このプリントは, 2018 年度の解析 II (田丸担当クラス) の講義内容をまとめたものです.

1 多変数の連続写像

1.1 前置き

以前に 1 変数関数の解析について学んだ. I を $\mathbb{R}$ 内の開区間とし, 関数 $f : I \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ を考え, その連続性や微分可能性を定義した.

1.2 開集合と領域

$\mathbb{R}$ 内の次の形の部分集合を開区間とよんだ:

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad (a \text{ は実数または } -\infty,\ b \text{ は実数または } \infty).$$

連続性や微分可能性の定義をするときに, 右極限と左極限をとるため, $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}$ のような区間で定義された関数だと困ることがある (端の点で困る). $\mathbb{R}^2$ でも同様の事象が起こるため, 以下の言葉を用意しておく.

定義 1.1. $\mathbb{R}^2$ 内の部分集合 D が <u>開集合</u> であるとは, 「端の点」がないこと.

定義 1.2. $\mathbb{R}^2$ 内の部分集合 D が <u>領域</u> であるとは, D 上の全ての二点が「繋がった線」で結べること.

1.3 極限

一変数の場合, 極限は右から近付けたものと左から近付けたものが一致する必要があった (そうでない場合は極限は存在しない). 多変数の場合には, 様々な近付き方があるので, それら全てを考えなくてはならない.

定義 1.3. 関数 $f(x, y)$ が (a, b) の周りで定義されているとする. 点 (x, y) を (a, b) にどのように近付けても, $f(x, y)$ が実数 ℓ に近付くとき, この ℓ を $f(x, y)$ の (a, b) における <u>極限値</u> といい, 次のように表す:

$$\ell = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y).$$

例 1.4. 次の極限は存在しない: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

例 1.5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 - y^3 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$

1.4 連続関数

一変数関数 $f(x)$ が点 a で連続とは, 次が成り立つことであった:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

定義 1.6. 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

命題 1.7. 関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ が点 (a, b) で連続のとき, 定数倍 cf (c は実数), 和 $f + g$, 積 fg, 商 f/g (ただし $g(a, b) \neq 0$ のとき) は点 (a, b) で連続.

D を $\mathbb{R}^2$ 内の開領域とする. 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が D 上で連続であるとは, D の全ての点で f が連続であることと定義する.

例 1.8. 次の関数は $\mathbb{R}^2$ 上で連続:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - 3x^2 y^2}{2x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

2　多変数関数の微分

2.1　切り口

曲面 $z=f(x,y)$ に対して, $z=f(x,b)$ を $y=b$ での切り口, $z=f(a,y)$ を $x=a$ での切り口という.

例 2.1. 例 1.8 の関数について, $x=0$ での切り口は $z=0$, $y=0$ での切り口は $z=x^2/2$.

2.2　偏微分可能性

一変数関数の微分係数は $\frac{d}{dx}f(x)|_{x=a}=f'(a)$ といった記号で表されていた.

定義 2.2. $\frac{d}{dx}f(x,b)|_{x=a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$ が存在するとき, これを $z=f(x,y)$ の点 (a,b) における x に関する <u>偏微分係数</u> とよぶ:

上記の偏微分係数を次のような記号で表す:

$$z_x(a,b)=f_x(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)$$

偏微分係数が存在するときに偏微分可能という. y に関する偏微分係数や記号も同様に定義する. 一変数関数のときに, 微分係数から導関数を定義したのと同様に, 次が定義される.

定義 2.3. $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ を (a,b) の関数と思ったものを <u>偏導関数</u> とよび, $f_x=f_x(x,y)$ や $f_y=f_y(x,y)$ のように表す.

例 2.4. $f(x,y)=x^2y+3xy^5+x^3$, $f(x,y)=x^2yz^3+yz$ の偏導関数を求めよ.

偏微分の良いところは, 計算が簡単なことである. 一方で悪いところは, $x=a$ や $y=b$ での切り口しか見ていないことである. そのため, 偏微分可能であっても連続とは限らない.

例 2.5. 次の関数は, 原点 $(0,0)$ において連続でないが偏微分可能:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

2.3　復習: 一変数関数の微分と接線

定義 2.6 (ランダウの記号)**.** 関数 $f(x)$, $g(x)$ が次をみたすときに $f(x)=o(g(x))$ $(x\to a)$ とかく:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

すなわち $f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ は, $x = a$ の近くで "$f(x) << g(x)$" を意味する.

