曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.1—

線形代数の準備 1

問 A.1　n 次正方行列が直交行列であることと、n 個の列ベクトルが n 次元数ベクトル空間の正規直交基底をなすことは、同値であることを確かめよ。

問 A.2　二次式 xy を、実対称行列の対角化により座標変換せよ。

問 A.3　次の各問に答えよ。

(1)　二次式 $xy+yz+zx$ を、実対称行列の対角化により座標変換せよ。

(2)　二次曲面 $xy+yz+zx=0$ は、どのような曲面か調べよ。

問 A.4　次の各問に答えよ。

(1)　二次式 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ を、実対称行列の対角化により座標変換せよ。

(2)　二次曲面 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1$ は、どのような曲面か調べよ。

注意（問 A.3,A.4 共通）

(1)　${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ と表したときの A の直交行列による対角化を用いて、$\lambda x'^2+\mu y'^2+\nu z'^2$ の形に書き換えよ。

(2)　高校までに学んでいる曲面である。曲面の名前と配置について答えよ。

問 A.5　次の各問に答えよ。

(1)　二次式 $x^2+z^2+2xy+2yz$ を、実対称行列の対角化により座標変換せよ。

(2)　二次曲面 $x^2+z^2+2xy+2yz=1$ を、(1) で選んだ新しい座標 (x',y',z') に関する座標平面 $x'=0,\ y'=0,\ z'=0$ で切った切り口に現れる平面曲線は、それぞれどのような曲線か調べよ。

問 A.6　次の各問に答えよ。

(1)　二次式 $x^2+z^2+2xy+2yz-4zx$ を、実対称行列の対角化により座標変換せよ。

(2)　二次曲面 $x^2+z^2+2xy+2yz-4zx=1$ を、(1) で選んだ新しい座標 (x',y',z') に関する座標平面 $x'=0,\ y'=0,\ z'=0$ で切った切り口に現れる平面曲線は、それぞれどのような曲線か調べよ。

問 A.7　次の各問に答えよ。

(1)　二次式 $x^2+2z^2+4xy+4zx$ を、実対称行列の対角化により座標変換せよ。

(2)　二次曲面 $x^2+2z^2+4xy+4zx=1$ を、(1) で選んだ新しい座標 (x',y',z') に関する座標平面 $x'=0,\ y'=0,\ z'=0$ で切った切り口に現れる平面曲線は、それぞれどのような曲線か調べよ。

注意（問 A.5,A.6,A.7 共通）

(1)　${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ と表したときの A の直交行列による対角化を用いて、$\lambda x'^2+\mu y'^2+\nu z'^2$ の形に書き換えよ。

(2)　各曲線の名称以外についても何か記すこと。

問 A.8　$a,\ b$ は実数で、$a<1<b$ をみたすものとする。次の各問に答えよ。

(1)　二次式 $x^2+ay^2+bz^2$ を、直交行列による座標変換により、$x'^2+y'^2+2\alpha y'z'+\beta z'^2$ の形に書き換えよ。

(2)　二次曲面 $x^2+ay^2+bz^2=1$ を切った切り口が円となるような平面が、無限個存在することを示せ。

問 A.9　$a,\ b$ は実数で、$ab<0$ をみたすものとする。次の各問に答えよ。

(1)　二次式 $x^2+ay^2+bz^2$ を、直交行列による座標変換により、$x'^2+2\alpha y'z'+\beta z'^2$ の形に書き換えよ。

(2)　二次曲面 $x^2+ay^2+bz^2=1$ を切った切り口が放物線となるような平面が、無限個存在することを示せ。

問 A.10　$b\neq 0$ のとき、曲線 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ は、円とはならないことを示せ。

問 A.11　曲線 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ が、長径と短径の比が 2 であるような楕円となるための、a,b,c に関する必要十分条件を求めよ。

問 A.12　曲線 $x^2+2bxy+y^2=1$ が、短径と長径の比が $1:3$ であるような楕円となる b の値を求めよ。

問 A.13　$\lambda\mu<0$ とする。曲線 $\lambda X^2+\mu Y^2+C=0$ が直角双曲線となる（漸近線が直交する）ための、λ と μ に関する必要十分条件を求めよ。

問 A.14　$b^2-ac>0$ とする。曲線 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ が直角双曲線となる（漸近線が直交する）ための、a,b,c に関する必要十分条件を求めよ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.2—

線形代数の準備１ （続き）

問 A.15　$b^2 - ac > 0$ とする。曲線 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ が、漸近線のなす小さい方の角が $\dfrac{\pi}{3}$ であるような双曲線となるための、a, b, c に関する必要十分条件を求めよ。

問 A.16　$\lambda \neq 0, \beta \neq 0$ とする。$\lambda X^2 + \beta Y = 0$ で与えられる全ての放物線は、λ と β の値によらず、互いに相似であることを示せ。

問 A.17　$a > 0,\, d > 0$ とする。円錐面 $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ を平面 $z = bx + cy + d$ で切った切り口に現れる平面曲線が放物線となるための、a, b, c に関する必要十分条件を求めよ。

問 A.18*　二次曲面の分類を試みよ。

$\boxed{\text{平面曲線}}$

問 1.1 $a, b > 0$ とする。（弧長でない）媒介変数で表示された楕円

$$X(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

について、次の各問に答えよ。

(1) 曲率を計算せよ。

(2) 頂点を求めよ。

問 1.2 $a > b > 0$ とする。（弧長でない）媒介変数で表示された双曲線の一部

$$X(t) = \begin{pmatrix} a\,\cosh\,t \\ b\,\sinh\,t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

について、次の各問に答えよ。

(1) 曲率を計算せよ。

(2) 頂点を求めよ。

問 1.3 $a > 0$ とする。（弧長でない）媒介変数で表示されたカージオイド

$$X(t) = \begin{pmatrix} a(1+\cos t)\cos t \\ a(1+\cos t)\sin t \end{pmatrix} \qquad (0 < t < 2\pi)$$

について、次の各問に答えよ。

(1) 曲率を計算せよ。

(2) 頂点を求めよ。

問 1.4 平面曲線 $x^4 + y^4 = 1$ の第 1 象限にある部分は、弧長パラメーターでない t により

$$X(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\cos t} \\ \sqrt{\sin t} \end{pmatrix} \qquad (0 < t < \frac{\pi}{2})$$

と表される。次の各問に答えよ。

(1) 曲率 $\sigma(t)$ を計算せよ。

(2) $\sigma(\frac{\pi}{4})$ を求めよ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.3—

