微分幾何学 I・演習問題—No.1—

1.　$\mathbf{R}^3$ 内の単位球面 $\mathbf{S}^2$ を x_ix_j-平面で切ってできる二つの半球面 $U_{k\pm}$ から x_ix_j-平面の単位円板への直交射影を $\varphi_{k\pm}$ とする。（ただし $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$ とする。）全ての $i\neq j$ について、$U_{i\pm}\cap U_{j\pm}$ における座標変換 $\varphi_{i\pm}\circ{\varphi_{j\pm}}^{-1}$（複号は同順とは限らない）を求め、いずれも C^∞ 級となっていることを確かめよ。

2.　$\mathbf{R}^3$ 内の単位球面 $\mathbf{S}^2$ から北極 $(0,0,1)$ を除いた集合 V_- から x_1x_2-平面への立体射影を ψ_- とし、$\mathbf{S}^2$ から南極 $(0,0,-1)$ を除いた集合 V_+ から x_1x_2-平面への立体射影を ψ_+ とする。
(1) x_1x_2-平面を複素平面 $\mathbf{C}$ と自然に（すなわち $x_1+x_2i=z$ と）同一視するとき、$V_+\cap V_-$ における座標変換 $\psi_+\circ{\psi_-}^{-1}$, $\psi_-\circ{\psi_+}^{-1}$ は C^∞ 級ではあるが、正則とならないことを確かめよ。
(2) 北極からの立体射影 ψ_- においてのみ、x_1x_2-平面を x_1-軸について裏返して複素平面 $\mathbf{C}$ と（すなわち $x_1-x_2i=z$ と）同一視すれば、座標変換 $\psi_+\circ{\psi_-}^{-1}$, $\psi_-\circ{\psi_+}^{-1}$ は正則となることを確かめよ。

3.　問 1,2 の $\varphi_{k\pm},\psi_\pm$ を混ぜて用いたときの、$U_{k\pm}\cap V_\pm$ における座標変換 $\varphi_{k\pm}\circ{\psi_\pm}^{-1}$, $\psi_\pm\circ{\varphi_{k\pm}}^{-1}$（複号は同順とは限らない）もまた C^∞ 級となることを確かめよ。
注　ここでは、全ての組を計算する必要は無い。なぜかも考えよ。

4.　$\mathbf{R}^3$ 内の単位球面 $\mathbf{S}^2$ から両極 $(0,0,\pm1)$ を除いた集合より円柱 ${x_1}^2+{x_2}^2=1$ への、原点からの射影を直線 $(-1,0,t)$ で切り開いた、いわゆるメルカトール図法による座標を与える式を求めよ。また、$\mathbf{S}^2$ から赤道上の二点 $(0,\pm1,0)$ を除いた集合より円柱 ${x_1}^2+{x_3}^2=1$ への、原点からの射影を直線 $(1,t,0)$ で切り開いた、いわゆる横メルカトール図法による座標を与える式を求めよ。さらに、これらの座標変換を求めよ。また、これらの座標については、問 1~3 で確かめたことはどうなっているか。

5.　問 2 (2) のように ψ_- により V_- を $\mathbf{C}$ と同一視するとき、一次変換

$$\psi_-\circ f\circ{\psi_-}^{-1}(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc\neq0)$$

により与えられる写像 $f:V_-\to V_-$ について、ψ_+ を用いた表示

$$\psi_+\circ f\circ{\psi_+}^{-1}(z),\quad \psi_+\circ f\circ{\psi_-}^{-1}(z),\quad \psi_-\circ f\circ{\psi_+}^{-1}(z)$$

を計算することにより、f が $\mathbf{S}^2$ 全体から $\mathbf{S}^2$ 自身への C^∞ 級写像として自然に拡張されることを確かめよ。

6.　$\psi_-\circ f\circ{\psi_-}^{-1}(z)=az^2+bz+c\ (a\neq0)$ により与えられる写像 $f:V_-\to V_-$ について、$\psi_+\circ f\circ{\psi_+}^{-1}(z)$ を計算することにより、問 5 と同様の主張が成り立つことを確かめよ。

微分幾何学I・演習問題—No.2—

7. $\mathbf{R}^3$ 内の原点を中心とする単位球面 $\mathbf{S}^2$ に対し、$V_- := \mathbf{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, $V_1 := \mathbf{S}^2 \setminus \{(1,0,0)\}$ とし、北極 $(0,0,1)$ から x_1x_2-平面への立体射影を ψ_-, 点 $(1,0,0)$ から x_2x_3-平面への立体射影を ψ_1 で表すことにする。次の各問に答えよ。

(1) $\mathbf{R}^3$ の通常の座標 (x_1, x_2, x_3) を用いて、写像 ψ_-, ψ_1 を表せ。

(2) x_1x_2-平面を $z = x_1 + x_2 i$ により複素平面 $\mathbf{C}$ と同一視し、ψ_- を $\mathbf{C}$ への写像と考えたとき、$\dfrac{\psi_- + 1}{\psi_- - 1}$ を (x_1, x_2, x_3) を用いて表せ。

(3) さらに x_2x_3-平面を $w = x_2 + x_3 i$ により複素平面 $\mathbf{C}$ と同一視し、ψ_1 も $\mathbf{C}$ への写像と考えたとき、座標変換 $w = \psi_1 \circ {\psi_-}^{-1}(z)$ を求めよ。

(4) $\{(V_-, \psi_-), (V_1, \psi_1)\}$ は $\mathbf{S}^2$ の C^∞ 級座標近傍系となることを示せ。

8. $\mathbf{R}^3$ 内の原点を中心とする単位球面 $\mathbf{S}^2$ に対し、$V_+ := \mathbf{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$, $V_{-1} := \mathbf{S}^2 \setminus \{(-1,0,0)\}$ とし、南極 $(0,0,-1)$ から x_1x_2-平面への立体射影を ψ_+, 点 $(-1,0,0)$ から x_2x_3-平面への立体射影を ψ_{-1} で表すことにする。次の各問に答えよ。

(1) $\mathbf{R}^3$ の通常の座標 (x_1, x_2, x_3) を用いて、写像 ψ_+, ψ_{-1} を表せ。

(2) x_1x_2-平面を $z = x_1 + x_2 i$ により複素平面 $\mathbf{C}$ と同一視し、ψ_+ を $\mathbf{C}$ への写像と考えたとき、$\dfrac{\psi_+ - 1}{\psi_+ + 1}$ を (x_1, x_2, x_3) を用いて表せ。

(3) さらに x_2x_3-平面を $w = x_2 + x_3 i$ により複素平面 $\mathbf{C}$ と同一視し、ψ_{-1} も $\mathbf{C}$ への写像と考えたとき、座標変換 $w = \psi_{-1} \circ {\psi_+}^{-1}(z)$ を求めよ。

