このプリントは, 2018 年度の基礎数学 B (田丸担当クラス) の講義内容をまとめたものです.

1　基礎数学 B (2018/10/01)

1.1　行列

ここでは, 実数を成分とする行列のみを考える. 場合によっては複素数を考えることもある.

定義 1.1. 実数 a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ を次のように並べたものを $m \times n$ 行列 と呼ぶ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

上の行列を次のように略記することがある: $(a_{ij}) = (a_{ij})_{i,j} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n}$.

1.2　行列の演算

行列のスカラー倍 (実数倍) や和は, 自然に定義される. すなわち, c を実数とし, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を $m \times n$ 行列とするとき, 以下のように定義する:

$$cA := (ca_{ij}), \qquad A + B := (a_{ij} + b_{ij}).$$

サイズが異なる行列の和は定義されないことに注意する. 行列の積も, 適切なサイズのもの同士に対してしか定義されない.

定義 1.2 (行列の積)**.** $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列, $B = (b_{ij})$ を $n \times r$ 行列とする. このとき次の $m \times r$ 行列を A と B の 行列の積 という:

$$AB := \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{i,j}.$$

実際に行列の積を計算するときには, 上の式を当てはめるというよりは, どの成分とどの成分を掛けるのかを場所で把握しておく方が便利だと思われる.

問題 1.3. 次の行列の積を計算せよ:

(1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

1.3　行列の演算の性質

行列の演算について, 実数の演算と全く同じではないが, 似た性質が成り立つ. その際に, 実数の 0 と 1 に相当する行列がある.

定義 1.4. 全ての成分が 0 の行列を <u>零行列</u> という. $n \times n$ 行列であって, 対角成分が 1 で他の成分が 0 となる行列を <u>単位行列</u> という.

命題 1.5 (和の性質)**.** A, B, C を $m \times n$ 行列とし, O を同じサイズの零行列とすると,

(1) $A + B = B + A$;
(2) $A + O = O + A = A$;
(3) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

命題 1.6 (積の性質)**.** E を $n \times n$ の単位行列とする. A, B, C を積が定義できるような適切なサイズの行列, O を適切なサイズの零行列とすると,

(1) $AE = A$; $EA = A$;
(2) $AO = O$; $OA = O$;
(3) $(AB)C = A(BC)$.

問題 1.7. $(AB)C = A(BC)$ を, A と B が 2×2 行列, C が 2×1 行列の場合に示せ. 可能な場合には, 一般のサイズの場合に示せ.

注意 1.8. 実数の積は $ab = ba$ をみたすが, 行列の積では $AB = BA$ が成り立つとは限らない. (そもそもサイズが同じとも限らないが, A, B が共に $n \times n$ 行列で AB と BA が同じサイズだったとしても, $AB = BA$ となるとは限らない.)

命題 1.9 (分配律)**.** a, b を実数とし, A, B, C を適切なサイズの行列とすると,

(1) $a(A + B) = aA + aB$:
(2) $(a + b)A = aA + bA$;
(3) $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$.

1.4　行列の転置

定義 1.10. $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする. このとき次の $n \times m$ 行列を A の <u>転置行列</u> とよぶ:

$$^tA := (a_{ji}).$$

定義 1.11. $n \times n$ 行列 A が <u>対称行列</u> であるとは, 次が成り立つこと: $^tA = A$.

命題 1.12. A を $m \times n$ 行列, B を $n \times r$ 行列とすると, 次が成り立つ: $^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

1.5　行列と一次変換

$\mathbb{R}^2$ の元を 2×1 行列 (列ベクトル, あるいは縦ベクトルという) と考える.

定義 1.13. A を 2×2 行列とすると, 左から A を掛けることにより $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像が得られる. これを $\mathbb{R}^2$ 上の <u>一次変換</u> とよぶ.

例 1.14. 次の行列の定める一次変換は, 原点を中心とした角度 θ の回転を表す:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

上の行列を回転行列とよぶ. 回転行列の形と, 行列の積の結合側を用いると, 三角関数の加法定理が自動的に導かれる.

2　基礎数学 B (2018/10/15)

2.1　連立 1 次方程式と行列

例 2.1. 次の連立 1 次方程式を行列を用いて解く:

$$\begin{cases} x+3y=10 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$$

これは次の行列の方程式で表すこともできる:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

突然だが, 両辺に左からある行列を掛ける:

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

この行列の積を計算すると, $x=1$, $y=3$ を得る.

