このプリントは, 2019 年度の基礎数学 B (田丸担当クラス) の講義内容をまとめたものです.

1　基礎数学 B (2019/10/07)

1.1　行列

ここでは, 実数を成分とする行列のみを考える. 場合によっては複素数を考えることもある.

定義 1.1. 実数 a_{ij} $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$ を次のように並べたものを $m \times n$ 行列 と呼ぶ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

上の行列を次のように略記することがある: $(a_{ij}) = (a_{ij})_{i,j} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}$.

1.2　行列の演算

行列のスカラー倍 (実数倍) や和は, 自然に定義される. すなわち, c を実数とし, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を $m \times n$ 行列とするとき, 以下のように定義する:

$$cA := (ca_{ij}), \qquad A + B := (a_{ij} + b_{ij}).$$

サイズが異なる行列の和は定義されないことに注意する. 行列の積も, 適切なサイズのもの同士に対してしか定義されない.

定義 1.2 (行列の積)**.** $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列, $B = (b_{ij})$ を $n \times r$ 行列とする. このとき次の $m \times r$ 行列を A と B の 行列の積 という:

$$AB := \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{i,j}.$$

実際に行列の積を計算するときには, 上の式を当てはめるというよりは, どの成分とどの成分を掛けるのかを場所で把握しておく方が便利だと思われる.

問題 1.3. 次の行列の積を計算せよ:

(1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

1.3　行列の演算の性質

行列の演算について, 実数の演算と全く同じではないが, 似た性質が成り立つ. その際に, 実数の 0 と 1 に相当する行列がある.

定義 1.4. 全ての成分が 0 の行列を <u>零行列</u> という. $n \times n$ 行列であって, 対角成分が 1 で他の成分が 0 となる行列を <u>単位行列</u> という.

命題 1.5 (和の性質)**.** A, B, C を $m \times n$ 行列とし, O を同じサイズの零行列とすると,

(1) $A + B = B + A$;

(2) $A + O = O + A = A$;

(3) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

命題 1.6 (積の性質)**.** E を $n \times n$ の単位行列とする. A, B, C を積が定義できるような適切なサイズの行列, O を適切なサイズの零行列とすると,

(1) $AE = A$; $EA = A$;

(2) $AO = O$; $OA = O$;

(3) $(AB)C = A(BC)$.

問題 1.7. $(AB)C = A(BC)$ を, A と B が 2×2 行列, C が 2×1 行列の場合に示せ. 可能な場合には, 一般のサイズの場合に示せ.

注意 1.8. 実数の積は $ab = ba$ をみたすが, 行列の積では $AB = BA$ が成り立つとは限らない. (そもそもサイズが同じとも限らないが, A, B が共に $n \times n$ 行列で AB と BA が同じサイズだったとしても, $AB = BA$ となるとは限らない.)

命題 1.9 (分配律)**.** a, b を実数とし, A, B, C を適切なサイズの行列とすると,

(1) $a(A + B) = aA + aB$:

(2) $(a + b)A = aA + bA$;

(3) $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$.

1.4　第 1 回小テスト (2019/10/07)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 1.10. 次の行列の積を計算せよ:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2　基礎数学 B (2019/10/16)

ここでは与えられた行列に, 左から行列を掛けて “できるだけ簡単な行列にする” ことを考える. 教科書だと § 2.1 (pp17–23) の内容.

2.1　連立 1 次方程式と行列

例えば, 左から掛けて単位行列になる行列が分かると, 連立方程式が解ける.

例 2.1. 次の連立 1 次方程式を行列を用いて解く:

$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

これは次の行列の方程式で表すこともできる:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

突然だが, 両辺に左からある行列を掛ける:

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

この行列の積を計算すると, $x = 1$, $y = 3$ を得る.

上の議論に登場した謎の行列

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

を求めることができれば, 連立 1 次方程式を解くことができる. このアイデアは, 変数の数が増えても (つまり行列のサイズが大きくなっても) 全く同様.

