t,p)$ $(N\in\mathbb{Z}_{>0})$

$$H_N(q,t,p) := \sum_{i=1}^N \prod_{j\neq i} \frac{\Theta_p(tx_i/x_j)}{\Theta_p(x_i/x_j)} T_{q,x_i}$$

の双対 Cauchy 型核関数 $\Psi_{MN}(x,y)$ $(M,N\in\mathbb{Z}_{>0})$ が [KNS] で導入された.

定義. (核関数 $\Psi_{MN}(x,y)$) $\Psi_{MN}(x,y) := \prod_{\substack{1\leq i\leq M\\ 1\leq j\leq N}} \Theta_p(x_i y_j)$ とおく.

この核関数 $\Psi_{MN}(x,y)$ が満たす関数等式を自由場表示によって導出することを考える. 以下では, 楕円のパラメータに対応する文字 p を形式的変数とみなす.

生成元 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$, $\{\overline{a}_n\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ と次の関係式によって生成されるボソンを用意する.

$$[a_m, a_n] = m\frac{(1-q^{|m|})(1-p^{|m|})}{1-t^{|m|}}\delta_{m+n,0}, \quad [\overline{a}_m, \overline{a}_n] = m\frac{(1-q^{|m|})(1-p^{|m|})}{(qt^{-1}p)^{|m|}(1-t^{|m|})}\delta_{m+n,0}.$$

Ruijsenaars 作用素の自由場表示は [Sa] で構成された.

命題. (Ruijsenaars 作用素の自由場表示) $:\bullet:$ を上で定めたボソンに関する正規順序積とし, $|0\rangle$ を条件 $a_n|0\rangle = \overline{a}_n|0\rangle = 0$ $(n>0)$ を満たす真空ベクトルとする. ボソンの作用素 $\eta(p;z)$, $(\eta(p;z))_\pm$, $\phi(p;z)$ を次で定める.

$$\eta(p;z) :=: \exp\left(-\sum_{n\neq 0}\frac{1-t^{-n}}{1-p^{|n|}}p^{|n|}\overline{a}_n\frac{z^n}{n}\right)\exp\left(-\sum_{n\neq 0}\frac{1-t^n}{1-p^{|n|}}a_n\frac{z^{-n}}{n}\right):,$$

$$(\eta(p;z))_\pm := \exp\left(-\sum_{\pm n>0}\frac{1-t^{-n}}{1-p^{|n|}}p^{|n|}\overline{a}_n\frac{z^n}{n}\right)\exp\left(-\sum_{\pm n>0}\frac{1-t^n}{1-p^{|n|}}a_n\frac{z^{-n}}{n}\right),$$

$$\phi(p;z) := \exp\left(\sum_{n>0}\frac{(qt^{-1}p)^n(1-t^n)}{(1-q^n)(1-p^n)}\overline{a}_{-n}\frac{z^{-n}}{n}\right)\exp\left(\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{(1-q^n)(1-p^n)}a_{-n}\frac{z^n}{n}\right).$$

$N\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\phi_N(p;x) := \prod_{j=1}^N \phi(p;x_j)$ とおく. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}&[\eta(p;z) - t^{-N}(\eta(p;z))_-(\eta(p;p^{-1}z))_+]_1\phi_N(p;z)|0\rangle\\ &= \frac{t^{-N+1}\Theta_p(t^{-1})}{(p;p)_\infty^3}H_N(q,t,p)\phi_N(p;x)|0\rangle.\end{aligned}$$

ここで記号 $[f(z)]_1$ は $z,\ z^{-1}$ の形式ベキ級数 $f(z)$ の z についての定数項を表す.

定理. ボソンの作用素 $b^\dagger(p;z)$ を次で定める.

$$b^\dagger(p;z):=\exp\Bigg(-\sum_{n>0}\frac{p^n}{1-p^n}\overline{a}_n\frac{z^{-n}}{n}\Bigg)\exp\Bigg(-\sum_{n>0}\frac{1}{1-p^n}a_n\frac{z^{-n}}{n}\Bigg).$$

(1) $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $b_N^\dagger(p;x):=\prod_{j=1}^N b^\dagger(p;x_j)$ とおく. このとき

$$\langle 0|b_M^\dagger(p;x)\phi_N(p;y)|0\rangle=(p;p)_\infty^{-MN}\Psi_{MN}(x,y).$$

(2) $\langle 0|b_N^\dagger(p;x)$ への $[\eta(p;z)]_1$ の作用は次のようになる.

$$\begin{aligned}&\langle 0|b_N^\dagger(p;x)[\eta(p;z)-q^N(\eta(p;pz))_-(\eta(p;z))_+]_1\\&=\frac{q^{N-1}\Theta_p(q)}{(p;p)_\infty^3}H_N(t^{-1},q^{-1},p)\langle 0|b_N^\dagger(p;x).\end{aligned}$$

上の定理によって $\langle 0|b_M^\dagger(p;x)[\eta(p;z)]_1\phi_N(p;y)|0\rangle$ を計算することで次が得られる.

定理. (核関数 $\Psi_{MN}(x,y)$ の関数等式)

$$\begin{aligned}&\{t^{-M+1}\Theta_p(t^{-1})H_M(q,t,p)_x-q^{N-1}\Theta_p(q)H_N(t^{-1},q^{-1},p)_y\}\Psi_{MN}(x,y)\\&=(-t^{-M}+q^N)(p;p)_\infty^3C_{MN}^*(x,y)\Psi_{MN}(x,y),\\&C_{MN}^*(x,y):=\oint_{C_1}\frac{dz}{2\pi iz}\prod_{i=1}^M\frac{\Theta_p(t^{-1}x_iz)}{\Theta_p(x_iz)}\prod_{j=1}^N\frac{\Theta_p(q^{-1}z/y_j)}{\Theta_p(z/y_j)},\\&\text{積分路 } C_1:|z|<\min\{|x_1|^{-1},\dots,|x_M|^{-1},q|y_1|,\dots,q|y_N|\}.\end{aligned}$$

ここで $H_M(q,t,p)_x$ は文字 $x_1,\dots,x_M$ の関数に作用する Ruijsenaars 作用素を表す.

上の関数等式は $-t^{-M}+q^N=0$ である場合には [KNS] にあるものに一致する.

定理. ($H_N(q,t,p)$ の特殊な場合の固有関数) $e_n(p;x_1,\dots,x_N):=\oint_{C_2}\frac{dy}{2\pi iy}y^{-n}\Psi_{N1}(x,y)$ ($n\in\mathbb{Z}$) とおく. 積分路 C_2 は $|y|<\min\{|x_1|^{-1},\dots,|x_N|^{-1}\}$ ととる. このとき $t^{-N}=q$ である場合には $e_n(p;x_1,\dots,x_N)$ は $H_N(q,t,p)$ の固有関数である:

$$H_N(q,t,p)e_n(p;x_1,\dots,x_N)=t^{-n}\frac{\Theta_p(q^{-1})}{\Theta_p(t)}e_n(p;x_1,\dots,x_N).$$

$\Psi_{N1}(x,y)=\prod_{i=1}^N\Theta_p(x_iy)$ は基本対称式の生成母関数の楕円化であるとみなせるので, $e_n(p;x_1,\dots,x_N)$ は基本対称式の楕円化にあたる.

文献

[KNS] Y. Komori, M. Noumi, J. Shiraishi. *Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications.* SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications. Volume 5 (2009) arXiv:0812.0279.

[Sa] Yosuke Saito. *Elliptic Ding-Iohara algebra and the free field realization of the elliptic Macdonald operator.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 50 (2014), 411-455. doi: 10.4171/PRIMS/139, arXiv:1301.4912.

Generalized pre-semiring上のYang-Baxter写像

Matsumoto DiogoKendy　(早稲田大学　基幹理工学部)*

1. Generalized pre-semiring

定義 1.1 空でない集合Xと二つの二項演算$\oplus, * : X \times X \to X$の組$(X, \oplus, *)$で次の条件を満たすものをgeneralized pre-semiringと呼ぶ.

1. $(X, \oplus), (X, *)$は半群,
2. $(X, \oplus, *)$は$*$に関して分配的

$$\begin{aligned} a * (b \oplus c) &= a * b \oplus a * c, \\ (a \oplus b) * c &= a * c \oplus b * c. \end{aligned}$$

また$m^{\oplus}, m^{*} : X \times X \to X$を用いて二項演算$\oplus, *$を

$$m^{\oplus}(a, b) = a \oplus b, \ \ , m^{*}(a, b) = a * b$$

と表す.

例 1.2 自然数の集合$\mathbb{N}$は和と積に関してgeneralized pre-semiringとなる.

例 1.3 モノイド(単位元付き半群)$(M, \cdot, e_M)$において,

$$m^{\oplus}(a, b) = a \oplus b := a \cdot b, \ \ m^{*}(a, b) = a * b := e_M$$

と定めると$(M, \oplus, *)$はgeneralized pre-semiringとなる

例 1.4 全順序集合Xにおいて,

$$m^{\oplus}(a, b) = a \oplus b := \min(a, b), \ \ m^{*}(a, b) = a * b := \max(a, b)$$

と定めると$(X, \oplus, *)$はgeneralized pre-semiringとなる.

2. Generalized pre-semiring上のYang-Baxter写像

定義 2.1 Xを空でない集合とする. 写像$\sigma : X \times X \to X \times X$が

$$(\sigma \times \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_X \times \sigma)(\sigma \times \mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X \times \sigma)(\sigma \times \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_X \times \sigma)$$

を満たすとき, σはYang-Baxter写像(YB写像)という.

例 2.2 例1.2のgeneralized pre-semiringにおいて,

$$\sigma(a, b) = (b, a)$$

とするとσはYB写像となる.

キーワード：Yang-Baxter 写像, Generalized pre-semiring

* 〒169-8555　東京都新宿区大久保3-4-1
e-mail: `diogo-swm@aoni.waseda.jp`

例 2.3 例1.3と例1.4のgeneralized pre-semiringにおいて，

$$\sigma(a,b) = (a \oplus b, a * b)$$

とするとσはYB写像となる．

本講演では，いくつかの具体的な例を通して

$$\begin{aligned} m^{\oplus} \cdot \sigma &= m^{\oplus}, & (1) \\ m^{*} \cdot \sigma &= m^{*}, & (2) \end{aligned}$$

を満たす写像$\sigma : X \times X \to X \times X$がYB写像となるための条件と，そのときのYB写像の性質について述べる．(上記の例に現れるYB写像は条件(1)，(2)を満たす．)

参考文献

[1] Bukhshtaber, V. M., Yang-Baxter mappings, Uspekhi Mat. Nauk 53 (1998), no. 6(324), 241-242; translationin Russian Math. Surveys 53 (1998), no. 6, 1343-1345.

[2] Drinfel'd, V. G.: On some unsolved problems in quantum group theory, Quantum groups (Leningrad, 1990), 1-8, Lecture Notes in Math., 1510, Springer, Berlin, 1992.

[3] Matsumoto, D.K., Shibukawa, Y.:Quantum Yang-Baxter equation, braided semigroups, and dynamical Yang-Baxter maps, Tokyo J. Math. 38 (2015),227-237.

[4] Shibukawa, Y., Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43(2007), no. 4, 1157-1182.

階乗型 P 関数の構造定数について

池田岳（岡山理科大学）

1　$P_\lambda(x|t)$ の定義

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ を $\ell \leq n$ をみたす strict partition とする．ℓ を λ の *length* と呼び $\ell(\lambda)$ で表す．x を変数として一般化された階乗を $(x|t)^k = (x-t_1)\cdots(x-t_k)$ $(k \geq 1)$ と定義する．ここに $t = (t_1, t_2, \ldots)$ は無限個の不定元である．$x_1, \ldots, x_n$ を変数として各 strict partition λ に対して **factorial P-関数**を

$$P_\lambda(x|t) = \frac{1}{(n-\ell(\lambda))!}\sum_{w\in S_n} w\left(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}(x_i|t)^{\lambda_i}\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}\prod_{j=i+1}^{n}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right)$$

と定義する (Ivanov による)．ここで n 次対称群 S_n の元 w は変数 $x_1, \ldots, x_n$ を置換する．

2　$\mathrm{RMST}(\lambda)$ による表示

アルファベットとして $\mathbb{P}' = \{1 < 1' < 2 < 2' < \cdots < n < n'\}$ を用いる．$a \in \mathbb{P}'$ に対してプライムを除いた文字を $|a|$ で表す．Strict partition λ を台とする *Reverse marked shifted tableau* (RMST) R とは λ の shifted diagram の各箱に $\mathbb{P}'$ の元を一つづつ入れて得られるもので

(1) 行に関して左から右に，列に関して上から下に弱い意味で減少する．
(2) 各列は各 k $(1 \leq k \leq n)$ を高々 1 個しか含まない．
(3) 各行は各 k' $(1 \leq k \leq n)$ を高々 1 個しか含まない．
(4) 対角の箱，つまり (i,i) にはプライムのない文字だけが入る．

λ を台とする RMST 全体の集合を $\mathrm{RMST}(\lambda)$ で表す．RMST R の entry a に対し $r(a)$ は文字 a の行の座標，$c(a)$ は列の座標を表す．符号 $\varepsilon(a) \in \{\pm 1\}$

を a が対角にないときは，a がプライム付きなら $+1$，プライムが無いならば -1 とし，a が対角にあるときは $(-1)^{|a|+r(a)+n}$ と定める．