$\boxed{\text{平面曲線}}$（続き）

問 1.5　$a > 0$ とする。極座標で $r = a\theta$ $(\theta \geq 0)$ と表される曲線を Archimedes の螺線と呼ぶ。次の各問に答えよ。

(1)　曲率を計算せよ。

(2)　Archimedes の螺線は、$\theta \neq 0$ で頂点を持たないことを確かめよ。

問 1.6　次の曲線について、下の各問に答えよ。

（イ）$y = \dfrac{1}{3}x^3 - x$	（ロ）$y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{x}$	（ハ）$y = e^x - x$
（ニ）$y = x - \log x \quad (x > 0)$	（ホ）$y = 2\sqrt{x} - x \quad (x \geq 0)$	（ヘ）$y = \dfrac{1}{x}$

(1)　曲率を求めよ。

(2)　頂点を求め、その大まかな位置を図示せよ。

注意　極大点、極小点がある場合は、それらとの位置関係を明確に。

問 1.7　$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の C^3 級関数とする。xy-平面上の二つの曲線 $y = f(x)$, $y = 8f(x)$ に対し、それぞれの曲率を $\sigma(x)$, $\sigma_8(x)$ で表すことにする。次の各問に答えよ。

(1)　不等式 $|\sigma_8(x)| \leq 8|\sigma(x)|$ $(\forall x \in \mathbf{R})$ が成り立つことを示せ。また、等号が成立するのはどのような点か答えよ。

(2)　不等式 $|\sigma(x)| < |\sigma_8(x)|$ が成立するのはどのような点か答えよ。

(3)　曲率の微分 $\sigma'(x)$ を求めよ。

(4)　点 $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ が曲線 $y = f(x)$ の頂点のとき、点 $\begin{pmatrix} x_0 \\ 8f(x_0) \end{pmatrix}$ もまた曲線 $y = 8f(x)$ の頂点となるための必要十分条件を求めよ。

問 1.8　$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の C^3 級関数とする。xy-平面上の曲線 $y = f(x)$ の曲率を $\sigma(x)$ で表すことにする。次の各問に答えよ。

(1)　曲率の微分 $\sigma'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ が偶関数、すなわち $f(-x) = f(x)$ $(\forall x \in \mathbf{R})$ を満たすとき、点 $\begin{pmatrix} 0 \\ f(0) \end{pmatrix}$ は曲線 $y = f(x)$ の頂点となることを示せ。

(3)　$f(x)$ が奇関数、すなわち $f(-x) = -f(x)$ $(\forall x \in \mathbf{R})$ を満たすとき、点 $\begin{pmatrix} 0 \\ f(0) \end{pmatrix}$ が曲線 $y = f(x)$ の頂点となるための、f に関する必要十分条件を求めよ。

問 1.9　$a, b > 0$ とする。弧長媒介変数で表示された楕円

$$X(t) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi(t) \\ b \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　$\varphi(t)$ が満たす条件 (微分方程式) を求めよ。

(2)　曲率を $a, b, \varphi'(t)$ を用いて表せ。

問 1.10　$a, b > 0$ とする。弧長媒介変数で表示された双曲線の一部

$$X(t) = \begin{pmatrix} a \cosh \varphi(t) \\ b \sinh \varphi(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

について、次の各問に答えよ。(注：$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ である。)

(1)　$\varphi(t)$ が満たす条件 (微分方程式) を求めよ。

(2)　曲率を $a, b, \varphi'(t)$ を用いて表せ。

問 1.11　$a > 0$ とする。弧長媒介変数で表示された放物線

$$X(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ ah(t)^2 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　$h(t)$ が満たす条件 (微分方程式) を求めよ。

(2)　曲率を $a,\ h'(t)$ を用いて表せ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.4—

線形代数の準備２

問 B.1　次の公式を示せ。

$$\langle V \times W, U \rangle = |V, W, U|$$

問 B.2　次の公式を示せ。

$$\langle V, W \rangle^2 + \|V \times W\|^2 = \|V\|^2 \|W\|^2$$

問 B.3　$\|V_1\| = \|V_2\| = \|W_1\| = \|W_2\| = 1$, $\langle V_1, V_2 \rangle = \langle W_1, W_2 \rangle = 0$ を満たす V_1, V_2, W_1, W_2 に対し、

$$\begin{aligned} P &= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)\,(V_1, V_2, V_1 \times V_2)^{-1} \\ &= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)\,{}^t(V_1, V_2, V_1 \times V_2) \end{aligned}$$

とおくと、$P \in SO(3)$ で $PV_1 = W_1$, $PV_2 = W_2$ を満たすことを確かめよ。

問 B.4　ベクトル V_1, V_2, W_1, W_2 は、

$$(\text{イ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$(\text{ロ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$(\text{ハ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} \frac{32}{33} \\ \frac{8}{33} \\ \frac{1}{33} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{33} \\ \frac{31}{33} \\ \frac{8}{33} \end{pmatrix}$$

$$(\text{ニ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$(\text{ホ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする。次の各問に答えよ。

(1)　ベクトル V_1, V_2, W_1, W_2 は、いずれも単位ベクトルであること、V_1 と V_2, W_1 と W_2 が、それぞれ直交することを確かめよ。

(2)　外積 $V_1 \times V_2, W_1 \times W_2$ を求めよ。

(3)　$PV_1 = W_1, PV_2 = W_2, |P| = 1$ をみたす直交行列 P を求めよ。

問 B.5　ベクトル V_1, V_2 は、

$$(\text{イ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$(\text{ロ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$(\text{ハ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする。いずれも単位ベクトルであること、V_1 と V_2 がそれぞれ直交することを認めて、次の各問に答えよ。

(1)　外積 $V_1 \times V_2$ を求めよ。

(2)　$PV_1 = V_2, PV_2 = -V_1, |P| = 1$ をみたす直交行列 P を求めよ。

(3)　$\tilde{P}V_1 = V_2, \tilde{P}V_2 = V_1, |\tilde{P}| = 1$ をみたす直交行列 $\tilde{P}$ を求めよ。

問 B.6　ベクトル V_1, V_2, V_3 は、

$$(\text{イ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\text{ロ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\text{ハ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{ニ})\quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{12}{13} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする。いずれも単位ベクトルであること、それぞれ直交することを認めて、次の各問に答えよ。

(1)　外積 $V_1 \times V_2, V_2 \times V_3$ を求めよ。

(2)　$PV_1 = V_2, PV_2 = V_3, |P| = 1$ をみたす直交行列 P を求めよ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.5—