2.2　行基本変形

定義 2.2. 行列 $A = (a_{ij})$ に対して, 以下の操作を <u>行基本変形</u> という:

(1) i 行目を実数倍する;
(2) i 行目と j 行目を入れ替える;
(3) i 行目の実数倍を j 行目に足す.

命題 2.3. 行基本変形は, 左から行列を掛けることで実現できる.

例 2.4. 例 2.1 を解くときに用いた行列は, 行基本変形を表す行列の積として表せる.

問題 2.5. 次の連立方程式を, 行列の基本変形を用いて解け:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

例 2.6. 次の連立方程式を, 行列の基本変形を用いた方法と, それを簡略化した方法で解く:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ \hfill y = 2 \\ \hfill 2y + z = 4 \end{cases}$$

問題 2.7. 次の連立方程式を, 行列の基本変形を用いて解け:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

注意 2.8. 連立 1 次方程式が常に解をもつとは限らない. 例えば次は解をもたない:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

連立 1 次方程式が解をもつかどうか (正確にいうと解を一つだけもつかどうか) は, 係数行列を見ると分かる. このことを次回以降に説明する.

3 基礎数学 B (2019/10/21)

前回は, 左から行列を掛けて簡単にする方法を述べた. 今回は, それによって "どこまで簡単にできるか" を紹介する. 教科書では § 2.1 から 2.2 に対応する内容.

3.1 簡約行列

次の簡約行列が "できるだけ簡単な行列" に相当する.

定義 3.1. $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ が 簡約行列 であるとは, 以下の条件をみたすこと:

(1) 行列 A は (一段ずつの) "階段型" である;

(2) 各段の左端の行は ${}^t(0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ である.

例 3.2. 次は簡約行列:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

例 3.3. 2×2 の簡約行列は, 以下のいずれか:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意 3.4. 上の定義で "階段型" をきちんと定義していないが, 階段は一段ずつ, という制約が付いている. 例えば, 次は簡約行列でない:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.2 行列の階数

定理 3.5. 全ての行列 A は, 左から基本行列を掛けることによって (行基本変形によって) 簡約行列 B にすることができる. さらに, B は A によって一意的に定まる.

証明は, 左の行から順番に基本変形していく (ことを上手く帰納法で書く) ことによって得られる. 以下の例で手順を見る:

例 3.6. 次は簡約行列でないが, 行基本変形により簡約行列にできる:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定義 3.7. 行列 A に対して, 定理 3.5 で得られる簡約行列 B の "階段の数" のことを 階数 とよび, $\mathrm{rank}(A)$ と表す.

従って, $n \times n$ 行列が階数 n であるための必要十分条件は, 簡約行列が単位行列となること.

3.3 連立 1 次方程式の解

定理 3.8. 連立 1 次方程式 $Ax = b$ に解が存在するための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\mathrm{rank}(A \mid b) = \mathrm{rank}(A)$.

定理 3.9. A を $m \times n$ 行列, b を m 次ベクトル ($m \times 1$ 行列) とする. このとき, 連立 1 次方程式 $Ax = b$ に解がただ一つ存在するための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\mathrm{rank}(A \mid b) = \mathrm{rank}(A) = n$.

上の青字部分は教科書に誤植がある.

例 3.10. 次の連立方程式は, 解をもつが, 解は一つではない:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

特に $n \times n$ 行列 (正方行列) の場合には, 階数 n であることが, 連立方程式がただ一つの解をもつための条件.

3.4 第 2 回小テスト (2018/10/21)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 3.11. 次の行列の簡約行列を求めよ. 左からどのような行列を掛けるかも明記すること:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

学生番号 ____________________ 氏名 ____________________

4　基礎数学 B (2019/11/11)

前回までに行列の簡約化と階数を学んだ．ここでは，正方行列 ($n \times n$ 行列) で階数が n になるものを考える．このとき，簡約行列は単位行列である．例えば連立方程式の係数行列が $n \times n$ で階数 n のとき，その連立方程式は必ず解ける．

