A commutativity condition for subsets in quandles — a generalization of antipodal subsets

田丸 博士

大阪市立大学 / OCAMI

筑波大学微分幾何学セミナー (online),
2021/01/05.

Introduction - (1/4)

(起) カンドル (quandle): 結び目の研究に現れる代数系.

Def. (David Joyce (1982), Matveev (1982))

Q: 集合, $s: Q \to \mathrm{Map}(Q, Q) : x \mapsto s_x$ に対し, (Q, s) が **カンドル**

:⇔ (S1) $\forall x \in Q,\ s_x(x) = x$.

(S2) $\forall x \in Q,\ s_x$ は全単射.

(S3) $\forall x, y \in Q,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

Ex.

- 任意の群は $s_g(h) := gh^{-1}g$ によってカンドル.
- ちなみに $s_g(h) := g^{-1}hg$ でもカンドル (共役カンドル).

Introduction - (2/4)

(承) カンドルは対称空間の“離散化”とみなすことができる.

Fact (Joyce)

- (連結な) 対称空間はカンドル.

Our Theme

- 対称空間論を参照して, カンドルの構造を研究する.
  ($\leftrightarrow$ 離散的な対称空間論を作る.)

Introduction - (3/4)

(転) 対称空間の対蹠集合を参考に, 部分集合の s-可換性を導入.

Def.

カンドル (Q, s) 内の部分集合 X が s-可換
$:\Leftrightarrow\ s_x \circ s_y = s_y \circ s_x \quad (\forall x, y \in X)$.

Note

- s-可換 subset の部分集合は s-可換.
- 従って, 包含関係に関して極大なものに興味がある.

Introduction - (4/4)

(結) s-可換 subset は良い性質をもち, 興味深い例がある.

Today's Topic

- 動機: カンドルと対称空間の双方から.
- 性質: 対蹠 $\Rightarrow$ s-可換, ...
- 分類: 球面, 実射影空間, 二面体カンドル内の極大 s-可換.
- 今後の問題:

Note

- Joint work(s) with 久保亮, 長鏰美香, 奥田隆幸, ...

動機 1 - (1/3)

動機 1

- 平坦な非連結 (できれば等質な) カンドルの構成.

Def.

- (Q,s) が 等質 $:\Leftrightarrow \mathrm{Aut}(Q,s) \curvearrowright Q$ が推移的.
  (準同型 $:\Leftrightarrow f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$)
- (Q,s) が 連結 $:\Leftrightarrow \mathrm{Inn}(Q,s) := \langle s_x \mid x \in Q \rangle \curvearrowright Q$ が推移的.
- (Q,s) が 平坦 $:\Leftrightarrow G^0(Q,s) := \langle s_x \circ s_y \mid x,y \in Q \rangle$ が可換.

Note

- 連結 $\Rightarrow$ 等質.
- 連結 $\Leftrightarrow G^0(Q,s) \curvearrowright Q$ が推移的.

動機 1 - (2/3)

Note

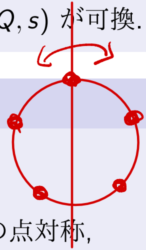
- リーマン対称空間 (Q, s) が平坦 (曲率 $\equiv 0$) $\Leftrightarrow$ $G^0(Q, s)$ が可換.

Thm. (Ishihara-T. 2016)

有限カンドル (Q, s) が連結平坦

$\Leftrightarrow$ (Q, s) は奇数位数の離散トーラス.

(二面体カンドル $R_n :=$ 単位円の n 等分点 + 通常の点対称,
離散トーラス $:= R_{n_1} \times \cdots \times R_{n_k}$.)



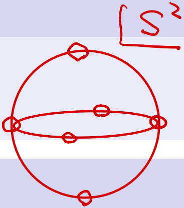
Note

- 平坦カンドルに対して "連結" は条件が強い.
- では非連結な平坦カンドルはどのくらいあるか?

  (思い付く例: 自明カンドル $(s_x = \mathrm{id})$, 偶数位数の離散トーラス...)