上の議論に登場した謎の行列

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

を求めることができれば, 連立 1 次方程式を解くことができる. このアイデアは, 変数の数が増えても (つまり行列のサイズが大きくなっても) 全く同様.

2.2　行基本変形

定義 2.2. 行列 $A=(a_{ij})$ に対して, 以下の操作を <u>行基本変形</u> という:

(1) i 行目を実数倍する;

(2) i 行目と j 行目を入れ替える;

(3) i 行目の実数倍を j 行目に足す.

命題 2.3. 行基本変形は, 左から行列を掛けることで実現できる.

例 2.4. 例 2.1 を解くときに用いた行列は, 行基本変形を表す行列の積として表せる.

問題 2.5. 次の連立方程式を, 行列の基本変形を用いて解け:

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-3y=5 \end{cases}$$

例 2.6. 次の連立方程式を, 行列の基本変形を用いた方法と, それを簡略化した方法で解く:

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ \qquad\quad\; y=2 \\ \quad\;\; 2y+z=4 \end{cases}$$

問題 2.7. 次の連立方程式を, 行列の基本変形を用いて解け:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

注意 2.8. 連立 1 次方程式が常に解をもつとは限らない. 例えば次は解をもたない:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

連立 1 次方程式が解をもつかどうか (正確にいうと解を一つだけもつかどうか) は, 係数行列を見ると分かる. このことを次回以降に説明する.

3　基礎数学 B (2018/10/22)

3.1　簡約行列

行列に左から行列を掛けて (行基本変形をして), 一般に「どこまで簡単な形にできるか」という問題を考える. これを用いて行列の階数を定義していく.

定義 3.1. $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ が 簡約行列 であるとは, 以下の条件をみたすこと:

(1) 行列 A は "階段型" である;

(2) 各段の左端の行は ${}^t(0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ である.

例 3.2. 次は簡約行列:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

注意 3.3. 上の定義で "階段型" をきちんと定義していないが, 階段は一段ずつ, という制約が付いている. 例えば, 次は簡約行列でない:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.2　行列の階数

定理 3.4. 全ての行列 A は, 左から基本行列を掛けることによって (行基本変形によって) 簡約行列 B にすることができる. さらに, B は A によって一意的に定まる.

証明は, 左の行から順番に基本変形していく (ことを上手く機能法で書く) ことによって得られる. 以下の例で手順を見る:

例 3.5. 次は簡約行列でないが, 行基本変形により簡約行列にできる:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定義 3.6. 行列 A に対して, 定理 3.4 で得られる簡約行列 B の "階段の数" のことを 階数 とよび, $\mathrm{rank}(A)$ と表す.

3.3 第 1 回小テスト (2018/10/22)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 3.7. 左から基本行列を掛けることによって (行基本変形をすることによって) 次を解け:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

学生番号 ____________________ 氏名 ____________________

4　基礎数学 B (2018/10/29)

4.1　連立 1 次方程式の解

定理 4.1. 連立 1 次方程式 $Ax = b$ に解が存在するための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\mathrm{rank}(A \mid b) = \mathrm{rank}(A)$.

4.2　逆行列

定義 4.2. A, B を $n \times n$ 行列とする. このとき B が A の <u>逆行列</u> であるとは, 次が成り立つこと: $AB = BA = E$. 逆行列をもつ行列を <u>正則行列</u> という.

A が B の逆行列なら, B は A の逆行列となる. 一般に逆行列は存在するとは限らない.

例 4.3. 次の行列 A は B の逆行列:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

命題 4.4. $n \times n$ 行列 A に対して以下が成り立つ:

(1) 逆行列は存在する場合には一意的 (以降, 逆行列を A^{-1} とかく);

(2) $n \times n$ 行列 B が $AB = E$ (または $BA = E$) をみたせば, B は A の逆行列.

命題の (2) の証明は後日.

定理 4.5. $n \times n$ 行列 A に対して, 以下は同値:

(1) $\mathrm{rank}(A) = n$;

(2) A の簡約行列は E;

(3) A は正則行列.

