複素解析・演習問題—No.1—

1　$x = \cos\theta$ とおくとき、$\cos n\theta$ が x の n 次多項式で表されることを示せ。

2　$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$) とし、$f(z)$ は $\mathbf{C}$ 上の正則関数とする。

(1)　$\mathrm{Re}\, f(z)$ が y のみによる関数のとき、$\mathrm{Im}\, f(z)$ は x のみによる関数となることを示せ。

(2)　(1) の仮定を満たす $f(z)$ を全て求めよ。

3　三次関数

$$f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d \qquad (a \neq 0)$$

について、定義域、値域それぞれに適当な一次変換による座標変換を施すことにより、その写り方を分類せよ。

4　$\varphi : \mathbf{S}^2 \to \hat{\mathbf{C}}$ は北極 $(0,0,1)$ からの立体射影とする。

(1)　$\mathbf{C}$ 内の任意の直線 ℓ に対し、その φ による逆像 $\varphi^{-1}(\ell)$ は、$\mathbf{S}^2$ 上の北極を通る円であることを示せ。

(2)　$\mathbf{C}$ 内の任意の交わる二直線 ℓ_1, ℓ_2 に対し、それらが交点 z_0 においてなす角と、それらの φ による逆像の二円 $\varphi^{-1}(\ell_1), \varphi^{-1}(\ell_2)$ の点 $\varphi^{-1}(z_0)$ における接線がなす角とは等しいことを示せ。

5　$\varphi : \mathbf{S}^2 \to \hat{\mathbf{C}}$ は北極 $(0,0,1)$ からの立体射影とする。

(1)　x_1x_2-平面を複素平面 $\mathbf{C}$ （ w-平面）と同一視するとき、南極 $(0,0,-1)$ からの立体射影 $\psi : \mathbf{S}^2 \to \hat{\mathbf{C}}$ 及びその逆写像 ψ^{-1} の式を書き下せ。

(2)　座標変換

$$w = \psi \circ \varphi^{-1}(z), \qquad z = \varphi \circ \psi^{-1}(w)$$

を求めよ。

複素解析・演習問題—No.2—

6　一次変換 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　条件

$$\text{(a)}\begin{cases} f(0)=i \\ f(i)=\infty \\ f(1)=1 \end{cases} \quad \text{(b)}\begin{cases} f(1)=i \\ f(i)=1 \\ f(-1)=-i \end{cases} \quad \text{(c)}\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(i)=i \\ f(1)=\infty \end{cases} \quad \text{(d)}\begin{cases} f(1)=1 \\ f(i)=0 \\ f(-1)=\infty \end{cases}$$

を満たすものを求めよ。

(2)　(1) で求めた $f(z)$ によって、

(a, b)　第一象限,
(c)　原点中心の単位開円板 $\{z\in\mathbf{C}|\ |z|<1\}$,
(d)　上半平面 $\{z\in\mathbf{C}|\ \mathrm{Im}\,z>0\}$

はどこに写るか。その像を求めよ。

7　$a,\ b,\ c,\ d$ は複素数で、$ad-bc\neq 0$ とする。一次変換 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ による単位円（原点中心、半径 1 の円周）の像を C とする。次の各問に答えよ。

(1)　C が原点を通るための（ $a,\ b,\ c,\ d$ に関する）条件を求めよ。

(2)　C が直線になるための（ $a,\ b,\ c,\ d$ に関する）条件を求めよ。

(3)　C が原点を通る直線になり、さらに $f(0)$ 及び $f(\infty)$ が共に実軸上にあるとする。このときの $ad+bc$ の値を求めよ。

8　$a,\ b,\ c$ は複素数で、$a\neq 0,\ b\neq c$ とする。一次変換 $f(z)=\dfrac{a(z-b)}{z-c}$ について、

(a) 単位円,　　(b) 実軸

を単位円に写すための $a,\ b,\ c$ に関する条件を求めよ。（**注意**：いずれも出来るだけ簡単な形で表せ。）

複素解析・演習問題—No.3—

9　位数 3 の有理関数

$$f(z) = \frac{a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0}{b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0} \qquad （ a_3 \neq 0 \text{ または } b_3 \neq 0, \text{ 分子分母は互いに素}）$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　定義域、値域それぞれに適当な一次変換による座標変換を施すことにより、

$$w = \frac{az^3 + bz^2}{cz + d} \qquad (a \neq 0, ad - bc \neq 0)$$

と書き換えられることを示せ。

(2)　特に $c \neq 0$ のとき、定義域、値域それぞれにさらに適当な一次変換による座標変換を施すことにより、

$$w = z^2 + \frac{1}{z - z_0}$$

と書き換えられることを示せ。

10　関数

$$f(z) = z^2 + \frac{1}{z - z_0}$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　$f'(z) = 0$ が重解を持つような z_0 の値を求めよ。