動機 1 - (3/3)

Obs.



- $G^0(Q, s) \subset \mathrm{Inn}(Q, s) \subset \mathrm{Aut}(Q, s)$.
- 部分カンドル $X \subset (Q, s)$ が s-可換 $\Rightarrow X$ は平坦.

Ex. (Furuki-T.)

- 単位球面 S^n に対し, $A^{n+1} := \{\pm e_1, \dots, \pm e_{n+1}\}$ は部分カンドルかつ s-可換. さらに A^{n+1} は非連結, 等質.

Proof

- 各 $s_{\pm e_i}$ は対角行列で表される (e.g., $s_{\pm e_1} = \mathrm{diag}(1, -I_n)$).
- $s_{e_i}(e_j) = \pm e_j$ より部分カンドル, 非連結.

Natural Questions

- 他の対称空間でも考えると, いろいろな例が出てくるか？

動機 2 - (1/2)

Note

- リーマン対称空間の理論において, 平坦なものは重要.

Fact

- 連結リーマン対称空間内で, max. flat (極大な連結完備全測地的平坦部分多様体) は合同を除いて一意. その次元を **rank** と呼ぶ.

Note

- コンパクトな場合は極大トーラス. 半単純リー代数だと Cartan subalgebra が対応物.

動機 2 - (2/2)

動機 2

- (有限) カンドル内の部分集合で, max. flat の類似物を定義せよ.

Note

- そこで今回は “極大 s-可換部分集合” を考える.
- ただし “一意性” は一般には成り立たないので, そのまま max. flat の類似物であるとは言えない...
- が, 様々な部分集合を今後考えていくための試金石にはなるか.

動機 3 / 性質 1 - (1/5)

動機 3 / 性質 1

- X ($\subset (Q, s)$) が "対蹠的 (antipodal)" $\Rightarrow$ s-可換.

Def. (cf. Chen-Nagano)

$x, y \in (Q, s)$ に対し,

- (x, y) が **pole pair** $:\Leftrightarrow s_x = s_y$.
- (x, y) が **antipodal (対蹠) pair** $:\Leftrightarrow s_x(y) = y$ かつ $s_y(x) = x$.

Def. (続き)

$X \subset (Q, s)$ に対し,

- X が **pole subset** $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X$, (x, y) は pole pair.
- X が **antipodal subset** $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X$, (x, y) は antipodal pair.

動機 3 / 性質 1 - (2/5)

Def. (同様に)

- $x, y \in (Q, s)$ に対し，(x, y) が s-可換 **pair** $:\Leftrightarrow s_x \circ s_y = s_y \circ s_x$.
- $X \subset (Q, s)$ が s-可換部分集合 $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X$, (x, y) は s-可換.

Prop.

- (x, y) が antipodal pair ならば s-可換 pair.

Proof

- $(Q3)$ より $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$. 対蹠より $s_x(y) = y$.

Note

- 対蹠集合は Chen-Nagano, Tanaka-Tasaki, ... により詳しく研究されている．s-可換部分集合はその一般化.

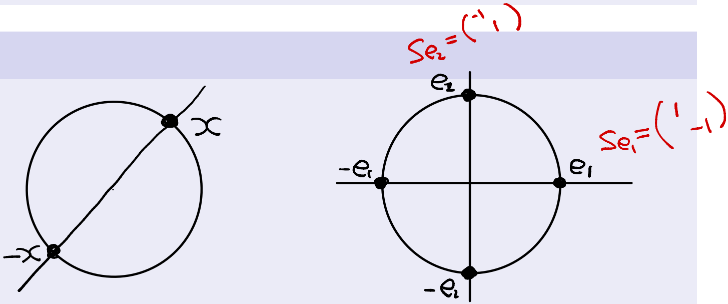
動機 3 / 性質 1 - (3/5)

Ex.

円周 S^1 を考えると,

- $\{\pm x\}$ は極大な pole subset かつ極大な antipodal subset.
- $\{\pm e_1, \pm e_2\}$ は (極大な) s-可換 subset.