$\boxed{\text{空間曲線}}$

問 2.1　曲率は 0 ではないが、捩率は 0 であるような空間曲線は、実はある平面上の曲線であることを示せ。

問 2.2**　定曲率定捩率の空間曲線は、ある直円柱上の曲線であり、この直円柱を展開した平面上では、直線となることを示せ。（この曲線を常螺旋と呼ぶ。）

問 2.3　xy-平面上の曲線 $y = f(x)$ を、y-軸と平行で半径 1 の直円柱上に巻き付けてできる空間曲線

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ f(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

の曲率と捩率を与える公式を求めよ。

問 2.4　問 2.3 の空間曲線の捩率が 0 となるような関数 f を全て求めよ。またこの曲線はどのような曲線か答えよ。

問 2.5　$X(t)$ は弧長媒介変数で表示された C^3 級空間曲線とし、その Frenet-Serret 枠を X', N, B で表す。曲率 σ, 捩率 τ が共に一定で $\sigma \neq 0$ のとき、次の各問に答えよ。

(1)　$N'' + (\sigma^2 + \tau^2)N = 0$ を示せ。

(2)　$(X + \dfrac{\sigma}{\sigma^2 + \tau^2} N)'' = 0$ を示せ。

問 2.6　$a, b > 0$, $c \neq 0$ とする。弧長媒介変数で表示された常螺旋

$$X(t) = \begin{pmatrix} a\cos(bt) \\ a\sin(bt) \\ ct \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　a, b, c が満たす条件を求めよ。

(2)　曲率 σ を計算せよ。

(3)　捩率 τ を計算せよ。

(4)　a, b, c を σ, τ を用いて表せ。

問 2.7 $X(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ は弧長媒介変数表示された C^3 級曲線とし、その Frenet-Serret 枠を $X'(t), N(t), B(t)$ で表す。曲率は $\sigma(t) \neq 0$ で、さらに t に依らない定数 a に対し、捩率が $\tau(t) = a\sigma(t)$ を満たす (つまり捩率が曲率に比例する) とき、次の各問に答えよ。

(1) $(aX'(t) + B(t))'$ を求めよ。

(2) $\langle X'(t), aX'(t) + B(t) \rangle$ を求めよ。

(3) $\langle X'(t), aX'(0) + B(0) \rangle$ を求めよ。

問 2.8 $\varphi(t), \psi(t)$ は、いずれも $\mathbf{R}$ 上の C^2 級関数で、$\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 = 1$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ をみたすものとする。平面曲線 $X_0(t)$ と空間曲線 $X(t)$ は、

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

で与えられるものとし、それぞれの曲率を $\sigma_0(t), \sigma(t)$ で表すことにする。次の各問に答えよ。($X(t)$ は、平面曲線 $X_0(t)$ を、z-軸と平行で半径 1 の直円柱上に巻き付けてできる空間曲線である。)

(1) 次の等式を示せ。

$$\sigma_0(t)^2 = \varphi''(t)^2 + \psi''(t)^2 \qquad (\forall t \in \mathbf{R})$$

(2) 次の不等式を示せ。

$$|\sigma_0(t)| \leq \sigma(t) \qquad (\forall t \in \mathbf{R})$$

問 2.9 $f(s), g(s), \varphi(t), \psi(t)$ は $\mathbf{R}$ 上の C^2 級関数で、$f'(s)^2 + g'(s)^2 = 1$ $(\forall s \in \mathbf{R})$, $\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 = 1$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ をみたすものとする。平面曲線 $X_0(s), X_1(t)$ と空間曲線 $X(t)$ は、

$$X_0(s) = \begin{pmatrix} f(s) \\ g(s) \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbf{R}), \quad X_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} f(\varphi(t)) \\ g(\varphi(t)) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

で与えられるものとし、それぞれの曲率を $\sigma_0(s), \sigma_1(t), \sigma(t)$ で表すことにする。次の各問に答えよ。($X(t)$ は、平面曲線 $X_0(s)$ に沿って立てた屏風上に、平面曲線 $X_1(t)$ を貼り付けてできる空間曲線である。)

(1) 次の等式を示せ。

$$\sigma_1(t)^2 = \varphi''(t)^2 + \psi''(t)^2 \qquad (\forall t \in \mathbf{R})$$

(2) 次の等式を示せ。

$$\sigma(t)^2 = \sigma_1(t)^2 + \sigma_0(\varphi(t))^2 \cdot \varphi'(t)^4 \qquad (\forall t \in \mathbf{R})$$

(3) $X_1(t)$ が直線のとき、不等式 $|\sigma(t)| \leq |\sigma_0(\varphi(t))|$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ を示せ。

(4) (3) の不等式において、全ての $t \in \mathbf{R}$ について等号が成立するのは、どのようなときに限るか答えよ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.6—

$\boxed{\text{空間曲線}}$（続き）

問 2.10　$a, b, c > 0$ とする。空間曲線

$$X(t) = \begin{pmatrix} at\cos(c\log t) \\ at\sin(c\log t) \\ bt \end{pmatrix} \qquad (t > 0)$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　$X(t)$ が弧長媒介変数で表示されているとき、a, b, c が満たす条件を求めよ。

(2)　(1) のとき、曲率を計算せよ。

(3)　(1) のとき、捩率を計算せよ。

問 2.11　C^3 級の空間曲線 $X(t)$ は、$||X'(t)|| = 1,\ ||X''(t)|| \neq 0\ (\forall t \in \mathbf{R})$ をみたすものとする。次の各問に答えよ。

(1)　不等式 $||X''(t)||^2 \leq ||X'''(t)||\ (\forall t \in \mathbf{R})$ が成り立つことを示せ。

(2)　(1) の不等式において、全ての $t \in \mathbf{R}$ について等号が成立するのは、$X(t)$ がどのような曲線のときか答えよ。

問 2.12　C^4 級の空間曲線 $X(t)$ は、$||X'(t)|| = 1,\ ||X''(t)|| \neq 0\ (\forall t \in \mathbf{R})$ をみたすものとし、その曲率と捩率をそれぞれ σ, τ で、Frenet-Serret 枠を X', N, B で表す。次の各問に答えよ。