(4) $\{(V_+, \psi_+), (V_{-1}, \psi_{-1})\}$ は $\mathbf{S}^2$ の C^∞ 級座標近傍系となることを示せ。

9. $\mathbf{R}^3$ 内の楕円面

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} + \frac{{x_2}^2}{{a_2}^2} + \frac{{x_3}^2}{{a_3}^2} = 1 \right\}$$

を考える。(ただし a_1, a_2, $a_3 > 0$ とする。)

(1) M に直交射影による C^∞ 級座標近傍系を与えよ。

(2) M は $\mathbf{S}^2$ と微分同相であることを示せ。

10. 次の各問に答えよ。

(1) $\mathbf{R}^3$ 内の一葉双曲面

$$M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 = 1\}$$

に、直交射影による C^∞ 級座標近傍系を与えよ。

(2) $\mathbf{S}^2$ は $\mathbf{R}^3$ 内の原点を中心とする単位球面とする。その開部分集合

$$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{S}^2 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 > 0\}$$

に、C^∞ 級座標近傍系を与えよ。

(3) M_1 と M_2 は微分同相であることを示せ。

微分幾何学I・演習問題—No.3—

11.　$\mathbf{R}^3$ 内において、x_1x_3-平面上の円 $(x_1-R)^2+{x_3}^2=1$（ただし $R>1$ とする）を x_3-軸のまわりに回転してできる回転面を M とする。M の適当な開部分集合から x_ix_j-平面への直交射影を用いて、M に C^∞ 級座標近傍系を与えよ。
注　この M は回転トーラスと呼ばれる。

12.　$\mathbf{R}^2$ 内の正方形閉領域

$$X=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2|0\le x_1\le 1, 0\le x_2\le 1\}$$

の同値関係

$$(x_1,x_2)\sim(x_1',x_2')\Longleftrightarrow(x_1,x_2)=(x_1',x_2')\quad\text{or}\quad(x_1'\pm1,x_2')\quad\text{or}\quad(x_1',x_2'\pm1)\quad\text{or}\quad(x_1'\pm1,x_2'\pm1)$$

による商位相空間を $M=X/\sim$ とおく。点 (x_1,x_2) の同値類は $[x_1,x_2]$ と表すことにし、さらに

$$\begin{aligned}U_1&=\{[x_1,x_2]\in M|0<x_1<1,0<x_2<1\},\\U_2&=\{[x_1,x_2]\in M|0<x_1<1,x_2\ne1/2\},\\U_3&=\{[x_1,x_2]\in M|x_1\ne1/2,0<x_2<1\},\\U_4&=\{[x_1,x_2]\in M|x_1\ne1/2,x_2\ne1/2\}\end{aligned}$$

とおく。各 U_i $(i=1,2,3,4)$ から $\mathbf{R}^2$ 内の（適当な）正方形領域への（自然な）同相写像 φ_i を定義して、$\{(U_i,\varphi_i)|i=1,2,3,4\}$ が M の C^∞ 級座標近傍系となるようにせよ。
注　この M は、2 個の $\mathbf{S}^1$ の積多様体として定義される 2 次元トーラス $T^2=\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1$ に他ならず、ここで考える座標近傍系も、積多様体として自然に入れられるものと本質的に同じものであるが、それらの事実は知らないものとして解答せよ。

13.　問 11 の M と問 12 の M は微分同相であることを示せ。

14.　問 12 の多様体 M（要するに T^2）に、3 枚の座標近傍からなる C^∞ 級座標近傍系を与えよ。

15.　問 12 の多様体 M に対し、$C=\{[x_1,x_2]\in M\mid x_1=x_2\}$ とおく。M の開部分多様体 $M\setminus C$ と微分同相となる多様体を

$$\mathbf{R}^2,\ \mathbf{S}^2,\ \mathbf{R}P^2,\ \mathbf{S}^1\times\mathbf{R},\ T^2=\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1$$

の中から選び、微分同相であることを示せ。

16.　講義の例 2.5 における座標変換 $\varphi_i\circ{\varphi_j}^{-1}$ を $i>j$ の場合に書き下せ。

17.　$\mathbf{R}P^1$ は $\mathbf{S}^1$ と微分同相であることを示せ。

18.　$\mathbf{C}P^1$ は $\mathbf{S}^2$ と微分同相であることを示せ。

微分幾何学 I・演習問題—No.4—

19. $\mathbf{S}^2$ の同値関係

$$x \sim x' \Longleftrightarrow x = \pm x'$$

による商位相空間を $M = \mathbf{S}^2/\sim$ とおく。半球面 $U_{k+} = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{S}^2 | x_k > 0\}$ に対し $U_k = U_{k+}/\sim$ とおき、U_{k+} から平面 $x_k = 0$ への直交射影 φ_{k+} により

$$\psi_k([x]) = \varphi_{k+}(x)$$

と定義する。($k = 0, 1, 2$)

(1) $\{(U_k, \psi_k)\}_{k=0,1,2}$ は M の C^∞ 級座標近傍系となっていることを確かめよ。

(2) 自然な写像 $\pi : \mathbf{S}^2 \to M$ $x \mapsto [x]$ は C^∞ 級写像であることを確かめよ。

(3) M は $\mathbf{R}P^2$ と微分同相であることを示せ。

20. 写像 f を次で定義する。

$$\begin{array}{rccc} f: & ((\mathbf{R}^3/\{\mathbf{0}\})/\sim =:)\mathbf{R}P^2 & \longrightarrow & \mathbf{S}^2(\subset \mathbf{R}^3) \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & \left(\dfrac{2x_0x_2}{{x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2}, \dfrac{2x_1x_2}{{x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2}, \dfrac{{x_2}^2-{x_0}^2-{x_1}^2}{{x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2}\right) \end{array}$$

また $U_i := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbf{R}P^2 \mid x_i \neq 0\}$ $(i = 0, 1, 2)$, $V_\pm := \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{S}^2 \mid y_3 \neq \mp 1\}$ とする。

(1) $f(U_0), f(U_1) \subset V_-$, $f(U_2) \subset V_+$ を示せ。

(2) f は C^∞ 級写像であることを示せ。

(3) $f|_{U_2} : U_2 \to f(U_2)$ は C^∞ 級微分同相写像であることを示せ。

(4) $f : \mathbf{R}P^2 \to \mathbf{S}^2$ は C^∞ 級微分同相写像でないことを示せ。

ヒント $\frac{{x_2}^2-{x_0}^2-{x_1}^2}{{x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2} = \frac{2{x_2}^2}{{x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2} - 1 = 1 - \frac{2({x_0}^2+{x_1}^2)}{{x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2}$

21. $\mathbf{R}P^2$ は $\mathbf{S}^2$ と微分同相でないことを示せ。

22. a, b, c, d は実数で、少なくとも一つは 0 でないとする。写像 f を、定義可能な範囲において、次で定義する。

$$\begin{array}{rccc} f: & ((\mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim =:)\mathbf{R}P^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}P^2 \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & [x_0 : ax_1 + bx_2 : cx_1 + dx_2] \end{array}$$