4.1　逆行列

教科書 § 2.3 の内容を紹介する．

定義 4.1. A, B を $n \times n$ 行列とする．このとき B が A の <u>逆行列</u> であるとは，次が成り立つこと: $AB = BA = E$. 逆行列をもつ行列を <u>正則行列</u> という．

A が B の逆行列なら，B は A の逆行列となる．一般に逆行列は存在するとは限らない．

例 4.2. 次の行列 A は B の逆行列:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

命題 4.3. $n \times n$ 行列 A に対して以下が成り立つ:

(1) 逆行列は存在する場合には一意的 (以降，逆行列を A^{-1} とかく);

(2) $n \times n$ 行列 B が $AB = E$ (または $BA = E$) をみたせば，B は A の逆行列．

命題の (2) の証明は後日．

定理 4.4. $n \times n$ 行列 A に対して，以下は同値:

(1) $\mathrm{rank}(A) = n$;

(2) A の簡約行列は E;

(3) A は正則行列．

例 4.5. 次の行列 A の逆行列は以下の通り:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意 4.6. 行列 $[A \mid E]$ の簡約行列が $[E \mid B]$ であるとすると，B は A の逆行列．

問題 4.7. 以下の行列の逆行列を求めよ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.2　行列式の定義

教科書 § 3.1 の内容を紹介する. $n \times n$ 行列 A に対して, 逆行列が存在するかどうかは, 行列式を用いて判定することができる. ここでは行列式を, 小行列を用いて定義する.

定義 4.8. $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 行列とする. このとき A の i 行と j 列を除いた $(n-1) \times (n-1)$ 行列を 小行列 (または 部分行列) といい A_{ij} で表す.

例 4.9. 次の行列 A について, A_{11}, A_{12} を記述する:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

定義 4.10. $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $|A|$ を以下のように帰納的に定義する:

(1) $n = 1$ の場合には, $|(a)| := a$ と定める;

(2) 一般の n に対しては, 次のように定める: $|A| := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}|$.

例 4.11. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

より大きいサイズの行列の行列式を求める際には, 定義に従っていきなり展開すると面倒な場合が多い. そのため, 計算例の前に, 一般的な性質を先に紹介する.

命題 4.12. 行列式について以下が成り立つ:

(1) $|E| = 1$;

(2) A, D を正方行列とすると, 次が成り立つ: $\begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D|$;

(3) A, B を $n \times n$ 行列とすると, 次が成り立つ: $|AB| = |A||B|$.

証明は, (1) は簡単な帰納法. (2) は, A のサイズが 1×1, 2×2 の場合にのみ行う. (3) も行列のサイズが 2×2 の場合に直接計算で示す.

命題の (3) より, 正則行列の行列式は 0 ではないことが分かる. また, 左から行列を掛けることによって基本変形が実現されたことを思い出すと, 基本行列の行列式が分かれば, 基本変形した後の行列の行列式を調べれば良いことも分かる. 具体的な計算は次回.

5　基礎数学 B (2019/11/18)

5.1　行列式の性質と計算

例 5.1. 正方行列の基本変形を与える行列について, 以下が成り立つ:

(1) 1 つの行を c 倍する基本変形を与える行列の行列式は c;

(2) 2 つの行を入れ替える基本変形を与える行列の行列式は -1;

(3) 1 つの行の実数倍を他の行に加える基本変形を与える行列の行列式は 1.

上の性質は, 基本変形を与える行列の行列式の性質だと思った方が良い. これらと行列式の性質 $|AB| = |A||B|$ より, 行列式を求めるためには, 基本変形によって簡単な形の行列の場合に帰着できる.

例 5.2 (教科書の例 5)**.** 次が成り立つ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24.$$

上の例は, 定義通りに計算する方法と, 基本変形をする方法と, 2 通りで計算してみる.

命題 5.3. $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の行列式について, 以下が成り立つ:

(1) (転置による不変性) $|A| = |{}^tA|$;

(2) (i 行に関する展開) 各 i に対して, $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$;

(3) (j 列に関する展開) 各 j に対して, $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$.

転置については, $n = 2$ でのみ確かめる. 行に関する展開は, 基本変形を適用することで示される. 列に関する展開は, 行に関する展開の転置を考えれば良い.

