2020 年度 位相数学 I・同演習

田丸 博士 (大阪市立大学)

前書き

本稿は, 2020 年度の位相数学 I・同演習の講義資料です. 遠隔授業で行うので, その方法を予告するための暫定版です. ここに記載された内容は後で変更される可能性があります. 情報は, WebClass および担当者のホームページでアナウンスします. (2020/04/30)

概要説明

集合の上に "距離" が与えられたものを距離空間と呼びます. 例えば実数 $\mathbb{R}$ やユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ には, 自然に距離が定義され, 距離空間となります. この講義では, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ と順を追って解説し, 最終的には一般の距離空間を扱います.

遠隔授業の進め方

この原稿 (講義ノート) は, 通常の講義で板書して説明する内容と, 口頭で追加して説明する内容 (の全てではないけど大部分) をまとめたものです. これを使って「通信添削方式」で授業を進めます. 詳しくは以下の通りです。

(1) 受講生は, 講義ノートを読んで自習し, 演習問題と小テストを解くこと. (注意：講義ノートを読むときには, この内容の講義を聞いていると思って, ノートをとることを強く推奨します.)

(2) 受講生は, 小テストの答案を提出すること. また, 答案は適宜採点して返却するので, 必要があれば再提出すること. 答案の提出および返却は, WebClass の位相数学 I 演習の方を用いる. (答案は, 手書きしたものをスキャンまたは写真に撮ったものを提出することを想定している. TeX で作成しても勿論構わない.)

(3) 中間試験と期末試験も行う予定. だが方法は未定.

(4) 講義を動画で配信するかどうかは, 様子を見て検討する. 双方向通信を使って演習発表を行うかも知れないが, 現時点では可能性は低い.

なお, この講義ノートは, WebClass に加えて, 田丸の HP でも同時に公開する. 従って, 小テストの提出と返却受取以外は, WebClass に行かなくても済む予定.

重要な要請

この授業では,「論理記号の使い方」や「証明の書き方」を極めて重視します. これらの練習のために, 小テストや試験の答案では「プリントの証明の書き方を参考にして真似ること」を要請します. (内容が正しくても形式が合っていない答案は再提出とします.) 昨年度の数学基礎演習 II または位相数学 I を受講した学生は, その時と同様に進めるのだと思って下さい. 特徴は,「示すことをその都度ごとに書くこと」です. 何度も同じことを書くことになりますが, 証明の書き方を身に付けるための訓練です.

成績および単位

基本的には, 講義内容を理解して証明を正しく書けること (それがこちらに伝わること) が, 単位取得のための必要十分条件です. 講義と演習の合否は連動する予定です.

第 1 章

実数の集合

この講義を通して, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す.

1.1 $\mathbb{R}$ 内の開集合

1.1.1 記号の復習

定義 1.1.1. $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, 以下のように定義する:

(1) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (これを 開区間 と呼ぶ).

(2) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (これを 閉区間 と呼ぶ).

また, $(a, b]$, $[a, b)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, ... なども同様に定義する.

定義 1.1.2. A, B を集合とする. A は B の 部分集合 である ($A \subset B$) とは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A$, $x \in B$.

定義 1.1.3. X, Y を集合とする. このとき $X - Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$ を X と Y の 差集合 という. 全体集合との差集合を 補集合 という.

差集合は $X \setminus Y$ と書くこともある. この節で考える全体集合は $\mathbb{R}$ であり, それを意識するために補集合は $\mathbb{R} - A$ のような記号で表す.

1.1.2 内点と内部

直感的には, $A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の "端ではない点" を内点という. 例えば $A = [0, 1]$ の場合には 0 と 1 が端. $A = [0, 1)$ だと 0 が端. $A = (0, +\infty)$ には端はない. これを正確に定式化したい.

定義 1.1.4. $A \subset \mathbb{R}$ とする.

(1) x $(\in \mathbb{R})$ が A の 内点 であるとは, 次が成り立つこと: $\exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in \mathbb{R} \mid x$ は A の内点 $\}$ を A の 内部 と呼ぶ.

例 1.1.5. $[0,2) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $1 \in [0,2)^\circ$.

(2) $0 \notin [0,2)^\circ$.

(3) $(0,2) \subset [0,2)^\circ$.

証明. まず (1) を示す. 示すことを step ごとに毎回書くことに注意.

- (示すことは $\exists \varepsilon > 0 : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subset [0,2)$.)　 $\varepsilon := 1$ とおく. すると $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subset [0,2)$.)　 ε の決め方より $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = (0,2) \subset [0,2)$.

最後の $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subset [0,2)$ の証明のとき, 左辺の任意の元が右辺に入る, ということを示しても良い (長くなる. 実際に書いて比較してみよ). 次に (2) を示す.

- (示すことは $\forall \varepsilon > 0, (-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset [0,2)$.)　 $\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $(-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset [0,2)$. すなわち $\exists a \in (-\varepsilon, \varepsilon) : a \notin [0,2)$.)　 $a := -\varepsilon/2$ とおく. すると $-\varepsilon < a < 0 < \varepsilon$ より $a \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
- (示すことは $a \notin [0,2)$.)　 $a = -\varepsilon/2 < 0$ より $a \notin [0,2)$.

ここで, $(-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset [0,2)$ は当たり前だと思うかも知れないが, 今後もう少しややこしい集合で同様の議論をすることがあるので, 練習のために証明を述べた. 最後に (3) を示す.

- (示すことは $\forall a \in (0,2)$, $a \in [0,2)^\circ$.)　 $\forall a \in (0,2)$ をとる.
- (示すことは $a \in [0,2)^\circ$. すなわち $\exists \varepsilon > 0 : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset [0,2)$.)　 $\varepsilon := \min\{a, 2-a\}$ とおく. すると $0 < a < 2$ より $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset [0,2)$.)　 $\varepsilon \leq a$ より $a - \varepsilon \geq 0$. また $\varepsilon \leq 2 - a$ より $a + \varepsilon \leq 2$. 従って $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (0,2) \subset [0,2)$.

以上で全て証明された. ちなみに答案に • を書く必要はない. □

命題 1.1.6. $A \subset \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $(a,b) \subset A$ ならば $(a,b) \subset A^\circ$.

(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

証明. まず (1) を示す.

- (示すことは $\forall a \in A^\circ$, $a \in A$.)　 $\forall a \in A^\circ$ をとる.
- (示すことは $a \in A$.)　 A° の定義より, $\exists \varepsilon > 0 : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$. ここで

$a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ であるから $a \in A$.

次に (2) を示す. $(a,b) \subset A$ とする.

- (示すことは $(a,b) \subset A^\circ$. すなわち $\forall x \in (a,b)$, $x \in A^\circ$.)　$\forall x \in (a,b)$ をとる.
- (示すことは $x \in A^\circ$. すなわち $\exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.)　$\varepsilon := \min\{x-a, b-x\}$ とおく. すると... (以下略)

省略した部分は, 例 1.1.5 (3) の証明と同様なので, 各自で補うこと. 最後に (3) を示す.

- (示すことは $(A^\circ)^\circ = A^\circ$. すなわち $(\subset)$ かつ $(\supset)$.)　(1) より $(A^\circ)^\circ \subset A^\circ$.
- (示すことは $(A^\circ)^\circ \supset A^\circ$. すなわち $\forall x \in A^\circ$, $x \in (A^\circ)^\circ$.)　$\forall x \in A^\circ$ をとる.
- (示すことは $x \in (A^\circ)^\circ$. すなわち $\exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A^\circ$.)　$x \in A^\circ$ より $\exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.
- (示すことは $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A^\circ$.)　$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$ なので (2) より $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A^\circ$.

以上で証明完了. (1) と (2) の証明は, 自力で復元できるようにすべし. □

例 1.1.7. 内部について, 以下が成り立つ:

(1) $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.

(2) $(a,b)^\circ = [a,b]^\circ = [a,b)^\circ = (a,b]^\circ = (a,b)$.

(3) $(a,+\infty)^\circ = [a,+\infty)^\circ = (a,+\infty)$.

(4) $(-\infty,b)^\circ = (-\infty,b]^\circ = (-\infty,b)$.

証明. 省略. 他の演習問題等を全てやって, それでも時間が余ったら, 自力で証明しておいて下さい. (優先順位低め.) □

1.1.3　開集合

直感的に言うと, $A \subset \mathbb{R}$ が開集合とは, A に "端がない" こと. これを正確に定式化したい.

定義 1.1.8. A $(\subset \mathbb{R})$ が <u>開集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.

命題 1.1.9. A $(\subset \mathbb{R})$ が開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

証明. きちんと示すためには $(\Rightarrow)$ と $(\Leftarrow)$ を示すべきだが, ほぼ定義の言い換えなので, 雑に示す. A $(\subset \mathbb{R})$ が開集合であることの定義は「$\forall x \in A$, $x \in A^\circ$」と同値. すなわち $A \subset A^\circ$. ここで $A^\circ \subset A$ は常に成り立つので, 題意は示される. □

例 1.1.10. 以下は開集合: $\mathbb{R}$, $\emptyset$, (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, ...

次は開集合の基本的な性質. 有限個の開集合の共通部分は開集合であり, 開集合の和集合は (有限個でも無限個でも) 開集合である.

定理 1.1.11. $\mathbb{R}$ 内の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は開集合.
(2) O_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ が開集合ならば, $\bigcap_{i=1}^n O_i$ も開集合.
(3) O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も開集合.

証明. (1) の証明は略. (2) を示す. O_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ が $\mathbb{R}$ 内の開集合であるとする.

- (示すことは $\forall x \in \bigcap_{i=1}^n O_i, \exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n O_i$.)　$\forall x \in \bigcap_{i=1}^n O_i$ をとる.
- (示すことは $\exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n O_i$.)　各 i について, $x \in O_i$ かつ O_i は開集合. よって $\exists \varepsilon_i > 0 : (x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i)$. これらを使って $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ とおく. すると $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n O_i$. すなわち $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset O_i$.)　$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ をとる.
- (示すことは $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset O_i$.)　ε の取り方から $\varepsilon \leq \varepsilon_i$. よって $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset O_i$.

ここで, 上記 3 つ目の項目を示す際に, 定義通りに「左辺の任意の元が右辺に入る」を示しても当然良い (少し証明が長くなる). 次に (3) を示す. O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が $\mathbb{R}$ 内の開集合であるとする.

- (示すことは $\forall x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda, \exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$.)　$\forall x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ をとる.
- (示すことは $\exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$.)　和集合の定義より $\exists \lambda_0 \in \Lambda : x \in O_{\lambda_0}$. また O_{λ_0} は開集合より $\exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset O_{\lambda_0}$.
- (示すことは $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$.)　明らかに $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$.

以上で示された. ちなみに (2), (3) の証明は基本的 (自力で復元できないと困る). □

和集合と共通部分, どちらが有限個でどちらが無限個だったかは, よく忘れる. そういうときには, 無限個だと反例が作れるのはどっちか, を考えるのが常套手段.

例 1.1.12. $A_n := (-\infty, 1/n)$ とすると, 次が成り立つ: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-\infty, 0]$. すなわち, 無限個の開集合の共通部分は, 開集合になるとは限らない.

証明. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-\infty, 0]$ を示す. まずは $(\supset)$ を示す. 右辺の任意の元が左辺に入ることを示しても良いが, 以下の方が少しだけ楽.

