

✿ 日本数学会

2017年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション**  
**講演アブストラクト**

2017年9月

於 山形大学



✿ 日本数学会

2017年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション  
講演アブストラクト**

2017年9月

於 山形大学



# 無 限 可 積 分 系

9月11日(月) 第V会場

| 9:50~12:00       |  | (分)  | 頁  |
|------------------|--|------|----|
| 1                | <u>筧 三郎</u> (立教大理) 擬不変量を持つ可解カオスと虚数乗法 .....   | (15) | 1  |
|                  | <u>久保涼平</u> (立教大理)   |      |    |
| 2                | <u>永野中行</u> (東大数理) 保型形式の視点から見た可換な微分作用素 .....   | (15) | 3  |
| 3                | <u>中屋敷厚</u> (津田塾大学芸) KP 階層のtau関数の展開係数について .....  | (15) | 5  |
|                  | <u>岡田聡一</u> (名大多元数理)   |      |    |
|                  | <u>執行洋子</u> (津田塾大学芸)   |      |    |
| 4                | <u>小川原弘士</u> (熊本大先端科学) 代数的差分方程式の解の代数的独立性について .....   | (15) | 7  |
| 5                | <u>伊藤公毅</u> (豊橋技科大) $q$ 差分加群の解層とそのコホモロジー .....   | (15) | 9  |
| 6                | <u>大川 領</u> (早大基幹理工) Functional equations of Nekrasov functions proposed by Ito–Maruyoshi–Okuda .....                    | (15) | 11 |
| 7                | <u>小西由紀子</u> (京大理)* 齋藤構造の概双対性と複素鏡映群 .....  | (15) | 13 |
|                  | <u>三鍋聡司</u> (東京電機大工)   |      |    |
|                  | <u>白石勇貴</u> (京大理)  |      |    |
| 14:20~16:30      |  |      |    |
| 8                | <u>岡田聡一</u> (名大多元数理) $C$ 型ルート系に付随した Schur $Q$ 関数 .....   | (15) | 15 |
| 9                | <u>伊藤雅彦</u> (琉球大理) Selberg 型 $BC_n$ 楕円超幾何積分の行列式公式 .....  | (15) | 17 |
|                  | <u>野海正俊</u> (神戸大理)   |      |    |
| 10               | <u>竹村剛一</u> (中大理工) Degenerations of Ruijsenaars–van Diejen operator and $q$ -Painlevé equations .....                    | (15) | 19 |
| 11               | <u>増田 哲</u> (青学大理工) 4 階笹野系の $q$ -類似たち .....  | (15) | 21 |
| 12               | <u>鈴木貴雄</u> (近畿大理工) $W(A_{2n+1}^{(1)})$ -対称性を持つ一般化 $q$ -パンルヴェ VI 方程式に付随する双線型関係式 .....                                    | (15) | 23 |
| 13               | <u>大久保直人</u> (東大数理) $q$ -パンルヴェ方程式の退化とクラスター代数 .....   | (15) | 25 |
|                  | <u>鈴木貴雄</u> (近畿大理工)  |      |    |
| 14               | <u>長尾秀人</u> (明石工高専) $E_7^{(1)}$ 型 $q$ 差分パンルヴェ方程式の種々の特異点配置 .....  | (15) | 27 |
|                  | <u>山田泰彦</u> (神戸大理)   |      |    |
| 15               | <u>竹縄知之</u> (東京海洋大海洋工) 2次元可積分写像のファイバー依存非自励化と離散 Painlevé 方程式 .....  | (15) | 29 |
| 16:40~17:40 特別講演 |  |      |    |
|                  | <u>上岡修平</u> (京大情報) Partition functions for reverse plane partitions derived from the two-dimensional Toda molecule ..... |      | 31 |

9月12日(火) 第V会場

9:50~12:00

|    |                       |   |      |    |
|----|-----------------------|---|------|----|
| 16 | 茂木 康平 (東京海洋大海洋工)      | 6 頂点模型の Izergin–Korepin 解析                                  | (10) | 41 |
| 17 | 桑野 泰宏<br>(鈴鹿医療科学大医用工) | イジング模型: 2次元磁場付きの系と3次元系                                      | (15) | 43 |
| 18 | 小島 武夫 (山形大理工)         | 量子アフィン超代数 $U_q(\widehat{sl}(M N))$ の自由場表現                   | (15) | 45 |
| 19 | 齋藤 洋介 (阪市大数学研)        | フェルミオンと量子トラス代数の楕円化  | (15) | 47 |
| 20 | 大久保 勇輔 (ロシア HSE)      | Ding–Iohara–Miki 代数のレベル $N$ 表現の特異ベクトル                       | (15) | 49 |
| 21 | Ivan Chi Ho Ip (京大 理) | On tensor product decomposition of positive representations | (15) | 51 |
| 22 | 今野 均 (東京海洋大海洋工)       | 楕円量子群と楕円重み関数  | (15) | 53 |
| 23 | 今野 均 (東京海洋大海洋工)       | 楕円量子群の Gelfand–Tsetlin 基底上の有限次元表現                           | (15) | 55 |

13:00~14:00 特別講演

|  |                |                  |  |    |
|--|----------------|------------------|--|----|
|  | 粟田 英資 (名大多元数理) | Ding–庵原–三木代数の表現論 |  | 57 |
|--|----------------|------------------|--|----|



# 擬不変量を持つ可解カオスと虚数乗法

寛 三郎 (立教大学理学部)

久保 涼平 (立教大学大学院)

## 概 要

カオス的な振る舞いを示す非線形離散力学形で、三角関数・楕円関数等で書かれる厳密解を持つ系は「可解カオス系」と呼ばれている。今回は、特に、虚数乗法を持つ格子に付随する楕円関数を用いて解が表される系を中心に考察し、不変密度、“擬”不変量などについて議論していく。

カオス的な振る舞いを示し、かつ厳密解を明示的に構成できる例として最もよく知られている例は、次のものであろう (Ulam-von Neumann 写像):

$$s_{n+1} = 4s_n(1 - s_n). \quad (1)$$

この場合に、 $s_n = \sin(2^n \theta_0)$  ( $\theta_0$  は定数) が (1) をみたすことはすぐに確かめられる。この場合の“sin”のところを、楕円関数“sn”に置き換えた形の厳密解を持つ系も、以前から研究されてきた。梅野 [1] では、このクラスに含まれる系を統一するものとして、

$$w_{n+1} = \frac{4w_n(1 - w_n)(1 - mw_n)(1 - lw_n)}{1 - 2(l + m + lm)w_n^2 + 8lmw_n^3 + \{(l - m)^2 + lm(lm - 2l - 2m)\}w_n^4} \quad (2)$$

なる差分方程式を提案している ( $l, m$  は適当な条件を満たす定数)。

上述の例では、何らかの周期関数  $F(x)$  を用いて、一般項が  $a_n = F(2^n \theta_0)$  ( $\theta_0$  は定数) という形で表される数列に対して、対応する差分方程式を考えていることになり、本質的には「2倍角の公式」が用いられる。よく知られているように、 $\alpha \in \mathbb{C}$  による虚数乗法を持つ格子を考えると、対応する楕円関数  $F(z)$  は

$$F(\alpha z) = F(z) \text{ の有理式} \quad (3)$$

という形の関係式をみたすので、これを用いることで2倍角公式由来のものとは異なるクラスの可解カオス系が得られることになる。

今回の研究では、いくつかの場合に (3) の右辺の有理式を具体的に求め、そこから得られる可解カオス系の性質を考察した。ここでは次の例を紹介しよう:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{a_n} \right\}. \quad (4)$$

天下りであるが、ガウス整数のなす格子  $\Lambda = \{m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) を考える。このとき  $\alpha = 1 + i$  とおけば、 $\alpha\Lambda \subseteq \Lambda$  となり、格子  $\Lambda$  は  $\alpha$  による虚数乗法を持つ。またこのとき、対応する  $\wp$  関数は、次の関数等式をみたす [2]:

$$\wp(\alpha z; i) = \frac{1}{2i} \left\{ \wp(z; i) - \frac{16K^4}{\wp(z; i)} \right\} \quad \left( K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \right). \quad (5)$$



(関係式 (5) を含む  $\wp$  関数の虚数乗法公式のリストが<sup>2</sup>, [2] で与えられていることを注意しておく。) このとき,

$$a_n = \frac{i^n}{4K^2} \wp(\alpha^n \theta_0; i) \quad (6)$$

( $\theta_0$  は定数) とすれば, (4) の解となる。近藤 [4] は, 差分方程式 (4) を満たす  $\{a_n\}$  の, 偶数番目の部分列  $\{a_{2n}\}$  の表示式を求めているが, 我々の解 (6) は, 近藤の解を補間したものとなっている。また, 今の場合, 一般項  $a_n$  の明示式を利用して不変密度を求めることができる (詳細は講演の際に紹介する)。

上の  $\{a_n\}$ , および定数  $c$  に対して,  $\{p_n\}, \{q_n\}$  を次のように定義する:

$$p_n = 2^n \sqrt{c} a_n, \quad q_n = \frac{(-2)^n \sqrt{c}}{a_n}. \quad (7)$$

すると,  $\{p_n\}, \{q_n\}$  は次の差分方程式をみたすことが分かる:

$$p_{n+1} = p_n - q_n, \quad q_{n+1} = \frac{-4p_n q_n}{p_n - q_n}. \quad (8)$$

これは [3, 4, 5] で議論された例の一つ (“SK-1”) であり, 次の超幾何関数の関数等式と関係する:

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; \frac{-4x}{(1-x)^2}\right). \quad (9)$$

実際, (9) において  $x = q_n/p_n$  として, 両辺に  $1/\sqrt{p_n}$  をかけ, さらに (8) を用いて整理すると,

$$\frac{1}{\sqrt{p_n}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; \frac{q_n}{p_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{p_{n+1}}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; \frac{q_{n+1}}{p_{n+1}}\right) \quad (10)$$

が得られる。すなわち,  $I_n = \frac{1}{\sqrt{p_n}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; \frac{q_n}{p_n}\right)$  とおくと  $I_n = I_{n+1}$  となる。しかし, 関数等式 (9) は  $-1 < x < 1$  でのみ成り立つので, (10) が成り立つような  $p_n, q_n$  の範囲は制限を受けるため, 厳密な意味での “不変量” ではない。このような制限付きの “不変量” を, ここでは “擬不変量” と呼ぶことにする。

講演では, 虚数乗法に関連する系として, 上述の例, および梅野の例 [6] を含むいくつかの系について, 非線形差分方程式, 不変測度, 擬不変量を紹介していく。

## 参考文献

- [1] K. Umeno, Method of constructing exactly solvable chaos, *Phys. Rev.* **E55** (1997), 5280–5284.
- [2] A.P. Veselov, What is an integrable mapping?, in: *What is Integrability?*, V.E. Zakharov (Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1991, pp. 251–272.
- [3] 榊武史・笈三郎, 超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式, *日本応用数理学会論文誌* **17** (2007), 455–462.
- [4] K. Kondo, Solutions of Sakaki-Kakei equations of type 1, 2, 7 and 12, *JSIAM Letters* **3** (2011), 45–48.
- [5] K. Kondo, Solutions of Sakaki-Kakei equations of type 3, 5 and 6, *JSIAM Letters*, **2** (2010), 73–76.
- [6] 梅野健, 情報の統計力学, *数理科学* **600**, サイエンス社, 2013年6月, pp. 35–41.
- [7] 久保涼平・笈三郎, 超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式の楕円関数解, 九州大学応用力学研究所研究集会報告, 投稿中.

# 保型形式の視点から見た可換な微分作用素

永野中行 (東京大学)

## 1 Lamé 作用素にまつわる可換な微分作用素

$1$  と  $\Omega \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}$  が生成する自由アーベル群  $\Lambda(\Omega) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\Omega$  は複素平面  $\mathbb{C}$  内の格子を与える. Weierstrass  $\wp$  関数

$$\wp(\Omega, z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left( \frac{1}{(z - m - n\Omega)^2} - \frac{1}{(m + n\Omega)^2} \right)$$

は,  $z$  について二重周期  $1, \Omega$  を持ち,  $\Lambda(\Omega)$  で極を持つ  $\mathbb{C}$  上の有理型関数である.

$\mathbb{C}$  上の微分作用素

$$P_L = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + B\wp(\Omega, z) \quad (B \in \mathbb{C}) \quad (1.1)$$

を **Lamé 作用素** という. 微分方程式  $P_L u = Xu$  は **Lamé 方程式** と呼ばれる.  $B = 2$  のとき, Wallenberg (1902) は  $P_L$  と可換な作用素

$$Q_L = \frac{\partial^3}{\partial z^3} - 3\wp(\Omega, z) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial z} \wp(\Omega, z) \quad (1.2)$$

を与えた.  $P_L$  と  $Q_L$  は関係式

$$Q_L^2 = P_L^3 - \frac{g_2(\Omega)}{4} P_L - \frac{g_3(\Omega)}{4} \quad (1.3)$$

を満たすことが知られている. ここに  $g_2(\Omega), g_3(\Omega)$  はそれぞれ Eisenstein 級数と呼ばれる有名な楕円モジュラー形式である. ゆえに,  $P_L$  と  $Q_L$  は (1.3) が定める楕円曲線上の有理点とみなすことができる. このことは微分幾何学や代数幾何学において重要な例を与えてきた (Dubrovin, Mumford など).

## 2 保型形式を経由した拡張の試み

$\wp$  には重要な性質がある. 則ち,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  に対して

$$\wp\left(\frac{a\Omega + b}{c\Omega + d}, \frac{z}{c\Omega + d}\right) = (c\Omega + d)^2 \wp(\Omega, z)$$

を満たしている. 今回はこの性質に注目して上記の例の拡張を与える.

### 2.1 保型形式

シンプレクティック群  $Sp(n, \mathbb{R})$  の元  $\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  は Siegel 上半平面  $\mathbb{H}_n = \{\Omega \in M_n(\mathbb{C}) | \text{Im}\Omega \text{ が正定値, } {}^t\Omega = \Omega\}$  に  $\Omega \mapsto \alpha(\Omega) = (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1}$  と作用する.  $j(\alpha, \Omega) = \det(C\Omega + D)$  とおく.  $F$  を  $[F: \mathbb{Q}] = g$  なる総実体とし,  $\varphi_1, \dots, \varphi_g: F \hookrightarrow \mathbb{R}$  を  $g$  個の埋め込みとする.  $\alpha \in Sp(n, F)$  は  $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_g) \in \mathbb{H}_n^g$  に  $\Omega \mapsto \alpha(\Omega) = (\alpha^{\varphi_1}(\Omega_1), \dots, \alpha^{\varphi_g}(\Omega_g))$  と作用する.  $j_\alpha(\Omega) = \prod_{\nu=1}^g j(\alpha^{\varphi_\nu}, \Omega_j)$  とおく.  $Sp(n, F)$  の主合同部分群  $\Gamma$  をとる.  $\mathbb{H}_n^g$  上の正則関数  $f$  が任意の  $\alpha \in \Gamma$  に対して

$$f(\alpha(\Omega)) = j_\alpha(\Omega)^K f(\Omega)$$

を満たすとする. (ただし  $n = 1$  かつ  $F = \mathbb{Q}$  の時は例外的で,  $f$  が  $\Gamma$  の cusp のまわりの正則な Fourier 展開を更に仮定する.) このとき,  $f$  は  $\Gamma$  について weight  $K$  の **保型形式** という. これら全体を  $\mathcal{M}_K(\Gamma)$  とかく.

## 2.2 Baker-Akhiezer 関数

$\Omega \in \mathbb{H}_n^g$  をパラメータとし,  $z \in \mathbb{C}$  を独立変数とする  $N$  階の線型微分作用素

$$P = \frac{\partial^N}{\partial z^N} + a_2(\Omega, z) \frac{\partial^{N-2}}{\partial z^{N-2}} + \cdots + a_N(\Omega, z) \quad (2.1)$$

を考える.  $\lambda^N = X$  とする. Krichever [K] によると,  $Pu = Xu$  の形式解

$$u = \Psi(\Omega, z, w, \lambda) = \left( \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(\Omega, z, w) \lambda^{-s} \right) e^{\lambda(z-w)}$$

で  $z = w$  での初期値が 1 となるものが唯一に存在する (**Baker-Akhiezer 関数**).

今回は, generic な  $z$  について  $\Omega \mapsto a_j(\Omega, z)$  が正則,  $\Omega$  を固定したとき  $z \mapsto a_j(\Omega, z)$  が高々極を持つ解析関数とし,

$$a_j \left( \alpha(\Omega), \frac{z}{j_\alpha(\Omega)} \right) = j_\alpha(\Omega)^j a_j(\Omega, z)$$

という関数等式を満たすとする. (ただし, 例外的な  $n = 1$  かつ  $F = \mathbb{Q}$  の場合は,  $a_j$  が更に適切な Fourier 展開を持つと仮定する. 詳細は [N].) Lamé 作用素 (1.1) は  $n = 1, F = \mathbb{Q}, \Gamma = SL(2, \mathbb{Z}), N = 2$  のときの典型的な例を与えている. 上記の仮定の下で次が示される.

**Theorem 1.** ([N])  $\alpha \in \Gamma$  に対して  $\Psi$  は次の不変性を持つ:

$$\Psi \left( \alpha(\Omega), \frac{z}{j_\alpha(\Omega)}, \frac{w}{j_\alpha(\Omega)}, j_\alpha(\Omega) \lambda \right) = \Psi \left( \Omega, z, w, j_\alpha(\Omega) \lambda \right).$$

## 2.3 可換な微分作用素と保型形式との関係

(2.1) の作用素  $P$  と可換な作用素

$$Q = b_0(\Omega, z) \frac{\partial^M}{\partial z^M} + b_1(\Omega, z) \frac{\partial^{M-1}}{\partial z^{M-1}} + \cdots + b_M(\Omega, z) \quad (2.2)$$

で,  $Q$  が  $\Gamma$  の作用で weight  $K$ , generic な  $z$  に対して  $\Omega \mapsto b_j(\Omega, z)$  が正則,  $\Omega$  を固定した時  $z \mapsto b_j(\Omega, z)$  が局所解析的なものを考える. (ただし例外的な  $n = 1$  かつ  $F = \mathbb{Q}$  の場合には, 更に適切な Fourier 展開を持つと仮定する. 詳細は [N].) (1.2) の  $Q_L$  は  $P$  が  $B = 2$  の Lamé 作用素 (1.1) の場合の  $M = K = 3$  を満たす典型的な例である.

**Theorem 2.** ([N]) Baker-Akhiezer 関数  $\Psi$  は上の  $Q$  に対して  $Q\Psi = A(\Omega, \lambda)\Psi$  を満たす. ただし,  $A(\Omega, \lambda)$  は

$$A(\Omega, \lambda) = \sum_{s=-M}^{\infty} A_s(\Omega) \lambda^{-s}$$

と  $\lambda^{-1}$  についての Laurent 級数であり,  $A_s(\Omega)$  は weight  $K + s$  の保型形式である.

**Theorem 3.** ([N]) Theorem 2 と同じ条件のもとで, 微分作用素  $P, Q$  は代数曲線

$$F_\Omega(X, Y) = \sum_{j,k} f_{j,k}(\Omega) X^j Y^k = 0 \quad (2.3)$$

の代数曲線の有理点を与える. ここで  $f_{j,k}(\Omega) \in \mathcal{M}_{NK-Nj-Kk}(\Gamma)$ .

このように微分作用素から保型形式でパラメトライズされた代数曲線 (2.3) の族が与えられる. Weierstrass 方程式 (1.3) で定義された楕円曲線は (2.3) の特別な場合である.

## References

- [K] I. Krichever, *Integration of nonlinear equations by the methods of algebraic geometry*, Funkt. Anal. Appl., **11**, 1977, 12-26.
- [N] A. Nagano, *On rings of differential operators derived from automorphic forms*, Complex Analysis and Oper. Theor., 2017, to appear, arXiv:1609.2852.

## KP 階層のタウ関数の展開係数について

中屋敷 厚 (津田塾大学)

岡田 聡一 (名古屋大学)

執行 洋子 (津田塾大学)

変数  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  に対して, KP 階層 [1] は次のような双線形方程式で与えられる:

$$\operatorname{Res}_{k=\infty} \tau(x - y - [k^{-1}])\tau(x + y + k^{-1}) \exp\left(-2 \sum_{j=1}^{\infty} y_j k\right) dk = 0.$$

但し,

$$[k^{-1}] = (k^{-1}, k^{-2}/2, k^{-3}/3, \dots)$$

とする.

任意の形式的べき級数  $\tau(x)$  は, シューア関数  $s_\lambda(x)$  を用いて,

$$\tau(x) = \sum_{\lambda} \xi_{\lambda} s_{\lambda}(x)$$

と展開できることが知られている. ここでは, 与えられた分割  $\mu$  に対して次のような展開を持つ形式的べき級数  $\tau(x)$  を考える:

$$\tau(x) = s_{\mu}(x) + \sum_{\lambda \supset \mu} \xi_{\lambda} s_{\lambda}(x). \quad (1)$$

但し,  $\lambda \supset \mu$  とは  $\lambda, \mu$  をヤング図形と思ったときの包含関係を表す. KP 階層の解は, ある  $\mu$  に対してこのような形に書けることは知られている ([2]).

$\mu = \phi (s_{\mu} = 1)$  の場合は, 次の結果が知られている.

**定理 1. [3]**  $\mu = \phi$  のとき, (1) の形の  $\tau(x)$  が KP 階層の解であるための必要十分条件は, 展開係数  $\{\xi_{\lambda}\}_{\lambda}$  が次の Giambelli 公式を満たすことである:

$$\xi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_r | \beta_1, \dots, \beta_r)} = \det \left( \xi_{(\alpha_i | \beta_j)} \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

但し,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r | \beta_1, \dots, \beta_r)$  は分割のフロベニウス表記とする.

今回この定理を一般の  $\mu$  の場合に完全に拡張した.

**定理 2. [4]** 分割  $\mu = (\gamma_1, \dots, \gamma_s | \delta_1, \dots, \delta_s)$  を任意に与える. このとき, (1) の形の  $\tau(x)$  が KP 階層の解であるための必要十分条件は, 任意の分割  $\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_r | \beta_1, \dots, \beta_r)$  に対し, 展開係数  $\xi_{\lambda}$  が次の公式を満たすことである:

$$\xi_{\lambda} = (-1)^s \det \begin{pmatrix} \left( \xi_{(\alpha_i, \gamma_1, \dots, \gamma_s | \beta_j, \delta_1, \dots, \delta_s)} \right)_{1 \leq i, j \leq r} & \left( \xi_{(\alpha_i, \gamma_1, \dots, \hat{\gamma}_j, \dots, \gamma_s | \delta_1, \dots, \delta_s)} \right)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s} \\ \left( \xi_{(\gamma_1, \dots, \gamma_s | \beta_j, \delta_1, \dots, \hat{\delta}_i, \dots, \delta_s)} \right)_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r} & O \end{pmatrix}. \quad (2)$$

但し,  $\xi_{(\zeta_1, \dots, \zeta_t | \eta_1, \dots, \eta_t)}$  は  $\zeta_1, \dots, \zeta_t$  と  $\eta_1, \dots, \eta_t$  それぞれの添え字について反対称的になるように定義を拡張しておく. また,  $\mu = \phi$  のときは定理 1 となる.

元々は Giambelli 公式は Schur 関数についての次のような公式であった:

$$s_{(\alpha_1, \dots, \alpha_r | \beta_1, \dots, \beta_r)} = \det \left( s_{(\alpha_i | \beta_j)} \right)_{1 \leq i, j \leq r}. \quad (3)$$

(1) の展開係数  $\{\xi_\lambda\}$  と Schur 関数  $\{s_\lambda(x)\}$  が同じ公式を満たすのは Schur 関数は展開係数の特別の場合と考えられるからである. 一般に, 分割  $\mu$  を与え, 関数  $\tau^\mu(x)$  を

$$\tau^\mu(x) = \sum_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(y) s_\lambda(x) \quad (4)$$

で定義すると, Cauchy identity から  $\tau^\mu(x) = s_\mu(x) \exp(\sum_{n=1}^{\infty} n x_n y_n)$  となり,  $s_\mu(x)$  が KP 階層の解であるので  $\tau^\mu(x)$  も KP 階層の解であることが分かる.

従って定理 2 で  $\xi_\lambda = s_{\lambda/\mu}$  とすることが出来る.  $\mu = \phi$  のときは定理 1 から (3) が従う.  $\mu \neq \phi$  のときは定理 2 から skew-Schur 関数に対する Giambelli 公式の拡張が得られる.

系 1. 任意の 2 つの分割  $\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_r | \beta_1, \dots, \beta_r)$ ,  $\mu = (\gamma_1, \dots, \gamma_s | \delta_1, \dots, \delta_s)$  に対し,

$$s_{\lambda/\mu} = (-1)^s \det \begin{pmatrix} \left( s_{(\alpha_i, \gamma_1, \dots, \gamma_s | \beta_j, \delta_1, \dots, \delta_s)/\mu} \right)_{1 \leq i, j \leq r} & \left( s_{(\alpha_i, \gamma_1, \dots, \widehat{\gamma}_j, \dots, \gamma_s | \delta_1, \dots, \delta_s)/\mu} \right)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s} \\ \left( s_{(\gamma_1, \dots, \gamma_s | \beta_j, \delta_1, \dots, \widehat{\delta}_i, \dots, \delta_s)/\mu} \right)_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r} & O \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

また, 系 1 は [5] において別証が与えられている.

## 参考文献

- [1] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Transformation group for soliton equations, Nonlinear Integrable Systems-Classical Theory and Quantum Theory-, Ed. by M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1983).
- [2] 佐藤幹夫, 佐藤幹夫講義録 (梅田亨記), 数理解析レクチャー・ノート 5, 数理解析レクチャー・ノート刊行会, 1989.
- [3] V. Z. Enolski and J. Harnad, Schur function expansions of KP tau functions associated to algebraic curves, *Russian Math. Surveys* **66** (2011), 767–807.
- [4] A. Nakayashiki, S. Okada and Y. Shigyo, On the Expansion Coefficients of KP Tau Function, arxiv:1704.03659v1.
- [5] S. Okada, Generalized Sylvester Formulas and skew Giambelli Identities, arxiv:1704.02585.

# 代数的差分方程式の解の代数的独立性について

小川原 弘士 (熊本大学大学院先端科学研究部)\*

## 1. 概要

[5] において, Ostrowski は与えられた関数の原始関数が代数的独立となるための条件を導いた. Kolchin は Ostrowski の結果を受け, 与えられた関数の原始関数の指数関数が代数的独立となるための条件を与えた [2]. Hardouin は Ostrowski と Kolchin の結果の差分類似, すなわち 1 階線形差分方程式を満たす関数の代数的独立性の条件を与えた [1]. 本講演では, この差分類似を再帰的な関係を表す代数的差分方程式へ拡張する. 具体的に言えば,  $x_1(z), x_2(z), \dots, x_m(z), y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z)$  を未知関数,  $a_{i,j}(z), b_i(z), q_i(z)$  を係数とする以下の差分方程式系を考える:

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma(y_1(z)) = a_{1,1}(z)y_1(z) & +b_1(z), \\ \sigma(y_2(z)) = a_{2,1}(z)y_1(z) + a_{2,2}(z)y_2(z) & +b_2(z), \\ \vdots & \vdots \\ \sigma(y_n(z)) = a_{n,1}(z)y_1(z) + \dots + a_{n,n}(z)y_n(z) & +b_n(z), \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma(x_1(z)) = q_1(z)x_1(z)^{p_{1,1}}, \\ \sigma(x_2(z)) = q_2(z)x_1(z)^{p_{2,1}}x_2(z)^{p_{2,2}}, \\ \vdots \\ \sigma(x_m(z)) = q_m(z)x_1(z)^{p_{m,1}}x_2(z)^{p_{m,2}} \dots x_m(z)^{p_{m,m}}, \end{cases}$$

ここで  $p_{i,j}$  は整数とする.  $\sigma$  は変換作用素と呼ばれ, シフト作用素や  $q$  シフト作用素を抽象化したものである. 本講演では [4] で与えた結果に従い, 差分方程式系 (1), (2) の解が代数的独立となるための必要十分条件を主定理として紹介する.

主定理の応用例として, 以下の特殊関数の代数的独立性が与えられる:

1. Vignéras の多重ガンマ関数  $G_1(z) = \Gamma(z), G_2(z), \dots, G_m(z), \dots$  (cf. [6]) とガンマ関数の導関数  $\Gamma'(z), \Gamma''(z), \dots, \Gamma^{(n)}(z), \dots$  の代数的独立性
2. 対数関数  $\log z$ ,  $q$  多重対数関数  $\text{Li}_{q;1}(z), \text{Li}_{q;2}(z), \dots, \text{Li}_{q;n}(z), \dots$  (cf. [3]) と  $q$  指数関数  $e_q^z, E_q^z$  の代数的独立性

## 2. 準備

主定理を記述するために記号および差分代数の概念を準備する. 本講演では体は全て標数 0 の可換体のみ考える. 体  $K$  に対し,  $K^\times = K \setminus \{0\}$  と表記する. 体  $K$  とその自己準同型  $\sigma_K$  に対し, 組  $(K, \sigma_K)$  を差分体と呼ぶ. このとき  $K$  を基礎体,  $\sigma_K$  を変換作用素と呼ぶ. 例えば有理関数体とシフト作用素との組  $(\mathbb{C}(z), f(z) \mapsto f(z+1))$  や,  $q$  シフト作用素との組  $(\mathbb{C}(z), f(z) \mapsto f(qz))$  は差分体となる. 2つの差分体  $(L, \sigma_L), (K, \sigma_K)$  に対し,  $L \supset K$  かつ  $\sigma_L|_K = \sigma_K$  となるとき  $(L, \sigma_L)$  は  $(K, \sigma_K)$  の差分拡大体という.

2010 Mathematics Subject Classification: 12H10, 39A10, 39A13

キーワード: 差分代数, 代数的差分方程式, 代数的独立性

\* 〒 860-8555 熊本県熊本市中央区黒髪 2 丁目 39 番 1 号 熊本大学大学院 先端科学研究部  
e-mail: ogawara.89.hiroshi@gmail.com

記号を簡単にするため、以降は差分体  $(K, \sigma_K)$  を  $K$  と略記し、断りの無い限り  $\sigma$  を与えられた差分体の変換作用素として見なす。

差分体  $K$  の不変体を  $C_K$  と表記する。  $L/K$  を差分拡大とする。  $L/K$  の中間差分体  $M$  と  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \in L^n$  に対し、  $M\langle w \rangle$  と書いて  $w$  の各成分  $\{w_i\}_{1 \leq i \leq n}$  を含む最小の  $M$  上差分拡大体とする。  $M_n(K)$  に属する下三角行列  $A = (a_{i,j})$  と  $L/K$  の中間差分体  $M$  に対して、線形差分方程式の解空間  $V(M, A)$  を以下に定義する：

$$V(M, A) = \{u \in M^n \mid a_{n,n}u = A^T \sigma(u)\}.$$

ベクトル  $w$ , 行列  $A$  に対して  $w_{(r)} = (w_1, w_2, \dots, w_r)^T, A_{(r)} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$  と表記する。

### 3. 主定理

$L/K$  を  $C_L = C_K$  を満たす差分拡大とする。差分方程式系 (1) に現れる係数の下三角行列  $A(z) = (a_{i,j}(z))_{1 \leq i,j \leq n}$  とベクトル  $b(z) = (b_1(z), b_2(z), \dots, b_n(z))^T$  の各成分は  $K$  に属する関数とする。また (2) に現れる係数は  $q_1(z), q_2(z), \dots, q_m(z) \in K^\times$  とし、指数の下三角行列を  $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$  とおく。

**Theorem.**  $y(z) = (y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z))^T \in L^n, x(z) = (x_1(z), x_2(z), \dots, x_m(z))^T \in L^\times{}^m$  をそれぞれ (1) と (2) の解とする。行列  $A(z), P$  の対角成分は全て 1 に等しいと仮定する。また、任意の  $r \in \mathbb{N}_{\leq n}$  および  $s \in \mathbb{N}_{\leq m}$  に対して以下の条件を仮定する：

$$V(K\langle x(z), y(z) \rangle, A_{(r)}(z)) \subset K^r, \quad V(K\langle x(z), y(z) \rangle, P_{(s)}) \subset K^s.$$

このとき、  $x_1(z), x_2(z), \dots, x_m(z), y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z)$  が  $K$  上代数的従属であることと、以下の条件のうち少なくとも1つを満たすことは必要十分である：

1. ある  $f(z) \in K, r \in \mathbb{N}_{\leq n}$  および  $u(z) \in V(K\langle x(z), y(z) \rangle, A_{(r)}(z)) \setminus \{0\}$  が存在して、次の式を満たす。

$$\sigma(f(z)) = f(z) + \sigma(u(z))^T b_{(r)}(z).$$

2. ある  $f(z) \in K^\times, s \in \mathbb{N}_{\leq m}$  および  $l \in (\mathbb{Z}^s \cap V(K\langle x(z), y(z) \rangle, P_{(s)})) \setminus \{0\}$  を満たすベクトル  $l = (l_1, l_2, \dots, l_s)^T$  が存在して、次の式を満たす。

$$\sigma(f(z)) = \left( \prod_{i=1}^s q_i(z)^{l_i} \right) f(z).$$

### 参考文献

- [1] Hardouin, C., Hypertranscendance des systèmes aux différences diagonaux, *Compos. Math.*, Vol.144, No.3, pp.565–581, 2008.
- [2] Kolchin, E. R., Algebraic groups and algebraic dependence, *Amer. J. Math.*, Vol.90, pp.1151–1164, 1968.
- [3] Mansour T., Identities for sums of a  $q$ -analogue of polylogarithm functions, *Lett. Math. Phys.*, Vol.87, No.1, pp.1–18, 2009.
- [4] Ogawara, H., On criteria for algebraic independence of collections of functions satisfying algebraic difference relations, *Opuscula Math.*, Vol.37, No.3, pp.457–472, 2017.
- [5] Ostrowski, A., Sur les relations algébriques entre les intégrales indéfinies, *Acta Math.*, Vol.78, pp.315–318, 1946.
- [6] Vignéras, M.F., L'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Selberg du groupe modulaire  $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ , *Astérisque*, Vol.61, pp.235–249, 1979.