例 4.6. 次の行列 A の逆行列は以下の通り:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意 4.7. 行列 $[A \mid E]$ の簡約行列が $[E \mid B]$ であるとすると, B は A の逆行列.

問題 4.8. 以下の行列の逆行列を求めよ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5　基礎数学 B (2018/11/05)

5.1　行列式の定義

$n \times n$ 行列 A に対して, 逆行列が存在するかどうかを調べるときに, 行列式を用いると便利である. ここでは行列式を, 小行列を用いて定義する.

定義 5.1. $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 行列とする. このとき A の i 行と j 列を除いた $(n-1) \times (n-1)$ 行列を <u>小行列</u> (または <u>部分行列</u>) といい A_{ij} で表す.

例 5.2. 次の行列 A について, A_{11}, A_{12} を記述する:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

定義 5.3. $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $|A|$ を以下のように帰納的に定義する:

(1) $n = 1$ の場合には, $|(a)| := a$ と定める;

(2) 一般の n に対しては, 次のように定める: $|A| := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}|$.

例 5.4. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

より大きいサイズの行列の行列式を求める際には, 定義に従っていきなり展開すると面倒な場合が多い. そのため, 計算例の前に, 一般的な性質を先に紹介する.

命題 5.5. 行列式について以下が成り立つ:

(1) $|E| = 1$;

(2) A, D を正方行列とすると, 次が成り立つ: $\begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D|$;

(3) A, B を $n \times n$ 行列とすると, 次が成り立つ: $|AB| = |A||B|$.

証明は, (1) は簡単な帰納法. (2) は, A のサイズが 1×1, 2×2 の場合にのみ行う. (3) も行列のサイズが 2×2 の場合に直接計算で示す.

命題の (3) より, 正則行列の行列式は 0 ではないことが分かる. また, 左から行列を掛けることによって基本変形が実現されたことを思い出すと, 基本行列の行列式が分かれば, 基本変形した後の行列の行列式を調べれば良いことも分かる. 具体的な計算は次回.

5.2　第 2 回小テスト (2018/11/05)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 5.6. 左から基本行列を掛ける操作を用いて, 次の行列 A の逆行列を求めよ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

学生番号 ______________________　　氏名 ______________________

6　基礎数学 B (2018/11/12)

6.1　行列式の性質と計算

例 6.1. 正方行列の基本変形を与える行列について, 以下が成り立つ:

(1) 1 つの行を c 倍する基本変形を与える行列の行列式は c;

(2) 2 つの行を入れ替える基本変形を与える行列の行列式は -1;

(3) 1 つの行の実数倍を他の行に加える基本変形を与える行列の行列式は 1.

これらと行列式の性質 $|AB| = |A||B|$ より, 行列式を求めるためには, 基本変形によって簡単な形の行列の場合に帰着できる.

例 6.2 (教科書の例 5)**.** 次が成り立つ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24.$$

上の例は, 定義通りに計算する方法と, 基本変形をする方法と, 2 通りで計算してみる.

命題 6.3. $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の行列式について, 以下が成り立つ:

(1) (転置による不変性) $|A| = |{}^t A|$;

(2) (i 行に関する展開) 各 i に対して, $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$;

(3) (j 列に関する展開) 各 j に対して, $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$.

転置については, $n = 2$ でのみ確かめる. 行に関する展開は, 基本変形を適用することで示される. 列に関する展開は, 行に関する展開の転置を考えれば良い.

例 6.4 (教科書の例 7)**.** 次が成り立つ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10.$$

上の例は, まず 3 列に関する展開をするのが簡単であろう.

問題 6.5 (教科書の例 8)**.** 次の行列式を, 基本変形を使ってできるだけ簡単にして求めよ:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

7　基礎数学 B (2018/11/19)

問題 7.1 (教科書の例 11)**.** 次の行列の行列式と逆行列を求めよ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

次回は中間テストを行う. 試験内容は, 行列の演算・基本変形・逆行列・行列式.

7.1　余因子展開

ここでは次を示す.

定理 7.2. A を $n \times n$ 行列とする. このとき, A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$.

($\Rightarrow$) の証明は, 行列式の性質から容易. ($\Leftarrow$) の証明には, 余因子展開を用いる.