- (示すことは $\forall n \in \mathbb{N}, (-\infty, 0] \subset A_n$.)　$\forall n \in \mathbb{N}$ をとる.
- (示すことは $(-\infty, 0] \subset A_n$.)　明らかに $(-\infty, 0] \subset (-\infty, 1/n] = A_n$.

次に $(\subset)$ を示す. 補集合 (あるいは対偶) を考える.

- (示すことは $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset (-\infty, 0]$. すなわち $(\mathbb{R} - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \supset \mathbb{R} - (-\infty, 0]$. すなわち $\forall x \in \mathbb{R} - (-\infty, 0], x \in \mathbb{R} - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.)　$\forall x \in \mathbb{R} - (-\infty, 0]$ をとる.
- (示すことは $x \in \mathbb{R} - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. すなわち $\exists n \in \mathbb{N} : x \notin A_n$.)　x の取り方より $x > 0$. 自然数の性質より $\exists n \in \mathbb{N} : n > 1/x$.
- (示すことは $x \notin A_n$.)　$x > 1/n$ なので $x \notin (-\infty, 1/n] = A_n$.

以上で示せた. □

他にも $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-1/n, 1/n) = \{0\}$ 等が, よくある反例.

1.1.4　演習問題

問題 1.1.13. 例 1.1.5 (1), (2), (3) の証明を自力で復元せよ.

問題 1.1.14 (小テスト 1)**.** 次を定義に従って示せ: $(1, +\infty) \subset [1, +\infty)^\circ$.

問題 1.1.15. 命題 1.1.6 (1), (2) の証明を自力で復元せよ.

問題 1.1.16 (小テスト 2)**.** $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. 次を示せ: $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

問題 1.1.17. 定理 1.1.11 (2) の $n = 2$ の場合, および (3) の証明を自力で復元せよ.

問題 1.1.18. 以下の集合の内部が何になるかを予想し, それを示せ (命題 1.1.6 の結果は用いて良い):

(1) $(-\infty, 0]$.
(2) $\{1\}$ (一点集合).

問題 1.1.19. $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. 以下のそれぞれの主張に対して, 正しい場合には証明し, 正しくない場合は反例を挙げよ (判例を挙げる際には, 例 1.1.7 の結果を用いても良い):

(1) $A^\circ \cap B^\circ \supset (A \cap B)^\circ$.
(2) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.
(3) $A^\circ \cup B^\circ \supset (A \cup B)^\circ$.

1.2　$\mathbb{R}$ 内の閉集合

1.2.1　触点と閉包

直感的に言うと, $A \subset \mathbb{R}$ の触点とは, A の "めちゃめちゃ近く" にある点, あるいは A に触れるくらい近くにある点. これを正確に定義したい.

定義 1.2.1. $A \subset \mathbb{R}$ とする.

(1) $x\ (\in \mathbb{R})$ が A の <u>触点</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
(2) $\overline{A} := \{x \in \mathbb{R} \mid x$ は A の触点 $\}$ を A の <u>閉包</u> と呼ぶ.

例 1.2.2. 次が成り立つ:

(1) $1 \in \overline{[0,1)}$.
(2) $2 \notin \overline{[0,1)}$.

証明. まず (1) を示す.

- (示すことは $\forall \varepsilon > 0, (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap [0,1) \neq \emptyset$.)　 $\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap [0,1) \neq \emptyset$. すなわち $\exists x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap [0,1)$.) $x := \max\{1-\varepsilon/2, 1/2\}$ とおく. すると $x < 1$ かつ $x \geq 1/2 > 0$ より $x \in [0,1)$. また $x \geq 1-\varepsilon/2 > 1-\varepsilon$ および $x < 1 < 1+\varepsilon$ より $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

上の証明において, 単に $x := 1-\varepsilon/2$ とおくと ε が大きい時に困る. そのために細かい調整をした. 次に (2) を示す.

- (示すことは $\exists \varepsilon > 0 : (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \cap [0,1) = \emptyset$.)　 $\varepsilon := 1/2$ をとる. すると $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \cap [0,1) = \emptyset$.)　 ε の取り方より, $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \cap [0,1) = (3/2, 5/2) \cap [0,1) = \emptyset$.

以上で証明された. この (2) の証明では $\varepsilon := 1$ でも勿論良い. □

命題 1.2.3. $A \subset \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.
(2) O を $\mathbb{R}$ 内の開集合とするとき, $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $O \cap A \neq \emptyset$.
(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

証明. まず (1) を示す.

- (示すことは $\forall x \in A, a \in \overline{A}$.)　 $\forall x \in A$ をとる.
- (示すことは $x \in \overline{A}$. すなわち $\forall \varepsilon > 0, (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.)　 $\forall \varepsilon > 0$ をとる.

- (示すことは $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.) $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A$ より $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

次に (2) を示す. O を $\mathbb{R}$ 内の開集合とし, $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ であるとする.

- (示すことは $O \cap A \neq \emptyset$. すなわち $\exists x \in O \cap A$.) 仮定から $\exists y \in O \cap \overline{A}$. ここで $y \in O$ かつ O は開集合より, $\exists \varepsilon > 0 : (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset O$. また $y \in \overline{A}$ なので, $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. 従って $\exists x \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap A \subset O \cap A$.

最後に (3) を示す. $\overline{\overline{A}} \supset \overline{A}$ は (1) から従うので, その逆の包含関係を示せば良い.

- (示すことは $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. すなわち $\forall x \in \overline{\overline{A}}$, $x \in \overline{A}$.) $\forall x \in \overline{\overline{A}}$ をとる.
- (示すことは $x \in \overline{A}$. すなわち $\forall \varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.) $\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.) $x \in \overline{\overline{A}}$ より, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$. ここで $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ は $\mathbb{R}$ 内の開集合なので, (2) より $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

以上で証明された. □

上の命題の (2) は, O が $\mathbb{R}$ 内の開集合でないときには, もちろん成立しない. 反例は, 次の例を見ると直ちに挙げられるので, 各自考えること.

例 1.2.4. 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
(2) $\overline{(a,b)} = \overline{[a,b]} = \overline{[a,b)} = \overline{(a,b]} = [a,b]$.
(3) $\overline{(a,+\infty)} = \overline{[a,+\infty)} = [a,+\infty)$.
(4) $\overline{(-\infty,b)} = \overline{(-\infty,b]} = (-\infty,b]$.

証明. 略す. □

例 1.2.5. 閉包について, 以下が成り立つ: $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

証明. $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ と $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ は同様の方針で証明できるので, $\mathbb{Z}$ の方だけを示す. 一般論から $\overline{\mathbb{Z}} \supset \mathbb{Z}$ は成り立つので, 逆の包含関係を示せば良い. これを補集合を用いて示す.

- (示すことは $\overline{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$. すなわち $\mathbb{R} - \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} - \overline{\mathbb{Z}}$. すなわち $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R} - \overline{\mathbb{Z}}$.) $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ をとる.
- (示すことは $x \in \mathbb{R} - \overline{\mathbb{Z}}$. すなわち $x \notin \overline{\mathbb{Z}}$. すなわち $\exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.) $x \notin \mathbb{Z}$ より, $\exists n \in \mathbb{Z} : n < x < n+1$. ここで $\varepsilon := \min\{x-n, n+1-x\}$ とおく. すると $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.) $\varepsilon \leq x-n$ より $x-\varepsilon \geq n$. また一方で $\varepsilon \leq n+1-x$ より $x+\varepsilon \geq n+1$. 従って $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (n, n+1)$ となるので, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

ちなみに, 上でとった ε は, x から最も近い整数までの距離である. 次に $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ の証明の

感覚だけを述べる. $\overline{\mathbb{Q}} \supset \mathbb{R}$ を示せば良い.

- (示すことは $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \overline{\mathbb{Q}}$.)　$\forall x \in \mathbb{R}$ をとる.
- (示すことは $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. すなわち $\forall \varepsilon > 0, (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.)　$\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. すなわち $\exists y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}$.)　ここで例として $x = \sqrt{2}$ とし, $\varepsilon = 10^{-4}$ を考えてみる. このとき $y := 1.4142 \in \mathbb{Q}$ とおくと, $|\sqrt{2} - y| = 0.00001356 \cdots < 10^{-4} = \varepsilon$ となるので, $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

このように x を有限小数で近似すれば, 上記の証明が完成する. このようなことができることは, 実数 $\mathbb{R}$ の基本的な性質だった. □

1.2.2　閉集合の定義

開集合は “端がない” 集合であった. 逆に閉集合は “端が全部ある” 集合と言える. これを正確に述べると次のようになる.

定義 1.2.6. $A\ (\subset \mathbb{R})$ が <u>閉集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} = A$.

ここで, $A \subset \overline{A}$ は常に成り立っていた. よって, A が閉集合であるための必要十分条件は $\overline{A} \subset A$ が成り立つことである.

例 1.2.7. 以下は閉集合: $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, 有限集合, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

ここで, 「閉集合である」ことと「開集合でない」ことについて, 直接の関係はない. 例えば $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は開集合かつ閉集合である. また, $(a, b]$ は開集合でも閉集合でもない.

1.2.3　閉集合の性質

閉集合と開集合の間には, 直接の関係はないが, 補集合を考えると実は間接的には関係する. そのことを示すために必要な命題が次のもの.

命題 1.2.8. 次が成り立つ: $\mathbb{R} - \overline{A} = (\mathbb{R} - A)^\circ$.

証明. 二つの集合が等しいことを示すので, 両側の包含関係を示す. まずは $(\subset)$ から.

- (示すことは $\mathbb{R} - \overline{A} \subset (\mathbb{R} - A)^\circ$. すなわち $\forall x \in \mathbb{R} - \overline{A}, x \in (\mathbb{R} - A)^\circ$.)　$\forall x \in \mathbb{R} - \overline{A}$ をとる.
- (示すことは $x \in (\mathbb{R} - A)^\circ$. すなわち $\exists > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R} - A$.)　$x \notin \overline{A}$ より, $\exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \emptyset$.
- (示すことは $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R} - A$.)　$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \emptyset$ より $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R} - A$.

最後の行の証明は, 左辺の任意の元が右辺に入る, ということを定義に従って示しても良い. (演習問題の項に, その議論を実質的に問う問題がある.) あとは ($\supset$) を示す必要があるが, 上の証明と同様に定義に従って示せば良いので, 演習とする. $\square$

定理 1.2.9. A が閉集合であるための必要十分条件は, $\mathbb{R} - A$ が開集合となること.

証明. これは実は上の命題 1.2.8 を使うと簡単. 必要十分を示したいので, ($\Rightarrow$) と ($\Leftarrow$) を示す. どちらも同様なので ($\Rightarrow$) を示す. A が $\mathbb{R}$ 内の閉集合であるとする.

- (示すことは $(\mathbb{R} - A)^\circ \subset \mathbb{R} - A$.) A は閉集合より $\overline{A} = A$. よって命題 1.2.8 を使うと $(\mathbb{R} - A)^\circ = \mathbb{R} - \overline{A} = \mathbb{R} - A$.

反対向きの矢印 ($\Leftarrow$) の証明も同様なので, 演習とする. $\square$

開集合の場合と同様に, 閉集合に関しても, 共通部分や和集合をとった時の振る舞いを調べる. 閉集合の有限個の和集合は閉集合. 閉集合の共通部分は (無限個でも) 閉集合.