# \$q\$ 差分加群の解層とそのコホモロジー

## 層複体としての \$q\$ 差分ド・ラーム複体

伊藤公毅 (豊橋技術科学大学)\*

### 1. 導入

局所係数 (Čech) コホモロジーと (ツイスト) ド・ラームコホモロジーの同型はオイラー型積分で記述されるが, その \$q\$ 類似について青本和彦氏 (\$q\$-差分 de Rham 複体と Čech コホモロジー (底つき超幾何関数についての一考察), 数学 49(4), 350-364, 1997) により論じられている. 1 次元の場合に主張を述べてみよう: \$\{b\_\chi(t)\}\_{\chi \in \mathbb{Z}}\$ を有理関数 \$b\_\chi(t) = \frac{b\_\chi^+(t)}{b\_\chi^-(t)} \in \mathbb{C}(t)\$ の族で, \$b\_{\chi+\chi'}(t) = b\_\chi(t)b\_{\chi'}(q^\chi t)\$ を満たすものとする. (大域的) ド・ラーム複体

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(q_* D)) \xrightarrow{\nabla_q} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(q_* D)) \frac{d_q t}{t}$$

は, \$\nabla\_q f = \frac{f(t)-b\_1(t)f(qt)}{1-q} \frac{d\_q t}{t}\$ で定義される. ここで, \$\mathcal{O}(q\_\* D)\$ は \$b\_\chi^-(t)\$ の零点で高々 1 位の極, \$0, \infty\$ に高々極をゆるす有理型関数たちを表す. 一般の状況では, このコホモロジーが Čech コホモロジー \$\check{H}^p(\mathcal{U}, \text{Ker} \nabla\_q)\$ と同型になる. 但し, \$\mathcal{U} = \{U\_+, U\_-\}\$ は \$U\_\pm := \mathbb{C}^\* \setminus \bigcup\_{\chi \in \pm \mathbb{Z}\_{>0}} \{b\_\chi^\pm(t) = 0\}\$ で定める. (註:ここで用いた記号や \$\mathcal{U}\$ の定義は上述の青本氏の論文そのままではない. 私の勝手な解釈による.)

さて, この同型となる 2 つのコホモロジーは「何のコホモロジー」を計算しているのだろうか? Čech コホモロジーに用いた被覆 \$\mathcal{U}\$ は, どんな定義の下で「Leray」被覆なのだろうか? 古典的な場合, \$\mathcal{D}\$ 加群 \$\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{D}P\$ に対し, \$\mathbb{R}\mathcal{H}om\_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})\$ が (大体) 局所系や, ド・ラーム複体と擬同型になることから上記の様な主張は従うのであった. そこでこの \$q\$ 類似を考えたいのだが, 幾つかの問題が起こってくる:

1. 層或いは層複体を考えたいのだが, どんな位相で考えれば良いのか? (特に \$q\$ シフト作用は, 通常の意味の開集合上では定義できない.)
2. \$\mathcal{D}\$ 加群の \$q\$ 類似 (\$q\$ 差分加群) を考えたいのだが, 我々は \$\mathbb{P}^1\$ 上でやりたい. \$\mathbb{P}^1\$ 上の \$q\$ 差分作用素の層は如何にして定義するのか?

これらの問いに対する私なりの答えを本講演で提示する.

### 2. \$q\$ 差分作用素の層

\$q\$ シフト作用素を考える際には, \$\mathbb{P}^1\$ はトーリック多様体と理解する:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}[t^-] \longleftarrow & \longrightarrow & \mathbb{C}[t^+, t^-]/(t^+t^- - 1) \longleftarrow & \longrightarrow & \mathbb{C}[t^+] \\
 & & \bullet & & \\
 & & \longleftarrow \text{---} & \text{---} & \longrightarrow \\
 & & - & & + \\
 & & 0 & & \\
 & & \longleftarrow & \longrightarrow & \\
 \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \longleftarrow & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \cup \{0\}.
 \end{array}$$

本研究は科研費 (課題番号:17K05199) の助成を受けたものである。

\* e-mail: koki@las.tut.ac.jp



以下,  $(s_0, \dots, s_p) \in \{+, -\}^{p+1}$  に対し, 集合  $A$  が  $q^{s_0 \dots s_p}$ -不変であるとは,  $q^{sk\nu} A \subset A$  が  $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $k = 0, \dots, p$  で成立することと定める.  $q^{\pm}$ -不変開集合上では  $\partial_{q^{\pm}} : f \mapsto \frac{f(t^{\pm}) - f(qt^{\pm})}{(1-q)t^{\pm}}$  が定義されることに鑑みて,  $\text{Spec}(\mathbb{C}[t^{s_0}, \dots, t^{s_p}]/(t^+t^- - 1))_{an}$  上の  $q^{s_0 \dots s_p}$ -不変開集合  $V_{s_0 \dots s_p}$  の disjoint union  $\coprod V_{s_0 \dots s_p}$  に対し,

$$\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^p \left( \coprod V_{s_0 \dots s_p} \right) := \prod \mathcal{O}(V_{s_0 \dots s_p}) \langle \partial_{q^{s_0}}, \dots, \partial_{q^{s_p}} \rangle$$

とおく. 但し,  $t^+\partial_{q^+} + t^-\partial_{q^-} + (1 - q^{-1})\partial_{q^+}\partial_{q^-}$  などの関係でわっておく. すると,  $\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}$  は以下で定める単体的「位相」空間  $q\mathbb{P}^1$  上の層を定める:  $q\mathbb{P}^1_p$  は集合としては,  $\coprod \text{Spec}(\mathbb{C}[t^{s_0}, \dots, t^{s_p}]/(t^+t^- - 1))_{an}$  とし, 開集合系は  $q^{s_0 \dots s_p}$ -不変開集合たちの disjoint union とする. face 射は, 実は集合論的には定義されないが, Grothendieck 位相の意味で定めることができる. 更に,  $q^+$ -不変開集合と  $q^-$ -不変開集合の和集合で表される様な  $\mathbb{P}^1$  の開集合のみを (Grothendieck 位相の意味での) 「開集合系」とし, 適当な被覆族を指定した空間を  $q\mathbb{P}^1$  と表せば, 射  $a : q\mathbb{P}^1_0 \rightarrow q\mathbb{P}^1$  があって普遍的 cohomological descent になっていることもわかる.

$\mathcal{M}^{\bullet}$  を  $\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}$  の  $(b_{\chi}^{-} \sigma_q^{\chi} - b_{\chi}^{+})$  が生成する左イデアルによる商とする. 但し,  $\sigma_q^{\chi}$  は  $q$  シフト作用素  $f(t) \mapsto f(q^{\chi}t)$  を表す.  $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}}(\mathcal{O}^{\bullet}, \mathcal{M}^{\bullet})$  の  $(\mathbb{R}\Gamma)$  のコホモロジーが欲しかったものである. ここで,  $\mathcal{O}^{\bullet}$  は  $q\mathbb{P}^1$  の構造層で  $\mathcal{O}^{\bullet} := a^{-1}\mathcal{O}$  で定義される.

### 3. ド・ラームコホモロジー

$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}}(a^{-1}\mathcal{O}, \mathcal{M}^{\bullet})$  は, 複体  $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}}(\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}, \mathcal{M}^{\bullet}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}}(\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}, \partial_q, \mathcal{M}^{\bullet})$  と擬同型になるが, これが (層複体としての)  $q$  差分ド・ラーム複体を与える. 具体的には,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^p(q^*D) \left( \coprod V_{s_0 \dots s_p} \right) &:= \prod \mathcal{O}(q^*D_{s_0 \dots s_p})(V_{s_0 \dots s_p}) \\ (\Omega_q^1)^p(q^*D) \left( \coprod V_{s_0 \dots s_p} \right) &:= \prod \mathcal{O}(q^*D_{s_0 \dots s_p})(V_{s_0 \dots s_p}) d_q t^{s_0} \end{aligned}$$

とおくと,  $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}}(\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}, \mathcal{M}^{\bullet}) \cong \mathcal{O}^{\bullet}(q^*D)$  及び  $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}}(\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}, \partial_q, \mathcal{M}^{\bullet}) \cong (\Omega_q^1)^{\bullet}(q^*D)$  となる. ここで,  $\mathcal{O}(q^*D_{s_0 \dots s_p})$  は  $\bigcup_{k, \chi \geq 0} \{b_{s_k \chi}^{-}(t) = 0\}$  で高々 1 位の極,  $0, \infty$  に高々極をゆるす有理型関数たちを表す. 亦,  $fd_q t^{s_0}(\partial_{q^{s_0}}) = f$  で  $fd_q t^{s_0}$  を定める. 更に  $a_*$  を施すことで,  $q\mathbb{P}^1$  上のド・ラーム複体が得られ, これに大域切断を施したものが冒頭の (大域的) ド・ラーム複体に (擬同型) となる.

### 4. Čech コホモロジー

圏  $q\mathbb{P}^1 \setminus qD$  を, その対象が  $\mathbb{C}^* \setminus \bigcup_{\chi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \{b_{\chi}^{+}(t) = 0\} \cup \{b_{\chi}^{-}(t) = 0\}$  上の  $q^+$ -不変開集合と  $\mathbb{C}^* \setminus \bigcup_{\chi \in -\mathbb{Z}_{\geq 0}} \{b_{\chi}^{+}(t) = 0\} \cup \{b_{\chi}^{-}(t) = 0\}$  上の  $q^-$ -不変開集合の和集合をとる様なものとする. 適切に Grothendieck 位相を入れると, 自然な site の射  $\pi : q\mathbb{P}^1 \setminus qD \rightarrow E_q := \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$  及び  $j : q\mathbb{P}^1 \setminus qD \rightarrow q\mathbb{P}^1$  が存在する.  $q\mathbb{P}^1 \setminus qD$  上の層  $q\mathcal{L}$  で  $\pi_{*}q\mathcal{L}$  が局所自由  $\mathcal{O}_{E_q}$  加群 (つまり楕円曲線上の直線束) となる様なもの (局所系の  $q$  類似となるべきもの) が存在して,  $\mathbb{R}j_{*}q\mathcal{L} \cong \mathbb{R}a_{*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}}(a^{-1}\mathcal{O}, \mathcal{M}^{\bullet}) (\cong a_{*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{q\mathbb{P}^1}^{\bullet}}(a^{-1}\mathcal{O}, \mathcal{M}^{\bullet}))$  が成立する. 従って, 欲しかったコホモロジーは  $H^p(q\mathbb{P}^1 \setminus qD, q\mathcal{L})$  と同型である.  $q\mathcal{L}$  に対して, 冒頭の  $\mathcal{U}$  (を少し modify したもの) はルレイ被覆であり, 結局  $\check{H}^p(\mathcal{U}, q\mathcal{L})$  と同型となる. 更にこれらは,  $H^p(E_q, \pi_{*}q\mathcal{L})$  と同型になり, 直線束  $\pi_{*}q\mathcal{L}$  に対してのコホモロジーの消滅の有無, またリーマン・ロッホにより,  $H^p(q\mathbb{P}^1 \setminus qD, q\mathcal{L})$  の消滅の有無, オイラー数がわかる.

# Functional equations of Nekrasov functions proposed by Ito-Maruyoshi-Okuda

大川 領 (早稲田大学基幹理工学部) \*

この講演では  $A_1$  特異点から定まるネクラソフ分配関数について紹介する. これは特異点解消上の枠付き接続層のモジュライ上の積分を係数とする母関数である. 特異点解消として二つ、極小解消とスタック的な解消、つまり、射影平面を位数 2 の巡回群で割った商スタックを考える. これら二つの特異点解消から定まるネクラソフ分配関数の間の関数等式について紹介する.

アフィン平面  $Q = \mathbb{C}^2$  と  $SL(Q)$  の有限部分群  $\Gamma$  を考える. 有限群  $\Gamma$  は射影平面  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus Q)$  に自然に作用する. この作用による商スタックを  $X_0 = [\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus Q)/\Gamma]$  とおく.  $X_0$  から無限遠直線  $\ell_\infty = [\mathbb{P}(Q)/\Gamma]$  を取り除いた開集合を  $U_0$  とおく.  $U_0$  は商特異点  $Q/\Gamma = \text{Spec } \mathbb{C}[Q]^\Gamma$  のスタック的な特異点解消  $f: U_0 \rightarrow Q/\Gamma$  を与え,  $X_0 = U_0 \sqcup \ell_\infty$  はそのコンパクト化である.

一方, 極小特異点解消  $g: U_1 \rightarrow Q/\Gamma = \text{Spec } \mathbb{C}[Q]^\Gamma$  が  $\Gamma$ -ヒルベルトスキーム  $U_1 = \Gamma\text{-Hilb}(Q)$  により得られる.  $U_1$  のコンパクト化  $X_1$  を次のように構成する. アフィン平面  $Q = \mathbb{C}^2$  への  $\Gamma$ -作用は原点  $O = \{(0, 0)\} \subset Q$  以外では自由なので, 同型

$$U_1 \setminus g^{-1}(O) \cong U_0 \setminus f^{-1}(O)$$

を得る. この同型により,  $U_1$  と  $X_0 \setminus f^{-1}(O)$  とを貼り合わせることににより

$$X_1 = U_1 \cup (X_0 \setminus f^{-1}(O)) = U_1 \sqcup \ell_\infty$$

を得る.

$X_i$  ( $i = 0, 1$ ) 上の枠付き接続層とは組  $(E, \Phi)$  であり,  $E$  は  $X_i$  上のねじれを持たない接続層,  $\Phi: E|_{\ell_\infty} \cong \mathcal{O}_{\ell_\infty} \otimes W$  は接続層の同型を表す. ここで,  $W$  は有限次元  $\Gamma$ -表現である.

本講演では,  $\Gamma = \{\pm \text{id}_Q\} \subset SL(Q)$  の場合を考える. この時,  $\Gamma$ -表現は  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -次数付き複素ベクトル空間  $W = W_0 \oplus W_1$  により与えられる. この状況において,  $X_i$  上の枠付き接続層のモジュライから定まるネクラソフ分配関数と呼ばれる母関数について比較する.

$X_i$  の  $K$  群を  $K(X_i)$  とおき,  $X_i$  上の接続層  $E$  の  $K$  群におけるクラスを  $[E] \in K(X_i)$  で表す. クラス  $c \in K(X)$  をひとつ固定し, 枠付き接続層のモジュライ

$$M_{X_i}(c) = \{(E, \Phi) \mid [E] = c \in K(X_i)\}$$

---

\*email: ohkawa.ryo@aoni.waseda.jp

を考える.

モジュライ空間  $M_{X_i}(c)$  上の積分は, 代数的トーラス  $\tilde{T} = (\mathbb{C}^*)^2 \times (\mathbb{C}^*)^r \times (\mathbb{C}^*)^{2r}$  の作用による局所化の方法によって定義される. ここでは  $M_{X_i}(c)$  への作用として,  $(\mathbb{C}^*)^2$  の  $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$  への対角作用が誘導する作用,  $(\mathbb{C}^*)^r$  の対角作用  $\mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r} \cong \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$  が誘導する作用, 自明な  $(\mathbb{C}^*)^{2r}$  作用を考える. このとき, Nekrasov 分配関数

$$Z_i^k(\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{m}, q) = \sum_c q^{n(c)} \int_{M_{X_i}(c)} e \left( \bigoplus_{f=1}^{2r} \mathcal{V} \otimes \left( \frac{e^{m_f}}{\sqrt{t_1 t_2}} \right) \right) \in \mathbb{Q}(\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{m})[[q]]$$

が定義される. ここで,  $c \in K(X_i)$  は  $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  により指定される範囲を動き,  $n(c)$  は  $c$  により定まる有理数で,  $\mathcal{V}$  は  $M_{X_i}(c)$  上に定まる自然なベクトル束である. また,

$$(t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^*)^2, (e_1, \dots, e_r) \in (\mathbb{C}^*)^r, (e^{m_1}, \dots, e^{m_{2r}}) \in (\mathbb{C}^*)^{2r}$$

とし,  $\varepsilon = (c_1(t_1), c_1(t_2))$ ,  $\mathbf{a} = (c_1(e_1), \dots, c_1(e_r))$ ,  $\mathbf{m} = (c_1(e^{m_1}), \dots, c_1(e^{m_{2r}}))$  を対応する重み空間を一点 pt の上の  $\tilde{T}$ -同変直線束と見たときの第一 Chern 類とする. 有理関数体  $\mathbb{Q}(\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{m})$  は  $\tilde{T}$ -同変 Chow ring  $A_{\tilde{T}}^*(\text{pt})$  の商体とみなされる.

本講演では, 物理学者 Ito-Maruyoshi-Okuda が予想した等式 [IMO, (4.1), (4.2)] の証明について紹介する. すなわち次の定理を紹介する.

**主定理 0.1.** 以下の等式が成り立つ.

$$Z_1^k(\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{m}, q) = \begin{cases} (1 - (-1)^r q)^{u_r} Z_0^k(-\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{m}, q) & \text{if } k \geq 0 \\ Z_0^k(\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{m}, q) & \text{if } k \leq 0. \end{cases}$$

ここで  $u_r = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\sum_{f=1}^{2r} m_f + 2 \sum_{\alpha=1}^r a_\alpha)}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}$  である.

証明には, ADHM データと呼ばれる行列の組によるモジュライ  $M_{X_i}(c)$  の記述を用いる. この記述に望月拓郎氏の開発した壁越え公式 [M] を適用することで主定理が得られる.

## 参考文献

- [IMO] Y. Ito, K. Maruyoshi, T. Okuda, *Scheme dependence of instanton counting in ALE spaces*, J. High Energy Phys. 2013, no. 5, 045, front matter+16 pp.
- [M] T. Mochizuki, *Donaldson Type Invariants for Algebraic Surfaces: Transition of Moduli Stacks*, Lecture Notes in Math. 1972, Springer, Berlin, 2009.
- [O] R. Ohkawa, *Functional equations of Nekrasov functions proposed by Ito-Maruyoshi-Okuda*, preprint.

# 齋藤構造の概双対性と複素鏡映群

小西 由紀子 (京大・理)\*1  
 三鍋 聡司 (東京電機大・工)\*2  
 白石 勇貴 (京大・理)\*3

## 1. 背景と動機

有限実鏡映群の軌道空間上に、ある種の自然な平坦構造が存在することは、齋藤 [6]、齋藤・矢野・関口 [5] による基本的な結果である。この平坦構造とは、複素多様体の正則接束上に、平坦計量  $g$ 、可換で結合的な積構造  $\circ$ 、その積に関する単位元  $e$ 、オイラー・ベクトル場  $E$ 、という 4 つ組  $(g, \circ, e, E)$  が与えられ、それらが様々な可積分条件と整合性条件を満たすというものである。後に Dubrovin は、この構造を Frobenius 多様体という名で公理化し、齋藤らの構成に対して、Frobenius 多様体の概双対性 (Frobenius 多様体と概 Frobenius 多様体の双対性) という解釈を与えている [1]。

擬鏡映で生成される  $GL(n, \mathbb{C})$  の有限部分群を有限複素鏡映群と呼ぶ (cf. [7])。実鏡映群の場合の平坦構造を複素鏡映群に拡張することは自然な問題である。この場合には、上記の平坦構造に当たるものとして、“計量なしの平坦構造” を考える。これは、平坦計量を出発点とするのではなく、平坦で捩れない接続  $\nabla$  (計量がある場合の Levi-Civita 接続に当たるもの) を出発点とする平坦構造  $(\nabla, \circ, e, E)$  で、端的に言えば Frobenius 多様体から計量に関する情報を忘れたものである。[4] に従い、これを (計量なしの) 齋藤構造と呼ぶ。既約な有限複素鏡映群  $G \subset GL(n, \mathbb{C})$  の判別式が、最高次の不変式に関して  $n$  次 monic になるとき、 $G$  を duality group という。最近、加藤・眞野・関口 [2] は、duality group  $G$  の軌道空間上に齋藤構造が存在すること、そしてそれは  $G$  をモノドロミー群に持つ多変数の大久保型方程式から決まることを示した。この構成を、有限実鏡映群の場合と同様に、齋藤構造の概双対性として理解したい。これが本研究の動機である。

## 2. 結果の概要

$V = \mathbb{C}^n$ ,  $G \subset GL(V)$  を有限複素鏡映群とする。不変式環  $\mathbb{C}[V]^G$  の斉次で代数的に独立な生成元  $x^1, \dots, x^n$  を、 $x^1$  が次数最大となるように選ぶ。次の 2 条件を仮定する：

- (i)  $G$  の判別式  $\Delta_G$  は、 $x^1$  に関して  $n$  次 monic である。
- (ii) 全ての  $i$  に対して、 $\deg x^i > 1$  である。

$G$  が既約な有限複素鏡映群の場合には、仮定 (ii) は自動的に成り立ち、仮定 (i) が成り立つのは  $G$  が duality group の場合である。Duality group でない場合には、仮定 (i) が成り立つかどうかは不変式  $x^1, \dots, x^n$  の取り方に依存する。

**例.**  $G = A_1 \times A_1$  で、 $x, y$  がそれぞれの  $A_1$ -不変式の場合、 $\Delta_G = xy$  である。 $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  と取ると (i) は成り立たないが、 $x^1 = \frac{x+y}{2}$ ,  $x^2 = \frac{x-y}{2}$  とすれば成り立つ。

以下、 $M_G := \text{Spec } \mathbb{C}[x^1, \dots, x^n]$  を  $G$  の軌道空間、 $\partial_{x^i} := \partial/\partial x^i$  を  $x^i$  に対応する  $M_G$  上のベクトル場とし、 $E = \sum_i \frac{\deg x_i}{\deg x_1} x^i \partial_{x^i}$  とする。また、 $e = \partial_{x^1}$  とおく。条件  $\deg x^1 > \deg x^i$  ( $i > 1$ ) が成り立つ場合 (例えば duality group の場合)、ベクトル場  $e$  は、

\*1 e-mail: konishi@math.kyoto-u.ac.jp

\*2 e-mail: minabe@mail.dendai.ac.jp

\*3 e-mail: yshiraishi@math.kyoto-u.ac.jp

$x^i$ たちの取り方によらず, 定数倍を除いて一意的に決まる. 軌道写像  $\pi: V \rightarrow M_G$  の分岐点集合は  $\{\Delta_G = 0\}$  なので,  $\pi$  によって,  $T_V$  上の自明接続から,  $N_G := M_G \setminus \{\Delta_G = 0\}$  上の平坦で捩れない接続  $\nabla^V$  が誘導される. 次で定まる  $T_{N_G}$  の自己準同型  $Q$  を考える:

$$Q(x) := \nabla_x^V e \quad (x \in T_{N_G}).$$

**補題 1.** 仮定 (i), (ii) のもとで,  $Q$  は同型となる.

**定理 2.** 仮定 (i), (ii) のもとで,  $T_{N_G}$  に積  $\star$  を

$$x \star y = -Q^{-1}(\nabla_x^V \nabla_y^V e) + \nabla_x^V y$$

で定めると,  $(\nabla^V, \star, E, e)$  は,  $E$  を  $\star$  の単位元,  $e$  を “オイラー・ベクトル場” とする  $N_G$  上の概齋藤構造である.

次に,  $T_{N_G}$  の自己同型  $\mathcal{P}$  を  $\mathcal{P}(x) = e \star x$  と定め,  $T_{N_G}$  上の積  $\circ$  と接続  $\nabla$  を

$$x \circ y = \mathcal{P}^{-1}(x \star y), \quad \nabla_x y = \nabla_x^V y - \nabla_{x \circ y}^V e \quad (1)$$

と定める. これらは  $T_{M_G}$  にまで拡張されることが分かる.

**定理 3.**  $(\nabla, \circ, e, E)$  は,  $e$  を単位元,  $E$  をオイラー・ベクトル場とする  $M_G$  上の齋藤構造である. さらに, この齋藤構造は多項式的 (*i.e.* 不変多項式環の平坦な生成系が存在し, その生成系に関する積の構造定数が多項式) である.

定理 3 は加藤・眞野・関口 [2] の別証明も与えている. [2] の大久保型方程式とは,  $N_G$  上の平坦接続  $\nabla^V$  に関する水平切断の方程式のことである. また, 式 (1) が齋藤構造の概双対性に他ならない. つまり, 定理 3 の多項式的齋藤構造は, 定理 2 の “自然な” 概齋藤構造の双対として特徴付けることができる.

上述の 2 つの定理の証明では, まず,  $\nabla$  の接続行列と積  $\circ$  を,  $\nabla^V$  の接続行列から具体的に構成して,  $(\nabla, \circ, e, E)$  が齋藤構造の条件を満たすことを示す. 次に, これに双対な概齋藤構造が  $(\nabla^V, \star, E, e)$  であることを示す. この前半の構成は, 有限実鏡映群の場合の平坦構造の構成と平行になっている.

## 参考文献

- [1] Dubrovin, Boris, *On almost duality for Frobenius manifolds*, in Geometry, topology, and mathematical physics, 75–132, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 212, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [2] Kato, Mitsuo; Mano, Toshiyuki; Sekiguchi, Jiro, *Flat structure on the space of isomonodromic deformations*, arXiv:1511.01608 [math.CA].
- [3] Konishi, Yukiko; Minabe, Satoshi; Shiraishi Yuuki, *Almost duality for Saito structure and complex reflection groups*, arXiv:1612.03643 [math.AG].
- [4] Sabbah, Claude, *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, EDP Sciences, Les Ulis; CNRS Éditions, Paris, 2002. xvi+289 pp.
- [5] Saito, Kyoji; Yano, Tamaki; Sekiguchi, Jiro, *On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group*, Comm. Algebra **8** (1980), no. 4, 373–408.
- [6] Saito, Kyoji, *On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **29** (1993), no. 4, 535–579. (Preprint version: RIMS-288, Kyoto Univ., Kyoto, 1979.)
- [7] Shephard, G. C. and Todd, J. A., *Finite unitary reflection groups*, Canadian J. Math. **6** (1954). 274–304.

# C 型ルート系に付随した Schur Q 関数

岡田 聡一 (名古屋大学)\*

## 1. C 型ルート系に付随した Q 関数

Schur の Q 関数は, 対称群の射影表現の研究の中で Schur [4] によって導入された対称関数であり, Hall–Littlewood 対称関数において  $t = -1$  としたものである. ( $t = 0$  としたものが Schur 関数である.) この Hall–Littlewood 対称関数を A 型ルート系に付随するものとして, 一般のルート系に付随した Hall–Littlewood 関数が次のようにして定義される.

**定義 1.1.** ([2, §10])  $\Delta$  を (被約) ルート系とし,  $\Delta^+$  を正ルート系,  $P$  をウェイト格子,  $W$  を Weyl 群とする. このとき, 支配的ウェイト  $\lambda \in P$  に対して,

$$P_\lambda = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w \in W} w \left( e^\lambda \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - te^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \right)$$

と定義し, ルート系  $\Delta$  に付随した **Hall–Littlewood 関数**と呼ぶ. ここで,  $e^\nu$  は  $\nu \in P$  に対応する  $P$  の群環の元であり,

$$W_\lambda(t) = \sum_{w \in W, w\lambda = \lambda} t^{l(w)}$$

(ただし  $l(w)$  は Coxeter 群  $W$  の元としての  $w$  の長さを表す) である.

$\Delta$  として  $C_n$  型ルート系  $\{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i : 1 \leq i \leq n\}$  をとり, 支配的ウェイトを長さ  $n$  以下の分割と同一視し,  $x_i = e^{\varepsilon_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) とおく. 長さ  $n$  以下のストリクトな分割  $\lambda$  (つまり,  $\lambda$  の長さを  $l(\lambda)$  と表すとき  $\lambda_1 > \dots > \lambda_{l(\lambda)}$  である) に対して, 対応する Hall–Littlewood 関数において  $t = -1$  としたものを  $2^{l(\lambda)}$  倍して

$$Q_\lambda^C(\mathbf{x}) = Q_\lambda^C(x_1, \dots, x_n) = 2^{l(\lambda)} P_\lambda|_{t=-1}$$

とおき, C 型ルート系に付随した Q 関数 (あるいは斜交 Q 関数) と呼ぶ.

## 2. Pfaffian による公式

Pfaffian 版 Laplace 展開, Sylvester の公式, Cauchy–Binet の公式など ([3] を見よ) を用いることにより, 斜交 Q 関数に対しても Schur の Q 関数と同様の Pfaffian による公式が成り立つことがわかる.

**定理 2.1.** (Nimmo 型公式) 長さ  $l$  のストリクトな分割  $\lambda$  に対して,

$$Q_\lambda^C(\mathbf{x}) = \frac{1}{D^C(\mathbf{x})} \text{Pf} \begin{pmatrix} A^C(\mathbf{x}) & (f_{\lambda_j}(x_i))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r} \\ -t(f_{\lambda_j}(x_i))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r} & O \end{pmatrix}.$$

ここで,  $f_d(x) = (x^d - x^{-d})(x + x^{-1})/(x - x^{-1})$  ( $d \geq 1$ ),  $f_0(x) = 1$  であり,  $n + l$  の偶奇に応じて  $r = l$  あるいは  $l + 1$  である. また,

$$A^C(\mathbf{x}) = \left( \frac{x_j + x_j^{-1} - x_i - x_i^{-1}}{x_j + x_j^{-1} + x_i + x_i^{-1}} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad D^C(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_j + x_j^{-1} - x_i - x_i^{-1}}{x_j + x_j^{-1} + x_i + x_i^{-1}}.$$

\* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町 名古屋大学 多元数理科学研究科  
e-mail: okada@math.nagoya-u.ac.jp

定理 2.2. (Schur 型公式) 長さ  $l$  のストリクトな分割  $\lambda$  に対して,

$$Q_\lambda^C(\mathbf{x}) = \text{Pf} \left( Q_{(\lambda_i, \lambda_j)}^C(\mathbf{x}) \right)_{1 \leq i, j \leq r}.$$

ここで,  $l$  の偶奇に応じて  $r = l$  あるいは  $l + 1$  である.

定理 2.3. (Józefiak–Pragacz 型公式) ストリクトな分割  $\lambda, \mu$  に対して,

$$Q_{\lambda/\mu}^C(\mathbf{x}) = \text{Pf} \begin{pmatrix} \left( Q_{(\lambda_i, \lambda_j)}^C(\mathbf{x}) \right)_{1 \leq i, j \leq l} & \left( Q_{(\lambda_i - \mu_{r+1-j})}^C(\mathbf{x}) \right)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq r} \\ -t \left( Q_{(\lambda_i - \mu_{r+1-j})}^C(\mathbf{x}) \right)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq r} & O \end{pmatrix}$$

(ただし,  $l = l(\lambda)$ ,  $m = l(\mu)$  であり,  $l + m$  の偶奇に応じて  $r = m$  あるいは  $m + 1$  である) と定義すると,

$$Q_\lambda^C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mu} Q_{\lambda/\mu}^C(\mathbf{x}) Q_{\mu}^C(\mathbf{y}).$$

### 3. 組合せ論的表示式

定理 2.3 と lattice path method を用いると, 斜交  $Q$  関数の組合せ論的な表示式を導くことができる.

定義 3.1. (King–Hamel [1]) ストリクトな分割  $\lambda$  を枠とする斜交プライムつき変形盤とは,  $\lambda$  の変形 Young 図形  $S(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\}$  の各正方形に全順序集合

$$\Gamma_n = \{1' < 1 < \bar{1}' < \bar{1} < 2' < 2 < \bar{2}' < \bar{2} < \dots < n' < n < \bar{n}' < \bar{n}\}$$

の元を 1 つずつ書き込んで次の 5 つの条件をみたすようにしたもののである :

- (i) 各行の成分は左から右に広義単調増加である.
- (ii) 各列の成分は上から下に広義単調増加である.
- (iii) プライムのついた同じ文字は 1 つの行に 2 回以上現れない.
- (iv) プライムのつかない同じ文字は 1 つの列に 2 回以上現れない.
- (v)  $k', k, \bar{k}', \bar{k}$  のうち主対角線に現れる文字は高々 1 つである.

このような盤全体の集合を  $\text{PSTab}^{\text{SP}}(\lambda; n)$  と表す. 盤  $T \in \text{PSTab}^{\text{SP}}(\lambda; n)$  に対して,  $\gamma \in \Gamma_n$  の  $T$  における出現回数を  $m(\gamma)$  とし,

$$\mathbf{x}^T = \prod_{k=1}^n x_i^{m(k') + m(k) - m(\bar{k}') - m(\bar{k})}$$

と定義する.

