解析学I・第１回テスト直前自習用問題

使用上の注意！

(1) この問題はレポート問題ではありません。従って解答を提出する必要はありません。

(2) この問題は試験問題ではありません。ここに掲げた問題は少なくともこのままの形では試験には出題されませんし、また全く異なるタイプの問題（例えば証明問題など）が出題される可能性もあります。従って解答を未消化のまま丸暗記しても効果はありません。

(3) この問題を演習問題として利用することができます。

1　次の各関数 f の原点 $(0,0)$ での値はいずれも $f(0,0)=0$ で与えられるものとする。このとき各 f は原点において

[1] 連続　[2] 偏微分可能　[3] 全ての方向について方向微分可能

[4] 全微分可能　[5] C^1 級

であるか否か調べよ。

(1) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2}$　(2) $f(x_1,x_2)=\dfrac{{x_1}^2x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2}$

(3) $f(x_1,x_2)=\dfrac{{x_1}^2x_2}{{x_1}^4+{x_2}^2}$　(4) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1x_2}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}}$

(5) $f(x_1,x_2)=\dfrac{{x_1}^2x_2}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}}$　(6) $f(x_1,x_2)=x_1x_2\sin\dfrac{1}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}}$

2　次の各関数 f の極値を全て求めよ。

(1) $f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{{x_1}^2+{x_2}^2+1}$　(2) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{{x_1}^2+{x_2}^2+1}$

(3) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2+1}$　(4) $f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{{x_1}^4+{x_2}^2+1}$

解析学I・第２回テスト直前自習用問題

1 [**逆写像定理の証明の内、講義で省略した部分の補足**]

(1)　K は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合、φ は K から自分自身への縮小写像、すなわち

$\exists\epsilon < 1, \forall x, \forall x' \in K, ||\varphi(x) - \varphi(x')|| < \epsilon||x - x'||$

とする。このとき $\varphi(x_0) = x_0$ を満たす $x_0 \in K$ が（ただ一つ）存在することを示せ。

（ヒント） $x_1 \in K$ を一つとり、$x_i = \varphi(x_{i-1})$ により定義される K 内の点列 $\{x_i\}$ を考える。

(2)　講義の逆写像定理の仮定の下で、点 $F(a)$ の十分小さい近傍 V に対し、点 a のある近傍 U が存在して、$V \ni y$ を任意に一つ選び固定して、$\overline{U} \ni x$ に対し

$\varphi(x) = x + F'(a)^{-1}(y - F(x))(= F'(a)^{-1}(y - G(x)))$

とおくと、φ は $\overline{U}$ から自分自身への縮小写像となることを示せ。

（注） (1),(2) を合わせると、$\varphi(x_0) = x_0$ なる点 $x_0 \in \overline{U}$ に対し $F(x_0) = y$ となり、F^{-1} が点 $F(a)$ の近傍で定義されていることが確かめられる。

2　次の各関数 f の各条件下での極値を全て求めよ。

(1)　$f(x_1, x_2) = {x_1}^2 x_2$　　条件 ${x_1}^4 + {x_2}^2 = 1$

(2)　$f(x_1, x_2) = {x_1}^3 + {x_2}^2$　条件 ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$

(3)　$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ 条件 ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$

3　a は実数とする。$\mathbf{R}^2$ 上の点 $(a, 0)$ を中心とし、半径が 1 の円周を C_a とする。関数 $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ の C_a への制限が 4 個の極値をとるような a の範囲を求めよ。

4　$a > 0$ とする。asteroid ${x_1}^{2/3} + {x_2}^{2/3} = a^{2/3}$ の長さ、及びその囲む閉領域の面積を、座標変換 $x_1 = r\cos^3 t,\ x_2 = r\sin^3 t$ を利用して求めよ。

5　広義重積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-{x_1}^2 - {x_2}^2} dx_1 dx_2$ を計算することにより、$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ の値を求めよ。

6 [**$\mathbf{R}^3$ の極座標**]　原点への距離 r, 北極との緯度の差 φ, 東経 θ, により $\mathbf{R}^3$ に極座標を入れる、すなわち

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\varphi\cos\theta \\ x_2 = r\sin\varphi\sin\theta \\ x_3 = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \le r \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

により座標変換を行うとする。

(1)　Jacobian は $r^2\sin\varphi$ であることを確かめよ。

(2)　これを用いて、半径 R の球の体積が $\dfrac{4}{3}\pi R^3$ であることを確かめよ。

(3)　$r \le f(\varphi, \theta)$ で与えられる閉領域 A の体積の公式を求めよ。

7　C は $\mathbf{R}^2$ 内の左回りの C^1 級単純閉曲線で、弧長パラメーター s により $(x_1(s), x_2(s))$ $(0 \le s \le \ell)$ と表されているとする。C の囲む閉領域を A とし、f は A 上の C^2 級関数とする。

(1)　C 上の各点において、f の外向きの単位法線ベクトル方向の方向微分は、次の式で与えられることを確かめよ。

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{dx_2}{ds}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{dx_1}{ds}\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

(2)　$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}$ と表す。（ Δ を Laplacian と言う。）このとき、次のことを示せ。

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial n} ds = \iint_A \Delta f dx_1 dx_2$$