図



動機 3 / 性質 1 - (4/5)

Lem.

(x, y) が s-可換 pair $\Leftrightarrow$ $(s_x(y), y)$ が pole pair.

Proof

- $(Q3)$ より $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.
- $(Q2)$ より $s_x \circ s_y \circ s_x^{-1} = s_{s_x(y)}$.
- 従って (x, y) が s-可換 iff $s_y = s_{s_x(y)}$.

Prop.

(Q, s) の pole が全て自明 (i.e., (x, y) が pole pair $\Rightarrow x = y$) とすると, 任意の s-可換部分集合は対蹠的.

Proof

- (x, y) を s-可換 pair とすると, Lem. より $(s_x(y), y)$ は pole pair.
- 仮定より $y = s_x(y)$. あと $x = s_y(x)$ も同様.

動機 3 / 性質 1 - (5/5)

Prop. (まとめ)

- 対蹠 $\Rightarrow$ s-可換.
- pole が全て自明なら, 対蹠 $\Leftrightarrow$ s-可換.

Note

- 対蹠と s-可換に違いがあるかどうかは, pole の状況による.
- 自明な pole しかなく, 極大対蹠集合が一意的でない対称空間の例があるので, 極大 s-可換の一意性も一般には成り立たない...

性質 2 - (1/2)

Prop. (性質 2)

- X $(\subset (Q, s))$ が極大 s-可換 subset ならば, X は部分カンドル.

Proof

- $\forall x \in X$ をとる. $s_x(X) = X$ を示せば良い.
- すると $X \cup s_x(X)$ は s-可換.

  $(\because)$ X は s-可換. $s_x(X)$ も s-可換. $\forall y, z \in X$ をとる.

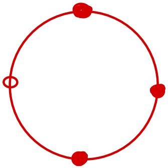
  (x, z) は s-可換より $(s_x(z), z)$ は pole pair.

  よって $s_y \circ s_{s_x(z)} = s_y \circ s_z = s_z \circ s_y = s_{s_x(z)} \circ s_y$.
- X の極大性から $X = X \cup s_x(X)$. 特に $s_x(X) \subset X$.
- $s_x(X)$ も極大 s-可換なので $s_x(X) = X$.

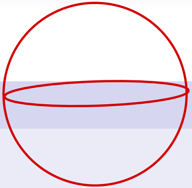
性質 2 - (2/2)

Note

- 対蹠集合は, 極大でなくても常に部分カンドル ($s_x|_X = \mathrm{id}$).
- s-可換部分集合が極大でないとき, 部分カンドルとは限らない.
- 極大 s-可換としてどんなカンドルが出てくるか？



分類 1 - (1/2)



球面 S^n の復習

- $s_x(y) = -y + 2\langle x, y\rangle x$.
- (x, y) が pole pair $\Leftrightarrow x = \pm y$.

Lem.

$x, y \in S^n$ に対して, (x, y) が s-可換 pair $\Leftrightarrow x = \pm y$ or $x \perp y$.

Proof

- (x, y) が s-可換 pair $\Leftrightarrow (s_x(y), y)$ が pole pair $\Leftrightarrow s_x(y) = \pm y$.
- ここで $s_x(y) = y \Leftrightarrow x = \pm y$.
- また $s_x(y) = -y \Leftrightarrow x \perp y$.

分類 1 - (2/2)

Prop.

球面 S^n に対して,

- $\{\pm e_1, \dots, \pm e_{n+1}\}$ は極大 s-可換 subset.
- 任意の極大 s-可換 subset は上に $\mathrm{SO}(n+1)$ で合同.
- これは (カンドルとして) 非連結, 等質.

Note

- ということで前に挙げた部分カンドルの例が “極大 s-可換 subset” として特徴付けられた.

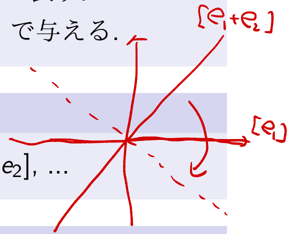
分類 2 - (1/2)

実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ の復習

- $0 \neq x \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して $[x] := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{x\} \in \mathbb{RP}^n$ と表す.
- $s_{[x]}$ は $[x]$ に関する reflection $r_{[x]} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ で与える.