(2)　$f'(z) = 0$ が重解を持つとき、定義域、値域それぞれに適当な一次変換による座標変換を施すことにより、$w = f(z)$ は三次関数（多項式）に書き換えられることを示せ。

11　$\hat{\mathbb{C}}$ 内の任意の異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 に対し、この 4 点で微分が消えるような位数 3 の有理関数 $f(z)$ が存在することを示せ。（**ヒント**：まず $f(\infty) = \infty$ を満たす $f(z)$ で、z_1, z_2, z_3, ∞ で微分が消える例を作れ。）

12　有理関数 $f(z)$ について、次の各問に答えよ。

(1)　$f(z)$ が単位円を単位円に写すための条件を求めよ。

(2)　f による単位円の逆像が単位円であるための条件を求めよ。

(3)　f による実軸の逆像が実軸であるための条件を求めよ。

複素解析・演習問題—No.4—

13　次の各 $h(z)$ について、下記の各問に答えよ。

$$\text{(a)}\quad h(z)=z^4+4,\qquad \text{(b)}\quad h(z)=z^8-1$$

(1)　方程式 $h(z)=0$ の解を全て求め、複素平面上に図示せよ。

(2)　各特異点における、関数 $\dfrac{1}{h(z)}$ の留数を求めよ。

(3)　C は中心 1, 半径

$$\text{(a)}\quad 2,\qquad \text{(b)}\quad 1,\quad 1.9$$

の円周上を左回りに一周する閉曲線とする。積分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{h(z)}$ の値を求めよ。

14　次の各 $h(z)$ について、下記の各問に答えよ。

$$\text{(a)}\quad h(z)=z^6+1,\qquad \text{(b)}\quad h(z)=z^6+z^4+z^2+1,$$

(1)　方程式 $h(z)=0$ の解を全て求め、複素平面上に図示せよ。

(2)　上半平面にある各特異点における、関数 $\dfrac{1}{h(z)}$ の留数を求めよ。

(3)　積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{h(x)}$ の値を求めよ。

15　ℓ, m は自然数で $\ell>1$ とする。次の各等式が成り立つことを示せ。

(1)　有理関数 $f(z)$ において、分母の次数が分子の次数より大きいならば、

$$\int_0^{+\infty} f(x^\ell)dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i/\ell}}\sum_{0<\arg z_0<2\pi/\ell}\mathrm{Res}\,(f(z^\ell);z_0).$$

(2)　任意の ℓ, m に対し、

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{\ell m}+x^{\ell(m-1)}+\cdots+x^\ell+1}=\frac{\pi}{\ell(m+1)}\left(\cot\frac{\pi}{\ell(m+1)}-\cot\frac{(\ell+1)\pi}{\ell(m+1)}\right).$$

(3)　m が偶数のとき、

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{\ell m}-x^{\ell(m-1)}+\cdots-x^\ell+1}=\frac{\pi}{\ell(m+1)}\left(\mathrm{cosec}\frac{\pi}{\ell(m+1)}+\mathrm{cosec}\frac{(\ell+1)\pi}{\ell(m+1)}\right).$$

(4)　ℓ が奇数で m が偶数のとき、

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\ell m}+x^{\ell(m-1)}+\cdots+x^\ell+1}=\frac{\pi}{\ell(m+1)}\left(\cot\frac{\pi}{2\ell(m+1)}+\tan\frac{(\ell+1)\pi}{2\ell(m+1)}\right).$$

複素解析・演習問題—No.5—

以下、

$$\begin{array}{lcll} D & := & \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\} & （単位円板）\\ H & := & \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\} & （上半平面）\end{array}$$

と表わすことにする。

16　$|z_0| < 1,\ |w_0| < 1,\ \theta_0 \in \mathbf{R}$ とする。D を D 自身の上に写す一次変換 $w = f(z)$ で、条件

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \theta_0$$

を満たすものを求めよ。

17　二次関数 z^2 の写し方に着目して、次の各問に答えよ。

(1)　半円板 $D \cap H$ を H の上へ一対一に写す正則関数 $w = f(z)$ で、条件

$$f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$$

を満たすものを求めよ。

(2)　半円板 $D \cap H$ を D の上へ一対一に写す正則関数 $w = f(z)$ で、条件

$$f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$$

を満たすものを求めよ。

18　指数関数 e^z の写し方に着目して、次の各問に答えよ。

(1)　帯状の領域

$$\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \mathrm{Im}\, z < 1\}$$

を D の上へ一対一に写す正則関数 $w = f(z)$ で、条件

$$f(0) = -i, \quad f(i) = i$$

を満たすものを求めよ。

(2)　帯状の領域の半分

$$\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \mathrm{Im}\, z < 1,\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$$

を D の上へ一対一に写す正則関数 $w = f(z)$ を一つ求めよ。