3　結果

μ を strict partition とし $1 \leq \ell \leq \ell(\mu)$ とする．κ を $\kappa_i \leq \mu_i$ $(\forall i)$ をみたす strict partition とするとき skew shifted shape μ/κ 上の 1 から ℓ および $1'$ から ℓ' を entry に持つ RMST の全体を $\mathrm{RMST}_\ell(\mu/\kappa)$ で表す．和集合 $\mathrm{RS}(\mu,\ell) = \bigsqcup_{\kappa\subset\mu} \mathrm{RMST}(\mu/\kappa)$ を考え，この集合の元を μ を台とする ℓ-rim strip と呼ぶ．更に ℓ-rim strip S の entry ($\{1,\ldots,\ell,1',\ldots,\ell'\}$ の元) のいくつかにバーを付けて得られる対象を考える．例えば次のようなものである：

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & 3' & 3 & 2 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3' & 2' & \bar{2} & 1' & 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-6} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 2 & \bar{1}' & \bar{1} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-5} \end{array} \tag{3.1}$$

このような組合せ的対象を**バー付き ℓ-rim strip** と呼び，これら全体の集合を $\mathrm{BRS}(\mu,\ell)$ で表すことにする．$B \in \mathrm{BRS}(\mu,\ell)$ に対して $\omega(B) = (\omega_1(B),\ldots,\omega_n(B)) \in \mathbb{N}^n$ を

$\omega_i(B) = \#\{a \in B \mid |a| = i,\ a \text{ はバー無し}\}\ (1 \leq i \leq \ell),\ \omega_i(B) = \kappa_{i+\ell}\ (\ell < i \leq n)$

と定義する．バー付き ℓ-rim strip B に対して，そのバー付きの entry からなる集合を B^b で表す．$a \in B^b$ に対して $\mathrm{prec}(a)$ を 行番号が $r(a)$ 以上，列番号が $c(a)$ 以下であるバーの無い $k := |a|$ または k' の個数を表す．もうひとつ別に strict partition λ を与えるとき $B \in \mathrm{BRS}(\mu,\ell(\lambda))$ に対して

$$c_{\lambda,B}(t) = \prod_{b\in B^b} \left(t_{\lambda_{|a|}+1+\mathrm{prec}(a)} + \varepsilon(a) t_{c(a)-r(a)+1} \right) \tag{3.2}$$

と定義する．

定理 1. 次が成り立つ：

$$P_\lambda(x|t)P_\mu(x|t) = \sum_{B\in\mathrm{BRS}(\mu,\ell(\lambda))} c_{\lambda,B}(t) P_{\lambda+\omega(B)}(x|t). \tag{3.3}$$

右辺の $P_{\lambda+\omega(B)}(x|t)$ は一般に $\lambda+\omega(B)$ が strict partition でないものも含む．ここでは $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対して $P_\alpha(x|t)$ を添え字 α に関して交代的であると理解する．したがって strict partition を添え字とするものだけの線型結合に書き直すことはできる．その結果，キャンセルが起こり，整理した時に具体的にどの項が残るのかわかることが望ましいが，まだそこまで到達していない．

古典群の double Bruhat cell 上の クラスター変数と結晶基底

金久保 有輝 (上智大学)
中島 俊樹 (上智大学)

記号

G : $\mathbb{C}$ 上の古典的代数群, B, B_- : opposite な Borel 部分群, $H := B \cap B_-$, N, N_- : unipotent radicals, $W = \mathrm{Norm}(H)/H$: Weyl 群, Λ_i : 基本ウエイト

1. Introduction

代数群 G をベースにした研究は, その座標環の構造を調べる大域的な研究と, リー環やその量子群を調べる局所的な研究に分かれる. 両研究は密接に関連している. 例えば, 座標環 $\mathbb{C}[N]$ と $\mathfrak{n} := \mathrm{Lie}(N)$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{n})$ は互いに双対関係にある. $G = \mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$ (A 型) の場合, 「小行列式」は $\mathbb{C}[N]$ の元であるが, これは $U(\mathfrak{n})$ における**標準基底**の双対基底となる. 我々の最近の研究で, double Bruhat cell $G^{u,v}$ $(u, v \in W)$ 上の小行列式と, **結晶基底**との関係が新たにわかった. $G^{u,v} := BuB \cap B^- vB^-$ である. Exchange relation という関係式により, $\mathbb{C}[G^{u,v}]$ の生成元が, 小行列式から次々と生成される [2]. このような生成元を持つ代数を**クラスター代数**と呼び, その生成元を**クラスター変数**と呼ぶ. 一方, 結晶基底は, 量子群の表現を組み合わせ論的に扱うために導入されたもので, タブローや Laurent 単項式を用いて表示される. [3] では, 小行列式を座標変換したものが, 結晶基底を Laurent 単項式で表示したものの和になることを示した. 座標環におけるクラスター変数と, 結晶基底の関係が発見されたということである. 本講演では, この結果を他の B, C, D 型古典群 ($\mathrm{SO}_{2r+1}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$) の場合に拡張する.

2. 座標環と generalized minor

$G_0 = N_- HN$ とおき, $x = [x]_-[x]_0[x]_+$, $[x]_- \in N_-$, $[x]_0 \in H$, $[x]_+ \in N$ と記す. 次の **generalized minor** は, $G = \mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$ のときは通常の小行列式に一致する:

定義 2.1. $u \in W$, $i \in \{1, \cdots, r\}$ に対し, generalized minor $\Delta_{u\Lambda_i,\ \Lambda_i}$ は, 開部分集合 uG_0 への制限が, $\Delta_{u\Lambda_i,\ \Lambda_i}(x) = ([u^{-1}x]_0)^{\Lambda_i}$ で与えられる G 上の正則関数である.

$u = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$ に対し, $\mathbf{i} := (i_1, \cdots, i_n)$ を u の reduced word という. $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し, $u_{\leq k} := s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ とおく. このとき,

$$\Delta(k; \mathbf{i})(x) := \Delta_{u_{\leq k}\Lambda_{i_k},\ \Lambda_{i_k}}(x) \quad (1 \leq k \leq n)$$

とおくと, これらが座標環 $\mathbb{C}[G^{u,e}]$ の元のクラスター変数となり, 他のクラスター変数も, これらから次々と生成される. 双正則同型 $\phi : H \times (\mathbb{C}^\times)^n \xrightarrow{\sim} G^{u,e}$ [1] を用いて, $\Delta^G(k; \mathbf{i}) := \Delta(k; \mathbf{i}) \circ \phi$ とおく.

例 2.2. $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ (C_2 型代数群), $u = s_1 s_2 s_1 s_2 \in W$, $\mathbf{i} = (1, 2, 1, 2)$ に対し,

$$\Delta^G(2; \mathbf{i})(a; Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{2,1}, Y_{2,2}) = a^{(s_1 s_2 \Lambda_2)} \left(\frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}} + 2\frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}} + \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2} + \frac{1}{Y_{2,2}} \right). \quad (1)$$

3. 結晶基底と単項式表示

$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ を G の Lie 環, $U_q(\mathfrak{g})$ をその量子群とする．$U_q(\mathfrak{g})$ の既約表現は, 最高ウエイト $\lambda \in P^+ := \bigoplus_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_i$ を持つ最高ウエイト表現である．そのような表現 $V(\lambda)$ は, 結晶基底 $B(\lambda)$ を用いることで, 構造が明らかにされる．

例 3.1. $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ (C_2 型代数群) とする．$\lambda = \Lambda_2$ とする．

$$Y_{0,2} \xrightarrow{2} \frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}} \xrightarrow{1} \frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}} \xrightarrow{1} \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2} \xrightarrow{2} \frac{1}{Y_{2,2}}. \tag{2}$$

Diagram (2) は結晶基底 $B(\Lambda_2)$ の単項式表示で, $V(\Lambda_2)$ がウエイト Λ_2, $2\Lambda_1 - \Lambda_2$, 0, $\Lambda_2 - 2\Lambda_1$, $-\Lambda_2$ のウエイト空間に分解される 5 次元表現であることを表している．例 2.2 における (1) に現れる項の集合 $\{\frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}}, \frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}}, \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2}, \frac{1}{Y_{2,2}}\}$ は, 上記の結晶基底 $B(\Lambda_2)$ の単項式表示の一部で, lower Demazure crystal $B^-(\Lambda_2)_{s_1s_2}$ と呼ばれる．

4. 主結果

各 A, B, C, D 型古典群において, 最長元の reduced word は次で与えられる：

$$\mathbf{i}_0 = \begin{cases} (\underbrace{1,2,\cdots,r}_{1\text{ st cycle}}, \underbrace{1,2,\cdots,r-1}_{2\text{ nd cycle}}, \cdots, \underbrace{1,2,3}_{(r-2)\text{ th cycle}}, 1,2,1) & \text{for } A_r, \\ (\underbrace{1,2,\cdots,r}_{1\text{ st cycle}}, \underbrace{1,2,\cdots,r}_{2\text{ nd cycle}} \cdots, \underbrace{1,2,\cdots,r}_{r\text{ th cycle}}) & \text{for } B_r,\ C_r, \\ (\underbrace{1,2,\cdots,r}_{1\text{ st cycle}}, \underbrace{1,2,\cdots,r}_{2\text{ nd cycle}} \cdots, \underbrace{1,2,\cdots,r}_{r-1\text{ th cycle}}) & \text{for } D_r. \end{cases} \tag{3}$$

$u \in W$ を, その reduced word $\mathbf{i}$ が, (3) の $\mathbf{i}_0$ の left factor で表わされるものとする．例えば B, C, D 型なら, $\mathbf{i} = (1,\cdots,r)^{m-1}(1,\cdots,d)$ という形である．$\mathbf{Y} = (a; Y_{1,1}, \cdots, Y_{1,r}, \cdots, Y_{m-1,1}, \cdots, Y_{m-1,r}, Y_{m,1}, \cdots, Y_{m,d}) \in H \times (\mathbb{C}^\times)^n$ とおく．

定理 4.1. i_k は, $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_n)$ の $(m-1)$th cycle に属するとする．このとき,

$$\Delta^G(k; \mathbf{i})(\mathbf{Y}) = a^{(u_{\leq k}\Lambda_d)} \left(\sum_{b \in B^-(\Lambda_d)_{u_{\leq k}}} c_b\ \mu(b) \right), \tag{4}$$

となる．ここに, $B^-(\Lambda_d)_{u_{\leq k}}$ は $B(\Lambda_d)$ の lower Demazure crystal, c_b はある正整数, μ は $B(\Lambda_d)$ のある単項式表示である．

参考文献

[1] A.Berenstein, A.Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math. 143 No. 1, (2001).

[2] A.Berenstein, S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebras 3 : Upper bounds and double bruhat cells. Duke Mathematical Journal vol. 126 No1,(2005).

[3] Cluster Variables on Certain Double Bruhat Cells of Type (u,e) and Monomial Realizations of Crystal Bases of Type A. Y.Kanakubo, T.Nakashima, SIGMA 11 (2015).

Remarks on quantum unipotent subgroup and dual canonical basis

木村　嘉之　(神戸大学)*

1. Introduction

$\mathfrak{g}$を対称化可能Kac-Moody Lie環として、$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$を三角分解、$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$をルート空間分解とする。$w \in W$をそのWeyl群の元に対して、正ルートを$w$に関する転倒集合$\Delta_+ (\leq w) := \Delta_+ \cap w (\Delta_-)$とその補集合$\Delta_+ (> w) := \Delta_+ \cap w (\Delta_-)$に分ける。この分解に応じて、$\mathfrak{n}_\pm (\leq w) := \bigoplus_{\pm\alpha\in\Delta_+(\leq w)} \mathfrak{g}_\alpha$,$\mathfrak{n}_\pm (> w) := \bigoplus_{\pm\alpha\in\Delta_+(>w)} \mathfrak{g}_\alpha$とおくと、$\mathfrak{n}_\pm$のベクトル空間としての直和分解$\mathfrak{n}_\pm = \mathfrak{n}_\pm (\leq w) \oplus \mathfrak{n}_\pm (\leq w)$が得られる。Lie環に関するPoincare-Birkhoff-Wittの定理より、普遍展開環の線形空間としての同型

$$U (\mathfrak{n}_\pm (\leq w)) \otimes U (\mathfrak{n}_\pm (> w)) \xrightarrow{\sim} U (\mathfrak{n}_\pm)$$

が積写像によって与えられることが、$\mathfrak{n}_\pm (\leq w)$および$\mathfrak{n}_\pm (> w)$の基底をそれぞれ選ぶことで得られる。この同型の量子変形が、2014年に、Berenstein-Greenstein [1, Conjecture 5.5] によって予想された。

2. Quantum unipotent subgroup

$\mathfrak{g}$を対称化可能Kac-Moody Lie環として、$\mathbf{U}_q (\mathfrak{g})$を付随するDrinfeld-神保量子包絡環とする。

Weyl群の元$w \in W$とその最短表示$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots , i_\ell)$に対して、付随するLusztigの組み紐群対称性$T_w = T''_{i_1,-1} \cdots T''_{i_1,-1} \in \mathrm{Aut} (\mathbf{U}_q (\mathfrak{g}))$が定義される。

