数学要論B・演習問題—No.1—

上限、下限

1　実数列 $\{a_n\}$ において、次の四条件は互いに同値であることを示せ。

(1) ある実数 K_1, K_2 が存在して、全ての自然数 n に対して $K_1 < a_n < K_2$ が成り立つ。

(2) ある実数 K_1, K_2 が存在して、全ての自然数 n に対して $K_1 \leq a_n \leq K_2$ が成り立つ。

(3) ある実数 K が存在して、全ての自然数 n に対して $|a_n| < K$ が成り立つ。

(4) ある実数 K が存在して、全ての自然数 n に対して $|a_n| \leq K$ が成り立つ。

注：このことから、$\{a_n\}$ が**有界**であることの定義として、どの条件を採用しても同じことだとわかる。

2　$\{a_n\}, \{b_n\}$ は上に有界な実数列とし、$\sup\{a_n|n \in \mathbf{N}\} = \alpha$, $\sup\{b_n|n \in \mathbf{N}\} = \beta$ とする。$c_n = \max\{a_n, b_n\}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ とおく。このとき、実数列 $\{c_n\}$ も上に有界で、$\sup\{c_n|n \in \mathbf{N}\} = \max\{\alpha, \beta\}$ が成り立つことを示せ。

3　$\mathbf{R}$ の有界な部分集合 A, B について、次を示せ。

(1) $A + B = \{a + b|a \in A, b \in B\}$ とするとき、

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \ \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

(2) k は正の定数、 $kA = \{ka|a \in A\}$ とするとき、

$$\sup(kA) = k \sup A, \ \inf(kA) = k \inf A$$

(3) $-A = \{-a|a \in A\}$ とするとき、

$$\sup(-A) = -\inf A, \ \inf(-A) = -\sup A$$

(4) $B = \{a - a'|a \in A, a' \in A\}$ とするとき、

$$\sup B = \sup A - \inf A$$

(5) $A^2 = \{a^2|a \in A\}$ とするとき、

$$\sup(A^2) = \max\{(\sup A)^2, (\inf A)^2\}$$

(6) $A^3 = \{a^3|a \in A\}$ とするとき、

$$\sup(A^3) = (\sup A)^3$$

注意：$\max A$, $\min A$ の存在は仮定していないので、解答にそれらを用いてはならない。

4　$I_n = (0, \frac{1}{n})$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ により与えられる開集合の列 $\{I_n\}$ について、$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \emptyset$ を示せ。

5　区間列 $\{I_n\}, \{J_n\}$ を次式により与えることにする。

$$I_n = [-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}), \quad J_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}) \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} I_n$ および $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} J_n$ を求めよ。**注意**：結果だけの解答は不可。

数列の極限

6　実数列 $\{a_n\}$ は $n \to +\infty$ のとき極限値 α に収束するとする。このとき、次を示せ。
(1) $a_n \neq 0\ (\forall n \in \mathbf{N})$ かつ $\alpha \neq 0$ のとき、実数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ は収束して、その極限値は $\dfrac{1}{\alpha}$ である。
(2) $a_n \geq 0\ (\forall n \in \mathbf{N})$ のとき、実数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ は収束して、その極限値は $\sqrt{\alpha}$ である。
(3) 実数列 $\{{a_n}^3\}$ は収束して、その極限値は α^3 である。
注意：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n$ の公式を用いた解答は不可。

7　二つの実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ から、新しい実数列 $\{c_n\}$ を、次式により与えることにする。$\{a_n\}, \{b_n\}$ が共に収束するとき、$\{c_n\}$ は収束するか否か判定せよ。（収束すると思うなら証明し、収束しないと思うならその例を挙げよ。）
(1) $c_n = \max\{a_n, b_n\} \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$
(2) $c_n = |a_n - b_n| \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$

8　$0 < a_0 \leq b_0$ とする。

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = (a_{n-1} + b_{n-1})/2 \qquad\qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

により与えられる実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は共に収束して、その極限値は一致することを示せ。

