Quandles and discrete symmetric spaces

田丸 博士

大阪市立大学 / OCAMI

淡路島幾何学研究集会 2020
2020/01/24

Abstract

今回の目的

- 我々のカンドルの研究まとめ (の一部分) を紹介.
  (2 月@鹿児島, 来年度@北大の準備を兼ねて)

Introduction - (1/4)

Def. (David Joyce (1982), Matveev (1982))

X : 集合, $* : X \times X \to X$: 二項演算.
このとき $(X, *)$ が カンドル
:⇔ (Q1) $\forall x \in X,\ x * x = x$.
(Q2) $\forall x, y \in X,\ \exists ! z \in X \ :\ z * y = x$.
(Q3) $\forall x, y, z \in X,\ (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

- (Q1)–(Q3) は結び目の Reidemeister 変形に対応.

Introduction - (2/4)

Rem.

- 二項演算 $*$ に対し, $s_y(x) := x * y$ を考える ($s_y : X \to X$).

Def. (対称空間っぽい言い換え)

X: 集合, $s : X \to \mathrm{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$ に対し, (X, s) が カンドル

:⇔ (S1) $\forall x \in X$, $s_x(x) = x$.

(S2) $\forall x \in X$, s_x は全単射.

(S3) $\forall x, y \in X$, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

Introduction - (3/4)

以下, カンドルを (X, s) で表す. $(s : X \to \mathrm{Map}(X, X))$

Prop. (Joyce (1982))

- 連結リーマン対称空間はカンドル.

Ex.

- 群 G は次でカンドル: $s_g(h) := gh^{-1}g$.
  (観察: 有限カンドルの分類は, 有限群の分類は含みそう)

Introduction - (4/4)

Our Plan

対称空間論を参考に, カンドルの理論を作る第一歩:

- 良いカンドルのクラスを定義;
- そのようなカンドルを構成・分類する.

Today's Topic

- 二点等質カンドル (T., Kamada-T.-Wada, ...); 今日は略
- 平坦カンドル (Ishihara-T., Furuki-T., ...);
- その次に向けて (Kubo-Nagashiki-Okuda-T., ...).

Result - (1/6)

Fact

(M, g) : (連結) リーマン対称空間が 平坦

$:\Leftrightarrow$ 曲率 $\equiv 0$.

$\Leftrightarrow$ 群 $\langle s_x \circ s_y \mid x, y \in M \rangle$ が可換.

Ex.

- $\mathrm{Inn}(S^1) := \langle s_x \mid x \in S^1 \rangle = \mathrm{O}(2)$: 非可換;
- $\langle s_x \circ x_y \mid x, y \in S^1 \rangle = \mathrm{SO}(2)$: 可換.

Aim

- 上記を使って平坦カンドルを定義し, それを調べよう.

Result 2 - (2/6)

定義

カンドル (X, s) が 平坦
$:\Leftrightarrow\ G^0(X, s) := \langle s_p \circ s_q \mid p, q \in X \rangle$ が可換.

Def.

- 二面体カンドル $R_n :=$ [S^1 上の n 等分点の集合].
- s_x は, 軸 ox に関する折り返し.

Ex.

- R_n は平坦.
- 平坦カンドルと平坦カンドルの "直積" も平坦.
- 直積 $R_{n_1} \times \cdots \times R_{n_k}$ を 離散トーラス と呼ぶ.

Result 2 - (3/6)

Def.

- $\mathrm{Inn}(X, s) := \langle s_x \mid x \in X \rangle$ を 内部自己同型群;
- (X, s) が **(代数的) 連結** $:\Leftrightarrow \mathrm{Inn}(X, s) \curvearrowright X$ が推移的.

Thm. (Ishihara-T. (2016))

(X, s) : 平坦な連結有限カンドル
$\Leftrightarrow$ (X, s) は離散トーラスかつ $\# X$ は奇数.

Note

- 離散トーラスが連結 $\Leftrightarrow$ 元の個数が奇数.
- 「コンパクト連結リーマン対称空間は, 平坦ならトーラス」の離散版.
- 元々 s_x は全単射しか仮定していないのに, $s_x^2 = \mathrm{id}$ がでる...

Result 2 - (4/6)

Def.