定義 1. Weyl群の元wに対して、量子包絡環の三角分解$\mathbf{U}_q (\mathfrak{g}) \simeq \mathbf{U}^-_q (\mathfrak{g}) \otimes \mathbf{U}^0_q (\mathfrak{g}) \otimes \mathbf{U}^+_q (\mathfrak{g})$, $\mathbf{U}^{\geq 0}_q (\mathfrak{g}) := \mathbf{U}^0_q (\mathfrak{g}) \otimes \mathbf{U}^+_q (\mathfrak{g})$を用いて、$U (\mathfrak{n}_\pm (\leq w))$および$U (\mathfrak{n}_\pm (> w))$の量子類似として、$\mathbf{U}^-_q (\mathfrak{g})$の部分代数$\mathbf{U}^-_q (\leq w) := \mathbf{U}^-_q (\mathfrak{g}) \cap T_w \mathbf{U}^{\geq 0}_q (\mathfrak{g})$および$\mathbf{U}^-_q (> w) := \mathbf{U}^-_q (\mathfrak{g}) \cap T_w \mathbf{U}^-_q (\mathfrak{g})$を考える。まず、$\mathbf{U}^-_q (\leq w)$に関しては、$U (\mathfrak{n}_\pm (\leq w))$の量子類似として妥当であることが以下の定理により、よく知られている。

定理 2 (Lusztig[4],Beck-Chari-Pressley[2]). *Weyl*群の元wと、その最短表示$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots , i_\ell)$に対して、$\mathbf{U}^-_q (\leq w)$は*Poincare-Birkhoff-Witt*型基底

$$\left\{ f^{(c_1)}_{i_1} T''_{i_1,-1} \left(f^{(c_2)}_{i_2} \right) \cdots \left(T''_{i_1,-1} \cdots T''_{i_{\ell-1},-1} \right) \left(f^{(c_\ell)}_{i_\ell} \right) \middle| \boldsymbol{c} = (c_1, \cdots , c_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell_{\geq 0} \right\}$$

を持つ。

本研究は、大阪市立大学数学研究所が推進するＪＳＰＳ頭脳循環を加速する戦略的国際研究ネットワーク推進プログラム採択事業「対称性，トポロジーとモジュライの数理，数学研究所の国際研究ネットワーク展開」の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 17B37, 13F60.
キーワード：Quantum groups, dual canonical bases.
* 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1 神戸大学理学研究科数学専攻
e-mail: ykimura@math.kobe-u.ac.jp
web: http://researchmap.jp/ysykmr/

一方、有限型およびアフィン型を除いて、$\mathfrak{n}_{\pm}(>w)$ のルート基底及び量子類似の構成は知られておらず、$\mathbf{U}_q^-(>w)$ の Poincare-Birkhoff-Witt 型基底は知られていない。しかし、以下の非自明な "分解" が分かる。

命題 3 ([3, Proposition 3.4]). *Weyl*群の元 w と、その最短表示 $\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_\ell)$ に対して、

$$\mathbf{U}_q^-(>w)=\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\cap T''_{i_1,-1}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\cap T''_{i_1,-1}T''_{i_2,-1}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\cap\cdots\cap T''_{i_1,-1}\cdots T''_{i_\ell,-1}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$$

が成り立つ。

3. Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis

$\mathbf{B}^{\mathrm{low}}$ を $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の標準基底、$\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ を双対標準基底とする。ここで、双対標準基底は、$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の非退化内積を用いて、$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の基底とみなす。

定理 4 ([2, Theorem 4.25],[3, Theorem 3.9]). $\mathbf{U}_q^-(\leq w)$ と $\mathbf{U}_q^-(>w)$ は、それぞれ双対標準基底 $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ と整合的である。すなわち、以下が成り立つ

(1) $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}\cap\mathbf{U}_q^-(\leq w)$ は、$\mathbf{U}_q^-(\leq w)$ の基底をなす。
(2) $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}\cap\mathbf{U}_q^-(>w)$ は、$\mathbf{U}_q^-(>w)$ の基底をなす。

(1) に関しては、Poincare-Birkhoff-Witt 型基底の直交性より、(正規化して定義される) "双対" Poincare-Birkhoff-Witt 型基底の $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ を特徴づける対合に関する上三角性と (双対) 標準基底の特徴付けをもちいて、証明される。

(2) に関しては、Lusztig による直和分解 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})=\left(\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\cap T''_{i_1,-1}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\right)\oplus f_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$、$f_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ と $\mathbf{B}^{\mathrm{low}}$ との整合性から、$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\cap T''_{i_1,-1}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ が $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ と整合的であることが知られており、上の命題を用いることで、右辺に関して、w に関して帰納的に証明される。

$\mathbf{B}^{\mathrm{up}}\cap\mathbf{U}_q^-(\leq w)$ と $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}\cap\mathbf{U}_q^-(>w)$ の間の積公式を証明することで、以下の定理が得られる。

定理 5. 積写像によって、ベクトル空間としての同型 $\mathbf{U}_q^-(\leq w)\otimes\mathbf{U}_q^-(>w)\xrightarrow{\sim}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ が得られる。また、この同型は、$\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ の定める整形式に関して、自由加群としての同型が得られる。

$\mathbf{B}^{\mathrm{up}}\cap\mathbf{U}_q^-(\leq w)$ と $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}\cap\mathbf{U}_q^-(>w)$ の間の積公式は、上の分解に相当する結晶構造の分解に応じた双対標準基底の積を考えることで、もとの双対標準基底と、最短表示によって定義される前順序に関して狭義に低次の項に展開されるということが示される。

この定理は、谷崎 [5, Proposition 2.10] によっても証明されている。

参考文献

[1] Arkady Berenstein and Jacob Greenstein. Double canonical bases. arxiv preprint `http://arxiv.org/abs/1411.1391`, 2014.

[2] Yoshiyuki Kimura. Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis. *Kyoto Journal of Mathematics*, 52(2):277–331, 2012.

[3] Yoshiyuki Kimura. Remarks on quantum unipotent subgroup and dual canonical basis. arXiv preprint arXiv:1506.07912, 2015.

[4] George Lusztig. *Introduction to quantum groups*, volume 110 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.

[5] Toshiyuki Tanisaki. Modules over quantized coordinate algebras and PBW-bases. arxiv preprint `http://arxiv.org/abs/1409.7973v2`, March 2015.

アフィン・リー環の極大ウェイト重複度に現れる pattern avoidance について

土岡 俊介（東大数理）, 渡部 正樹（東大数理）

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ を対称化可能 GCM A に付随した Kac-Moody リー環とする。各支配的整ウェイト $\Lambda \in \mathcal{P}^+$ について、可積分最高ウェイト表現 $V(\Lambda)$ とそのウェイトの集合 $P_A(\Lambda) := \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid V(\Lambda)_\mu \neq 0\}$ が定義される。$V(\Lambda)$ の可積分性から $P_A(\Lambda)$ はワイル群 $W = W(A)$ の作用を持つ。ウェイト $\mu \in P_A(\Lambda)$ について、$m_A(\Lambda, \mu) := \dim V(\Lambda)_\mu$ はウェイト重複度（weight multiplicity）と呼ばれるが、この研究は組み合わせ論的表現論の中でも特別な位置を占めている。一方で、しばしば $P_A(\Lambda)$ や $m_A(\Lambda, \mu)$ の情報が、圏論化（categorification）を通じて、一見無関係に見える代数の表現論の情報を与えることがある。

そこで $P_A(\Lambda)$ に興味があるが、A がアフィンの場合は、おおまかな構造が知られており [Kac, §12.6]、当面は支配的極大ウェイトの集合 $\max_A(\lambda) = \{\lambda \in P_A(\Lambda) \mid \lambda + \delta \notin P_A(\Lambda)\}$ に興味がある。明らかに、$\max_A(\Lambda)$ は W 不変（すなわち、$\max_A(\Lambda) = W \cdot (\max_A(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+)$）だが、実は $\max_A(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+$ は有限集合である [Kac, Proposition 12.6]。

Λ がレベル 1 の場合、先に述べた圏論化を通じた対応で現れる代数は A 型岩堀・ヘッケ環になる。X がアフィン ADE 型で Λ がレベル 1 のとき、$\max_X(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+ = \{\Lambda\}$ となることに注意しよう。さて、B 型岩堀・ヘッケ環の表現論の研究のためには、レベル 2 で $A = A^{(1)}_{p-1}$ の場合を考える必要が生じる。 [Tsu] において、集合 $\max_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda_0 + \Lambda_s) \cap \mathcal{P}^+$（ここで $0 \leq s < p$）を研究した。

定義：$p \geq 2$ を整数とする。$\ell \geq 1$ と $t, u \geq 0$ で $\ell + t < p - \ell + 1$ and $\ell < u - \ell + 1$ なるものについて、$\widehat{\mathfrak{sl}_p} = \mathfrak{g}(A^{(1)}_{p-1})$ のルート格子の元を 2 つ、以下で定義する。

$$\lambda^p_{\ell,t} = \ell\alpha_0 + \begin{pmatrix} \ell\alpha_1 + \cdots \ell\alpha_t \\ +(\ell-1)\alpha_{t+1} + (\ell-2)\alpha_{t+2} + \cdots + \alpha_{\ell+t-1} \\ +\alpha_{p-\ell+1} + \cdots + (\ell-2)\alpha_{p-2} + (\ell-1)\alpha_{p-1} \end{pmatrix},$$

$$\mu^p_{\ell,u} = \ell\alpha_0 + \begin{pmatrix} (\ell-1)\alpha_1 + (\ell-2)\alpha_2 + \cdots + \alpha_{\ell-1} \\ +\alpha_{u-\ell+1} + \cdots + (\ell-2)\alpha_{u-2} + (\ell-1)\alpha_{u-1} \\ +\ell\alpha_u + \cdots \ell\alpha_{p-1} \end{pmatrix}$$

定理 [Tsu, Theorem 1.4]：$p \geq 2$ を整数とし、$\widehat{\mathfrak{sl}_p} = \mathfrak{g}(A^{(1)}_{p-1})$ のレベル 2 の支配的整ウェイト $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_s$ を考える（ここで $0 \leq s < p$）。このとき、以下が成立する。

1. $\max_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+ = \{\Lambda\} \sqcup \{\Lambda - \lambda^p_{\ell,s} \mid 1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{p-s}{2} \rfloor\} \sqcup \{\Lambda - \mu^p_{\ell,s} \mid 1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor\}$.
2. $m_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda, \Lambda - \lambda^p_{\ell,s}) = \mathsf{D}_{\ell,s}$, $m_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda, \Lambda - \mu_{\ell,s}) = \mathsf{D}_{\ell,p-s}$.

ここで $\mathsf{D}_{n,m}$ は、$(0,0)$ から $(n+m,n)$ へのステップ $(1,0),(0,1)$ の lattice パスであって、対角線 $y=x$ を超えないものの数で、$\mathsf{D}_{n,m}=\frac{m+1}{n+m+1}\binom{2n+m}{n}$ となっている [St, 6.20.b]。$\mathsf{D}_{n,0}$ はカタラン数（321-avoiding な $\mathfrak{S}_n$ の元の個数 [St, 6.19.ee]）であるという観察に基づき、Misra-Rebecca は次の極大ウェイト重複度と pattern avoidance の関係を予想した。

予想 [MR1, Conjecture 4.13]：$1\le\ell\le\lfloor p/2\rfloor$ について、$m_{A_{p-1}^{(1)}}((k+1)\Lambda_0,(k+1)\Lambda_0-\lambda_{\ell,0}^{p})$ は、$((k+2),(k+1),\cdots,2,1)$-avoiding な $\mathfrak{S}_\ell$ の元の個数で与えられる。

[TW, Theorem 1.5] は、これを証明し、さらに少し一般化したものである。

定理 [TW, Theorem 1.5]：$p\ge 2$ を整数とし、レベル $k+1$ で $\Lambda=k\Lambda_0+\Lambda_s$ の形の $\widehat{\mathfrak{sl}_p}=\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)})$ の支配的整ウェイトを考える（ここで $0\le s<p$ かつ $k\ge 1$）。このとき、$m_{A_{p-1}^{(1)}}(\Lambda,\Lambda-\lambda_{\ell,s}^{p})$ は、$0^s,1,2,\cdots,\ell$（ここで 0 は s 個ある）の並び替えであって、長さ $k+2$ 以上の（狭義）減少部分列を含まないものの個数で与えられる。

証明は、ヘッケ環のモジュラー表現論で Kleshchev 多重分割と呼ばれている（$A_{p-1}^{(1)}$ 型）柏原クリスタルの連結成分 $B(a\Lambda_0+b\Lambda_s)\subseteq B(\Lambda_0)^{\otimes a}\otimes B(\Lambda_s)^{\otimes b}$ を、特徴付ける結果 [AKT, Theorem 9.5] を用いて、ウェイト重複度の計算を、適切なヤング図形の列の数え上げに帰着し、RSK 対応や平面分割（ [St, §7.20] を参照）を解析することでなされる [TW, §2]。

$\widehat{\mathfrak{sl}_p}=\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)})$ 加群における、極大ウェイト重複度と pattern avoidance の関係は [MR1] で初めて指摘されたが、 [TW] では $A_{2n}^{(2)}$ と $D_{n+1}^{(2)}$ という他のアフィン型でも、同種の定理を証明した [TW, Theorem 1.7]。証明には、Dynkin 図形自己同型が誘導する柏原クリスタルの固定点と、oribit リー代数の関係を記述した Naito-Sagaki の結果 [NS] を用いる。これも [AKT] 同様、Littelmann のパス模型の応用である。 [TW] が arXiv にあがる 1 週間前に、 [MR2] が arXiv にあがり、そこで予想が証明されている。これは定理の $s=0$ の場合に相当する。 [MR1] では、極大ウェイトの集合の数 $\#(\max_{A_{p-1}^{(1)}}(k\Lambda_0)\cap\mathcal{P}^+)$ についての予想 [MR1, Conjecture 3.9] も与えられており、 [TW, §4] ではその証明も与えた。証明には、（おそらく Gauss にまで遡る）q-Lucas 定理 [Sag, Theorem 2.2] を用いる。

参考文献

[AKT] S. Ariki, V. Kreiman and S. Tsuchioka, *On the tensor product of two basic representations of $U_v(\mathfrak{sl}_e)$*, Adv.Math. **218** (2008), 28–86.