(1)　X'''' を X', N, B の一次結合で表せ。

(2)　σ が一定かつ $\tau \neq 0$ のとき、X'''' を X', X'', X''' の一次結合で表せ。

問 2.13　空間曲線 $X(t)$ は C^3 級で、t は弧長パラメーターではなく、$||X'(t)|| \neq 0$, $||X''(t)|| \neq 0$, $||X'''(t)|| = 0\ (\forall t \in \mathbf{R})$ をみたすものとする。このとき、$X(t)$ はある平面上の曲線であることを示せ。

問 2.14　空間曲線 $X(t)$ は、$||X(t)|| = 1, ||X'(t)|| = 1$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ をみたすものとし、その曲率を $\sigma(t)$ で表すことにする。次の各問に答えよ。

（ $X(t)$ は、原点を中心とする単位球面上の曲線である。）

(1)　不等式 $|\sigma(t)| \geq 1$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ が成り立つことを示せ。

(2)　(1) の不等式において、全ての $t \in \mathbf{R}$ について等号が成立するとき、$X(t) \times X'(t)$ は定数ベクトルであることを示せ。

(3)　(2) のとき、$X(t)$ はある大円上にあることを示せ。

問 2.15　C^3 級の空間曲線 $X(t)$ は、$||X(t)|| = 1, ||X'(t)|| = 1$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ をみたすものとし、その曲率と捩率をそれぞれ $\sigma(t), \tau(t)$ で表すことにする。次の各問に答えよ。

（ $X(t)$ は、原点を中心とする単位球面上の曲線である。$\sigma(t) \neq 0$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ は証明せずに用いてよい。）

(1)　等式 $\langle X(t), X''(t) \rangle = -1$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ が成り立つことを示せ。

(2)　等式 $||X(t) \times X'(t)|| = 1$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ が成り立つことを示せ。

(3)　ある C^1 級関数 $\varphi(t)$ が存在して、$X''(t) = -X(t) + \varphi(t) X(t) \times X'(t)$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ と表せることを示せ。

(4)　等式 $\sigma(t)^2 = 1 + \varphi(t)^2$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ が成り立つことを示せ。

(5)　$\sigma(t)$ が t によらず一定のとき、等式 $\tau(t) = 0$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ が成り立つことを示せ。またこのとき、$X(t)$ はどのような曲線か答えよ。

(6)　$\tau(t)$ が t によらず一定のとき、$\sigma(t)$ を τ を用いて表せ。また、$\tau(t)$ が 0 でない定数となるような $X(t)$ は、$\mathbf{R}$ 全体では定義されないことを示せ。

問 2.16　C^2 級の空間曲線 $X(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \frac{1}{2}(\varphi(t)^2 + \psi(t)^2) \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$ は、$||X'(t)|| = 1$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ をみたすものとし、その曲率を $\sigma(t)$ で表すことにする。次の各問に答えよ。

（ $X(t)$ は、放物線の回転面上の曲線である。）

(1)　$(\varphi(t)\varphi'(t) + \psi(t)\psi'(t))^2 \leq (\varphi(t)^2 + \psi(t)^2)(\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2)$ を示せ。

(2)　$N_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \varphi(t)^2 + \psi(t)^2}} \begin{pmatrix} -\varphi(t) \\ -\psi(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$ に対して、内積 $\langle X''(t), N_0(t) \rangle$ を計算せよ。

(3)　不等式 $\sigma(t) \geq \dfrac{1}{(1 + \varphi(t)^2 + \psi(t)^2)^{3/2}}$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ が成り立つことを示せ。

(4)　(3) の不等式において、全ての $t \in \mathbf{R}$ について等号が成立するのは、$X(t)$ がどのような曲線のときか答えよ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.7—

$\boxed{\text{曲面}}$

問 3.1　主曲率、平均曲率、 Gauss 曲率は、座標変換（講義中の $P \in SO(3)$ の選び方）によらないことを確かめよ。

問 3.2　曲面 $z = ax^2 + by^2$, $z = xy$ の平均曲率並びに Gauss 曲率を計算せよ。また、原点における主曲率を求めよ。

問 3.3　$a \neq 0$ とする。曲面

$$z \ = \ a \operatorname{Tan}^{-1}\frac{y}{x} \qquad (x \neq 0, y \in \mathbf{R})$$

の平均曲率並びに Gauss 曲率を計算せよ。

問 3.4　極小曲面の Gauss 曲率は 0 以下であることを示せ。

問 3.5*　x-軸に関する回転面に限定すると、極小曲面は懸垂面すなわち懸垂線

$$z = h(x) = a \cosh \frac{x-b}{a} \qquad (a, b > 0)$$

の x-軸に関する回転面に限ることを示せ。

問 3.6　xz-平面上の曲線 $\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ の x-軸に関する回転面の Gauss 曲率を与える公式を求めよ。

問 3.7　$R > 0$ とする。xz-平面上の C^2 級曲線 $z = g(x)$ $(x > R)$ の z-軸に関する回転面

$$z \ = \ g(\sqrt{x^2 + y^2}) \qquad (\sqrt{x^2 + y^2} > R)$$

の平均曲率並びに Gauss 曲率を計算せよ。

ヒント　$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおき、先に r_x, r_y を求めておくとよい。

問 3.8　$g(y)$, $h(y)$ は共に C^2 級関数とする。$f(x, y) = xg(y) + h(y)$ とおく。曲面 $z = f(x, y)$ について、次の各問に答えよ。

(1)　Gauss 曲率 K を計算せよ。

(2)　$K \equiv 0$ のとき、平均曲率 H を計算せよ。

(3)　$K \equiv 0$ かつ $H \equiv 0$ となるための、g と h に関する必要十分条件を求めよ。

問 3.9 $g(x), h(y)$ は共に C^2 級関数とする。$f(x,y) = g(x)+h(y)$ とおく。曲面 $z = f(x,y)$ について、次の各問に答えよ。

(1) Gauss 曲率 K を計算せよ。

(2) $K \equiv 0$ のとき、平均曲率 H を計算せよ。

(3) $K \equiv 0$ かつ $H \equiv 0$ となるための、g と h に関する必要十分条件を求めよ。

問 3.10 球面は Gauss 曲率が正定数の定曲率曲面であることを確かめよ。

問 3.11 $a > 0$ とする。懸垂線の伸開線

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\log\tan\dfrac{t}{2} + \cos t) \\ a\sin t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

を tractrix と呼び、その x-軸に関する回転面を擬球面と呼ぶ。擬球面は Gauss 曲率が負定数の定曲率曲面であることを確かめよ。

問 3.12 $a \neq 0$ とする。$f(x_1, x_2)$ は $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級関数とする。二つの曲面

$$x_3 = f(x_1, x_2), \qquad x_3 = af(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a})$$

