解析IV・演習問題—No.1—

複素平面

1 $_{\text{a}\sim\text{l}}$ 方程式

(a) $z^4+4=0$	(b) $z^4-3z^2+9=0$	(c) $z^4+3z^2+9=0$
(d) $z^6+1=0$	(e) $z^6+z^3+1=0$	(f) $z^6+z^4+z^2+1=0$
(g) $z^6-z^4+z^2-1=0$	(h) $z^6+2z^4+2z^2+1=0$	(i) $z^6-2z^4+2z^2-1=0$
(j) $z^8+z^4+1=0$	(k) $z^8-z^6+z^2-1=0$	(l) $z^8+z^6+z^2+1=0$

について、次の各問に答えよ。

(1) 解を全て求めよ。

(2) (1) で求めた解を複素平面上に図示せよ。

2 $_{\text{a}}$ 次の各問に答えよ。

(1) z^8-1 が次のように因数分解できることを確かめよ。

$$(z-1)(z+1)(z^2+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+\sqrt{2}z+1)$$

(2) 方程式 $z^8-1=0$ の解を複素平面上に図示し、各解が次のどの方程式の解になっているか、図に書き込め。

[1] $z-1=0$	[2] $z+1=0$	[3] $z^2+1=0$
[4] $z^2-\sqrt{2}z+1=0$	[5] $z^2+\sqrt{2}z+1=0$	

2 $_{\text{b}}$ 次の各問に答えよ。

(1) $z^{12}-1$ が次のように因数分解できることを確かめよ。

$$(z-1)(z+1)(z^2+1)(z^2-z+1)(z^2+z+1)(z^2-\sqrt{3}z+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)$$

(2) 方程式 $z^{12}-1=0$ の解を複素平面上に図示し、各解が次のどの方程式の解になっているか、図に書き込め。

[1] $z-1=0$	[2] $z+1=0$	[3] $z^2+1=0$
[4] $z^2-z+1=0$	[5] $z^2+z+1=0$	
[6] $z^2-\sqrt{3}z+1=0$	[7] $z^2+\sqrt{3}z+1=0$	

解析IV・演習問題—No.2—

複素平面（続き）

2 $_{\mathrm{c}}$　次の各問に答えよ。

(1)　z^8+1 が次のように因数分解できることを確かめよ。

$$\left(z^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,z+1\right)\left(z^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,z+1\right)\left(z^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,z+1\right)\left(z^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,z+1\right)$$

(2)　方程式 $z^8+1=0$ の解を複素平面上に図示し、各解が次のどの方程式の解になっているか、図に書き込め。

$$[1]\quad z^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,z+1=0 \qquad [2]\quad z^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,z+1=0$$
$$[3]\quad z^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,z+1=0 \qquad [4]\quad z^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,z+1=0$$

一次変換

3 $_{\mathrm{a\sim i}}$　一次変換 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　条件

$$\text{(a)}\ \begin{cases} f(0)=i \\ f(i)=\infty \\ f(1)=1 \end{cases} \quad \text{(b)}\ \begin{cases} f(0)=-1 \\ f(i)=i \\ f(1)=\infty \end{cases} \quad \text{(c)}\ \begin{cases} f(0)=-1 \\ f(i)=i \\ f(1)=0 \end{cases}$$

$$\text{(d)}\ \begin{cases} f(1)=i \\ f(i)=1 \\ f(-1)=-i \end{cases} \quad \text{(e)}\ \begin{cases} f(1)=1 \\ f(i)=0 \\ f(-1)=\infty \end{cases} \quad \text{(f)}\ \begin{cases} f(1)=0 \\ f(i)=-i \\ f(-1)=\infty \end{cases} \quad \text{(g)}\ \begin{cases} f(1)=1 \\ f(i)=0 \\ f(-1)=-1 \end{cases}$$

$$\text{(h)}\ \begin{cases} f(-1)=-1 \\ f(0)=-i \\ f(1)=1 \end{cases} \quad \text{(i)}\ \begin{cases} f(-1)=-1 \\ f(0)=i \\ f(1)=1 \end{cases} \quad \text{(j)}\ \begin{cases} f(-1)=1 \\ f(0)=i \\ f(1)=-1 \end{cases}$$

を満たすものを求めよ。

(2)　(1) で求めた $f(z)$ によって、

上半平面 $\{z\in\mathbf{C}|\mathrm{Im}\ z>0\}$,　第一象限,　原点中心の単位開円板 $\{z\in\mathbf{C}||z|<1\}$