定理 1.2.10. $\mathbb{R}$ の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は閉集合.
(2) F_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ が閉集合ならば, $\bigcup_{i=1}^n F_i$ も閉集合.
(3) F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

証明. 閉集合であることと補集合が開集合であることは同値だった. このことと, 開集合に関する性質を用いることで, 定理を示すことができる. まず (1) を示す.

- (示すことは $\emptyset$ が閉集合. すなわち $\mathbb{R} - \emptyset$ が開集合.) $\mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R}$ であり, これは $\mathbb{R}$ 内の開集合. よって $\emptyset$ は閉集合.

また $\mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 内の閉集合であることの証明も同様. 次に (2) を示す. F_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ が閉集合であるとする.

- (示すことは $\bigcup_{i=1}^n F_i$ が閉集合. すなわち $\mathbb{R} - \bigcup_{i=1}^n F_i$ が開集合.) $\mathbb{R} - \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R} - F_i)$ である. ここで F_i は $\mathbb{R}$ 内の閉集合なので, $\mathbb{R} - F_i$ は開集合. よってその有限個の共通部分も開集合なので, $\mathbb{R} - \bigcup_{i=1}^n F_i$ は開集合.

ここで和集合の補集合に関する性質を用いたが, 証明を荒く書いておく:

- $(x \in \mathbb{R} - \bigcup_{i=1}^n F_i) \iff (x \notin \bigcup_{i=1}^n F_i) \iff \neg(\exists i \in \{1, \ldots, n\} : x \in F_i)$
$\iff (\forall i \in \{1, \ldots, n\}, x \notin F_i) \iff (\forall i \in \{1, \ldots, n\}, x \in \mathbb{R} - F_i)$
$\iff (x \in \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R} - F_i))$.

また (3) の証明は (2) と同様であるので, 演習とする. $\square$

1.2.4　演習問題

問題 1.2.11. 例 1.2.2 を参考にして次を示せ:

(1) $0 \in \overline{(0, \infty)}$.

(2) $-1 \notin \overline{(0, \infty)}$.

問題 1.2.12. 命題 1.2.3 (1), (2) の証明を自力で復元せよ.

問題 1.2.13. 命題 1.2.8 に関して, 以下を示せ:

(1) X を集合とし, $A, B \subset X$ とする. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset X - B$ を示せ.

(2) $\mathbb{R} - \overline{A} \supset (\mathbb{R} - A)^\circ$ を示せ.

問題 1.2.14 (小テスト 3)**.** 定理 1.2.10 (3) を示せ (閉集合の共通部分が閉集合となること). ここで, 閉集合の補集合の性質と, 開集合の和集合に関する性質は証明なしで用いて良いが, 共通部分の補集合の性質は証明すること.

問題 1.2.15. A $(\subset \mathbb{R})$ が有限集合ならば閉集合であることを示せ.

問題 1.2.16. 無限個の閉集合の和集合は, 閉集合になるとは限らない. 反例を挙げよ. (与えた集合が閉集合であるかないかは, 分かっているとして良い.)

問題 1.2.17. $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. 以下のそれぞれの主張に対して, 正しい場合には証明し, 正しくない場合は反例を挙げよ:

(1) $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

(2) $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$.

(3) $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

(4) $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$.

問題 1.2.18. $A \subset \mathbb{R}$ とし, m が A の上限であるとする. このとき $m \in \overline{A}$ を定義に従って示せ. ただしここで, 実数 m が A の上限であるとは, 次が成り立つこと:

(i) $\forall a \in A,\ a \leq m$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A : m - \varepsilon < a$.

問題 1.2.19. 数列 $\{a_n\}$ が A に含まれ, a に収束するとする. このとき $a \in \overline{A}$ を定義に従って示せ.

1.3 $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合

1.3.1 集合族の準備

この章で紹介するコンパクト性の定義でも, また今後のいろいろな場面でも, 集合族を考えることは多い. ここではその基本的なことをまとめておく.

定義 1.3.1. 集合をいくつか集めたものを 集合族 という. 特に, $\mathbb{R}$ 内の部分集合をいくつか集めてできる集合族を, $\mathbb{R}$ の 部分集合族 という.

例えば, $\mathbb{R}$ 内の部分集合を全て集めてできる集合族も考えられる (これを $\mathbb{R}$ の冪集合という). 他には, 例えば $\{(-1,1),(0,1),(0,3)\}$ は, 3 つの開区間 $(-1,1)$, $(0,1)$, $(0,3)$ を集めた $\mathbb{R}$ の部分集合族. 一般に $\mathbb{R}$ の部分集合族は $\mathfrak{U} := \{U_\lambda \subset \mathbb{R} \mid \lambda \in \Lambda\}$ のように表すことができる. ここで Λ は勝手な集合であり, 有限集合でも無限集合でも, 可算でも非可算でも何でも良い. この Λ を添字集合という.

定義 1.3.2. $\mathfrak{U} := \{U_\lambda \subset \mathbb{R} \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合族とする. このとき $\mathfrak{U}$ の 和集合 を次で定義する: $\bigcup \mathfrak{U} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

例えば上の例では, $\bigcup\{(-1,1),(0,1),(0,3)\} = (-1,1) \cup (0,1) \cup (0,3) = (-1,3)$. 集合族と, 集合族の和集合は, 違う概念である (集合族は, ただ集めただけ. まだ和集合は取らない. もちろん共通部分も取らない). 明確に区別が必要.

例 1.3.3. $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathfrak{U} := \{(1/n, 2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対し, $\bigcup \mathfrak{U} = (0,2)$.

証明. 2 つの集合が等しいことを示すので, 両方向の包含を示す. 定義より $\bigcup \mathfrak{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (1/n, 2)$ であることに注意する. まずは $(\subset)$ を示す.

- (示すことは $\bigcup \mathfrak{U} \subset (0,2)$. すなわち $\forall x \in \bigcup \mathfrak{U}$, $x \in (0,2)$.)　$\forall x \in \bigcup \mathfrak{U}$ をとる.
- (示すことは $x \in (0,2)$.)　$\bigcup \mathfrak{U}$ の定義より, $\exists n \in \mathbb{N} : x \in (1/n, 2)$. 従って $x \in (0,2)$.

次に $(\supset)$ を示す.

- (示すことは $(0,2) \subset \bigcup \mathfrak{U}$. すなわち $\forall x \in (0,2)$, $x \in \bigcup \mathfrak{U}$.)　$\forall x \in (0,2)$ をとる.
- (示すことは $x \in \bigcup \mathfrak{U}$. すなわち $\exists n \in \mathbb{N} : x \in (1/n, 2)$.)　$x \in (0,2)$ より $x > 0$ なので, $\exists n \in \mathbb{N} : x > 1/n$.
- (示すことは $x \in (1/n, 2)$.)　$x \in (0,2)$ および n の決め方から $x \in (1/n, 2)$.

以上で示された. □

今後, 具体的に与えられた集合族の和集合が何であるかは, 特に証明を書かないことが多い. しかし, いつでも証明できる状態であることは重要. また, 和集合が何であるかの想像が難しい場合には, 証明を考えると分かる場合もある.

1.3.2　コンパクト集合の定義

以下では $A \subset \mathbb{R}$ とする. この A がコンパクトであるとは, 雑に言うと「小さくまとまっている」こと. これを正確に定義したい. そのためにまず次の開被覆を定義する.

定義 1.3.4. $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合族とする. このとき $\mathfrak{U}$ が A の <u>開被覆</u> (<u>**open cover**</u>) とは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, U_λ は開集合,

(ii) $A \subset \bigcup \mathfrak{U}$.

条件 (i) は「$\forall U \in \mathfrak{U}$, U は開集合」と書いても良い. その方が U_λ という記号を出さなくて済むので短い. 条件 (ii) は, $\mathfrak{U}$ が A を cover している (被覆している, 覆っている) ことを表している. 被覆するときには無駄があっても良い (すなわち $A \subsetneq \bigcup \mathfrak{U}$ でも良い).

例 1.3.5. 以下は開区間 $(0, 2)$ の開被覆:

(1) $\{(-1, 1), (0, 1), (0, 3)\}$.

(2) $\{(1/n, 2) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(3) $\{\mathbb{R}\}$.

証明. 証明は全て同様なので, (2) だけ示す. $\mathfrak{U} := \{(1/n, 2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく.

- (示すことは (i) 開であること. (ii) 被覆であること.)
- まず (i) から示す. (示すことは $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1/n, 2)$ は開.)　$\forall n \in \mathbb{N}$ をとる.
- (示すことは $(1/n, 2)$ は開.)　$(1/n, 2)$ は開区間なので前に示したことより開集合.
- 次に (ii) を示す. (示すことは $(0, 2) \subset \bigcup \mathfrak{U}$.)　前に示したように, $\bigcup \mathfrak{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (1/n, 2) = (0, 2) \supset (0, 2)$.

以上で示された. □

開被覆を用いてコンパクトを定義する. 定義を口語的に述べると, どんな開被覆に対しても, そのうち有限個で実は被覆できること (単に「有限な開被覆をもつ」ではない).

定義 1.3.6. A が $\mathbb{R}$ 内の <u>**コンパクト部分集合**</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U}$ (A の開被覆), $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) : $A \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.

注意 1.3.7. A が $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合であるとは, 次と同値: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$

(A の開被覆), $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$: $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$. どちらの書き方で証明した方が良いかは, 問題に依存する.

コンパクトの定義はできたが, 後で見るように, 与えられた集合がコンパクトであることを示すのは, 一般に極めて難しい. そこでまずはコンパクトでない例を見る.

例 1.3.8. $\mathbb{R}$, $(0,2]$, $[0,+\infty)$ はコンパクト部分集合でない.

証明. $[0,+\infty)$ がコンパクト部分集合でないことを示す.

- (示すことは $\exists \mathfrak{U}$ ($[0,+\infty)$ の開被覆) : $\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ (有限), $[0,+\infty) \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)
  $\mathfrak{U} := \{U_m := (-\infty, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ とおく. これは $[0,+\infty)$ の開被覆である.
  - $\mathfrak{U}$ が $[0,+\infty)$ の開被覆を示す. (示すことは (i) 開である, (ii) 被覆である.)
  - (i) を示す. (示すことは $\forall m \in \mathbb{N}$, U_m は開.)　$\forall m \in \mathbb{N}$ をとる.
  - (示すことは U_m は開.)　$U_m = (-\infty, m)$ より, これは開集合.
  - (ii) を示す. (示すことは $[0,+\infty) \subset \bigcup \mathfrak{U}$.)　定義より次が成り立つ:
    $$\bigcup \mathfrak{U} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (-\infty, m) = (-\infty, +\infty) \supset [0,+\infty).$$
    以上より $\mathfrak{U}$ は $[0,+\infty)$ の開被覆.
- (示すことは $\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ (有限), $[0,+\infty) \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) をとる.
- (示すことは $[0,+\infty) \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\mathfrak{U}'$ は有限なので,
  $$\exists n \in \mathbb{N}, \exists m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N} : \mathfrak{U}' = \{U_{m_1}, \ldots, U_{m_n}\}.$$
  ここで $M := \max\{m_1, \ldots, m_n\}$ とおくと,
  $$\bigcup \mathfrak{U}' = \bigcup_{i=1}^{n} U_{m_i} = \bigcup_{i=1}^{n} (-\infty, m_i) = (-\infty, M) \not\supset [0,+\infty).$$

最後の集合族の和集合を求める部分は演習とするが, 以上で $[0,+\infty)$ がコンパクトでないことが示された. $\mathbb{R}$ がコンパクトでないことの証明は, 全く同様なので省略する. $(0,2]$ がコンパクトでないことの証明には, 開被覆として例えば $\mathfrak{U} := \{U_n = (1/n, +\infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 等を取れば良い (もちろん $+\infty$ のところは 3 で十分). 実際の証明は演習とする. □

1.3.3　コンパクト集合の性質

以下では $A, K \subset \mathbb{R}$ とする. コンパクト部分集合は K で表すことが多い.