例 2.7. 以下が成り立つ:

(1) $x^2 = o(x)$ $(x \to 0)$;
(2) $e^x - (1+x) = o(x)$ $(x \to 0)$;
(3) $x^2 - (2x-1) = o(x-1)$ $(x \to 1)$.

さらに, $f(x) - g(x) = o(x-a)$ $(x \to a)$ が成り立つとき, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は $x = a$ で接するという.

命題 2.8. $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるための必要十分条件は, 次をみたす実数 m が存在すること:

$$f(x) - f(a) - m(x-a) = o(x-a) \quad (x \to a).$$

これは $y = f(x)$ と $y = m(x-a) + f(a)$ が $x = a$ で接する (すなわち接線が存在する) ことを意味する. 上の条件が成り立つとき, 自動的に $m = f'(a)$ となる.

2.4 全微分可能性

例 2.9. $z = m(x-a) + n(y-b) + c$ は, 点 (a, b, c) を通る平面を表す.

定義 2.10. 関数 $f(x, y)$ が (a, b) で <u>全微分可能</u> とは, 次をみたす実数 m, n が存在すること:

$$f(x, y) - f(a, b) - m(x-a) - n(y-b) = o(||(x, y) - (a, b)||).$$

上の条件は, 曲面 $z = f(x, y)$ と平面 $z = m(x-a) + n(y-b) + f(a, b)$ が点 (a, b) において十分に近い (別の言い方をすると, 接平面である) ことを意味している.

定理 2.11. $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能ならば, 曲面 $z = f(x, y)$ は (a, b) での接平面をもち, 次の形で書ける:

$$z = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + f(a, b).$$

以下では, 全微分可能性と偏微分可能性, 連続性との関係をみる.

命題 2.12. 関数 $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能であるとすると,

(1) f は (a, b) で偏微分可能であり, $m = f_x(a, b)$, $n = f_y(a, b)$;
(2) f は (a, b) で連続.

この命題の (1) の証明のためには,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}, \quad \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

が存在して, それぞれが m, n と等しいことを示せば良い. 命題の (2) の証明のためには, 次を示せば良い:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) - f(a,b)) = 0.$$

定理 2.13. $f(x,y)$ が (a,b) を含む開近傍で偏微分可能, さらに f_x と f_y が (a,b) で連続とする. このとき $f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能.

例 2.14. 例 2.5 の偏導関数は $(0,0)$ で連続でない.

解析 II 小テスト (1)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく,「…とおく」,「…と仮定する」のような語句を適宜用いること.

問題 2.15. 次の関数 $z = f(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ において連続かどうかを予想し, それを示せ:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^3 + y^3)/(x^2 + y^2) & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

予想:

証明:

3　合成関数の微分に関する連鎖律

3.1　ヤコビ行列

ここでは $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ という写像を考える．また, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ とし, その行先を $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$ と表す.

定義 3.1. 上記の写像 F が全微分可能であるとする．このとき次を F の <u>ヤコビ行列</u> という:

$$JF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

例 3.2. $F : (u, v) \mapsto (2u - 3v, 5u + v)$ のヤコビ行列は,

$$JF = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 3.3. $F : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ のヤコビ行列は,

$$JF = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3.2　連鎖律

ここでは合計写像の微分に関する性質を紹介する．一変数関数の場合にも, 例えば $y = (2x+1)^3$ を微分する場合には, 合成関数の微分の性質を用いて計算するのが普通だった．同様に使える性質が, 多変数の場合にも成り立つ.

定理 3.4. $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ がともに全微分可能であるとする．このとき合成写像 $G \circ F$ も全微分可能で, 次が成り立つ:

$$J(G \circ F) = JG \cdot JF.$$

これを m, n, ℓ が小さい場合に適用すると, 以下を得る.

命題 3.5. $z = f(x, y)$ が全微分可能, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ が微分可能であるとする．このとき次が成り立つ:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

命題 3.6. $z = f(x, y)$, $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ が全微分可能であるとする．このとき次が成り立つ:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

例 3.7. $z = e^x \cos y$, $x = t^2$, $y = t^3$ に対して, 命題 3.5 は確かに成り立つ.

例 3.8. $z = (2u - 3v)^2 + (u - 5v)^3$ とする. 合成写像の微分を用いて計算すると,

$$z_u = 4(2u - 3v) + 12(u - 5v)^2, \qquad z_v = -6(2u - 3v) - 15(u - 5v)^2.$$

問題 3.9. $x = u \cos\alpha - v \sin\alpha$, $y = u \sin\alpha + v \cos\alpha$ とする (ただし α は定数). このとき $z = f(x, y)$ に対して次を示せ:

$$z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2.$$

4 高次の偏導関数とテーラーの定理

一変数の場合に, テーラー展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

を学んだ (ここで $0 < \theta < 1$). これの二変数版を紹介する.