はそれぞれどこに写るか。その像を求めよ。

解析IV・演習問題—No.3—

一次変換（続き）

4　z_0 は複素数、R は正の実数とする。方程式 $|z-z_0|=R$ により与えられる円を C 、一次変換 $w=\dfrac{1}{z}$ による円 C の像を C' とする。

(1)　C' は円または直線となることを示せ。特に直線となるのはどのようなときか明記せよ。

(2)　C' が円となるときを考える。二点 z_1, z_2 は 円 $|z-z_0|=R$ について対称である（すなわち $(z_1-z_0)(\overline{z}_2-\overline{z}_0)=R^2$ を満たす）とする。このとき、二点 $\dfrac{1}{z_1}, \dfrac{1}{z_2}$ は円 C' について対称であることを確かめよ。

5　a, b, c, d は複素数で、$ad-bc\neq 0$ とする。一次変換 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ による単位円（原点中心、半径 1 の円周）の像を C とする。次の各問に答えよ。

(1)　C が原点を通るための a, b, c, d に関する条件を求めよ。

(2)　C が直線になるための a, b, c, d に関する条件を求めよ。

(3)　C が原点を通る直線になり、さらに $f(0)$ 及び $f(\infty)$ が共に実軸上にあるとする。このときの $ad+bc$ の値を求めよ。

6　a, b, c は複素数で、$a\neq 0, b\neq c$ とする。一次変換 $f(z)=\dfrac{a(z-b)}{z-c}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　単位円を単位円に写すための a, b, c に関する条件を求めよ。

(2)　実軸を実軸上（または無限遠点 ∞ ）に写すための a, b, c に関する条件を求めよ。

(3)　虚軸を虚軸上（または無限遠点 ∞ ）に写すための a, b, c に関する条件を求めよ。

(4)　実軸を単位円に写すための a, b, c に関する条件を求めよ。

(5)　虚軸を単位円に写すための a, b, c に関する条件を求めよ。

(6)　単位円を実軸上（または無限遠点 ∞ ）に写すための a, b, c に関する条件を求めよ。

(7)　単位円を虚軸上（または無限遠点 ∞ ）に写すための a, b, c に関する条件を求めよ。

（**注意**：出来るだけ簡単な形で表せ。）

解析IV・演習問題—No.4—

正則関数

7 $_{\mathrm{a}\sim\mathrm{c}}$　関数

$$\text{(a)}\quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \text{(b)}\quad \mathrm{tanh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad \text{(c)}\quad e^{z^2}$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　実部と虚部とに分け、それらを x と y に関する二変数実数値関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ として表せ。

(2)　(1) で求めた $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が、Cauchy-Riemann の関係式を満たすことを確かめよ。

8 $_{\mathrm{a}\sim\mathrm{c}}$　次の関数は $\mathbf{C}$ 上正則ではないことを示せ。

$$\text{(a)}\quad |z| \qquad \text{(b)}\quad \overline{z}^2 \qquad \text{(c)}\quad e^{\overline{z}}$$

8 $_{\mathrm{d}\sim\mathrm{f}}$　次の関数は $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上正則ではないことを示せ。

$$\text{(d)}\quad \frac{1}{\overline{z}} \qquad \text{(e)}\quad \frac{\overline{z}}{z} \qquad \text{(f)}\quad \frac{z}{\overline{z}}$$

9 $_{\mathrm{a}}$　$f(z)$ は $\mathbf{C}$ 上の正則関数とする。$f(z)$ が常に実数値をとるならば、$f(z)$ は定数関数であることを示せ。

9 $_{\mathrm{b}}$　$f(z)$ は $\mathbf{C}$ 上の正則関数とする。$f(z)$ が常に純虚数値をとるならば、$f(z)$ は定数関数であることを示せ。

9 $_{\mathrm{c}}$　$f(z)$ は $\mathbf{C}$ 上の正則関数とする。$\mathrm{Re}\, f(z)$ が定数関数ならば、$f(z)$ もまた定数関数であることを示せ。

9 $_{\mathrm{d}}$　$f(z)$ は $\mathbf{C}$ 上の正則関数とする。$\mathrm{Im}\, f(z)$ が定数関数ならば、$f(z)$ もまた定数関数であることを示せ。

9 $_{\mathrm{e}}$　$f(z)$ は $\mathbf{C}$ 上の正則関数とする。$|f(z)|$ が定数関数ならば、$f(z)$ もまた定数関数であることを示せ。

解析IV・演習問題—No.5—

正則関数（続き）

10　$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$) とし、$f(z)$ は $\mathbf{C}$ 上の正則関数とする。

(1)　$\mathrm{Re}f(z)$ が y のみによる関数のとき、$\mathrm{Im}f(z)$ は x のみによる関数となることを示せ。

(2)　(1) の仮定を満たす $f(z)$ を全て求めよ。

11_{a}　$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$) とし、$f(z)$ は $\mathbf{C}$ 上の正則関数とする。次の各問に答えよ。