に対し、それぞれの Gauss 曲率を $K(x_1,x_2), K_a(x_1,x_2)$ で、平均曲率を $H(x_1,x_2), H_a(x_1,x_2)$ で表すことにする。次の各問に答えよ。

(1) K_a を a と K を用いて表せ。

(2) H_a を a と H を用いて表せ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.8—

曲面上の曲線

問 4.1　球面の場合に、始点と終点が同じでも、曲線によって平行移動の結果、写る先は異なることを、具体例を挙げて確かめよ。

問 4.2　単位球面上の測地（線で囲まれた）三角形について「内角の和 $= \pi +$ 面積」となることを、三直角三角形以外の具体例で確かめよ。

問 4.3　球面三角形（三つの大円の弧で囲まれた図形）について、次の各問に答えよ。

(1)　内角の和は π より大きいことを示せ。

(2)　凸三角形（内角が全て π 未満）の内角の和が取り得る値の上限は何か、理由を付けて答えよ。

(3)　凸とは限らない三角形（内角が π より大きく 2π 未満でもよい）の内角の和が取り得る値の上限は何か、理由を付けて答えよ。

問 4.4　単位球面上の球面三角形（三つの大円の弧で囲まれた図形）について、次の各問に答えよ。

(1)　三直角球面三角形（三つの内角が全て $\dfrac{\pi}{2}$ ）の面積が取り得る値を、理由を付けて答えよ。

(2)　二直角球面三角形（二つの内角が $\dfrac{\pi}{2}$ ）の面積が取り得る値の範囲を、理由を付けて答えよ。

問 4.5　単位球面上の凸な直角二等辺三角形（一つの内角が $\dfrac{\pi}{2}$ で、残る二つの互いに等しい内角が π 未満）について、次の各問に答えよ。

(1)　その面積が取り得る値の範囲を、理由を付けて答えよ。

(2)　等しい二内角が取り得る値の範囲を、理由を付けて答えよ。

問 4.6　単位球面を f 個の凸な球面四角形（全ての内角が π 未満で、4 本の大円の弧で囲まれた図形）に切り分けることを考える。どの球面四角形の辺上にも他の球面四角形の頂点が無いように（つまり隣接する球面四角形が辺を共有するように）切り分けることにする。次の各問に答えよ。

(1)　辺の数 e と頂点の数 v を、それぞれ f で表せ。ただし、異なる球面四角形が共有する辺や頂点は重複して数えないものとする。

(2)　凸な球面四角形の内角の和が取り得る値の範囲を求めよ。

(3)　切り分けてできた全ての凸な球面四角形の面積が互いに等しいとする。$f = 6$, $f = 24$ のとき、それぞれ各球面四角形の内角の和は何度になるか答えよ。

問 4.7　単位球面上の凸な正五角形について、次の各問に答えよ。

(1)　その内角の和が取り得る値の範囲を、理由を付けて答えよ。

(2)　一つの内角が $\dfrac{2}{3}\pi$ となるときの面積を求めよ。

問 4.8　単位球面上の球面 n 角形（ n 個の大円の弧で囲まれた図形）について、次の各問に答えよ。

(1)　内角の和が 3π である球面四角形の面積を求めよ。

(2)　単位球面を f 個の球面三角形に切り分けることを考える。どの球面三角形の辺上にも他の球面三角形の頂点が無いように（つまり隣接する球面三角形が辺を共有するように）切り分けることにすると、f は偶数でなければならないことを示せ。

(3)　(2) で f は偶数であるとするとき、頂点の個数を求めよ。ただし、異なる球面三角形が共有する頂点は、重複して数えないこととする。（従って、答は $3f$ ではない。）

問 4.9　単位球面を互いに面積の等しい m 個の球面 n 角形に切り分けることを考える。次の各問に答えよ。

(1)　各球面 n 角形の外角の和を求めよ。

(2)　各球面 n 角形の内角の和を求めよ。

(3)　(2) で求めた内角の和の $m \to +\infty$ のときの極限値を求めよ。

問 4.10　問 2.3 の曲線の、直円柱上の曲線としての測地曲率は、xy-平面上の曲線 $y = f(x)$ の曲率（の絶対値）と一致することを確かめよ。

問 4.11　M は z 軸を回転軸とする半径 1 の直円柱面とする。M の Gauss 写像 G は、直円柱の外向きにとる。$X_0(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix}$ は弧長パラメーター表示された $\mathbf{R}^2$ 上の曲線とする。

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos x_0(t) \\ \sin x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix}$$

とおくと、$X(t)$ は $X_0(t)$ を M に巻き付けた曲線となる。$X_0(t)$ の曲率、$X(t)$ の測地曲率をそれぞれ $\sigma_0(t), \sigma(t)$ で表すことにする。次の各問に答えよ。

(1)　$G(X(t))$ を $x_0(t)$ と $y_0(t)$ を用いて表せ。

(2)　$\sigma(t) = \sigma_0(t)$ を示せ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.9—

曲面上の曲線 （続き）

問 4.12 (2016 年度大学院入試問題・改)　関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。曲面 $z=f(x,y)$ のガウス曲率 K は

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2}{(1+{f_x}^2+{f_y}^2)^2}$$

で与えられる。関数 $g(x)$ $(a\le x\le b)$ は C^2 級かつ $g(x)>0$ とする。$g'(a)=\alpha$, $g'(b)=\beta$ とする。曲線 $y=g(x)$ を x 軸の周りで回転させてできる回転面 $y^2+z^2=g(x)^2$ を M とし、そのガウス曲率を K_M, 面積要素を dS で表す。次の各問に答えよ。

(1)　K_M を $g(x)$ を用いて表せ。

(2-1)　曲面 M の境界をなす 2 個の円周 $C_a : x=a, y^2+z^2=g(a)^2$, $C_b : x=b, y^2+z^2=g(b)^2$ をそれぞれ、進行方向左側が内側となるように弧長媒介変数表示せよ。

(2-2)　C_a, C_b それぞれについて、その測地曲率を求めよ。

(2-3)　面積分 $\displaystyle\int_M K_M dS$ の値を、α と β を用いて表せ。

(3)　(2-3) で求めた値の $\alpha\to+\infty$, $\beta\to-\infty$ のときの極限値を求めよ。

問 4.13　M は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面、G は曲面 M の Gauss 写像、$X(t)$ は弧長パラメーター表示された M 上の曲線とする。次の各問に答えよ。

