1　数学基礎演習 II (2019/10/03): ガイダンス

1.1　概要説明

大学（数学科）での数学での数学に慣れるために, 基礎的な演習を行う. 問題演習を通して, 数学の勉強法, 本の読み方, 発表法などを身に付けることを目標とする.

1.2　重要な要請

この授業では,「論理記号の使い方」や「証明の書き方」を極めて重視します. これらは, 数学の全ての分野・科目を学ぶための基礎となります. 論理記号の使い方や証明の書き方に慣れるために, この科目は以下のように行います:

(1) 授業で証明を書く際には,「示すこと」を論理記号で最初に宣言します. また証明は, 宣言した「示すこと」に忠実に従って書くようにします.
(2) 演習や小テストや試験では, この証明の書き方をまずは真似して下さい. (田丸の書き方が唯一の正解という訳ではありませんが, 書道のお手本程度に考えて下さい.)
(3) 小テストの答案は, 授業時間中にその場で採点し, コメントを伝えます. 正しく書けていない場合は, コメントを参考に再提出して下さい. なお, 答案は返却しません.
(4) 演習で発表する際は, その場で黒板に書きながら説明をして下さい. 授業をするような気持ちで. また, 他の人の発表へのコメントも歓迎します.

1.3　成績および単位

基本的には, 基本的な事項に関する証明を正しく書けることが, 単位取得のための必要十分条件です. それを確認するために, 以下のような基準を適用します:

(1) 数回の試験を行います. その点数に, 演習での発表回数と小テストの成績を加味して, 合否を判定し, 成績を付けます.
(2) 演習で発表しないと自動的に不合格という制約はありませんが, 発表しない場合には著しく不利になる, という程度に発表点はかなり高めに設定します.
(3) 試験の前に, 試験前事前レポートを出題します. このレポートの点数は, 合否のボーダーライン付近の学生に加点します. 詳細は後日にお知らせします.

2 数学基礎演習 II (2019/10/03): 数列の極限

2.1 数列の極限

ここでは実数の数列を考える.

定義 2.1. 数列 $\{a_n\}$ が実数 a に <u>収束する</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$, $|a_n - a| < \varepsilon$. また, このことを次で表す: $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$.

定義 2.2. 数列 $\{a_n\}$ が <u>$+\infty$ に発散する</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$, $a_n > M$. また, このことを次で表す: $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

例 2.3. 数列 $a_n = 1/n$ について次が成り立つ: $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

例 2.4. $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ かつ $\lim_{n \to +\infty} b_n = b$ とするとき, 次が成り立つ: $\lim_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

2.2 演習問題

問題 2.5 (小テスト 1)**.** $a_n = 2n + 1$ とする. 次を定義に従って示せ: $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

問題 2.6 (小テスト 2)**.** $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ とし, $b_n := a_{2n}$ と定める. 次を示せ: $\lim_{n \to +\infty} b_n = a$.

問題 2.7. 数列 $a_n = 1/n$ について次を示せ: $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 1$.

問題 2.8. 数列 $a_n = (-1)^n$ について次を示せ: $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq +\infty$.

問題 2.9. $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ かつ $\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$ とするとき, 次を示せ: $\lim_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

問題 2.10. $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ とし, 次が成り立つとする: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. このとき次を示せ: $a \geq 0$.

問題 2.11. 収束する数列はコーシー列であることを示せ. ただしここで, 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q > N$, $|a_p - a_q| < \varepsilon$.

問題 2.12. $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ とする.

(1) 数列 $\{a_n\}$ は下に有界であることを示せ. ただしここで, 数列 $\{a_n\}$ が下に有界であるとは, 次が成り立つこと: $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > M$.

(2) 数列が上に有界であることを同様に定義し, 数列 $\{a_n\}$ は上に有界でないことを示せ.

3　数学基礎演習 II (2019/10/17): 線型空間

3.1　部分空間と線型写像

以下では線型空間は実線型空間 (実ベクトル空間) のみを考えるものとする. 線型空間とは, 和とスカラー倍が定義された集合で, 所定の性質をみたすものである.

定義 3.1. V を線型空間とし, $\emptyset \neq U \subset V$ とする. このとき U が V 内の 部分空間 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall u_1, u_2 \in U$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 u_1 + c_2 u_2 \in U$.