定義 7.3. $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 行列とする. このとき $\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ji}|$ を 余因子, それを並べた行列 $\widetilde{A} := (\widetilde{a}_{ij})$ を 余因子行列 という.

命題 7.4. A を $n \times n$ 行列とする. このとき次が成立: $\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = |A|E$.

この命題の証明は略す. 代わりに $n = 2$ のときを確かめておく.

例 7.5. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, 次が成り立つ:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A}A = (ad - bc)E.$$

実際に与えられた行列の逆行列を求めるために, 余因子展開を使うことは ($n = 2$ の場合は別として) あまりないと思われる. 次が定理の系.

系 7.6. A, B を $n \times n$ 行列とする. このとき, $AB = E$ ならば $BA = E$.

7.2　行列式の幾何学的な意味

A を 2×2 行列とし, $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像を与えるものとして考える.

命題 7.7. $\mathbb{R}^2$ 上で $(0,0)$ $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ を頂点とする正方形を考える (面積 1). この正方形は, 行列 A によって平行四辺形に移る. さらにその面積は, 行列式の絶対値と一致する.

8　基礎数学 B (2018/11/26) 中間試験

試験問題の解答を, 解答用紙の所定の箇所に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 [1] (計 50 点). 左から基本行列を掛ける操作を用いて, 次の行列 A の行列式と逆行列を求めよ. ただし逆行列については検算も行うこと:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

問題 [2] (計 50 点). c を実数とし, 次の行列 A を考える:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(1) 行列 A の階数を求めよ (c の値によって場合分けせよ).

(2) 行列 A の階数が 3 であるとき, 次の連立一次方程式の解を求めよ:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

問題 [3] (20 点). A, B を $n \times n$ 行列とし, どちらも逆行列をもつとする. このとき次を示せ:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

問題 [4] (配点なし). この講義についてコメントや要望があったら書いて下さい.

9　基礎数学 B (2018/12/03)

中間試験に関するレポート: 試験問題を解いたものをレポートとして提出しても良いこととする. ただし, 「そのまま模範解答として配布できるレベルに丁寧に書かれたもの」に限って加点する可能性があるものとする.

9.1　線型変換

教科書 § 4.1 のベクトル空間の定義等は次回にすることとし, § 4.2 の内容を紹介する.

定義 9.1. $U = \mathbb{R}^m$, $V = \mathbb{R}^n$ とする. 写像 $T : U \to V$ が 線型写像 とは, 次が成り立つこと: 全ての $u_1, u_2 \in U$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して, $T(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1T(u_1) + c_2T(u_2)$.

例 9.2. A を $m \times n$ 行列とする. このとき次は線型写像: $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$.

例 9.3. 例えば A が次の行列のときの T_A の形は, 具体的に書ける:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

命題 9.4. 線型写像について, 以下が成り立つ:

(1) $T : U \to V$ を線型写像とすると, $T(0) = 0$;
(2) 線型写像と線型写像の合成は線型写像, 特に $T_A \circ T_B = T_{AB}$;
(3) E を単位行列とすると, T_E は恒等写像 (つまり $T(u) = u$).

例 9.5. 線型写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ について, 以下が成り立つ:

(1) T_{kE} は全てのベクトルを k 倍する (これを 相似変換 という);
(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ とすると, T_A は x 軸に関する対称変換を与える;
(3) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とすると, T_A は角度 θ の回転を与える.

次回以降では, 正方行列 A があったときに, 線型写像 T_A がどんなものであるか, ということを調べる方法を紹介する.

10　基礎数学 B (2018/12/10)

教科書 § 4.1 で扱われている, ベクトル空間・部分空間・基底を紹介する.

10.1　ベクトル空間

定義 10.1. V を空でない集合とする. V が ベクトル空間 であるとは, V に和とスカラー倍がが定義されており, それらが教科書に載っている性質 (i)–(viii) をみたすこと.

ちなみに, 性質 (iii): $0 \in V$ が存在して, 全ての $v \in V$ に対して $v + 0 = 0 + v = v$. このような $0 \in V$ を 零ベクトル とよぶ.

例 10.2. $\mathbb{R}^n$ はベクトル空間. $m \times n$ 行列全体の集合もベクトル空間 (零ベクトルは零行列).