4.1 高次の偏導関数

定義 4.1. $z = f(x, y)$ が偏微分可能であるとし, f_x や f_y も偏微分可能であるとする. このとき f_x や f_y の x, y による偏微分を以下のように表す:

$$f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ldots$$

定理 4.2. 二回の偏導関数 $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$ がともに連続ならば, $f_{xy} = f_{yx}$.

例 4.3. 次の関数に対しては $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ となる:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2) & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

定義 4.4. $z = f(x, y)$ が <u>C^n 級</u> であるとは, n 回偏微分可能であり, さらに n 次以下の偏導関数が全て連続となること. とくに, 何回でも偏微分可能で全ての次数の偏導関数が連続のときには <u>C^∞ 級</u> という.

C^∞ 級関数に対しては, 偏導関数は偏微分する変数の順序には依らない.

4.2 偏微分作用素

定義 4.5. a, b を定数とするとき, 次で定義される $(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y})$ を <u>偏微分作用素</u> という:

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) f := a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}.$$

例 4.6. $(2\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y})(x^2 y) = 4xy + 3x^2$.

例 4.7. $f(x, y)$ が C^2 級のとき, $(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})(2\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y})f = (2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2}{\partial y^2})f$.

例 4.8. $f(x, y)$ が C^n 級のとき, $x = a + ht$, $y = b + kt$ とおくと, $j \leqq n$ に対して次が成り立つ:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j f(a+ht, b+kt) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a+ht, b+kt).$$

4.3 テーラーの定理

定理 4.9. $f(x, y)$ が C^n 級であり, 定義域は (a, b), $(a+h, b+k)$ とこれらを結ぶ線分を含むとする. このとき次をみたす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する:

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b) + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k).$$

テーラー展開の $(a, b) = (0, 0)$ の場合をマクローリン展開といい, また $n = 1$ の場合を平均値の定理という.

例 4.10. $f(x, y) = e^{x+2y}$ に $n = 2$ としてマクローリン展開すると,

$$e^{h+2k} = 1 + h + 2k + \frac{1}{2}(h^2 + 4hk + 4k^2)e^{\theta h + 2\theta h}.$$

問題 4.11. 以下の関数のマクローリン展開を求めよ ((1) は $n = 2$ まで, (2) はできるところまで):

(1) $f(x, y) = \cos(x + 2y)$;

(2) $f(x, y) = xy + x^2 y$.

5　多変数関数の極値

命題 5.1 (1 変数関数の復習)**.** $y = f(x)$ が適当な回数微分できるとする．このとき,

(1) $x = t$ で $f(x)$ が極大値または極小値をとるとき, $f'(t) = 0$ が成り立つ;

(2) $f'(t) = 0$ が成り立つとき, $f''(t) > 0$ (または $f''(t) < 0$) なら $x = t$ で $f(x)$ は極小値 (または極大値) をとる.

ここではこれの 2 変数版を紹介する.

定義 5.2. $z = f(x, y)$ が (a, b) で <u>極大値</u> (または <u>極小値</u>) をとるとは, $f(a, b) > f(x, y)$ (ただし (x, y) は (a, b) に十分近い異なる点) が成り立つこと.

ここでは極大や極小の定義に等号は入れないことに注意する．以下, $f(x, y)$ は C^2 級とする.

命題 5.3. $z = f(x, y)$ が (a, b) で極値をとるとき, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

上の命題の証明は簡単．実際, 切り口に注目すれば 1 変数の場合に帰着できる.

定理 5.4. $z = f(x, y)$ が $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ をみたすとする．また, 判別式を次で定義する: $D := f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$．このとき, 以下が成り立つ:

(1) $D > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) > 0$ のとき, $f(x, y)$ は (a, b) で極小値をとる;

(2) $D > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) < 0$ のとき, $f(x, y)$ は (a, b) で極大値をとる;

(3) $D < 0$ のとき, $f(x, y)$ は (a, b) で極値をとらない.

ここで $D = 0$ のときは何の情報も得られないことに注意する．この定理を信用するために, 簡単な場合について述べる.