次の各問に答えよ。

(1) $\mathbf{R}P^2$ の C^∞ 級座標近傍系を一つ与えよ。

(2) $ad - bc \neq 0$ のとき、 f は $\mathbf{R}P^2$ 上 well-defined であることを示せ。

(3) $ad - bc \neq 0$ のとき、 f は C^∞ 級微分同相写像であることを示せ。

(4) $ad - bc = 0$ のとき、f は $\mathbf{R}P^2$ 全体では定義されないことを示せ。

(5) $ad - bc = 0$ のとき、f が定義可能であるような $\mathbf{R}P^2$ の部分集合の内、最大のものを U とする。$f|_U : U \to f(U)$ は C^∞ 級微分同相写像であるか否か答えよ。

23. a, b, c, d は実数で、少なくとも一つは 0 でないとする。写像 f を、定義可能な範囲において、次で定義する。

$$\begin{array}{rccc} f: & ((\mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim =:)\mathbf{R}P^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}P^2 \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & [ax_0 + bx_2 : x_1 : cx_0 + dx_2] \end{array}$$

問 22 と同じ問に答えよ。

微分幾何学I・演習問題—No.5—

24.　写像 f を次で定義する。

$$f: \quad \begin{array}{ccc} ((\mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})/\!\sim =:)\mathbf{R}P^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}P^2 \\ [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & [{x_0}^3 : {x_1}^3 : {x_2}^3] \end{array}$$

次の各問に答えよ。

(1) $\mathbf{R}P^2$ の C^∞ 級座標近傍系を一つ与えよ。

(2) f は $\mathbf{R}P^2$ 上 well-defined であることを示せ。

(3) f は C^∞ 級写像であることを示せ。

(4) f は C^∞ 級微分同相写像であるか否か、証明付きで答えよ。

25.　写像 f を次で定義する。

$$f: \quad \begin{array}{ccc} ((\mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})/\!\sim =:)\mathbf{R}P^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}P^2 \\ [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & [{x_1}^3 + {x_2}^3 : {x_0}^3 + {x_2}^3 : {x_0}^3 + {x_1}^3] \end{array}$$

問 24 と同じ問に答えよ。

26.　$\mathbf{R}^3$ 内の直円柱 $X := \mathbf{S}^1 \times (-1,1) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1, -1 < x_3 < 1\}$ の同値関係

$$(x_1,x_2,x_3) \sim (x_1',x_2',x_3') \Longleftrightarrow (x_1,x_2,x_3) = \pm(x_1',x_2',x_3')$$

による商位相空間を $M := X/\sim$ とおく。(x_1,x_2,x_3) の同値類を $[x_1,x_2,x_3]$ で表す。$V_i := \{[x_1,x_2,x_3] \in M \mid x_i \neq 0\}$ $(i=1,2)$ とし、$\psi_i : V_i \to \mathbf{R}^2$ $(i=1,2)$ を

$$\psi_1([x_1,x_2,x_3]) := \begin{cases} (x_2,x_3) & (x_1 > 0) \\ (-x_2,-x_3) & (x_1 < 0) \end{cases} \qquad \psi_2([x_1,x_2,x_3]) := \begin{cases} (x_1,x_3) & (x_2 > 0) \\ (-x_1,-x_3) & (x_2 < 0) \end{cases}$$

により定義する。次の各問に答えよ。

(1) M は Hausdorff 空間であることを示せ。

(2) $\{(V_1,\psi_1),(V_2,\psi_2)\}$ は M の C^∞ 級座標近傍系となることを示せ。

(3) M と $\mathbf{R}P^2 \setminus \{$ 1点 $\}$ は微分同相であることを示せ。（ $\mathbf{R}P^2$ の定義及び取り除く1点は自由に選んでよい。）

27.　$\mathbf{R}^3$ 内の直円柱 $X := \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\}$ について、問 26 と同じ問に答えよ。

28.　$\mathbf{R}^2$ 内の正方形 $X := \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 < x_2 < 1\}$ の同値関係

$$(x_1,x_2) \sim (x_1',x_2') \Longleftrightarrow (x_1,x_2) = (x_1',x_2') \quad \text{or} \quad (x_1,x_2) = (x_1' \pm 1, x_2')$$

による商位相空間を $M_1 := X/\!\sim$ とおく。点 (x_1,x_2) の同値類は $[x_1,x_2]$ と表すことにし、さらに $U_1 := \{[x_1,x_2] \in M_1 \mid 0 < x_1 < 1\}$, $U_2 := \{[x_1,x_2] \in M_1 \mid x_1 \neq 1/2\}$ とおく。また $M_2 := \{(y_1,y_2) \in \mathbf{R}^2 \mid {y_1}^2 + {y_2}^2 > 1\}$ とおく。

(1) 各 U_i $(i=1,2)$ から $\mathbf{R}^2$ 内の（適当な）正方形領域への（自然な）同相写像 φ_i を定義して、$\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1,2}$ が M_1 の C^∞ 級座標近傍系となるようにせよ。

(2) M_1 と M_2 は微分同相であることを示せ。

微分幾何学 I・演習問題—No.6—

［問 29 〜 38 共通］

$$M_1 := \mathbf{S}^1 \times (0,1), \qquad M_2 := \mathbf{S}^2 \setminus \{\text{北極, 南極}\}, \qquad M_3 := \mathbf{R}P^2 \setminus \{1\text{点}\}$$

とおく。M_1 は $\mathbf{S}^1$ と $(0,1)$ の直積集合として、また M_2 は $\mathbf{S}^2$ の、M_3 は $\mathbf{R}P^2$ の、それぞれ開部分集合として、自然に多様体となる。

$\mathbf{R}^2$ 内の直線全体の集合を M_4 とする。M_4 は、もちろん 1 次元射影空間 $\mathbf{R}P^1$ （$\mathbf{R}^2$ 内の原点を通る直線全体の集合）を含んでいる。

$$M_5 := M_4 \setminus \mathbf{R}P^1$$

とおく。

$\mathbf{R}^2$ 内の正方形

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 | 0 \leq x_1 \leq 1, 0 < x_2 < 1\}$$

の同値関係

$$(x_1, x_2) \sim (x_1', x_2') \Longleftrightarrow (x_1, x_2) = (x_1', x_2') \quad \text{or} \quad (x_1, x_2) = (x_1' \pm 1, 1 - x_2')$$