(1)　$\dfrac{d}{dt}G(X(t))\times X'(t)$ は $G(X(t))$ と平行であることを示せ。

(2)　$G(X(t))\times(G(X(t))\times X'(t))=-X'(t)$ を示せ。

(3)　$V(t)$ は曲線 $X(t)$ に沿う単位接ベクトル場とする。各点 $X(t)$ において $V(t)$ が $X'(t)$ に対して左回りになす角を $\theta(t)$ とおけば、

$$V(t)=\cos\theta(t)X'(t)+\sin\theta(t)G(X(t))\times X'(t)$$

と表せる。今 $V(t)$ は平行ベクトル場である、すなわち各 t において $|G(X(t)),V(t),V'(t)|=0$ を満たすとする。このとき、次の等式を示せ。

$$\theta'(t)+|G(X(t)),X'(t),X''(t)|=0.$$

注意　講義では平行ベクトル場を基準にして他のベクトル場の角度のずれを測ったが、ここでは速度ベクトル場を基準にして測っていることに注意せよ。「講義の公式より成立」と言った類の解答は不可。

問 4.14　M は原点中心、半径 1 の球面とする。$0 < R < 1$ とし、球面 M を平面 $z = \sqrt{1-R^2}$ で切った切口の小円上を z 軸正方向から見て左回りに回る曲線

$$X(t) = \begin{pmatrix} R\cos\dfrac{t}{R} \\ R\sin\dfrac{t}{R} \\ \sqrt{1-R^2} \end{pmatrix}$$

を考える。次の各問に答えよ。

(1)　上の $X(t)$ の表示は弧長パラメーター表示であることを示せ。

(2)　球面 M の外側を表と見たとき、$G(X(t)) = X(t)$ となることを示せ。

(3)　$X(t)$ に沿う平行ベクトル場 $V(t)$ が $X'(t)$ に対して左回りになす角を $\theta(t)$ とおくとき、$\theta'(t)$ を求めよ。

(4)　一周で角 $\theta(t)$ は右回りにどれだけずれるか、R を用いて表せ。

(5)　一周で角 $\theta(t)$ が右回りにちょうど π だけずれるときの、$X(t)$ の緯度を求めよ。

(6)　$X(t)$ が囲む球面 M 上の領域の内、小さい方の面積を R を用いて表せ。

問 4.15　M は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面、G は M の Gauss 写像、Π は $\mathbf{R}^3$ 内の平面で、M と交わるものとし、$X(t)$ は曲面 M を平面 Π で切った切り口に現れる曲線を弧長パラメーター表示したものとする。$G(X(t))//\Pi$ $(\forall t)$ のとき、$X(t)$ は M 上の測地線であることを示せ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.10—

$\boxed{\text{曲面上の曲線}}$（続き）

問 4.16　曲面 M は、放物線 $z=-x^2$ を z 軸を軸として回転させてできる回転面、すなわち

$$M=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; z=-x^2-y^2\right\}$$

で与えられるものとする。M の Gauss 写像 G は、第 3 成分が正となるようにとる。次の各問に答えよ。

(1)　M 上の各点 $P=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し、$G(P)$ を x と y を用いて表せ。

(2)　z 軸を含む平面で曲面 M を切った切り口に現れる放物線（を弧長パラメーター表示したもの）は M 上の測地線であることを示せ。

以下、 $R>0$ とし、曲面 M を平面 $z=-R^2$ で切った切り口の円周上を z 軸正方向から見て左回りに回る曲線

$$X(t)=\begin{pmatrix} R\cos\dfrac{t}{R} \\ R\sin\dfrac{t}{R} \\ -R^2 \end{pmatrix}$$

を考える。M 上の曲線としての $X(t)$ の測地曲率を $\sigma(t)$ で表す。

(3)　上の $X(t)$ の表示は弧長パラメーター表示であることを示せ。

(4)　$G(X(t))$ を求めよ。

(5)　$\sigma(t)$ を求めよ。

(6)　$X(t)$ に沿う平行ベクトル場 $V(t)$ が $X'(t)$ に対して左回りになす角を $\theta(t)$ とおくとき、一周で角 $\theta(t)$ は右回りにどれだけずれるか、R を用いて表せ。

(7)　一周で角 $\theta(t)$ が右回りにちょうど π だけずれるときの、R の値を求めよ。

(8)　一周での角 $\theta(t)$ のずれの、$R\to+0,\ R\to+\infty$ としたときそれぞれの極限値を求めよ。

問 4.17　D_1, D_2 は共に単位球面 $\mathbf{S}^2$ 上の小円で囲まれた面積 ϵ の領域で、$\overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \emptyset$ とする。次の各問に答えよ。

(1)　M_1, M_1' は共に $\mathbf{S}^2 \setminus D_1$ と合同 (＝等長) な曲面とする。円柱 $\mathbf{S}^1 \times [0,1]$ と同相な曲面 N_1 を適当に選び、M_1, M_1' の境界をなす 2 個の小円を N_1 で滑らかにつないでできる閉曲面の Gauss 曲率を K_1 とするとき、面積分 $\displaystyle\int_{N_1} K_1 dS$ の値を求めよ。

(2)　M_2 は $\mathbf{S}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ と合同 (＝等長) な曲面とする。円柱 $\mathbf{S}^1 \times [0,1]$ と同相な曲面 N_2 を適当に選び、M_2 の境界をなす 2 個の小円を N_2 で滑らかにつないでできる閉曲面の Gauss 曲率を K_2 とするとき、面積分 $\displaystyle\int_{N_2} K_2 dS$ の値を求めよ。

問 4.18　$a, b, c > 0$ は $a^2 + a^2c^2 + b^2 = 1$ を満たすものとする。M は円錐面 $z = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ とし、M の Gauss 写像 G は、第 3 成分が正となるように（すなわち円錐面の内側に）とる。M 上の曲線

$$X(t) = \begin{pmatrix} at\cos(c\log t) \\ at\sin(c\log t) \\ bt \end{pmatrix} \qquad (t > 0)$$

を考える。次の各問に答えよ。（ $X(t)$ が弧長媒介変数で表示されていることは認めてよい。）

(1)　M 上の各点 $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し、$G(P)$ を x, y, a, b を用いて表せ。