Ex

- $s_{[e_1]}([e_2]) = [-e_2] = [e_2],\ \ s_{[e_1]}([e_1 + e_2]) = [e_1 - e_2], \ldots$



Fact

- $n > 1$ のとき $\mathbb{RP}^n$ の pole は自明.
- $n = 1$ のとき, $([x], [y])$ が pole pair in $\mathbb{RP}^1 \Leftrightarrow [x] = [y]$ or $x \perp y$.
  $(r_{[e_1]} = \mathrm{diag}(1, -1),\ \ r_{[e_2]} = \mathrm{diag}(-1, 1)$ より $s_{[e_1]} = s_{[e_2]})$

分類 2 - (2/2)

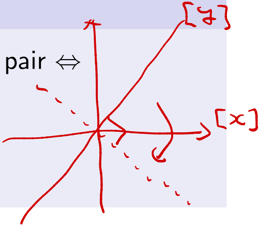
Prop.

実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ に対して,

- $n > 1$ のとき, X $(\subset \mathbb{RP}^n)$ が極大 s-可換 $\Leftrightarrow$ X は極大対蹠 $\Leftrightarrow$ X は $\{[e_1], \ldots, [e_{n+1}]\}$ と $\mathrm{SO}(n+1)$-合同.
- $n = 1$ のとき, X $(\subset \mathbb{RP}^1)$ が極大 s-可換 $\Leftrightarrow$ X は $\{[e_1], [e_2], [e_1 + e_2], [e_1 - e_2]\}$ と $\mathrm{SO}(2)$-合同.

Proof ($n = 1$ のみ)

- $([x], [y])$ が s-可換 pair $\Leftrightarrow$ $(s_{[x]}([y]), [y])$ が pole pair $\Leftrightarrow$ $s_{[x]}([y]) = [y]$ or $s_{[x]}([y]) \perp [y]$.
- $s_{[x]}([y]) = [y] \Leftrightarrow \angle([x], [y]) = 0, \pi/2$.
- $s_{[x]}([y]) \perp [y]. \Leftrightarrow \angle([x], [y]) = \pi/4$.



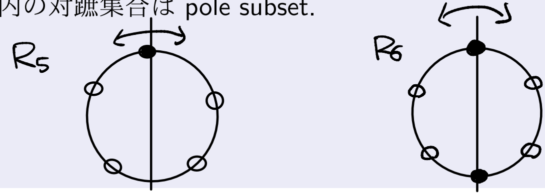
分類 3 - (1/3)

二面体カンドル R_n の復習

- $R_n := \{S^1$ 上の n 等分点$\}$.
- s は円周 S^1 の点対称の制限.

Rem.

- R_n が非自明な pole をもつ $\Leftrightarrow$ n が偶数.
- R_n 内の対蹠集合は pole subset.

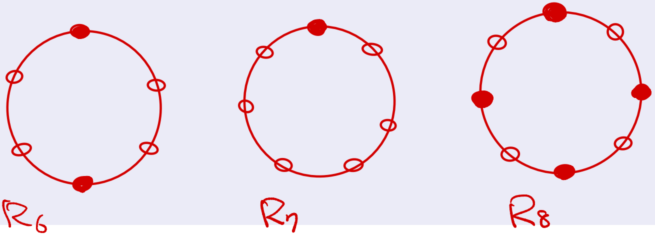


分類 3 - (2/3)

Prop.

R_n 内の極大 s-可換 subset X について,

- n 奇数のとき, $\#X = 1$.
- $n = 4m - 2$ のとき, $X = \{x, x + (2m - 1)\}$.
- $n = 4m$ のとき, $X = \{x, x + m, x + 2m, x + 3m\}$.



分類 3 - (3/3)

Obs.