定義 1.3.9. A が 有界 とは, 次が成り立つこと: $\exists a, b \in \mathbb{R}$: $A \subset [a,b]$.

有界であることの定義は, 上界と下界が存在することと言っても良い. 以降では, $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合であることと有界閉集合であることが同値であることを示す. まずは「コンパクト $\Rightarrow$ 有界」を示す.

命題 1.3.10. K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合とする．このとき K は有界.

証明. K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合とする．コンパクトの定義は「任意の開被覆に対して有限個を選べる」なので, その仮定を使うためには, (良い) 開被覆を与える必要がある.

- (示すことは K が有界であること．すなわち $\exists a, b \in \mathbb{R} : K \subset [a, b]$.)
  $\mathfrak{U} := \{U_m := (-m, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$
  とおく．これは K の開被覆である (証明はこれまでの議論と同様なので省略). K はコンパクトなので,
  $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ (有限) : $K \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.
  また $\mathfrak{U}'$ は有限なので,
  $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N} : \mathfrak{U}' = \{U_{m_1}, \ldots, U_{m_n}\}$.
  これらを用いて $b := \max\{m_1, \ldots, m_n\}$, $a := -b$ とおく.
- (示すことは $K \subset [a, b]$.)
  $K \subset \bigcup \mathfrak{U}' = \bigcup_{i=1}^{n} U_{m_i} = \bigcup_{i=1}^{n} (-m_i, m_i) = (a, b) \subset [a, b]$.

以上で証明された. □

次に「コンパクト $\Rightarrow$ 閉」を示す．例えば $(0, 2]$ がコンパクトでないことの証明では, 0 に限りなく近付いていく開被覆を考えるのがポイントであった．同様に, 触点 $x \in \overline{A}$ が A の元でないとしたら, x に限りなく近付いていく開被覆を考えることができる.

命題 1.3.11. K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合とする．このとき K は閉集合.

証明. 対偶を示す．K が $\mathbb{R}$ 内の閉集合でないと仮定する．すると定義より $K \subsetneq \overline{K}$．すなわち $\exists x \in \overline{K} : x \notin K$．これを用いて K がコンパクトでないことを示す.

- (示すことは $\exists \mathfrak{U}$ (K の開被覆) : $\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ (有限), $K \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)
  $\mathfrak{U} := \{U_\lambda := \mathbb{R} - [x - \lambda, x + \lambda] \mid \lambda > 0\}$ とおく．これは K の開被覆である.
  - $\mathfrak{U}$ が K の開被覆であることを示す．(示すことは (i) 開, (ii) 被覆.)
  - (i) を示す．(示すことは $\forall \lambda > 0$, U_λ は開.)　$\forall \lambda > 0$ をとる.
  - (示すことは U_λ は開.)　補集合 $\mathbb{R} - U_\lambda = [x - \lambda, x + \lambda]$ が閉集合なので, U_λ は開.
  - (ii) を示す．(示すことは $K \subset \bigcup \mathfrak{U}$.)　$x \notin K$ を用いると, $\bigcup \mathfrak{U} = \bigcup_{\lambda > 0} U_\lambda = \mathbb{R} - \{x\} \supset K$．以上より開被覆であることが示せた.
- (示すことは $\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ (有限), $K \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ (ただし $\mathfrak{U}'$ は有限) をとる.
- (示すことは $K \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$．すなわち $\exists y \in K : y \notin \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\mathfrak{U}'$ は有限より
  $\exists n \in \mathbb{N}, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 : \mathfrak{U}' = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$.
  ここで $\varepsilon := \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ とおく．このとき $\varepsilon > 0$．よって $x \in \overline{K}$ より

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap K \neq \emptyset$. すなわち $\exists y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap K$.

- (示すことは $y \notin \bigcup \mathfrak{U}'$.)　定義より $U_{\lambda_i} = \mathbb{R} - [x-\lambda_i, x+\lambda_i]$ なので,
$$\bigcup \mathfrak{U}' = \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i} = \mathbb{R} - \bigcap_{i=1}^n [x-\lambda_i, x+\lambda_i] = \mathbb{R} - [x-\varepsilon, x+\varepsilon].$$
従って, $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ より, $y \notin \bigcup \mathfrak{U}'$.

以上で証明された. なお, この証明は自力で復元するには難易度は高目と思われる. □

以上から $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合は有界閉である. 従って次の例と系が得られる.

例 1.3.12. 以下はコンパクト部分集合ではない:

(1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $(0, +\infty)$, $[0, +\infty)$, ...
(2) (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, ...

系 1.3.13. $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合は, 最大値と最小値をもつ.

証明. K がコンパクトなら有界なので, 上限と下限が存在する. K は閉集合なので, 上限と下限は K の元である (問題 1.2.18 参照). よってこれらが最大値と最小値である. □

次に, $\mathbb{R}$ 内の有界閉集合はコンパクトであることを示す. 証明には, 以下の二つの命題を用いる.

命題 1.3.14. 閉区間 $[a, b]$ はコンパクト部分集合.

証明. 証明には "区間縮小法" と呼ばれる議論を用いる. 講義で黒板に絵を描きながら説明するのは良いと思うが, テキストにそのまま証明を書いてもあまり意味がない気がするので, ここでは省略する. 興味のある学生は教科書 (定理 2.8) を参照. 区間縮小法で検索すればいろいろヒットする. □

次の命題を端的に言うと「コンパクト集合内の閉集合はコンパクト」である.

命題 1.3.15. K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合, F を $\mathbb{R}$ 内の閉集合とし, $F \subset K$ が成り立つとする. このとき F はコンパクト部分集合である.

証明. 示すことは F がコンパクトであること. 仮定は K がコンパクトなので, これを使うためには K の開被覆が必要.

- (示すことは $\forall \mathfrak{U}$ (F の開被覆), $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ (有限) : $F \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\forall \mathfrak{U}$ (F の開被覆) をとる.
- (示すことは $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ (有限) : $F \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\overline{\mathfrak{U}} := \mathfrak{U} \cup \{\mathbb{R} - F\}$ とおくと, これは K の開被覆である. 実際, F は閉なので $\mathbb{R} - F$ は開. よって $\overline{\mathfrak{U}}$ も開. また $\mathfrak{U}$ は F の被覆なので,

$$\bigcup \overline{\mathfrak{U}} = \bigcup \mathfrak{U} \cup \{\mathbb{R} - F\} \supset F \cup (\mathbb{R} - F) = \mathbb{R} \supset K.$$

従って $\overline{\mathfrak{U}}$ は K を被覆する．この開被覆 $\overline{\mathfrak{U}}$ について, K はコンパクトより

$$\overline{\mathfrak{U}}' \subset \overline{\mathfrak{U}} \text{ (有限)} : K \subset \bigcup \overline{\mathfrak{U}}'.$$

ここで $\mathfrak{U}' := \overline{\mathfrak{U}}' \cap \mathfrak{U}$ とおく．このとき $\overline{\mathfrak{U}}'$ が有限なので $\mathfrak{U}'$ も有限.

- (示すことは $F \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\overline{\mathfrak{U}}' \subset \overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U} \cup \{\mathbb{R} - F\}$ より

$$\overline{\mathfrak{U}}' = (\overline{\mathfrak{U}}' \cap \mathfrak{U}) \cup (\overline{\mathfrak{U}}' \cap \{\mathbb{R} - F\}) \subset \mathfrak{U}' \cup \{\mathbb{R} - F\}$$

である．従って

$$K \subset \bigcup \overline{\mathfrak{U}}' \subset \bigcup \mathfrak{U}' \cup (\mathbb{R} - F).$$

仮定より $F \subset K$ なので, 両辺と F との共通部分を取れば, $F \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.

以上で証明された．ポイントは, F の開被覆から K の開被覆を作るところだろう．　□

定理 1.3.16. K が $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合であるための必要十分条件は, K が有界閉集合となること.

証明．コンパクトなら有界閉であることは示した．逆を示す．K を $\mathbb{R}$ 内の有界閉集合とする．有界なので, $\exists a, b \in \mathbb{R} : K \subset [a, b]$．ここで閉区間 $[a, b]$ はコンパクトであり, K はその内の閉集合なので, 上で示した命題より K はコンパクトである．　□

1.3.4　演習問題

問題 1.3.17. $M := \max\{m_1, \ldots, m_n\}$ とおく．$\bigcup_{i=1}^{n}(-\infty, m_i) = (-\infty, M)$ を示せ.

問題 1.3.18. $\bigcup_{r>0}(\mathbb{R} - [x - r, x + r]) = \mathbb{R} - \{x\}$ を示せ.

問題 1.3.19 (小テスト問題 4)**.** $(0, 2]$ が $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合でないことを, 定義に従って示せ．(与えた集合族の和集合が何であるかは証明せずに使って良い.)

問題 1.3.20. A $(\subset \mathbb{R})$ が有界と次が同値であることを示せ: $\exists R > 0 : A \subset (-R, R)$.

問題 1.3.21. K_1, K_2 を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合とする．$K_1 \cup K_2$ もコンパクト部分集合であることを定義に従って示せ．(有界閉と有界閉の和集合が有界閉, が簡単だが.)

問題 1.3.22. $\mathbb{R}$ 内の開集合は, 最大値をもたないことを示せ.

問題 1.3.23. $A := \{x, y, z\}$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$ がコンパクトであることを, 定義に従って示せ.

問題 1.3.24. $\mathbb{R}$ 内の部分集合が最大値と最小値をもつとしても, コンパクト部分集合になるとは限らない．反例を挙げよ.

1.4 $\mathbb{R}$ 上の連続写像

ここでは, 写像 (関数) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることを定義し, その性質を調べる.

1.4.1 連続写像の定義

まずは写像の一般的な用語の復習から.

定義 1.4.1. 写像 $f : X \to Y$ を考える.

(1) $A \subset X$ に対して, 次を f による <u>像</u> と呼ぶ: $f(A) := \{f(a) \in Y \mid a \in A\}$.
(2) $B \subset Y$ に対して, 次を f による <u>逆像</u> と呼ぶ: $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

逆像と逆写像は全く異なる概念であることに注意する. 逆像は集合, 逆写像は写像. これを用いて関数の連続性を定義する.

定義 1.4.2. $a \in \mathbb{R}$ とする. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が <u>a で連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 :\ f((a-\delta, a+\delta)) \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.