定理 3.2. (King–Hamel 予想 [1]) 長さ  $n$  以下のストリクトな分割  $\lambda$  に対して,

$$Q_\lambda^C(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \text{PSTab}^{\text{SP}}(\lambda; n)} \mathbf{x}^T.$$

講演では, いくつかの正値性予想も提示する.

### 参考文献

- [1] R. C. King and A. M. Hamel, Combinatorial realisation of Hall–Littlewood polynomials at  $t = -1$ , Proceedings of the 19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Tianjin, July 2–6, 2007).
- [2] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, Sémin. Lothar. Combin. **45** (2000/01), Art. B45a.
- [3] S. Okada, Pfaffian formulas and Schur  $Q$ -function identities, arXiv:1706.01029.
- [4] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.

## Selberg型 $BC_n$ 楕円超幾何積分の行列式公式

伊藤 雅彦 (琉球大学・理)

野海 正俊 (神戸大学・理)

本講演では,  $BC_n$  型ルート系に付随した Selberg 型楕円超幾何積分を成分とする行列式が楕円ガンマ関数の積で具体的に表示できることを紹介する.

この研究に到る経緯として, [1] では  $BC_n$  型楕円 Lagrange 補間関数を導入することで,  $q$ -超幾何級数  ${}_r\psi_r$  の Sears–Slater 変換を一般化した公式を紹介した ( $BC_n$  型 Jackson 積分の接続公式). また, その系として  $BC_n$  型 Jackson 積分の行列式公式を述べた. この行列式公式の楕円化が本講演の結果である. 今回も  $BC_n$  型楕円 Lagrange 補間関数が関係しているので, まずその説明をする.

**補間関数.**  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  とし, 添字集合  $Z_{r,n}$  を以下のように定義する:

$$Z_{r,n} = \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r) \in \mathbb{N}^r \mid \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n\}.$$

$(\mathbb{C}^*)^n$  上の正則関数  $f(z)$  で,  $C_n$  型 Weyl 群の作用で不変, かつ  $p$  シフトに対して擬周期性  $T_{p,z_i} f(z) = f(z)/(pz_i^2)^{r-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たすもの全体を  $\mathcal{H}_{r-1,n}^{(p)}$  と書く:

$$\mathcal{H}_{r-1,n}^{(p)} = \{f(z) \in \mathcal{O}((\mathbb{C}^*)^n)^{W_n} \mid T_{p,z_i} f(z) = f(z)(pz_i^2)^{-r+1} \ (i = 1, \dots, n)\}.$$

$\mathcal{H}_{r-1,n}^{(p)}$  は  $\binom{n+r-1}{n}$  次元の  $\mathbb{C}$ -線型空間であり,  $\mathcal{H}_{r-1,n}^{(p)}$  の  $\mathbb{C}$ -基底として次の補間条件で特徴付けられる関数  $E_\mu(x; z)$  ( $\mu \in Z_{r,n}$ ) が一意に定まる:

$$E_\mu(x; (x)_{t,\nu}; p) = \delta_{\mu,\nu} \quad (\mu, \nu \in Z_{r,n}).$$

ただし,  $(x)_{t,\mu} \in (\mathbb{C}^*)^n$  は  $x = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in (\mathbb{C}^*)^r$  と  $\mu \in Z_{r,n}$  に対し

$$(x)_{t,\mu} = \underbrace{(x_1, x_1 t, \dots, x_1 t^{\mu_1-1})}_{\mu_1} \underbrace{(x_2, x_2 t, \dots, x_2 t^{\mu_2-1})}_{\mu_2}, \dots, \underbrace{(x_r, x_r t, \dots, x_r t^{\mu_r-1})}_{\mu_r} \in (\mathbb{C}^*)^n$$

で定義された点とする.  $E_\mu(x; z)$  ( $\mu \in Z_{r,n}$ ) を  **$BC_n$  型楕円 Lagrange 補間関数**と呼ぶ.  $E_\mu(x; z)$  の性質, 具体的表示など詳しくは [3] を参照のこと.

### $BC_n$ 楕円超幾何積分.

$p, q \in \mathbb{C}^*$  を固定し,  $|p| < 1, |q| < 1$  とする.  $C_n$  型 Weyl 群不変な有理型関数  $\Phi(z)$  を

$$\Phi(z) = \prod_{i=1}^n \frac{\prod_{k=1}^{2r+4} \Gamma(a_k z_i^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_i^{\pm 2}; p, q)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\Gamma(t z_i^{\pm 1} z_j^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_i^{\pm 1} z_j^{\pm 1}; p, q)}$$

と定義する. ここで

$$\Gamma(z; p, q) = \frac{(pq/z; p, q)_\infty}{(z; p, q)_\infty}, \quad (z; p, q)_\infty = \prod_{i,j=0}^{\infty} (1 - p^i q^j z)$$

は Ruijsenaars の楕円ガンマ関数である.  $(\mathbb{C}^*)^n$  上の正則関数  $f(z), g(z)$  に対して

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(z) g(z) \Phi(z) \omega_n(z), \quad \omega_n(z) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n} \quad (1)$$

と定義する. ただし,  $\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n \mid |z_i| = 1 \ (i = 1, \dots, n)\}$ .



この  $\langle f, g \rangle$  を **Selberg 型  $BC_n$  楕円超幾何積分** と呼ぶ。記号  $e(u, v; p)$  を

$$e(u, v; p) = u^{-1} \theta(u/v; p) \theta(uv; p)$$

とする。ただし,  $\theta(z; p) = (z; p)_\infty (p/z; p)_\infty$ ,  $(z; p) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - p^i z)$ .

**定理 (行列式公式).**  $t \in \mathbb{C}^*$  と  $a_i \in \mathbb{C}^*$  ( $1 \leq i \leq 2r+4$ ) はそれぞれ  $|t| < 1$  と  $|a_i| < 1$  を満たすとする。条件  $a_1 \cdots a_{2r+4} t^{2n-2} = pq$  のもとで, 次が成立する。

$$\det \left( \langle E_\mu(x; z; p), E_\nu(y; z; q) \rangle \right)_{\mu, \nu \in Z_{r,n}}$$

$$= \left( \frac{2^n n!}{(p; p)_\infty^n (q; q)_\infty^n} \right)^{\binom{n+r-1}{n}} \prod_{i=1}^n \frac{\left[ \left( \frac{\Gamma(t^{n-i+1}; p, q)}{\Gamma(t; p, q)} \right)^r \prod_{1 \leq k < l \leq 2r+4} \Gamma(t^{n-i} a_k a_l; p, q) \right]^{\binom{i+r-2}{i-1}}}{\left[ \prod_{j=0}^{n-i} \prod_{1 \leq k < l \leq r} e(t^j x_k, t^{n-i-j} x_l; p) e(t^j y_k, t^{n-i-j} y_l; q) \right]^{\binom{i+r-3}{i-1}}}.$$

● 楕円化する以前の  $q$ -類似の結果 ( $BC_n$  型 Jackson 積分の行列式公式) は, [2, p.1071 Theorem 1.3] または [3, p.364 Theorem 1.2] を参照のこと.  $BC_n$  型 Jackson 積分 (もしくは  $BC_n$  楕円超幾何積分) が満たす  $q$ -差分方程式系の基本解の一次独立性が, この行列式が 0 でないことから導かれる (いわゆるロンスキー行列式の役割をする).

● 二つの  $\mathbb{C}$ -線形空間  $\mathcal{H}_{r-1,n}^{(p)}$ ,  $\mathcal{H}_{r-1,n}^{(q)}$  に対して  $\mathbb{C}$ -線形形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H}_{r-1,n}^{(p)} \times \mathcal{H}_{r-1,n}^{(q)} \rightarrow \mathbb{C}$$

を積分 (1) によって定義すると  $\binom{n+r-1}{n} \times \binom{n+r-1}{n}$  行列  $(\langle E_\mu(x; z; p), E_\nu(y; z; q) \rangle)_{\mu, \nu \in Z_{r,n}}$  は,  $\mathbb{C}$ -線形形式  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  の表現行列を与える.  $\mathcal{H}_{r-1,n}^{(p)}$  と  $\mathcal{H}_{r-1,n}^{(q)}$  のそれぞれの楕円 Lagrange 補間関数を使う点が上記行列式公式の特徴である.

●  $r = 1$  のときは上記行列はサイズが  $1 \times 1$  となり,  $a_1 \cdots a_6 t^{2n-2} = pq$  のもとで,

$$\langle 1, 1 \rangle = \frac{2^n n!}{(p; p)_\infty^n (q; q)_\infty^n} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\Gamma(t^{n-i+1}; p, q)}{\Gamma(t; p, q)} \prod_{1 \leq k < l \leq 6} \Gamma(t^{n-i} a_k a_l; p, q) \right)$$

となる. これは  $BC_n$  型楕円 Selberg 積分 [5] と呼ばれる. この公式の証明は [4] も参照のこと.

## 参考文献

- [1] 伊藤, 野海: Sears–Slater の変換公式の一般化と  $BC_n$  型楕円 Lagrange 補間関数, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会 無限可積分系セッション (京都産業大) 講演アブストラクト, 35–36.
- [2] K. Aomoto and M. Ito: A determinant formula for a holonomic  $q$ -difference system associated with Jackson integrals of type  $BC_n$ , Adv. Math. 221 (2009), 1069–1114.
- [3] M. Ito and M. Noumi: A generalization of the Sears–Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type  $BC_n$ , Adv. Math. 299 (2016), 361–380.
- [4] M. Ito and M. Noumi: Evaluation of the  $BC_n$  elliptic Selberg integral via the fundamental invariants, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017) 689–703.
- [5] J. F. van Diejen and V. P. Spiridonov: Elliptic Selberg integrals, Internat. Math. Res. Notices 20 (2001), 1083–1110.

## Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and $q$ -Painlevé equations

竹村 剛一 (中央大学理工学部)

ホイン (Heun) の微分方程式は、リーマン球面上で4点  $\{0, 1, t, \infty\}$  に確定特異点をもつ2階線形微分方程式の標準形であり、以下の形で与えられる。

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left( \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-t} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - B}{z(z-1)(z-t)} y = 0, \quad (1)$$

ここで  $B$  はアクセサリーパラメーターと呼ばれ、各特異点での局所構造 (特性指数) とは独立なパラメーターである。一方、ガウスの超幾何微分方程式は3点  $\{0, 1, \infty\}$  に確定特異点をもっているが、これにはアクセサリーパラメーターは含まれない。

ここで、ホインの微分方程式の  $q$ -変形として  $q$ -ホイン方程式を次で定義する。

$$(x - h_1 q^{1/2})(x - h_2 q^{1/2})g(x/q) + l_3 l_4 (x - l_1 q^{-1/2})(x - l_2 q^{-1/2})g(xq) - \{(l_3 + l_4)x^2 + Ex + (l_1 l_2 l_3 l_4 h_1 h_2)^{1/2}(h_3^{1/2} + h_3^{-1/2})\}g(x) = 0. \quad (2)$$

$g(x/q)$  などの係数は、すべて  $x$  について2次多項式となっている。また、 $q \rightarrow 1$  の極限においてホインの微分方程式を得ることができる。 $q$ -ホイン方程式自体は Hahn の1971年の論文 ([2]) で得られていることを、大山陽介さんに教えていただいた。

本講演では、 $q$ -ホイン方程式を2つの方法で得ることができたことを報告する ([5])。1つは一粒子 Ruijsenaars-van Diejen 作用素の4回の退化であり、他方は  $q$ -差分パルヴェ第六方程式を生み出す線形  $q$ -差分方程式 ([1]) の特殊化である。そして、Ruijsenaars-van Diejen 作用素の一粒子の場合の第二、第三、第四の退化で得られる式が、3種類の  $q$ -差分パルヴェ方程式 ( $E_7^{(1)}, E_6^{(1)}, D_5^{(1)}$ ) を生み出す線形  $q$ -差分方程式 ([7]) の特殊化と一致することも見出した。

これらの結果は、Painlevé-Heun 対応の  $q$ -変形にもなっている。Painlevé-Heun 対応とは、4点に確定特異点をもつサイズが2のフックス型常微分方程式系からモノドロミー保存変形によってパルヴェ第六方程式が得られ、他方でここでのフックス型常微分方程式系のパラメーターを特殊化するとホインの微分方程式が得られるという、フックス型常微分方程式系を介しての対応である。

Ruijsenaars-van Diejen 作用素は、次の形で与えられる差分作用素である ([6])。

$$A(\mu; x) = \sum_{j=1}^N (V_j^+(x) \exp(\delta \partial_{x_j}) + V_j^-(x) \exp(-\delta \partial_{x_j})) + V_0(x), \quad (3)$$

$$V_j^\pm(x) = \frac{\prod_{s=1}^8 \theta(\pm x_j + \mu_s)}{\theta(\pm 2x_j) \theta(\pm 2x_j + \delta)} \prod_{k \neq j} \frac{\theta(\pm x_j + x_k + \kappa) \theta(\pm x_j - x_k + \kappa)}{\theta(\pm x_j + x_k) \theta(\pm x_j - x_k)},$$

$$\exp(\pm \delta \partial_{x_j}) f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, x_j \pm \delta, \dots, x_N).$$

ここで  $\theta(x)$  はテータ関数であり、 $V_0(x)$  の表示は省略する。これは量子 Inozemtsev 系の差分版であり、Inozemtsev 系における一粒子場合の固有値・固有関数を求める式がホインの微分方程式の楕円関数表示そのものとなっている。

一粒子の Ruijsenaars-van Diejen 作用素は  $E_8$  対称性をもつことが知られている ([3])。他方、楕円差分パルヴェ方程式 ([4]) は  $E_8^{(1)}$  対称性をもっていて、 $q$  差分パルヴェ方程式やパルヴェ微分方程式などは対称性も込めて楕円差分パルヴェ方程式からの退化で得られている。このことが、Ruijsenaars-van Diejen 作用素の退化を調べる動機になっている。

Ruijsenaars-van Diejen 作用素の退化について述べておく。Ruijsenaars-van Diejen 作用素において、テータ関数の一つの周期を  $\sqrt{-1}\infty$  と極限をとることにより第一の退化が得られ、一粒子の場合の結果は次のものである。

$$\begin{aligned} A^{(1)}(h; z) &= V^{(1)}(h; z) \exp(-ia_- \partial_z) + V^{(1)}(h; -z) \exp(ia_- \partial_z) + U^{(1)}(h; z), \\ V^{(1)}(h; z) &= \frac{\prod_{n=1}^8 (1 - e^{-2\pi iz} e^{2\pi i \tilde{h}_n} e^{-\pi a_-})}{(1 - e^{-4\pi iz})(1 - e^{-4\pi iz} e^{-2\pi a_-})}, \\ U^{(1)}(h; z) &= \frac{\prod_{n=1}^8 (e^{2\pi i \tilde{h}_n} - 1)}{2(1 - e^{2\pi iz} e^{\pi a_-})(1 - e^{-2\pi iz} e^{\pi a_-})} + \frac{\prod_{n=1}^8 (e^{2\pi i \tilde{h}_n} + 1)}{2(1 + e^{2\pi iz} e^{\pi a_-})(1 + e^{-2\pi iz} e^{\pi a_-})} \\ &\quad + e^{-\pi a_-} \prod_{n=1}^8 e^{\pi i \tilde{h}_n} \left[ (e^{2\pi iz} + e^{-2\pi iz}) \sum_{n=1}^8 (e^{2\pi i \tilde{h}_n} + e^{-2\pi i \tilde{h}_n}) - (e^{\pi a_-} + e^{-\pi a_-})(e^{4\pi iz} + e^{-4\pi iz}) \right]. \end{aligned}$$

変数  $z$  とパラメーター  $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_8$  を  $z \Rightarrow z + iR$ ,  $\tilde{h}_n \Rightarrow h_n + iR$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ),  $\tilde{h}_n \Rightarrow h_n - iR$  ( $n = 5, 6, 7, 8$ ) とおきかえて  $R \rightarrow \infty$  と極限をとることにより第二の退化が得られる。第三の退化および第四の退化も、 $z$  とパラメーターをシフトして極限をとることによって得られる。

## 参考文献

- [1] M. Jimbo, H. Sakai, A  $q$ -Analog of the Sixth Painlevé Equation. *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145–154
- [2] W. Hahn, On linear geometric difference equations with accessory parameters, *Funkcial. Ekvac.* **14** (1971), 73–78.
- [3] S. N. M. Ruijsenaars, Hilbert-Schmidt operators vs. integrable systems of elliptic Calogero-Moser type IV. The relativistic Heun (van Diejen) case, *SIGMA* **11** (2015), paper 004.
- [4] H. Sakai, Rational surfaces with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *Commun. Math. Phys.* **220** (2001), 165–221
- [5] K. Takemura, Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and  $q$ -Painlevé equations, arXiv:1608.07265.
- [6] J. F. van Diejen, Difference Calogero-Moser systems and finite Toda chains, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 1299–1323.
- [7] Y. Yamada, Lax formalism for  $q$ -Painlevé equations with affine Weyl group symmetry of type  $E_n^{(1)}$ , *Int. Math. Res. Notices* (2011) 3823–3838.

## 4階笹野系の $q$ -類似たち

増田 哲 (青山学院大学 理工学部)\*

4階笹野系 [2] は,

$$H = \sum_{i=1}^2 H_{\text{VI}}(q_i, p_i; a_i, b_i, c_i, d_i) + 2(q_1 - t)p_1q_2(p_2(q_2 - 1) + \beta_4)$$

を Hamiltonian とする Hamilton 系

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2), \quad ' = t(t-1)\frac{d}{dt}$$

として定式化される. ここで,  $a_i, b_i, c_i$  はパラメータ  $\beta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 6$ ) のある 1 次同次式,  $d_i$  は 2 次同次式であり,  $H_{\text{VI}}(q, p; a, b, c, d)$  は, Painlevé VI 方程式の Hamiltonian である. また,  $\beta_0 + \beta_1 + 2(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4) + \beta_5 + \beta_6 = 1$  が成り立つ. 4階笹野系の Bäcklund 変換の全体は,  $D_6^{(1)}$  型拡大アフィン Weyl 群と同型であることが知られている.

一方, 津田と竹縄は, 一般化された Dynkin 図形に付随する, 有理多様体上の 双有理変換群としての Weyl 群の実現を与えた [3]. 彼らの結果はアフィン  $D$  型の場合を含んでいる. 我々はそれらを用いて,  $D_{2N+3}^{(1)}$  型拡大アフィン Weyl 群対称性をもつ笹野系 (一般の  $2N$  階の場合) の  $q$ -類似を構成した [1].

これらとは別に,  $D_8^{(1)}$  型あるいは  $E_7^{(1)}$  型アフィン Weyl 群対称性をもつ 4階  $q$ -差分方程式系であって, 連続極限において 4階笹野系に帰着するものを構成したので, 本講演では, それらについて報告する.

本稿では, 紙幅の都合で  $E_7^{(1)}$  型の場合のみを記す. 変数  $a_i$  ( $i = 0, \dots, 7$ ) および  $f_i$  ( $i = 0, \dots, 5$ ) を用意し, 条件  $a_0a_1^2a_2^3a_3^4a_4^5a_5a_6a_7^2 = q$  および  $f_0f_2f_4 = f_1f_3f_5 = 1$  を課す. 変換  $s_i$  ( $i = 0, \dots, 7$ ) および  $\pi$  を

$$s_i(a_j) = a_j a_i^{-c_{ij}}, \quad C = (c_{ij})_{i,j=0}^7 : E_7^{(1)} \text{ の Cartan 行列,} \\ \pi(a_{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}}) = a_{\{6,5,4,3,2,1,0,7\}}^{-1}$$

および

$$s_1 : f_0 \mapsto a_1^3 f_0 \frac{f_1 + v_1^{-1}}{f_1 + u_1}, \quad f_2 \mapsto a_1^{-3} f_2 \frac{f_1 + u_1}{f_1 + v_1^{-1}}, \\ s_2 : f_1 \mapsto a_2^4 f_1 \frac{f_2 + a_2^{-3}}{f_2 + a_2^3}, \quad f_3 \mapsto a_2^{-4} f_3 \frac{f_2 + a_2^3}{f_2 + a_2^{-3}}, \\ s_3 : f_2 \mapsto a_3^3 f_2 \frac{f_3 + v_3^{-1}}{f_3 + u_3}, \quad f_4 \mapsto a_3^{-3} f_4 \frac{f_3 + u_3}{f_3 + v_3^{-1}}, \\ s_4 : f_3 \mapsto a_4^2 f_3 \frac{f_4 + a_4^{-3}}{f_4 + a_4^3}, \quad f_5 \mapsto a_4^{-2} f_5 \frac{f_4 + a_4^3}{f_4 + a_4^{-3}},$$

キーワード : 高階  $q$ -Painlevé 系, アフィン Weyl 群

\* e-mail: masuda@gem.aoyama.ac.jp

$$s_5 : f_4 \mapsto a_5^3 f_4 \frac{f_5 + v_5^{-1}}{f_5 + u_5}, \quad f_0 \mapsto a_5^{-3} f_0 \frac{f_5 + u_5}{f_5 + v_5^{-1}},$$

$$\pi : f_0 \mapsto f_0^{-1}, \quad f_1 \mapsto f_5^{-1}, \quad f_2 \mapsto f_4^{-1}, \quad f_3 \mapsto f_3^{-1}, \quad f_4 \mapsto f_2^{-1}, \quad f_5 \mapsto f_1^{-1}$$

で定める。ここで、

$$u_1 = a_0^2 a_4^4, \quad v_1 = a_0^{-2} a_1^2, \quad u_3 = a_3^2 a_7^{-2}, \quad v_3 = a_3^4 a_7^2, \quad u_5 = a_6^2 a_5^4, \quad v_5 = a_6^{-2} a_5^2$$

と書いた。このとき、これらの変換は、 $E_7^{(1)}$  型拡大アフィン群をなす。

平行移動演算子  $T \in W(E_7^{(1)})$  として、変数  $a_i$  への作用が

$$T : (a_0, a_6, a_7) \mapsto (qa_0, qa_6, a_7/q)$$

であるものを選ぼう。平行移動  $T$  の変数  $f_i$  への作用を考えると、

$$T(f_i) = R_i(f; a) \quad (i = 0, \dots, 5)$$

なる有理関数  $R_i(a; f)$  が定まる。これは、 $u = a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$  を独立変数とする、1 階 4 連立の  $q$ -差分方程式系とみなせる。

**主結果** 上の  $q$ -差分方程式系は Bäcklund 変換を持ち、それらの全体は拡大アフィン Weyl 群  $\widetilde{W}(D_6^{(1)})$  と同型である。また、この  $q$ -差分方程式系は連続極限により  $D_6^{(1)}$  型笹野系に帰着し、 $\widetilde{W}(D_6^{(1)})$  の作用は笹野系の Bäcklund 変換を再現する。

連続極限については、パラメータおよび変数を

$$\begin{aligned} a_0 &= u^{1/2} e^{-\varepsilon(-\beta_0/2 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3/2 + \beta_6/2)/6}, \\ a_i &= e^{-\varepsilon\beta_i/6} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ a_6 &= u^{1/2} e^{-\varepsilon(\beta_0/2 - \beta_3/2 - \beta_4 - \beta_5 - \beta_6/2)/6}, \\ a_7 &= u^{-1/2} e^{-\varepsilon(\beta_0/2 - \beta_3/2 + \beta_6/2)/6}, \\ f_1 &= g_1, \quad f_2 = -e^{-\varepsilon h_2}, \quad f_4 = -e^{-\varepsilon h_4}, \quad f_5 = g_5 \end{aligned}$$

とおき、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとればよい。ここで、 $g_1, h_2, h_4, g_5$  は、正準変数  $q_i, p_i$  ( $i = 1, 2$ ) および独立変数の適当な有理式である。

## 参考文献

- [1] T. Masuda, A  $q$ -analogue of the higher order Painlevé type equations with the affine Weyl group symmetry of type  $D$ , Funkcial. Ekvac. **58** (2015) 405-430.
- [2] Y. Sasano and Y. Yamada, Symmetry and holomorphy of Painlevé type systems, Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies, 215-225, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B2**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007.
- [3] T. Tsuda and T. Takenawa, Tropical representation of Weyl groups associated with certain rational varieties, Adv. Math. **221** (2009) 936-954.

# $W(A_{2n+1}^{(1)})$ -対称性を持つ一般化 $q$ -パウルヴェ VI 方程式に付随する双線型関係式

鈴木 貴雄 (近畿大学理工学部)\*

## 概 要

$q$ -パウルヴェ VI 方程式 ([1]) の  $q$ -超幾何関数  ${}_{n+1}\phi_n$  の観点からの一般化として, 論文 [2, 3] において導入された  $2n$  階  $q$ -差分方程式系  $q$ - $P_{(n+1, n+1)}$  は,  $A_{2n+1}^{(1)}$  型拡大アフィン・ワイル群による対称性を持つ. 本稿では, この  $q$ - $P_{(n+1, n+1)}$  に付随する  $\tau$ -関数の族を, ルート格子  $Q(A_{2n+1})$  上で定式化し, それらの満たす広田・三輪型の双線型関係式を導く.

## 1. 一般化 $q$ -パウルヴェ VI 方程式 $q$ - $P_{(n+1, n+1)}$

$q$ - $P_{(n+1, n+1)}$  は論文 [2] において, 次の  $q$ -差分方程式系として導入された<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} x_{i-1} - x_i = \frac{b_{i-1}x_{i-1}}{1 + x_{i-1}y_{i-1}} - \frac{a_i x_i}{1 + x_i y_{i-1}} \\ \underline{y}_{i-1} - \underline{y}_i = \frac{a_i y_{i-1}}{1 + x_i y_{i-1}} - \frac{b_i y_i}{1 + x_i y_i} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n+1),$$

ただし

$$b_0 = qb_{n+1}, \quad x_0 = tx_{n+1}, \quad y_0 = \frac{q}{t}y_{n+1},$$

とし, 従属変数は制約条件

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i \frac{1 + x_i y_i}{1 + x_i y_{i-1}} = q^{-\frac{n}{2}},$$

を満たすとする.

$q$ - $P_{(n+1, n+1)}$  は  $A_{2n+1}^{(1)}$  型拡大アフィン・ワイル群による対称性を持つ.

**事実 1.1** ([2, 3]). 双有理変換  $\sigma_0, \dots, \sigma_{2n+1}, \pi$  の対称形式への作用を, 次のように定める:

$$\begin{aligned} \sigma_{2j-2}(a_j) &= b_{j-1}, & \sigma_{2j-2}(b_{j-1}) &= a_j, & \sigma_{2j-2}(x_{j-1}) &= x_{j-1}, & \sigma_{2j-2}(y_{j-1}) &= y_{j-1} - \frac{b_{j-1} - a_j}{x_{j-1} - x_j}, \\ \sigma_{2j-2}(a_i) &= a_i, & \sigma_{2j-2}(b_{i-1}) &= b_{i-1}, & \sigma_{2j-2}(x_{i-1}) &= x_{i-1}, & \sigma_{2j-2}(y_{i-1}) &= y_{i-1} \quad (i \neq j), \end{aligned}$$

ただし  $j = 1, \dots, n+1$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{2j-1}(a_j) &= b_j, & \sigma_{2j-1}(b_j) &= a_j, & \sigma_{2j-1}(x_j) &= x_j - \frac{a_j - b_j}{y_{j-1} - y_j}, & \sigma_{2j-1}(y_j) &= y_j, \\ \sigma_{2j-1}(a_i) &= a_i, & \sigma_{2j-1}(b_i) &= b_i, & \sigma_{2j-1}(x_i) &= x_i, & \sigma_{2j-1}(y_i) &= y_i \quad (i \neq j), \end{aligned}$$

ただし  $j = 1, \dots, n+1$ , 及び

$$\begin{aligned} \pi(a_i) &= \frac{b_i}{q^{\rho_1}}, & \pi(b_i) &= \frac{a_{i+1}}{q^{\rho_1}}, & \pi(x_i) &= \frac{t^{\rho_1} y_i}{q^{2\rho_1}}, & \pi(y_i) &= \frac{q^{\rho_1} x_{i+1}}{t^{\rho_1}} \quad (i = 1, \dots, n), \\ \pi(a_{n+1}) &= \frac{b_{n+1}}{q^{\rho_1}}, & \pi(b_{n+1}) &= \frac{a_1}{q^{\rho_1+1}}, & \pi(x_{n+1}) &= \frac{t^{\rho_1} y_{n+1}}{q^{2\rho_1}}, & \pi(y_{n+1}) &= \frac{q^{\rho_1+1} x_1}{t^{\rho_1+1}}, & \pi(t) &= \frac{q^2}{t}, \end{aligned}$$

本研究は科研費(課題番号:15K04911)の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 34M55, 39A13

\* 〒577-8502 東大阪市小若江3-4-1 近畿大学理工学部

e-mail: suzuki@math.kindai.ac.jp

<sup>1</sup> この方程式系は制約条件を1つ含むので, 見かけ上は  $2n+1$  階であるが, 実は可約で  $2n$  階の方程式系に帰着する. その具体形については [3] を参照のこと.

ただし

$$q^{(n+1)\rho_1} = q^n a_1 b_1 \dots a_{n+1} b_{n+1},$$

とする<sup>2</sup>.

このとき、 $q$ - $P_{(n+1, n+1)}$  は双有理変換  $\sigma_0, \dots, \sigma_{2n+1}, \pi$  の作用の下で不変である。また、双有理変換のなす群  $\langle \sigma_0, \dots, \sigma_{2n+1}, \pi \rangle$  は  $A_{2n+1}^{(1)}$  型拡大アフィン・ワイル群と同型である。

## 2. $\tau$ -関数と双線型関係式

従属変数についての次の記号を導入する:

$$u_{2i} = 1 + \underline{x_i y_i}, \quad u_{2i+1} = \frac{a_{i+1}}{1 + \underline{x_{i+1} y_i}}, \quad \varphi_{2i} = x_i - x_{i+1}, \quad \varphi_{2i+1} = y_i - y_{i+1} \quad (i = 0, \dots, n).$$

また、方程式の表記の簡略化のため、必要に応じて次の記号を用いる:

$$u_{2i+2n+2} = u_{2i}, \quad u_{2i+1+2n+2} = \frac{1}{q} u_{2i+1}, \quad \varphi_{2i+2n+2} = \frac{1}{t} \varphi_{2i}, \quad \varphi_{2i+1+2n+2} = \frac{t}{q} \varphi_{2i+1},$$

$$a_{i+n+1} = \frac{1}{q} a_i, \quad b_{i+n+1} = \frac{1}{q} b_i, \quad \tau_{2i+2n+2} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}} \tau_{2i}, \quad \tau_{2i+1+2n+2} = \frac{1}{q^{\frac{i+1}{2}}} \tau_{2i+1}, \quad \sigma_{i+2n+2} = \sigma_i.$$

定義 2.1.  $q$ - $P_{(n+1, n+1)}$  に付随する  $\tau$ -関数を次のように定める:

$$\frac{\tau_{2i-1} \tau_{2i}}{\tau_{2i-1} \tau_{2i}} = \frac{q^{\frac{1}{4}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})}}{b_i^{\frac{1}{2}}} u_{2i}, \quad \frac{\tau_{2i} \tau_{2i+1}}{\tau_{2i} \tau_{2i+1}} = \frac{q^{\frac{1}{4}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})}}{a_{i+1}^{\frac{1}{2}}} u_{2i+1} \quad (i = 0, \dots, n).$$

さらに、 $\tau$ -関数に対する双有理変換  $\sigma_0, \dots, \sigma_{2n+1}, \pi$  の作用を次のように定める<sup>3</sup>:

$$\sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1}) = \frac{\varphi_{2i-1}}{(a_i - b_i)^{\frac{1}{2}}} \frac{\tau_{2i-2} \tau_{2i}}{\tau_{2i-1}}, \quad \sigma_{2i-1}(\tau_j) = \tau_j \quad (i = 0, \dots, n, j \neq 2i-1),$$

$$\sigma_{2i}(\tau_{2i}) = \frac{\varphi_{2i}}{(b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}} \frac{\tau_{2i-1} \tau_{2i+1}}{\tau_{2i}}, \quad \sigma_{2i}(\tau_j) = \tau_j \quad (i = 0, \dots, n, j \neq 2i),$$

$$\pi(\tau_{2i-1}) = \underline{t}^{\frac{1}{4}(-\rho_1 - 1 + \frac{2i}{n+1})} \tau_{2i}, \quad \pi(\tau_{2i}) = q^{-\frac{1}{4}\rho_1} \underline{t}^{\frac{1}{4}(\rho_1 - 1 + \frac{2i+1}{n+1})} \tau_{2i+1} \quad (i = 0, \dots, n).$$

本講演の目的は、次の定理を証明することである。

定理 2.2. 定義 2.1 で与えられた  $\tau$ -関数は、双線型関係式

$$(a_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}} \sigma_{2i, 2i-1}(\tau_{2i-1}) \tau_{2i} = (a_i - b_i)^{\frac{1}{2}} \sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1}) \sigma_{2i}(\tau_{2i}) + (b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}} \tau_{2i-2} \tau_{2i+1},$$

$$(a_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}} \tau_{2i-1} \sigma_{2i-1, 2i}(\tau_{2i}) = (b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}} \sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1}) \sigma_{2i}(\tau_{2i}) - (a_i - b_i)^{\frac{1}{2}} \tau_{2i-2} \tau_{2i+1},$$

および

$$b_i^{\frac{1}{2}} (a_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}} \sigma_{2i, 2i-1}(\tau_{2i-1}) \tau_{2i}$$

$$= a_{i+1}^{\frac{1}{2}} (a_i - b_i)^{\frac{1}{2}} \sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1}) \sigma_{2i}(\tau_{2i}) + q^{\frac{1}{2}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})} a_i^{\frac{1}{2}} (b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}} \tau_{2i-2} \tau_{2i+1},$$

$$b_i^{\frac{1}{2}} (a_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}} \tau_{2i-1} \sigma_{2i-1, 2i}(\tau_{2i})$$

$$= a_i^{\frac{1}{2}} (b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}} \sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1}) \sigma_{2i}(\tau_{2i}) - q^{\frac{1}{2}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})} a_{i+1}^{\frac{1}{2}} (a_i - b_i)^{\frac{1}{2}} \tau_{2i-2} \tau_{2i+1},$$

を満たす。

## 参考文献

- [1] M. Jimbo and H. Sakai, A  $q$ -analog of the sixth Painlevé equation, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996) 145-154.
- [2] T. Suzuki, A  $q$ -analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type  $A$  and  $q$ -Painlevé system, *AMS Contemp. Math.* **651** (2015) 25-38.
- [3] T. Suzuki, A reformulation of the generalized  $q$ -Painlevé VI system with  $W(A_{2n+1}^{(1)})$  symmetry, *J. Integrable Syst.* **2** (2017) xyw017.