例 5.5. 以下の関数 $f(x, y)$ は $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ をみたし, さらに次が成り立つ:

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ は $(0, 0)$ で極小値をとり, $D = 4 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$;

(2) $f(x, y) = -x^2 - y^2$ は $(0, 0)$ で極大値をとり, $D = 4 > 0$, $f_{xx} = -2 < 0$;

(3) $f(x, y) = x^2 - y^2$ は $(0, 0)$ で極値をとらず, $D = -4 < 0$.

ちなみに定理の証明は, 例えば極大値をとることを示すためには, $f(a + h, b + k) - f(a, b) > 0$ (ただし $|h|$, $|k|$ は十分小) を示せば良い．この不等式の証明にはテーラー展開を用いる.

例 5.6. $f(x, y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$ は $(1, -2)$ で極大値 5 をとる (極値は 1 つ).

例 5.7. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$ は $(1, -1)$, $(-1, 1)$ で極大値 2 をとる (極値は 2 つ).

解析 II 小テスト (2)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく,「…とおく」,「…と仮定する」のような語句を適宜用いること.

問題 5.8. $f(x, y) = x^4 + y^2 + 2x^2 - 4xy + 1$ の極値を全て求めよ.

解答:

学生番号 ____________________ 氏名 ____________________

6　陰関数定理

6.1　平面曲線

ここでは平面内の曲線を考える. $y=\varphi(x)$ のグラフはその典型例だが, 他にも $f(x,y)=0$ のように表すこともある. これを陰関数表示とよぶ. 例えば単位円は $x^2+y^2-1=0$ と表示できる.

命題 6.1. $y=\varphi(x)$ のグラフは, 常に陰関数表示できる.

高校で習ったように, $y=\varphi(x)$ のグラフについては, 微分を使って概形を調べることができた. よって, 陰関数表示された曲線の概形を調べる際には, グラフで表示すれば良い.

例 6.2. $f(x,y)=x^2+y^3$ に対して, $f(x,y)=0$ で表される曲線の概形を描く.

6.2　陰関数定理

陰関数表示された曲線は, いつでもグラフで表示できるとは限らない. 表示できるための条件を与えるものが陰関数定理である.

定理 6.3 (陰関数定理)**.** $f(x,y)$ を C^1 級関数とし, $f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ であるとする. このとき以下が成り立つ:

(1) (a を含む開集合で定義された) 関数 $y=\varphi(x)$ が存在し, $\varphi(a)=b$, $f(x,\varphi(x))=0$.
(2) 上の φ は微分可能で, $\varphi'(x)=-\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$.

例 6.4. $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ について, 点 $(1,0)$, $(0,1)$ において陰関数定理は正しい.

注意 6.5. 陰関数定理は, x と y の役割を入れ替えても成り立つ. すなわち, $f(a,b)=0$, $f_x(a,b)\neq 0$ であるとすると, ((a,b) の近くで) $x=\psi(y)$ と表すことができる. このことから, $(f_x,f_y)\neq(0,0)$ となる点の周りでは, グラフで表示することができる. $(f_x,f_y)=(0,0)$ となる点の周りの様子は, これだけでは分からない.

例 6.6. $f(x,y)=x^2+y^3$ は次をみたす: $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

例 6.7. $f(x,y)=x^3+xy^2-2=0$ に対して, $xy\neq 0$ となる点では, $y'=-\dfrac{3x^2+y^2}{2xy}$. (2 通りの方法で確かめる)

問題 6.8. $f(x,y)=x^3+3xy+4xy^2+y^2+y-2=0$ について, $(1,-1)$ における接線の方程式は $2x-3y=5$ であることを確かめよ.

7　条件付き極値

7.1　準備

例 7.1. 関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ を, $\mathbb{R}^2$ 全体で考えるのではなく, 円 $x^2+y^2=1$ 上だけで考え, その極値を求める. 円の上の点を $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ とおくと, $\theta=\pm\pi/4$ で極値をとる.

この例のように円の上の点を考えるときは良いが, このままでは一般に曲線 $g(x,y)=0$ の点を動く時の極値を求めることは難しい (曲線上の点を助変数表示 (媒介変数表示) するのは困難). そのための方法が「ラグランジュ乗数法」である. 次は用語の準備.

定義 7.2. 曲線 $f(x,y)=0$ を考える. この曲線上の点 (a,b) (すなわち $f(a,b)=0$) が <u>特異点</u> であるとは, $(f_x(a,b),f_y(a,b))=(0,0)$ となること.

陰関数定理より, 非特異点の周りでは ($y=\varphi(x)$ または $x=\psi(y)$ の) グラフで表せた.