(1)　$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ に対し、$\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}$ を r, x, y を用いて表せ。

(2)　$f(z)$ が r のみによる関数ならば、$f(z)$ は定数関数であることを示せ。

11_{b}　$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$) とし、$f(z)$ は右半平面 $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$ 上の正則関数とする。次の各問に答えよ。

(1)　$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ に対し、$\dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}$ を r, x, y を用いて表せ。

(2)　$f(z)$ が θ のみによる関数ならば、$f(z)$ は定数関数であることを示せ。

12_{a}[3_{g} の続き]　3_{g} (1) で求めた $f(z)$ に対し、$g(z) = f(z)^2 = \left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)^2$ とおく。この $g(z)$ によって、

原点中心の単位開円板 $\{z \in \mathbf{C} | |z| < 1\}$,　右半平面 $\{z \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}\, z > 0\}$

はそれぞれどこに写るか。その像を求めよ。

解析IV・演習問題—No.6—

正則関数（続き）

12_{b}　二次関数 z^2 の写し方に着目して、次の各問に答えよ。但し、

$$\begin{aligned} D &:= \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\} & \text{（単位円板）} \\ H &:= \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\} & \text{（上半平面）} \end{aligned}$$

と表わすことにする。

(1)　半円板 $D \cap H$ を H の上へ一対一に写す正則関数 $w = f(z)$ で、条件

$$f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$$

を満たすものを求めよ。

(2)　半円板 $D \cap H$ を D の上へ一対一に写す正則関数 $w = f(z)$ で、条件

$$f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$$

を満たすものを求めよ。

(3)　第一象限（右上の象限）を D の上へ一対一に写す正則関数 $w = f(z)$ で、条件

$$f(0) = -i, \quad f(1) = 1$$

を満たすものを求めよ。

13_{a}　三次関数 z^3 の写し方に着目して、扇形の領域

$$\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$$

を第四象限（右下の象限）の上へ一対一に写す正則関数 $w = f(z)$ で、条件

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0$$

を満たすものを求めよ。

13_{b}　三次関数 z^3 の写し方に着目して、領域

$$\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$$

を単位開円板 $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ の上へ一対一に写す正則関数 $w = f(z)$ で、条件

$$f(0) = -i, \quad f(1) = 1$$

を満たすものを求めよ。

解析IV・演習問題—No.7—

正則関数（続き）

14_{a}　指数関数 e^z の写し方に着目して、帯状の領域

$$\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$$

を単位円板 D の上へ一対一に写す正則関数 $w = f(z)$ で、条件

$$f(0) = -i, \quad f(i) = i$$

を満たすものを求めよ。

14_{b}　指数関数 e^z の写し方に着目して、帯状の領域

$$\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

を第二象限（左上の象限）の上へ一対一に写す正則関数 $w = f(z)$ で、条件

$$f(0) = 0, \quad f(\pi i) = \infty$$

を満たすものを求めよ。

複素積分

$15_{\mathrm{a}\sim\mathrm{c}}$　C は次の曲線とする。

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad z = 2e^{it} \quad (0 \le t \le \pi) \\
&\text{(b)} \quad z = 2e^{-it} \quad (0 \le t \le \pi) \\
&\text{(c)} \quad z = \begin{cases} 1 + e^{it} & (0 \le t \le \pi) \\ -1 + e^{-i(t-\pi)} & (\pi \le t \le 2\pi) \end{cases}
\end{aligned}$$

積分 $\displaystyle\int_C \frac{2z}{z^2-1}dz$ の値を求めよ。

解析IV・演習問題—No.8—

複素積分（続き）

16_{a}　次の各曲線 C_k $(k=1,2,3)$ について、積分 $\displaystyle\int_{C_k}\frac{2dz}{z(z-2)}$ の値を求めよ。

(1)　$C_1 : z = 3e^{it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$

(2)　$C_2 : z = 3e^{-it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$

(3)　$C_3 : z = \begin{cases} 2+e^{it} & (0 \leq t \leq \pi) \\ -1+2e^{-i(t-\pi)} & (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$

16_{b}　次の各曲線 C_k $(k=1,2,3)$ について、積分

$$\text{(i)}\quad \int_{C_k}\frac{-z+3}{z(z+3)}dz \qquad \text{(ii)}\quad \int_{C_k}\frac{-2z+3}{z(z+3)}dz$$