<sup>2</sup> 論文 [2] における  $\pi$  の作用には誤りがあるので、双有理変換の定義については全て論文 [3] を参照して欲しい。

<sup>3</sup> この作用は  $q$ - $P_{(n+1, n+1)}$  への作用と両立し、かつ  $A_{2n+1}^{(1)}$  型拡大アフィン・ワイル群の基本関係式を満たすように定めてある。ただし、基本関係式のうち  $\sigma_i^2 = 1$  だけは  $\sigma_i^2(\tau_i) = \frac{\tau_i}{\sqrt{-1}}$  に変わる。また、ここでは  $\sigma_{2i}((b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{-1}(b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}$  及び  $\sigma_{2i+1}((a_{i+1} - b_{i+1})^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{-1}(a_{i+1} - b_{i+1})^{\frac{1}{2}}$  としている。なお、回転対称性  $\pi$  に関する基本関係式を満たす必要が無い場合は、分母のパラメーターの項は外しても構わない。

# $q$ -パウルヴェ方程式の退化とクラスター代数

大久保 直人 (東京大学)\*1

鈴木 貴雄 (近畿大学)\*2

## 1. はじめに

$q$ -パウルヴェ方程式は以下のような退化構造をもつことが知られている [1].

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 q-P(A_0^*) & \rightarrow & q-P(A_1) & \rightarrow & q-P(A_2) & \rightarrow & q-P(A_3) & \rightarrow & q-P(A_4) & \rightarrow & q-P(A_5) & \rightarrow & q-P(A_6) & \rightarrow & q-P(A_7) \\
 & & & & & & & & & & & & & \nearrow & & \\
 & & & & & & & & & & & & & q-P(A_5)^\# & \rightarrow & q-P(A_6)^\# & \rightarrow & q-P(A_7')
 \end{array}$$

本稿では  $q-P(A_3)$  以下の 8 つの方程式を seed mutation により導出する手法を紹介し、方程式の退化と quiver の頂点の合流との関係について解説する.

## 2. seed mutation

Fomin, Zelevinsky により導入されたクラスター代数 [2] の定義に用いられる seed mutation を定義する.  $N$  次反対称整数行列  $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{i,j=1}^N$  と変数の組  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$  の組  $(\Lambda, \mathbf{y})$  を seed という. 各  $y_i$  を係数という.

**定義 2.1** [2] seed  $(\Lambda, \mathbf{y})$  の  $k \in \{1, \dots, N\}$  における mutation  $\mu_k : (\Lambda, \mathbf{y}) \mapsto (\Lambda', \mathbf{y}')$ ,  $\Lambda' = (\lambda'_{i,j})_{i,j=1}^N$ ,  $\mathbf{y}' = (y'_1, \dots, y'_N)$  を以下で定義する:

$$\lambda'_{i,j} = \begin{cases} -\lambda_{i,j} & (i = k \vee j = k) \\ \lambda_{i,j} + \lambda_{i,k}\lambda_{k,j} & (\lambda_{i,k} > 0 \wedge \lambda_{k,j} > 0) \\ \lambda_{i,j} - \lambda_{i,k}\lambda_{k,j} & (\lambda_{i,k} < 0 \wedge \lambda_{k,j} < 0) \\ \lambda_{i,j} & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad y'_i = \begin{cases} y_k^{-1} & (i = k) \\ y_i(y_k^{-1} + 1)^{-\lambda_{k,i}} & (\lambda_{k,i} \geq 0) \\ y_i(y_k + 1)^{-\lambda_{k,i}} & (\lambda_{k,i} < 0) \end{cases}.$$

$N$  次反対称整数行列  $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{i,j=1}^N$  は各頂点に  $1, \dots, N$  の番号をつけたループと 2-サイクルをもたない quiver  $Q$  と次の規則により 1 対 1 に対応する:  $\lambda_{i,j} = a > 0 \Leftrightarrow$  頂点  $i$  から  $j$  に向かう矢印は  $a$  本. 以下では行列  $\Lambda$  の代わりに対応する quiver  $Q$  を用いる.

## 3. seed mutation による $q$ -パウルヴェ方程式の導出

本稿では  $q-P(A_7)$  を導出する手法を紹介するが, 他の方程式も同様の手法で得られる.  $Q$  を図 1 の quiver とし, 置換  $\nu$  を  $\nu = (1234)$ , mutation (の合成)  $T_0$  を  $T_0 = \mu_2$  とする. さらに,  $T_i = \mu_{\nu^{-i}(2)}$  とし, seed  $(Q, \mathbf{y}_0)$  に対して以下のように mutation を行い, 係数  $y_{n,i}$  を求める:

$$\mathbf{y}_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,4}) \xrightarrow{T_0} \mathbf{y}_1 = (y_{1,\nu(1)}, \dots, y_{1,\nu(4)}) \xrightarrow{T_1} \mathbf{y}_2 = (y_{2,\nu^2(1)}, \dots, y_{2,\nu^2(4)}) \xrightarrow{T_2} \dots$$

**命題 3.1** 係数  $y_{n,i}$  は以下を満たす:

$$y_{n+1,1} = y_{n,4}(y_{n,2} + 1)^2, \quad y_{n+1,2} = y_{n,1}(y_{n,2}^{-1} + 1)^{-1}, \quad y_{n+1,3} = y_{n,2}^{-1}, \quad y_{n+1,4} = y_{n,3}(y_{n,2}^{-1} + 1)^{-1}.$$

\*1 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学 大学院数理科学研究科

e-mail: okubo@ms.u-tokyo.ac.jp

\*2 〒577-8502 大阪府東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学 理工学部

e-mail: suzuki@math.kindai.ac.jp



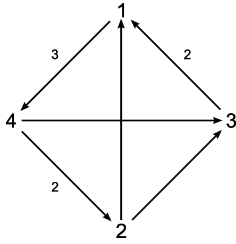


図 1:  $q-P(A_7)$

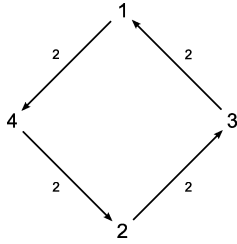


図 2:  $q-P(A_7')$

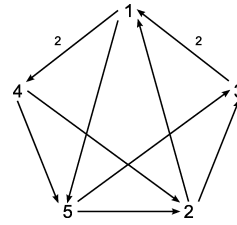


図 3:  $q-P(A_6), q-P(A_6)^\#$

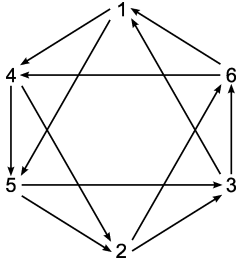


図 4:  $q-P(A_5), q-P(A_5)^\#$

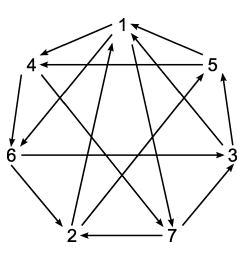


図 5:  $q-P(A_4)$

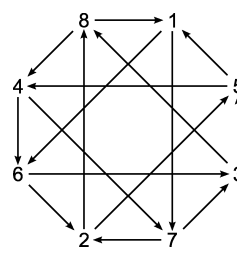


図 6:  $q-P(A_3)$

この差分方程式系には保存量が2つ存在し、それを  $c_1, c_2$  とすると以下が成り立つ。

**定理 3.2** 係数  $y_{n,2}$  は以下を満たす:

$$y_{n+2,2}y_{n,2} = \frac{c_1^n c_2}{y_{n+1,2}(y_{n+1,2} + 1)}.$$

この差分方程式が  $q-P(A_7)$  である。他の  $q$ -パウルヴェ方程式についても、以下の表のように  $Q, \nu, T_0$  をとることにより同様の手法で導出できる。

|       | $q-P(A_7')$  | $q-P(A_6)$ | $q-P(A_6)^\#$     | $q-P(A_5)$             | $q-P(A_5)^\#$ | $q-P(A_4)$        | $q-P(A_3)$             |
|-------|--------------|------------|-------------------|------------------------|---------------|-------------------|------------------------|
| $Q$   | 図 2          | 図 3        | 図 3               | 図 4                    | 図 4           | 図 5               | 図 6                    |
| $\nu$ | (13)(24)     | (14253)    | (13)(254)         | (12)(3654)             | (154)(263)    | (145)(26)(37)     | (1845)(2736)           |
| $T_0$ | $\mu_1\mu_2$ | $\mu_2$    | $\mu_1\mu_5\mu_2$ | $\mu_1\mu_5\mu_3\mu_1$ | $\mu_1\mu_2$  | $\mu_2\mu_3\mu_4$ | $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$ |

#### 4. quiver の頂点の合流

quiver  $Q$  の頂点の合流  $i \rightarrow j$  を、 $Q$  の  $i, j$  間の矢印を消去し、頂点  $i, j$  を重ねて新たに1つの頂点  $j$  とする操作と定義する。図 6 に対して頂点の合流  $8 \rightarrow 1, 7 \rightarrow 2$  (ここで頂点 5 と 6 を入れ替え)、 $6 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 4$  を順に行うことにより、図 5, 4, 3, 1 が順に得られる。また、図 3 に対して頂点の合流  $5 \rightarrow 2$  を行うことにより図 2 が得られる。

#### 参考文献

- [1] H. Sakai, "Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations", Comm. Math. Phys. **220** (2001) 165-229.
- [2] S. Fomin, A. Zelevinsky, "Cluster algebras IV: Coefficients", Compositio Mathematica **143** (2007) 112-164.

# $E_7^{(1)}$ 型 $q$ 差分パンルヴェ方程式の種々の特異点配置

長尾 秀人 (明石工業高等専門学校・一般科目)

山田 泰彦 (神戸大学大学院・理学研究科)

パンルヴェ系の幾何的な構成 [4] において, 変形方向や特異点配置は様々な選択が可能である. ただし, 簡潔な発展方程式を得るためには, 方向と座標 (点配置) を相性よく選ぶ必要がある. 本講演では,  $q$ - $E_7^{(1)}$  型の場合について, 簡潔な発展方程式の例をいくつか与え, 相互の関係や特殊解について論ずる.

$\kappa_1, \kappa_2, v_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ )  $\in \mathbb{C}^\times$  をパラメータ ( $\kappa_1^2 \kappa_2^2 = q \prod_{i=1}^8 v_i$ ),  $(f, g) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  を従属変数とする.  $q$ -シフト作用素  $T : \kappa_1 \rightarrow \kappa_1/q, \kappa_2 \rightarrow q\kappa_2$  に対して  $\bar{X} = T(X), \underline{X} = T^{-1}(X)$  と表す. また  $F(z) = z + \frac{\kappa_1}{z}, G(z) = z + \frac{\kappa_2}{z}$  とする.  $(f, g) = (F(z), G(z))$  は  $(\infty, \infty)$  に node を持つ  $(2, 2)$  次曲線のパラメータ表示を与える.

$q$ - $E_8$  型方程式の次の表示 [2] から出発する.

$$\begin{aligned} \frac{\{f - F(z_1)\}\{\bar{f} - \bar{F}(z_1)\}}{\{f - F(z_2)\}\{\bar{f} - \bar{F}(z_2)\}} &= \frac{z_2^4}{z_1^4} \prod_{i=1}^8 \frac{z_1 - v_i}{z_2 - v_i}, \quad \text{for } g = G(z_i), \\ \frac{\{g - G(z_1)\}\{\underline{g} - \underline{G}(z_1)\}}{\{g - G(z_2)\}\{\underline{g} - \underline{G}(z_2)\}} &= \frac{z_2^4}{z_1^4} \prod_{i=1}^8 \frac{z_1 - v_i}{z_2 - v_i}, \quad \text{for } f = F(z_i). \end{aligned} \quad (1)$$

この方程式の特殊解は  $q$ -超幾何関数  ${}_{10}W_9$  で表される. 方程式の特異点は  $(f, g) = (F(v_i), G(v_i))_{i=1, \dots, 8}$  の 8 点である. 対応するルート系の基底は次のようにとれる.

$$\begin{aligned} E_8^{(1)} : \quad &\alpha_0 = e_1 - e_2, \alpha_1 = h_1 - h_2, \alpha_3 = e_2 - e_3, \alpha_4 = e_3 - e_4, \\ &\alpha_5 = e_4 - e_5, \alpha_6 = e_5 - e_6, \alpha_7 = e_6 - e_7, \alpha_8 = e_7 - e_8. \\ A_0^{(1)} : \quad &\delta_0 = 2h_1 + 2h_2 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 - e_8. \end{aligned} \quad (2)$$

**例 1.**  $v_1 \rightarrow \epsilon v_1, v_2 \rightarrow \epsilon^{-1} v_2$  とおいて  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限をとると, 発展方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\{f - F(z_1)\}\{\bar{f} - \bar{F}(z_1)\}}{\{f - F(z_2)\}\{\bar{f} - \bar{F}(z_2)\}} &= \frac{z_2^3}{z_1^3} \prod_{i=3}^8 \frac{z_1 - v_i}{z_2 - v_i}, \quad \text{for } g = G(z_i), \\ \frac{\{g - G(z_1)\}\{\underline{g} - \underline{G}(z_1)\}}{\{g - G(z_2)\}\{\underline{g} - \underline{G}(z_2)\}} &= \frac{z_2^3}{z_1^3} \prod_{i=3}^8 \frac{z_1 - v_i}{z_2 - v_i}, \quad \text{for } f = F(z_i), \end{aligned} \quad (3)$$

となる. 特殊解は  $q$ -超幾何関数  ${}_8W_7$  または  ${}_{4\varphi_3}$  で表される (これらは変換公式によって書き換えられる [1]). 方程式の特異点は  $(2, 2)$  次曲線上の 6 点  $(f, g) = (F(v_i), G(v_i))_{i=3, \dots, 8}$ , 及びその node  $(\infty, \infty)$  に合流した 2 重点  $(\frac{g}{f} = 1, \frac{\kappa_2}{\kappa_1})$  である. 対応するルート系の基底は次のようにとれる.

$$\begin{aligned} E_7^{(1)} : \quad &\alpha_0 = e_3 - e_4, \alpha_1 = h_1 - e_1 - e_2, \alpha_2 = h_2 - h_1, \alpha_3 = h_1 - e_3 - e_4, \\ &\alpha_4 = e_4 - e_5, \alpha_5 = e_5 - e_6, \alpha_6 = e_6 - e_7, \alpha_7 = e_7 - e_8. \\ A_1^{(1)} : \quad &\delta_0 = 2h_1 + 2h_2 - 2e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 - e_8, \delta_1 = e_2 - e_1. \end{aligned} \quad (4)$$

**例 2.**  $\kappa_1 \rightarrow \epsilon\kappa_1, v_i \rightarrow \epsilon v_i (i = 1, 2)$  において  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限をとると、発展方程式は

$$\begin{aligned} \frac{(f - z_1)(\bar{f} - z_1)}{(f - z_2)(\bar{f} - z_2)} &= \frac{z_2^2}{z_1^2} \prod_{i=3}^8 \frac{z_1 - v_i}{z_2 - v_i}, \quad \text{for } g = G(z_i), \\ \{g - G(f)\} \{g - \underline{G}(f)\} &= \frac{\prod_{i=3}^8 (f - v_i)}{f^2 \prod_{i=1}^2 (f - \frac{\kappa_1}{v_i})}, \end{aligned} \quad (5)$$

となる ([3]). これは  $q$ -超幾何関数  ${}_4\phi_3$  で表される特殊解を持つ. 方程式の特異点は  $(0, 1)$  次直線  $g = \infty$  上の 2 点  $(f, g) = (\frac{\kappa_1}{v_i}, \infty)_{i=1,2}$ , 及び  $(2, 1)$  次曲線  $g = G(f)$  上の 6 点  $(f, g) = (v_i, G(v_i))_{i=3, \dots, 8}$  からなる. 対応するルート系の基底は次のようにとれる.

$$\begin{aligned} E_7^{(1)} : \quad &\alpha_0 = h_2 - e_3 - e_4, \alpha_1 = e_2 - e_1, \alpha_2 = h_1 - e_2 - e_3, \alpha_3 = e_3 - e_4, \\ &\alpha_4 = e_4 - e_5, \alpha_5 = e_5 - e_6, \alpha_6 = e_6 - e_7, \alpha_7 = e_7 - e_8, \\ A_1^{(1)} : \quad &\delta_0 = 2h_1 + h_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 - e_8, \delta_1 = h_2 - e_1 - e_2. \end{aligned} \quad (6)$$

**例 3.**  $\kappa_1 \rightarrow \epsilon\kappa_1, \kappa_2 \rightarrow \epsilon\kappa_2, v_i \rightarrow \epsilon v_i (i = 1, \dots, 4)$  において  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限をとると、発展方程式は

$$\begin{aligned} \frac{(g - f)(g - \bar{f})}{(g - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} f)(g - \frac{q\kappa_2}{\kappa_1} \bar{f})} &= \frac{\prod_{i=5}^8 (g - v_i)}{\prod_{i=1}^4 (g - \frac{\kappa_2}{v_i})}, \\ \frac{(f - g)(f - \underline{g})}{(f - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} g)(f - \frac{q\kappa_1}{\kappa_2} \underline{g})} &= \frac{\prod_{i=5}^8 (f - v_i)}{\prod_{i=1}^4 (f - \frac{\kappa_2}{v_i})}, \end{aligned} \quad (7)$$

となる. これは標準的な方向の  $q$ - $E_7$  型方程式である ([2], ただし  $g$  座標は逆数). 特異点は  $(1, 1)$  次曲線  $\kappa_2 f = \kappa_1 g$  上の 4 点  $(f, g) = (\frac{\kappa_1}{v_i}, \frac{\kappa_2}{v_i})_{i=1, \dots, 4}$ , 及び  $(1, 1)$  次曲線  $f = g$  上の 4 点  $(v_i, v_i)_{i=5, \dots, 8}$  である. 対応するルート系の基底は次のようにとれる.

$$\begin{aligned} E_7^{(1)} : \quad &\alpha_0 = h_1 - h_2, \alpha_1 = e_2 - e_1, \alpha_2 = e_3 - e_2, \alpha_3 = e_4 - e_3, \\ &\alpha_4 = h_2 - e_4 - e_5, \alpha_5 = e_5 - e_6, \alpha_6 = e_6 - e_7, \alpha_7 = e_7 - e_8, \\ A_1^{(1)} : \quad &\delta_0 = h_1 + h_2 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4, \delta_1 = h_1 + h_2 - e_5 - e_6 - e_7 - e_8. \end{aligned} \quad (8)$$

## 参考文献

- [1] Gasper G., and Rahman M., *Basic Hypergeometric Series. With a foreword by Richard Askey. Second edition. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 96.* Cambridge University Press Cambridge (2004).
- [2] Kajiwara K., Noumi M., and Yamada Y., *Geometric aspects of Painlevé equations*, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017), 073001(164pp) (Topical Review).
- [3] Nagao H., and Yamada Y., *Study of  $q$ -Garnier system by Padé method*, arXiv:1601.01099 [nlin.SI].
- [4] Sakai H., *Rational surfaces with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Commun. Math. Phys. **220** (2001) 165–221.

# 2次元可積分写像のファイバー依存非自励化と離散 Painlevé方程式

竹縄 知之 (東京海洋大学海洋工学部)\*

本講演は A. S. Carstea および A. Dzhamay との共同研究 [CDT 2017] に基づく。

## 1. 非自励化の定義

$\mathcal{X}$  を極小曲面—例えば  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ —をブローアップして得られる有理曲面とする。  $\mathcal{X}$  の自己同型  $\varphi$  が反標準因子の素分解  $D = \sum m_i D_i \in -\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$  を保つとき、その自己同型は反標準因子的であるということにし、以下そう仮定する。

$\mathcal{X}$  を構成する際にブローアップする点の位置を自由に取り直した有理曲面を  $\mathcal{X}_a$  と書く (添え字の  $a$  はブローアップする点の位置の情報を表す)。ただし、 $\mathcal{X}_a$  の反標準因子  $D_a$  は、自然な Picard 群の同一視の下で、 $D$  と同じ素分解をもち、また、 $D_a$  と  $D$  は極小曲面の自己同型 (の適切な持ち上げ) により同型とする。このような  $\mathcal{X}_a$  の集合を  $\mathcal{X}_A = \{\mathcal{X}_a\}_{a \in A}$  と書く。

$\varphi : \mathcal{X}_A \rightarrow \mathcal{X}_A$  が以下の条件を満たすとき、元の  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  の非自励化であるという。

- (i)  $\varphi$  はパラメーター集合  $A$  上の全単射を与え、 $\mathcal{X}_a$  への制限、つまり  $\varphi_a := \varphi|_{\mathcal{X}_a} : \mathcal{X}_a \rightarrow \mathcal{X}_{\varphi(a)}$  は同型射である。
- (ii) Picard 群の引き戻し作用  $\varphi_a^* : \text{Pic}(\mathcal{X}_{\varphi(a)}) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{X}_a)$  は  $\varphi^* : \text{Pic}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{X})$  と同じである。

非自励化は反標準因子  $D \in -\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$  を選ぶごとに、極小曲面の同型を除いてただ一つに定まる。

## 2. 例

以下の退化した Quispel-Roberts-Thompson 写像の非自励化を考える。

$$\varphi : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{(x-a)(x-a^{-1})}{y(x+a)(x+a^{-1})}, x \right),$$

初期値空間  $\mathcal{X}$  は  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  を 8 回ブローアップすることにより得られる。  $\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y$  をそれぞれ直線  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$  の全変換のクラス、  $\mathcal{E}_i$  を例外曲線の全変換のクラスとする。  $\varphi$  の Picard 群への引き戻し作用は、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x &\rightarrow 2\mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_7 - \mathcal{E}_8, & \mathcal{H}_y &\rightarrow \mathcal{H}_x \\ \mathcal{E}_1 &\rightarrow \mathcal{H}_x - \mathcal{E}_3, & \mathcal{E}_2 &\rightarrow \mathcal{H}_x - \mathcal{E}_4, & \mathcal{E}_3 &\rightarrow \mathcal{E}_2, & \mathcal{E}_4 &\rightarrow \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_5 &\rightarrow \mathcal{H}_x - \mathcal{E}_7, & \mathcal{E}_6 &\rightarrow \mathcal{H}_x - \mathcal{E}_8, & \mathcal{E}_7 &\rightarrow \mathcal{E}_6, & \mathcal{E}_8 &\rightarrow \mathcal{E}_5. \end{aligned} \tag{1}$$

本研究は科研費 (課題番号:25400106) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 14E05, 37F10

キーワード: 力学系, 双有理変換, 初期値空間, 離散パルヴェ方程式

\* 〒135-8533 東京都江東区越中島 2-4-2

e-mail: takenawa@kaiyodai.ac.jp

web: <http://www2.kaiyodai.ac.jp/~takenawa/index.html>

となる。

$\varphi$  は,  $A_0^{(1)*}, A_1^{(1)}, A_3^{(1)}$  型の特異ファイバーをそれぞれ, 2, 3, 1 本もつ楕円ファイバー構造を保つ. ファイバーの選び方によらず, 非自励化は

$$\begin{cases} \bar{x} = C_1 \frac{(x-x_3)}{(x-x_7)} \cdot \frac{(x_4-x_7)(x-x_8)y - (x_8-x_7)(x-x_4)y_7}{(x_4-x_3)(x-x_8)y - (x_8-x_3)(x-x_4)y_3} \\ \bar{y} = C_2 x, \end{cases} \quad (2)$$

という式で表すことができる. ただし,  $C_1, C_2$  は Möbius 変換で正規化できる定数である. とくに,  $D$  として一般ファイバーを選んだ場合は, 複素トーラス  $T = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$  から  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  または  $\mathcal{X}_a$  への埋め込み  $\iota(x, y) = (F(u), G(u))$  を, 奇テータ関数  $\theta(u)$  を用いて

$$F(u) = \frac{\theta(u-e_1)\theta(u-h_x+e_1)}{\theta(u-e_5)\theta(u-h_x+e_5)}, \quad G(u) = \frac{\theta(u-e_4)\theta(u-h_y+e_4)}{\theta(u-e_8)\theta(u-h_y+e_8)}, \quad (3)$$

ととれる. ここで, パラメーター  $h_x, h_y, e_i$  はそれぞれ  $\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{E}_i$  の  $\iota$  による引き戻しである. また,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_a & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{X}_{\bar{a}}, & \text{Pic}(\mathcal{X}_a) & \xleftarrow{\varphi^*} & \text{Pic}(\mathcal{X}_{\bar{a}}) \\ \uparrow \iota & \nearrow \iota & & \downarrow \iota^* & \nwarrow \bar{\iota}^* & \\ T & & & \text{Pic}(T) & & \end{array}$$

という可換図式を用いることにより, パラメーターの発展を

$$\begin{aligned} \bar{h}_x &= \iota^* \circ \varphi^*(\bar{\mathcal{H}}_x) \\ &= \iota^*(2\mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_7 - \mathcal{E}_8) \\ &= 2h_x + h_y - e_3 - e_4 - e_7 - e_8 \end{aligned}$$

などと計算することができる. この計算は (1) と対応している.

### 3. 対称性

(2), (3) に対して, 写像  $\varphi^4$  は楕円差分 (係数が楕円関数の加法として発展する非自励差分) Painlevé 方程式であり, よく知られているように,  $\mathcal{X}_A$  は,  $(E_8)^{(1)}$  型アフィン Weyl 群の対称性を持つ [Sakai 2001]. 一方,  $\varphi^2$  が楕円差分 Painlevé 方程式になるように条件を課すと, そのような  $\mathcal{X}_a$  全体は,  $D_6^{(1)}$  型アフィン Weyl 群を Dynkin 図形の自己同型群で拡大した対称性を持つ.

### 参考文献

- [CDT 2017] Carstea, A. S., Dzhamay, A., Takenawa, T., Fiber-dependent deautonomization of integrable 2D mappings and discrete Painlevé equations, preprint: arXiv:1702.04907 (2017)
- [Sakai 2001] Sakai, H., Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **220** (2001), no. 1, 165–229

# Partition functions for reverse plane partitions derived from the two-dimensional Toda molecule

Shuhei KAMIOKA (Kyoto University)\*

## 1. Introduction

Let  $\lambda$  be an (integer) partition or the corresponding Young diagram. A *reverse plane partition* of shape  $\lambda$  is a filling of cells in  $\lambda$  with nonnegative integers such that all rows and columns are weakly increasing. One of the most prominent results in the study of reverse (or ordinary) plane partitions is the discovery of *nice* generating functions, namely those which can be nicely factored.

The first discovery is due to MacMahon [6] who proved the triple product formula

$$\sum_{\pi} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^c \prod_{k=1}^n \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} \quad (1)$$

for plane partitions  $\pi$  of  $r \times c$  rectangular shape with parts at most  $n$ . MacMahon's study on plane partitions was later revived by Stanley [7]. Among his vast amounts of contributions a nice generating function involving the trace statistic is of great importance [8]. Stanley's trace generating function was much refined by Gansner [1] who derived the multi-trace generating function

$$\sum_{\pi \in \text{RPP}(\lambda)} \prod_{\ell=1-r}^{c-1} x_{\ell}^{\text{tr}_{\ell}(\pi)} = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{1}{1 - \prod_{\ell=j-\lambda'_j}^{\lambda_i-i} x_{\ell}} \quad (2)$$

where  $\text{RPP}(\lambda)$  denotes the set of reverse plane partitions  $\pi = (\pi_{i,j})$  of shape  $\lambda$  with  $r$  rows and  $c$  columns,  $\text{tr}_{\ell}(\pi) = \sum_{-i+j=\ell} \pi_{i,j}$  the  $\ell$ -trace, and  $\lambda'$  the shape conjugate with  $\lambda$ . Note that the parts of plane partitions considered in (1) are bounded from above by  $n$  but the parts of reverse plane partitions in (2) are unbounded. So the multi-trace generating function (2) is not a generalization of MacMahon's formula (1), and vice versa.

The aim of this study is to answer the question: Why (reverse) plane partitions admit so nice generating functions? Of course the question has been answered from different viewpoints by many authors who give various proofs to the nice formulas, with the help of representation theory, by calculating determinants and Pfaffians, and so on. (See, e.g., [4].) We here have a new viewpoint by an integrable system, the *discrete two-dimensional (2D) Toda molecule* [3].

In this talk we clarify a close connection of reverse plane partitions with the discrete two-dimensional (2D) Toda molecule. Especially we show that a nice partition function for reverse plane partitions can be derived from each non-vanishing solution to the discrete 2D Toda molecule (Theorem 6 in Section 4) where reverse plane partitions considered are those of arbitrary shape with bounded parts. As a concrete example we derive a partition function which generalizes both MacMahon's triple product formula (1) and Gansner's multi-trace generating function (2) from a specific solution (Theorem 7 in Section 5).

---

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP16K0505.

\* e-mail: kamioka.shuhei.3w@kyoto-u.ac.jp

The key idea comes from a combinatorial interpretation of the discrete 2D Toda molecule in terms of non-intersecting lattice paths (Section 3). Note that Viennot [9] takes a similar approach to count non-intersecting Dyck paths by using the quotient-difference (qd) algorithm for Padé approximation, also known as the discrete (one-dimensional) Toda molecule.

## 2. Solutions to the discrete 2D Toda molecule

We see a brief review on the integrable dynamical system discussed throughout the paper. The discrete two-dimensional (2D) Toda molecule is one of the most typical integrable dynamical systems that was introduced as a discrete analogue of the Toda lattice [3]. The evolution of the discrete 2D Toda molecule is described by the difference equations

$$a_n^{(s,t+1)} + b_n^{(s+1,t)} = a_n^{(s,t)} + b_{n+1}^{(s,t)}, \quad (3a)$$

$$a_n^{(s,t+1)} b_{n+1}^{(s+1,t)} = a_{n+1}^{(s,t)} b_{n+1}^{(s,t)}, \quad (3b)$$

$$(s, t) \in \mathbb{Z}^2, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad b_0^{(s,t)} = 0. \quad (3c)$$

We introduce the tau function for (3) through the dependent variable transformation

$$a_n^{(s,t)} = \frac{\tau_{n+1}^{(s+1,t)} \tau_n^{(s,t)}}{\tau_n^{(s+1,t)} \tau_{n+1}^{(s,t)}}, \quad b_n^{(s,t)} = \frac{\tau_{n-1}^{(s,t+1)} \tau_{n+1}^{(s,t)}}{\tau_n^{(s,t+1)} \tau_n^{(s,t)}} \quad (4)$$

with  $\tau_0^{(s,t)} = 1$ . We then obtained from (3) the bilinear form of the discrete 2D Toda molecule

$$\tau_{n-1}^{(s+1,t+1)} \tau_{n+1}^{(s,t)} - \tau_n^{(s+1,t+1)} \tau_n^{(s,t)} + \tau_n^{(s+1,t)} \tau_n^{(s,t+1)} = 0, \quad (5a)$$

$$(s, t) \in \mathbb{Z}^2, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \quad \tau_0^{(s,t)} = 1. \quad (5b)$$

The bilinear form (5) is solved by the determinant

$$\tau_n^{(s,t)} = \det_{0 \leq i, j < n} (f_{s+i, t+j}) = \begin{vmatrix} f_{s,t} & \cdots & f_{s,t+j} & \cdots & f_{s,t+n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{s+i,t} & \cdots & f_{s+i,t+j} & \cdots & f_{s+i,t+n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{s+n-1,t} & \cdots & f_{s+n-1,t+j} & \cdots & f_{s+n-1,t+n-1} \end{vmatrix} \quad (6)$$

where  $f = f_{i,j}$  is an arbitrary function defined over  $\mathbb{Z}^2$ . The discrete 2D Toda molecule (3) is therefore solved by  $a_n^{(s,t)}$ ,  $b_n^{(s,t)}$  given by (4) with (6) provided that the determinant never vanishes. Conversely there exists a function  $f$  on  $\mathbb{Z}^2$  which satisfies (4) with (6) for any solution  $a_n^{(s,t)} \neq 0$ ,  $b_n^{(s,t)} \neq 0$  to (3). It is not difficult to see the following correspondence between  $a_n^{(s,t)}$ ,  $b_n^{(s,t)}$  and  $f$ .