(2)　$G(X(t))$ を求めよ。

(3)　M 上の曲線としての $X(t)$ の測地曲率 $\sigma(t)$ を求めよ。

(4)　$V(t)$ は $X(t)$ に沿う平行ベクトル場とする。$V(t)$ に対して $X'(t)$ が左回りになす角を $\theta(t)$ とおくとき、$1 \leq t \leq e^{2\pi/c}$ で角 $\theta(t)$ はどれだけずれるか答えよ。

(5)　$R = \sqrt{a^2+b^2}$ とする。円錐面 M を平面に展開した際、曲線 $X(t)$ は平面曲線

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} Rt\cos(\dfrac{ac}{R}\log t) \\ Rt\sin(\dfrac{ac}{R}\log t) \end{pmatrix} \qquad (t > 0)$$

に写る。$X_0(t)$ の曲率 $\sigma_0(t)$ を求めよ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.11—

$\boxed{\text{曲面上の曲線}}$（続き）

問 4.19　曲面 M は、半直線 $z=-\sqrt{3}x\ (x \geq 0)$ を z 軸を軸として回転させてできる回転面、すなわち

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z^2 = 3(x^2+y^2), z \leq 0 \right\}$$

で与えられるものとする。M は原点 $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を頂点とする円錐面である。M の Gauss 写像 G は、第 3 成分が正となるようにとる。M の Gauss 曲率を $K(P)$ で表す。次の各問に答えよ。

(1)　M 上の各点 $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し、$G(P)$ を x と y を用いて表せ。

(2)　$K(P)$ を求めよ。

以下、 $R>0$ とし、曲面 M を平面 $z=-\sqrt{3}R$ で切った切り口の円周上を z 軸正方向から見て左回りに回る曲線

$$X(t) = \begin{pmatrix} R\cos\dfrac{t}{R} \\ R\sin\dfrac{t}{R} \\ -\sqrt{3}R \end{pmatrix}$$

を考える。M 上の曲線としての $X(t)$ の測地曲率を $\sigma(t)$ で表す。

(3)　上の $X(t)$ の表示は弧長パラメーター表示であることを示せ。

(4)　$G(X(t))$ を求めよ。

(5)　$\sigma(t)$ を求めよ。

(6)　$V(t)$ は $X(t)$ に沿う平行ベクトル場とする。$V(t)$ に対して $X'(t)$ が左回りになす角を $\theta(t)$ とおくとき、一周で角 $\theta(t)$ はどれだけずれるか答えよ。

(7)　円錐面 M は頂点 O で尖っていて滑らかでない。そこで、 M における曲線 $X(t)$ の内部 D を、開円板と同相な穴の空いていない滑らかな曲面 D_1 に置き換え、滑らかにつないだとする。こうして出来た曲面を M_1, その Gauss 曲率を K_1 とするとき、面積分 $\displaystyle\int_{D_1} K_1 dS$ の値を求めよ。

(8)　(7) の曲面 M_1 は、円錐面 M 同様、下の部分が大きく開いている。M_1 における曲線 $X(t)$ の外部 $M_1 \setminus \overline{D_1}$ を、やはり開円板と同相な穴の空いていない滑らかな曲面 D_2 に置き換え、滑らかにつないだとする。こうして出来た曲面を M_2, その Gauss 曲率を K_2 とするとき、面積分 $\displaystyle\int_{D_2} K_2 dS$ の値を求めよ。

問 4.20　曲面 M は、

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z\cos y = x \sin y \right\}$$

で与えられるものとする。M は常螺旋面と呼ばれる曲面である。$y = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$ である点を無視すれば、M は $z = x\tan y$ と表される。次の各問に答えよ。

注意　$y = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$ である点に関する吟味は省略してよい。

(1)　原点 $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ における、M の主曲率、平均曲率 H, Gauss 曲率 K を求めよ。

(2)　M 上の各点 $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し、$G(P) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{\cos^2 y} + 1}} \begin{pmatrix} -\sin y \\ \dfrac{-x}{\cos y} \\ \cos y \end{pmatrix}$ とおくとき、G が M の Gauss 写像となっていることを確かめよ。

以下、$R > 0$ とし、$P_1 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -R \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく。4 点 P_1, P_2, P_3, O を、P_1 を始点、 P_2 を終点とする曲線

$$X(t) = \begin{pmatrix} R\cos\dfrac{t}{\sqrt{R^2+1}} \\ \dfrac{t}{\sqrt{R^2+1}} \\ R\sin\dfrac{t}{\sqrt{R^2+1}} \end{pmatrix} \qquad (0 \leq t \leq \pi\sqrt{R^2+1})$$

及び 3 本の線分 P_2P_3, P_3O, OP_1 で結んでできる、M 上の区分的に滑らかな（各点で左に $\dfrac{\pi}{2}$ ずつ左折する）閉曲線 C を考える。C が囲む M 上の領域を D とおく。

(3)　上の $X(t)$ の表示は弧長パラメーター表示であることを示せ。

(4)　$G(X(t))$ を計算せよ。

(5)　M 上の曲線としての $X(t)$ の測地曲率 $\sigma(t)$ を求めよ。

(6)　$V(t)$ は $X(t)$ に沿う平行ベクトル場とする。$V(t)$ に対して $X'(t)$ が左回りになす角を $\theta(t)$ とおくとき、P_1 から P_2 までで角 $\theta(t)$ はどれだけずれるか、R を用いて表せ。

(7)　M 上の閉領域 $\overline{D}$ 上での Gauss 曲率 K の面積分 $\displaystyle\int_{\overline{D}} K dS$ の値を R を用いて表せ。

(8)　(7) で求めた値の、$R \to +\infty$ としたときの極限値を求めよ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.12—

曲面上の曲線 （続き）

問 4.21　$R > 1$ とする。xz 平面上の円 $(x-R)^2 + z^2 = 1$ の z 軸に関する回転面

$$\{\sqrt{x^2+y^2} - R\}^2 + z^2 = 1$$

を M とする。M は回転トーラスと呼ばれる回転面である。M の Gauss 写像 G は、外向きにとる。M の Gauss 曲率を K で表す。$r = \sqrt{x^2+y^2}$ とする。次の各問に答えよ。

(1)　M 上の、xy 平面より上にある各点 $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し、$G(P) = \begin{pmatrix} \frac{x(r-R)}{r} \\ \frac{y(r-R)}{r} \\ z \end{pmatrix}$ を示せ。