[Kac] V. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.

[MR1] K. Misra and J. Rebecca, *On multiplicities of maximal weights of $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$-modules*, Algebr.Represent.Theory **17** (2014), 1303–1321.

[MR2] K. Misra and J. Rebecca, *Lattice Paths, Young Tableaux, and Weight Multiplicities*, arXiv:1508.06930

[NS] S. Naito and D. Sagaki, *Standard paths and standard monomials fixed by a diagram automorphism*, J.Algebra **251** (2002), 461–474.

[Sag] B. Sagan, *Congruence properties of q-analogs*, Adv.Math. **95** (1992), 127–143.

[St] P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol.2*, Cambridge University Press, 1999.

[Tsu] S. Tsuchioka, *Catalan numbers and level 2 weight structures of $A_{p-1}^{(1)}$*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B11** (2009), 145–154.

[TW] S. Tsuchioka and M. Watanabe, *Pattern avoidance seen in multiplicities of maximal weights of affine Lie algebra representations*, arXiv:1509.01070

Weyl groupoids and representation theory of generalized quantum groups

山根　宏之　（富山大学理工学研究部（理））

Weyl groupoids の概念は以前からスーパーリー代数の研究者は知っていた。その公理化は [5] で導入された。第 1 節では Generalized root system について解説し、[5] で得られた Weyl groupoids のコクセター関係式による表示（Theorem 1.5）および松本型定理（Theorem 1.6）を述べる。第 2 節では Generalized quantum groups について解説し、その PBW 型定理（Theorem 2.4）, Universal R-matrix（Theorem 2.5）, Shapovalov 行列式（Theorem 2.6）, Harish-Chandra 型定理（Theorem 2.7）を述べる。第 3 節では Generalized quantum groups の有限次元既約表現の分類定理（Theorem 3.2）を述べる。

このたび、私に講演の機会を与えていただいた関係者の皆様に感謝します。特に細かな指示をしていただいた中西知樹氏、斎藤義久氏に感謝します。

1　Generalized root systems の新しい定義

集合 X に対して $|X|$ で X の濃度を表す。$\delta_{a,b}$ および $\delta(a,b)$ で Kronecker's delta を表わす。$a, b \in \{-\infty\} \cup \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ に対して $J_{a,b} := \{n \in \mathbb{N} | a \leq n \leq b\}$ とおく。$J_{1,\infty} = \mathbb{N}$ である。$\mathbb{Z}_{\geq 0} := J_{0,\infty}$ とおく。$\mathbb{Z}_{\leq 0} := J_{-\infty,0}$ とおく。$\mathfrak{N} \in \mathbb{N}$ とする。$I := J_{1,\mathfrak{N}}$ とおく。$\mathfrak{V}$ を $\{\alpha_i | i \in I\}$ を基底とする $\mathfrak{N}$ 次元 $\mathbb{R}$-線形空間とする。次の Lemma 1.1 が重要である。

Lemma 1.1. ([10]) R を $\mathfrak{V}$ の空でない部分集合とする。$0 \notin R$, $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(R) = \mathfrak{V}$ かつ $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(R)) = \mathfrak{N}$ を仮定する。ある $\nu \in R$ と $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(R)$ の有限部分集合 X があって $R \subset \mathbb{Z}\nu + X$ となっているとする。$\{\gamma_i | i \in I\}$ を $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(R)$ の $\mathbb{Z}$-基とする。$\nu \in \mathbb{Z}\gamma_{\mathfrak{N}}$ とする。このときある $g \in \mathfrak{V}^*$ で

$$(1.1) \qquad 0 < g(\gamma_1) < \min\{|g(\beta)| | \beta \in \Gamma \setminus \{\pm\gamma_1\}\}$$

となるものがある。

1

Proof. $k \in J_{2,\infty}$ を

$$R \subset \{ \sum_{t=1}^{\mathfrak{N}} x_t\gamma_t \,|\, x_s \in J_{-k,k}\,(s \in J_{1,\mathfrak{N}-1}),\, x_{\mathfrak{N}} \in \mathbb{Z}\}.$$

をみたすものとする。$g \in V^*$ を $g(\gamma_t) := (2k)^{t-1}$ $(t \in J_{1,|I|})$ により定義する。$g(\gamma_1) = 1 > 0$ である。$\beta = \sum_{t=1}^{|I|} x_t\gamma_t \in R \setminus \{\pm\gamma_1\}$ $(x_t \in \mathbb{Z})$ とする。$p := \max\{t \in J_{1,|I|} | x_t \neq 0\}$ とおく。このとき

$$\begin{array}{rcl} |g(\beta)| & = & |\sum_{t=1}^{p} x_t(2k)^{t-1}| \\ & \geq & |x_p(2k)^{p-1}| - |\sum_{t=1}^{p-1} x_t(2k)^{t-1}| \\ & \geq & |x_p|(2k)^{p-1} - \sum_{t=1}^{p-1} k(2k)^{t-1} \\ & = & |x_p|(2k)^{p-1} - k \cdot \frac{(2k)^{p-1}-1}{2k-1} \\ & = & \frac{(2k)^{p-1}(|x_p|(2k-1)-k)+k}{2k-1}. \end{array}$$

が成り立つ。$p = 1$ のとき $|x_p| \geq 2$ より $|g(\beta)| \geq \frac{(2(2k-1)-k)+k}{2k-1} = 2 > 1 = g(\gamma_1)$ が成り立つ。$p \geq 2$ のとき $|x_p| \geq 1$ より $|g(\beta)| \geq \frac{2k((2k-1)-k)+k}{2k-1} = k > 1 = g(\gamma_1)$. が成り立つ。 従って (1.1) が成り立つ。 □

R を $\mathfrak{V}$ の空でない $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(R) = \mathfrak{V}$ となる部分集合とする。Π を R の空でない部分集合とする。$R^{\Pi,+} := \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\Pi)$, $R^{\Pi,-} := \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}}(\Pi)$ とおく。Π が次の条件 (B1)-(B3) をみたすとき『R の基底』であると言う。

(B1)　Π は $\mathfrak{V}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底である。
(B2)　$R = R^{\Pi,+} \cup R^{\Pi,-}$
(B3)　$\forall\alpha \in \Pi$, $\mathbb{R}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$

$\tilde{\mathbb{B}}$ を R の基底全体のなす集合とする。$\mathbb{B}$ を $\tilde{\mathbb{B}}$ の空でない部分集合とする。$(R, \mathbb{B})$ が次の条件 $(*)$ をみたすとき『(set-theoretic) generalized root system』とよぶ。

$(*)$　$\forall\Pi \in \mathbb{B}$, $\forall\alpha \in \Pi$, $\exists\Pi^{(\alpha)} \in \mathbb{B}$, $R^{\Pi^{(\alpha)},+} \cap R^{\Pi,-} = \{-\alpha\}$

このとき、$N^{\Pi}_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}$ $(\beta \in \Pi)$ が存在して $\Pi^{(\alpha)} = \{\beta + N^{\Pi}_{\alpha,\beta}\alpha | \alpha \in \Pi\}$ となる。さらに $N^{\Pi}_{\alpha,\alpha} = -2$, $N^{\Pi}_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\beta \neq \alpha)$ が成り立つ。Lemma 1.1 等によりつぎの Lemma 1.2 が成り立つ。

Lemma 1.2. ([10]) $(R,\mathbb{B})$ を *generalized root system* とする。$|R|<\infty$ と仮定する。

(1) $\tilde{\mathbb{B}}=\mathbb{B}$ が成り立つ。
(2) 任意の $\alpha\in R$ に対して $\alpha\in\Pi$ となる $\Pi\in\mathbb{B}$ が存在する。
(3) 任意の $\lambda\in\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(R)\backslash\cup_{\alpha\in R}\mathbb{Z}\alpha$ に対して $\lambda\notin\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\Pi)\cup(-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\Pi))$ となる $\Pi\in\mathbb{B}$ が存在する。

$(R,\mathbb{B})$ を generalized root system とする。$\check{\mathbb{B}}$ を $\check{\alpha}(I)\in\mathbb{B}$ を満たす全ての写像 $\check{\alpha}:I\to R$ の集合とする。$c^{\check{\alpha}}_{ij}:=-N^{\check{\alpha}(I)}_{\check{\alpha}(i),\check{\alpha}(j)}$ $(\check{\alpha}\in\check{\mathbb{B}},\,i,\,j\in I)$ とおく。各 $i\in I$ に対して写像 $\check{\tau}_i:\check{\mathbb{B}}\to\check{\mathbb{B}}$ を $\check{\tau}_i(\check{\alpha})(j):=\check{\alpha}(j)-c^{\check{\alpha}}_{ij}\check{\alpha}(i)$ により定義する。$\check{\tau}_i^2=\mathrm{id}_{\check{\mathbb{B}}}$ および $c^{\check{\tau}_i(\check{\alpha})}_{ij}=c^{\check{\alpha}}_{ij}$ が成り立つ。$\check{\mathfrak{V}}$ を $\mathfrak{N}$-次元 $\mathbb{R}$-線形空間とする。$\{\check{v}_i|i\in I\}$ を $\check{\mathfrak{V}}$ の基底とする。$s^{\check{\alpha}}_i\in\mathrm{GL}(\check{\mathfrak{V}})$ $(\check{\alpha}\in\check{\mathbb{B}},i\in I)$ を $s^{\check{\alpha}}_i(\check{v}_j):=\check{v}_i-c^{\check{\alpha}}_{ij}\check{v}_j$ により定義する。$\mathbb{M}$ を $\mathbb{N}$ から I への写像のなす集合とする。$\check{\alpha}\in\check{\mathbb{B}}$ と $f\in\mathbb{M}$ に対して $\check{\alpha}_{f,0}:=\check{\alpha}$ とおき、$1^{\check{\alpha}}s_{f,0}:=\mathrm{id}_{\check{\mathfrak{V}}}$ とおく。$\check{\alpha}\in\check{\mathbb{B}}$, $f\in\mathbb{M}$ と $t\in\mathbb{N}$, に対して let $\check{\alpha}_{f,t}:=\check{\tau}_{f(t)}(\check{\alpha}_{f,t-1})$ とおき、$1^{\check{\alpha}}s_{f,t}:=1^{\check{\alpha}}s_{f,t-1}\circ s^{\check{\alpha}_{f,t}}_{f(t)}$ とおく。

$\check{\alpha}^\flat\in\check{\mathbb{B}}$ を固定する。$\check{\mathbb{B}}^b:=\{\check{\alpha}^\flat_{f,t}|f\in\mathbb{M},t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とおく。$\check{\alpha},\,\check{\alpha}'\in\mathbb{M}$ に対して $\mathcal{H}(\check{\alpha},\check{\alpha}'):=\{1^{\check{\alpha}}s_{f,t}|f\in\mathbb{M},t\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\check{\alpha}_{f,t}=\check{\alpha}'\}$ とおく。$\check{\alpha},\,\check{\alpha}'\in\mathbb{M}$ と $w\in\mathcal{H}(\check{\alpha},\check{\alpha}')$ に対して

$$\ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}'}(w):=\min\{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\exists f\in\mathbb{M},\check{\alpha}_{f,t}=\check{\alpha}',1^{\check{\alpha}}s_{f,t}=w\}$$

とおく。つぎの Lemma 1.3 によって $w\in\mathcal{H}(\check{\alpha},\check{\alpha}')$ は $\{\check{\alpha}'(i)|i\in I\}$ から $\{\check{\alpha}(i)|i\in I\}$ への基底変換の行列とみなせる。

Lemma 1.3. ([10]) $\check{\alpha},\ \check{\alpha}'\in\check{\mathbb{B}}^\flat$ とする。$w\in\mathcal{H}(\check{\alpha},\check{\alpha}')$. とする。$d_{ij}\in\mathbb{Z}$ $(i,j\in I)$ を

$$w(\check{v}_j)=\sum_{i\in I}d_{ij}\check{v}_i. \tag{1.2}$$

となるものとする。このとき

$$\check{\alpha}'(j)=\sum_{i\in I}d_{ij}\check{\alpha}(i). \tag{1.3}$$

が成り立つ。とくに $|\mathcal{H}(\check{\alpha},\check{\alpha}')|=1$ が成り立つ。

Proof. $\ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}'}(w)$ による帰納法を使う。$\ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}'}(w)=0$ であるときは $\check{\alpha}'=\check{\alpha}$ および $w=\mathrm{id}_{\check{\mathfrak{V}}}$ が成り立つので (1.3) が成り立つ。$\ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}'}(w)\geq 1$ とする。$p\in I$