**Proposition 1.** *For each solution  $a_n^{(s,t)} \neq 0$ ,  $b_n^{(s,t)} \neq 0$  to the discrete 2D Toda molecule (3) there exists a function  $f = f_{i,j}$  on  $\mathbb{Z}^2$  which gives the same solution through (4) with (6). Moreover such an  $f$  is uniquely determined up to the transformation  $f_{i,j} \rightarrow \varphi_j f_{i,j}$  by any non-vanishing function  $\varphi = \varphi_j$  on  $\mathbb{Z}$ .*

Giving a non-vanishing solution  $a_n^{(s,t)}$ ,  $b_n^{(s,t)}$  to the discrete 2D Toda molecule is thus essentially equivalent to giving a function  $f$  over  $\mathbb{Z}^2$ .

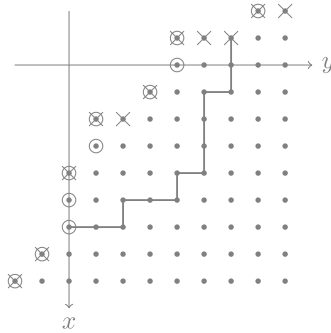


Figure 1: A regular subset  $\mathbb{L}$  of  $\mathbb{Z}^2$  and a lattice path. North and west boundary points are marked by circles and crosses respectively. Convex corners are those doubly marked.

### 3. Lattice path combinatorics

We adopt a matrix-like coordinate to draw a square lattice  $\mathbb{Z}^2$  where the nearest neighbors  $(i+1, j)$ ,  $(i-1, j)$ ,  $(i, j+1)$  and  $(i, j-1)$  of a lattice point  $(i, j)$  are located on the south, north, east and west of  $(i, j)$  respectively. We call a subset  $\mathbb{L}$  of  $\mathbb{Z}^2$  *regular* such that (i) if  $(i, j) \in \mathbb{L}$  then  $(i+k, j+k) \in \mathbb{L}$  for all  $k \geq 1$ ; (ii) if  $(i, j) \in \mathbb{L}$  then  $(i-k, j) \notin \mathbb{L}$  and  $(i, j-k) \notin \mathbb{L}$  for some  $k \geq 1$ . We call a point  $(i, j) \in \mathbb{L}$  a *north boundary point* if  $(i-1, j) \notin \mathbb{L}$ ; similarly a *west boundary point* if  $(i, j-1) \notin \mathbb{L}$ . We call a point  $(i, j) \in \mathbb{L}$  a *convex corner* if  $(i, j)$  is a north and south boundary point. The interest is in lattice paths on a regular subset  $\mathbb{L}$  of  $\mathbb{Z}^2$  consisting of north and east steps. See Figure 1 for example.

We think of a regular subset  $\mathbb{L}$  of  $\mathbb{Z}^2$  as a graph with vertices  $\mathbb{L}$  and edges connecting nearest neighbors. We determine the weights of edges by using a solution  $a_n^{(s,t)}$ ,  $b_n^{(s,t)}$  to the discrete 2D Toda molecule (3) as follows.

- (a) The vertical edge with north endpoint at  $(i, j)$  is weighted by  $a_n^{(i-n, j-n)}$  if  $(i-n, j-n)$  is a west boundary point of  $\mathbb{L}$ .
- (b) The vertical edge with south endpoint at  $(i, j)$  is weighted by  $b_n^{(i-n, j-n)}$  if  $(i-n, j-n)$  is a north boundary point of  $\mathbb{L}$ .
- (c) Every horizontal edge is weighted by 1.

See Figure 2 for example. We define the weight  $w(\mathbb{L}; a, b; P)$  of a lattice path  $P$  on  $\mathbb{L}$  to be the product of the weights of all edges passed by  $P$ . We conventionally consider empty paths  $P$  with no steps for which  $w(\mathbb{L}; a, b; P) = 1$ . For  $(i, j) \in \mathbb{L}$  and  $(k, \ell) \in \mathbb{L}$  we further define

$$g(\mathbb{L}; a, b; i, j; k, \ell) = \sum_P w(\mathbb{L}; a, b; P) \quad (7)$$

where the sum ranges over all lattice paths on  $\mathbb{L}$  going from  $(i, j)$  to  $(k, \ell)$ .

Let  $x(j)$  denote the  $x$ -coordinate (or the vertical —) of the north boundary point of  $\mathbb{L}$  with  $y$ -coordinate (or horizontal —) equal to  $j$ ; let  $y(i)$  the  $y$ -coordinate of the west boundary point of  $\mathbb{L}$  with  $x$ -coordinate equal to  $i$ . The following theorem gives a combinatorial interpretation of the discrete 2D Toda molecule and refines Proposition 1.



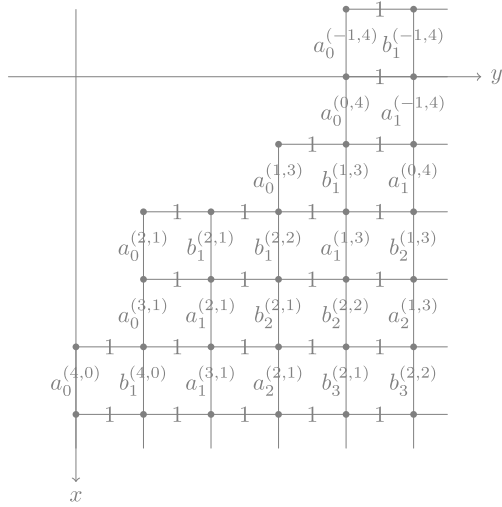


Figure 2: The weights of edges.

**Theorem 2.** Let  $a_n^{(s,t)} \neq 0$ ,  $b_n^{(s,t)} \neq 0$  be a solution to the discrete 2D Toda molecule (3), and let a function  $f = f_{i,j}$  on  $\mathbb{Z}^2$  give the same solution through (4) with (6). Let  $\mathbb{L}$  be a regular subset of  $\mathbb{Z}^2$ . For  $(i, j) \in \mathbb{L}$  then

$$\frac{f_{i,j}}{f_{x(j),j}} = g(\mathbb{L}; a, b; i, y(i); x(j), j). \quad (8)$$

In order to prove the theorem we use the following lemma.

**Lemma 3.** Let  $\mathbb{L}$  be a regular subset of  $\mathbb{Z}^2$  with a convex corner  $(s, t) \in \mathbb{L}$ . Let  $\mathbb{L}'$  denote the regular subset of  $\mathbb{Z}^2$  obtained from  $\mathbb{L}$  by deleting  $(s, t)$ . For  $(i, j)$  and  $(k, \ell)$  in  $\mathbb{L}'$  with  $i - j \neq s - t$  and  $k - \ell \neq s - t$  then

$$g(\mathbb{L}; a, b; i, j; k, \ell) = g(\mathbb{L}'; a, b; i, j; k, \ell). \quad (9)$$

*Proof.* The difference between  $\mathbb{L}$  and  $\mathbb{L}'$  is only in the existence and the absence of the convex corner  $(s, t)$ , and the weights of vertical edges between the two diagonal lines  $d_- : y - x = t - s - 1$  and  $d_+ : y - x = t - s + 1$ . (The vertical edges between  $d_-$  and  $d_+$  are weighted by  $a_n^{(s,t)}$ ,  $b_n^{(s,t)}$  on  $\mathbb{L}$  and by  $a_n^{(s,t+1)}$ ,  $b_n^{(s+1,t)}$  on  $\mathbb{L}'$ .) Assume that  $i - j \neq s - t$  and  $k - \ell \neq s - t$  meaning that  $(i, j)$  and  $(k, \ell)$  is outside the region between  $d_-$  and  $d_+$ . (Those may be on  $d_\pm$ .) If both  $(i, j)$  and  $(k, \ell)$  are either in the south of  $d_-$  or in the north of  $d_+$  then the identity (9) clearly holds since lattice paths going from  $(i, j)$  to  $(k, \ell)$  never enter the region between  $d_-$  and  $d_+$ . In the rest of the proof we thus assume that  $(i, j)$  is in the south of  $d_-$  and  $(k, \ell)$  in the north of  $d_+$ .

Each lattice path  $P$  going from  $(i, j)$  to  $(k, \ell)$  is uniquely divided into three subpaths:  $P_-$  from  $(i, j)$  to  $d_-$ ,  $Q$  of two steps between  $d_-$  and  $d_+$  and  $P_+$  from  $d_+$  to  $(k, \ell)$ . Obviously  $w(P_\pm) = w'(P_\pm)$  where  $w$  and  $w'$  are abbreviations of  $w(\mathbb{L}; a, b; \cdot)$  and  $w(\mathbb{L}'; a, b; \cdot)$  respectively. The proof of (9) thus amounts to showing that  $g(i, j; k, \ell) = g'(i, j; k, \ell)$  for each  $(i, j)$  on  $d_-$  and  $(k, \ell)$  on  $d_+$  where  $g$  and  $g'$  are abbreviations of  $g(\mathbb{L}; a, b; \cdot)$  and  $g(\mathbb{L}'; a, b; \cdot)$  respectively. Since  $Q$  is of two steps we have only three cases: (i)  $(i, j) = (s + n, t + n - 1)$  and  $(k, \ell) = (s + n, t + n + 1)$  for some  $n \geq 1$ ; (ii)

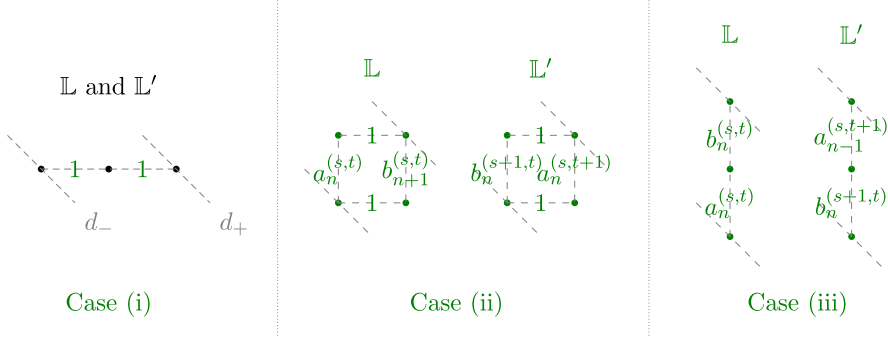


Figure 3: Proof of Lemma 3.

$(i, j) = (s + n + 1, t + n)$  and  $(k, \ell) = (s + n, t + n + 1)$  for some  $n \geq 0$ ; (iii)  $(i, j) = (s + n + 1, t + n)$  and  $(k, \ell) = (s + n - 1, t + n)$  for some  $n \geq 1$ . See Figure 3.

Case (i): The unique lattice path going from  $(i, j) = (s + n, t + n - 1)$  to  $(k, \ell) = (s + n, t + n + 1)$  of two east steps is both on  $\mathbb{L}$  and on  $\mathbb{L}'$ . Thus  $g(i, j; k, \ell) = g'(i, j; k, \ell) = 1$ .

Case (ii): There are two lattice paths going from  $(i, j) = (s + n + 1, t + n)$  to  $(k, \ell) = (s + n, t + n + 1)$  one of which is  $Q_1$  going north and east, the other is  $Q_2$  going east and north. If  $n \geq 1$  then  $Q_1$  and  $Q_2$  are both on  $\mathbb{L}$  and on  $\mathbb{L}'$ , and  $w(Q_1) = a_n^{(s,t)}$ ,  $w(Q_2) = b_{n+1}^{(s,t)}$ ,  $w'(Q_1) = a_n^{(s,t+1)}$  and  $w'(Q_2) = b_n^{(s+1,t)}$ . Thus  $g(i, j; k, \ell) = a_n^{(s,t)} + b_{n+1}^{(s,t)} = a_n^{(s,t+1)} + b_n^{(s+1,t)} = g'(i, j; k, \ell)$  because of (3b). If  $n = 0$  then  $Q_1$  and  $Q_2$  are on  $\mathbb{L}$  while only  $Q_2$  on  $\mathbb{L}'$ , and  $w(Q_1) = a_0^{(s,t)}$ ,  $w(Q_2) = b_1^{(s,t)}$  and  $w'(Q_1) = a_0^{(s,t+1)}$ . ( $Q_1$  is not on  $\mathbb{L}'$  since  $Q_1$  passes through  $(s, t) \notin \mathbb{L}'$ .) Thus  $g(i, j; k, \ell) = a_0^{(s,t)} + b_1^{(s,t)} = a_0^{(s,t+1)} = g'(i, j; k, \ell)$  because of (3a) with (3c).

Case (iii): The unique lattice path going from  $(i, j) = (s + n + 1, t + n)$  to  $(k, \ell) = (s + n - 1, t + n)$  of two north steps is both on  $\mathbb{L}$  and on  $\mathbb{L}'$ . The weight of the lattice path is  $a_n^{(s,t)} b_n^{(s,t)}$  on  $\mathbb{L}$  and  $a_{n-1}^{(s,t+1)} b_n^{(s+1,t)}$  on  $\mathbb{L}'$ . Thus  $g(i, j; k, \ell) = a_n^{(s,t)} b_n^{(s,t)} = a_{n-1}^{(s,t+1)} b_n^{(s+1,t)} = g'(i, j; k, \ell)$  because of (3b).  $\square$

*Proof of Theorem 2.* Let  $\mathbb{L}'$  denote the regular subset of  $\mathbb{Z}^2$  defined by  $\mathbb{L}' = \mathbb{L} \setminus \{(s, t) \in \mathbb{L}; s < i \text{ and } t < j\}$ . From Lemma 3 then  $g(\mathbb{L}; a, b; i, y(i); x(j), j) = g(\mathbb{L}'; a, b; i, y(i); x(j), j)$  because  $\mathbb{L}'$  can be obtained from  $\mathbb{L}$  by iterative deletion of convex corners. A lattice path going from  $(i, y(i))$  to  $(x(j), j)$  on  $\mathbb{L}'$  is unique because such a lattice path cannot turn north until  $(i, j)$  and cannot turn east from  $(i, j)$ . The weight of the unique lattice path on  $\mathbb{L}'$  implies that  $g(\mathbb{L}'; a, b; i, y(i); x(j), j) = \prod_{k=x(j)}^{i-1} a_0^{(k,j)}$ . The last product is equal to  $f_{i,j}/f_{x(j),j}$  because  $a_0^{(k,j)} = f_{k+1,j}/f_{k,j}$  from (4) and (6).  $\square$

Theorem 2 admits a combinatorial interpretation of the determinant  $\tau_n^{(s,t)}$  by means of Gessel–Viennot–Lindström’s method [2, 5]. For  $(s, t) \in \mathbb{L}$  and  $n \geq 0$  we define  $\text{LP}(\mathbb{L}, s, t, n)$  to be the set of  $n$ -tuples  $(P_0, \dots, P_{n-1})$  of lattice paths on  $\mathbb{L}$  such that (i)  $P_k$  goes from  $(s+k, y(s+k))$  to  $(x(t)+k, t+k)$  for each  $0 \leq k < n$ , and (ii)  $P_0, \dots, P_{n-1}$  are *non-intersecting*:  $P_j \cap P_k = \emptyset$  if  $j \neq k$ . See Figure 4, the second figure shows an  $n$ -tuple of non-intersecting lattice paths.

**Theorem 4.** Let  $a_n^{(s,t)} \neq 0$ ,  $b_n^{(s,t)} \neq 0$  be a solution to the discrete 2D Toda molecule (3), and let a function  $f = f_{i,j}$  on  $\mathbb{Z}^2$  give the same solution through (4) with (6). Let

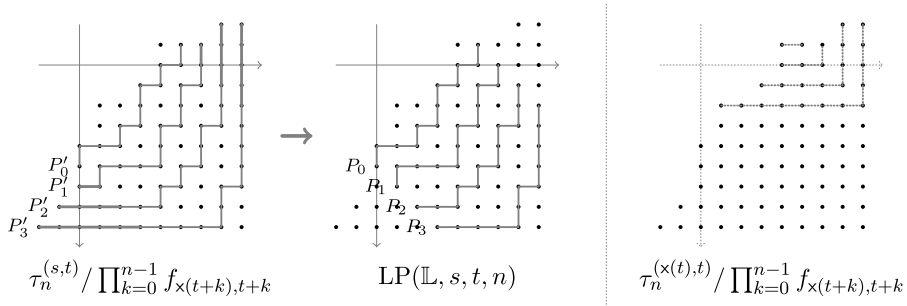


Figure 4: Proof of Theorem 4 where  $(s, t) = (5, 4)$  and  $n = 4$ . In the first figure the steps in gray are frozen due to the non-intersecting condition.

$\mathbb{L}$  be a regular subset of  $\mathbb{Z}^2$ . For  $(s, t) \in \mathbb{L}$  and  $n \geq 0$  then

$$\frac{\tau_n^{(s,t)}}{\tau_n^{(x(t),t)}} = \sum_{(P_0, \dots, P_{n-1}) \in \text{LP}(\mathbb{L}, s, t, n)} \prod_{k=0}^{n-1} w(\mathbb{L}; a, b; P_k) \quad (10)$$

where  $\tau_n^{(s,t)} = \det_{0 \leq i, j < n} (f_{s+i, t+j})$ .

*Proof.* Gessel–Viennot–Lindström’s method yields from Theorem 2 that

$$\frac{\tau_n^{(s,t)}}{\prod_{k=0}^{n-1} f_{x(t+k), t+k}} = \sum_{(P'_0, \dots, P'_{n-1})} \prod_{k=0}^{n-1} w(\mathbb{L}; a, b; P'_k) \quad (11)$$

where the sum ranges over all  $n$ -tuples  $(P'_0, \dots, P'_{n-1})$  of non-intersecting lattice paths on  $\mathbb{L}$  such that  $P'_k$  goes from  $(s+k, y(s+k))$  to  $(x(t+k), t+k)$  for each  $0 \leq k < n$ . Eliminating the steps frozen due to the non-intersecting condition we obtain  $(P_0, \dots, P_{n-1}) \in \text{LP}(\mathbb{L}, s, t, n)$ , see Figure 4 for example. The weight of the eliminated frozen steps is equal to the weight of a unique configuration of non-intersecting lattice paths from  $\tau_n^{(x(t),t)} / \prod_{k=0}^{n-1} f_{x(t+k), t+k}$ , see the first and the last figures in Figure 4 for example. Thus  $\tau_n^{(s,t)}$  is equal to the right-hand side of (10) multiplied by  $\tau_n^{(x(t),t)}$ .  $\square$

Note that the left-hand side of (10) can be expressed as

$$\frac{\tau_n^{(s,t)}}{\tau_n^{(x(t),t)}} = \prod_{i=1}^{s-x(t)} \prod_{k=1}^n a_{k-1}^{(s-i,t)} \quad (12)$$

from (4). We can readily evaluate the sum in (10), a partition function for non-intersecting lattice paths, by using this formula.

#### 4. Multiplicative partition functions for reverse plane partitions

Let  $\lambda$  be a partition and let  $n \geq 0$ . We write  $\text{RPP}(\lambda, n)$  for the set of reverse plane partitions of shape  $\lambda$  with parts at most  $n$ . Let  $r$  and  $c$  denote the numbers of rows and columns in  $\lambda$  respectively. We then define a regular subset  $\mathbb{L}(\lambda)$  of  $\mathbb{Z}^2$  by

$$\mathbb{L}(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2; j \geq c - \lambda_{r-i}\} \quad (13)$$

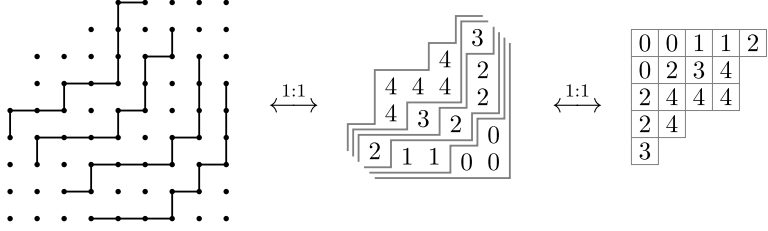


Figure 5: The bijection between  $\text{LP}(\mathbb{L}(\lambda), r, c, n)$  and  $\text{RPP}(\lambda, n)$  where  $\lambda = (5, 4, 4, 2, 1)$  with  $r = 5$  rows and  $c = 5$  columns, and  $n = 4$ .

where  $\lambda_i$  denotes the  $i$ -th part of  $\lambda$  for  $1 \leq i \leq r$  and  $\lambda_i = c$  for  $i \leq 0$ . There is a bijection between  $\text{LP}(\mathbb{L}(\lambda), r, c, n)$  and  $\text{RPP}(\lambda, n)$  which is described as follows. Given an  $n$ -tuple  $(P_0, \dots, P_{n-1}) \in \text{LP}(\mathbb{L}(\lambda), r, c, n)$  of non-intersecting lattice paths on  $\mathbb{L}(\lambda)$

- (i) move the lattice path  $P_k$  northwest by  $(-k, -k)$  for each  $0 \leq k < n$ ;
- (ii) fill in the cells between  $P_{n-k-1}$  and  $P_{n-k}$  with  $k$  for each  $0 \leq k \leq n$  where  $P_{-1}$  is the lattice path going from  $(r, 0)$  to  $(0, c)$  along the border of  $\mathbb{L}(\lambda)$  and  $P_n$  is that going east from  $(r, 0)$ , turning north at  $(r, c)$  and going north to  $(0, c)$ ;
- (iii) rotate  $180^\circ$  to obtain a reverse plane partition in  $\text{RPP}(\lambda, n)$ .

Figure 5 demonstrates the bijection by an example. It should be noted that this bijection is essentially the same as the classical interpretation of plane partitions by “zig-zag” non-intersecting paths [4].

We set up weight for reverse plane partitions which is equivalent to the weight for lattice paths defined in Section 3. Let  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_c)$  denote the partition conjugate with  $\lambda$ . We define  $\alpha_{i,j}$  by

$$\alpha_{i+k, \lambda_i+k} = a_{n-k-1}^{(r-i, c-\lambda_i)}, \quad \alpha_{\lambda'_j+k, j+k-1} = b_{n-k}^{(r-\lambda'_j, c-j)} \quad (14)$$

for  $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq j \leq c$  and  $k < n$  where  $a_n^{(s,t)} \neq 0$ ,  $b_n^{(s,t)} \neq 0$  is a solution to the discrete 2D Toda molecule (3). We then define the weight of a reverse plane partition  $\pi$  by

$$v(\lambda, n; a, b; \pi) = \prod_{(i,j) \in \lambda} v_{i,j}(\lambda, n; a, b; \pi) \quad \text{with} \quad (15a)$$

$$v_{i,j}(\lambda, n; a, b; \pi) = \prod_{k=1}^{\pi_{i,j}} \frac{\alpha_{i+k-1, j+k-2}}{\alpha_{i+k-1, j+k-1}}. \quad (15b)$$

**Lemma 5.** *Let  $\lambda$  be a partition with  $r$  rows and  $c$  columns, and let  $n \geq 0$ . Assume that  $\pi \in \text{RPP}(\lambda, n)$  and  $(P_0, \dots, P_{n-1}) \in \text{LP}(\mathbb{L}(\lambda), r, c, n)$  corresponds to each other by the bijection. Then*

$$v(\lambda, n; a, b; \pi) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} w(\mathbb{L}(\lambda); a, b; P_k)}{\prod_{i=1}^r \prod_{k=1}^n a_{k-1}^{(r-i, c-\lambda_i)}}. \quad (16)$$

*Sketch of proof.* Actually  $\alpha_{i,j}$  is defined so that  $v(\pi) = v(\lambda, n; a, b; \pi)$  is proportional to  $\prod_{k=0}^{n-1} w(P_k)$  with  $w(P) = w(\mathbb{L}(\lambda); a, b; P)$ . That is, there exists a constant  $\kappa$  such

that  $v(\pi) = \kappa \prod_{k=0}^{n-1} w(P_k)$ . From (15),  $v(\lambda, n; a, b; \pi^\emptyset) = 1$  for the *empty* reverse plane partition  $\pi^\emptyset \in \text{RPP}(\lambda, n)$  whose parts are all 0. Thus  $\kappa^{-1} = \prod_{k=0}^{n-1} w(P_k^\emptyset)$  where  $(P_0^\emptyset, \dots, P_{n-1}^\emptyset) \in \text{LP}(\mathbb{L}(\lambda), r, c, n)$  corresponds to  $\pi^\emptyset$  by the bijection. We observe that  $P_0^\emptyset$  goes from  $(r, 0)$  to  $(0, c)$  along the border of  $\mathbb{L}(\lambda)$ , and  $P_1^\emptyset, \dots, P_{n-1}^\emptyset$  are copies of  $P_0^\emptyset$ . Especially  $w(P_k^\emptyset) = \prod_{i=1}^r a_k^{(r-i, c-\lambda_i)}$  and hence  $\kappa^{-1}$  is equal to the denominator of the right-hand side of (16).  $\square$

The following is the main theorem of this paper.

**Theorem 6.** *Let  $a_n^{(s,t)} \neq 0$ ,  $b_n^{(s,t)} \neq 0$  be a solution to the discrete 2D Toda molecule (3). Let  $\lambda$  be a partition with  $r$  rows and  $c$  columns, and let  $n \geq 0$ . Then*

$$\sum_{\pi \in \text{RPP}(\lambda, n)} v(\lambda, n; a, b; \pi) = \prod_{i=1}^r \prod_{k=1}^n \frac{a_{k-1}^{(r-i, c)}}{a_{k-1}^{(r-i, c-\lambda_i)}}. \quad (17)$$

*Proof.* This theorem is a translation of Theorem 4 via the bijection with the help of (12) and Lemma 5.  $\square$

Theorem 6 allows us to find a multiplicative partition function for reverse plane partitions of arbitrary shape with bounded parts from each non-vanishing solution to the discrete 2D Toda molecule (3).

## 5. An example

The discrete 2D Toda molecule (3) has the solution

$$a_n^{(s,t)} = [p]_{s+1}^{s+n} (1 - a[p]_1^s [q]_1^{t+n}), \quad (18a)$$

$$b_n^{(s,t)} = a[p]_1^{s+n-1} [q]_1^t (1 - [q]_{t+1}^{t+n}) \quad (18b)$$

with the notation that  $[z]_m^n = \prod_{\ell=m}^n z_\ell$  if  $m \leq n$ ,  $[z]_m^n = 1$  if  $m = n+1$  and  $[z]_m^n = \prod_{\ell=n}^{m-1} z_\ell^{-1}$  if  $m \geq n+2$ . The solution involves indeterminates  $a$  and  $p_\ell, q_\ell$  for  $\ell \in \mathbb{Z}$  as parameters.

Let  $\lambda$  be a partition with  $r$  rows and  $c$  columns. Assume that

$$a = [x]_{c-\lambda'_c}^{\lambda_r - r}, \quad p_i = [x]_{c-r+i-\mu_i}^{c-r+i-\mu_{i+1}}, \quad q_j = [x]_{\mu'_{j+1}-j-r+c}^{\mu'_j - j - r + c}. \quad (19)$$

We then have a solution

$$a_n^{(s,t)} = [x]_{c-r+s+1-\mu_{s+1}}^{c-r+s+n-\mu_{s+n+1}} (1 - [x]_{\mu'_{t+n+1}-t-n-r+c}^{c-r+s-\mu_{s+1}}), \quad (20a)$$

$$b_n^{(s,t)} = [x]_{\mu'_{t+1}-t-r+c}^{c-r+s+n-1-\mu_{s+n}} (1 - [x]_{\mu'_{t+n+1}-t-n-r+c}^{\mu'_{t+1}-t-1-r+c}). \quad (20b)$$

Let  $n \geq 0$ . The solution (20) yields the weight of (15) with (14) given by

$$v(\lambda, n; a, b; \pi) = \prod_{\ell=1-r}^{c-1} x_\ell^{\text{tr}_\ell(\pi)} \prod_{(i,j) \in \lambda} \prod_{k=1}^{\pi_{i,j}} \frac{1 - [x]_{-n+j+k-1-\lambda'_{-n+j+k-1}}^{j-i-1}}{1 - [x]_{-n+j+k+\lambda'_{-n+j+k}}^{j-i}}. \quad (21)$$

As an instance of Theorem 6 we obtain the following multiplicative partition function for reverse plane partition.

**Theorem 7.** Let  $\lambda$  be a partition with  $r$  rows and  $c$  columns, and let  $n \geq 0$ . Then

$$\sum_{\pi \in \text{RPP}(\lambda, n)} v(\lambda, n; a, b; \pi) = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{1 - [x]_{-n+j-\lambda'_{-n+j}}^{\lambda_i-i}}{1 - [x]_{j-\lambda'_j}^{\lambda_i-i}} \quad (22)$$

where the weight  $v(\lambda, n; a, b; \pi)$  is given by (21).

*Proof.* Substituting the solution (20) for the right-hand side of (17) we get

$$\prod_{i=1}^r \prod_{k=1}^n \frac{1 - [x]_{-k+1-\lambda'_{-k+1}}^{\lambda_i-i}}{1 - [x]_{-k+1+\lambda_i-\lambda'_{-k+1+\lambda_i}}^{\lambda_i-i}} = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{\lambda_i} \prod_{k=1}^n \frac{1 - [x]_{j-k-\lambda'_{j-k}}^{\lambda_i-i}}{1 - [x]_{j-k+1-\lambda'_{j-k+1}}^{\lambda_i-i}} \quad (23a)$$

$$= \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{\lambda_i} \frac{1 - [x]_{-n+j-\lambda'_{-n+j}}^{\lambda_i-i}}{1 - [x]_{j-\lambda'_j}^{\lambda_i-i}}. \quad (23b)$$

The last product is the same as the right-hand side of (22).  $\square$

The multiplicative partition function in Theorem 7 generalizes the multi-trace generating function (2) by Gansner. Indeed (22) reduces into (2) as  $n \rightarrow \infty$  because  $\lim_{n \rightarrow \infty} [x]_{-n+\text{const.}}^{\text{const.}} = 1$  as formal power series,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda'_{-n} = r$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} v(\lambda, n; a, b; \pi) = \prod_{\ell=1-r}^{c-1} x_{\ell}^{\text{tr}_{\ell}(\pi)}$ .

Assuming  $x_{\ell} = q$  for  $\ell \in \mathbb{Z}$  we obtain the partition function

$$\sum_{\pi \in \text{RPP}(\lambda, n)} v(\lambda, n; a, b; \pi) = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{1 - q^{\lambda_i+\lambda'_{j-n}-i-j+n+1}}{1 - q^{\lambda_i+\lambda'_j-i-j+1}} \quad \text{with} \quad (24a)$$

$$v(\lambda, n; a, b; \pi) = q^{|\pi|} \prod_{(i,j) \in \lambda} \prod_{k=1}^{\pi_{i,j}} \frac{1 - q^{n-i-k+1+\lambda'_{-n+j+k-1}}}{1 - q^{n-i-k+1+\lambda'_{-n+j+k}}} \quad (24b)$$

from (21) and (22). If  $\lambda = (c^r)$ , an  $r \times c$  rectangular shape, that becomes the triple product formula (1) by MacMahon. The partition function (24) is thus regarded as a generalization of (1) for reverse plane partitions of arbitrary shape.

## References

- [1] E. R. Gansner, *The Hillman-Grassl correspondence and the enumeration of reverse plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **30** (1981), 71–89.
- [2] I. Gessel and G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. in Math. **58** (1985), 300–321.
- [3] R. Hirota, S. Tsujimoto, and T. Imai, *Difference scheme of soliton equations*, State of the art and perspectives of studies on nonlinear integrable systems (Japanese) (Kyoto, 1992), Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, 822, 1993, pp. 144–152.
- [4] C. Krattenthaler, *Plane partitions in the work of Richard Stanley and his school*, arXiv:1503.05934v2 [math.CO].
- [5] B. Lindström, *On the vector representations of induced matroids*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 85–90.
- [6] P. A. MacMahon, *Combinatory analysis, volume 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.
- [7] R. P. Stanley, *Theory and application of plane partitions, I, II*, Studies in Appl. Math. **50** (1971), 167–188, 259–279.

- [8] ———, *The conjugate trace and trace of a plane partition*, J. Combinatorial Theory Ser. A **14** (1973), 53–65.
- [9] X. G. Viennot, *A combinatorial interpretation of the quotient-difference algorithm*, Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Moscow, 2000), Springer, Berlin, 2000, pp. 379–390.