例 3.2. $\mathbb{R}^2$ 内の部分集合について以下が成り立つ:

(1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ は $\mathbb{R}^2$ 内の部分空間;
(2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ は $\mathbb{R}^2$ 内の部分空間でない.

定義 3.3. V, W を線型空間とする. 写像 $f : V \to W$ が 線型写像 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $f(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2)$.

例 3.4. V, W を線型空間, $f : V \to W$ を線型写像とする. このとき次は V 内の部分空間である: $\mathrm{Ker}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$.

3.2　演習問題

問題 3.5 (小テスト 3)**.** V, W を線型空間, $f : V \to W$ を線型写像とする. このとき次が W 内の部分空間であることを示せ: $\mathrm{Im}(f) := \{f(v) \in W \mid v \in V\}$.

問題 3.6. 以下が線型写像であるかどうかを予想し, それを示せ:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 1$;
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + 2y$.

問題 3.7. 以下が $M_n(\mathbb{R})$ 内の部分空間であることを示せ (転置やトレースの性質は, どのような性質が成り立つかを宣言すれば使ってよい):

(1) $\{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t X = X\}$;
(2) $\{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.

問題 3.8. V, W を線型空間, $f : V \to W$ を線型写像とする. f が単射であるための必要十分条件は $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ であることを示せ.

問題 3.9. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし, $V = \mathbb{R}^n$ を縦ベクトルの集合と思うことにする. このとき次が線型写像であることを示せ: $f : V \to V : v \mapsto Av$.

4 数学基礎演習 II (2019/10/24): 実数の連続性, 上限, 下限

4.1 上界, 上限

定義 4.1. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ とする. このとき

(1) $m \in \mathbb{R}$ が A の <u>上界</u> とは次が成り立つこと: $\forall a \in A$, $a \leq m$.

(2) A が <u>上に有界</u> とは, 上界が存在すること, すなわち, $\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A$, $a \leq m$.

(3) A の上界 $m \in \mathbb{R}$ が A の <u>上限</u> とは次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A : m - \varepsilon < a$.

A の上限を $\sup(A)$ で表す. 上に有界ならば上限が存在する (実数の連続性). また, 下界, 下に有界, 下限 ($\inf(A)$ で表す) も同様に定義する. 上に有界かつ下に有界であるとき, 有界であるという.

例 4.2. $(-\infty, 1) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ について, 以下が成り立つ:

(1) 1 は $(-\infty, 1)$ の上限;

(2) 2 は $(-\infty, 1)$ の上限でない.

4.2 演習問題

問題 4.3 (小テスト 4)**.** m を $A \subset \mathbb{R}$ の上限とし, $B := \{a+1 \mid a \in A\}$ と定める. このとき $m+1$ は B の上限であることを示せ.

問題 4.4. 0 は $(0,1) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ の下限であることを示せ.

問題 4.5. $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界でないとし, $B := \{a+1 \mid a \in A\}$ と定める. このとき B も上に有界でないことを示せ.

問題 4.6. $A, B \subset \mathbb{R}$ がどちらも上に有界であるとき, $A \cup B$ も上に有界であることを示せ.

問題 4.7. $A \subset \mathbb{R}$ に上限があるとき, それが一意であることを示せ.

問題 4.8. 数列 $\{a_n\}$ が単調増加で上に有界であるとし, その上限を a とする. このとき $\{a_n\}$ が a に収束することを示せ.

問題 4.9. 数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散するとき, 上に有界でないことを示せ.

5 数学基礎演習 II (2019/11/14): 線型空間の基底と次元

5.1 一次独立と基底

定義 5.1. V を線型空間とし, $v_1, \dots, v_n \in V$ を考える.

(1) $\{v_1, \dots, v_n\}$ が 一次独立 であるとは, 次が成り立つこと: $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$.

(2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ が V の 基底 であるとは, 次が成り立つこと:

  (i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ は一次独立;

  (ii) $\forall v \in V, \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} : v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$.

V の基底が $\{v_1, \dots, v_n\}$ となるとき, V は n 次元 であるという.