とする。$\check{\alpha}'' := \check{\tau}_p(\check{\alpha}')$ とおき、$w' := w \circ s_p^{\check{\alpha}''} \in \mathcal{H}(\check{\alpha}, \check{\alpha}'')$ とおく。$\ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}''}(w') = \ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}'}(w) - 1$ と仮定する。$d'_{ij} \in \mathbb{Z}$ $(i, j \in I)$ を $w'(\check{v}_j) = \sum_{i\in I} d'_{ij}\check{v}_i$ により定義する。帰納法により $\check{\alpha}''(j) = \sum_{i\in I} d'_{ij}\check{\alpha}(i)$ が成り立つ。このとき $w(\check{v}_j) = w'(\check{v}_j - c_{pj}^{\check{\alpha}''}\check{v}_p) = \sum_{i\in I}(d'_{ij} - d'_{ip}c_{pj}^{\check{\alpha}''})\check{v}_i$ が成り立つ。$\check{\alpha}' = \check{\tau}_p(\check{\alpha}'')$ より $\check{\alpha}'(j) = \check{\alpha}''(j) - c_{pj}^{\check{\alpha}''}\check{\alpha}''(p) = \sum_{i\in I}(d'_{ij} - d'_{ip}c_{pj}^{\check{\alpha}''})\check{\alpha}(i)$ が成り立つ。したがって (1.3) が成り立つ。 □

$C^{\check{\alpha}} := [c_{ij}^{\check{\alpha}}]_{i,j\in I}$ とおく。$C^{\check{\alpha}}$ は [7, §1.1] での意味での generalized Cartan matrix である。データ $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \check{\mathbb{B}}^\flat, (\check{\tau}_i)_{i\in I}, (C^{\check{\alpha}})_{\check{\alpha}\in\check{\mathbb{B}}^\flat})$ を考える。$\mathcal{C}$ は [3, Definition 2.1] での意味での Cartan scheme である。すなわち公理

(C1) $\check{\tau}_i^2 = \mathrm{id}_{\check{\mathbb{B}}^\flat}$,
(C2) $c_{ij}^{\check{\tau}_i(\check{\alpha})} = c_{ij}^{\check{\alpha}}$

を満たす。$\check{\alpha} \in \check{\mathbb{B}}^\flat$ に対して $\mathbb{R}$-線形同型写像 $\eta_{\check{\alpha}} : \mathfrak{V} \to \check{\mathfrak{V}}$ を $\eta_{\check{\alpha}}(\check{\alpha}(i)) := \check{v}_i$ $(i \in I)$ により定義する。$R(\check{\alpha}) := \eta_{\check{\alpha}}(R)$ とおき $R^+(\check{\alpha}) := R(\check{\alpha}) \cap \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{\geq 0}\check{v}_i$, $R^-(\check{\alpha}) := R(\check{\alpha}) \cap \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{\leq 0}\check{v}_i$ とおく。$s_i^{\check{\alpha}} \circ \eta_{\check{\alpha}} = \eta_{\check{\tau}_i(\check{\alpha})}$ である。データ $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C}, (R(\check{\alpha}))_{\check{\alpha}\in\check{\mathbb{B}}^\flat})$ を考える。$\mathcal{R}$ は [2, Definition 1.2] の意味での generalized root system の公理を満たす。それらは

(R1) $R(\check{\alpha}) = R^+(\check{\alpha}) \cup R^-(\check{\alpha})$（$R^-(\check{\alpha}) \neq -R^+(\check{\alpha})$ でもよい）,
(R2) $R(\check{\alpha}) \cap \mathbb{Z}\check{v}_i = \{\check{v}_i, -\check{v}_i\}$,
(R3) $s_i^{\check{\alpha}}(R(\check{\alpha})) = R(\check{\tau}_i(\check{\alpha}))$,
(R4) $\mathrm{id}_{\check{\mathfrak{V}}} \in \mathcal{H}(\check{\alpha}, \check{\alpha}') \Rightarrow \check{\alpha} = \check{\alpha}'$

である。(R4) は Lemma 1.3 より従う。

$\check{\alpha} \in \check{\mathbb{B}}^\flat$ とする。 $x, y \in I$ を $x \neq y$ となるものとする。$m := |R^+(\check{\alpha}) \cap (\mathbb{Z}\check{\alpha}(x) \oplus \mathbb{Z}\check{\alpha}(y))|$ とおく。$m < \infty$ であると仮定する。$f_{xy} \in \mathbb{M}$ を $f_{xy}(2r-1) := x$, $f_{xy}(2r) := y$ $(r \in \mathbb{N})$ により定義する。[2, Lemma 1.5] より

(R4)$'$ $\check{\alpha}_{f_{xy},2m} = \check{\alpha}$ かつ $1^{\check{\alpha}}s_{f_{xy},2m} = \mathrm{id}_{\check{\mathfrak{V}}}$

が従う。特に $\mathcal{R}$ は [5, Definition 2], [3, Definition 2.2] の意味での generalized root system である。特にこれら 3 つの generalized root system の定義は同値である。

写像 $\Xi : \check{\mathbb{B}}^\flat \to \mathbb{B}$ を $\Xi(\check{\alpha}) := \check{\alpha}(I)$ により定義する。[5, Lemma 8(iii)] より

$\ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}'}(w) = |R^+(\check{\alpha}) \cap R^-(\check{\alpha}')|$ $(w \in \mathcal{H}(\check{\alpha},\check{\alpha}'))$ が成り立つので Ξ は単射である。$(R, \Xi(\check{\mathbb{B}}^\flat))$ も generalized root system である。$|R| < \infty$ ならば Ξ は全単射である。

$\mathcal{R}$ を上記のものとする。[3, Section 2] ([2, Definition 1.7] も見よ) の流儀に従って（普遍な）*Weyl groupoid* $\mathcal{W}(\mathcal{R})$ を category として $\mathrm{Ob}(\mathcal{W}(\mathcal{R})) := \check{\mathbb{B}}^\flat$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}(\mathcal{R})}(\check{\alpha},\check{\alpha}') := \{(\check{\alpha}, w, \check{\alpha}') | w \in \mathcal{H}(\check{\alpha},\check{\alpha}')\}$ および $(\check{\alpha}, w, \check{\alpha}') \circ (\check{\alpha}', w', \check{\alpha}'') := (\check{\alpha}, w \circ w', \check{\alpha}'')$ により定義する。

I を上記の集合と同じものとする。$\dot{\mathcal{A}}$ を空でない集合とする。各 $a \in \dot{\mathcal{A}}$ に対して $\dot{C}^a = [\dot{c}^a_{ij}]_{i,j\in I}$ を [7, §1.1] での意味での generalized Cartan matrix とする。各 $i \in I$ に対して写像 $\dot{\tau}_i : \dot{\mathcal{A}} \to \dot{\mathcal{A}}$ を考える。$\dot{\mathcal{C}} = \dot{\mathcal{C}}(I, \dot{\mathcal{A}}, (\dot{\tau}_i)_{i\in I}, (\dot{C}^a)_{a\in\dot{\mathcal{A}}})$ を Cartan scheme とする。すなわち $\dot{\mathcal{C}}$ は上記の (C1)-(C2) と同様の性質を満たすものとする。各 $a \in \dot{\mathcal{A}}$ に対して $\dot{\mathfrak{V}}_a$ を $\{\dot{v}_{a,i} | i \in I\}$ を基底とする $\mathfrak{N}$ 次元 $\mathbb{R}$-線形空間とする。各 $a \in \dot{\mathcal{A}}$ に対して線形同型写像 $\dot{s}^a_i : \dot{\mathfrak{V}}_a \to \dot{\mathfrak{V}}_{\dot{\tau}_i(a)}$ を $\dot{s}^a_i(\dot{v}_{a,j}) := \dot{v}_{\dot{\tau}_i(a),j} - \dot{c}^a_{ij}\dot{v}_{\dot{\tau}_i(a),i}$ $(j \in I)$ により定義する。各 $a \in \dot{\mathcal{A}}$ に対して $\dot{R}(a)$ を $\dot{\mathfrak{V}}_a$ の $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\dot{R}(a)) = \dot{\mathfrak{V}}_a$ となる部分集合とし $\dot{R}^+(a) := \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{\geq 0}\dot{v}_{a,i}$, $\dot{R}^-(a) := \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{\leq 0}\dot{v}_{a,i}$ とおく。データ $\dot{\mathcal{R}} = \dot{\mathcal{R}}(\dot{\mathcal{C}}, (\dot{R}(a))_{a\in\dot{\mathcal{A}}})$ を上記の (R1)-(R4) と同様の性質を満たすものとする。このような $\dot{\mathcal{R}}$ を categorical generalized root system という事にする。$a \in \dot{\mathcal{A}}$, $f \in \mathbb{M}$ と $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $a_{f,t} \in \dot{\mathcal{A}}$ と線形写像 $1^a\dot{s}_{f,t} : \dot{\mathfrak{V}}_{a_{f,t}} \to \dot{\mathfrak{V}}_a$ を上記と同様にして定義する。*Weyl groupoid* $\mathcal{W}(\dot{\mathcal{R}})$ を category として $\mathrm{Ob}(\mathcal{W}(\dot{\mathcal{R}})) := \dot{\mathcal{A}}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}(\dot{\mathcal{R}})}(a, a') := \{(a, w, a') | w \in \mathcal{H}(a, a')\}$ および $(a, w, a') \circ (a', w', a'') := (a, w \circ w', a'')$ により定義する。$a^\flat \in \dot{\mathcal{A}}$ を固定する。$\dot{\mathbb{B}}^\flat := \{1^{a^\flat}\dot{s}_{f,t}(\{\dot{v}_{a^\flat_{f,t},i} | i \in I\}) | f \in \mathbb{M}, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とおく。$(\dot{R}(a^\flat), \dot{\mathbb{B}}^\flat)$ は generalized root system である。次の Lemma は容易である。

Lemma 1.4. 写像 $\check{\alpha}^\flat : I \to \dot{R}(a^\flat)$ を $\check{\alpha}^\flat(i) := \dot{v}_{i,a^\flat}$ $(i \in I)$ により定義する。$\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \check{\mathbb{B}}^\flat, (\check{\tau}_i)_{i\in I}, (C^{\check{\alpha}})_{\check{\alpha}\in\check{\mathbb{B}}^\flat})$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C}, (R(\check{\alpha}))_{\check{\alpha}\in\check{\mathbb{B}}^\flat})$ および $\mathcal{W}(\mathcal{R})$ を $(\dot{R}(a^\flat), \dot{\mathbb{B}}^\flat)$ および $\check{\alpha}^\flat$ に対して上記で定義されたものとする。各 $a \in \dot{\mathcal{A}}$ に対して線形写像 $u_a : \dot{\mathfrak{V}}_a \to \check{\mathfrak{V}}$ を $u_a(\dot{v}_{a,i}) := \check{v}_i$ $(i \in I)$ により定義する。このとき Category の射 $\mathcal{F} : \mathcal{W}(\mathcal{R}) \to \mathcal{W}(\dot{\mathcal{R}})$ で $\mathcal{F}(\check{\alpha}^\flat_{f,t}) = a^\flat_{f,t}$ $(f \in \mathbb{M}, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ $\mathcal{F}((\check{\alpha}, w, \check{\alpha}')) = (\mathcal{F}(\check{\alpha}), u^{-1}_{\mathcal{F}(\check{\alpha})} \circ w \circ u_{\mathcal{F}(\check{\alpha}')}, \mathcal{F}(\check{\alpha}'))$ を満たすものが一意的に存在する。

$\dot{\mathcal{C}} = \dot{\mathcal{C}}(I, \dot{\mathcal{A}}, (\dot{\tau}_i)_{i\in I}, (\dot{C}^a)_{a\in\dot{\mathcal{A}}})$ を Cartan scheme とし、$\dot{\mathcal{R}} = \dot{\mathcal{R}}(\dot{\mathcal{C}}, (\dot{R}(a))_{a\in\dot{\mathcal{A}}})$ をを categorical generalized root system とする。$\dot{m}_{a,i,j} := |\dot{R}^+(a) \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0}\dot{v}_{a,i} \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\dot{v}_{a,j})|$ とおく。半群 $\mathfrak{W}(\dot{\mathcal{R}})$ を生成元

$$o,\ e_a,\ \sigma^a_i \quad (a \in \dot{\mathcal{A}},\ i \in I)$$

と関係式

$$
\begin{aligned}
&xo = ox = o \ (x \in \mathfrak{W}(\dot{\mathcal{R}})),\\
(1.4)\qquad &(e_a)^2 = e_a,\ e_a e_{a'} = o \ (a \neq a'),\\
&e_{\dot{\tau}_i(a)}\sigma_i^a = \sigma_i^a e_a = \sigma_i^a,
\end{aligned}
$$

$$
(1.5)\qquad \sigma_i^{\dot{\tau}_i(a)}\sigma_i^a = e_a
$$

$$
(1.6)\qquad 1^a\sigma_{f_{ij},\dot{m}_{a,i,j}} = 1^a\sigma_{f_{ji},\dot{m}_{a,i,j}} \ (a \in \dot{\mathcal{A}}, i, j \in I, i \neq j, \dot{m}_{a,i,j} < \infty)
$$

により定める（ここで (1.6) の等式の記号は上記のものと同様にして定める)。

Theorem 1.5. ([5]) 各 $a \in \dot{\mathcal{A}}$ に対して $k(1^a\sigma_{f,t}) = 1^a s_{f,t}$ ($f \in \mathbb{M}$, $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) により定義される全単射 $k : e_a\mathfrak{W}(\dot{\mathcal{R}}) \setminus \{0\} \to \cup_{a' \in \dot{\mathcal{A}}}\mathcal{H}(a, a')$ が存在する。