による商位相空間を $M_6 := X/\sim$ とおく。この M_6 は Möbius の帯と呼ばれる。

$$M_7 := \{[x_1, x_2] \in M_6 | x_2 \neq \frac{1}{2}\}$$

とおく。M_6 に微分構造が与えられれば、M_7 も M_6 の開部分集合として、自然に多様体となる。

29. M_1 と M_2 は微分同相であることを示せ。

30. M_5 に適当な C^∞ 級座標近傍系を与えることにより、M_5 が多様体となることを示せ。

31. M_1 と M_5 は微分同相であることを示せ。

32. M_4 に適当な C^∞ 級座標近傍系を与えることにより、M_4 が多様体となることを示せ。

33. M_3 と M_4 は微分同相であることを示せ。

34. M_6 に適当な C^∞ 級座標近傍系を与えることにより、M_6 が多様体となることを示せ。

35. M_3 と M_6 は微分同相であることを示せ。

36. M_1 と M_7 は微分同相であることを示せ。

37. M_6 は向き付け不可能であることを示せ。

38. M_6 と M_7 は微分同相でないことを示せ。

微分幾何学I・演習問題—No.7—

39.　問 34~38 の多様体 M_6 に対し、次の閉部分集合 C を考える。M_6 の開部分多様体 $M_6 \setminus C$ はどのような位相空間と同相であるか答えよ。

(1) $C := \{[x_1, x_2] \in M \mid x_2 = \frac{1}{2}\}$

(2) $C := \{[x_1, x_2] \in M \mid x_2 = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$

(3) $C := \{[x_1, x_2] \in M \mid x_1 = \frac{1}{2}\}$

(4) $C := \{[x_1, x_2] \in M \mid x_1 = x_2\}$

40.　問 12 の X のまた別の同値関係

$$(x_1, x_2) \sim (x_1', x_2') \Longleftrightarrow (x_1, x_2) = (x_1', x_2') \quad \text{or} \quad (x_1' \pm 1, x_2') \quad \text{or} \quad (1 - x_1', x_2' \pm 1) \quad \text{or} \quad (1 - x_1' \pm 1, x_2' \pm 1)$$

による商位相空間を $M = X/\sim$ とおく。この M について、問 12 と同じ内容の問に答えよ。

注　この M は Klein の壷と呼ばれる。

41.　問 40 の M （ Klein の壷）は向き付け不可能であることを示せ。

42.　向き付け不可能な多様体の直積は向き付け可能か不可能か考えよ。

43.　$\mathbf{R}^3$ 内において、x_1x_3-平面上の円 $(x_1 - R)^2 + {x_3}^2 = 1$ （ただし $0 < R \leq 1$ とする）を x_3-軸のまわりに回転してできる回転面（のようなもの）を M とする。M は多様体とはならないことを示せ。

44.　$\mathbf{R}^3$ 内の単位球面 $\mathbf{S}^2$ 上の北緯 θ の小円に沿って、角速度 1 で、北極上空から見て左回りに回る曲線を $c(t)$ とする。その速度ベクトル $\frac{dc}{dt}(t)$ を $\mathbf{R}^3$ 内での表示、並びに問 1 の φ_{3+}, 問 2 の $\psi_\pm$ それぞれによる局所座標を用いた表示によって書き表せ。

45.　$\mathbf{S}^2$ の C^∞ 級座標近傍系 $\{(U_{i\pm}, \varphi_{i\pm})\}_{i=1,2,3}$ を考える。(U_{1-}, φ_{1-}) における局所座標系を (x_2, x_3), (U_{2+}, φ_{2+}) における局所座標系を $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_3)$, (U_{3+}, φ_{3+}) における局所座標系を $(\widetilde{\widetilde{x}}_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2)$ とする。次の各問に答えよ。

(1) 座標変換 $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_3) = \varphi_{2+} \circ {\varphi_{1-}}^{-1}(x_2, x_3)$ を求めよ。

(2) 点 $p \in \mathbf{S}^2$ は $\varphi_{1-}(p) = \left(\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$ を満たすとする。$\varphi_{2+}(p)$ を求めよ。

(3) (2) の点 $p \in \mathbf{S}^2$ における接ベクトル $v_1, v_2 \in T_p\mathbf{S}^2$ は、(U_{1-}, φ_{1-}) における局所座標系 (x_2, x_3) を用いて

$$v_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \qquad v_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p$$

と表されるとする。この v_1, v_2 を (U_{2+}, φ_{2+}) における局所座標系 $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_3)$ を用いて表せ。

(4) 座標変換 $(\widetilde{\widetilde{x}}_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2) = \varphi_{3+} \circ {\varphi_{1-}}^{-1}(x_2, x_3)$ を求めよ。

(5) (2) の点 $p \in \mathbf{S}^2$ に対し、$\varphi_{3+}(p)$ を求めよ。

(6) (3) の接ベクトル v_1, v_2 を (U_{3+}, φ_{3+}) における局所座標系 $(\widetilde{\widetilde{x}}_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2)$ を用いて表せ。

微分幾何学 I・演習問題—No.8—

46. $\mathbf{S}^2$ の C^∞ 級座標近傍系 $\{(U_{2+},\varphi_{2+}),(U_{3+},\varphi_{3+}),(V_-,\psi_-)\}$ を考える。(V_-,ψ_-) における局所座標系を (x_1,x_2), (U_{2+},φ_{2+}) における局所座標系を $(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_3)$, (U_{3+},φ_{3+}) における局所座標系を $(\widetilde{\widetilde{x}}_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2)$ とする。次の各問に答えよ。

(1) 座標変換 $(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_3)=\varphi_{2+}\circ{\psi_-}^{-1}(x_1,x_2)$ を求めよ。

(2) 点 $p\in\mathbf{S}^2$ は $\psi_-(p)=(2,3)$ を満たすとする。$\varphi_{2+}(p)$ を求めよ。

(3) (2) の点 $p\in\mathbf{S}^2$ における接ベクトル $v_1,v_2\in T_p\mathbf{S}^2$ は、(V_-,ψ_-) における局所座標系 (x_1,x_2) を用いて

$$v_1=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,\qquad v_2=\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p$$

と表されるとする。この v_1,v_2 を (U_{2+},φ_{2+}) における局所座標系 $(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_3)$ を用いて表せ。

(4) 座標変換 $(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)=\varphi_{3+}\circ{\psi_-}^{-1}(x_1,x_2)$ を求めよ。

(5) (2) の点 $p\in\mathbf{S}^2$ に対し、$\varphi_{3+}(p)$ を求めよ。

(6) (3) の接ベクトル v_1,v_2 を (U_{3+},φ_{3+}) における局所座標系 $(\widetilde{\widetilde{x}}_1,\widetilde{\widetilde{x}}_2)$ を用いて表せ。

47. $\mathbf{R}P^2$ の C^∞ 級座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=0,1,2}$ を考える。(U_0,φ_0) における局所座標系を (y_1,y_2), (U_2,φ_2) における局所座標系を (z_1,z_2) とする。次の各問に答えよ。