(2)　$K(P)$ を求めよ。（問 3.7 で求めた公式は、証明無しで用いてもよい。用いなくてももちろんよい。）

以下、 $R-1 \leq r_0 \leq R+1$ とし、M 上の曲線

$$X(t) = \begin{pmatrix} r_0 \cos \frac{t}{r_0} \\ r_0 \sin \frac{t}{r_0} \\ \sqrt{1-(r_0-R)^2} \end{pmatrix} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi r_0)$$

を考える。$X(t)$ の測地曲率を $\sigma(t)$ で表す。

(3)　上の $X(t)$ の表示は弧長パラメーター表示であることを示せ。

(4)　$G(X(t))$ を求めよ。

(5)　$\sigma(t)$ を求めよ。

(6)　$V(t)$ は $X(t)$ に沿う平行ベクトル場とする。$V(t)$ に対して $X'(t)$ が左回りになす角を $\theta(t)$ とおくとき、一周で角 $\theta(t)$ はどれだけずれるか答えよ。

(7)　$0 \leq c < 1$ とする。曲面 M の内、平面 $z = c$ より上にある部分を D とする。面積分 $\int_D K dS$ の値を求めよ。

問 4.22　$a>0$ とする。曲面 M は、楕円 ${x_1}^2+\dfrac{{x_3}^2}{a^2}=1$ を x_3 軸を軸として回転させてできる回転面の上半分、すなわち

$$M=\left\{\left.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbf{R^3}\right| x_3=a\sqrt{1-{x_1}^2-{x_2}^2}, {x_1}^2+{x_2}^2<1\right\}$$

で与えられるものとする。M の Gauss 写像 G は、第 3 成分が正となるようにとる。M の Gauss 曲率を K で表す。次の各問に答えよ。

(1)　M 上の各点 $P=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ に対し、$K(P)$ を a, x_1, x_2 を用いて表せ。

(2)　$G(P)$ を a, x_1, x_2 を用いて表せ。

以下、 $0<R<1$ とし、M 上の曲線

$$X(t)=\begin{pmatrix}R\cos\dfrac{t}{R}\\R\sin\dfrac{t}{R}\\a\sqrt{1-R^2}\end{pmatrix}\qquad(0\leq t\leq 2\pi R)$$

を考える。$X(t)$ の測地曲率を $\sigma(t)$ で表す。

(3)　上の $X(t)$ の表示は弧長パラメーター表示であることを示せ。

(4)　$G(X(t))$ を求めよ。

(5)　$\sigma(t)$ を求めよ。

(6)　$V(t)$ は $X(t)$ に沿う平行ベクトル場とする。$V(t)$ に対して $X'(t)$ が左回りになす角を $\theta(t)$ とおくとき、一周で角 $\theta(t)$ はどれだけずれるか答えよ。

(7)　曲面 M の内、平面 $x_3=\dfrac{a}{2}$ より上にある部分を D とする。面積分 $\displaystyle\int_D KdS$ の値を求めよ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.13—

$\boxed{\text{曲面上の曲線}}$（続き）

問 4.23　$a > 0$ とする。曲面 M は、双曲線 $-x^2 + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$ を z 軸を軸として回転させてできる回転面の上半分、すなわち

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R^3} \,\middle|\, z = a\sqrt{1 + x^2 + y^2} \right\}$$

で与えられるものとする。M の Gauss 写像 G は、第 3 成分が正となるようにとる。M の Gauss 曲率を K で表す。次の各問に答えよ。

(1)　M 上の各点 $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し、$K(P)$ を a, x, y を用いて表せ。

(2)　$G(P)$ を a, x, y を用いて表せ。

以下、 $R > 0$ とし、M 上の曲線

$$X(t) = \begin{pmatrix} R\cos\dfrac{t}{R} \\ R\sin\dfrac{t}{R} \\ a\sqrt{1 + R^2} \end{pmatrix} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi R)$$

を考える。$X(t)$ の測地曲率を $\sigma(t)$ で表す。

(3)　上の $X(t)$ の表示は弧長パラメーター表示であることを示せ。

(4)　$G(X(t))$ を求めよ。

(5)　$\sigma(t)$ を求めよ。

(6)　$V(t)$ は $X(t)$ に沿う平行ベクトル場とする。$V(t)$ に対して $X'(t)$ が左回りになす角を $\theta(t)$ とおくとき、一周で角 $\theta(t)$ はどれだけずれるか答えよ。

(7)　曲面 M の内、円柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ の内側にある部分を D_R とする。全曲率 (Gauss 曲率の面積分) の極限値 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{D_R} K dS$ を求めよ。

問 4.24　n は自然数とする。曲面 M は、曲線 $z=-x^{2n}$ を z 軸を軸として回転させてできる回転面、すなわち

$$M=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, z=-(x^2+y^2)^n \right\}$$

で与えられるものとする。M の Gauss 写像 G は、第 3 成分が正となるようにとる。M の Gauss 曲率を K で表す。$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とする。このとき M は $z=-r^{2n}$ と表せる。次の各問に答えよ。

(1)　M 上の各点 $P=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し、$G(P)$ を x, y, r で表せ。

(2)　M 上の各点 $P=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し、$K(P)$ を x, y, r で表せ。

以下、、曲面 M 上を z 軸正方向から見て左回りに回る閉曲線

$$X(t)=\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

を考える。M 上の曲線としての $X(t)$ の測地曲率を $\sigma(t)$ で表す。閉曲線 $X(t)$ を C で、C が囲む曲面 M 上の領域を D で、それぞれ表す。次の各問に答えよ。

($X(t)$ の表示が弧長媒介変数で表示されていることは認めてよい。)

(3)　$X'(t), X''(t)$ を求めよ。

(4)　$G(X(t))$ を求めよ。

(5)　$\sigma(t)$ を求めよ。

(6)　$\displaystyle\int_C \sigma(t)dt$ を求めよ。

(7)　$\displaystyle\int_D KdS$ を求めよ。

曲線と曲面の幾何学・演習問題—No.14—

$\boxed{\text{非 Euclid 幾何}}$

問 5.1　平面において、与えられた点 X_1 中心の回転を書き表せ。

双曲平面の上半平面モデルについて、次の各問に答えよ。

問 5.2　実部が同じ二点 z_0, z_1 を結ぶ任意の曲線は、実軸と垂直な線分よりも遠回りであることを示せ。

問 5.3　$a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc > 0$ とする。一次分数変換

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

は距離を保つことを確かめよ。

問 5.4　与えられた点 z_0 を中心とする回転を書き表せ。

問 5.5　実軸及び ∞ の中から勝手な二点もしくは一点を選び、それらのみを固定する合同変換を求めよ。