基礎数学 A・演習問題—No.1—

関数の極限と連続性

1　次の関数の逆関数を求めよ。但し (3) については定義域を適当に制限して答えよ。

(1)　$y = \mathrm{tanh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$　(2)　$y = \mathrm{sinh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$　(3)　$y = \mathrm{cosh}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(4)　$y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$　(5)　$y = \log(1 + \sqrt{x^2+1}) - \log x$　(6)　$y = \log(x + \sqrt{x^2-1})$　$(x \geq 1)$

(7)　$y = \log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$　(8)　$y = \log\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

2　a, b, c, d はいずれも正の実数とする。次の極限値を求めよ。

(1a)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)(3x-4)}{5x^2+6x-7}$　(1b)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a - x}{x^a + x}$　(1c)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^a - x}{x^a + x}$

(2a)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+2}+3}{4e^{x+5}+6}$　(2b)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+2}+3e^{4x+5}}{5e^{4x+3}+e^{2x+1}}$　(2c)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+2}+3e^{4x}}{4e^{3x+2}+e^{x}}$

(3a)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a\log 2x + b}{c\log x + d}$　(3b)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a + b\log x}{c + d\log 2x}$　(3c)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^2)+\log(3x)}{\log(2x)+\log(x^3)}$

(4a)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{\sin bx\cos cx}$　(4b)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x\tan 4x}{\cos 5x\tan 6x}$　(4c)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\cos bx\tan cx}$

(4d)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos 2x}{\cos 3x\tan 6x}$

(5a)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x^a}$　(5b)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(5c)　$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$

(5d)　$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

(6a)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$　(6b)　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+ax)^{b/x}$　(6c)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}$

(6d)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-a}\right)^{x-b}$　(6e)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{1/x}$　(6f)　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1-x^2)^{1/x}$

(7a)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x - b^x}{x}$　(7b)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{b^x - a^x}$

(8)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(a^x + b^x)^{1/x}$　(9)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^x$

3　実係数の方程式 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ は、$a_na_0 < 0$ の時、少なくとも一つ正の解を持つことを示せ。

4　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ はいずれも実数で、$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ とする。方程式

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n} = 0$$

は $n-1$ 個の実解を持つことを示せ。

基礎数学A・演習問題—No.2—

5　関数 $x^{1/x}$ $(x > 0)$ について、次の各問に答えよ。

(1)　方程式 $x^{1/x} = 1/2$ は実解を持つことを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ を求めよ。

(3)　方程式 $x^{1/x} = 1.2$ は 2 個の実解を持つことを示せ。

1 変数関数の微分

6　関数 $f(x) = x^3$ の導関数が $f'(x) = 3x^2$ であることを定義に戻って示せ。

7　次の関数 $f(x)$ の導関数を定義に戻って求めよ。

$$(a)\quad f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad (b)\quad f(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0) \qquad (c)\quad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

8　関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ。

9 $_{a\sim f}$　次の関数について下の問いに答えよ。

$$(a)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \qquad (b)\quad f(x) = |x|^3$$

$$(c)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & x \geq 0 \\ \quad -2x + 3 & x < 0 \end{cases} \qquad (d)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$(e)\quad f(x) = \begin{cases} x^2\left(1 + \cos\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad (f)\quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(1)　関数 $f(x)$ は（(e) $x = 0$ で）微分可能であることを示せ。

(2)　導関数 $f'(x)$ の連続性について調べよ。

基礎数学 A・演習問題—No.3—

$\boxed{1\ \textbf{変数関数の微分}}$（続き）

$10_{a\sim f}$　$p,\,a$ は正の実数とする。次の関数 f について、下の各問に答えよ。

$$(a)\quad f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases} \qquad (b)\quad f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}\left(1+\cos\dfrac{1}{x}\right) & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$(c)\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^p-1}{x-1} & x\neq 1 \\ p & x=1\end{cases} \qquad (d)\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{ax}-1}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0\end{cases}$$

$$(e)\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{\log x}{x-1} & x>0, x\neq 1 \\ 1 & x=1\end{cases} \qquad (f)\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\ x\neq 0 \\ 1 & x=0\end{cases}$$

(1)　$f(x)$ は $x=0$ （(c,e) $x=1$ ）で連続であることを示せ。

(2)　$x\neq 0$ （(c) $x\neq 1$; (e) $x>0,\,x\neq 1$; (f) $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\ x\neq 0$ ）で $f(x)$ を微分せよ。