写像 f を「x を入力したら $f(x)$ が出力されるもの」だと思うと, 連続写像の条件は「入力の誤差を十分小さくすれば, 出力の誤差を十分小さくできる」と言うことができる. 条件の記号を用いると, δ が入力の誤差, ε が出力の誤差.

注意 1.4.3. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が a で連続であることは, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ と同値である. これは極限の定義の復習なので, 確認は演習とする.

定義に慣れるために, 連続である場合とない場合の簡単な例を挙げる.

例 1.4.4. 次の写像は $x = 0$ で連続: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$.

証明. 定義に従って示す. ここで $f(0) = 0$ に注意する.

- (示すことは $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :\ f((-\delta, \delta)) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$.)　$\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $\exists \delta > 0 :\ f((-\delta, \delta)) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$.)　$\delta := \varepsilon/2$ とおく. すると $\delta > 0$.
- (示すことは $f((-\delta, \delta)) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$. すなわち $\forall y \in f((-\delta, \delta))$, $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.)
  $\forall y \in f((-\delta, \delta))$ をとる.
- (示すことは $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.)　像の定義より $\exists x \in (-\delta, \delta) :\ y = f(x) = 2x$. 従って $x \in (-\delta, \delta)$ より $y = 2x \in (-2\delta, 2\delta) = (-\varepsilon, \varepsilon)$.

以上で証明された. ちなみに $x = 0$ 以外でも連続である (演習問題を参照). □

例 1.4.5. 次の写像は $x=0$ で連続でない:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}0 & (x\leq 0),\\ 1 & (x>0).\end{cases}$$

証明. 定義に従って示す. ここで $f(0)=0$ に注意する.

- (示すことは $\exists\varepsilon>0:\ \forall\delta>0,\ f((-\delta,\delta))\not\subset(-\varepsilon,\varepsilon)$.)　$\varepsilon:=1/2$ とおく. すると $\varepsilon>0$.
- (示すことは $\forall\delta>0,\ f((-\delta,\delta))\not\subset(-\varepsilon,\varepsilon)$.)　$\forall\delta>0$ をとる.
- (示すことは $f((-\delta,\delta))\not\subset(-\varepsilon,\varepsilon)$. すなわち $\exists y\in f((-\delta,\delta)):\ y\notin(-\varepsilon,\varepsilon)$.) $y:=1$ とおく. このとき $f((-\delta,\delta))=\{0,1\}\ni y$.
- (示すことは $y\notin(-\varepsilon,\varepsilon)$.)　$y=1\notin(-1/2,1/2)=(-\varepsilon,\varepsilon)$.

以上で証明された. □

ここまでの話は, 関数がある点で連続という概念についてであった. 関数そのものが連続であるとは, 定義域の全ての点で連続であることと定義する.

定義 1.4.6. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a\in\mathbb{R}$, f は a で連続.

1.4.2　連続写像の性質

ここでは連続関数の基本的な性質を復習する. ここに述べることを使うと, 例えば多項式関数が連続であることが従う.

例 1.4.7. 以下の写像は連続である:

(1) 定値写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto c$. (ただし $c\in\mathbb{R}$ は定数.)
(2) 恒等写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x$.

証明. 恒等写像が連続であることの証明は演習とする. ここでは定値写像の場合を示す.

- (示すことは $\forall a\in\mathbb{R}$, f は a で連続.)　$\forall a\in\mathbb{R}$ をとる.
- (示すことは f は a で連続. すなわち $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0:\ f((a-\delta,a+\delta))\subset(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$.)　$\forall\varepsilon>0$ をとる.
- (示すことは $\exists\delta>0:\ f((a-\delta,a+\delta))\subset(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$.)　$\delta:=1$ とおく. すると $\delta>0$.
- (示すことは $f((a-\delta,a+\delta))\subset(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$.)　f は定値写像 $(f(x)=c)$ なので, $f((a-\delta,a+\delta))=\{c\}\subset(c-\varepsilon,c+\varepsilon)=(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$.

最後の包含は, 定義通りに左辺の元が右辺に入ることを示しても良い. □

命題 1.4.8 (復習)**.** 写像 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 a で連続であるとし, $c \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下の写像も a で連続である:

(1) 関数の和 $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$.
(2) 関数の定数倍 $cf : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cf(x)$.
(3) 関数の積 $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)g(x)$.

証明. これらの証明は 1 年次の科目でやっていると思われるので省略する. □

1.4.3　連続写像と開集合・閉集合

関数が連続であることと, 開集合や閉集合の間には関係がある. それを紹介するために, まずは写像の像と逆像に関する性質を復習する.

補題 1.4.9. 写像 $f : X \to Y$ および $A \subset X$, $B \subset Y$ を考える. このとき次が成り立つ: $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.

証明. 演習. □

次の定理が, 連続関数と開集合の関係を述べている. 関数が連続であることと, 開集合の逆像が開集合となることは同値である (このような性質を, 開集合による特徴付けという).

定理 1.4.10. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることと次は同値: $\forall O$ ($\mathbb{R}$ 内の開集合), $f^{-1}(O)$ は開集合.

証明. 必要十分を示す. まずは ($\Rightarrow$) を示す. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であるとする.

- (示すことは $\forall O$ ($\mathbb{R}$ 内の開集合), $f^{-1}(O)$ は開.)　$\forall O$ ($\mathbb{R}$ 内の開集合) をとる.
- (示すことは $f^{-1}(O)$ は開. すなわち $\forall a \in f^{-1}(O)$, $\exists \delta > 0 : (a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(O)$.)　$\forall a \in f^{-1}(O)$ をとる.
- (示すことは $\exists \delta > 0 : (a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(O)$.)　逆像の定義より $f(a) \in O$. 仮定より O は開集合なので
  $$\exists \varepsilon > 0 : (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subset O.$$
  仮定より $f(x)$ は $x = a$ で連続なので
  $$\exists \delta > 0 : f((a - \delta, a + \delta)) \subset (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$
- (示すことは $(a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(O)$.)　作り方から
  $$f((a - \delta, a + \delta)) \subset (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subset O.$$
  従って逆像の性質から $(a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(O)$.

以上で証明された. 3 段目において, 示すことの文字を δ にしているのは, 後の都合を考

えてのことである (後に出てくる記号を換えれば ε でもちろん構わない). 次に ($\Leftarrow$) を示す. 仮定を使うためには, 開集合を作る必要がある.

- (示すことは $\forall a \in \mathbb{R}$, f は a で連続.)　$\forall a \in \mathbb{R}$ をとる.
- (示すことは f は a で連続. すなわち $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : f((a-\delta, a+\delta)) \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.)　$\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $\exists \delta > 0 : f((a-\delta, a+\delta)) \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.)　ここで開集合 $O := (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ を考える. 仮定より, その逆像 $f^{-1}(O)$ は開集合. また $f(a) \in O$ より $a \in f^{-1}(O)$. 従って開集合の定義から
  $$\exists \delta > 0 : (a-\delta, a+\delta) \subset f^{-1}(O).$$
- (示すことは $f((a-\delta, a+\delta)) \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.)　逆像の性質より
  $$f(a-\delta, a+\delta) \subset O = (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon).$$

以上で証明された. このくらいの証明を自力で復元できることが, 距離空間の内容を理解しているかどうかの試金石になるだろう. □

連続写像の開集合による特徴付けを使うと, 例えば次の性質を簡単に示すことができる.

系 1.4.11. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とすると, $g \circ f$ も連続.

証明. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とする.

- (示すことは $g \circ f$ が連続. すなわち $\forall O$ ($\mathbb{R}$ 内の開集合), $(g \circ f)^{-1}(O)$ は開.)
  $\forall O$ ($\mathbb{R}$ 内の開集合) をとる.
- (示すことは $(g \circ f)^{-1}(O)$ は開.)　g は連続より $g^{-1}(O)$ は開. さらに, f は連続より $f^{-1}(g^{-1}(O))$ は開. よって $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$ は開集合.

以上で示された. 最後に用いた合成と逆像の関係の証明は演習とする. □

開集合の補集合は閉集合だった. このことを使うと, 連続写像を閉集合を使って特徴付けることもできる.

系 1.4.12. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることと次は同値: $\forall F$ ($\mathbb{R}$ 内の閉集合), $f^{-1}(F)$ は閉集合.

証明. 必要十分を示す. まずは ($\Rightarrow$) を示す. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であるとする. 上の定理より, 任意の開集合の逆像は開集合である.

- (示すことは $\forall F$ ($\mathbb{R}$ 内の閉集合), $f^{-1}(F)$ は閉.)　$\forall F$ ($\mathbb{R}$ 内の閉集合) をとる.
- (示すことは $f^{-1}(F)$ は閉.)　F は閉なので $\mathbb{R} - F$ は開. 仮定より f は連続なので, 逆像 $f^{-1}(\mathbb{R} - F)$ は開. ここで逆像と補集合には次の関係が成り立つ:
  $$\mathbb{R} - f^{-1}(F) = f^{-1}(\mathbb{R} - F).$$

従って, 補集合が開集合なので, $f^{-1}(F)$ は閉集合.

以上で証明された. 念のために, 逆像と補集合の関係を, 簡略の形で証明しておく:

- $x \in \mathbb{R}-f^{-1}(F) \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(F) \Leftrightarrow f(x) \notin F \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}-F \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\mathbb{R}-F)$.

また $(\Leftarrow)$ の証明は, ほとんど同じなので演習とする. □

1.4.4　連続写像とコンパクト性

連続写像とコンパクト集合の関係を調べる. 口語的に述べると, コンパクト集合の連続写像による像はコンパクトになる.

命題 1.4.13. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合とする. このとき $f(K)$ は $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合である.

証明. 示すことは $f(K)$ がコンパクトであること. 仮定に K のコンパクト性があるので, それを使うためには K の開被覆を作る必要がある.

- (示すことは $\forall \mathfrak{U}$ ($f(K)$ の開被覆), $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) : $f(K) \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)
  $\forall \mathfrak{U}$ ($f(K)$ の開被覆) をとる. $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と表す.
- (示すことは $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) : $f(K) \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　記号の簡略化のため,
  $f^{-1}(\mathfrak{U}) := \{f^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$
  とおく. これは K の開被覆である (後で示す). 仮定より K はコンパクトなので, その中から有限個を選べる. すなわち
  $\exists n \in \mathbb{N}, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda : K \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\lambda_i})$.
  これを用いて $\mathfrak{U}' := \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$ とおく. これは有限.
- (示すことは $f(K) \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\mathfrak{U}'$ の取り方と, 逆像と和集合の関係より,
  $K \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\lambda_i}) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i})$.
  よって逆像の性質より $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i} = \bigcup \mathfrak{U}'$.

証明で残されている部分は, $f^{-1}(\mathfrak{U})$ が K の開被覆であること. これを示す.

- (示すことは (i) 開, (ii) 被覆.)
- (i) を示す. (示すことは $\forall \lambda \in \Lambda$, $f^{-1}(U_\lambda)$ は開.)　$\forall \lambda \in \Lambda$ をとる.
- (示すことは $f^{-1}(U_\lambda)$ は開.)　U_λ は開, f は連続なので, $f^{-1}(U_\lambda)$ は開.
- (ii) を示す. (示すことは $K \subset \bigcup f^{-1}(\mathfrak{U})$.)　仮定より $\mathfrak{U}$ は $f(K)$ の被覆なので,
  $f(K) \subset \bigcup \mathfrak{U} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.
  従って $K \subset f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(U_\lambda) = \bigcup f^{-1}(\mathfrak{U})$.

