解析 II・演習問題—No.1—

偏微分と全微分

1　次の関数を二回まで偏微分せよ。特に (1～4) については、調和関数であることを確かめよ。

(1)	$x^3 - 3xy^2$	(2)	$e^{-x}\cos y$	(3)	$\log(x^2+y^2)$	(4)	$\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$
(5a)	$\log(7x+8y+9)$	(5b)	$\log(x+2y+3)$	(6a)	$\sin(2x-3y+4)$	(6b)	$\sin(-3x+2y+4)$
(7a)	$\cos(6x-7y+8)$	(7b)	$\cos(-7x+6y+8)$	(8a)	e^{x^2-2y+3}	(8b)	e^{7x-8y^2+9}

2_a　次の関数が調和関数となるような実数 a, b, c の値を求めよ。

(1)　$f(x,y) = x^5 + ax^3y^2 + bxy^4$

(2)　$f(x,y) = x^4 + ax^3y + bx^2y^2 + cxy^3 + ay^4$

(3)　$f(x,y) = cx^4 + ax^3y + bx^2y^2 + cxy^3 + ay^4$

(4)　$f(x,y) = x^6 + ax^4y^2 + bx^2y^4 + cy^6$

(5)　$f(x,y) = ax^6 + bx^4y^2 + cx^2y^4 + y^6$

(6)　$f(x,y) = ax^6 + bx^4y^2 + cx^2y^4 - y^6$

(7)　$f(x,y) = x^5y + ax^3y^3 + bxy^5$

2_b　a, b は実数とする。$f(x,y) = \sin(x^2+ay^2)\cosh(bxy)$, $\triangle f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ とする。次の各問に答えよ。

(1)　$\triangle f$ を計算せよ。(参考：$\cosh t = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\dfrac{d}{dt}\cosh t = \sinh t = \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ である。)

(2)　$a \neq 0$ とする。$\triangle f(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, 0)$, $\triangle f(0, \sqrt{\dfrac{\pi}{a}})$ を計算せよ。

(3)　f が調和関数となる（すなわち $\triangle f \equiv 0$ をみたす）ような実数 a, b の値を求めよ。

2_c　a, b は実数とする。関数 $f(x,y) = e^{ax}\sin by$ について、次の各問に答えよ。

(1)　$f(x,y)$ を二回まで偏微分せよ。

(2)　f が調和関数となる（すなわち $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0$ をみたす）ための、a, b に関する必要十分条件を求めよ。

解析II・演習問題—No.2—

偏微分と全微分（続き）

3　次の曲面の各点における接平面の方程式を求めよ。

(1)　$z = x^2 - 2xy + 3y^2 + 6x - 14y$　　$(x, y) = (0, 1)$

(2)　$z = -x^4 + 4xy - 2y^2$　　$(x, y) = (1, -1)$

(3)　$z = x^3 + 12xy^2 - 12x$　　$(x, y) = (2, 1)$

(4)　$z = 12x^2y + y^3 - 12y$　　$(x, y) = (1, 2)$

(5)　$z = 3x^2y + 4y^3 - 12y$　　$(x, y) = (2, 1)$

(6)　$z = 4x^3 + 3xy^2 - 12x$　　$(x, y) = (1, 2)$

(7)　$z = x^4 + y^4 - 4xy$　　$(x, y) = (1, -1)$

4_a　次の関数は $(x, y) = (0, 0)$ で偏微分可能であるが、連続ではないことを確かめよ。

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4_b　関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