9　三つの実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ において、

$$a_n \leq c_n \leq b_n \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

が成り立つとする。いま $\{c_n\}$ が収束するならば、

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} b_n$$

が成り立つことを示せ。また $\{c_n\}$ が収束しないとき、この不等式が成り立たないような例を一つ挙げよ。

１０　有界な実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について、次のことを示せ。

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to+\infty}(a_n + b_n) &\leq \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n \\ \liminf_{n\to+\infty}(a_n + b_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty} a_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n \end{aligned}$$

数学要論B・演習問題—No.2—

関数の極限

11　$\mathbf{R}$ 全体で定義された関数 $f(x)$ に対し、ある a において極限値 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ が存在するとき、極限値 $\lim_{x\to a} f(x)^3$ も存在して、その値は α^3 であることを、極限値の定義に戻って示せ。

注意： $f(x)$ の連続性は仮定していない。また、$\lim_{x\to a} f(x)g(x)$, $\lim_{x\to a} g\circ f(x)$ 等の公式を用いた解答は認めない。

12　$\mathbf{R}$ 全体で定義された関数 $f(x), g(x)$ に対し、新しい関数 $h(x)$ を、

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\} \qquad (\forall x \in \mathbf{R})$$

により与えることにする。ある a において極限値 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ が共に存在するとき、$\lim_{x\to a} h(x)$ も存在して、その値は $\max\{\alpha, \beta\}$ であることを、極限値の定義に戻って示せ。

注意： $f(x), g(x)$ の連続性は仮定していない。

13　$f(x), g(x), h(x)$ はいずれも、開区間 I 上の（連続とは限らない）関数とし、I の一点 a において、極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ が共に存在し、同じ値 α をとるものとする。

$$f(x) \le h(x) \le g(x) \qquad (\forall x \in I)$$

ならば、極限値 $\lim_{x\to a} h(x)$ も存在し、やはり同じ値 α をとることを、ϵ-δ 論法を用いて示せ。

14　二つの関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$（いずれも連続とは限らない）について $\lim_{x\to a} g(x) = b$, $\lim_{u\to b} f(u) = c$ が成り立つとき、合成関数 $y = f\circ g(x) = f(g(x))$ についても $\lim_{x\to a} f(g(x)) = c$ が成り立つことを、$\epsilon - \delta$ 論法を用いて示せ。

15　関数 $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 全体で定義されているとする。$f(x)$ が有界ならば、任意の実数 a に対し $\lim_{x\to a}(x-a)f(x)$ が存在することを、極限値の定義に戻って示せ。

注意：$\lim_{x\to a} f(x)$ の存在は仮定していない。

16　関数 $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 全体で定義されているとする。$f(x)$ が有界ならば、$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ が存在することを、極限値の定義に戻って示せ。

注意： $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ の存在は仮定していない。

関数の連続性

１７　n は自然数とする。関数 $f(x)=x^n$ が $\mathbf{R}$ 上で連続であることを、$\epsilon-\delta$ 論法を用いて示すとき、各点 $x\in\mathbf{R}$ と与えられた $\epsilon>0$ に対し、$\delta>0$ として具体的にどんな値をとればよいのか答えよ。

１８　$(0,+\infty)$ 上連続な関数 $f(x)$ に対し、

$$\lim_{x\to+\infty}\{f(x+1)-f(x)\}=\alpha$$

ならば、$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ が成り立つことを示せ。

１９　$\mathbf{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が、

$$f(\theta x+(1-\theta)y)\le\theta f(x)+(1-\theta)f(y)\qquad(\forall x,\forall y\in\mathbf{R},0<\forall\theta<1)$$

を満たすとき、$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上連続であることを示せ。

注：このような $f(x)$ を**凸関数**と言う。

２０　$\mathbf{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が、

$$f(2x)=f(x)\qquad(\forall x\in\mathbf{R})$$

を満たし、かつ $x=0$ で連続ならば、$f(x)$ は定数であることを示せ。

２１　$\mathbf{R}$ 上連続な二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が、$\mathbf{Q}$ 上で一致するならば、$\mathbf{R}$ 上でも一致することを示せ。