- (X, s) が **等質** $:\Leftrightarrow \mathrm{Aut}(X, s) \curvearrowright X$ が推移的.
- $\mathrm{Inn}(X, s) \subset \mathrm{Aut}(X, s)$ より, 連結なら等質.

Thm. (Furuki-T.)

- $G = (V, E)$ (グラフ), $e : V \times V \to \mathbb{Z}_2$ (隣接写像) に対し,

$$X := V \times \mathbb{Z}_2, \quad s_{(v,a)}(w, b) := (w, b + e(v, w))$$

  とおくと, (X, s) は非連結な平坦カンドル.
- 上の (X, s) が等質 $\Leftrightarrow$ グラフが頂点推移的.

Result 2 - (5/6)

Ex.

- $G_2(\mathbb{R}^4)^\sim$ (有向実グラスマン),
- $\pm(i,j) := \mathrm{Span}\{e_i, e_j\}$ with 向き.
- $A(2,4) := \{\pm(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$

とおくと, $A(2,4)$ は $G_2(\mathbb{R}^4)^\sim$ の点対称の制限によりカンドル.

Info

$V \in G_2(\mathbb{R}^4)^\sim$ に対し, s_V は V に関する折り返しより,

- $s_{(1,2)}(1,3) = (1,-3) = -(1,3)$;
- $s_{(1,2)}(3,4) = (-3,-4) = (3,4)$, ...
- 一般に $s_{(i,j)}(k,l) = \pm(k,l)$.

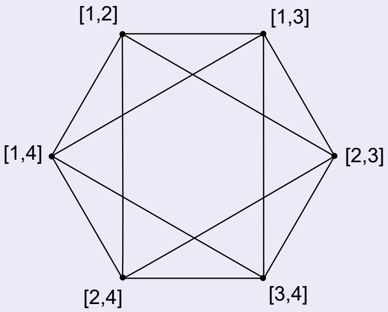
Result 2 - (6/6)

Note

For $A(2,4)$,

- $s_{(1,2)}(1,3) = -(1,3)$; $s_{(1,2)}(3,4) = (3,4)$; $\cdots$
- join $[i,j]$ and $[k,l]$ if $s_{(i,j)}(k,l) = -(k,l)$.

Then we get



(Thanks to K. Furuki)

In Progress - (1/2)

Theme

カンドルに対して, 対称空間論の類似を作る.

Next Project

- リーマン対称空間に対して, “maximal flat” (極大平坦全測地的部分多様体) は共役を除いて一意. その次元が 階数.
- それを参考とし, カンドルに “階数” を定義したい. maximal flat に相当する部分集合は何?

Comment (先の例の一般次元版)

- $A(k, n) \subset G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim}$ は, 良い部分カンドルに見える.

In Progress - (2/2)

Def.

- (X, s) 内の A が s-可換 $:\Leftrightarrow \forall a, b \in A,\ s_a \circ s_b = s_b \circ s_a$.

Thm. (Kubo-Nagashiki-Okuda-T.)

- $A(k, n) \subset G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ は s-可換.
- $n = 2k$ (k 偶数) のとき, $A(k, n)$ は極大 s-可換ではない.
- それ以外のとき, $A(k, n)$ は極大 s-可換, 合同を除いて一意.

Note

- $(n, k) = (4, 2)$ のとき, 極大 s-可換の一意性が成立
  $(\#[$極大 s-可換 in $G_2(\mathbb{R}^4)^\sim] = 36 > 12 = \#A(2, 4))$.
- その他の場合 $((8, 4), (12, 6), \ldots)$, 一意性も不成立.

References

- Tamaru, H.: *Two-point homogeneous quandles with prime cardinality*. J. Math. Soc. Japan (2013)
- Kamada, S., Tamaru, H., Wada, W.: On classification of quandles of cyclic type, Tokyo J. Math. (2016)
- Ishihara, Y., Tamaru, H.: Flat connected finite quandles, Proc. Amer. Math. Soc. (2016)
- Furuki, K., Tamaru, H.: Flat homogeneous quandles and vertex-transitive graphs, preprint
- Kubo, A., Nagashiki, M., Okuda, T., Tamaru, H.: A commutativity condition for subsets in quandles, in preparation

Thank you!