以上で証明された. 何回か使った逆像と和集合の関係の証明は演習とする. □

前章のコンパクト集合の性質と, 今の定理を組み合わせると, 解析学で学んだ次の性質が導かれる.

系 1.4.14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合とする. このとき f は K 上で最大値と最小値をもつ.

証明. 関数 f の K 上での最大値と最小値とは, 像 $f(K)$ の最大値と最小値である. ここで K はコンパクト, f は連続より, $f(K)$ はコンパクト. 前章で示したように, $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合は最大値と最小値をもつ. □

1.4.5　演習問題

問題 1.4.15. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ であることの定義を延べよ. また, f が $x = a$ で連続であることと $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が同値であることを示せ.

問題 1.4.16. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d$ を考える. ただし $c > 0$ とする. このとき, f が連続であることを定義に従って示せ.

問題 1.4.17. 写像 $f : X \to Y$ および $A \subset X$, $B \subset Y$ を考える. このとき次を示せ: $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.

問題 1.4.18. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることと, 任意の開集合の逆像が開集合であることは同値である. これの証明を自力で復元せよ.

問題 1.4.19 (小テスト 5)**.** 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることと, 任意の開集合の逆像が開集合であることは同値である. このことを用いて, 次が連続でないことを示せ:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

問題 1.4.20. 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, および $O \subset Z$ を考える. このとき次を示せ: $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$.

問題 1.4.21. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について, 任意の閉集合の逆像が閉集合であるとする. このとき f は連続であることを示せ.

問題 1.4.22. 写像 $f : X \to Y$, および Y の部分集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を考える. このとき次を示せ: $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda) = f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)$.

問題 1.4.23. 連続写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について, 以下の真偽を考えよ: 開集合の像は開, 閉集合の像は閉, 有界集合の像 (逆像) は有界, コンパクト集合の逆像はコンパクト, ...

第 2 章

ユークリッド空間

ここでは n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考える．前章では, $\mathbb{R}$ 内の開集合, 閉集合, コンパクト部分集合, また $\mathbb{R}$ 上の連続関数等を調べた．これらの概念を $\mathbb{R}^n$ に対しても定義し, その性質を調べる．

2.1 $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離

$\mathbb{R}$ 内の開集合や閉集合を定義する際に, 開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ を用いた．これは別の言い方をすると「x からの距離が ε 未満の点の集合」である．そこで, $\mathbb{R}^n$ 内でこれに対応するものを定義するためには, $\mathbb{R}^n$ 上の (標準的な) 距離が必要となる．

2.1.1 $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離の定義

以下では, $\mathbb{R}^n$ の元を $x = (x_i) = (x_1, \ldots, x_n)$ のように表す．

定義 2.1.1. 次で定義される関数 d を, $\mathbb{R}^n$ 上の 標準的な距離 と呼ぶ:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

ここでもちろん $A^{1/2} = \sqrt{A}$ である (行間バランスを保ために, このような表記をすることが多い)．また, 後に「標準的でない距離」が出てきた際には, 区別するために標準的な距離を d_{st} 等と表記することがある (標準的 = standard).

念のために, $n = 1$ のときには $d(x, y) = |x - y|$ が成り立つ．一般の n のとき, 標準的な距離 d は, $\mathbb{R}^n$ 上のノルムを使って表すこともできる．ここで, $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な内積やノルムは次で定義されていた:

$$\langle x, y\rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad ||x|| := \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

命題 2.1.2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = ||x - y||$.

証明. 直接計算. □

2.1.2 $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離の性質

ここでは $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離の性質を見る. 特に三角不等式が重要. 次はその準備.

補題 2.1.3 (Cauchy-Schwarz の不等式)**.** $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, $|\langle a, b\rangle| \leq ||a|| \cdot ||b||$.

証明. $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ をとる. このとき, 全ての $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$0 \leq ||ta+b||^2 = \langle ta+b, ta+b\rangle = ||a||^2t^2 + 2\langle a, b\rangle t + ||b||^2.$$

従って, これを t の二次式と思って判別式 D を考えると,

$$0 \geq D/4 = \langle a, b\rangle^2 - ||a||^2 \cdot ||b||^2.$$

移項してルートを取れば求める不等式が得られる. □

注意 2.1.4. 上で得られた不等式の両辺を二乗したものを成分で書くと, 次のような見慣れた形 (恐らく通常の Cauchy-Schwarz の不等式) になる:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

次が $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離の基本的な性質. 今後の議論において, 距離の定義式を使うことは実はほとんどなく, 以下に挙げる性質のみを用いる場合が多い.

命題 2.1.5. $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離 d は次をみたす:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) \geq 0$, かつ "$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".
(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = d(y, x)$.
(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.　(これを <u>三角不等式</u> と呼ぶ)

証明. (1), (2) の証明は容易. (3) のみ示す. (示すことは命題に書かれている通り.) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ をとる. すると次が成り立つ:

$$d(x, y) + d(y, z) = ||x-y|| + ||y-z||,$$
$$d(x, z) = ||x-z|| = ||(x-y) + (y-z||).$$

従って $||a|| + ||b|| \geq ||a+b||$ を示せば良い (ここで $a, b \in \mathbb{R}^n$). 両辺の 2 乗を計算すると

$$(||a|| + ||b||)^2 = ||a||^2 + 2||a|| \cdot ||b|| + ||b||^2,$$
$$||a+b||^2 = ||a||^2 + 2\langle a, b\rangle + ||b||^2.$$

従って Cauchy-Schwarz の不等式より, 求める不等式が従う. □

なお, 三角不等式という名前は, この不等式が「三角形の二辺の長さの和は, 他の一辺の長さより大きい」ことを表していることから来ている.

2.1.3 ε 近傍

実数 $\mathbb{R}$ のとき, 開区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ が重要であった. 一般の次元の $\mathbb{R}^n$ の時には, 次の ε-近傍が同じ役割を果たす.

定義 2.1.6. $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ に対して, 次を a の <u>ε-近傍</u> と呼ぶ:

$$U(a;\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < \varepsilon\}.$$

当然ながら, 特に $n=1$ のときは $U(a;\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ が成り立つ. 今後 ε-近傍に関する議論を行うことが多くなるが, とりあえず $n=2$ の時の絵を描いて, 何をやっているか感覚的に理解することは重要.

命題 2.1.7. $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ とする.

(1) $U(x;\varepsilon) \cap U(y;\delta) \neq \emptyset$ であるための必要十分条件は, $d(x,y) < \varepsilon + \delta$.

(2) $U(y;\delta) \subset U(x;\varepsilon)$ であるための必要十分条件は, $d(x,y) + \delta \leq \varepsilon$.

証明. まず (1) を示す. 必要十分を示すため, まず ($\Rightarrow$) を示す. $U(x;\varepsilon) \cap U(y;\delta) \neq \emptyset$ を仮定する.

- (示すことは $d(x,y) < \varepsilon + \delta$.) 仮定より $\exists z \in U(x;\varepsilon) \cap U(y;\delta)$. 従って, 三角不等式より $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \delta$.

次に ($\Leftarrow$) を示す. 場合分けする. $d(x,y) < \varepsilon + \delta$ とする.

- (示すことは $U(x;\varepsilon) \cap U(y;\delta) \neq \emptyset$. すなわち $\exists z \in U(x;\varepsilon) \cap U(y;\delta)$.)
- $d(x,y) < \varepsilon$ のとき, $y \in U(x;\varepsilon) \cap U(y;\delta)$ より従う.
- $d(x,y) < \delta$ のとき, $x \in U(x;\varepsilon) \cap U(y;\delta)$ より従う.
- $d(x,y) \geq \varepsilon, \delta$ のときを考える. 特に $d(x,y) \neq 0$. このとき $d(x,y) - \varepsilon < \delta$ より
  $$\exists t \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 - (\varepsilon/d(x,y)) < t < \delta/d(x,y) \leq 1.$$
  これを用いて $z := tx + (1-t)y$ とおく. 一般に $||cv|| = |c| \cdot ||v||$ (ただし $c \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$) が成り立つことに注意すると,
  $$d(z,x) = ||z-x|| = ||(t-1)x + (1-t)y|| = (1-t)d(y,x) < \varepsilon.$$
  従って $z \in U(x;\varepsilon)$. 同様に $z \in U(y;\delta)$ も確かめられる.

以上で (1) が示された. また (2) の証明は ($\Leftarrow$) の証明は演習とする. ($\Rightarrow$) の証明は省略. 特にやる気のある学生は, やってみても良い. □

2.1.4　演習問題

問題 2.1.8. $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ について, $U(x;\varepsilon) \cap U(y;\delta) \neq \emptyset$ が成り立つとする. このとき $d(x,y) < \varepsilon + \delta$ の証明を自力で復元せよ.

問題 2.1.9. $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ について, $\varepsilon, \delta \leq d(x,y) < \varepsilon + \delta$ が成り立つと仮定する. このとき $U(x;\varepsilon) \cap U(y;\delta) \neq \emptyset$ の証明を完成させよ. また $n = 2$ の時の図も合わせて描け.

問題 2.1.10. $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ について, $d(x,y) + \delta \leq \varepsilon$ が成り立つとする. このとき次を示せ: $U(y;\delta) \subset U(x;\varepsilon)$. ただし $n = 2$ の時の図も描くこと.

2.1.5　中間試験について

6/17(水)–18(木) 周辺の時間に中間試験を行う. 試験範囲は第 1 章の実数のところまで全て. 試験問題は HP および webclass にアップロードする. なお, 試験は「持ち込み可」相当で行う. すなわち, 教科書やノート等を見ても構わないが, 解答中に人間と相談することは禁止する. (あくまで解答中の話であり, 試験前に勉強する時に他人と相談することは, 寧ろ積極的に推奨する. また「問題がアップロードされてた」程度の情報伝達も構わない.)

また, 中間試験に先立ち「事前救済レポート」を提出しても良い. 小テストおよび試験の結果が思わしくなかった場合に, このレポートの点数によって救済される可能性がある. その代わり, 期末試験後には追試等の救済措置は一切行わない. また, 提出されたレポートに書かれた問題は, 実際の中間試験の問題として採用されることがある. どのような問題が出題されるか, 何が大事か, ということを考えるのは効果的な勉強方法である.

問題 2.1.11 (中間試験事前レポート問題, 2020/06/11 締切, 提出任意)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する中間試験問題を予想し, その問題と解答を書け. ただし, レポートは 1 つのファイルにまとめ, 一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙を付けないこと.

(1) 開集合. (2) 閉集合. (3) コンパクト集合. (4) 連続写像.

複数ページのレポートや解答を写真で撮影した場合は, ファイルを 1 つにするためには結合する作業が必要. 特別なソフトがなくても, 「jpg を pdf に変換して結合」あるいは「jpg を word に貼り付けて pdf に変換」など, いろいろなやり方があるので, 適宜検索して調べて欲しい. だが, どうしても無理な場合にはメールで送付も可.

2.2　$\mathbb{R}^n$ 内の開集合

$\mathbb{R}$ 内の部分集合を扱った時には, 開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ を本質的に用いた. $\mathbb{R}^n$ の場合の議論は, それを ε-近傍 $U(x;\varepsilon)$ に置き換えたものである.