例 5.2. $\mathbb{R}^2$ を考え, $e_1 := {}^t(1, 0)$, $e_2 := {}^t(0, 1)$ と定める. このとき

(1) $\{e_1, e_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底 (これを標準基底と呼ぶ). $\{e_1, e_1 + 2e_2\}$ も $\mathbb{R}^2$ の基底.

(2) $\{e_1, 2e_1\}$, $\{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ は一次独立でない.

5.2 演習問題

問題 5.3 (小テスト 5)**.** 次の線形空間を考える:

$$V := \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix} x = 0 \right\}.$$

このとき, $\{{}^t(-a, -c, 1, 0),\ {}^t(-b, -d, 0, 1)\}$ は V の基底であることを示せ.

問題 5.4. V を線型空間とし, $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_m\}$ がともに V の基底であるとする. このとき $n = m$ を示せ. (ヒント: 背理法. $n = 2$, $m = 3$ くらいで矛盾が生じれば大体良い.)

問題 5.5. $\{v_1, \dots, v_n\}$ が V の基底であるとする. このとき V の元を $\{v_1, \dots, v_n\}$ の一次結合で表す方法は一意であることを示せ.

問題 5.6. $V := \mathbb{R}^n$ とおく. W を V 内の m 次元部分空間とし, $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ を考える.

(1) $g(W) := \{gw \in V \mid w \in W\}$ も V 内の部分空間であることを示せ.

(2) $g(W)$ も m 次元であることを示せ.

問題 5.7. 次の線型空間の基底を一組求めよ (基底であることも示せ):

(1) $\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R}) := \{X \in M(2, \mathbb{R}) \mid {}^t X = X\}$.

(2) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) := \{X \in M(2, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.

6　数学基礎演習 II (2019/11/21): 連続関数

中間試験は 12/12(木) 授業時. 事前レポートの課題は「中間試験の問題を予想し, その問題と解答を書け (解析, 線型代数を各 2 問)」, 提出日は 12/05(木). レポートには表紙を付けず, 1 枚目に問題だけを全て書き, 2 枚目以降に解答を書くこと.

6.1　関数の極限と連続性

以下では $f(x)$ を関数とする. 定義域は $\mathbb{R}$ 内の適切な部分集合だが, 毎回断ると煩雑になるので, 差し当たり $\mathbb{R}$ 全体で定義されていると思ってもよい.

定義 6.1. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ である ($x \to a$ としたときの $f(x)$ の極限が b である) とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x\ (0 < |x-a| < \delta), |f(x) - b| < \varepsilon$.

定義 6.2. $f(x)$ が $x = a$ で <u>連続</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. これを言い換えると次のようになる: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x\ (0 < |x-a| < \delta), |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

関数が連続とは, 定義域の全ての点で連続となることと定義する.

例 6.3. 次で定義される関数を考える: $f(x) := 0\ (x \neq 0)$, $f(0) := 1$. このとき $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ となり, $f(x)$ は $x = 0$ で連続でない.

6.2　演習問題

問題 6.4 (小テスト 6)**.** 関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ が $x = a$ で連続であるとする. このとき $f(x) := f_1(x) + f_2(x)$ で定義される関数も $x = a$ で連続であることを示せ.

問題 6.5. 関数 $f(x) = 2x$ は全ての点で連続であることを示せ.

問題 6.6. $\lim_{x \to +\infty} (1/x) = 0$ を示せ. ただしここで, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ であるとは, 次が成り立つことである: $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : \forall x\ (x > R), |f(x) - b| < \varepsilon$.

問題 6.7. 連続関数と連続関数の合成関数も連続であることを示せ.

問題 6.8. $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するとき, それが一意であることを示せ.

問題 6.9. $\lim_{x \to a} f(x) = b > 0$ であるとすると, $x = a$ の周りで $f(x) > 0$ が成り立つ. このことを適切に論理記号で述べ, それを示せ.

問題 6.10. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ であるとすると, $x = a$ の周りで $f(x)$ は有界である. このことを適切に論理記号で述べ, それを示せ.

7　数学基礎演習 II (2019/11/28): 階数

7.1　行列と線型写像の階数

定義 7.1. V, W を線型空間, $f : V \to W$ を線型写像とする．このとき f の <u>階数</u> を次で定義する: $\mathrm{rank}(f) := \dim \mathrm{Im}(f)$.

