線形代数I・演習問題—No.1—

行列の演算

1　一般に n 次正方行列 A は、対称行列 $B=\frac{1}{2}(A+{}^tA)$ と交代行列 $C=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$ の和に分解される。（つまり $A=B+C$ と和の形に書ける。）次の行列を対称行列と交代行列の和に分解せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

2　次の行列の k 乗を $k=4$ まで計算せよ。（余力のある人は、一般の k について計算してみよ。* 以外は難しくない。）

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(12)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(13)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(14)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(15)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(16)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(17) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

線形代数 I・演習問題—No.2—

$\boxed{\textbf{行列の演算}}$ (続き)

3_a　次の等式を満たす行列 A を一つ見つけよ。

$$(1)\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)\quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3_b　次の等式を満たす行列 A は存在しないことを示せ。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3_c　全ての成分が実数でありかつ次の等式を満たす行列 A は存在しないことを示せ。

$$(1)\quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

線形代数 I・演習問題—No.3—

行列式

4　次の置換を互換の積で表せ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5_a　次の行列式を計算せよ。((6) は答の式を因数分解せよ。(7) の行列式は n 次とする。)

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} \qquad (3)\quad \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$(4)\quad \begin{vmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{vmatrix} \qquad (5)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \qquad (6)\quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$(7)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

5_b　a, b, c はいずれも実数とする。行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ を計算せよ。また、この行列式が 0 となるための a, b, c に関する条件を、出来る限り簡単な形で求めよ。

5_c　a, b, c, λ はいずれも実数とする。行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -a & -b \\ a & \lambda & -c \\ b & c & \lambda \end{vmatrix}$ を計算せよ。また、この行列式が 0 となるような実数 λ を全て求めよ。

5_d　a, b はいずれも実数とする。次の行列について、行列式 $|A|$ を求めよ。また、$|A| = 0$ となるための a, b に関する条件を、出来る限り簡単な形で求めよ。

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ b & a & b \\ -b & b & a \end{pmatrix} \qquad (2)\quad A = \begin{pmatrix} -a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & -a \end{pmatrix}$$

線形代数 I・演習問題—No.4—

逆行列

6_a　次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6_b　問５ $_d$ の行列 A について、$|A| \neq 0$ をみたす a, b に対し、逆行列 A^{-1} を求めよ。

線形代数I・演習問題—No.5—

連立方程式１

7　次の連立方程式を、逆行列またはクラーメルの公式を用いて解け。（加減法、代入法等による解答は認めない。）

(1) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x+2y-2z=1 \\ 2x-y+3z=9 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x-3y+4z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 3x+5y-7z=7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y+z=8 \\ 2x+3y-z=5 \\ 4x+5y-4z=1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x+y+4z=2 \\ x+5y+9z=-10 \\ 2x+6y+5z=2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x+7y+z=3 \\ 8x+2y+8z=-6 \\ x+8y+2z=9 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 2x-y+2z=-3 \\ 2x+2y-z=0 \\ -x+2y+2z=3 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 4x-y+8z=9 \\ 4x+8y-z=-9 \\ -7x+4y+4z=0 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+2z=-3 \\ 3y+z=3 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x-5y+6z=-3 \\ 7x+8y+9z=13 \end{cases}$

線形代数I・演習問題—No.6—

空間ベクトル

8_a　二つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ および点 $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　次を計算せよ。

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad |\mathbf{a}|, \quad |\mathbf{b}|, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

(2)　点 P を通り $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の両方と平行な平面の方程式を求めよ。

(3)　点 P を通り $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の両方と垂直な直線の方程式を求めよ。

((2), (3) 共に、公式に値を代入するだけの解答は認めない。)

8_b　次の空間ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ および点 P について、下の各問に答えよ。

$$\text{(a)} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1)　$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を計算せよ。

(2)　点 P を通り $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の両方と平行な平面の媒介変数表示を求めよ。

(3)　(2) の平面の媒介変数を用いない方程式を求めよ。

(4)　点 P を通り $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の両方と垂直な直線の媒介変数表示を求めよ。

8_c　次の二つのベクトルについて、$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $(\mathbf{b}, \mathbf{a})$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ を計算せよ。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2-3i \end{pmatrix}.$$

線形代数I・演習問題—No.7—

$\boxed{\textbf{空間ベクトル}}$(続き)

9　$|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = |\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}_2| = 1$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = 0$ を満たす四つの空間ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ に対し、

$$\begin{aligned} P &= (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^{-1} \\ &= (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)\,{}^t(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \end{aligned}$$

とおくと、P は直交行列で、$P\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1$, $P\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2$ を満たすことを確かめよ。

10_a　四つの空間ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は、

$$\text{(a)}\quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{32}{33} \\ \frac{8}{33} \\ \frac{1}{33} \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{33} \\ \frac{31}{33} \\ \frac{8}{33} \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする。それぞれの場合について、次の各問に答えよ。

(1)　ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は、いずれも単位ベクトルであること、$\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ が、それぞれ直交することを確かめよ。

(2)　外積 $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$ を求めよ。

(3)　$P\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1, P\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2, |P| = 1$ をみたす直交行列 P を求めよ。

線形代数I・演習問題—No.8—

$\boxed{\textbf{空間ベクトル}}$(続き)

10_b　次の空間ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ について、下の各問に答えよ。

$$\text{(a)}\quad \mathbf{a}=\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad \mathbf{a}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad \mathbf{a}=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

(1)　ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は、いずれも単位ベクトルであること、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ が、それぞれ直交することを確かめよ。

(2)　外積 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{c}$ を求めよ。

(3)　$P\mathbf{a}=\mathbf{a}, P\mathbf{b}=\mathbf{c}, |P|=1$ をみたす直交行列 P を求めよ。

線形代数 I・演習問題—No.9—

空間ベクトル(続き)

11　次のベクトルの組に Schmidt の直交化法を施し、正規直交基を作れ。

$$\text{(a)} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12　二つの n 項数ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し、中線定理

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$$

を示せ。

13_a　三つの空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対し、次の等式を示せ。

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|$$

13_b　二つの空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し、次の等式を示せ。（定義に戻って直接示せ。）

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$$

14　二つの空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し、次の等式を示せ。

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$$

15_a　二つの空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し、次の等式を示せ。

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{b}|^2\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{b}$$

15_b　三つの空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対し、次の等式を示せ。（直接示せるが、問 13_a の公式を用いた解答も可。）

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b}$$

線形代数I・演習問題—No.10—

空間ベクトル＋連立方程式

16　次の連立方程式について、下の各問に答えよ。

(a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$　(b) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$　(d) $\begin{cases} 3x + y + 4z = 2 \\ x + 5y + 9z = -10 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x + 7y + z = 3 \\ 8x + 2y + 8z = -6 \end{cases}$　(f) $\begin{cases} 2x - y + 2z = -3 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 4x - y + 8z = 9 \\ 4x + 8y - z = -9 \end{cases}$　(h) $\begin{cases} x + 4y + z = 3 \\ 4x + 2y + z = 5 \end{cases}$

(1)　この連立方程式の解を一つだけ求めよ。

(2)　この連立方程式の解全体の集合は、3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ 内の直線である。この直線と平行な（ $\mathbf{0}$ でない）ベクトルを一つ求めよ。

(3)　(2) の直線を次の形で表せ。

$$\begin{cases} x = x_0 + tx_1 \\ y = y_0 + ty_1 \\ z = z_0 + tz_1 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$