線形代数 II・演習問題—No.1—

行列の階数

1　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　行列式 $|A|$ を求めよ。

(2)　$a \neq 0$ でかつ $|A| = 1$ となる a の値を求めよ。

(3)　(2) で得た値の a について、A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(4)　一般の a に対し A の階数を調べよ。

$2_{a\sim i}$　a は実数とする。行列

$$A = \begin{array}{ccccc} (a) & (b) & (c) & (d) & (e) \\ \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} (f) & (g) & (h) & (i) \\ \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & a & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

について、階数 rank$A$ を求めよ。

3　a, b, c は実数とする。行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　行列式 $|B|$ を求めよ。

(2)　階数 rank B を求めよ。

連立方程式

4　次の連立方程式は解を持たないことを、階数の条件を用いて示せ。

(1) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - 5y + 7z = 7 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 7y + 8z = 5 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x + 3y + 5z = 9 \end{cases}$

線形代数II・演習問題—No.2—

連立方程式（続き）

$5_{a\sim f}$　連立一次方程式

$$
(5.1)\quad
(a)\ \begin{cases} x+ay+az = 0 \\ ax+y+az = 0 \\ ax+ay+z = 0 \end{cases}
\quad
(b)\ \begin{cases} ax+ay+az = 0 \\ x+ay+az = 0 \\ x+y+az = 0 \end{cases}
$$
$$
(c)\ \begin{cases} 2x+ay = 0 \\ ax+y+az = 0 \\ ay+2z = 0 \end{cases}
\quad
(d)\ \begin{cases} 2x+ay = 0 \\ ax+ay+az = 0 \\ ay+2z = 0 \end{cases}
$$
$$
(e)\ \begin{cases} 2x+y = 0 \\ x+y+az = 0 \\ ay+2z = 0 \end{cases}
\quad
(f)\ \begin{cases} 2x+y = 0 \\ ax+y+az = 0 \\ ay+2z = 0 \end{cases}
$$

が解を無限個持つような a の値を求めよ。

$6_{a\sim f}$　連立一次方程式

$$
(6.1)\quad
(a)\ \begin{cases} x+ay+az = 1 \\ ax+y+az = 1 \\ ax+ay+z = 1 \end{cases}
\quad
(b)\ \begin{cases} ax+ay+az = 1 \\ x+ay+az = 1 \\ x+y+az = 1 \end{cases}
$$
$$
(c)\ \begin{cases} 2x+ay = 1 \\ ax+y+az = 1 \\ ay+2z = 1 \end{cases}
\quad
(d)\ \begin{cases} 2x+ay = 1 \\ ax+ay+az = 0 \\ ay+2z = 1 \end{cases}
$$
$$
(e)\ \begin{cases} 2x+y = 1 \\ x+y+az = 0 \\ ay+2z = 1 \end{cases}
\quad
(f)\ \begin{cases} 2x+y = 1 \\ ax+y+az = 2 \\ ay+2z = 3 \end{cases}
$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　(6.1) が解を持たないような a の値を求めよ。

(2)　(6.1) が解を無限個持つような a の値を求めよ。

(3)　(2) で得た値の a について、(6.1) の解を一つ求めよ。

(4)　(3) で得た解を $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$ とする。このとき、(2) で得た値の a に対する (6.1) の全ての解を、

$$
\begin{cases} x = x_0+t_1x_1 \\ y = y_0+t_1y_1 \\ z = z_0+t_1z_1 \end{cases} \quad (t_1\in\mathbf{R}) \quad \text{または} \quad \begin{cases} x = x_0+t_1x_1+t_2x_2 \\ y = y_0+t_1y_1+t_2y_2 \\ z = z_0+t_1z_1+t_2z_2 \end{cases} \quad (t_1,t_2\in\mathbf{R})
$$

のいずれかの形で表すことができる。この場合いずれの形が適当かを答え、x_1, y_1, z_1 または $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ を一組与えよ。(**ヒント**： (5.1))