$a \in \mathbb{M}$ と $w \in \cup_{a' \in \dot{\mathcal{A}}}\mathcal{H}(a, a')$ に対して

$$
\ell_a(w) := \min\{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \exists f \in \mathbb{M}, 1^a s_{f,t} = w\}
$$

とおく。半群 $\tilde{\mathfrak{W}}(\dot{\mathcal{R}})$ を生成元 $\tilde{o}$, $\tilde{e}_a$, $\tilde{\sigma}_i^a$ ($a \in \dot{\mathcal{A}}$, $i \in I$) と (1.4), (1.6) と同様の関係式で定義する。

Theorem 1.6. ([5]) (1) $a \in \dot{\mathcal{A}}$, $f, f' \in \mathbb{M}$, $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $t = \ell_a(1^a s_{f,t})$ および $1^a s_{f,t} = 1^a s_{f',t}$ を満たすものとする。このとき $1^a\tilde{\sigma}_{f,t} = 1^a\tilde{\sigma}_{f',t}$ が成り立つ。

(2) $a \in \dot{\mathcal{A}}$, $f \in \mathbb{M}$, $t \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ を $t > \ell_a(1^a s_{f,t})$ を満たすものとする。このときある $f' \in \mathbb{M}$ と $r \in J_{1,t-1}$ で $f'(r) = f'(r+1)$ および $1^a\tilde{\sigma}_{f,t} = 1^a\tilde{\sigma}_{f',t}$ を満たすものが存在する。

2 Generalized quantum groups

$\mathfrak{V}$ を上記のものとする。$\mathfrak{V}$ の部分 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathfrak{A}$ を $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{V}$ かつ $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}$ となるものとする。$\mathbb{K}$ を代数閉体とする。$\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ とおく。単位元 $1 = 1_U$ を持つ結合的 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{U}^0$ を生成元 K_λ, L_λ ($\lambda \in \mathfrak{A}$) と定義関係式 $K_0 = L_0 = 1$, $K_\lambda K_\mu = K_{\lambda+\mu}$, $L_\lambda L_\mu = L_{\lambda+\mu}$, $K_\lambda L_\mu = L_\mu K_\lambda$ により定義する。特に $\{K_\lambda L_\mu | \lambda, \mu \in \mathfrak{A}\}$ は $\mathbb{U}^0$ の $\mathbb{K}$-基底である。(記号の乱用により、記号 K_λ, L_λ を下記の $\mathbb{K}$-代数 $U = U(\chi, \Pi)$ の或る元を表す為にも用いる。)

写像 $\chi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathbb{K}^\times$ を

$$
(2.1)\quad \chi(\lambda, \mu + \mu') = \chi(\lambda, \mu)\chi(\lambda, \mu') \quad かつ \quad \chi(\lambda + \lambda', \mu) = \chi(\lambda, \mu)\chi(\lambda', \mu)
$$

(λ, λ', μ, $\mu' \in \mathfrak{A}$) を満たすものとする。$\Pi = \{\alpha_i | i \in I\}$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathbb{Z}$-基とする。このとき次の公理 $(U1)$-$(U5)$ を満たす単位元 $1 = 1_U$ を持つ結合的 $\mathbb{K}$-代

数 $U = U(\chi, \Pi)$ が一意に存在する。(以下の $(U1)$-$(U5)$ でいくつかの記号も導入する。) $X, Y \in U$ に対して $[X, Y] := XY - YX$ とおく。

$(U1)$ $\mathbb{K}$-代数として U は生成元 $K_\lambda \in U_0$, $L_\lambda \in U_0$ $(\lambda \in \mathfrak{A})$, $E_i \in U_{\alpha_i}$, $F_i \in U_{-\alpha_i}$ $(i \in I)$ を持つ。
$(U2)$ $\mathbb{K}$-代数の単射準同型写像 $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}^{\chi,\Pi} : \mathbb{U}^0 \to U$ で $\mathfrak{i}(K_\lambda L_\mu) = K_\lambda L_\mu$ $(\lambda, \mu \in \mathfrak{A})$ を満たすものが存在する。
$(U3)$ 等式 $K_\lambda E_i = \chi(\lambda, \alpha_i) E_i K_\lambda$, $\chi(\lambda, \alpha_i) K_\lambda F_i = F_i K_\lambda$, $\chi(\alpha_i, \lambda) L_\lambda E_i = E_i L_\lambda$, $L_\lambda F_i = \chi(\alpha_i, \lambda) F_i L_\lambda$, $[E_i, F_j] = \delta_{ij}(-K_{\alpha_i} + L_{\alpha_i})$ $(\lambda \in \mathfrak{A},\ i, j \in I)$ が成り立つ。
$(U4)$ $U^0 := \mathrm{Im}\,\mathfrak{i}$ とおく。U^+ を 1 と E_i $(i \in I)$ で生成される U の $\mathbb{K}$-部分代数とする。U^- を 1 と F_i $(i \in I)$ で生成される U の $\mathbb{K}$-部分代数とする。このとき $\mathbb{K}$-線形同型写像 $\mathfrak{j} : U^- \otimes_{\mathbb{K}} U^0 \otimes_{\mathbb{K}} U^+ \to U$ で $\mathfrak{j}(Y \otimes Z \otimes X) := YZX$ を満たすものが存在する。
$(U5)$ $\{X \in U^+ | \forall i \in I, [X, F_i] = 0\} = \mathbb{K}1$ および $\{Y \in U^- | \forall i \in I, [E_i, Y] = 0\} = \mathbb{K}1$ が成り立つ。

$\mathfrak{A}_\Pi^+ := \mathfrak{A} \cap \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\Pi)$, $\mathfrak{A}_\Pi^- := \mathfrak{A} \cap \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}}(\Pi)$ とおく。次の Lemma が成り立つ。

Lemma 2.1. U の $\mathbb{K}$-部分空間 U_λ $(\lambda \in \mathfrak{A})$ で $U^0 \subset U_0$, $E_i \in U_{\alpha_i}$, $F_i \in U_{-\alpha_i}$ $(i \in I)$, $U_\lambda U_\mu \subset U_{\lambda+\mu}$, $U = \oplus_{\lambda \in \mathfrak{A}} U_\lambda$ を満たすものが存在する。(すなわち U は $\mathfrak{A}$-次数付き $\mathbb{K}$-代数である。) $U_\lambda^+ := U^+ \cap U_\lambda$, $U_\lambda^- := U^- \cap U_\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{A})$ とおく。$U^+ = \oplus_{\lambda \in \mathfrak{A}_\Pi^+} U_\lambda^+$ および $U^- = \oplus_{\mu \in \mathfrak{A}_\Pi^-} U_\mu^-$ が成り立つ。

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $x \in \mathbb{K}$ に対して $(n)_x := \sum_{k=1}^n x^{k-1}$ とおき $(n)_x! := \prod_{k=1}^n (k)_x$ とおく ($(0)_x = 0$, $(1)_x = 1$, $(0)_x! = (1)_x! = 1$ である)。写像 $\mathfrak{h} : \mathfrak{A} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を $\mathfrak{h}(\lambda)$ $(\lambda \in \mathfrak{A})$ を $J_{1,\mathfrak{h}(\lambda)} = \{n \in \mathbb{N} | (n)_{\chi(\lambda,\lambda)}! \neq 0\}$ となるものにする事により定義する。

Theorem 2.2. (Kharchenko[8]) 次の性質 (i)-(ii) を満たす $\mathfrak{A} \setminus \{0\}$ の部分集合 $R = R(\chi)$ と写像 $\mathfrak{m} : R \to \mathbb{N}$ が一意に存在する。

(i) $R^+ = R(\chi)^{\Pi,+} := \mathfrak{A}_\Pi^+ \cap R$ とおく。$R^- = R(\chi)^{\Pi,-} := \mathfrak{A}_\Pi^- \cap R$ とおく。このとき $R = R^+ \cup R^-$ および $R^- = -R^+$ が成り立つ。

(ii) 次の性質を満たす $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 全射 $f^+ : J_{1,k} \to R^+$, $f^- : J_{1,k} \to R^-$ および $E[t] \in U_{f^+(t)}^+ \setminus \{0\}$, $F[t] \in U_{f^-(t)}^- \setminus \{0\}$ $(t \in J_{1,k})$ が存在する。
(ii-1) 各 $\alpha \in R^+$ に対して $|(f^+)^{-1}(\{\alpha\})| = |(f^-)^{-1}(\{-\alpha\})| = \mathfrak{m}(\alpha) = \mathfrak{m}(-\alpha)$

が成り立つ。
(ii-2) $U^+[0] := U^-[0] := \mathbb{K}1$ とおき、$U^+[t] := \sum_{x=0}^{\mathfrak{h}(f^+(t))} U^+[t-1]E[t]^x$, $U^-[t] := \sum_{y=0}^{\mathfrak{h}(f^-(t))} U^-[t-1]F[t]^y$ $(t \in J_{1,k})$ とおく。このとき $\mathbb{K}$-線形空間として $U^+ = \cup_{z=0}^{k} U^+[z]$, $U^- = \cup_{z=0}^{k} U^-[z]$ かつ $U^+[t] = \oplus_{x=0}^{\mathfrak{h}(f^+(t))} U^+[t-1]E[t]^x$, $U^-[t] = \oplus_{y=0}^{\mathfrak{h}(f^-(t))} U^-[t-1]F[t]^y$ $(t \in J_{1,k})$ が成り立つ。

Theorem 2.3. (Heckenberger[4]) $i \in I$ とし任意の $j \in I \setminus \{i\}$ に対して $x_j := |R(\chi) \cap (\alpha_i \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_j| < \infty$ が成り立つと仮定する。$\Pi^{(\alpha_i)} := \{-\alpha_i\} \cup \{\alpha_j + (x_j - 1)\alpha_i | j \in I \setminus \{i\}\}$ とおく。このとき $\mathbb{K}$-代数の同型写像 $T_i : U(\chi, \Pi^{(\alpha_i)}) \to U(\chi, \Pi)$ で $T_i(U(\chi, \Pi^{(\alpha_i)})_\lambda) = U(\chi, \Pi)_\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{A})$ を満たすものが存在する。

Theorem 2.4. ([6]) $R = R(\chi)$ は有限集合であるとする。このとき $\mathfrak{m}(R) = \{1\}$（従って $k = |R| < \infty$ である。）であって $\Pi \in \mathbb{B}$ となる或る $\mathbb{B}$ で $(R, \mathbb{B})$ が *Generalized root system* となるものがある（従って $\mathbb{B} = \tilde{\mathbb{B}}$ である。)。さらに次の性質 (i)-(iii) を満たす f^+, f^-, $E[t]$, $F[t]$ $\quad (t \in J_{1,k})$ が存在する。

(i) $\quad f^+ = f^-$ であり $\mathfrak{h}(f^+(t)) < \infty$ のとき $E[t]^{\mathfrak{h}(f^+(t))+1} = F[t]^{\mathfrak{h}(f^+(t))+1} = 0$ が成り立つ。

(ii) 任意の全単射 $g : J_{1,k} \to J_{1,k}$ に対して $\{E[g(1)]^{x_{g(1)}} \cdots E[g(k)]^{x_{g(k)}} | x_t \in J_{0,\mathfrak{h}(f^+(t))} (t \in J_{1,k})\}$ は U^+ の $\mathbb{K}$-基底であり，$\{F[g(1)]^{y_{g(1)}} \cdots F[g(k)]^{y_{g(k)}} | y_t \in J_{0,\mathfrak{h}(f^-(t))} (t \in J_{1,k})\}$ は U^- の $\mathbb{K}$-基底である。

(iii) $t, t' \in J_{1,k}$, $t < t'$, に対して X (resp. Y) を $E[t'']$ (resp. $F[t'']$) *(*$t'' \in J_{t+1,t'-1}$*)* で生成される U^+ (resp. U^-) の *(*1 を含まない*)*$\mathbb{K}$-部分代数とする。$E[t]E[t'] - \chi(f^+(t), f^+(t'))E[t']E[t] \in X \cap U^+_{f^+(t)+f^+(t')}$ (resp. $F[t]F[t'] - \chi(f^+(t'), f^+(t))F[t']F[t] \in Y \cap U^-_{-f^+(t)-f^+(t')}$) が成り立つ。

Theorem 2.5. ([1]) [1] に於いて上の定理の元を用いて *Universal R-matrix* を構成した。

(2.2) $\quad$ $\boxed{\text{以下では } R(\chi) \text{ は有限集合であるとし かつ } \chi(\alpha,\alpha) \neq 1 \ (\alpha \in R(\chi)) \text{ である事を仮定する。}}$

($\mathbb{K}$ の標数が 0 のときはこの仮定は常に満たされる。)

$\mathbb{K}$-線形写像 $\mathfrak{S} : U \to U^0$ を $\mathfrak{S}_{|U^0} = \mathrm{id}_{U^0}$, $\mathfrak{S}(UE_i) = \mathfrak{S}(F_iU) = \{0\}$ $(i \in I)$ により定義する。$\mathfrak{P}$ を写像 $f : R(\chi) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $f(\alpha) \leq \mathfrak{h}(\alpha)$ $(\alpha \in$

$R(\chi))$ を満たすもの全体の集合とする。各 $\lambda \in \mathfrak{A}_\Pi^+$ に対して $\mathfrak{P}_\lambda^\Pi := \{f \in \mathfrak{P} | \sum_{\alpha\in R(\chi)^{\Pi,+}} f(\alpha)\alpha = \lambda\}$ とおく。Theorem 2.4 より次の等式が成り立つ。

$$|\mathfrak{P}_\lambda^\Pi| = \dim U_\lambda^+ = \dim U_{-\lambda}^- \quad (\lambda \in \mathfrak{A}_\Pi^+). \tag{2.3}$$