7.2　ラグランジュ乗数法

定理 7.3. $g(x,y)=0$ の条件下で, $f(x,y)$ が (a,b) で極値をもつとする. また (a,b) は $g(x,y)=0$ の特異点ではないとする. このとき, 変数 λ を用いて

$$F(x,y,\lambda):=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

とおくと, 次をみたす α が存在する:

$$F_x(a,b,\alpha)=F_y(a,b,\alpha)=F_\lambda(a,b,\alpha)=0.$$

この定理を用いることで, 条件付きの極値の候補を絞ることができる. 候補を絞った後に, 実際に極値をとるかどうかを調べるのは, 一般には手間がかかる. 次を例としてその方法を紹介する.

例 7.4. 条件 $g(x,y)=x^2-(1/4)y^2-1=0$ の下で, 関数 $f(x,y)=x^3+y$ の極値は次の通り: $(2/\sqrt{3},-2/\sqrt{3})$ で極小値 $2\sqrt{3}/9$ を, $(-2/\sqrt{3},2/\sqrt{3})$ で極大値 $-2\sqrt{3}/9$ をとる.

極値候補が実際に極値になるかどうかを調べるためには, グラフとしての表示 (明示的には分からなくても) の微分を調べる, ということをすれば良い.

問題 7.5. 上の例において, $(-2/\sqrt{3},2/\sqrt{3})$ で極大値 $-2\sqrt{3}/9$ をとることを示せ.

問題 7.6. 条件 $g(x,y)=x^2+y^2-2=0$ の下で, 関数 $f(x,y)=y-x$ の極値を求めよ.

8　解析 II 中間試験

解答は, 単に式を羅列するのではなく, 「…とおく」, 「…と仮定する」のような語句を適宜用いること. 説明なしで数式だけが書かれている場合は減点する.

問題 [1] (20 点). 次の関数が $(0,0)$ において連続かどうかを予想し, それを示せ:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^3+xy+y^3)/(x^2+y^2) & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

問題 [2] (20 点). $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha$, $y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$ とする (ただし α は定数). このとき $z=f(x,y)$ に対して次を示せ:

$$z_x^2+z_y^2=z_u^2+z_v^2.$$

問題 [3] (計 40 点). 関数 $f(x,y)$ は C^2 級であるとする.

(1) $f(x,y)$ が (a,b) で極値をもつとき, $f_x(a,b)=0$ となることを示せ.

(2) $f(x,y)$ が「$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$, $D>0$, $f_{xx}(a,b)>0$」をみたすとき, $f(x,y)$ は (a,b) で極小値をとる. 括弧内の条件をみたす関数 $f(x,y)$ および (a,b) の簡単な例を挙げよ (その関数が条件をみたすことも確かめよ). ここで, $D:=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$.

問題 [4] (計 60 点). 条件 $g(x,y)=x^2+y^2-2=0$ の下で, 関数 $f(x,y)=x-y$ の極値を求めたい.

(1) 曲線 $g(x,y)=0$ には特異点がないことを示せ. ここで, 曲線上の点が特異点であるとは, $(g_x,g_y)=(0,0)$ をみたすこと.

(2) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とおく. このとき $F_x=F_y=F_\lambda=0$ をみたす点を (ここでは) 極値の候補とよぶ. この問題の f, g に対して, 極値の候補を求めよ.

(3) 上で求めた極値の候補のうち, x 座標が正のものを (a,b) とする. 点 (a,b) において $f(x,y)$ が極値をとるかどうか (極大か極小かどちらでもないか) を判定せよ. (ヒント: 極値の候補の周りで, $g(x,y)=0$ をグラフで表すことにより, $f(x,y)$ を一変数関数に帰着.)

問題 [5] (配点なし). この講義についてコメントや要望があったら書いて下さい.

9　積分可能性

1 変数関数の場合に, 区分求積法を用いて定積分を定義することができた. ここでは, その 2 変数版を紹介する.

9.1　長方形領域と分割

定義 9.1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ を <u>長方形領域</u> という.

上の長方形領域を $[a, b] \times [c, d]$ と書くことが多い.

定義 9.2. $D = [a, b] \times [c, d]$ を長方形領域とする. このとき, 次のように $[a, b]$ を m 分割, $[c, d]$ を n 分割して, 小さい長方形に分割することを <u>長方形分割</u> という:

$$\Delta : \begin{array}{l} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d \end{array}$$

上の分割は, Δ を次のような小さい長方形に分割している:

$$\Delta_{ij} := \{(x, y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,\ y_{i-1} \leqq y \leqq y_i\}.$$

9.2　長方形領域における積分

ここでは, D を長方形領域とし, $z = f(x, y)$ を D 上で定義された有界関数とする.