- Fact: 部分集合は pole $\Rightarrow$ 対蹠 $\Rightarrow$ s-可換.
- 有限カンドルにおいても, 上記の $\Leftarrow$ が成立する場合としない場合がある.

問題 1 - (1/3)

問題 1

- 知っている対称空間 / カンドル内の極大 s-可換 subset を決定せよ.

In Progress

- (Kubo-Nagashiki-Okuda-T.) 有向実グラスマン $G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim}$ 内で.
- (Akase-Tanaka-Tasaki-T.) 古典群やその商群内で.
- (Tada) Alexander カンドル内で.

問題 1 - (2/3)

$G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ の復習

- $\mathbb{R}^n$ 内の向き σ の付いた k 次元 subspace V 全体の集合,
- “向き” とは, 基底を $\mathrm{GL}^+(k,\mathbb{R})$ の作用で割った同値類.
- $(V,\sigma) \in G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ に対し, $s_{(V,\sigma)}$ は V に関する折り返し.

Ex.

- $\pm(i,j) := \mathrm{Span}\{e_i, e_j\} \in G_2(\mathbb{R}^4)^\sim$ with 向き.
- $s_{(1,2)}(1,3) = (1,-3) = -(1,3)$;
- $s_{(1,2)}(3,4) = (-3,-4) = (3,4)$, ...

問題 1 - (3/3)

Prop.

$n \neq 2k$ のとき, $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ 内の極大 s-可換 subset は

- $\{\pm(i_1, \ldots, i_k) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ と $\mathrm{SO}(n)$-合同.

Note ち→ k: even

- $n = 2k$ のときは, もっと複雑になる ($RP^1 = G_1(\mathbb{R}^2)$ の場合と同様).
- $n \neq 2k$ でも, $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ 内の極大対蹠集合の決定は極めて難しい (にも関わらず極大 s-可換は決定できることがある).

問題 2 - (1/2)

問題 2

- 極大 s-可換 subset の構造を調べよ.

Def.

X $(\subset (Q, s))$ に対して,

- X が **外在的等質** :$\Leftrightarrow$ $N_{\mathrm{Aut}(Q,s)}(X) \curvearrowright X$ が推移的.
- X が **内在的等質** :$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Aut}(X, s|_X) \curvearrowright X$ が推移的.

Note

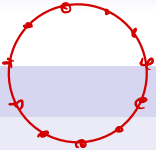
- 外在的等質 $\Rightarrow$ 内在的等質.
- 対蹠集合はいつでも (自明カンドルなので) 内在的等質.

問題 2 - (2/2)

疑問

- 連結リーマン対称空間内の極大 s-可換 subset は内在的等質か？
  (外在的等質は不成立な例がありそう...)
- 対蹠集合の外在的等質性を調べるのに使えるか？

問題 3 - (1/1)

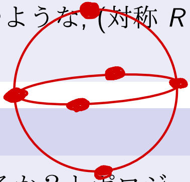


問題 3.1 (cf. Kubo)

- 他の部分集合は考えられないか？
- 対蹠 pair, s-可換 pair のような二項関係があれば, ○○部分集合が定義できる. 他にも面白いのがあっても良さそう.

問題 3.2

- 極大対蹠集合や極大 s-可換の一意性が成り立つような, (対称 R 空間に対応する) カンドルのクラスはあるか？



問題 3.3

- 極大 s-可換 subset は対称空間の性質を反映するか？トポロジーとの関係は？

References

- Tamaru, H.: Two-point homogeneous quandles with prime cardinality, J. Math. Soc. Japan (2013)
- Kamada, S., Tamaru, H., Wada, W.: On classification of quandles of cyclic type, Tokyo J. Math. (2016)
- Ishihara, Y., Tamaru, H.: Flat connected finite quandles, Proc. Amer. Math. Soc. (2016)
- Furuki, K., Tamaru, H.: Flat homogeneous quandles and vertex-transitive graphs, preprint
- Kubo, A., Nagashiki, M., Okuda, T., Tamaru, H.: A commutativity condition for subsets in quandles — a generalization of antipodal subsets, preprint

Thank you!