例 5.4 (教科書の例 7)**.** 次が成り立つ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10.$$

上の例は, まず 3 列に関する展開をするのが簡単であろう.

問題 5.5 (教科書の例 8)**.** 次の行列式を, 基本変形を使ってできるだけ簡単にして求めよ:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

問題 5.6 (教科書の例 11)**.** 次の行列の行列式と逆行列を求めよ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

行列式の計算と逆行列を求める計算は, 途中までは重複することが多いので, できるだけまとめてやった方が効率が良い. また, 次を使うと行列式の (荒い) 検算ができる.

注意 5.7. A が正則行列のとき, $AA^{-1} = E$ なので, 両辺の行列式をとると $|A^{-1}| = 1/|A|$.

5.2　第 3 回小テスト (2019/11/18)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 5.8. 左から基本行列を掛ける操作を用いて, 次の行列 A の階数と逆行列を求めよ (逆行列に関しては検算もすること):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

学生番号 ______________________　　氏名 ______________________

6　基礎数学 B (2019/11/25) 中間試験

試験問題の解答を, 解答用紙の所定の箇所 (対応する番号があるところ) に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 [1] (計 50 点). 左から基本行列を掛ける操作を用いて, 次の行列 A の行列式と逆行列を求めよ. ただし逆行列については検算も行うこと:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

問題 [2] (計 50 点). x を実数とする. 左から基本行列を掛ける操作を用いて, 次の行列 A の簡約行列と階数を求めよ (x の値によって場合分けせよ):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}.$$

問題 [3] (20 点). A, B を 2×2 行列とする. このとき次を示せ:

$$|AB| = |A||B|.$$

問題 [4] (中間アンケート, 配点なし). この講義についてコメントや要望があったら書いて下さい.

7 基礎数学 B (2019/12/02)

7.1 余因子展開

ここでは次を示す.

定理 7.1. A を $n \times n$ 行列とする. このとき, A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$.

($\Rightarrow$) の証明は, 行列式の性質から容易. ($\Leftarrow$) の証明には, 余因子展開を用いる.

定義 7.2. $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 行列とする. このとき $\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ji}|$ を 余因子, それを並べた行列 $\widetilde{A} := (\widetilde{a}_{ij})$ を 余因子行列 という.

命題 7.3. A を $n \times n$ 行列とする. このとき次が成立: $\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = |A|E$.

この命題の証明は略す. 代わりに $n = 2$ のときを確かめておく.

例 7.4. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, 次が成り立つ:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A}A = (ad - bc)E.$$

実際に与えられた行列の逆行列を求めるために, 余因子展開を使うことは ($n = 2$ の場合は別として) あまりないと思われる. 次が定理の系.

系 7.5. A, B を $n \times n$ 行列とする. このとき, $AB = E$ ならば $BA = E$.

7.2 行列式の幾何学的な意味

A を 2×2 行列とし, $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像を与えるものとして考える.

命題 7.6. $\mathbb{R}^2$ 上で $(0,0)$ $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ を頂点とする正方形を考える (面積 1). この正方形は, 行列 A によって平行四辺形に移る. さらにその面積は, 行列式の絶対値と一致する.

ちなみに, ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ で作られる平行四辺形の面積を S とすると, 次が成り立つ:

$$S^2 = ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2.$$

7.3　第 4 回小テスト (2019/12/02)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 7.7. 左から基本行列を掛ける操作を用いて, 次の行列 A の行列式を求めよ (掛けた行列が何であるかを明記し, 検算しやすい答案を書くこと):

$$A = \begin{bmatrix} 27 & 4 & 26 & 18 \\ 13 & 2 & 13 & 9 \\ 17 & 2 & 14 & 9 \\ 23 & 4 & 26 & 15 \end{bmatrix}.$$

学生番号 ______________________　氏名 ______________________

8　基礎数学 B (2019/12/09)

教科書 § 4.1 で扱われている, ベクトル空間・部分空間・基底を紹介する.