の値を求めよ。

(1)　$C_1 : z = 4e^{it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$

(2)　$C_2 : z = 4e^{-it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$

(3)　$C_3 : z = \begin{cases} 1+3e^{it} & (0 \leq t \leq \pi) \\ 2e^{it} & (\pi \leq t \leq 2\pi) \\ -1+3e^{it} & (2\pi \leq t \leq 3\pi) \end{cases}$

16_{c}　次の各曲線 C_k $(k=1,2,3)$ について、積分 $\displaystyle\int_{C_k}\frac{2}{z^2-1}dz$ の値を求めよ。

(1)　$C_1 : z = 2e^{it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$

(2)　$C_2 : z = 2e^{-it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$

(3)　$C_3 : z = \begin{cases} -1+3e^{it} & (0 \leq t \leq \pi) \\ -2+2e^{it} & (\pi \leq t \leq 2\pi) \\ -1+e^{it} & (2\pi \leq t \leq 3\pi) \end{cases}$

16_{d}　次の各曲線 C_k $(k=1,2,3)$ について、積分 $\displaystyle\int_{C_k}\frac{2dz}{z(z+2)}$ の値を求めよ。

(1)　$C_1 : z = 3e^{it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$

(2)　$C_2 : z = 3e^{-it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$

(3)　$C_3 : z = \begin{cases} 1+2e^{it} & (0 \leq t \leq \pi) \\ -2-e^{-it} & (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$

(4)　$C_4 : z = \begin{cases} 1+2e^{it} & (0 \leq t \leq \pi) \\ 2+3e^{it} & (\pi \leq t \leq 2\pi) \\ 1+4e^{it} & (2\pi \leq t \leq 3\pi) \end{cases}$

解析IV・演習問題—No.9—

留数定理

$17_{\mathrm{(i),(ii)}}$ [1 a, 2 a の続き]　次の各問に答えよ。

(1)　各特異点における、関数

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{z^4+4} \qquad \text{(ii)}\quad \frac{1}{z^8-1} \qquad \text{(iii)}\quad \frac{z^4}{z^6+1}$$

の留数を求めよ。

(2)　C は中心 1 半径

$$\text{(i)}\quad 2 \qquad \text{(ii, iii)}\quad 1.9$$

の円周上を左回りに一周する閉曲線とする。積分

$$\text{(i)}\quad \int_C \frac{dz}{z^4+4} \qquad \text{(ii)}\quad \int_C \frac{dz}{z^8-1} \qquad \text{(iii)}\quad \int_C \frac{z^4}{z^6+1}dz$$

の値を求めよ。

$18_{\mathrm{d,d',f,h,i,i'}}$ [1 d,f,h,i の続き]　次の各問に答えよ。

(1)　上半平面にある各特異点における、関数

$$\text{(d)}\quad \frac{1}{z^6+1} \qquad \text{(d}'\text{)}\quad \frac{z^4}{z^6+1} \qquad \text{(f)}\quad \frac{1}{z^6+z^4+z^2+1}$$

$$\text{(h)}\quad \frac{1}{z^6+2z^4+2z^2+1} \qquad \text{(i)}\quad \frac{1}{z^8+z^4+1} \qquad \text{(i}'\text{)}\quad \frac{z^6}{z^8+z^4+1}$$

の留数を求めよ。

(2)　積分

$$\text{(d)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} \qquad \text{(d}'\text{)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6+1}dx \qquad \text{(f)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+x^4+x^2+1}$$

$$\text{(h)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+2x^4+2x^2+1} \qquad \text{(i)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^8+x^4+1} \qquad \text{(i}'\text{)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{x^8+x^4+1}dx$$

の値を、留数定理（から得られる公式）を用いて求めよ。

解析IV・演習問題—No.10—

留数定理（続き）

19[１$_1$ の続き]　次の各問に答えよ。

(1)　関数 $g(z)$ は z_0 の近傍で正則とする。関数

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$$

について、$\displaystyle\lim_{z\to z_0}\{(z-z_0)^2 f(z)\}'$ を求めよ。

(2)　関数 $\dfrac{1}{z^8+z^6+z^2+1}$ について、上半平面にある各特異点における留数を求めよ。

(3)　積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^8+x^6+x^2+1}$ の値を、留数定理（から得られる公式）を用いて求めよ。

20$_{\mathrm{a}\sim\mathrm{c}}$　次の各問に答えよ。

(1)　関数 $g(z)$ は z_0 の近傍で正則とする。関数

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$$

について、$\displaystyle\lim_{z\to z_0}\{(z-z_0)^3 f(z)\}''$ を求めよ。

(2)　積分

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$　　(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)^3}$　　(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+\sqrt{3}x+1)^3}$

の値を、留数定理（から得られる公式）を用いて求めよ。