## 6 頂点模型の Izergin-Korepin 解析

茂木康平 (東京海洋大学)\*

可解格子模型において、ドメイン壁分配関数と呼ばれるクラスの分配関数がある。Izergin-Korepin 解析はドメイン壁分配関数の明示表式を求めるために Korepin [1] により導入された手法であり、ドメイン壁分配関数をスペクトル変数に関する多変数多項式とみなしたとき、その多項式の満たすべき性質を特徴づけたものである。後に Izergin [2] により、ある行列式がこの性質を全て満たすことが証明され (Izergin-Korepin 行列式)、1990年代にはその行列式が交代符号行列の数え上げ母関数を一般化したものであることが発見された。

近年、波動関数と呼ばれるより一般的なクラスの分配関数が、対称多項式の対応及び、それを介した他の数学の分野とのつながりで興味を持たれている。最近、ドメイン壁分配関数の Izergin-Korepin 解析を波動関数に拡張することにより、波動関数の明示表式を系統的に導出する方法を見出した [3]。最も基本的には波動関数についてその方法をごく簡潔に述べる。まず、補助空間  $W_a$  と量子空間  $\mathcal{F}_j$  のテンソル積  $W_a \otimes \mathcal{F}_j$  に作用する  $L$  演算子

$$L_{aj}(u, w_j, a_j, b_j, c_j, d_j, e_j, f_j) = \begin{pmatrix} a_j u + b_j w_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_j q u + b_j w_j & (1-q)c_j u & 0 \\ 0 & (1-q)d_j w_j & e_j u + f_j w_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_j u + q f_j w_j \end{pmatrix},$$

から出発する。ここで、 $a_j, b_j, c_j, d_j, e_j, f_j$  は

$$(1-q)c_j d_j + a_j f_j - b_j e_j = 0, \quad (q^2 - q)c_j d_j + q^2 a_j f_j - b_j e_j = 0,$$

を満たす定数である。 $L$  演算子の積であるモノドロミー行列の補助空間に関する行列要素である  $B$  演算子

$$B(u|w_1, \dots, w_N) = {}_a \langle 0 | L_{aN}(u, w_N) \cdots L_{a1}(u, w_1) | 1 \rangle_a,$$

を真空  $|\Omega\rangle_N := |0\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_N \in \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_N$  に繰り返し作用させることで off-shell Bethe ベクトル

$$|\Phi_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N)\rangle = B(u_1 | w_1, \dots, w_N) \cdots B(u_n | w_1, \dots, w_N) |\Omega\rangle_N,$$

が構成される。波動関数  $W_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N | x_1, \dots, x_n)$  を off-shell Bethe ベクトル  $|\Phi_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N)\rangle$  と下向きスピンの列  $1 \leq x_1 < \cdots < x_n \leq N$  をラベルする状態  $\langle x_1 \cdots x_n |$  の内積として定義する。

$$W_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N | x_1, \dots, x_n) = \langle x_1 \cdots x_n | \Phi_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N)\rangle.$$

本研究は科研費 (課題番号:16K05468) の助成を受けたものである。

\* 〒135-0044 東京都江東区越中島2-2-20 東京海洋大学 海洋工学部

e-mail: kmoteg0@kaiyodai.ac.jp

web: <https://sites.google.com/site/motegikohei/>



次の補題がドメイン壁分配関数の Izergin-Korepin 解析を波動関数の場合に拡張したものである。

**補題**  $W_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N | x_1, \dots, x_n)$  は次の性質を満たす。

- (1)  $W_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N | x_1, \dots, x_n)$  を  $w_N$  の多項式とみなしたとき、最高次数は  $x_n = N$  ならば  $(n-1)$  であり、 $x_n \neq N$  ならば  $n$  である。
- (2)  $W_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N | x_1, \dots, x_n)$  は  $u_j, j = 1, \dots, n$  に関して対称である。
- (3)  $x_n = N$  のとき、次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} & W_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N | x_1, \dots, x_n) \Big|_{w_N = -b_N^{-1} a_N^{-1} u_n} \\ &= (1-q) c_N u_n \prod_{j=1}^{n-1} a_N (q u_j - u_n) \prod_{j=1}^{N-1} (e_j u_n + f_j w_j) \\ & \quad \times W_{N-1, n-1}(u_1, \dots, u_{n-1} | w_1, \dots, w_{N-1} | x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

$x_n \neq N$  ならば、以下の因子化が成立する。

$$\begin{aligned} & W_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N | x_1, \dots, x_n) \\ &= \prod_{j=1}^n (a_N u_j + b_N w_N) W_{N-1, n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_{N-1} | x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

- (4)  $n = 1, x_1 = N$  のとき、以下が成立する。

$$W_{N,1}(u | w_1, \dots, w_N | N) = (1-q) c_N u \prod_{k=1}^{N-1} (e_k u + f_k w_k).$$

以下の定理中の対称関数が上の補題の性質を全て満たすことにより、次の定理を証明することができる。

**定理** 対称関数

$$\begin{aligned} & F_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N | x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n \prod_{k=x_j+1}^N (a_k u_{\sigma(j)} + b_k w_k) \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{q u_{\sigma(j)} - u_{\sigma(k)}}{u_{\sigma(j)} - u_{\sigma(k)}} \\ & \quad \times \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^{x_j-1} (e_k u_{\sigma(j)} + f_k w_k) \prod_{j=1}^n (1-q) c_{x_j} u_{\sigma(j)}, \end{aligned}$$

は波動関数の明示表式である。

$$W_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N | x_1, \dots, x_n) = F_{N,n}(u_1, \dots, u_n | w_1, \dots, w_N | x_1, \dots, x_n).$$

上記の定理は XXZ 型 6 頂点模型に関する結果であるが、他にも変種である三角形境界の場合、Felderhof 模型やその楕円類似の模型に関してもこの手法を適用することができ、波動関数の明示表式として Schur  $Q$  関数を想起させる (がはるかに複雑な) 対称関数や、楕円 Schur 関数が出現する [3]。

## 参考文献

- [1] V.E. Korepin, Commun. Math. Phys. **86**, 391 (1982).
- [2] A. Izergin Sov. Phys. Dokl. **32**, 878 (1987).
- [3] K. Motegi arXiv:1703.07924, arXiv:1704.03575, arXiv:1704.07035

## イジング模型: 2次元磁場付きの系と3次元系

鈴鹿医療科学大学 桑野泰宏\* [quanoy@suzuka-u.ac.jp](mailto:quanoy@suzuka-u.ac.jp)

イジング模型を再考する.

磁場のない2次元系の平均場近似が1次元の磁場付きイジング模型と等価であること, 同様に, 磁場のない3次元系の平均場近似が2次元の磁場付きイジング模型と等価であること等を示す.

磁場のない2次元イジング模型の自発磁化を, 角転送行列の方法で再導出する. この角転送行列が対角化される基底で, 微小磁場をスイッチオンして摂動的にその効果を取り入れることとした場合, 自発磁化の表式がどうなるかを見る. 結果は磁場ゼロのケースとは異なりファクトライズすることはない. 磁場が特殊な虚数値であるとき, 結果はファクトライズする.

磁場のない3次元イジング模型に対し, star-tetrahedron 方程式を考察する. これは現時点では, 2次元の star-triangle 方程式の拡張の域を出ておらず, 3次元系の可解性にはつながっていない.

講演当日は時間の許す範囲で, 上に述べたことの中からいくつか報告する.

## References

- [1] Quano Y.-H: in preparation.

---

\* <http://www015.upp.so-net.ne.jp/quano/quano.htm>



## 量子アフィン超代数 $U_q(\widehat{sl}(M|N))$ の自由場表現

小島 武夫 (山形大学・工学部)

量子アフィン代数  $U_q(g)$  の自由場表現は、レベル  $k=1$  の場合には多くの結果が知られているが、一般のレベル  $k \in \mathbf{C}$  については、 $g = \widehat{sl}(N), \widehat{sl}(M|N)$  の2つの場合のみが知られている。① 量子アフィン超代数  $U_q(\widehat{sl}(M|N))$  の自由場表現を一般のレベル  $k \in \mathbf{C}$  で構成し、②  $U_q(\widehat{sl}(M|N))$  と可換なスクリーニング作用素をレベル  $k \neq -M+N$  において構成する。

• 3種類のボゾン  $a_m^i$  ( $m \in \mathbf{Z}, 1 \leq i \leq M+N-1$ ),  $b_m^{i,j}$  ( $m \in \mathbf{Z}, 1 \leq i < j \leq M+N$ ),  $c_m^{i,j}$  ( $m \in \mathbf{Z}, \nu_i \nu_j = +1, 1 \leq i < j \leq M+N$ ), およびゼロモード・オペレーター  $Q_a^i$  ( $1 \leq i \leq M+N-1$ ),  $Q_b^{i,j}$  ( $1 \leq i < j \leq M+N$ ),  $Q_c^{i,j}$  ( $\nu_i \nu_j = +1, 1 \leq i < j \leq M+N$ ) を導入する。ただし、 $\nu_i = +1$  ( $1 \leq i \leq M$ ),  $\nu_i = -1$  ( $M+1 \leq i \leq M+N$ ) とし、dual Coxeter number  $g = M-N$  とし、 $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq M+N-1}$  は  $sl(M|N)$  の Cartan 行列とする。  $[a]_q = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$ . 交換関係は、

$$\begin{aligned} [a_m^i, a_n^j] &= \frac{1}{m} [(k+g)m]_q [A_{i,j}m]_q \delta_{m+n,0}, & [a_0^i, Q_a^j] &= (k+g)A_{i,j}, \\ [b_m^{i,j}, b_n^{i',j'}] &= -\nu_i \nu_j \frac{1}{m} [m]_q^2 \delta_{i,i'} \delta_{j,j'} \delta_{m+n,0}, & [b_0^{i,j}, Q_b^{i',j'}] &= -\nu_i \nu_j \delta_{i,i'} \delta_{j,j'}, \\ [c_m^{i,j}, c_n^{i',j'}] &= \nu_i \nu_j \frac{1}{m} [m]_q^2 \delta_{i,i'} \delta_{j,j'} \delta_{m+n,0}, & [c_0^{i,j}, Q_c^{i',j'}] &= \nu_i \nu_j \delta_{i,i'} \delta_{j,j'} \quad (\nu_i \nu_j = +1), \\ [Q_b^{i,j}, Q_b^{i',j'}] &= \pi \sqrt{-1} \quad (\nu_i \nu_j = \nu_{i'} \nu_{j'} = -1). \end{aligned}$$

その他は0とする。以下の略記を用いる。

$$b_{\pm}^{i,j}(z) = \pm(q - q^{-1}) \sum_{m>0} b_{\pm m}^{i,j} z^{\mp m} \pm b_0^{i,j} \log z, \quad b^{i,j}(z) = - \sum_{m \neq 0} \frac{b_m^{i,j}}{[m]_q} z^{-m} + Q_b^{i,j} + b_0^{i,j} \log z.$$

•  $U_q(\widehat{sl}(M|N))$  の Drinfeld の実現  $X^{\pm,i}(z)$  ( $1 \leq i \leq M+N-1$ ) の自由場表示は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} X^{+,i}(z) &= \sum_{j=1}^i \frac{c_{i,j}}{(q - q^{-1})z} (E_{i,j}^+(z) - E_{i,j}^-(z)) \quad (1 \leq i \leq M-1), \\ X^{+,M}(z) &= \sum_{j=1}^M c_{M,j} E_{M,j}(z), \\ X^{+,i}(z) &= \sum_{j=1}^M c_{i,j} E_{i,j}(z) + \sum_{j=M+1}^i \frac{c_{i,j}}{(q - q^{-1})z} (E_{i,j}^+(z) - E_{i,j}^-(z)) \quad (M+1 \leq i \leq M+N-1). \\ X^{-,i}(z) &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{d_{i,j}^1}{(q - q^{-1})z} (F_{i,j}^{1,-}(z) - F_{i,j}^{1,+}(z)) + \frac{d_{i,i}^2}{(q - q^{-1})z} (F_{i,i}^{2,-}(z) - F_{i,i}^{2,+}(z)) \\ &+ \sum_{j=i+2}^M \frac{d_{i,j}^3}{(q - q^{-1})z} (F_{i,j}^{3,-}(z) - F_{i,j}^{3,+}(z)) + \sum_{j=M+1}^{M+N} d_{i,j}^3 F_{i,j}^3(z) \quad (1 \leq i \leq M-1), \\ X^{-,M}(z) &= \sum_{j=1}^{M-1} \frac{d_{M,j}^1}{(q - q^{-1})z} (F_{M,j}^{1,-}(z) - F_{M,j}^{1,+}(z)) + \frac{d_{M,M}^2}{(q - q^{-1})z} (F_{M,M}^{2,-}(z) - F_{M,M}^{2,+}(z)) \\ &+ \sum_{j=M+2}^{M+N} \frac{d_{M,j}^3}{(q - q^{-1})z} (F_{M,j}^{3,-}(z) - F_{M,j}^{3,+}(z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{-i}(z) &= \sum_{j=1}^M d_{i,j}^1 F_{i,j}^1(z) + \sum_{j=M+1}^{i-1} \frac{d_{i,j}^1}{(q-q^{-1})z} (F_{i,j}^{1,-}(z) - F_{i,j}^{1,+}(z)) + \frac{d_{i,i}^2}{(q-q^{-1})z} (F_{i,i}^{2,-}(z) - F_{i,i}^{2,+}(z)) \\
&\quad + \sum_{j=i+2}^{M+N} \frac{d_{i,j}^3}{(q-q^{-1})z} (F_{i,j}^{3,-}(z) - F_{i,j}^{3,+}(z)) \quad (M+1 \leq i \leq M+N-1).
\end{aligned}$$

$E_{i,j}(z), E_{i,j}^{\pm}(z), F_{i,j}^{*,\pm}(z), F_{i,j}^*(z)$  を幾つか例示する.  $M+1 \leq i \leq M+N-1, 1 \leq j \leq M$  のとき,

$$E_{i,j}(z) = : e^{b_+^{2,i}(q^{j-1}z) - b_-^{j,i}(q^jz) + b_+^{j,i+1}(q^{j-1}z) - \sum_{l=1}^{j-1} (b_+^{l,i+1}(q^l z) - b_+^{l,i}(q^{l-1}z))} : .$$

$M+1 \leq i \leq M+N-1, M+1 \leq j \leq i-1$  のとき,

$$\begin{aligned}
E_{i,j}^{\pm}(z) &= : e^{(b+c)^{j,i}(q^{2M+1-j}z) - b_{\pm}^{j,i+1}(q^{2M+1-j}z) - (b+c)^{j,i+1}(q^{2M+1-j}z)} \\
&\quad \times e^{-\sum_{l=1}^M (b_+^{l,i+1}(q^l z) - b_+^{l,i}(q^{l-1}z)) - \sum_{l=M+1}^{j-1} (b_+^{l,i+1}(q^{2M+1-l}z) - b_+^{l,i}(q^{2M-l}z))} : .
\end{aligned}$$

$1 \leq j \leq M-1$  のとき,

$$\begin{aligned}
F_{M,j}^{1,\pm}(z) &= : e^{a_{\pm}^M(q^{-\frac{k+g}{2}}z) - b_{\pm}^{j,M}(q^{-k-j}z) - (b+c)^{j,M}(q^{-k-j}z) - b_{\pm}^{j,M+1}(q^{-k-j}z) - b_{\pm}^{j,M+1}(q^{-k-j+1}z)} \\
&\quad \times e^{-\sum_{l=j+1}^{M-1} (b_{\pm}^{l,M}(q^{-k-l}z) + b_{\pm}^{l,M+1}(q^{-k-l}z)) + \sum_{l=M+2}^{M+N} (b_{\pm}^{l,l}(q^{-k-2M-1+l}z) + b_{\pm}^{M+1,l}(q^{-k-2M-1+l}z))} : .
\end{aligned}$$

$1 \leq i \leq M-1, M+1 \leq j \leq M+N$  ならば,

$$\begin{aligned}
F_{i,j}^3(z) &= : e^{a_+^i(q^{\frac{k+g}{2}}z) - b_+^{i,j}(q^{k+2M-j}z) - b_+^{i+1,j}(q^{k+2M-j}z) + b_+^{i+1,j}(q^{k+2M+1-j}z)} \\
&\quad \times e^{\sum_{l=j+1}^{M+N} (b_+^{l,l}(q^{k+2M+1-l}z) - b_+^{i+1,l}(q^{k+2M-l}z))} : ,
\end{aligned}$$

などと表される.  $c_{i,j}, d_{i,j}^*$  はスカラー.

•  $U_q(\widehat{sl}(M|N))$  と可換なスクリーニング作用素  $Q_i$  ( $1 \leq i \leq M+N-1$ ) を, Jackson 積分  $\int_0^{s\infty} f(w) d_p w = s(1-p) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(sp^n) p^n$  を用いて構成する. 以下, レベルは  $k \neq -g$ .

$$Q_i = \int_0^{s\infty} Q_i(w) d_{q^{2(k+g)}w}, \quad [Q_i, U_q(\widehat{sl}(M|N))] = 0.$$

スクリーニング・カレント  $S_i(z)$  ( $1 \leq i \leq M+N-1$ ) を定める.

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \sum_{j=i+1}^M \frac{e_{i,j}}{(q-q^{-1})z} (S_{i,j}^-(z) - S_{i,j}^+(z)) + \sum_{j=M+1}^{M+N} e_{i,j} S_{i,j}(z) \quad (1 \leq i \leq M-1), \\
S_M(z) &= \sum_{j=M+1}^{M+N} e_{M,j} S_{M,j}(z), \\
S_i(z) &= \sum_{j=i+1}^{M+N} \frac{e_{i,j}}{(q-q^{-1})z} (S_{i,j}^-(z) - S_{i,j}^+(z)) \quad (M+1 \leq i \leq M+N-1).
\end{aligned}$$

ただし,  $e_{i,j}$  はスカラー.  $S_{i,j}^{\pm}(z), S_{i,j}(z)$  は,  $E_{i,j}^{\pm}(z), E_{i,j}(z)$  と類似した式である. スペースの都合上省略.

#### 参考文献

[1] T.Kojima, A bosonization of  $U_q(\widehat{sl}(M|N))$ , arXiv.1701.03645, to appear in *Commun.Math.Phys.*

# フェルミオンと量子トーラス代数の楕円化

## 齋藤 洋介 (大阪市立大学数学研究所)

中津-高崎 [NT1], [NT2] において, フェルミオンを用いてゲージ理論や位相的弦理論の分配関数が計算されている. 近年, 物理の方面においてテータ関数や楕円ガンマ関数などの楕円関数によって分配関数が表される 6 次元の場の理論の研究が Iqbal-Kozcaz-Yau [IKY], Nieri [N] 等で行われている. このような楕円関数が現れる状況へも適用できるように中津-高崎の方法を拡張することを念頭に置いて, 筆者はフェルミオンの楕円化を構成した. これを用いることで, 量子トーラス代数のある楕円化が得られることについても述べる.

### フェルミオン ( $b$ - $c$ 系) の楕円化

交換子を  $[A, B] := AB - BA$ , 反交換子を  $\{A, B\} := AB + BA$  によって定める. 基本的な考え方は次の通りである. いわゆる  $b$ - $c$  系と呼ばれるフェルミオンを考える. これは生成元  $\{b_r\}_{r \in \mathbb{Z}+1/2}$ ,  $\{c_r\}_{r \in \mathbb{Z}+1/2}$  と次の関係式  $\{b_r, c_s\} = \delta_{r+s, 0}$  ( $r, s \in \mathbb{Z}+1/2$ ) で生成される  $\mathbb{C}$ -結合代数である.  $b_r$  同士,  $c_r$  同士は反交換すると仮定する. 生成母関数を  $b(z) := \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r z^{-r-1/2}$ ,  $c(z) := \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} c_r z^{-r-1/2}$  とおく. このとき次が成り立つ.

$$\bullet b(z)c(w) = :b(z)c(w): + \frac{1}{z-w} \quad (|w/z| < 1).$$

$T(z) := \frac{1}{2} :b'(z)c(z): - \frac{1}{2} :b(z)c'(z):$  とおき, これを  $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$  と展開するとき  $[L_0, b_r] = -rb_r$ ,  $[L_0, c_r] = -rc_r$  ( $r \in \mathbb{Z}+1/2$ ) が成り立つ. ここでトレース  $\text{tr} [p^{L_0} b(z)c(w)]$  (トレースはフェルミオン Fock 空間でとる) を計算すると次のようになる.

$$\bullet \text{tr} [p^{L_0} b(z)c(w)] = \text{tr} (p^{L_0}) \frac{1}{z} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \frac{(w/z)^{r-1/2}}{1+p^r}.$$

この結果を OPE のみで出せるようなフェルミオンのある楕円化を構成することを考える.

定義.  $p^{1/2}$  を不定元とする. 生成元  $\{b_r\}_{r \in \mathbb{Z}+1/2}$ ,  $\{c_r\}_{r \in \mathbb{Z}+1/2}$ ,  $\{\bar{b}_r\}_{r \in \mathbb{Z}+1/2}$ ,  $\{\bar{c}_r\}_{r \in \mathbb{Z}+1/2}$  と次の関係式で定まる結合代数を用意する.

$$\bullet \{b_r, c_s\} = \frac{\delta_{r+s, 0}}{1+p^{|r|}}, \quad \bullet \{\bar{b}_r, \bar{c}_s\} = \frac{\delta_{r+s, 0}}{(1+p^{|r|})p^{|r|}} \quad (r, s \in \mathbb{Z}+1/2).$$

上に挙げた組み合わせ以外の生成元同士はみな反交換すると仮定する. 生成母関数  $b(p; z)$ ,  $c(p; z)$  を次で定める.

$$\bullet b(p; z) := \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \bar{b}_r p^{|r|} z^{r-1/2} + \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r z^{-r-1/2},$$

$$\bullet c(p; z) := \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \bar{c}_r p^{|r|} z^{r-1/2} + \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} c_r z^{-r-1/2}.$$

正規順序積  $:\bullet:$  は標準的な流儀と同様に定める :

$$\bullet : b_r c_s := \begin{cases} b_r c_s & (r < s), \\ -c_s b_r & (r \geq s), \end{cases} \quad \bullet : \bar{b}_r \bar{c}_s := \begin{cases} \bar{b}_r \bar{c}_s & (r < s), \\ -\bar{c}_s \bar{b}_r & (r \geq s). \end{cases}$$

定理.  $b(p; z)c(p; w) = : b(p; z)c(p; w) : + \frac{1}{z} f\left(\frac{w}{z}\right)$  が成り立つ. ここで

$$\bullet f(x) := \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} \frac{x^{r-1/2}}{1+p^r} \in \mathbb{C}[[p^{1/2}]][[x, x^{-1}]].$$

$q \in \mathbb{C}^\times$  を  $|q| < 1$  なる複素数とし,  $q$ -無限積を  $(x; q)_\infty := \prod_{n \geq 0} (1 - xq^n)$  ( $x \in \mathbb{C}$ ) と定め, テータ関数  $\Theta_q(x)$ ,  $\theta_q(x)$  ( $x \in \mathbb{C}^\times$ ) を次で定める.

$$\bullet \Theta_q(x) := (q; q)_\infty (x; q)_\infty (qx^{-1}; q)_\infty, \quad \bullet \theta_q(x) := (q; q)_\infty (-q^{1/2}x; q)_\infty (-q^{1/2}x^{-1}; q)_\infty.$$

$f(x)$  は  $|p| < 1$ ,  $|p| < |x| < 1$  において  $\frac{(p; p)_\infty^2}{(-p^{1/2}; p)_\infty^2} \frac{\theta_p(x)}{\Theta_p(x)}$  に収束する.

上のフェルミオンは  $p^{1/2} \rightarrow 0$  とすることで通常の  $b$ - $c$  系に退化する.

### 量子トールス代数の楕円化

中津-高崎 [NT1], [NT2] では, 量子トールス代数と呼ばれる代数のフェルミオンによる実現が分配関数の計算において用いられている. 上で定義したフェルミオンの楕円化を使うことで, 以下に述べるような量子トールス代数のある楕円化が得られる.

定理 (量子トールス代数の楕円化).  $q \in \mathbb{C}^\times$  を  $|q| < 1$  である複素数とする.

$$\bullet V^{(k)}(p; z) := : b(p; q^{k/2}z)c(p; q^{-k/2}z) : \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とし, 展開  $V^{(k)}(p; z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} V_m^{(k)} q^{-k/2} z^{-m-1}$  によって  $V_m^{(k)}$  ( $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ) を定める. このとき次が成り立つ.

$$\bullet [V_m^{(k)}, V_n^{(\ell)}] = \left( q^{\frac{\ell m - kn}{2}} - q^{-\frac{\ell m - kn}{2}} \right) \left( V_{m+n}^{(k+\ell)} - q^{k+\ell} \frac{(p; p)_\infty^2}{(-p^{1/2}; p)_\infty^2} \frac{\theta_p(q^{k+\ell})}{\Theta_p(q^{k+\ell})} \delta_{m+n, 0} \right).$$

## 参考文献

- [IKY] A. Iqbal, C. Kozcaz, Shing-Tung Yau. *Elliptic Virasoro Conformal Blocks*. arXiv:1511.00458 (2015).
- [N] F. Nieri. *An elliptic Virasoro symmetry in 6d*. arXiv:1511.00574 (2015).
- [NT1] T. Nakatsu, K. Takasaki. *Melting crystal, quantum torus and Toda hierarchy*. Communications in mathematical physics 285.2 (2009): 445-468.
- [NT2] K. Takasaki, T. Nakatsu. *Open string amplitudes of closed topological vertex*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 49.2 (2015): 025201.

## Ding-Iohara-Miki 代数のレベル $N$ 表現の特異ベクトル

大久保勇輔 (ロシア国立研究大学高等経済学院 数学学部)

2009 年に AGT 対応が発見されて以来, その  $q$ -変形版の対応において Ding-Iohara-Miki 代数 (DIM 代数) と呼ばれるホップ代数 (量子トロイダル  $\mathfrak{gl}_1$  代数や楕円 Hall 代数とも呼ばれる) が重要な役割を果たしてきた. 特に DIM 代数のレベル  $N$  表現からはある代数  $\mathcal{A}(N)$  を定義することができ, この代数と K 理論的 Nekrasov 分配関数が深い関係にある. また代数  $\mathcal{A}(N)$  からは, ある Heisenberg 代数の寄与を取り除くことによって変形  $W$  代数が表れる. 本公演では, この代数  $\mathcal{A}(N)$  の特異ベクトルと一般化された Macdonald 対称関数 ( $q$ -変形版の AFLT 基底, または固定点基底) が一致しているということを説明する [1].

DIM 代数のレベル  $N$  表現 ( $N \in \mathbb{N}$ ) では, 以下のような交換関係

$$[a_n^{(i)}, a_m^{(j)}] = n \frac{1 - q^{|m|}}{1 - t^{|m|}} \delta_{n+m,0} \delta_{i,j}, \quad [a_n^{(i)}, Q^{(j)}] = \delta_{n,0} \delta_{i,j}$$

を持つ生成元  $a_n^{(i)}$  ( $n \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, N$ ) と  $Q^{(i)}$  によって生成される Heisenberg 代数を用いる. ここに  $q, t = q^\beta$  は generic な複素パラメータとする. この Heisenberg 代数を用いて頂点作用素  $\eta^{(i)}(z)$  と  $\varphi^{(i)}(z)$  を

$$\begin{aligned} \eta^{(i)}(z) &:= \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - t^{-n}}{n} z^n a_{-n}^{(i)} \right) \exp \left( - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - t^n)}{n} z^{-n} a_n^{(i)} \right), \\ \varphi^{(i)}(z) &:= \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - t^{-n}}{n} (1 - p^{-n}) z^n a_{-n}^{(i)} \right). \end{aligned}$$

と定義する ( $p := q/t$ ). さらに生成元  $X^{(i)}(z) = \sum_n X_n^{(i)} z^{-n}$  を

$$X^{(1)}(z) := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq N} : \Lambda_{j_1}(z) \cdots \Lambda_{j_i}(p^{i-1}z) :,$$

$$\Lambda^i(z) := \varphi^{(1)}(z) \varphi^{(2)}(z p^{-\frac{1}{2}}) \cdots \varphi^{(i-1)}(z p^{-\frac{i-2}{2}}) \eta^{(i)}(z p^{-\frac{i-1}{2}}) U_i, \quad U_i := q^{\sqrt{\beta} a_0^{(i)}} p^{-\frac{N+1}{2} + i}$$

によって定義する. ここに  $: \ :$  は通常の正規順序化の記号を表す. 真空ベクトル  $|0\rangle$  を  $a_n^{(i)} |0\rangle = 0$  ( $n \geq 0, \forall i$ ) を満たす最高ウェイトベクトルとし,  $N$  個のパラメータの組  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)$  (ただし  $u_i = q^{\sqrt{\beta} w_i} p^{-\frac{N+1}{2} + i}$ ) に対して  $|\vec{u}\rangle := e^{\sum_{i=1}^N u_i Q^{(i)}} |0\rangle$  と定める. このとき  $U_i |\vec{u}\rangle = u_i |\vec{u}\rangle$  を満たす. また  $|\vec{u}\rangle$  によって生成される Fock 空間を  $\mathcal{F}_{\vec{u}}$  と書くことにする. 冒頭で述べた代数  $\mathcal{A}(N)$  は, この Fock 空間  $\mathcal{F}_{\vec{u}}$  上の準同型写像の成す代数 (のある完備化) の部分代数  $\langle X_n^{(i)} | n \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, N \rangle$  として定義される. この代数  $\mathcal{A}(N)$  の生成元  $X^{(i)}(z)$  は [2] によって導入されたもので, 5 次元 AGT 予想で重要な働きをする.

一般化 Macdonald 関数とは演算子  $X_0^{(1)}$  の固有関数のことであり, その固有値と固有関数は  $N$  個のパーティションの組  $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)})$  を用いてパラメトライズされる. そして固有値  $\epsilon_{\vec{\lambda}} = \sum_{i=1}^N u_i (1 + (t-1) \sum_{k \geq 1} (1 - q^{\lambda_k^{(i)}}) t^{-i})$  に対応する一般化 Macdonald 関数を  $|P_{\vec{\lambda}}\rangle$  と書く:

$$X_0^{(1)} |P_{\vec{\lambda}}\rangle = \epsilon_{\vec{\lambda}} |P_{\vec{\lambda}}\rangle.$$



( $|P_{\vec{\lambda}}\rangle$ ) の規格化は本公演においては定める必要がないので省略する.)

一方, 代数  $\mathcal{A}(N)$  の特異ベクトルは遮蔽作用素

$$S^{(i)}(z) := \bullet \exp \left( \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{(i)}}{1 - q^n} \right) \bullet e^{\sqrt{\beta} Q_{\alpha}^{(i)}} z^{\sqrt{\beta} \alpha_0^{(i)}}$$

によって得ることができる. ここに,  $i = 1, \dots, N-1$  に対して

$$\alpha_n^{(i)} := \frac{1 - t^n}{n} \left( p^{\frac{1}{2}(i n - |n|)} a_n^{(i)} - p^{\frac{i n}{2}} a_n^{(i+1)} \right), \quad Q_{\alpha}^{(i)} := Q^{(i+1)} - Q^{(i)} \quad (n \neq 0),$$

$\alpha_0 := a_0^{(i+1)} - a_0^{(i)}$  とした. この遮蔽作用素は通常の変形 W 代数の遮蔽作用素と一致するものであり, 積分  $\oint dz S^{(i)}(z)$  は全ての生成元  $X_n^{(i)}$  と可換である. またこの遮蔽作用素を用いて代数  $\mathcal{A}(N)$  の Kac 行列式も証明することができる. さらに

$$|\chi_{\vec{r}, \vec{s}}\rangle := \oint \prod_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^{r_k} dz_i^{(k)} S^{(N-1)}(z_1^{(N-1)}) \cdots S^{(N-1)}(z_{r_{N-1}}^{(N-1)}) \cdots S^{(1)}(z_1^{(1)}) \cdots S^{(1)}(z_{r_1}^{(1)}) |\vec{v}\rangle,$$

は代数  $\mathcal{A}(N)$  の特異ベクトルとなる. ここにパラメータの組  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_N)$  は  $v_i = q^{s_i} t^{-r_{i-1} + r_i} v_{i+1}$  ( $\forall i$ ) を満たすものとする. このとき特異ベクトル  $|\chi_{\vec{r}, \vec{s}}\rangle$  は  $u_i = q^{s_i} t^{-r_i + r_{i+1}} u_{i+1}$  を満たす Fock 空間  $\mathcal{F}_{\vec{u}}$  上に存在している. (ただし  $r_0 = r_N = 0$  とする.)

この特異ベクトルが一般化 Macdonald 関数に一致するという発見が本公演の主結果である. その主結果を記述する為に以下の記号を用意する. まずパーティション  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  と非負整数  $n < \ell(\lambda)$  に対して,

$$T(\lambda; n) := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad R(\lambda; n) := (\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)})$$

とおく. ただし,  $n \geq \ell(\lambda)$  のときには  $T(\lambda; n) := \lambda$ ,  $R(\lambda; n) := \emptyset$  とする. また  $n$  個の整数の組  $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$  に対して,  $(n-1)$  個の整数の組  $\vec{k}^* := (k_1^*, \dots, k_{n-1}^*) := (k_1, \dots, k_{n-1})$  と定義し,  $k_n^* = 0$  と置くことにする. これらの記号を用いて,  $(N-1)$  個の非負整数の組  $\vec{r} = (r_1, \dots, r_{N-1})$  と  $\vec{s} = (s_1, \dots, s_{N-1})$  に対して,  $N$  個のパーティションの組  $\Theta_{\vec{r}, \vec{s}} = (\theta_{\vec{r}, \vec{s}}^{(1)}, \dots, \theta_{\vec{r}, \vec{s}}^{(N)})$  を  $\Theta_{(r_1), (s_1)} := (\emptyset, (s_1^1))$  と

$$\Theta_{\vec{r}, \vec{s}} := \left( \theta_{\vec{r}^*, \vec{s}^*}^{(1)}, \dots, \theta_{\vec{r}^*, \vec{s}^*}^{(N-2)}, R(\theta_{\vec{r}^*, \vec{s}^*}^{(N-1)}; r_{N-1}), T(\theta_{\vec{r}^*, \vec{s}^*}^{(N-1)}; r_{N-1}) + ((s_{N-1})^{r_{N-1}}) \right)$$

によって帰納的に定義する. ( $N \geq 2$  の場合のみを扱う.)