2.2.1　内点と内部

実数 $\mathbb{R}$ 内の部分集合の場合と同様に, 端の点や内点を定義したい. 例えば $\mathbb{R}^2$ において円板 $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ を考えると, 円周 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 上の点が端で, $x_1^2 + x_2^2 < 1$ をみたす点が内側. これを定式化すると次のようになる.

定義 2.2.1. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(1) x $(\in \mathbb{R}^n)$ が A の 内点 であるとは, 次が成り立つこと: $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ は A の内点 $\}$ を A の 内部 と呼ぶ.

このように定義すると, 次でみるように, 確かに円板の場合に内点は直観に適したものを表している. 半径を 2 にしているのは, 分数を出さないための調整.

例 2.2.2. $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $(1,0) \in A^\circ$.

(2) $(2,0) \notin A^\circ$.

証明. まず (1) を示す. $x := (1,0)$ とおく. 原点を $o := (0,0)$ で表す.

- (示すことは $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.)　　$\varepsilon := 1$ とおく. すると $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $U(x;\varepsilon) \subset A$. すなわち $\forall z \in U(x;\varepsilon)$, $z \in A$.)　　$\forall z \in U(x;\varepsilon)$ をとる. $z = (z_1, z_2)$ と表す.
- (示すことは $z \in A$. すなわち $z_1^2 + z_2^2 \leq 4$.)　　z の取り方から,
  $$d(o,z) \leq d(o,x) + d(x,z) < 1 + \varepsilon = 2.$$
  従って $z_1^2 + z_2^2 = d(o,z)^2 < 4$.

以上で示された. 次に (2) を示す. $y := (2,0)$ とおく.

- (示すことは $\forall \varepsilon > 0$, $U(y;\varepsilon) \not\subset A$.)　　$\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $U(y;\varepsilon) \not\subset A$. すなわち $\exists z \in U(y;\varepsilon) : z \notin A$.)　　$z := (2 + (\varepsilon/2), 0)$ とおく. すると $d(y,z) = \varepsilon/2 < \varepsilon$ より $z \in U(y;\varepsilon)$.
- (示すことは $z \notin A$.)　　$z = (z_1, z_2)$ とおくと, $z_1^2 + z_2^2 = 4 + 2\varepsilon + (\varepsilon^2/4) > 4$. 従って $z \notin A$.

以上で示された. いずれの場合も, この原稿には描かれていないが, 図は描くこと. □

実数 $\mathbb{R}$ 内の部分集合の内点と同様に, $\mathbb{R}^n$ の場合にも次の性質が成り立つ. すなわち, 内部を取る操作は集合を大きくしない (変わらないか小さくなる). また, 内部を取る操作を 1 回したものと 2 回したものは変わらない.

命題 2.2.3. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.
(2) $U(x;\varepsilon) \subset A$ ならば $U(x;\varepsilon) \subset A^\circ$.
(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

証明. (1), (3) の証明は実数 $\mathbb{R}$ の時と全く同様. ここでは (2) のみ示す. $U(x;\varepsilon) \subset A$ が成り立つと仮定する.

- (示すことは $U(x;\varepsilon) \subset A^\circ$. すなわち $\forall y \in U(x;\varepsilon)$, $y \in A^\circ$.)　$\forall y \in U(x;\varepsilon)$ をとる.
- (示すことは $y \in A^\circ$. すなわち $\exists \delta > 0 : U(y;\delta) \subset A$.)　$\delta := \varepsilon - d(y,x)$ とおく. すると $y \in U(x;\varepsilon)$ より $\delta > 0$.
- (示すことは $U(y;\delta) \subset A$.)　$d(y,x) + \delta = \varepsilon$ なので, 前章の演習問題の結果と仮定を用いて, $U(y;\delta) \subset U(x;\varepsilon) \subset A$.

以上で証明された. □

上記の内部に関する一般的な性質を用いて, 簡単な具体例を見てみる.

例 2.2.4. 内部について, 以下が成り立つ:

(1) $(\mathbb{R}^n)^\circ = \mathbb{R}^n$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.
(2) $U(a;\varepsilon)^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leq \varepsilon\}^\circ = U(a;\varepsilon)$.

証明. (1) は省略. (2) のみを示す. まず $U(a;\varepsilon)^\circ = U(a;\varepsilon)$ については, ($\subset$) は一般論から従う. また, $U(a;\varepsilon) \subset U(a;\varepsilon)$ に上の命題の性質を適用すれば $U(a;\varepsilon) \subset U(a;\varepsilon)^\circ$ が得られるので, ($\supset$) も示される.

次に $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leq \varepsilon\}$ とおいて $A^\circ = U(a;\varepsilon)$ を示す. ($\supset$) の証明は上と同様. すなわち, $U(a;\varepsilon) \subset A$ なので, 先の命題の性質を使えば良い. 最後に $A^\circ \subset U(a;\varepsilon)$ を示す. 補集合を考える.

- (示すことは $\mathbb{R}^n - U(a;\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n - A^\circ$. すなわち $\forall x \in \mathbb{R}^n - U(a;\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^n - A^\circ$.) $\forall x \in \mathbb{R}^n - U(a;\varepsilon)$ をとる.
- (示すことは $x \in \mathbb{R}^n - A^\circ$. すなわち $\forall \delta > 0$, $U(x;\delta) \not\subset A$.)　$\forall \delta > 0$ をとる.
- (示すことは $U(x;\delta) \not\subset A$. すなわち $\exists z \in U(x;\delta) : z \notin A$.)　$t := \delta/(2d(x,a))$

とおき, $z := x + t(x - a)$ と定める. このとき $t > 0$ より,

$$d(z, x) = ||t(x - a)|| = td(x, a) = \delta/2 < \delta$$

であるから, $z \in U(x; \delta)$.

- (示すことは $z \notin A$.)　z の取り方と $x \notin U(a; \varepsilon)$ より,

$$d(z, a) = ||(1 + t)x - (1 + t)a|| = (1 + t)d(x, a) > d(x, a) \geq \varepsilon.$$

従って $z \notin A$.

以上で証明された. ちなみに z は, x を a と逆方向に $\delta/2$ だけ動かした点. □

何度も繰り返すが, 必ず絵を描くこと.

2.2.2 $\mathbb{R}^n$ 内の開集合

実数 $\mathbb{R}$ の場合と同様に開集合を定義する.

定義 2.2.5. A $(\subset \mathbb{R}^n)$ が <u>開集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0$: $U(x; \varepsilon) \subset A$.

次は定義の言い換え.

命題 2.2.6. A $(\subset \mathbb{R}^n)$ が開集合であるための必要十分条件は, $A = A^\circ$ となること.

例 2.2.7. 以下は開集合: $U(a; \varepsilon)$, $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$, ...

証明. 前者の $U(a; \varepsilon)$ が開集合であることは, 実質的に既に示している ($U(a; \varepsilon)^\circ = U(a; \varepsilon)$ なので). ここでは後者を示す. $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ とおく.

- (示すことは $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset A$.)　$\forall x \in A$ をとる.
- (示すことは $\exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset A$.)　$x = (x_1, x_2)$ と表し, $\varepsilon := x_2$ とおく. このとき $x \in A$ なので $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $U(x; \varepsilon) \subset A$. すなわち $\forall z \in U(x; \varepsilon)$, $z \in A$.)　$\forall z \in U(x; \varepsilon)$ をとる.
- (示すことは $z \in A$.)　$z = (z_1, z_2)$ とおく. すると

$$\varepsilon > d(x, z) = ((x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2)^{1/2} \geq |x_2 - z_2|.$$

絶対値を外して変形すると, $z_2 > x_2 - \varepsilon = 0$ が得られる.

以上で証明された. これも図を描けば ε の取り方が自然なことが分かるはず. □

実数 $\mathbb{R}$ の場合と同様に, 次が開集合の基本性質である.

定理 2.2.8. $\mathbb{R}^n$ の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ は開集合.

(2) O_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ が開集合ならば, $\bigcap_{i=1}^m O_i$ も開集合.
(3) O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も開集合.

証明. 全て実数 $\mathbb{R}$ の場合と同様に証明できるので, 演習とする. □

2.2.3　演習問題

問題 2.2.9. 以下の集合の内部が何になるかを予想し, それを示せ (この節で紹介した命題は用いて良い):

(1) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0\}$.
(2) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$.
(3) $\{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (-\infty, 0]\}$.

問題 2.2.10. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. $A^\circ \subset A$ を定義に従って示せ.

問題 2.2.11 (小テスト 6)**.** $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき ε-近傍 $U(a; \varepsilon)$ が開集合であることを, 開集合の定義に従って示せ. ただし, ε-近傍の性質を使う場合には, それも証明すること.

問題 2.2.12. O_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ が $\mathbb{R}^n$ 内の開集合であるとする. このとき $\bigcap_{i=1}^m O_i$ も $\mathbb{R}^n$ 内の開集合であることを示せ.

問題 2.2.13. $\mathbb{R}^n$ 内の無限個の開集合の共通部分は, 開集合になるとは限らない. $n = 2$ のときに反例を挙げよ.

問題 2.2.14. O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が $\mathbb{R}^n$ 内の開集合であるとする. このとき, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も $\mathbb{R}^n$ 内の開集合であることを示せ.

問題 2.2.15. $X, Y \subset \mathbb{R}$ に対して, $X \times Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X,\ y \in Y\}$ と定める. また, $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下のそれぞれの主張に対して, 正しい場合には証明し, 正しくない場合は反例を挙げよ:

(1) $A^\circ \times B^\circ \subset (A \times B)^\circ$.
(2) $A^\circ \times B^\circ \supset (A \times B)^\circ$.

問題 2.2.16. $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, $A^\circ \subset B^\circ$ を示せ.

2.3 $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合

実数 $\mathbb{R}$ の場合と同様に, $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合について, 触点や閉包, 閉集合といった概念を定式化する. 閉集合であることと補集合が開集合が同値となることを示すのが目標.

2.3.1 触点と閉包

触点を定義する. x が A $(\subset \mathbb{R}^n)$ の触点であるとは, x が A のめちゃめちゃ近くにあること. 少し言い換えると, x から少しでも手を伸ばせば A に触れること.

定義 2.3.1. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(1) x $(\in \mathbb{R}^n)$ が A の 触点 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(2) $\overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ は A の触点 $\}$ を A の 閉包 と呼ぶ.

この定義の条件が, めちゃめちゃ近くにあるという直観と合致していることを, 次のような簡単な例で確かめてみる.

例 2.3.2. $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ について, 以下が成り立つ:

(1) $(0,0) \in \overline{A}$.

(2) $(0,-1) \notin \overline{A}$.

証明. まず (1) を示す. $o := (0,0)$ とおく.

- (示すことは $\forall \varepsilon > 0$, $U(o;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.)　$\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $U(o;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. すなわち $\exists z \in U(o;\varepsilon) \cap A$.)　$z := (0, \delta/2)$ とおく. このとき $d(o,z) = \delta/2 < \delta$ より $z \in U(o;\varepsilon)$. また $\delta/2 > 0$ より $z \in A$.

以上で示された. 次に (2) を示す. $x := (0,-1)$ とおく.

