解析学II・自習用問題

D は平面 $\mathbf{R}^2$ 内の有界領域で、その境界 $C=\partial D$ が C^1 級単純閉曲線であるものとする。$f,\ g,\ h$ はいずれも $\overline{D}$ 上の C^2 級関数とする。

$$e(f) := \frac{1}{2}(\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f), \qquad E(f) := \iint_D e(f) dxdy$$

とおく。t は実数とする。φ は C 上の連続関数とする。

1　次の等式を示せ。

$$\mathrm{div}(g\,\mathrm{grad} f) = g\Delta f + (\mathrm{grad} g, \mathrm{grad} f)$$

2　次の等式を示せ。

$$\int_C g\frac{\partial f}{\partial n} ds = \iint_D \{g\Delta f + (\mathrm{grad} g, \mathrm{grad} f)\}\, dxdy$$

3　次の等式を示せ。

$$\int_C \left(g\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial g}{\partial n}\right) ds = \iint_D (g\Delta f - f\Delta g) dxdy$$

4　次の等式を示せ。

$$\frac{d}{dt}E(f+th)|_{t=0} = \iint_D (\mathrm{grad} h, \mathrm{grad} f) dxdy$$

5　C 上 $h=0$ のとき、次の等式を示せ。

$$\frac{d}{dt}E(f+th)|_{t=0} = -\iint_D h\Delta f dxdy$$

6　C 上 $f=\varphi$ を満たす f の内 $E(f)$ を最小にするものは、D 上 $\Delta f\equiv 0$ を満たすことを示せ。

7　次の等式を示せ。

$$\frac{d}{dt}E(f+tf)|_{t=0} = E(f)$$

8　D 上 $\Delta f \equiv 0$ かつ C 上 $f=0$ のとき、D 上 $f\equiv 0$ であることを示せ。

9　D 上 $\Delta f\equiv 0$ かつ C 上 $f=\varphi$ であるような f は、各 φ に対し（存在したとすれば）ただ一つであることを示せ。