(1) 座標変換 $(z_1,z_2)=\varphi_2\circ{\varphi_0}^{-1}(y_1,y_2)$ を求めよ。

(2) 点 $p\in\mathbf{R}P^2$ は $\varphi_0(p)=(2,3)$ を満たすとする。$\varphi_2(p)$ を求めよ。

(3) (2) の点 $p\in\mathbf{R}P^2$ における接ベクトル $v_1,v_2\in T_p\mathbf{R}P^2$ は、(U_0,φ_0) における局所座標系 (y_1,y_2) を用いて

$$v_1=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p,\qquad v_2=\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p$$

と表されるとする。この v_1,v_2 を (U_2,φ_2) における局所座標系 (z_1,z_2) を用いて表せ。

48. $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の単位球面 $\mathbf{S}^n$ に立体射影により微分構造を与えたとき、$\mathbf{S}^n$ から $\mathbf{R}^{n+1}$ への包含写像が埋め込みとなることを確かめよ。

49. 実射影平面 $\mathbf{R}P^2$ が $\mathbf{R}^4$ に埋め込めることを直観的に示せ。

50. Klein の壷（問 40 の M ）が $\mathbf{R}^4$ に埋め込めることを直観的に示せ。

51. 写像 f を次で定義する。

$$\begin{array}{rcccc} f: & (\mathbf{R}\supset) & (0,+\infty) & \longrightarrow & \mathbf{S}^1\times\mathbf{R} \qquad (\subset\mathbf{R}^3) \\ & & t & \mapsto & (\cos\log t,\sin\log t,t) \end{array}$$

(1) f ははめ込みか、また埋め込みか、証明付きで答えよ。

(2) f は $\mathbf{R}$ 全体で定義された C^∞ 級写像には拡張できないことを示せ。

52. $k\neq 0$ とする。写像

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & T^2=\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1 \qquad (\subset\mathbf{R}^4) \\ & t & \mapsto & (\cos t,\sin t,\cos kt,\sin kt) \end{array}$$

ははめ込みであるが埋め込みではないことを確かめよ。

微分幾何学I・演習問題—No.9—

53. a は実数とする。写像 f_a を次で定義する。

$$\begin{array}{cccc} f_a : (\mathbf{R}^2 \supset) & \mathbf{S}^1 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & ((x_1+a)^2 - {x_2}^2, 2(x_1+a)x_2) \end{array}$$

(1) f_0 ははめ込みか、証明付きで答えよ。

(2) f_0 は埋め込みか、証明付きで答えよ。

(3) f_1 ははめ込みか、証明付きで答えよ。

(4) f_1 は埋め込みか、証明付きで答えよ。

(5) f_2 ははめ込みか、証明付きで答えよ。

(6) f_2 は埋め込みか、証明付きで答えよ。

注 f_a が C^∞ 級であることは認めてよい。また、 $\mathbf{S}^1$ の C^∞ 級座標近傍系として、次の $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ を証明抜きで用いてもよい。

$$\begin{array}{lll} U_1 := \mathbf{S}^1 \setminus \{(1,0)\}, & \varphi_1 : U_1 \to (0, 2\pi) \subset \mathbf{R}, & (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \theta, \\ U_2 := \mathbf{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}, & \varphi_2 : U_2 \to (-\pi, \pi) \subset \mathbf{R}, & (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \theta. \end{array}$$

54. 写像 f を次で定義する。

$$\begin{array}{cccc} f : (\mathbf{R}^2 \supset) & \mathbf{S}^1 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 \cos x_2, x_1 \sin x_2) \end{array}$$

(1) f ははめ込みか、証明付きで答えよ。

(2) f は埋め込みか、証明付きで答えよ。

注 f が C^∞ 級であることは認めてよい。また、問 53 の注の $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ を証明抜きで用いてもよい。

55. 写像 f を次で定義する。

$$\begin{array}{ccccc} f : (\mathbf{R}^2 \supset) & \mathbf{S}^1 & \longrightarrow & \mathbf{S}^2 & (\subset \mathbf{R}^3) \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & ({x_1}^2, x_1 x_2, x_2) & \end{array}$$

(1) f ははめ込みか、また埋め込みか、証明付きで答えよ。

(2) $\mathbf{S}^2$ の C^∞ 級座標近傍系を一つ選び、その局所座標系を用いた表示により、曲線
$f(\cos t, \sin t)$ $(t \in \mathbf{R})$ の速度ベクトルを書き表せ。

56. 写像 f を次で定義する。

$$\begin{array}{cccc} f : (\mathbf{R}^2 \supset) & \mathbf{S}^1 & \longrightarrow & \mathbf{R}P^2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & [x_1 : x_2 : {x_2}^2] \end{array}$$

(1) f ははめ込みか、証明付きで答えよ。

(2) f は埋め込みか、証明付きで答えよ。

注 f が C^∞ 級であることは認めてよい。また、 $\mathbf{R}P^2$ の C^∞ 級座標近傍系として $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0,1,2}$ を、 $\mathbf{S}^1$ の C^∞ 級座標近傍系として次の $\{(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)\}_{i=1,2}$ を、それぞれ証明抜きで用いてもよい。

$$\begin{array}{lll} \tilde{U}_1 := \mathbf{S}^1 \setminus \{(1,0)\}, & \tilde{\varphi}_1 : \tilde{U}_1 \to (0, 2\pi) \subset \mathbf{R}, & \tilde{\varphi}_1^{-1}(\theta) := (\cos\theta, \sin\theta), \\ \tilde{U}_2 := \mathbf{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}, & \tilde{\varphi}_2 : \tilde{U}_2 \to (-\pi, \pi) \subset \mathbf{R}, & \tilde{\varphi}_2^{-1}(\theta) := (\cos\theta, \sin\theta). \end{array}$$

微分幾何学 I・演習問題—No.10—

57. f_0 は $\mathbf{R}$ 上の C^∞ 級関数とする。写像 f を次で定義する。

$$f:\ (\mathbf{R}^3\supset)\quad \begin{array}{ccc} \mathbf{S}^1\times\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (\cos\theta,\sin\theta,t) & \mapsto & (f_0(t)\cos\theta, f_0(t)\sin\theta, t) \end{array}$$

(1) f_0 が $\mathbf{R}$ 上定符号のとき、f は埋め込みであることを示せ。

(2) f_0 が $\mathbf{R}$ 上に零点を持つとき、f ははめ込みでないことを示せ。

58. 写像 f を次で定義する。

$$f:\ (\mathbf{R}^3\supset)\quad \begin{array}{ccc} \mathbf{S}^1\times\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & ((x_1+2)\cos x_3, (x_1+2)\sin x_3, x_2) \end{array}$$