について、次の各問に答えよ。

(1_x)　$(x, y) \neq (0, 0)$ における x に関する偏微分係数 $f_x(x, y)$ を求めよ。

(2_x)　$(x, y) = (0, 0)$ における x に関する偏微分係数 $f_x(0, 0)$ を求めよ。

(3_x)　x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において連続であることを示せ。

(1_y)　$(x, y) \neq (0, 0)$ における y に関する偏微分係数 $f_y(x, y)$ を求めよ。

(2_y)　$(x, y) = (0, 0)$ における y に関する偏微分係数 $f_y(0, 0)$ を求めよ。

(3_y)　y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において連続であることを示せ。

(2_v)　$(x, y) = (0, 0)$ における $\mathbf{v} = (a, b)$ に関する方向微分係数 $f_v(x, y)$ を求めよ。

解析 II・演習問題—No.3—

偏微分と全微分（続き）

4_c　次の各関数の原点 $(0,0)$ での値はいずれも 0 で与えられるものとする。このとき各関数は原点において

[1] 連続　[2] 偏微分可能　[3] 全ての方向について方向微分可能

[4] 全微分可能　[5] C^1 級

であるか否か調べよ。

(1) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　(2) $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$　(3) $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$　(4) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(5) $\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$　(6) $\dfrac{y^4}{x^2+y^2}$　(7) $\dfrac{xy+y^4}{x^2+y^2}$　(8) $\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$

(9) $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(10) $\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(11) $xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(12) $(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(13) $(x^3+y^3)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

4_d　関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

は $(x,y)=(0,0)$ において

[1] 連続　[2] 偏微分可能　[3] 全ての方向について方向微分可能

[4] 全微分可能　[5] C^1 級

であるか否か調べよ。

解析II・演習問題—No.4—

極値問題

5　次の関数は $(x,y)=(0,0)$ で

(a) 極大値をとる　(b) 極小値をとる　(c) 極値をとらない

のいずれであるか答えよ。

(1)	$4x^2+3y$	(2)	$4x^2+3y^2$	(3)	$4x^2-3y^2$
(4)	$-4x^2+3y$	(5)	$-4x^2+3y^2$	(6)	$-4x^2-3y^2$
(7)	$3x+4y^2$	(8)	$3x^2+4y^2$	(9)	$-3x^2+4y^2$
(10)	$3x-4y^2$	(11)	$3x^2-4y^2$	(12)	$-3x^2-4y^2$

6　a は実数とする。次の関数の極値を求めよ。

(1)	$-3x^2+2xy-3y^2+2$	(2)	$6x^2+4xy+17y^2-4x+64y+50$
(3)	$x^2+3xy+2y^2+3x+4y$	(4)	$x^2-2xy+3y^2+6x-14y$
(5)	x^3+3xy^2-3x	(6)	$x^3-3xy+3y^2$
(7)	$x^3-2xy+2y^2$	(8)	$-6x^3+9x^2y+y^3-3y$
(9)	$x^3-6x^2y-4y^3-3x+6y$	(10)	$3x^3+6x^2y-4y^3-9x-6y$
(11)	x^3+12xy^2-12x	(12)	$12x^2y+y^3-12y$
(13)	$3x^2y+4y^3-12y$	(14)	$4x^3+3xy^2-12x$
(15)	$-x^4+4xy-2y^2$	(16)	x^4+y^4-4xy
(17)	$x^3+axy+y^2$	(18)	$x^3+xy+ay^2$
(19)	$e^x+e^{-x}+y^3-3y$		
(20)	$\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$	(21)	$\dfrac{x}{x^2+y^2+1}$
(22)	$\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$	(23)	$\dfrac{1}{x^4+y^2+1}$

7_a　g は C^4 級の 1 変数関数とし、g' と g'' は共通零点を持たないとする。2 変数関数 $f(x_1,x_2)=g(x_1)-g''(x_1){x_2}^2$ は極値を持たないことを示せ。

7_b　g は C^4 級の 1 変数関数とし、g' は零点を持たないとする。n は自然数とする。2 変数関数 $f(x_1,x_2)=g(x_1)+g''(x_1){x_2}^n$ は極値を持たないことを示せ。