10.2　部分空間

定義 10.3. V をベクトル空間, W を V の部分集合とする. このとき W が V の 部分空間 であるとは, 以下が成り立つこと:

(1) $0 \in W$;

(2) 全ての $u, v \in W$, 全ての $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $au + bv \in W$.

ここでは教科書に従って「部分空間」と呼ぶが, 「線型部分空間」と呼ぶことも多い.

例 10.4. $\mathbb{R}$ 内の部分空間は $\{0\}$ または $\mathbb{R}$ のみ. $\mathbb{R}^2$ に対して, 0 を通る直線は部分空間. 例えば $y = 1$ という直線は部分空間でない.

例 10.5. A を $m \times n$ 行列とする. このとき次は $\mathbb{R}^n$ 内の部分空間:

$$W := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

この W を, 連立一次方程式 $Ax = 0$ の 解空間 と呼ぶ. ちなみに $m = n$ で A が正則行列のとき, $W = \{0\}$ である.

命題 10.6. V をベクトル空間, W を V 内の部分空間とすると, W は自然にベクトル空間となる.

10.3　基底

まずは部分空間を, いくつかのベクトルで表す.

命題 10.7. V をベクトル空間とし, $v_1, \ldots, v_r \in V$ とする. このとき次は V の部分空間 (これを $v_1, \ldots, v_r$ により <u>生成される部分空間</u> という):

$$\langle v_1, \ldots, v_r \rangle := \{c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r \mid c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}\}.$$

次に, 部分空間を表すベクトルに「無駄がない」という条件を考える.

定義 10.8. V をベクトル空間とする. このとき $v_1, \ldots, v_r \in V$ が <u>一次独立</u> とは, 次が成り立つこと: $c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r = 0$ ならば $c_1 = \cdots = c_r = 0$.

例 10.9. $v_1, \ldots, v_r \in V$ の中に零ベクトルが入ってたら一次独立でない. 同じもものがあっても一次独立でない. 同じものがなくても, 例えば $\mathbb{R}^2$ において $(1,0), (0,1), (2,1)$ は一次独立でない.

定義 10.10. V をベクトル空間とする. このとき $\{v_1, \ldots, v_r\}$ が V の <u>基底</u> であるとは, 次が成り立つこと:

(i) $v_1, \ldots, v_r$ は一次独立;
(ii) $v_1, \ldots, v_r$ は V を生成する.

例 10.11. $V = \mathbb{R}^3$ のとき, ${}^t(1,0,0)$, ${}^t(0,1,0)$, ${}^t(0,0,1)$ は基底 (これを <u>標準基底</u> という). これ以外にも基底の取り方はいっぱいある.

定義 10.12. V の基底のベクトルの個数を V の <u>次元</u> とよぶ. 次元は基底の取り方によらない.

命題 10.13. A を $m \times n$ 行列とする. このとき $Ax = 0$ の解空間を W とすると, 次が成り立つ: $\dim W = n - \mathrm{rank}(A)$.

例 10.14. 次の A について, $Ax = 0$ の解空間の基底は, ${}^t(-a, -c, 1, 0)$, ${}^t(-b, -d, 0, 1)$ のようにとれる:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$$

例 10.15. 次の A に対して, $Ax = 0$ の解空間は 1 次元で, その基底は ${}^t(-2, 1, 1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

10.4　第 3 回小テスト (2018/12/10)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 10.16. 次の行列 A について, $Ax = 0$ の解空間の基底を一組求めよ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

学生番号 ________________　氏名 ________________

11　基礎数学 B (2018/12/17)

教科書 § 4.2 の後半で扱われている固有値と固有ベクトルを紹介する.

11.1　固有値と固有ベクトル

定義 11.1. V をベクトル空間, $T : V \to V$ を線型写像とする. このとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ と $0 \neq v \in V$ が次をみたすとき, λ を T の 固有値, v を T の固有値 λ の 固有ベクトル という:

$$T(v) = \lambda v.$$

例 11.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると, e_1 は A の固有値 1 の固有ベクトル, e_2 は A の固有値 2 の固有ベクトル.

固有値と固有ベクトルは, 存在するとは限らない. しかし, もし存在する場合には, そこから元の行列の情報を読み取ることができる.