線形代数II・演習問題—No.3—

連立方程式（続き）

7　次の連立方程式が解を持つか否かを、階数の条件を用いて判定せよ。また、解を持つものについては、全ての解を、問６ (4) のいずれかの形で表せ。

(1) $\begin{cases} x-2y+3z = 2 \\ 3x-5y+7z = 7 \\ 2x-3y+4z = 5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2y+3z = 4 \\ 2x-y+z = 3 \\ x+7y+8z = 9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+2y+3z = 4 \\ x+3y+5z = 7 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x-2y+3z = 2 \\ 3x-6y+9z = 6 \\ 2x-4y+6z = 4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+2y+3z = 4 \\ 5x+6y+7z = 8 \\ 3x+2y+z = 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x-2y+z = -3 \\ x+y-2z = 0 \\ -2x+y+z = 3 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+2y+3z = 2 \\ 2x+3y+4z = 3 \\ 3x+4y+5z = 6 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x+3y-2z = 7 \\ 4x-6y+5z = -5 \\ 6x+z = 9 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x+2y+3z = 2 \\ 2x+5y+6z = 3 \\ 3x+6y+9z = 6 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x+3y-2z = 7 \\ 4x-6y+10z = -5 \\ 6x+5y+z = 9 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x+2y+3z = 1 \\ 6x+5y+4z = -2 \\ 7x+8y+9z = 3 \end{cases}$

(12) $\begin{cases} x+2y+3z = 3 \\ 6x+5y+4z = -3 \\ 7x+8y+9z = 3 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x+2y+4z = 3 \\ 2x+4y+8z = 6 \\ -x-2y-4z = -3 \end{cases}$

(14) $\begin{cases} x+2y = 5 \\ 3x+2z = 9 \\ 3y-z = 3 \end{cases}$

(15) $\begin{cases} -y+2z = -9 \\ -5x+4y-3z = -9 \\ 6x-7y+8z = -9 \end{cases}$

線形代数II・演習問題—No.4—

対角化

8　曲線 $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{x}$ の方程式を、次の基底に関する座標に書き換えよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$9_{a\sim f}$　曲線

(a)　$9x^2 - 4xy + 6y^2 = 1$	(b)　$7x^2 - 12xy - 2y^2 = 1$	(c)　$8x^2 + 12xy + 17y^2 = 20$
(d)　$2x^2 + 28xy + 23y^2 = 30$	(e)　$3x^2 + 32xy + 27y^2 = 35$	(f)　$9x^2 + 16xy + 21y^2 = 25$

について、この方程式が

$$A = \overset{(a)}{\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}}, \quad \overset{(b)}{\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}}, \quad \overset{(c)}{\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}},$$

$$\overset{(d)}{\begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 14 & 23 \end{pmatrix}}, \quad \overset{(e)}{\begin{pmatrix} 3 & 16 \\ 16 & 27 \end{pmatrix}}, \quad \overset{(f)}{\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 21 \end{pmatrix}}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いると ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = 1$ と書けることに注意して、次の各問に答えよ。

(1)　行列 A の固有値を全て求めよ。

(2)　(1) で求めた各固有値に対する A の固有ベクトルを一つずつ求めよ。

(3)　行列 A を対角化する直交行列 P を一つ求めよ。

(4)　(3) で求めた P を用いて、問の曲線の方程式を適当な座標で書き直し、この曲線が
(a) 楕円であることを確かめよ。
(b) 双曲線であることを確かめよ。
(c, d, e, f) どのような曲線であるか答えよ。

線形代数II・演習問題—No.5—

$\boxed{\textbf{対角化}}$（続き）

$10_{a\sim i}$ a, b, c は実数で、 $a \neq 0$ とする。曲線

(a)	$x^2+2axy+y^2+bx+cy=1$	(b)	$3x^2+4xy+ay=3$
(c)	$3x^2+4xy+3y^2+ay+15=0$	(d)	$3x^2+4xy+6y^2+ay+42=0$
(e)	$6x^2+8xy-9y^2+ay=105$	(f)	$9x^2+12xy+4y^2+ax+by=0$
(g)	$9x^2+8xy+3y^2+ax+by=0$	(h)	$3x^2+8xy+9y^2+ax+by=0$
(i)	$x^2+24xy-6y^2+ax+1=0$		