各 $\lambda \in \mathfrak{A}_\Pi^+$, $\alpha \in R(\chi)^{\Pi,+}$, $t \in \mathbb{N}$ に対して $\mathfrak{P}_\lambda^\Pi(\alpha;t) := \{f \in \mathfrak{P}_\lambda^\Pi | f(\alpha) \geq t\}$ とおき、$\mathfrak{p}(\lambda;\alpha) := \max(\{t \in \mathbb{N} | \mathfrak{P}_\lambda^\Pi(\alpha;t) \neq \emptyset\} \cup \{0\})$ とおく。Theorem 2.4 より $\mathfrak{A}_\Pi^+$ の中で次の等式が成り立つ事に注意する。

$$(\dim U_\lambda^+)\lambda = \sum_{\alpha\in R(\chi)^{\Pi,+}} \sum_{t_\alpha=1}^{\mathfrak{p}(\lambda;\alpha)} |\mathfrak{P}_\lambda^\Pi(\alpha;t_\alpha)|\alpha \quad (\lambda \in \mathfrak{A}_\Pi^+). \tag{2.4}$$

群の準同型写像 $\hat{\rho} : \mathfrak{A} \to \mathbb{K}^\times$ を $\hat{\rho}(\alpha_i) := \chi(\alpha_i, \alpha_i)$ $(i \in I)$ で定義する。各 $\lambda \in \mathfrak{A}$ に対して $q_\lambda := \chi(\lambda, \lambda)$ とおく。

Theorem 2.6. ([6]) $\lambda \in \mathfrak{A}$ とし，$m := \dim U_\lambda^+$ とおく。$m \neq 0$ を仮定する。$\{X_x | x \in J_{1,m}\}$ を U_λ^+ の $\mathbb{K}$-基底とし，$\{Y_y | y \in J_{1,m}\}$ を $U_{-\lambda}^-$ の $\mathbb{K}$-基底とする。U^0 の元を成分とする $m \times m$-行列 $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S} := [\mathfrak{S}(X_x Y_y)]_{x,y\in J_{1,m}}$ により定義する。このときある $z \in \mathbb{K}^\times$ があって U^0 の中で次の等式が成り立つ。

$$\det \mathcal{S} = z \cdot \prod_{\alpha\in R(\chi)^{\Pi,+}} \prod_{t_\alpha=1}^{\mathfrak{p}(\lambda;\alpha)} (-\hat{\rho}(\alpha) q_\alpha^{-t_\alpha} K_\alpha + L_\alpha)^{|\mathfrak{P}_\lambda^\Pi(\alpha;t_\alpha)|}. \tag{2.5}$$

$\varpi : \mathfrak{A} \to \mathbb{K}^\times$ を群の準同型写像とする。

$$\mathfrak{Z}_\varpi = \mathfrak{Z}_\varpi(\chi, \Pi) := \{\, Z \in U_0 \,|\, \forall\lambda \in \mathfrak{A}, \forall X \in U_\lambda, \, ZX = \varpi(\lambda)XZ \,\}.$$

とおく。

Theorem 2.7. ([9]) $\mathfrak{S}_{|\mathfrak{Z}_\varpi}$ は単射であり、$\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_\varpi)$ は次の等式で等式で特徴付けられる。

$Z = \sum_{(\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}^2} a_{(\lambda,\mu)} K_\lambda L_\mu \in U^0$ $(a_{(\lambda,\mu)} \in \mathbb{K})$ とする。このとき $Z \in \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_\varpi)$ であるための必要十分条件は各 $\beta \in R$ に対して以下の条件 $(e1)_\beta$-$(e4)_\beta$ を満たすことである。

以下では次の記号を用いる。$\hat{o}(q_\beta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{1\}$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(n)_{q_\beta}! \neq 0$ が成り立つときは 0 とおき、そうでないときは $\min\{m \in \mathbb{N} | (m)_{q_\beta}! = 0\}$ とおく。$\varpi^\chi_{\lambda,\mu;\beta} := \varpi(\beta)\frac{\chi(\beta,\mu)}{\chi(\lambda,\beta)}$ とおく。

$(e1)_\beta$ $(\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}^2$ と $t\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ に対して $q_\beta\neq 1$, $\hat{o}(q_\beta)=0$ かつ $\varpi^\chi_{\lambda,\mu;\beta}=q^t_\beta$ を満たすとき等式 $a_{(\lambda+t\beta,\mu-t\beta)}=\hat{\rho}(\beta)^t\cdot a_{(\lambda,\mu)}$ が成り立つ。

$(e2)_\beta$ $(\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}^2$ に対して，$\hat{o}(q_\beta)=0$ であり任意の $t\in\mathbb{Z}$ に対して $\varpi^\chi_{\lambda,\mu;\beta}\neq q^t_\beta$ であるならば $a_{(\lambda,\mu)}=0$ が成り立つ。

$(e3)_\beta$ $(\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}^2$, $\beta\in R^+$ と $t\in J_{1,\hat{o}(q_\beta)-1}$ に対して，$q_\beta\neq 1$, $\hat{o}(q_\beta)\geq 2$ かつ $\varpi^\chi_{\lambda,\mu;\beta}=q^t_\beta$ を満たすとき等式

$$\begin{aligned}\sum_{x=-\infty}^{\infty} & a_{(\lambda+(\hat{o}(q_\beta)x+t)\beta,\mu-(\hat{o}(q_\beta)x+t)\beta)}\hat{\rho}(\beta)^{-(\hat{o}(q_\beta)x+t)} \\ &= \sum_{y=-\infty}^{\infty} a_{(\lambda+\hat{o}(q_\beta)y\beta,\mu-\hat{o}(q_\beta)y\beta)}\hat{\rho}(\beta)^{-\hat{o}(q_\beta)y}\end{aligned}$$

が成り立つ。

$(e4)_\beta$ $(\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}^2$ と $\beta\in R^+$ に対して $\hat{o}(q_\beta)\geq 2$ であり、任意の $m\in J_{0,\hat{o}(q_\beta)-1}$ に対して $\varpi^\chi_{\lambda,\mu;\beta}\neq q^m_\beta$ が成り立つならば $\hat{o}(q_\beta)-1$ 個の等式

$$\begin{aligned}\sum_{x=-\infty}^{\infty} & a_{(\lambda+(\hat{o}(q_\beta)x+t)\beta,\mu-(\hat{o}(q_\beta)x+t)\beta)}\hat{\rho}(\beta)^{-(\hat{o}(q_\beta)x+t)} \\ &= \sum_{y=-\infty}^{\infty} a_{(\lambda+\hat{o}(q_\beta)y\beta,\mu-\hat{o}(q_\beta)y\beta)}\hat{\rho}(\beta)^{-\hat{o}(q_\beta)y} \quad (t\in J_{1,\hat{o}(q_\beta)-1})\end{aligned}$$

が成り立つ。

3 Weyl groupoids の最長元と Generalized quantum groups の有限次元既約表現の分類

結合的 $\mathbb{K}$-代数 $U=U(\chi,\Pi)$ を上記のもとする。$\mathrm{Ch}=\mathrm{Ch}(\chi,\Pi)$ を $\mathbb{K}$-代数の準同型写像 $\Lambda:U^0\to\mathbb{K}$ の集合とする。次の性質を満たす左 U-加群 $\mathcal{M}_\chi(\Lambda)$ が一意的に存在する。

(i) ある $\tilde{v}_\lambda\in\mathcal{M}_\chi(\Lambda)\setminus\{0\}$ で $Z\tilde{v}_\Lambda=\Lambda(Z)\tilde{v}_\Lambda$ $(Z\in U^0)$ および $E_i\tilde{v}_\Lambda=0$ $(i\in I)$ を満たすものが存在する。

(ii) $\mathbb{K}$-線形写像 $U^- \to \mathcal{M}_\chi(\Lambda)$, $Y \mapsto Y\tilde{v}_\Lambda$, は全単射である。

各 $\lambda \in \mathfrak{A}$ に対して $\mathcal{M}_\chi(\Lambda)_\lambda := U_\lambda^- \tilde{v}_\Lambda$ とおく。$\mathbb{K}$-線形空間として $\mathcal{M}_\chi(\Lambda) = \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}_\Pi^+}\mathcal{M}_\chi(\Lambda)_{-\lambda}$ が成り立つ。

$\mathcal{M}_\chi(\Lambda)$ の U-部分加群 $\mathcal{N} := \mathcal{N}_\chi(\Lambda)$ を $\mathcal{N} \subset \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}_\Pi^+\setminus\{0\}}\mathcal{M}_\chi(\Lambda)_{-\lambda}$ を満たすものの中で極大なものとする。左 U-加群 $\mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ を $\mathcal{L}_\chi(\Lambda) := \mathcal{M}_\chi(\Lambda)/\mathcal{N}$ により定義する。$\mathcal{L}_\chi(\Lambda) = \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}_\Pi^+}\mathcal{L}_\chi(\Lambda)_{-\lambda}$ および $\dim \mathcal{L}_\chi(\Lambda)_0 = 1$ が成り立つ。

仮定 (2.2) を課している事に注意する。

Lemma 3.1. ([2]) (1) $\mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ は既約 U-加群である。

(2) V を有限次元既約 U-加群とする。このとき U-加群として V と $\mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ が同型となる $\Lambda \in \mathrm{Ch}$ が存在する。

Proof. (1) 各 $\lambda \in \mathfrak{A}_\Pi^+\setminus\{0\}$ および各 $x \in \mathcal{L}_\chi(\Lambda)_{-\lambda}$ に対して $U^+x\cap\mathcal{L}_\chi(\Lambda)_0 = \{0\}$ ならば部分加群 Ux は $Ux = \mathrm{Span}_\mathbb{K}(U^-U^0U^+)x \subset \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}_\Pi^+\setminus\{0\}}\mathcal{L}_\chi(\Lambda)_{-\lambda}$ を満たすので $Ux = \{0\}$ が成り立ち $x = 0$ でなければならない。$\mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ は既約ではないと仮定し T を $\{0\} \neq T \neq \mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ となる U-部分加群とする。このとき $t \in T$ で $n \in \mathbb{N}$, $t = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$, $t_0 \in \mathcal{L}_\chi(\Lambda)_0 \setminus \{0\}$ であって $t_k \in \mathcal{L}_\chi(\Lambda)_{-\lambda_k}\setminus\{0\}$, $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$ $(k \neq k')$ となる $\lambda_k \in \mathfrak{A}_\Pi^+\setminus\{0\}$ $(k \in J_{1,n})$ が存在するものが存在する。このとき各 $k \in J_{1,n}$ に対して $U^+t_k \cap \mathcal{L}_\chi(\Lambda)_0 \neq \{0\}$ が成り立つと仮定してよい。これより $T = \mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ が成り立つので矛盾である。

(2) 各 $\Lambda \in \mathrm{Ch}$ に対して $V_\Lambda := \{v \in V | Zv = \Lambda(Z)v (Z \in U^0)\}$, $V^\Lambda := \{v \in V_\Lambda | \forall i \in I, E_iv = 0\}$ とおく。$\hat{O} := \{\Lambda \in \mathrm{Ch} | V_\Lambda \neq \{0\}\}$ とおく。$\mathbb{K}$ が代数閉体であるので $V = \oplus_{\Lambda\in\hat{O}}V_\Lambda$ が成り立つ。$\check{O} := \{\Lambda \in \hat{O} | V^\Lambda \neq \{0\}\}$ とおく。$(U^+)' := \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}_\Pi^+\setminus\{0\}}U_\lambda^+$ とおき、$(U^-)' := \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}_\Pi^+\setminus\{0\}}U_{-\lambda}^-$ とおく。仮定 (2.2) より Theorem 2.4 の主張の元 $E[t]$, $E[t]$ は V にべき零に作用する。この事より再び Theorem 2.4 より次の $(*)$ および $(**)$ が成り立つ。

$(*)$ $\quad \exists r \in \mathbb{N}, \forall v \in V, \forall X_t \in (U^+)'$ $(t \in J_{1,r})$, $X_1 \cdots X_tv = 0.$

$(**)$ $\quad \exists r \in \mathbb{N}, \forall v \in V, \forall Y_t \in (U^-)'$ $(t \in J_{1,r})$, $Y_1 \cdots Y_tv = 0.$

$(*)$ より $\check{O} \neq \emptyset$ が成り立つ。$\Lambda \in \check{O}$ とし $v \in V^\Lambda \setminus \{0\}$ とおく。このとき U-加群の全射準同型写像 $f : \mathcal{L}_\chi(\Lambda) \to V$, $f(X\tilde{v}_\Lambda) = Xv$ $(X \in U)$ が存在する。

$\mathcal{N} \not\subset \ker f$ とする。このとき $Y \in (U^-)' \setminus \{0\}$ で $\tilde{v}_\Lambda + Y\tilde{v}_\Lambda \in \ker f$ となるものが存在する。このとき $(-Y)v = v$ が成り立つ。これは $(**)$ に矛盾する。従って $\mathcal{N} \subset \ker f$ が成り立つ。従って $\mathcal{N} = \ker f$ が成り立つ。 $\square$

以下$\mathbb{K}$の標数が0であると仮定する。[2] でWeyl groupoidの最長元を用いてUの有限次元既約表現の分類定理を得た。以下はその一部である。