(1) f ははめ込みであることを示せ。

(2) f は埋め込みか、証明付きで答えよ。

59. 写像 f を次で定義する。

$$f:\ (\mathbf{R}^3\supset)\quad \begin{array}{ccc} \mathbf{S}^1\times(-1,1) & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (({x_1}^2-{x_2}^2)(1+x_1x_3), 2x_1x_2(1+x_1x_3), x_2x_3) \end{array}$$

(1) f ははめ込みであることを示せ。

(2) f は埋め込みか、証明付きで答えよ。

(3) f の像の概形を描け。

注 f が C^∞ 級であることは認めてよい。また、$\mathbf{S}^1\times(-1,1)$ の C^∞ 級座標近傍系として、次の $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1,2}$ を証明抜きで用いてもよい。

$$\begin{array}{lll} U_1 := (\mathbf{S}^1\setminus\{(1,0)\})\times(-1,1), & \varphi_1 : U_1\to(0,2\pi)\times(-1,1)\subset\mathbf{R}^2, & (\cos\theta,\sin\theta,t)\mapsto(\theta,t), \\ U_2 := (\mathbf{S}^1\setminus\{(-1,0)\})\times(-1,1), & \varphi_2 : U_2\to(-\pi,\pi)\times(-1,1)\subset\mathbf{R}^2, & (\cos\theta,\sin\theta,t)\mapsto(\theta,t). \end{array}$$

60. f_0 は $\mathbf{R}$ 上の C^∞ 級関数とする。写像 f を次で定義する。

$$f:\ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (s,t) & \mapsto & (s\cos f_0(t), s\sin f_0(t), t) \end{array}$$

定義域 $\mathbf{R}^2$ の原点中心の単位円周を $\mathbf{S}^1$ とし、値域 $\mathbf{R}^3$ の座標を (x_1,x_2,x_3) としたときの $\mathbf{R}^3$ から x_1x_2-平面への直交射影を φ とする。

(1) f は埋め込みであることを示せ。

(2) $\varphi\circ f|_{\mathbf{S}^1}$ が、$\mathbf{S}^1$ の $\mathbf{R}^2$（ x_1x_2-平面）へのはめ込みとなるための、f_0 に関する必要十分条件を求めよ。

61. 写像 f を次で定義する。

$$f:\ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x_1,x_2) & \mapsto & (x_1, x_2\cos x_1, x_2\sin x_1) \end{array}$$

(1) f は埋め込みであることを示せ。

(2) f を $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ 自身への微分同相に拡張せよ。

微分幾何学 I・演習問題—No.11—

62.　写像 f を次で定義する。

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (s,t) & \mapsto & (\cos 2s, \sin 2s, t) \end{array}$$

(1) f ははめ込みであることを示せ。

(2) f は埋め込みではないことを示せ。

63.（問 62 の続き）　$\mathbf{R}^3$ の座標を (x_1, x_2, x_3) としたときの $\mathbf{R}^3$ から x_2x_3-平面への直交射影を φ とし、$\mathbf{R}^2$ の原点中心の単位円周を $\mathbf{S}^1$ とする。

(1) $\varphi \circ f$ ははめ込みではないことを示せ。

(2) $\varphi \circ f|_{\mathbf{S}^1}$ ははめ込みであることを示せ。

(3) $\varphi \circ f|_{\mathbf{S}^1}$ は埋め込みであることを示せ。

64.　$\mathbf{R}^2$ 内の長さ 1 の線分全体の集合を M とする。

(1) M に適当な C^∞ 級座標近傍系を与えることにより、M が多様体となることを示せ。

(2) M と微分同相となる多様体を

$$\mathbf{R}^3,\ \mathbf{S}^3,\ \mathbf{R}P^3,\ \mathbf{S}^2 \times \mathbf{R},\ \mathbf{R}P^2 \times \mathbf{R},\ \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^2,\ T^2 \times \mathbf{R},\ T^3 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$$

の中から選び、微分同相であることを示せ。

(3) 問 32~33 の M_4 に対し、写像

$$\begin{array}{cccc} f: & M & \longrightarrow & M_4 \\ & \text{線分 } S & \mapsto & S \text{ を含む直線} \end{array}$$

はしずめ込みであることを示せ。

65.　$\mathbf{R}^2$ 内の半直線全体の集合を M とする。

(1) M に適当な C^∞ 級座標近傍系を与えることにより、M が多様体となることを示せ。

(2) M と微分同相となる多様体を $(*)$ の中から選び、微分同相であることを示せ。

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R},\ \mathbf{S}^1,\ \mathbf{R}^2,\ \mathbf{S}^2,\ \mathbf{R}P^2,\ \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R},\ T^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1,\ \text{Möbius の帯},\ \text{Klein の壷}, \\ \mathbf{R}^3,\ \mathbf{S}^3,\ \mathbf{R}P^3,\ \mathbf{S}^2 \times \mathbf{R},\ \mathbf{R}P^2 \times \mathbf{R},\ \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^2,\ T^2 \times \mathbf{R},\ T^3 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \end{array} \right.$$

66.（問 65 の続き）　$\mathbf{R}^2$ 内の長さが正の有向線分全体の集合を M' とする。点 $\mathbf{x}$ を始点、点 $\mathbf{y}$ を終点とする有向線分を $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^4$ に対応させる写像を ψ とおくと、$\psi(M') = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^4 \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\}$ は $\mathbf{R}^4$ の開集合で、$\{(M', \psi)\}$ は（地図一枚で）M' の C^∞ 級座標近傍系となる。

(1) 自然な射影 $\pi : M' \to M$ を定義せよ。

(2) 単射 $s : M \to M'$ で、$\pi \circ s = id_M$ を満たすものを一つ定義せよ。

(3) (1) で定義した π はしずめ込みか、証明付きで答えよ。

(4) (2) で定義した s ははめ込みか、証明付きで答えよ。

微分幾何学I・演習問題—No.12—

67.　実数 a, b, c の内少なくとも一つは 0 でないとする。

$$M := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 | a{x_1}^2 + 2bx_1x_2 + c{x_2}^2 - 1 = 0\}$$

は $\mathbf{R}^2$ の閉部分多様体となることを示せ。

68.　a_{ij} はいずれも実数とする。$\mathbf{R}^3$ 上の関数

$$F(x_1, x_2, x_3) := a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + a_{33}{x_3}^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{12}x_1x_2 - 1$$

に対し

$$M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

とおく。M が $\mathbf{R}^3$ の 2 次元閉部分多様体となるための a_{ij} に関する必要十分条件を求めよ。

69.　$R > 1$ とする。回転トーラス

$$M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | (\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} - R)^2 + {x_3}^2 - 1 = 0\}$$