定義 9.3. D を長方形領域とし, $z = f(x, y)$ を D 上で定義された有界関数とする. また, Δ を D の長方形分割とする. このとき次のように定める:

$$S(f, \Delta) := \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) \qquad (M_{ij} := \sup_{(x,y) \in \Delta_{ij}} f(x, y)),$$
$$s(f, \Delta) := \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) \qquad (m_{ij} := \inf_{(x,y) \in \Delta_{ij}} f(x, y)).$$

定義 9.4. D を長方形領域とし, $z = f(x, y)$ を D 上で定義された有界関数とする. このとき f が <u>積分可能</u> とは, 次が成り立つこと:

$$\sup_{\Delta} s(f, \Delta) = \inf_{\Delta} S(f, \Delta).$$

上の値を $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ と表し, これを <u>重積分</u> と呼ぶ.

9.3　有界な集合における積分

定義 9.5. $\mathbb{R}^2$ 内の部分集合 D が <u>有界</u> とは, D がある長方形領域に含まれること.

定義 9.6. D を $\mathbb{R}^2$ 内の有界集合とし, $f(x,y)$ を D 上で定義された関数とする. また, $\widetilde{D}$ を D を含む長方形領域とする. このとき, $f(x,y)$ が D 上で <u>積分可能</u> であるとは, 次の関数 $\widetilde{f}$ が $\widetilde{D}$ 上で積分可能であること:

$$\widetilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \in D), \\ 0 & ((x,y) \notin D). \end{cases}$$

このとき, $f(x,y)$ の D 上での <u>重積分</u> を次で定義する:

$$\iint_D f(x,y)dxdy := \iint_{\widetilde{D}} \widetilde{f}(x,y)dxdy.$$

10　累次積分と変数変換

10.1　領域に関する準備

定義 10.1. 次のような領域を x に関して単純な領域, あるいは 縦線領域 という (ただしここで φ_1, φ_2 は $[a,b]$ 上で連続な関数):

$$\{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}.$$

y に関して単純な領域 (あるいは横線領域) も, 同様に定義される.

例 10.2. D を $y=x$, $x=1$, x 軸で囲まれた領域とする. このとき D は x に関しても y に関しても単純な領域:

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\} \\ &= \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1\}. \end{aligned}$$

10.2　累次積分

定理 10.3. $f(x,y)$ を $D=\{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$ 上の連続関数とする. このとき $f(x,y)$ は D 上で積分可能であり, 次が成り立つ:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

ここで右辺は次で定義されるもの (これを 累次積分 という):

$$(\text{右辺}) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

また, y に関して単純な領域についても, 同様に累次積分で表すことができる. 従って, 例えば次の積分は 2 通りの方法で計算できる.

例 10.4. $D=\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq 2\}$ のとき, $\displaystyle\iint_D (2x-y)dxdy = -\frac{1}{2}$.

例 10.5. $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq a^2,\ y \geqq 0\}$ (ただし $a>0$) のとき, $\displaystyle\iint_D x^2y dxdy = \frac{2}{15}a^5$.

2 通りの方法で累次積分できる場合でも, 計算の手間は大きく異なることもある (実質的に積分の計算ができない場合もある).

10.3 変数変換

一変数関数の場合と同様に, 多変数の積分に関しても変数変換が考えられる.

定義 10.6. $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ が C^1 級であるとする. このとき, 次を x, y の u, v に関する ヤコビアン という:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}.$$

要するにヤコビ行列の行列式のこと.

定理 10.7. 写像 $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ により, 領域 E が領域 D に $1:1$ に移るとし, ヤコビアンは E 上で 0 でないとする. また, D と E の境界は連続であり, (有限個の点を除いて) なめらかとする. このとき次が成り立つ:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

一変数の場合と同様に, 次のように書くと便利:

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

例 10.8. D を $|x + 2y| \leqq 1$, $|x - y| \leqq 1$ で表される領域とすると,

$$\iint_D (x - y)^2 dxdy = \frac{4}{9}.$$

10.4 極座標

補題 10.9. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とすると, 次が成り立つ:

$$dxdy = rdrd\theta.$$

例 10.10. D を $x^2 + y^2 \leqq a^2$ の表す領域とする (ただし $a > 0$). このとき

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \frac{\pi a^4}{2}.$$

解析 II 小テスト (3)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく,「…とおく」,「…と仮定する」のような語句を適宜用いること.