定義 11.3. $T : V \to V$ を線型写像, λ を固有値とするとき, 次を固有値 λ の 固有空間 という:

$$V_\lambda := \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}.$$

固有空間は V の部分空間になる. 固有ベクトルを求めよという問題は, 固有空間の基底を求めよ, という問題と解釈できる.

11.2　固有多項式

固有値と固有ベクトルを求めるときには, まず固有値を求めて, その後に各固有値に対する固有ベクトルを求める.

定義 11.4. 正方行列 A に対して, 次を 固有多項式 という: $g_A(t) := |tE - A|$.

定理 11.5. A を正方行列とする. このとき, 実数 λ が T_A の固有値であるための必要十分条件は, $g_A(\lambda) = 0$ となること.

例 11.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ について以下が成り立つ:

(1) 固有多項式は $g_A(t) = (t-2)(t+2)$, よって固有値は ± 2;

(2) 固有値 2 の固有ベクトルの一つは ${}^t(3, 1)$;

(3) 固有値 -2 の固有ベクトルの一つは ${}^t(1, -1)$.

11.3　第 4 回小テスト (2018/12/17)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 11.7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. 検算もすること.

学生番号 ____________________　氏名 ____________________

12　基礎数学 B (2019/01/07)

最終的には「対称行列の直行行列による対角化」を紹介したい．今回はそのうちの「対角化」について述べる．教科書 § 4.3 の一部 (正則行列による対角化) に相当する．

12.1　正則行列による対角化

正方行列 A が対角行列であるとは, 対角成分以外が全て 0 となること．特に零行列も対角行列．

定義 12.1. 正方行列 A が 対角化可能 であるとは, 次が成り立つこと: 正則行列 P を上手く選ぶと $P^{-1}AP$ が対角行列となる．

行列 A に対して, 上のような行列 P を見付けて $P^{-1}AP$ を求めることを, 対角化する, という．対角化したときの成分は固有値と関係がある．

補題 12.2. A を正方行列, P を正則行列とし, $P^{-1}AP$ が次の対角行列であるとする:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

このとき, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は全て A の固有値.

実際, $Pe_1, \ldots, Pe_n$ が対応する固有ベクトルになる．

例 12.3. 次の行列 A は対角化不可能:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 12.4. A を n 次正方行列とする．このとき A が対角化可能であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: T_A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の基底が存在する．

定理の必要性の証明は, 具体的な行列を対角化する手続きそのものである．その部分を抜き出して書くと次のようになる．

命題 12.5. A を n 次正方行列とする．$\{x_1, \ldots, x_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とし, 各 x_i は T_A の固有値 λ_i の固有ベクトルであるとする．このとき, $P = (x_1, \ldots, x_n)$ とすると, $P^{-1}AP$ は対角行列であり, その対角成分は $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が順に並ぶ.

問題 12.6. 次の行列を対角化せよ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

13　基礎数学 B (2019/01/21)

ここでは「対称行列の直交行列による対角化」を紹介する．教科書 § 4.3, 4.4 の内容 (対角化については前回やった).

13.1　対称行列

行列 A の転置行列を ${}^tA$ で表す．

定義 13.1. 正方行列 A が 対称行列 であるとは次が成り立つこと: ${}^tA = A$.

命題 13.2. 行列の転置について以下が成り立つ:

(1) A が $m \times n$ 行列, B が $n \times l$ 行列のとき, ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$;

(2) A が正則行列のとき, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

13.2　内積空間

定義 13.3. 各 $a = {}^t(a_1, \ldots, a_n), b = {}^t(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, 次で定義される (a, b) を $\mathbb{R}^n$ 上の 標準内積 という:

$$(a, b) := {}^tab = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

定義より $(a, a) \geqq 0$. このとき $||a|| := \sqrt{(a, a)}$ とおき, これをベクトル a の大きさという．

定義 13.4. 0 でない $a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して, 次をみたす θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を a と b の間の 角度 という:

$$\cos\theta = \frac{(a, b)}{||a||\,||b||}.$$

13.3　正規直交基底

定義 13.5. $\mathbb{R}^n$ の基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が 正規直交基底 であるとは, 次が成り立つこと:

$$(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n$ の標準的な基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ は正規直交基底．それ以外にも正規直交基底はいくらでもある．

例 13.6. 任意の実数 θ に対して, 次は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底:

$$\{\ {}^t(\cos\theta, \sin\theta),\ {}^t(-\sin\theta, \cos\theta)\}.$$

一般に $\mathbb{R}^n$ 内の部分空間 V に対して, その正規直交基底を見付ける問題を考える. 次の手順により, 基底が見つかれば, それを元にして正規直交基底を作ることができる (この手順をシュミットの正規直交化 または グラム・シュミットの正規直交化 という).