ヒント：$\mathbf{Q}$ が $\mathbf{R}$ 内で稠密であること（任意の実数 x と任意の $\epsilon>0$ に対し、x の ϵ-近傍 $(x-\epsilon,x+\epsilon)$ が、x でない有理数を含むこと、つまり x のいくらでも近くに有理数が存在すること）をまず示しておけば、あとは連続性の定義からすぐ判る。（**解析入門** p.94 **例** 3 **よりも詳細な解答を求む。**）

２２　$\mathbf{R}$ 上連続な関数 $f(x)$ に対し、

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\qquad(\forall x,\forall y\in\mathbf{R})$$

ならば、ある実数 a により $f(x)=ax$ と書けることを示せ。

ヒント：問 21 の結果を用いてよい。

数学要論B・演習問題—No.3—

中間値の定理

23　実係数の奇数次方程式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0, n$ は奇数) が少なくとも一つ実数解を持つことを、中間値の定理を用いて示せ。

24　実係数の n 次方程式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ は、 $a_0 a_n < 0$ のとき、少なくとも一つ実数解を持つことを示せ。

一様連続

25　$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上連続な関数で、かつ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ が共に有界な値として存在するとする。

(1) $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で有界であることを示せ。

(2) $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で一様連続であることを示せ。

26　開区間で有界な関数で、一様連続でない例を挙げよ。

27　関数 $\sin\dfrac{1}{x}$ は $(0, +\infty)$ 上一様連続か否か判定せよ。

注意： 結論だけの解答は不可。

関数の微分

２８　多項式（単項式、定数も含む）以外の $\mathbf{R}$ 上微分可能な関数を一つ選び、微分可能であることを定義に戻って示せ。

２９　$\mathbf{R}$ 上連続ではあるが（少なくともどこか一点で）微分不可能な関数の例を一つ与え、微分不可能であることを定義に戻って示せ。

３０　$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の関数、a は実数とする。$f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば、

$$(*) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} = f'(a)$$

が成り立つことを示せ。また、 $(*)$ 左辺の極限値は存在するが、$x = a$ で微分可能でない $f(x)$ の例を一つ挙げよ。

注意：$x \neq a$ での微分可能性は仮定していない。

平均値の定理

３１　閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ を一つ選び、その $[a, b]$ 上で連続かつ開区間 (a, b) 上微分可能な関数で、定数でも一次関数でもないものを一つ選んで、その関数について平均値の定理の主張を述べよ。さらに、その主張を実現する (a, b) 上の点を具体的に与えよ。

３２　関数 $f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上微分可能で、さらにその導関数 $f'(x)$ が $\mathbf{R}$ 上有界のとき、$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上一様連続であることを示せ。

３３　$\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)$ と実数 a に対し、問 30 の $(*)$ 左辺の極限値が存在し、さらに $f(x)$ が a を含むある開区間 I 上 Lipschitz 連続（すなわち、「 ${}^{\exists}L > 0,\ {}^{\forall}x, {}^{\forall}x' \in I;\ |f(x) - f(x')| < L|x - x'|$ 」）ならば、$f(x)$ は $x = a$ で微分可能であることを示せ。

高階微分

３４　n は自然数とする。

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とおく。$n = 2$ のとき、関数 $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上微分可能であるが、C^1 級ではないことを示せ。さらに、$f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上 C^1 級となる n の範囲、および $\mathbf{R}$ 上 2 階微分可能となる n の範囲を求めよ。

数学要論Ｂ・演習問題—No.4—

無限数列の級数

３５　$p > 0$ とする。級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ は、$p \leq 1$ のとき発散し、$p > 1$ のとき収束することを示せ。

３６　正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ が収束するとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2$ も収束することを示せ。

３７　1 が 1 個、$-\dfrac{1}{2}$ が 2 個、$\dfrac{1}{4}$ が 4 個、$-\dfrac{1}{8}$ が 8 個、……、$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k$ が 2^k 個、……、を並べ替えて出来る数列の級数の和を考える。
(1) 和がちょうど 2 になるように並べよ。
(2) 和がちょうど $\dfrac{1}{3}$ になるように並べよ。或いは、そのような並べ方が存在することを示せ。