問題 10.11. 極座標を用いて次の積分を計算せよ:

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \qquad (D : x^2+y^2 \leqq 1).$$

解答:

学生番号 ______________________ 氏名 ______________________

11　線積分とグリーンの定理

11.1　線積分

定義 11.1. 閉区間 $I = [a, b]$ 上で定義された次の連続曲線を考える:

$$C : x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (t \in I).$$

これに t の動く向きを $t : a \to b$ (または $t : b \to a$) のように指定したものを <u>有向曲線</u> という.

定義 11.2. 有向線分 $C : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ の向きを $t : a \to b$ とし, $f(x, y)$ を C 上で連続な関数とする. このとき以下のように定義する:

(1) 次を C に沿った <u>線積分</u> という: $\displaystyle\int_C f(x, y)dt := \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))dt;$

(2) 次を C に沿った <u>x 方向の線積分</u> という: $\displaystyle\int_C f(x, y)dx := \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt;$

(3) 次を C に沿った <u>y 方向の線積分</u> という: $\displaystyle\int_C f(x, y)dy := \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt.$

線積分は, 文字通り曲線 C 上で積分するものである. x 方向や y 方向の線積分は, それらの方向から見たものを積分する, というイメージ. 次の例で感覚が掴めるかも.

例 11.3. 有向線分 $C : x = t, y = y_0$ (定数) の向きを $t : a \to b$ とする. このとき,

$$\int_C f(x, y)dx = \int_a^b f(t, y_0)dt, \qquad \int_C f(x, y)dy = 0.$$

11.2　グリーンの定理

D を $\mathbb{R}^2$ 内の有界閉領域とし, その境界を ∂D とかく. 境界には, D の内部が進行方向の左手になるような向きを入れるものとする.

定理 11.4 (グリーンの定理)**.** D を $\mathbb{R}^2$ 内の有界閉領域, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ が D 上の C^1 級関数のとき, 次が成立する:

$$\int_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy.$$

注意 11.5. グリーンの定理は, $P \equiv 0$ や $Q \equiv 0$ の場合を考えることにより, 次のように分けることができる:

$$\int_{\partial D} P(x, y)dx = -\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy,$$
$$\int_{\partial D} Q(x, y)dy = \iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dxdy.$$

例 11.6. $D : x^2 + y^2 \leqq 1$ を領域とし, $P(x, y) = y$ とすると, 次が成立する:

$$\int_{\partial D} P(x, y)dx = -\pi = -\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy.$$

注意 11.7. グリーンの定理は, 1 変数における微積分の基本定理

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(b)$$

の多変数版に相当する. 1 変数の場合は定義域が $D = [a, b]$ であり, その境界は $\partial D = \{a, b\}$ と考えることができる.

例 11.8. $D = [a, b] \times [0, 1]$ とし, $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $\varphi(x)$ と, それを用いた D 上の連続関数 $f(x, y) = \varphi(x)$ を考える. このとき $\varphi(x)$ の原始関数を $Q(x)$ とすると, グリーンの定理から 1 変数の微積分の基本定理が導かれる.

12　体積と曲面積

12.1　空間の極座標

定義 12.1. $P=(x,y,z)$ に対して, 次をみたす (r,θ,φ) を <u>空間の極座標</u> とよぶ (ただし $r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

図形的にいうと, r は OP の長さ, θ は P と z 軸のなす角度, φ は P の xy 平面への射影と x 軸のなす角度を表す.

命題 12.2. 空間の極座標について次が成り立つ: $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$.

12.2　体積

V が $\mathbb{R}^3$ 内の図形のとき, その体積 $v(V)$ は次で定義される:

$$v(V) := \iiint_V dxdydz.$$

例 12.3. 半径が $a>0$ の球の体積は $4\pi a^3/3$.

球の体積は, 上の重積分を使っても計算できるし, 高校で習ったように回転体の体積を使っても計算できる. 重積分を用いると, 回転体でなくても計算できるのは利点.