**Theorem**  $\vec{s}$  を  $(N-1)$  個の正整数の組,  $\vec{r}$  を  $(N-1)$  個の非負整数の組とする. パラメータ  $u_i$  が全ての番号  $i$  に対して,  $u_i = q^{s_i} t^{-r_i + r_{i+1}} u_{i+1}$  を満たすとき ( $r_N := 0$ ), 特異ベクトル  $|\chi_{\vec{r}, \vec{s}}\rangle$  は一般化 Macdonald 関数  $|P_{\Theta_{\vec{r}, \vec{s}}}\rangle$  に一致する. つまり

$$|\chi_{\vec{r}, \vec{s}}\rangle \propto |P_{\Theta_{\vec{r}, \vec{s}}}\rangle.$$

この定理は従来から知られている変形 W 代数の特異ベクトルと通常の Macdonald 多項式との一致 [3] の一般化になっている.

## 参考文献

- [1] Y. Ohkubo, arXiv:1706.02243 [math-ph].
- [2] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi, and S. Yanagida, *RIMS kokyuroku* **1765** (2011) 12–32, arXiv:1106.4088 [math-ph].
- [3] H. Awata, H. Kubo, S. Odake, and J. Shiraishi, *Commun. Math. Phys.* **179** (1996) 401–416

# On Tensor Product Decomposition of Positive Representations

Ivan IP (Kyoto University)\*

## 1. Positive Representations

The notion of *positive representations* was introduced in [1] and constructed in [2, 3] as a new research program devoted to the representation theory of split real quantum groups  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$  and its modular double. The representation  $\mathcal{P}_\lambda$  is characterized by the fact that each generator  $\{E_i, F_i, K_i\}_{i \in I}$  of  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  is represented by self-adjoint operator on a Hilbert space. This generalizes the construction by Tschner *et al.* [6] on  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$  from the physics point of view. It was known that for any  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ,  $\mathcal{P}_\lambda$  carries a braiding giving by the universal  $R$  operator. In the case of  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ , it was shown in [6] that the positive representation is closed under taking tensor product

$$\mathcal{P}_\alpha \otimes \mathcal{P}_\beta \simeq \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} \mathcal{P}_\gamma d\mu(\gamma), \quad (1)$$

hence together this gives a new braided tensor category, which provides potential applications to geometric invariants. A long standing conjecture is whether  $\mathcal{P}_\lambda$  is closed under taking tensor product in higher rank.

## 2. Cluster Realization of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

In the MSJ special invited lecture of Spring 2017, we describe a new cluster realization of the positive representations [5]. Namely, via the positive representations, we found an embedding of  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  into a quantum torus algebra  $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ , which can be realized as certain quiver  $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$  associated to the triangulation of a disk with 1 puncture and 2 marked points. Moreover, embedding of the generators of  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  are telescoping sums which can be represented by *paths* on the quiver. Furthermore, the universal  $\mathcal{R}$ -matrix can be decomposed into 4 factors  $\mathcal{R}_i$  such that each of them is realized as a flip of triangulation, and the action of  $\mathcal{R}$  becomes a half-Dehn twist. Although the construction is for  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ , it also works with the split-real case and is compatible with the modular double as well.

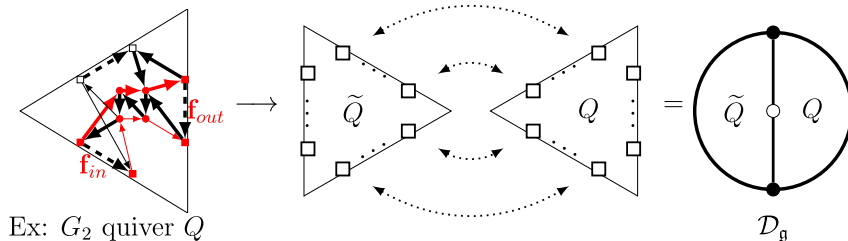


Figure 1: Amalgamating the quivers  $Q$  and  $\tilde{Q}$  (mirror image) giving the  $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ -quiver.

This work was supported by KAKENHI JP16K17571.

2010 Mathematics Subject Classification: 81R50, 17B37.

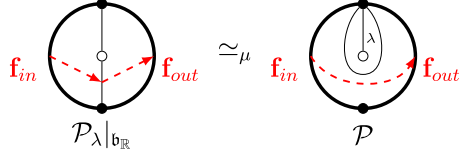
Keywords: positive representations, quantum cluster algebra.

\*e-mail: [ivan.ip@math.kyoto-u.ac.jp](mailto:ivan.ip@math.kyoto-u.ac.jp)

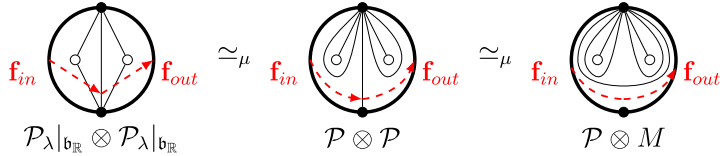
web: <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ivan.ip/>

### 3. Tensor product decomposition

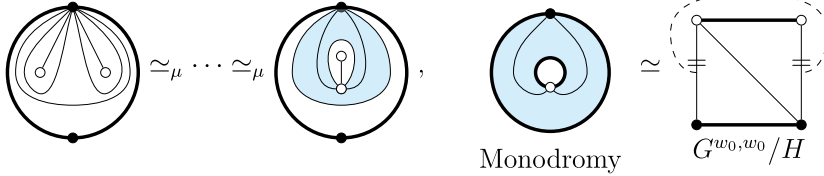
Using the cluster realization, one can study the problem of tensor product decomposition by flipping the triangulation which corresponds to mutating the quiver diagrams using  $\mathcal{R}_i$ . In [4], using techniques from  $C^*$ -algebra, we show that when we restrict to the Borel part,  $\mathcal{P} := \mathcal{P}_\lambda|_{\mathfrak{b}_\mathbb{R}}$  is independent of  $\lambda$  and is closed under taking tensor product. This can now be realized by a flip of triangulation creating a self-folded triangle:



Then the tensor product decomposition of  $\mathcal{P}_\lambda$  restricted to the Borel part can be easily described by 3 flippings of triangulation, thus providing a simpler proof than [4].



For the full decomposition, we study the actions of the Positive Casimirs  $\mathbf{C}_i$ , which are represented by monodromies around the punctures. We can further mutate the above diagram such that the monodromy around the punctures becomes a triangulation of a cylinder, which represents the cluster structure on the big Bruhat cell  $G^{w_0, w_0}/H$ :



In type  $A_n$ , this can be further reduced to cluster structure on the Coxeter cell  $G^{c, \bar{c}}/H$ , and Schrader-Shapiro show that in this case the Positive Casimirs  $\Delta(\mathbf{C}_i)$  in  $\mathcal{P}_\alpha \otimes \mathcal{P}_\beta$  become the standard  $q$ -Toda Hamiltonians which are expected to be simultaneously diagonalizable by the  $q$ -Whittaker functions. This gives us the tensor product decomposition in type  $A_n$ , and begins our journey to solve the long standing conjecture.

### References

- [1] I. Frenkel, I. Ip, *Positive representations of split real quantum groups and future perspectives*, Int. Math. Res. Notices, **2014** (8), 2126-2164, (2014)
- [2] I. Ip, *Positive representations of split real simply-laced quantum groups*, arXiv:1203.2018, (2012)
- [3] I. Ip, *Positive representations of split real non-simply-laced quantum groups*, J. Alg (2015) **425**, 245-276, (2015)
- [4] I. Ip, *On tensor products of positive representations of split real quantum Borel subalgebra  $\mathcal{U}_{q\bar{q}}(\mathfrak{b}_\mathbb{R})$* , Trans. Amer. Math. Soc., (to appear), (2016)
- [5] I. Ip, *Cluster realization of  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  and factorization of universal  $\mathcal{R}$ -matrix*, arXiv:1612.05641 (2016)
- [6] B. Ponsot, J. Teschner, *Clebsch-Gordan and Racah-Wigner coefficients for a continuous series of representations of  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$* , Comm. Math. Phys., **224**, 613-655, (2001)

## 楕円量子群と楕円重み関数

今野 均 (東京海洋大学 学術研究院)<sup>1</sup>

重み関数とは,  $q$ -KZ 方程式の  $q$ -超幾何積分分解の構成要素の 1 つであり, 解のテンソル構造を担う部分であると同時に,  $q$ -差分捻れ de Rham コホモロジーの基底ともなる重要なパーツである. 三角関数型  $q$ -KZ 方程式の  $q$ -超幾何積分分解の研究は, Tarasov-Varchenko([1] 参照) や松尾 [2] により  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  型高レベル表現の場合が, Tarasov-Varchenko や三町 [3] により  $\widehat{\mathfrak{sl}}_N$  型レベル 1 表現の場合が成され, 重み関数の明示式が得られている. 重み関数は最近, Varchenko ら [1, 4] によって, Maulik-Okounkov[5] らが定式化した stable envelopes(安定包絡射) と同一視できることが示され, 再び注目を集めている.

本講演では, まず, 楕円量子群  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$  のレベル 1 表現の頂点作用素  $\Phi_\mu(z)$  ( $\mu = 1, \dots, N$ ) を用いて, 楕円関数型の重み関数が系統的に導出できることを示す. 次に, 楕円重み関数の性質を議論する.

結果として得られた  $\widehat{\mathfrak{sl}}_N$  型の楕円重み関数は次のようになる. これは, [3, 1] における三角関数型のものの楕円関数的かつダイナミカルな拡張になっている.  $\epsilon_j$  を  $\mathbb{R}^N$  の標準基底,  $\bar{\epsilon}_j = \epsilon_j - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \epsilon_k$ ,  $\langle \bar{\epsilon}_j, h_{\bar{\epsilon}_k} \rangle = \delta_{j,k} - \frac{1}{N}$ ,  $h_{j,k} = h_{\bar{\epsilon}_j} - h_{\bar{\epsilon}_k}$  とする.

### 定理

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_I(t, z, \Pi) &= \text{Sym}_{t^{(1)}} \cdots \text{Sym}_{t^{(N-1)}} \widetilde{U}_I(t, z, \Pi), \\ \widetilde{U}_I(t, z, \Pi) &= \prod_{l=1}^{N-1} \prod_{a=1}^{\lambda^{(l)}} \left( \frac{[v_b^{(l+1)} - v_a^{(l)} + (P+h)_{\mu_s, l+1} - C_{\mu_s, l+1} - \frac{1}{2}][1]}{[v_b^{(l+1)} - v_a^{(l)} + \frac{1}{2}][(P+h)_{\mu_s, l+1} - C_{\mu_s, l+1}(s)]} \Big|_{i_s^{(N)} = i_b^{(l+1)} = i_a^{(l)}} \right) \\ &\quad \times \prod_{\substack{b=1 \\ i_b^{(l+1)} > i_a^{(l)}}}^{\lambda^{(l+1)}} \frac{[v_b^{(l+1)} - v_a^{(l)} - \frac{1}{2}]}{[v_b^{(l+1)} - v_a^{(l)} + \frac{1}{2}]} \prod_{b=a+1}^{\lambda^{(l)}} \frac{[v_a^{(l)} - v_b^{(l)} - 1]}{[v_a^{(l)} - v_b^{(l)}]}. \end{aligned}$$

ここで,  $[u]$  は Jacobi の odd テータ関数.  $t_a^{(l)} = q^{2v_a^{(l)}}$  ( $l = 1, \dots, N-1$ ) たちは積分変数,  $z_k = q^{2u_k}$  は頂点作用素の引数で,  $v_a^{(N)} = u_a$  とおいている. また,  $\Pi = q^{2(P+h)}$  はダイナミカル変数であり,  $C_{\mu_s, l+1}(s) = \sum_{j=s+1}^n \langle \bar{\epsilon}_{\mu_j}, h_{\mu_s, l+1} \rangle$  はそのシフトを表す. 積の組み合わせ論的構造は, 次で定める分割によって指定される.

- 頂点作用素の  $n$  点積  $\Phi_{\mu_1}(z_1) \cdots \Phi_{\mu_n}(z_n)$  に対して, 添字集合  $I_l = \{ i \in [1, n] \mid \mu_i = l \}$  ( $l = 1, \dots, N$ ) を考えると,  $I = (I_1, \dots, I_N)$  は  $[1, n] = \{1, \dots, n\}$  の分割となる. この分割  $I$  をしばしば  $I_{\mu_1, \dots, \mu_n}$  と表す. また,  $\lambda_l = |I_l|$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  とおく.

<sup>1</sup>本研究は科研費(基盤研究(C)17K05195)の助成を受けたものである.

- $\lambda^{(l)} := \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$ ,  $I^{(l)} := I_1 \cup \cdots \cup I_l = \{i_1^{(l)} < \cdots < i_{\lambda^{(l)}}^{(l)}\}$  とおく.

楕円重み関数の主要な性質は次の4点である.  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  に対して,  $\mathcal{I}_\lambda$  を  $|I_l| = \lambda_l$  なる分割  $I = (I_1, \dots, I_N)$  の全体とする.  $\mathcal{I}_\lambda$  に半順序  $\leq$  を入れておく.

- 1) **三角性** : 特殊化  $t = z_I$ , 即ち  $v_a^{(l)} = u_{i_a^{(l)}} (l = 1, \dots, N-1, a = 1, \dots, \lambda^{(l)})$  に対して,  $I \leq J$  でなければ,  $\widetilde{W}_J(z_I, z, \Pi) = 0$ .
- 2) **変換性** :  $\widehat{\mathfrak{sl}}_N$  型のダイナミカル楕円  $R$  行列を  $\bar{R}(z, \Pi)$  として

$$\begin{aligned} & \widetilde{W}_{I \dots \mu_{i+1} \mu_i \dots}(t, \dots, z_{i+1}, z_i, \dots, \Pi) \\ &= \sum_{\mu'_i, \mu'_{i+1}} \bar{R}(z_i/z_{i+1}, \Pi q^{-2 \sum_{j=i}^n \langle \bar{\epsilon}_{\mu_j}, h \rangle})_{\mu_i \mu_{i+1}}^{\mu'_i \mu'_{i+1}} \widetilde{W}_{I \dots \mu'_i \mu'_{i+1} \dots}(t, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots, \Pi). \end{aligned}$$

- 3) **直交性** :  $J, K \in \mathcal{I}_\lambda$  に対して,

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_\lambda} \frac{\widetilde{W}_J(z_I, z, \Pi^{-1}) Q(z_I) \widetilde{W}_{\sigma_0(K)}(z_I, \sigma_0(z), \Pi)}{R(z_I)} = \delta_{J,K},$$

ここで,  $\sigma_0$  は  $\mathfrak{S}_n$  の最長元,

$$Q(z_I) = \prod_{1 \leq k < l \leq N} \prod_{a \in I_k} \prod_{b \in I_l} [u_a - u_b + 1], \quad R(z_I) = \prod_{1 \leq k < l \leq N} \prod_{a \in I_k} \prod_{b \in I_l} [u_a - u_b].$$

#### 4) Shuffle 代数構造

講演ではさらに, 楕円  $q$ -KZ 方程式の (形式的) 楕円超幾何積分解についても報告する. また, 同変楕円コホモロジーに付随する楕円安定包絡射との関連についても議論する.

## 参考文献

- [1] R.Rimányi, V.Tarasov and A.Varchenko, Trigonometric Weight Functions as  $K$ -theoretic Stable Envelope Maps for the Cotangent Bundle of a Flag Variety, *J.Geom.Phys.*, **94** (2015) 81–119.
- [2] A.Matsuo, Quantum Algebra Structure of Certain Jackson Integrals, *Comm.Math.Phys.* **157** (1993) 479–498.
- [3] K.Mimachi, A Solution to Quantum Knizhnik-Zamolodchikov Equations and Its Application to Eigenvalue Problems of the Macdonald Type, *Duke Math.J.* **85** (1996) 635–658.
- [4] V.Gorbounov, R.Rimányi, V.Tarasov and A.Varchenko, Cohomology of the Cotangent Bundle of a Flag Variety as a Yangian Bethe Algebra, *J.Geom.Phys.*, **74** (2013) 56–86.
- [5] D. Maulik and A. Okounkov, Quantum Groups and Quantum Cohomology, Preprint 2012, arXiv:1211.1287.

## 楕円量子群の Gelfand-Tsetlin 基底上の有限次元表現

今野 均 (東京海洋大学 学術研究院)<sup>1</sup>

Maulik-Okounkov は、籠多様体のトーラス同変コホモロジー上に Yangian の幾何学的表現の構成を行ったが、ここでは、stable envelopes(安定包絡射)と呼ばれる、トーラス作用に関する固定点集合の同変コホモロジーから籠多様体の同変コホモロジーへの射が重要な役割を果たした。Varchenko たち [1] は、重み関数と安定包絡射とが同一視できることを見出し、その対応を用いて、Yangian  $Y(\mathfrak{gl}_N)$  やアフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$  の Gelfand-Tsetlin(GT) 基底上の有限次元表現を同変コホモロジーや同変 K-理論上の幾何学的表現に持ち上げることに成功した。一方、Aganagic-Okounkov[2] により、籠多様体の同変楕円コホモロジーに付随する楕円安定包絡射が定式化され、楕円量子群の幾何学的表現の構成を目指す気運が高まっている。

本講演では、楕円量子群  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$  のベクトル表現 (evaluation 表現)  $n$  個のテンソル積空間の基底として、GT 基底を構成し、その上に有限次元表現を構成する。得られた表現は、前講演で導入した  $[1, n]$  の分割を用いて組み合わせ論的に記述され、その三角関数型かつ非ダイナミカル型への極限は、Vasserot[3] や中島 [4] による  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$  の同変 K-理論上の幾何学的表現に一致することが分かる。

**GT 基底の構成:**  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$  の GT 基底とは、 $L$  作用素をガウス分解した時の対角元が生成する可換部分代数 (GT 部分代数) の同時固有ベクトルがなす基底であり、次の構成が知られている [1]:  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$  のベクトル表現  $V_z$  の標準基底を  $v_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, N$ ) として、テンソル積空間  $V^{\otimes n} = V_{z_1} \otimes \dots \otimes V_{z_n}$  を考える。まず、ダイナミカル楕円  $R$  により、 $\mathfrak{S}_n$  の  $V^{\otimes n}$  上の実現  $\tilde{S}_i(P) := \mathcal{P}^{(i+1)} R^{(i+1)}(z_i/z_{i+1}, P + \sum_{j=1}^{i-1} h^{(j)}) s_i^z$  を得る。ここで、 $\mathcal{P} : v \otimes w \mapsto w \otimes v$ ,  $s_i^z : z_i \leftrightarrow z_{i+1}$ 。次いで、 $[1, n]$  の分割  $I = I_{\mu_1 \dots \mu_n} \in \mathcal{I}_\lambda$  に対して、 $V^{\otimes n}$  の標準基底を  $v_I := v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_n}$  とおく。この下で、GT 基底  $\{\xi_I\}_{I \in \mathcal{I}_\lambda}$  は  $\xi_{I^{max}} := v_{I^{max}}$ ,  $\xi_{s_i(I)} := \tilde{S}_i(P) \xi_I$  で定まる。ここで、 $I^{max} \equiv \underbrace{I_N \dots I_1}_{\lambda_N} \dots \underbrace{1 \dots 1}_{\lambda_1}$  は半順序  $\leq$  に関して最大の分割を表す。

### 定理

$U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$  の楕円カレント (生成元の母関数) を  $\psi_j^\pm(w), E_j(w), F_j(w)$  ( $j = 1, \dots, N-1$ ) とするとき、これらの GT 基底  $\{\xi_I\}_{I \in \mathcal{I}_\lambda}$  への作用は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \psi_j^\pm(w) \xi_I &= \prod_{a \in I_j} \frac{[u_a - v + 1]}{[u_a - v]} \Bigg|_{\pm} \prod_{b \in I_{j+1}} \frac{[u_b - v - 1]}{[u_b - v]} \Bigg|_{\pm} e^{-Q_{\alpha_j} \xi_I}, \\ E_j(w) \xi_I &= \sum_{i \in I_{j+1}} \delta(z_i/w) \prod_{\substack{k \in I_{j+1} \\ \neq i}} \frac{[u_i - u_k + 1]}{[u_i - u_k]} e^{-Q_{\alpha_j} \xi_{I'}}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>本研究は科研費 (基盤研究 (C)17K05195) の助成を受けたものである。

$$F_j(w)\xi_I = \sum_{i \in I_j} \delta(z_i/w) \prod_{\substack{k \in I_j \\ k \neq i}} \frac{[u_k - u_i + 1]}{[u_k - u_i]} \xi_{I' i}.$$

ここで,  $w = q^{2v}$ ,  $z_i = q^{2u_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) とおいた.  $|\pm$  はテータ関数の (無限積表示の) 展開方向  $(z_b/w)^{\pm 1}$  を指定する. また,  $I = (I_1, \dots, I_N)$  に対して

$$\begin{aligned} (I^{i'})_j &= I_j \cup \{i\}, & (I^{i'})_{j+1} &= I_{j+1} - \{i\}, & (I^{i'})_k &= I_k \quad (k \neq j, j+1), \\ (I^i)_j &= I_j - \{i\}, & (I^i)_{j+1} &= I_{j+1} \cup \{i\}, & (I^i)_k &= I_k \quad (k \neq j, j+1) \end{aligned}$$

と定める.

### 議論 :

前講演で与えた楕円重み関数は, 三角関数型かつ非ダイナミカル極限で [1] の重み関数に一致し, その性質, 特に, 三角性や変換性, は楕円安定包絡射の性質に合致する. また,  $[1, n]$  の分割  $I \in \mathcal{I}_\lambda$  は, 一般旗多様体  $Fl_\lambda$  の座標付けを与え, 余接束  $T^*Fl_\lambda$  は  $A_{N-1}$  型旗多様体の実現を与えることに注意すると, 次の予想を得る.

### 予想 1.

$\mathfrak{sl}_N$  型楕円重み関数は,  $A_{N-1}$  型旗多様体の同変楕円コホモロジーに付随する楕円安定包絡射に同一視される.

さらに, 注目すべきことに,  $V^{\otimes n}$  の標準基底から GT 基底への変換行列は, 楕円重み関数の特殊化  $\widetilde{W}_j(z_I, z, \Pi)$  で与えられることが分かり, 予想 1 の下でこの描像は, Varchenko らによる量子群の幾何学的表現の構成プログラムに合致する. これより, 次の予想を得る.

### 予想 2.

本講演で構成した  $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$  の GT 基底上の有限次元表現は,  $A_{N-1}$  型旗多様体の同変楕円コホモロジー上の幾何学的表現を与える.

(注) GT 基底上の表現と幾何学的表現との対応は [5] などでも指摘されている.

## 参考文献

- [1] R.Rimányi, V.Tarasov and A.Varchenko, Trigonometric Weight Functions as  $K$ -theoretic Stable Envelope Maps for the Cotangent Bundle of a Flag Variety, *J.Geom.Phys.*, **94** (2015) 81–119.
- [2] M. Aganagic and A. Okounkov, Elliptic Stable Envelopes, Preprint 2016, arXiv:1604.00423.
- [3] E.Vasserot, Affine Quantum Groups and Equivariant  $K$ -theory, *Trans.Groups* **3** (1998) 269–299.
- [4] H.Nakajima, Quiver Varieties and Finite Dimensional Representations of Quantum Affine Algebras, *J.AMS.* **14** (2001) 145–238.
- [5] B.Feigin, M.Finkelberg, I.Frenkel and L.Rybnikov, Gelfand-Tsetlin algebras and cohomology rings of Laumon spaces, *Sel.Math.New Sec.* **17** (2011) 337–361.

# Ding-Iohara-Miki 代数の表現論

## インタートワイナーを中心に

栗田英資 (名古屋大学)\*

### 1. 始めに

Ding-Iohara-Miki (丁-庵原-三木) 代数 [1, 2] は、微分作用素の代数 [3, 4] の拡張であり、 $gl(1)$  タイプの量子トロイダル代数 [5] で、2つの方向のアフィン性から2次元の中心を持つ。 $q$ -ピラソロ代数 [6] や  $q$ - $W_N$  代数 [7, 8] 等の複雑な代数もその特殊な場合として内包し、多くの対称性を持ち、又ホップ代数でもあり、非常に性質の良い代数である。更に、ゲージ理論のネクラソフ関数 [9] とも関係しており [10] 非常に興味深い。ここではその幾つかを紹介する。

### 2. 丁-庵原-三木代数

#### 2.1. $W_{1+\infty}$ 代数

丁-庵原-三木代数 [1, 2] は、微分作用素の代数 [3, 4] の拡張であるので、先ず変数  $z \in \mathbb{C}$  に関する微分作用素  $D := z \frac{d}{dz}$  を考える。 $z$  と順番を入れ換えると  $D^k z^n = z^n (D+n)^k$  となる。 $W_{1+\infty}$  代数は<sup>1</sup>、微分作用素  $z^n D^k$  ( $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) の生成する無限次元リー代数を中心拡大したものである。中心拡大のおまじないを  $W(*)$  と書くことにすると、生成元  $W(z^n D^k)$  ( $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) 間の関係は

$$[W(z^n D^k), W(z^m D^\ell)] = W([z^n D^k, z^m D^\ell]) + c \psi_{n,m}^{k,\ell} \delta_{n+m,0}, \quad (1)$$

$$\psi_{n,m}^{k,\ell} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n (-j)^k (n-j)^\ell, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -\sum_{j=1}^m (-j)^\ell (n-j)^k, & n < 0 \end{cases} \quad (2)$$

で与えられる。右辺第一項目は多少複雑である。 $c \in \mathbb{C}$  は中心で、生成元の再定義で吸収されないような非自明なものは1次元分しかないことが知られている。

#### 2.2. $q$ -変形とダブル化

ここでパラメータ  $q \in \mathbb{C}$  を導入し微分作用素  $D^k$  の母関数  $q^D$  つまり差分作用素を考える。 $z$  と順番を入れ換えると  $q^D z = z q^D$  となるため、微分作用素  $D$  とは異なり、 $q^D$  と  $z$  は対等な関係になっている。 $W_{1+\infty}$  代数をその生成元の母関数  $W(z^n q^{kD})$  で表すと微分作用素の場合の様な複雑さは無くなり、

$$[W(z^n q^{kD}), W(z^m q^{\ell D})] = (q^{mk} - q^{n\ell}) W(z^{n+m} q^{(k+\ell)D}) + c \delta_{n+m,0} \frac{q^{mk} - q^{n\ell}}{1 - q^{k+\ell}} \quad (3)$$

本研究は科研費(課題番号:24540210,17K05275)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 81R10,81T13,33D45

キーワード: ピラソロ代数, AGT 関係, ネクラソフ関数, マクドナルド関数

\* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町 名古屋大学 大学院多元数理科学研究科

e-mail: awata@math.nagoya-u.ac.jp

web: <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~awata/>

<sup>1</sup>  $1+\infty$  の  $1+$  は  $W_\infty$  代数にハイゼンベルク代数を付け加えたことを意味する。



と簡潔に書ける。ここで、 $k+l \neq 0$  の場合は、(3) の右辺第二項つまり中心拡大部分は  $k \neq 0$  の  $W(q^{kD})$  を  $W(q^{kD})^{\text{new}} = W(q^{kD}) + \frac{c}{1-q^k}$  と再定義することにより右辺第一項に吸収できる。しかし、 $k+l=0$  の場合は吸収できず、その場合の中心拡大部分は  $ncq^{-nk}\delta_{n+m,0}\delta_{k+l,0}$  となる。ただし今の場合、 $k+l=0$  は  $k=l=0$  を意味する。

$z$  と  $q^D$  は対等なので、その中  $n$  と  $k$  の範囲も対等にすることができる。 $W_{1+\infty}$  に  $k < 0$  の部分も加えて2倍にした様な  $W$  代数のダブル化を考えよう： $W_{1+\infty}^2 := \langle W(z^n q^{kD}) \rangle_{n,k \in \mathbb{Z}}$ . すると変数方向のアフィン性に由来する中心に差分作用素方向のアフィン性に由来する中心も新たに加わり

$$[W(z^n q^{kD}), W(z^m q^{\ell D})] = (q^{mk} - q^{n\ell})W(z^{n+m} q^{(k+\ell)D}) + q^{-nk}(nc_1 + kc_2)\delta_{m+n,0}\delta_{k+\ell,0} \quad (4)$$

の様に2次元の中心拡大となる ( $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ )。

### 2.3. 更に $t$ -変形 (丁-庵原-三木代数)

変数の数を増加し、独立な  $N$  変数  $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$  とその微分  $D_i := z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$  を考える。 $z_i$  達は独立なので  $q^{D_i} z_j = q^{\delta_{i,j}} z_j q^{D_i}$  である。単に  $W\left(\sum_{i=1}^N z_i q^{kD_i}\right)$  の様に  $N$  個の生成元を足し合わせるだけでは何も新しいことは起こらないが、新たなパラメータ  $t \in \mathbb{C}$  を導入し、

$$x_n^\pm := W\left(\sum_{i=1}^N \prod_j \frac{tz_i - z_j}{z_i - z_j} \cdot (q^{\pm 1} z_i)^n q^{\pm D_i}\right) \quad (5)$$

と変形すると新しい代数が得られ[2]、それが丁-庵原-三木代数である。代数の関係式は多少複雑なので、ここでは述べず後で母関数表示のものを紹介する。なお  $x_0^+$  がマクドナルド演算子そのものである事は重要である。 $k = \pm 1$  以外の生成元は  $k = \pm 1$  の生成元の交換関係で生成できる。 $W_{1+\infty}^2$  とは異なり、生成元の形は  $z_i$  と  $q^{D_i}$  に関して非対称だが、代数は  $z$  方向と  $q^D$  方向に関してやはり対称であるという非自明な事実が知られている[2]。

### 2.4. 丁-庵原-三木代数の母関数表示

丁-庵原-三木代数では、パラメータ  $z \in \mathbb{C}$  を導入して生成元の母関数  $x^\pm(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n^\pm z^{-n}$ ,  $\psi^\pm(z) = \sum_{\pm n \in \mathbb{N}} \psi_n^\pm z^{-n}$  を考えると、便利である。 $q, t \in \mathbb{C}$  に対し  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q, t)$  及び  $\tilde{\mathbb{F}} = \mathbb{Q}(q^{1/4}, t^{1/4})$  とする。又、

$$G^\pm(z) := (1 - q^{\pm 1}z)(1 - t^{\mp 1}z)(1 - (q/t)^{\mp 1}z) = -z^3 G^\mp(z^{-1}), \quad (6)$$

$$g(z) := \frac{G^+(z)}{G^-(z)} = g^{-1}(z^{-1}) \in \mathbb{Q}(q, t)[[z]] \quad (7)$$

とする。これは  $|z| < 1$  の場合は次の様にも書ける

$$G^\pm(z) = \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{z^n}{n} (q^{\pm n} + t^{\mp n} + (q/t)^{\mp n})\right), \quad (8)$$

$$g(z) = \exp\left(\sum_{n>0} \frac{z^n}{n} (1 - q^n)(1 - t^{-n})(1 - (q/t)^{-n})\right). \quad (9)$$

すると、丁-庵原-三木代数  $\mathcal{U}$  は生成元の母関数で表すと

$$\frac{g(\gamma^{-1}w/z)}{g(\gamma^{+1}w/z)}\psi^+(z)\psi^-(w) = \psi^-(w)\psi^+(z), \quad [\psi^\pm(z), \psi^\pm(w)] = 0, \quad (10)$$

$$g(\gamma^{\mp 1/2}w/z)^{\pm 1}\psi^+(z)x^\pm(w) = x^\pm(w)\psi^+(z), \quad (11)$$

$$\psi^-(z)x^\pm(w) = x^\pm(w)\psi^-(z)g(\gamma^{\mp 1/2}z/w)^{\pm 1}, \quad (12)$$

$$G^\pm(w/z)x^\pm(z)x^\pm(w) = x^\pm(w)x^\pm(z)\left(-\frac{w}{z}\right)^3 G^\pm(z/w), \quad (13)$$

$$[x^+(z), x^-(w)] = \frac{(1-q)(1-1/t)}{1-q/t} \left( \delta(\gamma^{-1}z/w)\psi^+(\gamma^{1/2}w) - \delta(\gamma z/w)\psi^-(\gamma^{-1/2}w) \right) \quad (14)$$

という  $\mathbb{F}$  上結合的代数となる。ここで、 $\delta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n$  である。

$\gamma^{\pm 1/2}$  と  $\psi_0^\pm$  が中心元である。  $M$  を  $\tilde{\mathbb{F}}$  上左  $\mathcal{U}$ -加群とし、任意の  $\alpha \in M$  に対し、

$$\gamma^{1/2}\alpha = (t/q)^{l_1/4}\alpha, \quad (\psi_0^+)^{-1}\psi_0^-\alpha = (t/q)^{l_2}\alpha \quad (15)$$