行列の階数は, 行基本変形して簡約行列にしたときの “階段の数” で定義されていた．行列の階数は, その行列の表す線型写像の階数と一致する．

例 7.2. 次の行列 A の表す線型写像 $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Ax$ の階数 (像の次元) は 2:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.2　演習問題

問題 7.3 (小テスト 7)**.** V, W を有限次元線型空間, $f : V \to W$ を線型同型写像 (全単射かつ線型) とする．このとき次を示せ: $\dim V = \dim W$.

問題 7.4. V を有限次元線型空間, W を V の線型部分空間とし, $\dim V = \dim W$ であるとする．このとき $V = W$ を示せ．

問題 7.5. A , B を $n \times n$ 行列とし, それらの定める線型写像を $f_A, f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ で表す．

(1) $f_A \circ f_B = f_{AB}$ を示せ．
(2) $\det(A) \neq 0$ のとき, f_A は線型同型写像であることを示せ．

問題 7.6. V, W を線型空間, $f : V \to W$ を線型写像, $g : W \to W$ を線型同型写像とする．このとき次を示せ: $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(g \circ f)$.

問題 7.7. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は線型同型でないことを示せ．ここで, 線型空間 V と W が線型同型であるとは, 線型同型写像 $f : V \to W$ が存在すること．

問題 7.8. A を $n \times n$ 行列とし, A の表す線型写像を f_A とする．また, $A = (a_1, \ldots, a_n)$ と (縦ベクトルを並べて) 表す．このとき次を示せ: $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{a_1, \ldots, a_n\}$.

問題 7.9. 以下の線形写像の像と階数を求めよ:

(1) $S : M(3, \mathbb{R}) \to M(3, \mathbb{R}) : X \mapsto X + {}^tX$.
(2) $A : M(3, \mathbb{R}) \to M(3, \mathbb{R}) : X \mapsto X - {}^tX$.

8　数学基礎演習 II (2019/12/12): 中間試験問題

注意

証明問題の解答を書くときには, 解答中に適宜「示すこと」を必ず書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

定義や用語

解答する際には, 以下の定義などを参考にして良い.

- $a_n \to a$ とは, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$.
- $V \supset U(\neq \emptyset)$ が線型部分空間とは, “和とスカラー倍で閉じる” こと.
- $f(x)$ が $x = a$ で連続とは, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x\ (|x - a| < \delta), |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ とは, $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : \forall x > R, |f(x) - a| < \varepsilon$.
- $f : V \to W$ が線型とは, “和とスカラー倍を保つ” こと.

問題

[1] 数列 $\{a_n\}$ が a に収束しているとする. このとき $b_n := a_{n+1} - a_{n-1}$ で定義される数列の極限を予想し, それを定義に従って示せ. (20 点)

[2] $\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R}) := \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}$ が $M(n, \mathbb{R})$ 内の線型部分空間であるかどうかを予想し, それを示せ. (20 点)

[3] 関数 $f(x) = |3x|$ が $x = 0$ で連続であるかどうかを予想し, それを定義に従って示せ. (20 点)

[4] $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = b$ であるとする. このとき $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x))$ が何であるかを予想し, それを定義に従って示せ. (20 点)

[5]「線型写像と線型写像の合成は線型写像である」という主張の真偽を予想し, それを定義に従って示せ. (20 点)

[6] (中間アンケート) 授業に関する意見・コメント・要望等があれば, 答案に書いて下さい.

9　数学基礎演習 II (2019/12/19): 多変数関数

9.1　多変数関数の極限と連続性

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ のノルムを $||\cdot||$ で表す．簡単のため, 関数 f の定義域は $\mathbb{R}^n$ 全体であるとする．

定義 9.1. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を考え, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ とする．このとき $\lim_{x\to a} f(x) = b$ であるとは, 次が成り立つこと: $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n\ (0 < ||x-a|| < \delta), ||f(x) - b|| < \varepsilon$.

例 9.2. $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \left(x_1^2 x_2/(x_1^2 + x_2^2)\right) = 0$.

定義 9.3. $a \in \mathbb{R}^n$ とする．写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が $x = a$ で <u>連続</u> とは, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ となること．すなわち, $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n\ (||x-a|| < \delta), ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$.