8.1　ベクトル空間

定義 8.1. V を空でない集合とする. V が ベクトル空間 であるとは, V に和とスカラー倍がが定義されており, それらが教科書に載っている性質 (i)–(viii) をみたすこと.

ちなみに, 性質 (iii): $0 \in V$ が存在して, 全ての $v \in V$ に対して $v + 0 = 0 + v = v$. このような $0 \in V$ を 零ベクトル とよぶ.

例 8.2. 以下はベクトル空間:

(1) $\mathbb{R}^n$;

(2) $m \times n$ 行列全体の集合 (零ベクトルは零行列);

(3) n 次以下の多項式の全体の集合;

(4) 数列全体の集合, ...

8.2　部分空間

定義 8.3. V をベクトル空間, W を V の部分集合とする. このとき W が V の 部分空間 であるとは, 以下が成り立つこと:

(1) $0 \in W$;

(2) 全ての $u, v \in W$, 全ての $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $au + bv \in W$.

ここでは教科書に従って「部分空間」と呼ぶが, 「線型部分空間」と呼ぶことも多い.

例 8.4. $\mathbb{R}$ 内の部分空間は $\{0\}$ または $\mathbb{R}$ のみ. $\mathbb{R}^2$ に対して, 0 を通る直線は部分空間. 例えば $y = 1$ という直線は部分空間でない.

例 8.5. A を $m \times n$ 行列とする. このとき次は $\mathbb{R}^n$ 内の部分空間:

$$W := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

この W を, 連立一次方程式 $Ax = 0$ の 解空間 と呼ぶ. ちなみに $m = n$ で A が正則行列のとき, $W = \{0\}$ である.

命題 8.6. V をベクトル空間, W を V 内の部分空間とすると, W は自然にベクトル空間となる.

8.3 基底

まずは部分空間を, いくつかのベクトルで表す.

命題 8.7. V をベクトル空間とし, $v_1, \ldots, v_r \in V$ とする. このとき次は V の部分空間 (これを $v_1, \ldots, v_r$ により <u>生成される部分空間</u> という):

$$\langle v_1, \ldots, v_r \rangle := \{c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r \mid c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}\}.$$

次に, 部分空間を表すベクトルに「無駄がない」という条件を考える.

定義 8.8. V をベクトル空間とする. このとき $v_1, \ldots, v_r \in V$ が <u>一次独立</u> とは, 次が成り立つこと: $c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r = 0$ ならば $c_1 = \cdots = c_r = 0$.

例 8.9. $v_1, \ldots, v_r \in V$ の中に零ベクトルが入ってたら一次独立でない. 同じものがあっても一次独立でない. 同じものがなくても, 例えば $\mathbb{R}^2$ において $(1,0), (0,1), (2,1)$ は一次独立でない.

定義 8.10. V をベクトル空間とする. このとき $\{v_1, \ldots, v_r\}$ が V の <u>基底</u> であるとは, 次が成り立つこと:

(i) $v_1, \ldots, v_r$ は一次独立;

(ii) $v_1, \ldots, v_r$ は V を生成する.

例 8.11. $V = \mathbb{R}^3$ のとき, ${}^t(1,0,0)$, ${}^t(0,1,0)$, ${}^t(0,0,1)$ は基底 (これを <u>標準基底</u> という). これ以外にも基底の取り方はいっぱいある.

定義 8.12. V の基底のベクトルの個数を V の <u>次元</u> とよぶ. 次元は基底の取り方によらない.

命題 8.13. A を $m \times n$ 行列とする. このとき $Ax = 0$ の解空間を W とすると, 次が成り立つ: $\dim W = n - \mathrm{rank}(A)$.