命題 13.7. V を $\mathbb{R}^n$ 内の部分空間とし, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ を V の基底とする. このとき以下の手順で得られる $\{u_1, \ldots, u_m\}$ は V の正規直交基底である:

(1) $u_1 := v_1/||v_1||$ とおく;

(2) $k \geqq 1$ に対して, $u'_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(v_{k+1}, u_i)u_i$ とおき, $u_{k+1} := u'_{k+1}/||u'_{k+1}||$ とおく.

例 13.8. シュミットの正規直交化により, 次が得られる:

(1) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \mapsto \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$;

(2) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \mapsto \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

13.4 直交行列

定義 13.9. 正方行列 P が 直交行列 であるとは次が成り立つこと: ${}^tPP = E$.

命題 13.10. 直交行列について以下が成り立つ:

(1) 直交行列は正則行列;

(2) ${}^tPP = E \Leftrightarrow P{}^tP = E$;

(3) P を直交行列とすると, P^{-1} および ${}^tP$ も直交行列;

(4) P, Q を直交行列とすると, PQ も直交行列.

定理 13.11. $P = (p_1, \ldots, p_n)$ を行列 P の列ベクトル表示とする. このとき, P が直交行列であるための必要十分条件は, $\{p_1, \ldots, p_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となること.

13.5 直交行列による対角化

定理 13.12. 対称行列 A は直交行列で対角化できる. すなわち, 直交行列 P が存在して $P^{-1}AP$ は対角行列.

通常の (正則行列による) 対角化をするには, 「固有ベクトルから成る基底」を取れば良かった. 直交行列による対角化のためには「固有ベクトルから成る正規直交基底」が必要.

命題 13.13. A が対称行列のとき, v を T_A の固有値 λ の固有ベクトル, w を T_A の固有値 μ の固有ベクトルとする. もし $\lambda \neq \mu$ ならば $(v, w) = 0$, すなわち直交する.

13.6　第 5 回小テスト (2019/01/21)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 13.14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を対角化せよ. ただし対角化を与える行列 P の成分に分数がでないように調整すること ($\sqrt{2}$ 等は構わない). 検算もすること.

学生番号 ________________　氏名 ________________

13.7　第 6 回小テスト (2019/01/21)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ．解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ．

問題 13.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を直交行列を用いて対角化せよ．検算もすること．

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

14　基礎数学 B (2019/02/04) 期末試験

試験問題の解答を, 解答用紙の所定の箇所に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 [1] (計 80 点). 次の行列 A を考える:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1) 行列 A の固有値を全て求めよ.
(2) 上で求めた固有値に対して, それぞれに対応する固有空間の基底を挙げよ. (固有ベクトルとなることの検算もすること.)
(3) 行列 A を, 全ての成分が整数となる正則行列 P を用いて対角化せよ. (対角化していることの検算もすること.)
(4) 行列 A を直交行列 Q を用いて対角化せよ. (Q が直交行列となることの検算もすること.)

問題 [2] (20 点). A を n 次正方行列とする. $\{x_1, \ldots, x_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とし, 各 x_i は T_A (左から A を掛ける線型写像) の固有値 λ_i の固有ベクトルであるとする. このとき, $P = (x_1, \ldots, x_n)$ とおくと, $P^{-1}AP$ は対角行列であることを示せ.

問題 [3] (20 点). v_1, v_2 を $\mathbb{R}^n$ のベクトルとし, 次のように定める:

$$u_1 := \frac{v_1}{||v_1||}, \quad u_2' := v_2 - (v_2, u_1)u_1.$$

このとき u_1 と u_2' は直交することを示せ. ただしここで $(,)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な内積. 標準的な内積のみたす性質 (例えば $(2v, w) = 2(v, w)$ 等) は証明抜きで用いても良い.

問題 [4] (配点なし). この講義についてコメントや要望があったら書いて下さい.