解析II・演習問題—No.5—

極値問題（続き）

8　次の関数の各条件の下での極値を求めよ。

(1)　$-3x^2+2xy-3y^2+2$　条件　$x^2+y^2=2$　［6 (1) の続き］

(2)　$-x^2+4xy+2y^2$　条件　$x^2+y^2=5$

(3)　$-x^2+6xy+7y^2$　条件　$x^2+y^2=10$

(4)　$-x^2+24xy+6y^2$　条件　$x^2+y^2=25$

(5)　$-x^2+7xy+23y^2$　条件　$x^2+y^2=50$

(6)　x^3+12xy^2-12x　条件　$x^2+y^2=1$　［6 (11) の続き］

(7)　$12x^2y+y^3-12y$　条件　$x^2+y^2=100$　［6 (12) の続き］

(8)　$12x^2y+y^3-12y$　条件　$x^2+y^2=1$　［6 (12) の続き］

(9)　$4x^3+3xy^2-12x$　条件　$x^2-3x+y^2=4$　［6 (14) の続き］

(10)　$-x^4+4xy-2y^2$　条件　$x^2+y^2=2$　［6 (15) の続き］

(11)　x^4+y^4-4xy　条件　$x^2+y^2=2$　［6 (16) の続き］

(12)　$x+y$　条件　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(13)　$x+y$　条件　$x^4+y^4+x^2+xy+y^2=2$

(14)　xy　条件　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

解析II・演習問題—No.6—

重積分

9_a　a, b は正の定数とする。次の重積分を計算せよ。（ $*$ はやや難しい。）

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \displaystyle\iint_A (x+y)^2 dxdy & A:\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b \\
(2) & \displaystyle\iint_A \sqrt{x+y}\, dxdy & A:\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b \\
(3) & \displaystyle\iint_A xy\, dxdy & A:\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \le 1 \\
(4) & \displaystyle\iint_A (x^2 - y^2) dxdy & A:\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \le 1 \\
(5)^* & \displaystyle\iint_A \sqrt{x}\, dxdy & A:\ x^2 + y^2 \le x
\end{array}
$$

9_b　重積分

$$\iint_A (x+y) dxdy \qquad A:\ \frac{x^2}{3} + y^2 \le 1,\ 0 \le y \le x$$

の値を、変数変換 $(x, y) = (\sqrt{3} r \cos\theta, r \sin\theta)$ を用いて計算せよ。

10　次の三つの直円柱面で囲まれた立体の体積及び表面積を求めよ。ただし a は正の定数とする。

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2, \quad z^2 + x^2 = a^2$$

11　a, b は共に正の実数で、$a < b$ とする。球面 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ の内、直円柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ の内側にある部分の面積を求めよ。

12_a　a は正の実数とする。放物面 $z = a^2 - x^2 - y^2$ を M とする。次の各問に答えよ。

(1)　放物面 M と xy 平面で囲まれた立体の体積を求めよ。

(2)　放物面 M の内、xy 平面より上にある部分の面積 S_a を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{S_a}{\pi a^2}$ を求めよ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \frac{S_a}{2\pi a^3}$ を求めよ。（ $2\pi a^3$ は同じ底面と高さを持つ円柱の側面積である。）

解析II・演習問題—No.7—

$\boxed{\textbf{重積分}}$ （続き）

12_b　a は正の実数とする。曲面 $z = x^2 - y^2$ $(x^2 + y^2 \leq a^2,\ -x \leq y \leq x)$ の面積を S_a とおく。次の各問に答えよ。

(1)　S_a を求めよ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{S_a}{a^2}$ を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \frac{S_a}{a^3}$ を求めよ。

13　a, b, c はいずれも正の実数（(1) で、 $a < b$, (5) で、 $a < c, b < c$ ）とする。次の閉領域の体積を求めよ。

(1)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$

(2)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2 z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$

(3)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq az,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2a^2\}$

(4)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\}$

(5)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0,\ z \leq ax + c,\ z \leq -bx + c\}$

(6)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a,\ -x \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq x^2 - y^2\}$