例 8.14. 次の A について, $Ax = 0$ の解空間の基底は, ${}^t(-a, -c, 1, 0)$, ${}^t(-b, -d, 0, 1)$ のようにとれる:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$$

例 8.15. 次の A に対して, $Ax = 0$ の解空間は 1 次元で, その基底は ${}^t(-2, 1, 1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9　基礎数学 B (2019/12/16)

今回は教科書 § 4.2 の内容を紹介する．行列は線型写像 (線型変換) を表す．線型写像に関する重要な概念として, 固有値・固有ベクトルがある．

9.1　線型変換

定義 9.1. $U = \mathbb{R}^m$, $V = \mathbb{R}^n$ とする．写像 $T : U \to V$ が 線型写像 とは, 次が成り立つこと: 全ての $u_1, u_2 \in U$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して, $T(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1T(u_1) + c_2T(u_2)$.

例 9.2. A を $n \times m$ 行列とする．このとき次は線型写像: $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$.

例 9.3. 例えば A が次の行列のときの T_A の形は, 具体的に書ける:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

命題 9.4. 線型写像について, 以下が成り立つ:

(1) $T : U \to V$ を線型写像とすると, $T(0) = 0$;
(2) 線型写像と線型写像の合成は線型写像, 特に $T_A \circ T_B = T_{AB}$;
(3) E を単位行列とすると, T_E は恒等写像 (つまり $T(u) = u$).

命題 9.5. $T : U \to V$ を 線型写像とし, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ を U の基底とする．このとき T は基底の行き先で決まる (つまり, $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ が分かれば, 全ての元の行き先が分かる).

例 9.6. 線型写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ について, 以下が成り立つ:

(1) T_{kE} は全てのベクトルを k 倍する (これを 相似変換 という);
(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ とすると, T_A は x 軸に関する対称変換を与える;
(3) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とすると, T_A は角度 θ の回転を与える.

9.2　固有値と固有ベクトル

正方行列 A があったときに, それがどんな行列であるかということと, 線型写像 T_A がどんなものであるかということは, ほぼ同じ問いである．ここでは, T_A を調べる一つの方法を紹介する.

定義 9.7. V をベクトル空間, $T : V \to V$ を線型写像とする．このとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ と $0 \neq v \in V$ が次をみたすとき, λ を T の 固有値, v を T の固有値 λ の 固有ベクトル という:

$$T(v) = \lambda v.$$

例 9.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると, e_1 は A の固有値 1 の固有ベクトル, e_2 は A の固有値 2 の固有ベクトル.

固有値と固有ベクトルは, 存在するとは限らない. しかし, 存在する場合には, 元の行列の情報が得られる. 特に, 固有ベクトルになるような基底があれば, 元の行列を復元することができる.

例 9.9. A を 2×2 行列とし, T_A について, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有値 2 の固有ベクトル, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有値 1 の固有ベクトルであるとする. このとき,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

したがって, 行列が与えられたときに, その固有値と固有ベクトルを (存在する場合には) 求めることは重要である. そのための用語を用意する.

定義 9.10. $T : V \to V$ を線型写像, λ を固有値とするとき, 次を固有値 λ の <u>固有空間</u> という:

$$V_\lambda := \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}.$$

命題 9.11. 線型写像 $T : V \to V$ の各固有空間は, V の部分空間である.

固有ベクトルを求めよという問題は, 固有空間の基底を求めよ, という問題だと解釈できる.

9.3　第 5 回小テスト (2018/12/16)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ．解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ．

問題 9.12. 次の行列 A について, $Ax = 0$ の解空間の基底を一組求めよ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

学生番号 ______________________　氏名 ______________________

10　基礎数学 B (2019/12/23)

10.1　固有多項式

固有値と固有ベクトルを求めるときには, まず固有値を求めて, その後に各固有値に対する固有ベクトルを求める.

定義 10.1. 正方行列 A に対して, 次を 固有多項式 という: $g_A(t) := |tE - A|$.

定理 10.2. A を正方行列とする. このとき, 実数 λ が T_A の固有値であるための必要十分条件は, $g_A(\lambda) = 0$ となること.

例 10.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ について以下が成り立つ:

(1) 固有多項式は $g_A(t) = (t-2)(t+2)$, よって固有値は ± 2;

(2) 固有値 2 の固有ベクトルの一つは ${}^t(3,1)$;

(3) 固有値 -2 の固有ベクトルの一つは ${}^t(1,-1)$.