（すなわち問 11 の M ）は $\mathbf{R}^3$ の閉部分多様体となることを示せ。

70.　$\mathbf{R}^3$ 上の関数

$$F(x_1, x_2, x_3) := {x_1}^2{x_2}^2 + {x_2}^4 - {x_1}^2{x_3}^2 - 1$$

に対し

$$M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

とおく。M は $\mathbf{R}^3$ の閉部分多様体となることを示せ。

71.　f は閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数で、開区間 $(0, 1)$ 上 C^∞ 級、$f(0) = f(1) = 0$, $f(t) > 0$ $(t \in (0, 1))$ とする。$\mathbf{R}^3$ 内において、曲線 $x_1 = f(x_3)$ を x_3-軸のまわりに回転してできる回転面を M とする。M が $\mathbf{R}^3$ の 2 次元閉部分多様体となるための f に関する必要十分条件を求めよ。

72.　$\mathbf{R}^3$ の部分集合として、次の M を考える。

$$M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0\}$$

(1) M は $\mathbf{R}^3$ の閉部分多様体となることを示せ。
(2) M の連結成分の個数を求めよ。

73.　$y = |\mathbf{x}|$ のグラフは可微分多様体であると言えるか否か述べよ。

微分幾何学 I・演習問題—No.13—

［問 74 ～ 76 共通］$\mathbf{S}^2$ は $\mathbf{R}^3$ の原点中心の単位球面とする。c は実数（の定数）とし、$\mathbf{R}^3$ の部分集合として次の M_1, M_2 を考える。

$$M_1 := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid {x_2}^2 = x_1 {x_3}^2 + c \} , \qquad M_2 := M_1 \cap \mathbf{S}^2 .$$

74.　$c \neq 0$ とする。

(1) M_1 は $\mathbf{R}^3$ の 2 次元閉部分多様体となることを示せ。

(2) $c < 0$ のとき、 M_1 の連結成分の個数を求めよ。

75.（問 74 の続き）　$c > 0$ とする。

(1) M_1 は連結であることを示せ。

(2) M_1 は $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ と微分同相であることを示せ。（または、 $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ から $\mathbf{R}^3$ への埋め込みで、その像が M_1 となっているようなものを作れ。）

76.　$0 < c < 1$ とする。

(1) $c \neq \frac{2}{9}\sqrt{3}$ のとき、M_2 は $\mathbf{R}^3$ の 1 次元閉部分多様体となることを示せ。

(2) $c = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ のとき、M_2 は多様体とはならないことを示せ。また、 M_2 の概形を描け。

［問 77 ～ 79 共通］c, v_1, v_2 は実数（の定数）で ${v_1}^2 + {v_2}^2 = 1$ をみたすものとし、$\mathbf{R}^3$ の部分集合として次の M_1, P, M_2 を考える。

$$\begin{array}{lcl} M_1 & := & \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid {x_1}^4 + {x_2}^4 - 1 - c({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1) + {x_3}^2 = 0 \} , \\ P & := & \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid v_2 x_1 = v_1 x_2 \}, \qquad M_2 \ := \ M_1 \cap P . \end{array}$$

77.　$c \neq 1, 2$ とする。

(1) M_1 は $\mathbf{R}^3$ の 2 次元閉部分多様体となることを示せ。

(2) M_2 は $\mathbf{R}^3$ の 1 次元閉部分多様体となることを示せ。

78.（問 77 の続き）　$1 < c < 2$ とする。

(1) M_2 は 2 本の閉曲線となることを示せ。

（ $P = \{ (v_1 s, v_2 s, t) \in \mathbf{R}^3 \mid (s, t) \in \mathbf{R}^2 \}$ と表せることを用いよ。）

(2) M_1 は 2 次元トーラス T^2 と微分同相であることを示せ。

（または、 T^2 から $\mathbf{R}^3$ への埋め込みで、その像が M_1 となっているようなものを作れ。）

79.　$c = 1, 2$ とする。

(1) M_1 の概形を描け。

(2) M_1 は多様体とはならないことを示せ。

（ $\mathbf{R}^2$ の開集合と同相な近傍を持たないような点が存在することを示せ。）

微分幾何学 I・演習問題—No.14—

80. c は 実数とする。$\mathbf{R}^3$ 上の関数

$$F(x_1, x_2, x_3) := ({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1)({x_1}^2 + {x_2}^2 - 9) + {x_3}^2 + c$$

に対し

$$M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

とおく。(M は、ある平面曲線の x_3-軸に関する回転面である。)

(1) $c \neq -9$ かつ $c < 16$ のとき、M は $\mathbf{R}^3$ の閉部分多様体となることを示せ。

(2) $c = 0$ のとき、 M の概形を描け。

(3) $c = -9$ のとき、M は $\mathbf{R}^3$ の閉部分多様体となるか否か、理由付きで答えよ。

(4) $c = 16$ のとき、M は $\mathbf{R}^3$ の閉部分多様体となるか否か、理由付きで答えよ。

81. c は 正の実数で $c \neq 1$ とする。$\mathbf{R}^3$ 上の関数

$$F(x_1, x_2, x_3) := ({x_1}^4 - 2{x_1}^2 + {x_2}^2)^2 + {x_3}^2 - c^2$$

に対し

$$M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

とおく。

(1) M は $\mathbf{R}^3$ の閉部分多様体となることを示せ。

(2) $c < 1$ である c の値を適当に一つ選んで M の概形を描け。

微分幾何学 I・演習問題—No.15—

82.　$GL(n, \mathbf{R})$ の連結成分は 2 個あることを示せ。

83.　$SL(n, \mathbf{R})$ は連結であることを示せ。

84.　$SL(2, \mathbf{R})$ は $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^2$ と微分同相であることを示せ。

85.　$GL(n, \mathbf{C})$, $SL(n, \mathbf{C})$ はいずれも連結であることを示せ。

86.　$GL(n, \mathbf{R})$ の $\mathbf{R}^n$ への作用の軌道を全て求めよ。

87.　単位行列を含む $GL(2, \mathbf{R})$ の連結成分を G_0 とおく。（ i.e. $G_0 := \{A \in M(2, \mathbf{R}) | \det A > 0\}$ ）
(1) G_0 の各元がそれぞれ $\mathbf{R}^2$ 内の原点を一つの頂点とするある平行四辺形に対応することに着目して、G_0 が $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^3$ と微分同相であることを示せ。
(2) (1) の対応において正方形に対応する G_0 の元全体の集合を求め、これが G_0 の部分群となることを示せ。

88.　$O(n)$, $SO(n)$ の $\mathbf{S}^{n-1}(r) = \{x \in \mathbf{R}^n | |x| = r\}$ $(r > 0)$ への作用は推移的で、各 $\mathbf{S}^{n-1}(r)$ はこの作用の軌道となっていることを確かめよ。