について、二次の項

(a)	$x^2+2axy+y^2$	(b)	$3x^2+4xy$
(c)	$3x^2+4xy+3y^2$	(d)	$3x^2+4xy+6y^2$
(e)	$6x^2+8xy-9y^2$	(f)	$9x^2+12xy+4y^2$
(g)	$9x^2+8xy+3y^2$	(h)	$3x^2+8xy+9y^2$
(i)	$x^2+24xy-6y^2$		

が

$$A = \overset{(a)}{\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}},\ \overset{(b)}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}},\ \overset{(c)}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}},\ \overset{(d)}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}},\ \overset{(e)}{\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}},$$
$$\overset{(f)}{\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}},\ \overset{(g)}{\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}},\ \overset{(h)}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}},\ \overset{(i)}{\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いると $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ と書けることに注意して、次の各問に答えよ。

(1) 行列 A の固有値を全て求めよ。

(2) (1) で求めた各固有値に対する A の固有ベクトルを一つずつ求めよ。

(3) 行列 A を対角化する直交行列 P を一つ求めよ。

(4) (3) で求めた P を用いて、問の曲線の方程式を適当な座標で書き直し、
(a) この曲線が放物線となるような a, b, c に関する条件を求めよ。
(b, e, i) この曲線が交わる 2 直線となるような a の値を求めよ。
(c, d) この曲線が 1 点となってしまうような a の値を求めよ。
(f) この曲線が平行な 2 直線となるような a, b に関する条件を求めよ。
(g, h) この曲線が 1 点となってしまうような a, b に関する条件を求めよ。

(5) (4) で求めた
(b, e) a に対し、 2 直線の交点の（(4) で座標変換する前の）座標を求めよ。
(c, d) a に対し、(4) の 1 点の（(4) で座標変換する前の）座標を求めよ。
(f) 条件を満たす a, b の内、特に 2 直線の間の距離が 1 となるような a, b の値を求めよ。

線形代数II・演習問題—No.6—

対角化（続き）

$11_{a,b}$　a, b は実数、 n は自然数とする。行列

$$A = \begin{array}{cc} (a) & (b) \\ \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ b^2 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -15 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

について A^n を求めよ。

$12_{a\sim d}$　行列

$$A = \begin{array}{cccc} (a) & (b) & (c) & (d) \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　行列 A の固有値を全て求めよ。

(2)　(1) で求めた各固有値に対する A の固有ベクトルを一つずつ求めよ。

(3)　行列 A を対角化する（すなわち $P^{-1}AP$ が対角行列となるような）正則行列 P を一つ求めよ。

(4)　(3) で求めた P を用いて A^k （ k は自然数＝正の整数）を求めよ。

線形代数II・演習問題—No.7—

漸化式

13　a, b は実数とする。漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

について、これが

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

を用いると $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ と書けることに注意して、次の各問に答えよ。

(1)　行列 A の固有値を全て求めよ。

(2)　(1) で求めた各固有値に対する A の固有ベクトルを一つずつ求めよ。

(3)　行列 A を対角化する直交行列 P を一つ求めよ。

(4)　(3) で求めた P を用いて A^n を求めよ。

(5)　(4) の結果を利用し、x_n, y_n を x_1, y_1, a, b 及び n を用いて表せ。

(6)　$x_1 \neq \pm y_1$ とする。このとき、二つの数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が共に収束するような (a, b) の範囲を図示せよ。

線形代数II・演習問題—No.8—

漸化式（続き）

14　次の漸化式をみたす数列 x_n, y_n の一般項を求めよ。

(1) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 9x_n + y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -15x_n + 8y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -14x_n + 8y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = 3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 7x_n - 4y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -8 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 12x_n - 4y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -4 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 18x_n - 4y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -9x_n + 8y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = 7 \\ y_1 = -7 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -5x_n + 8y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = -9 \\ y_1 = 9 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -2 \end{cases}$