例 9.4. $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \left((x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2)/(x_1^2 + x_2^2)\right)$ は存在しない．

9.2　演習問題

問題 9.5 (小テスト 8)**.** $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ とする．写像 $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 : t \mapsto (c_1 t, c_2 t)$ が定義域の全ての点で連続であることを示せ．

問題 9.6. 写像 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が $\lim_{x\to 0} f(x) = b$ をみたすとする．このとき全ての $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して次を示せ: $\lim_{t\to 0} f(c_1 t, c_2 t) = b$.

問題 9.7. 次の関数 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の $(x_1, x_2) \to (0,0)$ における極限を予想し, それを示せ:

(1) $f(x_1,x_2) := \begin{cases} 0 & ((x_1,x_2) \neq (0,0)), \\ 1 & ((x_1,x_2) = (0,0)). \end{cases}$

(2) $f(x_1,x_2) := \begin{cases} 0 & (x_1 \neq 0), \\ 1 & (x_1 = 0). \end{cases}$

問題 9.8. 関数 $\pi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} : (x_1,x_2) \mapsto x_1$ が連続であることを示せ．(余裕があれば多変数版も考えよ.)

問題 9.9. 写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ が連続のとき, 合成写像も連続であることを示せ．

問題 9.10. 関数 $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ に対して, $\lim_{x\to a} f(x)$ は存在すれば一意であることを示せ．

問題 9.11. $\mathbb{R}^m$ 内の点列に対して収束を定義せよ．また, 関数 $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ が $x = a$ で連続であり, $\mathbb{R}^m$ 内の点列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき, 次を示せ: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

問題 9.12. 関数 $f(x)$ が連続でないとき, 問題 9.11 の主張は正しくない．反例を挙げよ．

10 数学基礎演習 II (2020/01/09): 線型写像の準同型定理

期末試験は 2/06(木) 授業時. 事前レポートの課題は「期末試験の問題を予想し, その問題と解答を書け (解析, 線型代数を各 2 問)」, 提出日は 1/30(木). レポートには表紙を付けず, 1 枚目に問題だけを全て書き, 2 枚目以降に解答を書くこと.

10.1 線型写像の準同型定理

同値関係, 商集合, 写像の well-defined 性は, 前期に学習済み. これを線型空間に適用する.

定義 10.1. V を線型空間, U を V 内の線型部分空間とし, $v \sim v' :\Leftrightarrow v - v' \in U$ で与えられる V 上の同値関係を考える. このとき, $V/U := V/\sim$ に次の演算を入れた線型空間を, V の U による商空間 という:

$$a[v] + b[v'] := [av + bv'] \quad (\text{ただし } a, b \in \mathbb{R},\ v, v' \in V).$$

定理 10.2 (線型写像の準同型定理)**.** V, W を線型空間, $f : V \to W$ を線型写像とする. このとき f から誘導される次の写像は線型同型である:

$$\overline{f} : V/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f) : [v] \mapsto f(v).$$

準同型定理は, パターンを変えてこれから何度も繰り返し登場する.

10.2 演習問題

問題 10.3 (小テスト 9)**.** 上で与えた $\overline{f} : V/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f) : [v] \mapsto f(v)$ が well-defined であることを示せ.

問題 10.4. 上の商集合 V/U に定義した演算 $a[v] + b[v'] := [av + bv']$ について,

(1) well-defined であることを示せ;

(2) 0 を V の零ベクトルとするとき, $[0]$ は V/U の零ベクトルであることを示せ;

(3) 次の分配則を示せ: $a([v] + [v']) = a[v] + a[v']$.

問題 10.5. 準同型定理に登場した $\overline{f} : V/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ について,

(1) 全射であることを示せ; (2) 単射であることを示せ; (3) 線型写像であることを示せ.

問題 10.6. $V := \mathbb{R}^3$, $U := \{{}^t(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$ とおく. このとき, 商空間 V/U は $\mathbb{R}^2$ と線型同型であることを, 準同型定理を用いて示せ.

問題 10.7. $n \times n$ の対称行列全体を $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, 交代行列全体を $\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$ で表す. このとき, 商空間 $M(n, \mathbb{R})/\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ は $\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$ と線型同型であることを, 準同型定理を用いて示せ.