定理 12.4 (カバリエリの原理)**.** V を $\mathbb{R}^3$ 内の図形とし, 平面 $x=a$ と $x=b$ の間にあり, $(x,0,0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積が $S(x)$ であるとする. $S(x)$ が x に関して連続であるとき, V の体積は次で与えられる:

$$v(V) = \int_a^b S(x)dx.$$

12.3　曲面積

補題 12.5. $a = {}^t(a_1,a_2,a_3)$, $b = {}^t(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$ とする. このとき, ベクトル積 $a \times b$ は a, b に直交し, 大きさは a, b の作る平行四辺形と等しい. ただしここで,

$$a \times b := {}^t\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

定義 12.6. $\varphi(u,v)$ を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 K のパラメータ表示とする (ただし $(u,v)\in D$). このとき, 曲面 K の <u>曲面積</u> を次で定義する:

$$S(K) := \iint_D |\varphi_u(u,v)\times\varphi_v(u,v)|dudv.$$

直観的に言うと, φ_u, φ_v の作る平行四辺形で曲面を近似している. この定義をあてはめることで, 教科書に登場する定理が導かれる. まずはグラフの場合.

命題 12.7. $f(x,y)$ が C^1 級のとき, 曲面 $K: z=f(x,y)$ (ただし $(x,y)\in D$) に対して,

$$S(K) = \iint_D \sqrt{f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)+1}dxdy.$$

次は回転体の場合の曲面積.

命題 12.8. $y=f(x)$ (ただし $a\leqq x\leqq b$) を C^1 級とする. これを x 軸のまわりに回転してできる曲面を K とすると,

$$S(K) = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

解析 II 小テスト (4)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく,「…とおく」,「…と仮定する」のような語句を適宜用いること.

問題 12.9. D を $\mathbb{R}^2$ 内の有界閉領域とし, 次の線積分を考える:

$$\int_{\partial D} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

このとき以下に答えよ:

(1) $(0,0) \notin D$ のとき, 上の線積分をグリーンの定理を使って求めよ.

(2) $D : x^2 + y^2 \leqq a^2$ (ただし $a > 0$) のとき, 上の線積分を求めよ. また, この場合にはグリーンの定理が適用できない理由も述べよ.

学生番号 ________________ 氏名 ________________

解析 II 小テスト (5)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ．解答は, 単に式を羅列するのではなく,「…とおく」,「…と仮定する」のような語句を適宜用いること．

問題 12.10. $y = f(x)$ (ただし $a \leqq x \leqq b$) を C^1 級とする．これを x 軸のまわりに回転してできる曲面を K とする．

(1) 曲面 K のパラメータ表示を与えよ;

(2) K の曲面積が次で与えられることを示せ (ただし曲面積は, 講義で与えたベクトル積を用いたもので定義されているとする):

$$S(K) = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

学生番号 ________________ 氏名 ________________

13　解析 II 期末試験

解答は, 単に式を羅列するのではなく, 「…とおく」, 「…と仮定する」のような語句を適宜用いること. 説明なしで数式だけが書かれている場合は減点する.

問題 [1] (40 点). 次で定義される領域 D を考える: $x^2+y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$.

(1) 極座標への変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のヤコビアンを求めよ.

(2) 次の重積分を求めよ:

$$\iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy.$$

問題 [2] (40 点). D を $\mathbb{R}^2$ 内の有界閉領域とし, 次の線積分

$$\int_{\partial D} \frac{-ydx+(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}.$$

を考える. このとき以下に答えよ:

(1) D がある点を含まないとき, 上の線積分はグリーンの定理を使って求めることができる. その「ある点」を答えよ. また, その場合に上の線積分を求めよ. 次を参考にして良い:

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy.$$

(2) $D : (x-1)^2+y^2 \leqq 1$ のとき, 上の線積分を求めよ.

問題 [3] (計 60 点). 条件 $g(x,y) = x^2+xy+y^2-3 = 0$ の下で, 関数 $f(x,y) = (x+1)(y+1)$ の極値を求めたい.

(1) 曲線 $g(x,y) = 0$ には特異点がないことを示せ. ここで, 曲線上の点が特異点であるとは, $(g_x, g_y) = (0,0)$ をみたすこと.

(2) $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ とおく. このとき $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ をみたす点を (ここでは) 極値の候補とよぶ. この問題の f, g に対して, 極値の候補を求めよ.

(3) 上で求めた極値の候補のうち, x 座標が正のもの (のうちの一つ) を (a,b) とする. 点 (a,b) において $f(x,y)$ が極値をとるかどうか (極大か極小かどちらでもないか) を判定せよ. (ヒント: 極値の候補の周りで, $g(x,y) = 0$ をグラフで表すことにより, $f(x,y)$ を一変数関数に帰着.)

問題 [4] (配点なし). この講義についてコメントや要望があったら書いて下さい.