(12) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 16x_n + y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = 4 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 16y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -6 \end{cases}$

(14) $\begin{cases} x_{n+1} = -2x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = 10x_n + 7y_n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{N})$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -2 \end{cases}$

$$(1') \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 4y_n - 8 \\ y_{n+1} = 4x_n + y_n - 4 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}$$

$$(2') \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 4y_n + 4 \\ y_{n+1} = 9x_n + y_n + 18 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 6 \end{cases}$$

$$(3') \quad \begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 2y_n + 2 \\ y_{n+1} = -15x_n + 8y_n + 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases}$$

$$(4') \quad \begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 2y_n - 3 \\ y_{n+1} = -14x_n + 8y_n - 6 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = 3 \end{cases}$$

$$(5') \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n - 4 \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n + 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$(6') \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n + 2 \\ y_{n+1} = 7x_n - 4y_n + 2 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$(7') \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n + 2 \\ y_{n+1} = 12x_n - 4y_n + 7 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 7 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$(8') \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n + 4 \\ y_{n+1} = 18x_n - 4y_n + 8 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = -1 \end{cases}$$

$$(9') \quad \begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 2y_n + 10 \\ y_{n+1} = -9x_n + 8y_n - 25 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 7 \\ y_1 = -7 \end{cases}$$

$$(10') \quad \begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 2y_n - 18 \\ y_{n+1} = -5x_n + 8y_n + 18 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = -9 \\ y_1 = 9 \end{cases}$$

$$(11') \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 4y_n + 4 \\ y_{n+1} = x_n + y_n + 2 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -2 \end{cases}$$

$$(12') \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 4y_n - 2 \\ y_{n+1} = 16x_n + y_n + 14 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = 4 \end{cases}$$

$$(13') \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 16y_n + 14 \\ y_{n+1} = 4x_n + y_n - 2 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -6 \end{cases}$$

$$(14') \quad \begin{cases} x_{n+1} = -2x_n - 2y_n - 2 \\ y_{n+1} = 10x_n + 7y_n + 5 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -2 \end{cases}$$

線形代数II・演習問題—No.9—

行列の指数関数

$15_{a\sim i}$　次の行列 A について、下の各問に答えよ。

$$A = \overset{(a)}{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}},\ \overset{(b)}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}},\ \overset{(c)}{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}},\ \overset{(d)}{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}},\ \overset{(e)}{\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}},$$
$$\overset{(f)}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}},\ \overset{(g)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}},\ \overset{(h)}{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}},\ \overset{(i)}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

(1)　行列 A の固有値を全て求めよ。

(2)　(1) で求めた各固有値に対する A の固有ベクトルを一つずつ求めよ。

(3)　$(a \sim g)$ 行列 A を対角化する正則行列 P を一つ求めよ。
(h, i) $P^{-1}AP$ が Jordan の標準形となるような正則行列 P を一つ求めよ。

(4)　(3) で求めた P を用いて、tA の指数関数 e^{tA} を求めよ。

$16_{a\sim g}$　行列

$$A = \overset{(a)}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}},\ \overset{(b)}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}},\ \overset{(c)}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}},\ \overset{(d)}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}},$$
$$\overset{(e)}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}},\ \overset{(f)}{\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}},\ \overset{(g)}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 16 & -3 \end{pmatrix}}$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　行列 A の固有値を求めよ。

(2)　(1) で求めた固有値に対する A の固有ベクトルを一つ求めよ。

(3)　(1) で求めた固有値を λ, (2) で求めた固有ベクトルを $\mathbf{a}_1$ とするとき，$A\mathbf{a}_2 = \lambda\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1$ を満たすベクトル $\mathbf{a}_2$ を一つ求めよ。

(4)　行列 A を Jordan の標準形化する（すなわち $P^{-1}AP = \lambda E + N$ となるような）正則行列 P を一つ求めよ。

(5)　(4) で求めた P を用いて tA の指数関数 e^{tA} を求めよ。