固有空間が 2 次元以上あるときには, 固有空間の基底を求めることになる.

例 10.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について, 固有多項式は $g_A(t) = (t-2)^2(t+1)$. 固有値 2 の固有空間の基底は ${}^t(0,1,0)$, ${}^t(\sqrt{2},0,1)$, また固有値 -1 の固有空間の基底は ${}^t(1,0,-\sqrt{2})$.

11　基礎数学 B (2020/01/06)

最終的には「対称行列の直行行列による対角化」を紹介したい．今回はそのうちの「対角化」について述べる．教科書 § 4.3 の一部 (正則行列による対角化) に相当する．

11.1　正則行列による対角化

正方行列 A が対角行列であるとは, 対角成分以外が全て 0 となること．特に零行列も対角行列．

定義 11.1. 正方行列 A が 対角化可能 であるとは, 次が成り立つこと: 正則行列 P を上手く選ぶと $P^{-1}AP$ が対角行列となる．

行列 A に対して, 上のような行列 P を見付けて $P^{-1}AP$ を求めることを "対角化する" という．対角化したときの成分は固有値と関係がある．

補題 11.2. A を正方行列, P を正則行列とし, $P^{-1}AP$ が次の対角行列であるとする:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

このとき, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は全て A の固有値．

実際, $Pe_1, \ldots, Pe_n$ が対応する固有ベクトルになる．

例 11.3. 次の行列 A は対角化不可能:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 11.4. A を n 次正方行列とする．このとき A が対角化可能であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: T_A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の基底が存在する．

定理の必要性の証明は, 具体的な行列を対角化する手続きそのものである．その部分を抜き出して書くと次のようになる．

命題 11.5. A を n 次正方行列とする．$\{x_1, \ldots, x_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とし, 各 x_i は T_A の固有値 λ_i の固有ベクトルであるとする．このとき, $P = (x_1, \ldots, x_n)$ とすると, $P^{-1}AP$ は対角行列であり, その対角成分は $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が順に並ぶ．

問題 11.6. 次の行列を対角化せよ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11.2　第 6 回小テスト (2020/01/06)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 11.7. 次の行列を対角化せよ (検算もすること):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

12　基礎数学 B (2020/01/20)

ここでは「対称行列の直交行列による対角化」を紹介する. 教科書 § 4.3, 4.4 の内容 (対角化については前回やった).

12.1　対称行列

行列 A の転置行列を ${}^tA$ で表す. 本によっては $A^\top$ などの記号を用いることもある.

定義 12.1. 正方行列 A が 対称行列 であるとは次が成り立つこと: ${}^tA = A$.

命題 12.2. 行列の転置について以下が成り立つ:

(1) A が $m \times n$ 行列, B が $n \times l$ 行列のとき, ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$;
(2) A が正則行列のとき, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

証明は, (1) は成分計算をするが, (2) は逆行列の定義に従えば良い.

12.2　内積空間

定義 12.3. 各 $a = {}^t(a_1, \ldots, a_n), b = {}^t(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, 次で定義される (a, b) を $\mathbb{R}^n$ 上の 標準内積 という:

$$(a, b) := {}^tab = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

定義より $(a, a) \geqq 0$. このとき $||a|| := \sqrt{(a, a)}$ とおき, これをベクトル a の大きさという.

定義 12.4. 0 でない $a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して, 次をみたす θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を a と b の間の 角度 という:

$$\cos\theta = \frac{(a, b)}{||a|| \, ||b||}.$$

12.3　正規直交基底

定義 12.5. $\mathbb{R}^n$ の基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が 正規直交基底 であるとは, 次が成り立つこと:

$$(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n$ の標準的な基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ は正規直交基底. それ以外にも正規直交基底はいくらでもある.

例 12.6. 任意の実数 θ に対して, 次は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底:

$$\{\ {}^t(\cos\theta, \sin\theta),\ {}^t(-\sin\theta, \cos\theta)\}.$$

一般に V を $\mathbb{R}^n$ 内の部分空間としたときに, その正規直交基底を見付ける問題を考える. 次の手順により, V の基底があれば, それを元にして正規直交基底を作ることができる (この手順をシュミットの正規直交化 または グラム・シュミットの正規直交化 という).