３８　$\{a_n\}$ は実数列とする。

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\} \qquad ({}^\forall n \in \mathbf{N})$$

とおく。

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = +\infty \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n^+ = \lim_{n\to+\infty} a_n^- = 0$$

のとき、任意の実数 p に対し、$\{a_n\}$ を適当に並べ替えてできる実数列 $\{b_n\}$ で、その級数の和について $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = p$ が成り立つものが存在することを示せ。

関数列の各点収束、一様収束

３９ 次の関数列 $\{f_n\}$ は $n \to +\infty$ のとき I 上各点収束することを示せ。また、この収束は一様収束であるか否か答え、その理由を説明せよ。

(1)	$f_n(x) = (1 - x^n)^{1/n}$	$(\forall n \in \mathbf{N})$	$I = [0, 1]$
(2)	$f_n(x) = \frac{n}{(n+1)x}$	$(\forall n \in \mathbf{N})$	$I = (0, +\infty)$
(3)	$f_n(x) = \sin \frac{1}{nx}$	$(\forall n \in \mathbf{N})$	$I = (0, +\infty)$
(4)	$f_n(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{nx}$	$(\forall n \in \mathbf{N})$	$I = (0, +\infty)$
(5)	$f_n(x) = \frac{[nx]}{n}$	$(\forall n \in \mathbf{N})$	$I = [0, +\infty)$
(6)	$f_n(x) = n \left[\frac{x}{n}\right]$	$(\forall n \in \mathbf{N})$	$I = [0, +\infty)$

ただし $[x] =$“x を超えない最大の整数” とする。

40　関数列 $\{f_n\}$ は $n \to +\infty$ のとき関数 f に区間 I 上一様収束するとする。各 f_n がいずれも I 上有界ならば、f もまた I 上有界であることを示せ。

注意：「 $|f_n| \leq {}^{\exists}K$ より $|f| \leq K$ 」と言う解答は不可。

41　f は $\mathbf{R}$ 上の連続関数とし、

$$f_n(x) = f(x - \frac{1}{n}) \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

とする。f が $\mathbf{R}$ 上一様連続ならば、関数列 $\{f_n\}$ は f に $\mathbf{R}$ 上一様収束することを示せ。また f が $\mathbf{R}$ 上一様連続でなく、$\{f_n\}$ が f に $\mathbf{R}$ 上一様収束しない例を一つ挙げよ。

整級数

42　整級数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とする。

(1) $\limsup_{n\to+\infty} |a_n| < +\infty$ ならば $R \geq 1$ が成り立つことを示せ。

(2) $\liminf_{n\to+\infty} |a_n| > 0$ ならば $R \leq 1$ が成り立つことを示せ。

43　p は実数とする。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^p - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ p & (x = 1) \end{cases}$$

とおく。関数 $f(x)$ は $x = 1$ で何階微分可能か調べよ。

ヒント：この問題がなぜここで出題されたのか考えよ。

44　$R > 0$ とする。次の六つの区間について、これを収束域とする整級数の例をそれぞれ一つずつ挙げよ。

$$\{0\} = [0, 0], \quad (-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R), \quad [-R, R], \quad \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$$

45　整級数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とする。項別微分した級数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ も同じ収束半径 R を持つことを示せ。さらに $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ は収束するが、$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n R^{n-1}$ は発散するような例を一つ挙げよ。

数学要論B・演習問題—No.5—

積分

46　閉区間 $[a,b]$ $(a<b)$ を一つ選び、$[a,b]$ 上積分不可能な関数の例を一つ与え、積分不可能であることを定義に戻って示せ。

47　$\{a_n\}$ は $I=[0,1]$ に含まれる全ての有理数を並べた数列とし、

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{n} & (x=a_n) \\ 0 & (x\notin \mathbf{Q}) \end{cases}$$

とする。f は I 上積分可能であるか否か答え、その主張を積分の定義に戻って示せ。

48　f は $I=[0,1]$ 上の有界な連続関数とする。任意の I 上非負で有界な連続関数 g に対し

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq 0$$

が成り立つならば、f もまた I 上非負であることを示せ。