となる場合、  $M$  をレベル  $(l_1, l_2)$  と呼ぶ。

又、代数  $\mathcal{U}$  は、ホップ代数の構造を持ち [1]、特に余積  $\Delta$  は

$$\Delta(\gamma^{\pm 1/2}) = \gamma^{\pm 1/2} \otimes \gamma^{\pm 1/2}, \quad (16)$$

$$\Delta(x^+(z)) = x^+(z) \otimes 1 + \psi^-(\gamma_{(1)}^{1/2}z) \otimes x^+(\gamma_{(1)}z), \quad (17)$$

$$\Delta(x^-(z)) = x^-(\gamma_{(2)}z) \otimes \psi^+(\gamma_{(2)}^{1/2}z) + 1 \otimes x^-(z), \quad (18)$$

$$\Delta(\psi^\pm(z)) = \psi^\pm(\gamma_{(2)}^{\pm 1/2}z) \otimes \psi^\pm(\gamma_{(1)}^{\mp 1/2}z) \quad (19)$$

である。ここで  $\gamma_{(1)}^{\pm 1/2} = \gamma^{\pm 1/2} \otimes 1$  及び  $\gamma_{(2)}^{\pm 1/2} = 1 \otimes \gamma^{\pm 1/2}$  である。

### 3. Boson 表示

今までは  $W(*)$  というおまじないをした抽象的な代数の話だったが、これからは具体的な表現、特に Boson 表示の話をする。

#### 3.1. Boson 代数

まず、交換関係

$$[a_m, a_n] = m \frac{1 - q^{|m|}}{1 - t^{|m|}} \delta_{m+n,0} a_0 \quad (20)$$

で定義されるボゾン  $a_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) で生成される  $\mathbb{F}$  上ハイゼンベルク代数を  $\mathcal{H}$  とする。真空  $|0\rangle$  を  $a_n|0\rangle = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) で定義する。分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ , ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ ) に対し  $|a_\lambda\rangle = a_{-\lambda_1}a_{-\lambda_2}\cdots|0\rangle$  とする。  $(|a_\lambda\rangle)$  を基底に持つフォック空間を  $\mathcal{F}$  とする。

双対真空  $\langle 0|$  を  $\langle 0|a_n = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ ) で定義し、  $\langle a_\lambda| = \langle 0|a_{\lambda_1}a_{\lambda_2}\cdots$  とする。  $(\langle a_\lambda|)$  を基底に持つ双対フォック空間を  $\mathcal{F}^*$  とする。

#### 3.2. レベル $(1, N)$ 加群 $\mathcal{F}_u^{(1, N)}$

レベル  $(0, 0)$  の生成元  $x_0^+$  は有限変数のマクドナルド作用素に対応しているが、レベルを非自明にするには有限個の変数を無限個に拡張する方法が有効である。実際、無

限変数の場合はマクドナルド作用素のボゾン表示が存在し [8]、それがそのままレベル  $(1, 0)$  表現を与えてくれる。又、差分作用素方向に関しては、 $k = \pm 1$  という簡単な部分しか扱っていないので、差分作用素方向に対応する中心  $l_2$  の値を非自明にするのは比較的楽にできる。実際、 $x^+(z)$  と  $x^-(w)$  の交換関係に現れる  $\delta$  関数  $\delta(\gamma^{\pm 1}z/w)$  の変数のずれ  $\gamma^{\pm 1}$  の部分を用いて中心  $l_2$  の値を非自明にすることができる。例えば、

$$x^+(z) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\right) u z^{-N} (q/t)^{-N/2}, \quad (21)$$

$$x^-(z) := \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} (t/q)^{n/2} a_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^n}{n} (t/q)^{n/2} a_n z^{-n}\right) u^{-1} z^N (q/t)^{N/2}, \quad (22)$$

$$\psi^{\pm}(z) := \exp\left(\mp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{\pm n}}{n} (1-(t/q)^n) (q/t)^{n/4} a_{\pm n} z^{\mp n}\right) (q/t)^{\pm N/2} \quad (23)$$

とすると、 $u \in \mathbb{C}$  と  $N \in \mathbb{Z}$  に対し、 $\mathcal{F}$  に  $\widetilde{\mathbb{F}}$  上左  $\mathcal{U}$ -加群の構造が入る [11, 10]。ただし  $\gamma^{1/2} = (t/q)^{1/4}$  なので、これはレベル  $(1, N)$  加群であり、 $\mathcal{F}_u^{(1, N)}$  と書くことにする。又、後で述べるがレベル  $(0, 1)$  表現も知られている [12, 13]。

### 3.3. $q$ - $W_N$ 代数との関係

丁-庵原-三木代数は、レベル  $l_1$  か  $l_2$  が 2 以上の整数  $N$  の場合、 $q$ - $W_N$  代数 ( $q$ - $W_2$  代数 =  $q$ -ビラソロ代数) を内包している事が知られているが、それは、ボゾン表示すると理解しやすい。まず、 $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  に対しレベル  $(N, 0)$  表現は、レベル  $(1, 0)$  表現の  $N$  個のテンソル積、つまり  $N$  個の独立なボゾンを用いて構成できる。 $i$  番目のボゾンを用いた生成元を  $x^{+(i)}(z)$ 、 $\psi^{-(i)}(z)$  などと書くことにし、 $q$ - $W_N$  代数の場合と同様に量子三浦変換を用いて

$$T^i(z) := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq N} : \Lambda^{j_1}(z(q/t)^{\frac{1-i}{2}}) \Lambda^{j_2}(z(q/t)^{\frac{3-i}{2}}) \dots \Lambda^{j_i}(z(q/t)^{\frac{i-1}{2}}) :; \quad (24)$$

$$\Lambda^i(z) := \psi^{-(1)}(z) \psi^{-(2)}(z(q/t)^{-\frac{1}{2}}) \dots \psi^{-(i-1)}(z(q/t)^{\frac{2-i}{2}}) x^{+(i)}(z(q/t)^{\frac{1-i}{2}}) \quad (25)$$

とする。ここで  $: \dots :$  は正モードを右に持ってゆく正規順序の規則である。 $q$ - $W_N$  の場合は、スピンの最大の  $T^N(z)$  は id であるが、丁-庵原-三木代数の場合は、非自明な生成元となり、代数の交換関係の中に忍び込んでくる。そこで  $q$ - $W_N$  にとっては不必要なこの生成元を取り去ってしまえば  $q$ - $W_N$  が得られる。この不必要な  $T^N(z)$  は、 $N$  個のボゾンの或る線形結合を用いて書けているが、それと直交する超曲面に住む  $N-1$  個の独立なボゾンは不必要なボゾンと交換するため、それらを用いて生成元を書き表せば自動的に  $q$ - $W_N$  代数が得られる。逆にこの不必要なボゾンのお陰で、ホップ代数でなかった複雑な  $q$ - $W_N$  代数が、ホップ代数の構造を持った綺麗な代数に格上げされた訳である。

### 3.4. マクドナルド関数との関係

ヤング図 (分割)  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  を非負整数の列  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  で  $|\lambda| := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$  となるものとする。 $\lambda'$  を  $\lambda$  の双対ヤング図とし、 $\ell(\lambda) := \lambda'_1$ 、 $\emptyset := (0, 0, \dots)$  とする。又、 $(i, j) \in \lambda$  は、ヤング図の箱の座標を表す、つまり  $\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 | 1 \leq i \leq \ell(\lambda), 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ 。

$\mathcal{F}_0^{(1,0)}$  において、 $x^+(z)$  のゼロモード  $x_0^+$  はマクドナルド演算子のボゾン表示であり、その固有ベクトルはマクドナルド関数のボゾン表示である。つまり

$$x_0^+ |P_\lambda\rangle = \varepsilon_\lambda |P_\lambda\rangle, \quad \varepsilon_\lambda = 1 + (t-1) \sum_{i=1}^{\ell} (q^{\lambda_i} - 1)t^{-i}, \quad (26)$$

$$|P_\lambda\rangle = P_\lambda(a_{-1}, a_{-2}, \dots) |0\rangle \in \mathcal{F}_0^{(1,0)} \quad (27)$$

となる。無限変数  $p = (p_1, p_2, \dots)$ ,  $p_n \in \mathbb{C}$  に対し、

$$C(p) := \exp \left( \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-q^n} \frac{a_n}{n} p_n \right) \quad (28)$$

とすると  $n > 0$  に対し

$$p_n \langle 0 | C(p) = \langle 0 | C(p) a_{-n}, \quad (29)$$

$$n \frac{1-q^n}{1-t^n} \frac{\partial}{\partial p_n} \langle 0 | C(p) = \langle 0 | C(p) a_n \quad (30)$$

なので、 $\langle 0 | C(p)$  はボゾン代数  $\langle a_{-n}, a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  と  $p$  の微分作用素代数  $\langle p_n, \frac{\partial}{\partial p_n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  の間の同型写像を与えている。実際

$$P_{\lambda/\mu}(p) \propto \langle P_\mu | C(p) | P_\lambda \rangle \quad (31)$$

の様に歪マクドナルド関数  $P_{\lambda/\mu}(p)$  の中和  $p_n := \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n$  表示が知られている [14]。

## 4. インタートワイナー

代数の表現論を調べる際に重要となる演算子を考察する [10]。

### 4.1. インタートワイナー $\Phi$

2つの表現  $\mathcal{F}_u^{(\ell_1, \ell_2)}$  と  $\mathcal{F}_v^{(r_1, r_2)}$  を合成して  $\mathcal{F}_{u+v}^{(\ell_1+r_1, \ell_2+r_2)}$  となる場合、代数と矛盾なく合成できる方法を調べる。まず、表現が知られていてかつ基本的な場合、つまり  $(\ell_1, \ell_2) = (1, N)$  や  $(0, 1)$  の場合について考える。

$N \in \mathbb{Z}$ ,  $u, u', w \in \mathbb{C}$  とする。3点頂点型のインタートワイナー  $\Phi$  は

$$\Phi : \mathcal{F}_z^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_{u'}^{(1, N-1)} \longrightarrow \mathcal{F}_u^{(1, N)}, \quad (32)$$

$$X\Phi = \Phi\Delta(X) \quad (\forall X \in \mathcal{U}), \quad \begin{array}{c} z, \lambda \\ \downarrow \\ \frac{u}{N} \leftarrow \frac{u'}{N-1} \end{array} \quad (33)$$

を満たすように定めればよい。 $\mathcal{F}^{(0,1)}$  はマクドナルド関数  $P_\lambda$  で表現されることが知られているので、 $\Phi$  の成分  $\Phi_\lambda(z)$  を

$$\Phi_\lambda(z)(\alpha) = \Phi(P_\lambda \otimes \alpha) \quad (\forall P_\lambda \otimes \alpha \in \mathcal{F}_z^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_{u'}^{(1, N-1)}) \quad (34)$$

とし、 $X$  の  $\mathcal{F}^{(0,1)}$  への作用を  $\text{ad}(X, *)$  と書くと、上の定義式 (33) は

$$\text{ad}(\psi^\pm(z), \Phi_\lambda(w)) := \psi^\pm((q/t)^{\pm 1/4} z) \Phi_\lambda(w) (\psi^\pm((q/t)^{\pm 1/4} z))^{-1}, \quad (35)$$

$$\text{ad}(x^+(z), \Phi_\lambda(w)) := x^+(z) \Phi_\lambda(w) - \text{ad}(\psi^-(z), \Phi_\lambda(w)) x^+(z), \quad (36)$$

$$\text{ad}(x^-(z), \Phi_\lambda(w)) := [x^-(z), \Phi_\lambda(w)] (\psi^+((q/t)^{1/4} z))^{-1} \quad (37)$$

となる。 $\Phi_\lambda(w)$  を勝手にとると (36)(37) の右辺は  $\delta$  関数  $\delta(*w/z)$  にならず  $z, w$  に依存した非局所的なものになってしまう。 $\Phi_\lambda(w)$  をかなり上手にとらないといけないが、 $\text{ad}(x^-(z), *)$  の作用で消える最低重み状態 ( $\lambda = \emptyset$  に対応する  $\Phi_\emptyset(w)$ ) は比較的簡単に構成できる。ただし右辺が  $\delta$  関数になるためには、 $u' = -u/z$  である必要がある。最低重み状態が存在すれば後はそれに  $\text{ad}(x^+(z), *)$  を作用させて  $\Phi_\lambda(w)$  を構成することができる。 $\Phi_\lambda(w)$  の規格化は  $\text{ad}(X, *)$  の作用が、知られているレベル  $(0, 1)$  の表現に一致する様に決定することができ、結果は以下の様になる。

$$\Phi_\lambda(z) = \Phi \left[ \begin{array}{c} z, \lambda \\ \frac{u}{N} \downarrow \\ \frac{-u/z}{N-1} \end{array} \right] = P_\lambda(-t^{\rho-\frac{1}{2}}) : \left( \prod_{(i,j) \in \lambda} x^+(q^{j-1}t^{1-i}z) \right) \Phi_\emptyset(z) : \quad (38)$$

$$\Phi_\emptyset(z) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1-q^n} a_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^n} a_n z^{-n}\right). \quad (39)$$

ここで  $x^+$  のパラメータ  $u, N$  は左側の  $\mathcal{F}_u^{(1,N)}$  に作用する時の値をとる。又  $P_\lambda(-t^{\rho-\frac{1}{2}})$  は、以下の様なマクドナルド関数の特殊値である。 $c \in \mathbb{C}$  に対し中和の特殊値を

$$p_n(cq^\lambda t^\rho) := \sum_{i=1}^{\infty} c^n (q^{n\lambda_i} - 1) t^{n(\frac{1}{2}-i)} + \frac{c^n}{t^{\frac{n}{2}} - t^{-\frac{n}{2}}} \quad (40)$$

とすると  $\lambda = \emptyset, c = -t^{-\frac{1}{2}}$  の場合が上に登場した特殊値でマクドナルド関数の特殊値は

$$P_\lambda(-ct^{\rho-\frac{1}{2}}) := P_\lambda(-ct^{\rho-\frac{1}{2}}; q, t) = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{cq^{j-1}}{1 - q^{\lambda_i - j} t^{\lambda' - i + 1}} \quad (41)$$

である。又、インタートワイナーのボゾン部分を露わに表すと

$$\begin{aligned} & : \left( \prod_{(i,j) \in \lambda} x^+(q^{j-1}t^{1-i}z) \right) \Phi_\emptyset(z) : = \left( \prod_{(i,j) \in \lambda} (q^{j-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}-i}z)^{-N} u \right) \\ & \times \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} a_{-n} (q/t)^{n/2} (z/q^{\frac{1}{2}})^n p_n(q^\lambda t^\rho)\right) \\ & \times \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} a_n (q/t)^{n/2} (z/q^{\frac{1}{2}})^{-n} p_{-n}(q^\lambda t^\rho)\right) \end{aligned} \quad (42)$$

となるが、これはボゾンと微分作用素の同型を与える (28) の  $C(-p_-)$  とその双対  $C^\dagger(p)$  で構成されている。ここで  $-p := (-p_1, -p_2, \dots)$ ,  $p := (p_{-1}, p_{-2}, \dots)$  などである。

#### 4.2. レベル $(0, 1)$ 加群 $\mathcal{F}_w^{(0,1)}$

(38) への  $\text{ad}(X, *)$  の作用は、レベル  $(0, 1)$  加群  $\mathcal{F}_w^{(0,1)}$  [12, 13] を構成し

$$\text{ad}(\psi^\pm(z), \Phi_\lambda(w)) = (q/t)^{\pm 1/2} B_\lambda^\pm((w/z)^{\pm 1}) \Phi_\lambda(w), \quad (43)$$

$$\text{ad}(x^+(z), \Phi_\lambda(w)) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)+1} A_{\lambda, i}^+ \delta(q^{\lambda_i} t^{1-i} w/z) \Phi_{\lambda+1_i}(w), \quad (44)$$

$$\text{ad}(x^-(z), \Phi_\lambda(w)) = (q/t)^{1/2} \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} A_{\lambda, i}^- \delta(q^{\lambda_i-1} t^{1-i} w/z) \Phi_{\lambda-1_i}(w) \quad (45)$$

となる。ただし、 $x_i := q^{\lambda_i} t^{-i}$  を用いて

$$A_{\lambda,i}^+ := (1-t) \prod_{j=1}^{i-1} \frac{(1-t \frac{x_i}{x_j}) (1-\frac{q}{t} \frac{x_i}{x_j})}{(1-\frac{x_i}{x_j}) (1-q \frac{x_i}{x_j})}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} A_{\lambda,i}^- &:= (1-t^{-1}) \prod_{j=i+1}^{\infty} \frac{(1-t \frac{x_j}{x_i}) (1-\frac{q}{t} \frac{x_j}{x_i})}{(1-\frac{x_j}{x_i}) (1-q \frac{x_j}{x_i})} \\ &= (1-t^{-1}) \frac{1-t \frac{x_{\ell+1}}{x_i}}{1-q \frac{x_{\ell+1}}{x_i}} \prod_{j=i+1}^{\ell} \frac{(1-t \frac{x_j}{x_i}) (1-\frac{q}{t} \frac{x_j}{x_i})}{(1-\frac{x_j}{x_i}) (1-q \frac{x_j}{x_i})}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$B_{\lambda}^{\pm}(z) := \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1-zx_i^{\pm 1}}{1-z(tx_i)^{\pm 1}} \frac{1-z(\frac{t^2}{q}x_i)^{\pm 1}}{1-z(\frac{t}{q}x_i)^{\pm 1}} \quad (48)$$

である。 $\lambda_i = \lambda_{i-1}$  ならば  $A_{\lambda,i}^+ = 0$ , 又  $\lambda_i = \lambda_{i+1}$  ならば  $A_{\lambda,i}^- = 0$  である。 $\lambda_i < \lambda_{i-1}$  ならば、 $i$ -行目に箱を一つ加えることが可能で、できた新しいヤング図を  $\lambda + \mathbf{1}_i = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1}, \dots)$  と書いた。又  $\lambda_i > \lambda_{i+1}$  ならば、 $i$ -行目から箱を一つ取り除くことが可能で、できた新しいヤング図を  $\lambda - \mathbf{1}_i = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots)$  と書いた。

### 4.3. インタートワイナー $\Phi^*$

合成の逆の分解型のインタートワイナー  $\Phi^*$  も同様に

$$\Phi^* : \mathcal{F}_{u'}^{(1,N+1)} \longrightarrow \mathcal{F}_u^{(1,N)} \otimes \mathcal{F}_z^{(0,1)}, \quad \begin{array}{c} u \\ \overleftarrow{N} \downarrow \overrightarrow{N+1} \\ z, \lambda \end{array} \quad (49)$$

$$\Delta(X)\Phi^* = \Phi^*X \quad (\forall X \in \mathcal{U}) \quad (50)$$

で定義する。成分  $\Phi_{\lambda}$  を

$$\Phi^*(\alpha) = \sum_{\lambda} \Phi_{\lambda}^*(z)(\alpha) \otimes P_{\lambda} / \langle P_{\lambda} P_{\lambda} \rangle \quad (\forall \alpha \in \mathcal{F}_{u'}^{(1,N+1)}) \quad (51)$$

で導入する。ここで、 $\langle P_{\lambda} P_{\lambda} \rangle$  はマクドナルド関数の内積の値

$$\langle P_{\lambda} P_{\lambda} \rangle := \langle P_{\lambda}, P_{\lambda} \rangle_{q,t} = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{1 - q^{\lambda_i - j + 1} t^{\lambda' - i}}{1 - q^{\lambda_i - j} t^{\lambda' - i + 1}} \quad (52)$$

である。 $X$  の  $\mathcal{F}^{(0,1)}$  への作用を  $\text{ad}^*(X, *)$  と書くと、上の定義式 (50) は

$$\text{ad}^*(\psi^{\pm}(z), \Phi_{\lambda}^*(w)) := (\psi^{\pm}((q/t)^{\mp 1/4} z))^{-1} \Phi_{\lambda}^*(w) \psi^{\pm}((q/t)^{\mp 1/4} z), \quad (53)$$

$$\text{ad}^*(x^+(z), \Phi_{\lambda}^*(w)) := (\psi^{-}((q/t)^{1/4} z))^{-1} [x^+((q/t)^{1/2} z), \Phi_{\lambda}^*(w)], \quad (54)$$

$$\text{ad}^*(x^-(z), \Phi_{\lambda}^*(w)) := x^-(z) \text{ad}^*(\psi^+(z), \Phi_{\lambda}^*(w)) - \Phi_{\lambda}^*(w) x^-(z) \quad (55)$$

となる。この場合は逆に、 $x^+(z)$  で消える最高重み状態 ( $\lambda = \emptyset$  に対応する  $\Phi_\emptyset^*(w)$ ) が比較的簡単にわかる。ただし  $w' = -uz$  という条件がつく。規格化も定めると結果は

$$\Phi_\lambda^*(z) = \Phi \left[ \begin{array}{c} u \quad \leftarrow \frac{-uz}{N+1} \\ \downarrow \\ z, \lambda \end{array} \right] = P_\lambda(-qt^{\rho-\frac{1}{2}}) : \left( \prod_{(i,j) \in \lambda} x^-(q^{j-1}t^{1-i}z) \right) \Phi_\emptyset^*(z) :, \quad (56)$$

$$\Phi_\emptyset^*(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1-q^n} (t/q)^{n/2} a_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^n} (t/q)^{n/2} a_n z^{-n}\right) \quad (57)$$

となる。ここでも  $x^-$  のパラメータ  $u, N$  は左側の  $\mathcal{F}_u^{(1,N)}$  に作用する時の値をとる。ボゾン部分は

$$: \left( \prod_{(i,j) \in \lambda} x^-(q^{j-1}t^{1-i}z) \right) \Phi_\emptyset^*(z) : = \left( \prod_{(i,j) \in \lambda} (q^{j-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}-i}z)^N u^{-1} \right) \quad (58)$$

$$\times \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} a_{-n} (z/q^{\frac{1}{2}})^n p_n(q^\lambda t^\rho)\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} a_n (z/q^{\frac{1}{2}})^{-n} p_{-n}(q^\lambda t^\rho)\right)$$

であるが、これは (28) の  $C(p_-)$  と  $C^+(-p)$  で構成されている。又、このとき  $\text{ad}^*(X, *)$  の作用は

$$\text{ad}^*(\psi^\pm(z), \Phi_\lambda^*(w)) = (q/t)^{\pm 1/2} B_\lambda^\pm((w/z)^{\pm 1}) \Phi_\lambda^*, \quad (59)$$

$$\text{ad}^*(x^+(z), \Phi_\lambda^*(w)) = q \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} A_{\lambda,i}^- \delta(q^{\lambda_i-1}t^{1-i}w/z) \Phi_{\lambda-i_1}^*(w), \quad (60)$$

$$\text{ad}^*(x^-(z), \Phi_\lambda^*(w)) = (q/t)^{1/2} q^{-1} \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)+1} A_{\lambda,i}^+ \delta(q^{\lambda_i}t^{1-i}w/z) \Phi_{\lambda+i_1}^*(w) \quad (61)$$

となる。

#### 4.4. 結合規則

より一般のインタートワイナーを構成するためにインタートワイナー同士の合成を定義する。横方向の合成の場合は、 $\mathcal{F}^{(0,1)}$  の元 (縦線) を順次挿入したり引き出したりするだけなので、そのままの積でよい。例えば

$$\Phi \left[ \begin{array}{c} w, \mu \quad z, \lambda \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{uzw}{N+2} \quad \frac{-uz}{N+1} \quad \frac{u}{N} \end{array} \right] := \Phi \left[ \begin{array}{c} w, \mu \\ \downarrow \\ \frac{uzw}{N+2} \quad \frac{-uz}{N+1} \end{array} \right] \Phi \left[ \begin{array}{c} z, \lambda \\ \downarrow \\ \frac{-uz}{N+1} \quad \frac{u}{N} \end{array} \right] = \Phi_\lambda(w) \Phi_\lambda(z) \quad (62)$$

の様にすればよい。縦方向の合成の場合は、2種類の  $\mathcal{F}^{(1,N)}$  の元 (横線) の合成なのでテンソル積で行なう。つまり2種類の独立なボゾンを用意してかけあわせ、(51) と (34) より

$$\Phi \left[ \begin{array}{c} \frac{-v/z}{M-1} \quad \frac{v}{M} \\ \downarrow \\ z \\ \frac{-uz}{N+1} \quad \frac{u}{N} \end{array} \right] := \sum_\lambda \frac{1}{\langle P_\lambda P_\lambda \rangle} \otimes \left[ \begin{array}{c} \Phi \left[ \begin{array}{c} \frac{-v/z}{M-1} \quad \frac{v}{M} \\ \downarrow \\ z, \lambda \end{array} \right] \\ \Phi \left[ \begin{array}{c} z, \lambda \\ \downarrow \\ \frac{-uz}{N+1} \quad \frac{u}{N} \end{array} \right] \end{array} \right] = \sum_\lambda \frac{1}{\langle P_\lambda P_\lambda \rangle} \left( \begin{array}{c} \Phi_\lambda^*(z) \\ \otimes \\ \Phi_\lambda(z) \end{array} \right) \quad (63)$$

の様に中間状態の表現  $\lambda$  で和をとればよい。

#### 4.5. 遮蔽演算子

縦方向の積をボゾンで書くと

$$\Phi \left[ \begin{array}{c} \xrightarrow{-v/z} \xrightarrow{v} \\ \overleftarrow{M-1} \quad \overleftarrow{M} \\ \downarrow z \\ \xrightarrow{-uz} \xrightarrow{u} \\ \overleftarrow{N+1} \quad \overleftarrow{N} \end{array} \right] \propto \vdots \prod_{i \geq 1} S(q^{\lambda_i} t^{\rho_i} q^{-1/2} z) \vdots, \quad (64)$$

$$S(x) := \exp \left\{ - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} \left( 1 + \left( \frac{q}{t} \right)^n \right) x^n \tilde{\alpha}_{-n} \right\} \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} \left( 1 + \left( \frac{q}{t} \right)^n \right) x^{-n} \tilde{\alpha}_n \right\}, \quad (65)$$

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{1}{1 + (q/t)^{|n|}} (a_n^{(1)} - (q/t)^{|n|/2} a_n^{(2)}) \quad (66)$$

となる。ここで  $a_n^{(1)} = a_n \otimes 1$ 、 $a_n^{(2)} = 1 \otimes a_n$  である。 $S(z)$  は  $q$ -ヒラソ代数の遮蔽演算子に対応し、実際、丁-庵原-三木代数の任意の元  $X \in \mathcal{U}$  と可換であること

$$\left[ \Delta(X), \Phi \left[ \begin{array}{c} \xrightarrow{-v/z} \xrightarrow{v} \\ \overleftarrow{M-1} \quad \overleftarrow{M} \\ \downarrow z \\ \xrightarrow{-uz} \xrightarrow{u} \\ \overleftarrow{N+1} \quad \overleftarrow{N} \end{array} \right] \right] = 0 \quad (67)$$

はインタートワイナーの定義関係式から直接示す事もできる [15]。

### 5. AGT 対応

#### 5.1. 変形位相的頂点

$\iota$  を中和とボゾンの符号を反転する作用素  $\iota p_n = -p_n$ 、 $\iota a_{-n} = -a_{-n}$  ( $n > 0$ ) とする。インタートワイナーのマクドナルド関数に関する行列要素は [10]

$$\langle \iota P_\mu | \Phi \left[ \begin{array}{c} z, \lambda \\ \xrightarrow{-uz} \xrightarrow{u} \\ \overleftarrow{N+1} \quad \overleftarrow{N} \end{array} \right] | \iota P_\nu \rangle \propto C^{\mu\lambda}_\nu(q, t), \quad (68)$$

$$\langle \iota P_\nu | \Phi \left[ \begin{array}{c} u \\ \xrightarrow{-uz} \xrightarrow{u} \\ \overleftarrow{N+1} \\ \downarrow z, \lambda \end{array} \right] | \iota P_\mu \rangle \propto C_{\mu\lambda}^\nu(q, t) \quad (69)$$

となる。ここで

$$C_{\mu\lambda}^\nu(q, t) = P_\lambda(t^\rho; q, t) \sum_{\sigma} \iota P_{\mu'/\sigma}(-t^\lambda q^\rho; t, q) P_{\nu/\sigma}(q^\lambda t^\rho; q, t) (q^{1/2}/t^{1/2})^{|\sigma| - |\nu|} f_\nu(q, t)^{-1}, \quad (70)$$

$$C^{\mu\lambda}_\nu(q, t) = (-1)^{|\lambda| + |\mu| + |\nu|} C_{\mu'\lambda'}^{\nu'}(t, q) \quad (71)$$

は変形位相的頂点 [16] で、 $f_\lambda(q, t) := \prod_{(i,j) \in \lambda} (-1) q^{j - \frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2} - i}$  である。これは、インタートワイナーが (28) のボゾンと中和の同型写像を与える演算子  $C(p)$ 、 $C(-p)$  及びその双対で構成されている事と、(31) の様に歪マクドナルド関数がそれらの行列要素で書けているということから従う。又、Iqbal-Kozcaz-Vafa の変形位相的頂点 [17] もシューア関数に関する行列要素で与えられる。尚、位相的頂点と位相的場の理論や結び目理論との関係は [18] で解説しているので割愛する。



## 5.2. ネクラソフ分配関数

ネクラソフ分配関数は全て変形位相的頂点を用いて構成できるので、それらは又、丁-庵原-三木代数のインタートワイナーの行列要素を用いても構成できる。例えば、5次元  $SU(2)$   $N_f = 0$  の純ヤンミルズの分配関数は

$$\left\langle \begin{array}{c} 0 \\ \otimes \\ 0 \end{array} \middle| \Phi \left[ \begin{array}{ccc} \frac{v/z_1 z_2}{M-2} & \frac{-v/z_1}{M-1} & \frac{v}{M} \\ & z_2 & z_1 \\ \frac{uz_1 z_2}{N+2} & \frac{-uz_1}{N+1} & \frac{u}{N} \end{array} \right] \middle| \begin{array}{c} 0 \\ \otimes \\ 0 \end{array} \right\rangle \quad (72)$$

と表される。両端の真空は2種類のボゾンに関する真空のテンソル積である。 $N_f \neq 0$  の場合は上下に自明表現の足を生やせばよく、 $SU(N)$ ,  $N > 2$  の場合は横に梯子を伸ばせばよい。ネクラソフ分配関数と  $q$ -ビラソロ代数や  $q$ - $W_N$  代数の AGT 関係は [19][20]、そのままだと複雑だが、 $U(1)$  ボゾンを付け加えた方が簡単で本質的であり [21]、ネクラソフ分配関数は丁-庵原-三木代数の相関関数に一致することが証明された [10]。又最近 はインタートワイナーのブレイド関係や  $qt$ -KZ 方程式なども分かっている [22]。

## 参考文献

- [1] J. Ding, K. Iohara, *Lett. Math. Phys.* **41** (1997), no. 2, 181–193.
- [2] K. Miki, *J. Math. Phys.* **48** (2007) 123520.
- [3] V. Kac and A. Radul, *Comm. Math. Phys.* **157** (1993) 429–457.
- [4] H. Awata, M. Fukuma, Y. Matsuo and S. Odake, *Prog.Theor.Phys.Suppl.* **118** (1995) 343–374.
- [5] V. Ginzburg, M. Kapranov and E. Vasserot, *Mathem. Research Letters*, **2** (1995) 147–160.
- [6] J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, S. Odake, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 33–51.
- [7] B. Feigin and E. Frenkel, *Comm. Math. Phys.* **178** (1996) 653–678.
- [8] H. Awata, H. Kubo, S. Odake and J. Shiraishi, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996) 401–416.
- [9] N. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2003) 831.
- [10] H. Awata, B. Feigin and J. Shiraishi, *JHEP* 1203 (2012) 041.
- [11] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, *J. Math. Phys.* **50** (2009) 095215.
- [12] B. Feigin, A. Tsymbaliuk, *Kyoto J. Math.* **51** (2011) 831–854.
- [13] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, *Kyoto J. Math.* **51** (2011) 337–364.
- [14] H. Awata, S. Odake and J. Shiraishi, *Comm. Math. Phys.* **179**, 647–666 (1996).
- [15] H. Awata, H. Kanno, T. Matsumoto, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Y. Ohkubo and Y. Zenkevich, *JHEP* **07** (2016) 103.
- [16] H. Awata, H. Kanno, *JHEP* **0505**, 039 (2005); *Int. J. Mod. Phys.* **A24** (2009) 2253–2306.
- [17] A. Iqbal, C. Kozcaz and C. Vafa, *J. High Energy Phys.* (2009) no. 10, 069, 58pp.
- [18] H. Awata, 2009 年度日本数学会秋季総合分科会, 企画特別講演アブストラクト, 44–53.
- [19] L.F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.* **91** (2010), 167–197.
- [20] H. Awata, Y. Yamada, *JHEP* 1001:125 (2010); *Prog. Theor. Phys.* **124** (2010), 227–262.
- [21] V.A. Alba, V.A. Fateev, A.V. Litvinov, G.M. Tarnopolsky, *Lett. Math. Phys.* **98** (2011) 33–64.
- [22] H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Y. Ohkubo and Y. Zenkevich, *Jour. High Energy Phys.* 246 (10) 1–49; *Nucl. Phys.* B918 (2017) 358–385; *Phys. Rev.* **D96** 026021 (2017).