(3)　定義に戻って $f'(0)$ （(c,e) $f'(1)$ ）を求めよ。

(4)　$f(x)$ は $x=0$ （(c,e) $x=1$ ）で C^1 級か否か判定せよ。

11　f,g,h はいずれも微分可能とする。次の関数を微分せよ。

(1)　$f\circ g\circ h(x)(=f(g(h(x))))$　　(2)　$f(g(x)^2h(x))$　　(3)　$f(g(x)^2+h(x))$

12　次の関数を三回まで微分せよ。

$(1a)$	$e^{-x/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$	$(1b)$	$e^{-x/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$		
$(1c)$	$e^{-x/\sqrt{2}}\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$	$(1d)$	$e^{-x/\sqrt{2}}\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}$		
$(2a)$	e^{x^2+x+1}	$(2b)$	e^{x^2-x+1}	$(2c)$	e^{-x^2+x+1}
$(3a)$	$e^{\sin x}$	$(3b)$	$e^{\cos x}$	(4)	$\log(3x^2-2x+1)$
$(5a)$	$\log\cos x$	$(5b)$	$\log\sin x$	(6)	x^x
$(7a)$	$\sin(x^2-2x+3)$	$(7b)$	$\cos(x^2-2x+3)$	$(7c)$	$\tan(2x-3)$
$(8a)$	$\mathrm{sinh}x$	$(8b)$	$\mathrm{cosh}x$	(9)	$\mathrm{tanh}x$
(10)	$\log\mathrm{cosh}x$				

基礎数学A・演習問題—No.4—

1 変数関数の微分（続き）

13　関数 $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　関数 $y = \coth x$ を x について微分せよ。

(2)　導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を $\coth x$ を用いて表せ。

(3)　逆関数 $x = \coth^{-1} y$ を y について微分せよ。

14　次の関数の増減表を書き、極値および凹凸について調べよ。

$$(1)\quad x^4 - 2x^2 + 3 \qquad\qquad (2)\quad x^4 - 4x + 5$$

15　$f(x) = x^{1/x}$ $(x > 0)$ とする。次の各問に答えよ。

(1)　f を微分せよ。

(2)　(1) の結果を用いて、数列 $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=3}^{+\infty}$ は単調減少であることを示せ。

16　n は 3 以上の自然数とする。半径 1 の円に外接する正 n 角形の面積を S_n で表すことにする。次の各問に答えよ。

(1)　S_n の値を n を用いて表わせ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ を求めよ。

(3)　数列 $\{S_n\}_{n=3}^{+\infty}$ は単調減少であることを示せ。

$17_{a,b}$　a, b, c, d はいずれも正の実数で、特に (a) では $ad - bc > 0$ をみたすものとする。次の関数 $f(x)$ について、下の各問に答えよ。

$$(a)\quad f(x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{ce^x + de^{-x}} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = \log(ae^x + be^{-x}) - x$$

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ。

(2)　（(a) 極限値）$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ。

(3)　$f(x)$ を微分せよ。

(4)　$f(x) = 1$ が（(b) 正の）実数解を持つための必要十分条件を、a, b, c, d を用いて表せ。

基礎数学 A・演習問題—No.5—

1 変数関数の微分（続き）

18_a　a, b はいずれも実数とする。関数 $f(x) = x^3 - 3ax + b$ について、次の各問に答えよ。

(1)　極限 $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ が極値を持つための条件を求めよ。

(3)　(2) で求めた条件の下で、$f(x)$ の極値を求めよ。

(4)　$b^2 - 4a^3 < 0$ のとき、方程式 $x^3 - 3ax + b = 0$ は 3 個の実解を持つことを示せ。

18_b　a, b はいずれも実数とする。関数 $f(x) = x^4 - 2ax^2 + b$ について、次の各問に答えよ。

(1)　極限 $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ が 3 点で極値を持つための条件を求めよ。

(3)　(2) で求めた条件の下で、$f(x)$ の極値を求めよ。

(4)　方程式 $x^4 - 2ax^2 + b = 0$ が 4 個の実解を持つための条件を求めよ。

18_c　a, b はいずれも実数とする。関数 $f(x) = x^4 - 4ax^3 + b$ について、次の各問に答えよ。

(1)　極限 $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ は 1 点でしか極値を持たないことを示せ。

(3)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(4)　方程式 $x^4 - 4ax^3 + b = 0$ が 2 個の実解を持つための条件を求めよ。

基礎数学 A・演習問題—No.6—

1 変数関数の微分 （続き）

19　次の関数を $x=0$ で Taylor 展開（ Maclaurin 展開）せよ。また、その収束半径を求めよ。

(1)　a^x　　(2a)　$\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　(2b)　$\sinh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

(3a)　$\log(x^2+1)$　　(3b)　$\log(1-x^2)$

(4a)　$\sin x^2$　　(4b)　$\cos x^2$

(5a)　$\mathrm{Tan}^{-1}x$　　(5b)　$\tanh^{-1}x$　　(6)　$\sinh^{-1}x$

$20_{a\sim e}$　p は 0 でも自然数でもない実数とする。a は 0 でない実数で、特に (e) では 1 より大きいとする。関数

(a)　$f(x)=x^p$　　(b)　$f(x)=x^{p+1}-x^p$　　(c)　$f(x)=e^{ax}$

(d)　$f(x)=xe^x$　　(e)　$f(x)=e^{ax}-e^x$

について、下の各問に答えよ。

(1)　(a,b)　$\dfrac{f^{(n+1)}(1)}{f^{(n)}(1)}$ を n と p を用いて表せ。

(c,e)　$f^{(n)}(1)$ を n と a を用いて表せ。

(d)　$f^{(n)}(1)$ を n を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ の $x=1$ におけるテイラー級数展開を