Theorem 3.2. ([2]) $q \in \mathbb{K}^{\times}$を1のべき根でないものとする。$z_{i,j} := \chi(\alpha_i, \alpha_j)$ $(i, j \in I = J_{1,\mathfrak{N}})$とおく。$\Lambda \in \mathrm{Ch}$とし$b_i := \Lambda(K_{\alpha_i} L_{-\alpha_i})$ $(i \in I)$とおく。

(1)（Uが$\mathrm{A}(m,n)$型単純スーパーリー代数に付随するものであるとき）$m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$を$m+n+1 = \mathfrak{N}$となるものとする。$z_{i,j}z_{j,i} = 1$ $(|i-j| \geq 2)$, $z_{i,i} = q$ $(i \in J_{1,m})$, $z_{m+1,m+1} = -1$, $z_{i,i} = q^{-1}$ $(i \in J_{m+2,m+n+1})$, $z_{i,i+1}z_{i+1,i} = q^{-1}$ $(i \in J_{1,m})$, $z_{i,i+1}z_{i+1,i} = q$ $(i \in J_{m+1,m+n})$とする。このとき$\dim \mathcal{L}_{\chi}(\Lambda) < \infty$である必要十分条件は

$$\forall i \in I \setminus \{m+1\},\ \exists t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ b_i = z_{i,i}^{t_i}$$

である。

(2)（Uが$\mathrm{B}(m,n)$型単純スーパーリー代数に付随するものであるとき）$m, n \in \mathbb{N}$を$m+n = \mathfrak{N}$となるものとする。$z_{i,j}z_{j,i} = 1$ $(|i-j| \geq 2)$, $z_{i,i} = q^{-2}$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{n,n} = -1$, $z_{i,i} = q^2$ $(i \in J_{n+1,m+n-1})$, $z_{m+n,m+n} = q$, $z_{i,i+1}z_{i+1,i} = q^2$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{i,i+1}z_{i+1,i} = q^{-2}$ $(i \in J_{n,m+n-1})$とする。$g := b_n \cdots b_{m+n}$とおく。このとき$\dim \mathcal{L}_{\chi}(\Lambda) < \infty$である必要十分条件は次の(i)-(iii)を満たす事である。

(i) $\forall i \in I \setminus \{n\}$, $\exists t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $b_i = z_{i,i}^{t_i}$.
(ii) $\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{2c-1 | c \in J_{1,m}\}$, $g = (-q)^{-k}$.
(iii) $\exists k \in J_{0,m-1}$, $g = q^{-2k} \Longrightarrow \forall i \in J_{n+k+1,m+n}$, $b_i = 1$.

(3)（Uが$\mathrm{C}(n)$型単純スーパーリー代数に付随するものであるとき）$n = \mathfrak{N}$とおき$n \geq 3$を仮定する。$z_{i,j}z_{j,i} = 1$ $(|i-j| \geq 2)$, $z_{1,1} = -1$, $z_{i,i} = q$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{n,n} = q^2$, $z_{i,i+1}z_{i+1,i} = q^{-1}$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{n-1,n}z_{n,n-1} = q^{-2}$ $(i \in J_{m+1,m+n})$とする。このとき$\dim \mathcal{L}_{\chi}(\Lambda) < \infty$である必要十分条件は

$$\forall i \in I \setminus \{1\},\ \exists t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ b_i = z_{i,i}^{t_i}$$

である。

(4)（Uが$\mathrm{D}(m,n)$型単純スーパーリー代数に付随するものであるとき）$m, n \in \mathbb{N}$を$m \geq 2$, $m+n = \mathfrak{N}$となるものとする。$z_{i,j}z_{j,i} = 1$ $(|i-j| \geq 2, i \in I \setminus \{m+n-1, m+n\})$, $z_{m+n-1,m+n}z_{m+n,m+n-1} = 1$, $z_{i,i} = q^{-1}$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{n,n} = -1$, $z_{i,i} = q$ $(i \in J_{n+1,m+n})$, $z_{i,i+1}z_{i+1,i} = q$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{i,i+1}z_{i+1,i} = q^{-1}$ $(i \in J_{n,m+n-2})$, $z_{m+n-2,m+n}z_{m+n,m+n-2} = q^{-1}$とする。$g :=$

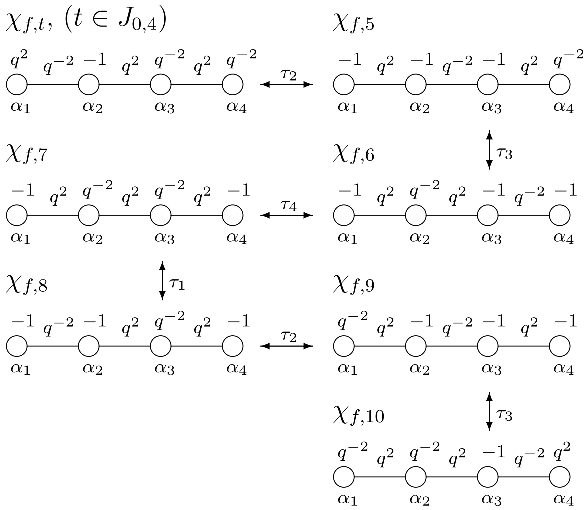
$(b_n \cdots b_{m+n-2})^2 \cdot b_{m+n-1} b_{m+n}$ とおく。このとき $\dim \mathcal{L}_\chi(\Lambda) < \infty$ である必要十分条件は次の (i)-(iv) を満たす事である。

(i) $\forall i \in I \setminus \{n\}$, $\exists t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $b_i = z_{i,i}^{t_i}$.

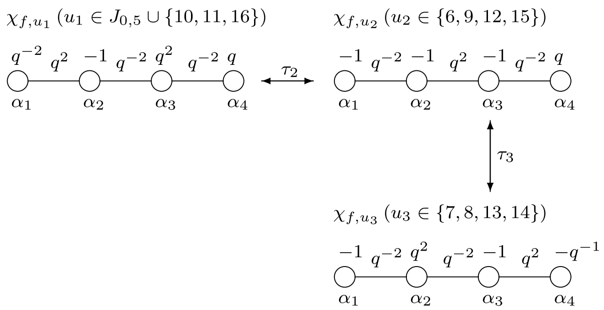
(ii) $\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $g = q^{-2k}$.

(iii) $\exists k \in J_{0,m-2}$, $g = q^{-2k} \Longrightarrow b_n \cdots b_{n+k} = q^{-k}$ かつ $\forall i \in J_{n+k+1,m+n}$, $b_i = 1$.

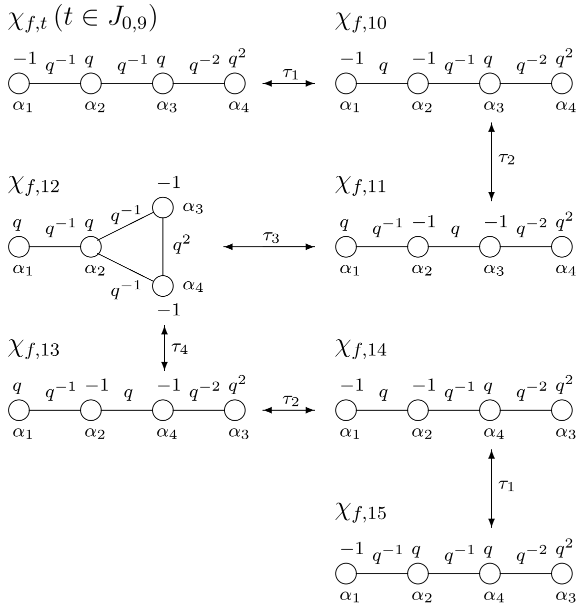
(iv) $g = q^{-(m-1)} \Longrightarrow b_n \cdots b_{m+n-1} = q^{-(m-1)}$.



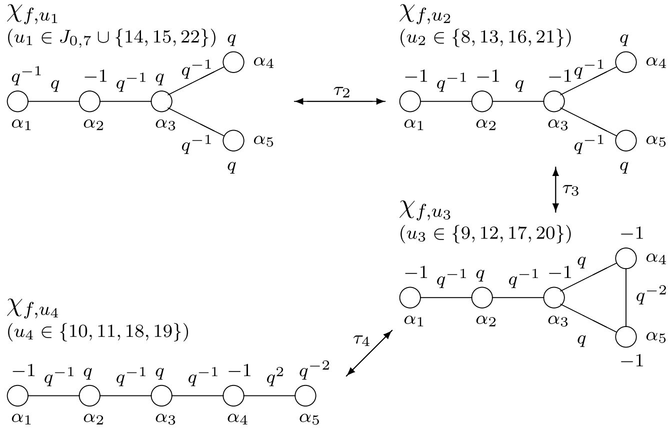
A(1, 2) 型単純スーパーリー代数に付随する U の Dynkin 図形 ; Weyl groupoid の最長元は $s_1^{\chi_{f,1}} s_3^{\chi_{f,2}} s_4^{\chi_{f,3}} s_3^{\chi_{f,4}} s_2^{\chi_{f,5}} s_3^{\chi_{f,6}} s_4^{\chi_{f,7}} s_1^{\chi_{f,8}} s_2^{\chi_{f,9}} s_3^{\chi_{f,10}}$



B(2, 2) 型単純スーパーリー代数に付随する U の Dynkin 図形 ; Weyl groupoid の最長元は $s_3^{\chi_{f,1}} s_4^{\chi_{f,2}} s_3^{\chi_{f,3}} s_4^{\chi_{f,4}} s_1^{\chi_{f,5}} s_2^{\chi_{f,6}} s_3^{\chi_{f,7}} s_4^{\chi_{f,8}} s_3^{\chi_{f,9}} s_2^{\chi_{f,10}} s_1^{\chi_{f,11}} s_2^{\chi_{f,12}} s_3^{\chi_{f,13}} s_4^{\chi_{f,14}}$ $\cdot s_3^{\chi_{f,15}} s_2^{\chi_{f,16}}$



C(4) 型単純スーパーリー代数に付随する U の Dynkin 図形 ; Weyl groupoid の最長元は $s_2^{\chi_{f,1}} s_3^{\chi_{f,2}} s_4^{\chi_{f,3}} s_2^{\chi_{f,4}} s_3^{\chi_{f,5}} s_4^{\chi_{f,6}} s_2^{\chi_{f,7}} s_3^{\chi_{f,8}} s_4^{\chi_{f,9}} s_1^{\chi_{f,10}} s_2^{\chi_{f,11}} s_3^{\chi_{f,12}} s_4^{\chi_{f,13}} s_2^{\chi_{f,14}} s_1^{\chi_{f,15}}$



D$(3,2)$ 型単純スーパーリー代数に付随する U の Dynkin 図形 ; Weyl groupoid の最長元は $s_3^{\chi_{f,1}} s_4^{\chi_{f,2}} s_5^{\chi_{f,3}} s_3^{\chi_{f,4}} s_4^{\chi_{f,5}} s_5^{\chi_{f,6}} s_1^{\chi_{f,7}} s_2^{\chi_{f,8}} s_3^{\chi_{f,9}} s_4^{\chi_{f,10}} s_5^{\chi_{f,11}} s_4^{\chi_{f,12}} s_3^{\chi_{f,13}} s_2^{\chi_{f,14}}$ $\cdot s_1^{\chi_{f,15}} s_2^{\chi_{f,16}} s_3^{\chi_{f,17}} s_4^{\chi_{f,18}} s_5^{\chi_{f,19}} s_4^{\chi_{f,20}} s_3^{\chi_{f,21}} s_2^{\chi_{f,22}}$

References

[1] I. Angiono, H. Yamane, The R-matrix of quantum doubles of Nichols algebras of diagonal type, J. Math. Phys. 56, 021702 (2015)

[2] S. Azam, H. Yamane, M. Yousofzadeh, Classification of Finite Dimensional Irreducible Representations of Generalized Quantum Groups via Weyl Groupoids. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **51** (2015), no. 1, 59–130.

[3] M. Cuntz and I. Heckenberger, Weyl groupoids with at most three objects, J. Pure Appl. Algebra 213 (2009), no. 6, 1112-1128.

[4] I. Heckenberger, Lusztig isomorphisms for Drinfel'd doubles of bosonizations of Nichols algebras of diagonal type, J. Algebra **323** (2010), no. 8, 2130–2182.

[5] I. Heckenberger and H. Yamane, A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto's theorem. Math. Z. 259 (2008), 255–276.

[6] I. Heckenberger and H. Yamane, Drinfel'd doubles and Shapovalov determinants, Revista de la Union Matematica Argentina, Volumen 51, no 2 (2010), 107-146.

[7] V.G. Kac, Infinite-dimensional Lie Algebras, 3rd ed., Cambridge University Press, 1990.

[8] V. Kharchenko, A quantum analogue of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem, Algebra and Logic **38** (1999), no. 4, 259–276.

[9] Punita Batra, Hiroyuki Yamane, Centers of Generalized Quantum Groups, preprint, arXiv:1309.1651 (the pdf-file of the newest version is put in http://www3.u-toyama.ac.jp/hiroyuki/.)

[10] H. Yamane, Generalized root systems and the affine Lie superalgebra $\mathrm{G}^{(1)}(3)$, Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences, (September 2015) DOI 10.1007/s40863-015-0021-5

山根宏之
富山大学理工学研究部（理）
〒 930-8555　富山市五福 3190
http://www3.u-toyama.ac.jp/hiroyuki/
hiroyuki@sci.u-toyama.ac.jp,