89.　$SL(n, \mathbf{R})$ の $\mathbf{R}^n$ への作用の軌道を全て求めよ。

90.　$O(n)$, $SO(n)$ はいずれも $M(n, \mathbf{R})$ の閉部分多様体となることを示せ。

91.　$SO(n)$ は連結であること、$O(n)$ の連結成分は 2 個あることを示せ。

92.　$SO(3)$ は $\mathbf{R}P^3$ と微分同相であることを示せ。

93.（問 72 の続き）　M は問 72 の通りとし、$\mathbf{R}^3$ の原点中心の単位球面を $\mathbf{S}^2$ とする。M を M 自身に写す $O(3)$ の元全体の作る $O(3)$ の部分群を H とし、単位行列を含む H の連結成分を H_0 とする。
(1) H を（具体的に）求めよ。
(2) H_0 の $\mathbf{S}^2$ への作用の軌道を求めよ。

94.　$U(n)$, $SU(n)$ はいずれも $M(n, \mathbf{C})$ の（実）閉部分多様体となることを示せ。

95.　$U(n)$, $SU(n)$ はいずれも連結であることを示せ。

96.　$SU(2)$ は $\mathbf{S}^3$ と、$U(2)$ は $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^1$ と、それぞれ微分同相であることを示せ。

微分幾何学 I・演習問題—No.16—

［問 97 $\sim$ 100 共通］次の写像 Φ を考える。

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & SL(2,\mathbf{R})\times(\mathbf{C}\cup\{\infty\}) & \longrightarrow & \mathbf{C}\cup\{\infty\} \\ & \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

ただし、 ∞ の扱いは次の通りとする。

$$c\neq 0 \text{ のとき、}\quad \Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \infty\right) = \frac{a}{c}, \quad \Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, -\frac{d}{c}\right) = \infty,$$
$$c = 0 \text{ のとき、}\quad \Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \infty\right) = \infty .$$

Φ は $SL(2,\mathbf{R})$ の $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ への作用となっている。作用 Φ において原点中心の単位円 $\mathbf{S}^1 = \{\, z\in\mathbf{C} \mid |z| = 1 \,\}$ を $\mathbf{S}^1$ 自身に写す $SL(2,\mathbf{R})$ の元全体の集合を G, 単位行列を含む G の連結成分を G_0 とする。

97.　次の各問に答えよ。

(1) Φ が $SL(2,\mathbf{R})$ の $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ への作用となっていることを確かめよ。

(2) 作用 Φ は効果的か否か、証明付きで答えよ。

98.（問 97 の続き）　次の各問に答えよ。

(1) 作用 Φ において平行移動に対応する $SL(2,\mathbf{R})$ の元全体の集合を求め、これが $SL(2,\mathbf{R})$ の部分群となることを示せ。

(2) 作用 Φ の軌道を求めよ。

99.　次の各問に答えよ。

(1) G は $SL(2,\mathbf{R})$ の部分群となることを示せ。

(2) G は $M(2,\mathbf{R})$（$=\mathbf{R}^4$ と見なす）の 1 次元閉部分多様体となることを示せ。

100.（問 99 の続き）　次の各問に答えよ。

(1) G_0 はどのような集合か具体的に求めよ。

(2) G_0 の $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ への作用の軌道を求めよ。

101.　H は複素平面 $\mathbf{C}$ の上半平面、すなわち $H := \{z\in\mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ とする。次の写像 Φ を考える。

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & SO(2)\times H & \longrightarrow & H \\ & \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

(1) Φ が $SO(2)$ の H への作用となっていることを確かめよ。

(2) 作用 Φ は推移的か否か、証明付きで答えよ。

(3) 作用 Φ は効果的か否か、証明付きで答えよ。

(4) 作用 Φ の軌道を求めよ。

微分幾何学 I・演習問題—No.17—

102.　n は自然数とする。次の写像 Φ を考える。

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & SL(n,\mathbf{R})\times GL(n,\mathbf{R}) & \longrightarrow & GL(n,\mathbf{R}) \\ & (A,X) & \mapsto & AX \end{array}$$

(1) Φ が $SL(n,\mathbf{R})$ の $GL(n,\mathbf{R})$ への作用となっていることを確かめよ。

(2) 作用 Φ は推移的か否か、証明付きで答えよ。

(3) 作用 Φ は効果的か否か、証明付きで答えよ。

(4) 作用 Φ の軌道を求めよ。

103.　集合 G を次で定義する。

$$\begin{aligned} G &:= \{A\in M(2,\mathbf{R}) \mid \exists\alpha\neq 0 \text{ s.t. } {}^tAA=\alpha E\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M(2,\mathbf{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} {a_{11}}^2+{a_{21}}^2={a_{12}}^2+{a_{22}}^2\neq 0, \\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

この G について、次の作用 Φ を考える。

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & G\times\mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & (A,\mathbf{x}) & \mapsto & A\mathbf{x} \end{array}$$

(1) G は $M(2,\mathbf{R})$ の正規部分多様体となることを示せ。

(2) G は $GL(2,\mathbf{R})$ の部分群となることを示せ。

(3) 作用 Φ は推移的か否か、証明付きで答えよ。

(4) 作用 Φ は効果的か否か、証明付きで答えよ。

104.　集合 G_0, G を次で定義する。

$$\begin{aligned} G_0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},a_{33}\in\mathbf{R} \right\}, \\ G &:= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in G_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} {a_{11}}^2+{a_{21}}^2={a_{12}}^2+{a_{22}}^2, \\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}){a_{33}}^2=1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

G_0 を $\mathbf{R}^5$ と自然に同一視して、多様体とみなす。この G について、次の作用 Φ を考える。

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & G\times\mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (A,\mathbf{x}) & \mapsto & A\mathbf{x} \end{array}$$

(1) G は G_0 の正規部分多様体となることを示せ。

(2) G は $GL(3,\mathbf{R})$ の部分群となることを示せ。

(3) 作用 Φ の軌道を求めよ。

105.　$G:=SO(2)\times\mathbf{R}^2$ とし、次の写像 Φ を考える。

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & G\times\mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & ((A,\mathbf{b}),\mathbf{x}) & \mapsto & A\mathbf{x}+\mathbf{b} \end{array}$$

(1) Φ が G の $\mathbf{R}^2$ への作用となるように、位相空間 G に群の演算を定義せよ。

(2) (1) で与えた群構造について、G は Lie 群となることを示せ。

微分幾何学 I・演習問題—No.18—

106.　次の写像 Φ を考える。

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & GL(2,\mathbf{R}) \times \mathbf{R}P^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}P^2 \\ & \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ [x_0 : x_1 : x_2] \right) & \mapsto & [x_0 : ax_1 + bx_2 : cx_1 + dx_2] \end{array}$$

注　Φ が well-defined であることは（問 22 で確認済みなので）認めてよい。

(1) Φ が $GL(2,\mathbf{R})$ の $\mathbf{R}P^2$ への作用となっていることを確かめよ。

(2) 作用 Φ は推移的か否か、証明付きで答えよ。

(3) 作用 Φ は効果的か否か、証明付きで答えよ。

(4) 作用 Φ の軌道を求めよ。