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_n(x-1)^n + \cdots$$

とする。$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を n と p （ (c,e) n と a; (d) n ）を用いて表せ。

(3)　(2) の級数の収束半径を求めよ。

偏微分と全微分

21　次の関数を二回まで偏微分せよ。特に (1∼4) については、調和関数であることを確かめよ。

(1)　x^3-3xy^2　　(2)　$e^{-x}\cos y$　　(3)　$\log(x^2+y^2)$　　(4)　$\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$

(5a)　$\log(7x+8y+9)$　　(5b)　$\log(x+2y+3)$　　(6)　$\sin(2x-3y+4)$　　(7)　e^{x^2-2y+3}

基礎数学 A・演習問題—No.7—

偏微分と全微分（続き）

22_a　次の関数が調和関数となるような実数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

(1)　$f(x,y)=x^5+ax^3y^2+bxy^4$

(2)　$f(x,y)=x^4+ax^3y+bx^2y^2+cxy^3+ay^4$

(3)　$f(x,y)=cx^4+ax^3y+bx^2y^2+cxy^3+ay^4$

22_b　$a,\ b$ は実数とする。$f(x,y)=\sin(x^2+ay^2)\cosh(bxy)$, $\triangle f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ とする。次の各問に答えよ。

(1)　$\triangle f$ を計算せよ。（参考：$\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\dfrac{d}{dt}\cosh t=\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ である。）

(2)　$a\neq 0$ とする。$\triangle f(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},0)$, $\triangle f(0,\sqrt{\dfrac{\pi}{a}})$ を計算せよ。

(3)　f が調和関数となる（すなわち $\triangle f\equiv 0$ をみたす）ような実数 $a,\ b$ の値を求めよ。

23_a　曲面 $z=x^2-2xy+3y^2+6x-14y$ の $(x,y)=(0,1)$ における接平面の方程式を求めよ。

23_b　曲面 $z=-x^4+4xy-2y^2$ の $(x,y)=(1,-1)$ における接平面の方程式を求めよ。

24_a　次の関数は $(x,y)=(0,0)$ で偏微分可能であるが、連続ではないことを確かめよ。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

24_b　次の各関数の原点 $(0,0)$ での値はいずれも 0 で与えられるものとする。このとき各関数は原点において

[1] 連続　[2] 偏微分可能　[3] 全ての方向について方向微分可能

[4] 全微分可能　[5] C^1 級

であるか否か調べよ。

(1) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　(2) $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$　(3) $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$　(4) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(5) $\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$　(6) $\dfrac{y^4}{x^2+y^2}$　(7) $\dfrac{xy+y^4}{x^2+y^2}$　(8) $\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$

(9) $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(10) $\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(11) $xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(12) $(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(13) $(x^3+y^3)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

基礎数学 A・演習問題—No.8—

極値問題

25　a は実数とする。次の関数の極値を求めよ。

(1) $-3x^2+2xy-3y^2+2$　　(2) $6x^2+4xy+17y^2-4x+64y+50$

(3) $x^2+3xy+2y^2+3x+4y$　　(4) $x^2-2xy+3y^2+6x-14y$

(5) x^3+3xy^2-3x　　(6) $x^3-3xy+3y^2$

(7) $x^3-2xy+2y^2$　　(8) $-6x^3+9x^2y+y^3-3y$

(9) $x^3-6x^2y-4y^3-3x+6y$　　(10) $3x^3+6x^2y-4y^3-9x-6y$

(11) $-x^4+4xy-2y^2$　　(12) $x^3+axy+y^2$

(13) $x^3+xy+ay^2$　　(14) $e^x+e^{-x}+y^3-3y$

(15) $\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$　　(16) $\dfrac{x}{x^2+y^2+1}$

(17) $\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$　　(18) $\dfrac{1}{x^4+y^2+1}$

26_a　g は C^4 級の 1 変数関数とし、g' と g'' は共通零点を持たないとする。2 変数関数 $f(x_1,x_2)=g(x_1)-g''(x_1){x_2}^2$ は極値を持たないことを示せ。

26_b　g は C^4 級の 1 変数関数とし、g' は零点を持たないとする。n は自然数とする。2 変数関数 $f(x_1,x_2)=g(x_1)+g''(x_1){x_2}^n$ は極値を持たないことを示せ。

27　次の関数の各条件の下での極値を求めよ。

(1) $-3x^2+2xy-3y^2+2$　条件　$x^2+y^2=2$　[25(1) の続き]

(2) $-x^2+4xy+2y^2$　条件　$x^2+y^2=5$

(3) $-x^2+6xy+7y^2$　条件　$x^2+y^2=10$

(4) $-x^2+24xy+6y^2$　条件　$x^2+y^2=25$

(5) $-x^2+7xy+23y^2$　条件　$x^2+y^2=50$

(6) $-x^4+4xy-2y^2$　条件　$x^2+y^2=2$　[25(11) の続き]

(7) $x+y$　条件　$x^4+y^4+x^2+xy+y^2=2$