命題 12.7. V を $\mathbb{R}^n$ 内の部分空間とし, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ を V の基底とする. このとき以下の手順で得られる $\{u_1, \ldots, u_m\}$ は V の正規直交基底である:

(1) $u_1 := v_1/||v_1||$ とおく;

(2) $k \geqq 1$ に対して, $u'_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(v_{k+1}, u_i)u_i$ とおき, $u_{k+1} := u'_{k+1}/||u'_{k+1}||$ とおく.

例 12.8. シュミットの正規直交化により, 次が得られる:

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \mapsto \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$;

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \mapsto \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

12.4 直交行列

定義 12.9. 正方行列 P が 直交行列 であるとは次が成り立つこと: ${}^tPP = E$.

命題 12.10. 直交行列について以下が成り立つ:

(1) 直交行列は正則行列;

(2) ${}^tPP = E \Leftrightarrow P^tP = E$;

(3) P を直交行列とすると, P^{-1} および ${}^tP$ も直交行列;

(4) P, Q を直交行列とすると, PQ も直交行列.

定理 12.11. $P = (p_1, \ldots, p_n)$ を行列 P の列ベクトル表示とする. このとき, P が直交行列であるための必要十分条件は, $\{p_1, \ldots, p_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となること.

12.5 直交行列による対角化

定理 12.12. 対称行列 A は直交行列で対角化できる. すなわち, 直交行列 P が存在して $P^{-1}AP$ は対角行列.

通常の (正則行列による) 対角化をするには, 「固有ベクトルから成る基底」を取れば良かった. 直交行列による対角化のためには「固有ベクトルから成る正規直交基底」が必要.

命題 12.13. A が対称行列のとき, v を T_A の固有値 λ の固有ベクトル, w を T_A の固有値 μ の固有ベクトルとする. もし $\lambda \neq \mu$ ならば $(v, w) = 0$, すなわち直交する.

12.6 第 7 回小テスト (2019/01/20)

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 途中で何をやったのかが分かるような説明を加えよ.

問題 12.14. 次の行列を対角化せよ (検算もすること):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

ただし, 行列 A の固有値と固有ベクトルは, 第 6 回小テストで求めたものを用いて良い.

学生番号 ______________________ 氏名 ______________________

13 基礎数学 B (2020/01/27)

ここでは行列の対角化の応用をいくつか紹介する.

13.1 行列の冪乗

行列の n 乗を直接計算で求めることは, 一般には困難である. しかし行列が対角化できているとすると, 次のようにして n 乗の形を求めることができる.

命題 13.1. A を $n \times n$ 行列, P を $n \times n$ 正則行列とする. このとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

13.2 数列の漸化式

数列の漸化式が所定の形で与えられているとき, 行列の冪乗を用いて一般項を求めることができる.

例 13.2. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$ で与えられた数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$. 通常通り求めても良いが, 漸化式を次の形に書き換えることで, 行列の問題とも思える:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

上の例は, 次の例の特別な場合と思える.

例 13.3. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に関する次のような連立漸化式は, 行列を用いて表すことができる:

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n, \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n. \end{cases}$$

例 13.4. 三項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ は, 次のように行列で表すことができる:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

13.3 二次曲線

平面曲線の代表的な例として, 円 (楕円)・放物線・双曲線があった. 例えば,

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad y = x^2, \qquad x^2 - y^2 = 1.$$

一般に x, y の二次式で定義される曲線を二次曲線という. 直交行列による対角化を用いて, 二次曲線の形を求める方法がある.

例 13.5. $x^2 + xy + y^2 = 1$ の表す曲線を考える. これを行列で書くと

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

ここで登場した 2×2 対称行列は, 次のように対角化できる:

$$P := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

これらより, 求める図形は, 楕円 $X^2 + 3Y^2 = 2$ を -45° 回転させたものである.