- (示すことは $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \cap A = \emptyset$.)　$\varepsilon := 1/2$ とおく. すると $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $U(x;\varepsilon) \cap A = \emptyset$. すなわち $\forall z \in U(x;\varepsilon)$, $z \notin A$.)　$\forall z \in U(x;\varepsilon)$ をとる.
- (示すことは $z \notin A$.)　$z = (z_1, z_2)$ とおくと, $z \in U(x;\varepsilon)$ より
$$\varepsilon > d(z,x) = (z_1^2 + (z_2+1)^2)^{1/2} \geq |z_2 + 1|.$$
絶対値を外すと $z_2 < \varepsilon - 1 = -1/2 < 0$. よって $z \notin A$.

以上で証明された. ここで, (2) の 2 項目で「すなわち $\forall z \in U(x;\varepsilon)$, $z \notin A$」としたのは, 証明の書きやすさの為である. 定義通りに「$\exists z \in U(x;\varepsilon) \cap A$」と仮定して矛盾を導いても, やることは同じ. □

他の触点や閉包の例を調べるために, 一般的な性質を確認しておく. 主張も証明も, 実数 $\mathbb{R}$ の場合と同様なので, 証明は全て演習とする.

命題 2.3.3. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) O $(\subset \mathbb{R}^n)$ が開集合, $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $O \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

この命題を用いて, 触点や閉包の具体例をもう少し調べる. 触点や閉包が何になるかが直観的に分かることと, そうなっていることを厳密に証明できることの, 両方が必要.

例 2.3.4. 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ とすると, $\overline{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$.

(3) $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) \leq \varepsilon\}$ とすると, $\overline{U(a; \varepsilon)} = \overline{A} = A$.

証明. (1) は省略. (2) を示す. $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$ とおき, $\overline{A} = B$ を示す. 集合が等しいことを示すので, 両方向の包含関係を示す. まずは $(\supset)$ から.

- (示すことは $\forall x \in B$, $x \in \overline{A}$.)　$\forall x \in B$ をとる.
- (示すことは $x \in \overline{A}$. すなわち $\forall \varepsilon > 0$, $U(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.)　$\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $U(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. すなわち $\exists z \in U(x; \varepsilon) \cap A$.)　$x = (x_1, x_2)$ とおくと, $x \in B$ より $x_2 \geq 0$. ここで $z := (x_1, x_2 + (\varepsilon/2))$ とおけば, 条件をみたす.

次に $\overline{A} \subset B$ を示す. このような証明の場合は, 補集合を考えと楽になることが多い (そのまま示して背理法を使うのと実質的に同じ).

- (示すことは $\mathbb{R}^n - B \subset \mathbb{R}^n - \overline{A}$. すなわち $\forall x \in \mathbb{R}^n - B$, $x \in \mathbb{R}^n - \overline{A}$.)　$\forall x \in \mathbb{R}^n - B$ をとる.
- (示すことは $x \in \mathbb{R}^n - \overline{A}$. すなわち $\exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \cap A = \emptyset$.)　$x = (x_1, x_2)$ とおくと, $x \notin B$ より $x_2 < 0$. ここで $\varepsilon := -x_2$ とおく. すると $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $U(x; \varepsilon) \cap A = \emptyset$. すなわち $\forall y \in U(x; \varepsilon)$, $y \notin A$.)　$\forall y \in U(x; \varepsilon)$ をとる.
- (示すことは $y \notin A$.)　$y = (y_1, y_2)$ とおくと,
$$\varepsilon > d(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2} \geq |x_2 - y_2|.$$
絶対値を外して変形すると $y_2 < \varepsilon - x_2 = 0$. よって $y \notin A$.

以上で (2) が示された. 次に (3) を示す. ここでは $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) \leq \varepsilon\}$ とおく. このとき $\overline{A} = A$ の証明は (2) と同様なので演習とする. $\overline{U(a; \varepsilon)} = A$ を示す. まず $(\supset)$

を示す.

- (示すことは $A \subset \overline{U(a;\varepsilon)}$. すなわち $\forall x \in A$, $x \in \overline{U(a;\varepsilon)}$.)　$\forall x \in A$ をとる.
- (示すことは $x \in \overline{U(a;\varepsilon)}$. すなわち $\forall \delta > 0$, $U(x;\delta) \cap U(a;\varepsilon) \neq \emptyset$.)　$\forall \delta > 0$ をとる.
- (示すことは $U(x;\delta) \cap U(a;\varepsilon) \neq \emptyset$.)　$x \in A$ より $d(x,a) \leq \varepsilon < \varepsilon + \delta$. よって ε-近傍の性質より $U(x;\delta) \cap U(a;\varepsilon) \neq \emptyset$.

最後に ($\subset$) を示す. 補集合を考えて定義通りに示すこともできるが, ここでは次のような簡略型で証明する.

- (示すことは $\overline{U(a;\varepsilon)} \subset A$.)　定義より $U(a;\varepsilon) \subset A$. よって両辺の閉包を取ると, $A = \overline{A}$ を用いて, $\overline{U(a;\varepsilon)} \subset \overline{A} = A$.

ここで, 一般に「$X \subset Y$ ならば $\overline{X} \subset \overline{Y}$」が成り立つことを用いたが, その証明は演習とする. 以上で (3) も証明された. □

例 2.3.5. 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $A := \{a\}$ (一点集合) に対して, $\overline{A} = A$.
(2) $A := \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ (x 軸) に対して, $\overline{A} = A$.

証明. まずは (1) の証明の方針を述べる. $a \in \mathbb{R}^n$ とし, $A = \{a\}$ とする. このとき $A \subset \overline{A}$ は一般論から従う. 逆を示すために, 今までと同様に補集合を考える.

- (示すことは $\mathbb{R}^n - A \subset \mathbb{R}^n - \overline{A}$. すなわち $\forall x \in \mathbb{R}^n - A$, $x \in \mathbb{R}^n - \overline{A}$.)　$\forall x \in \mathbb{R}^n - A$ をとる.
- (示すことは $x \in \mathbb{R}^n - \overline{A}$. すなわち $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \cap A = \emptyset$.)　$\varepsilon := d(x,a)$ とおく. すると $x \notin A$ より $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $U(x;\varepsilon) \cap A = \emptyset$.)　$d(x,a) = \varepsilon$ より $a \notin U(x;\varepsilon)$. ここで $A = \{a\}$ なので $U(x;\varepsilon) \cap A = \emptyset$.

以上で (1) が示された. また (2) の証明は, (1) と同様なので演習とする. □

2.3.2 閉集合の定義

実数 $\mathbb{R}$ 内の部分集合の場合と同様に, 閉集合を定義する. 図形的な意味は「端が全てある集合」あるいは「境界を全て含む集合」である.

定義 2.3.6. A ($\subset \mathbb{R}^n$) が <u>閉集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} = A$.

2.3.3　閉集合の性質

ここでは閉集合の性質として, まずは開集合との関係を見る. 主張も証明も, 実数 $\mathbb{R}$ 内の閉集合の場合と全く同様である.

命題 2.3.7. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 次が成り立つ: $\mathbb{R}^n - \overline{A} = (\mathbb{R}^n - A)^\circ$.

証明. 証明は $\mathbb{R}$ の場合とほとんど同様. □

定理 2.3.8. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, A が閉集合であるための必要十分条件は, $\mathbb{R}^n - A$ が開集合となること.

証明. 上の命題を使えば良い. □

定理 2.3.9. $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^n$ は閉集合.
(2) F_i $(i = 1, \ldots, m)$ が閉集合ならば, $\bigcup_{i=1}^m F_i$ も閉集合.
(3) F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

証明. $\mathbb{R}$ 内の閉集合の場合と同様に, 補集合をとって開集合の性質に帰着すれば良い. □

2.3.4　演習問題

問題 2.3.10. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき次を示せ: $A \subset \overline{A}$.

問題 2.3.11 (小テスト 7)**.** $O, A \subset \mathbb{R}^n$ とし, O は開集合であるとする. このとき次を示せ: $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $O \cap A \neq \emptyset$.

問題 2.3.12. $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき $\overline{A} \subset \overline{B}$ を示せ.

問題 2.3.13. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 以下を示せ:

(1) $\mathbb{R}^n - \overline{A} = (\mathbb{R}^n - A)^\circ$.
(2) $\overline{\mathbb{R}^n - A} = \mathbb{R}^n - A^\circ$.

問題 2.3.14. $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合に対して, 閉集合の補集合の性質と開集合の性質を用いて, 以下を示せ:

(1) F_i $(i = 1, \ldots, m)$ が閉集合ならば, $\bigcup_{i=1}^m F_i$ も閉集合.
(2) F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

問題 2.3.15. $X, Y \subset \mathbb{R}$ に対して, 次のように定義する:

$$X \times Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

また, $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下のそれぞれの主張に対して, 正しい場合には証明し, 正しくない場合は反例を挙げよ:

(1) $\overline{A} \times \overline{B} \subset \overline{A \times B}$.

(2) $\overline{A} \times \overline{B} \supset \overline{A \times B}$.

2.4　$\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合

$\mathbb{R}^n$ 内の部分集合がコンパクトであるとは, 直観的に言うと「小さくまとまっている」こと. これを開被覆を用いて厳密に定義し, 有界閉集合と同値であることを示す.

2.4.1　コンパクト部分集合の定義

ここでは $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合の定義を述べる. 方針は $\mathbb{R}$ の場合と全く同じ.

定義 2.4.1. $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \subset \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合族とする. $\mathfrak{U}$ が $A\ (\subset \mathbb{R}^n)$ の開被覆 (**open cover**) であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, U_λ は開集合,

(ii) $A \subset \bigcup \mathfrak{U}$.

ここで集合族の和集合は $\bigcup \mathfrak{U} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ で定義されていた. この開被覆を用いてコンパクト性を定義する.

定義 2.4.2. $A\ (\subset \mathbb{R}^n)$ が コンパクト部分集合, あるいは単に コンパクト であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U}$ (A の開被覆), $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) : $A \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.

開被覆を $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を表すとき, $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ がであると有限とすると, 次が成り立つ: $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Lambda : \mathfrak{U}' = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_m}\}$. 実数 $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合の場合もそうであったが, このことは今後の証明中で繰り返し用いる.

2.4.2　コンパクト部分集合の例

ここでは $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合の例を紹介する. まずはコンパクトでない例から. $\mathbb{R}$ の場合と同様に, コンパクトでないことは定義通りに示すことができる場合が多い.

例 2.4.3. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [0, +\infty)\}$ は $\mathbb{R}^2$ 内のコンパクト部分集合でない.

証明. 定義通りに示す. 考えている集合を A とおく.

- (示すことは $\exists \mathfrak{U}$ (A の開被覆) : $\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限), $A \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, $U_k := \{(x_1, x_2) \mid x_2 < k\}$ と定め, $\mathfrak{U} := \{U_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ とおく. このとき $\mathfrak{U}$ は A の開被覆である (後で示す).
- (示すことは $\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限), $A \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) をとる.

- (示すことは $A \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\mathfrak{U}'$ は有限より,

  $$\exists m, \exists k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N} : \mathfrak{U}' = \{U_{k_1}, \dots, U_{k_m}\}.$$

  従って $R := \max\{k_1, \dots, k_m\}$ とおくと $\bigcup \mathfrak{U}' = \{(x_1, x_2) \mid x_2 < R\} \not\supset A$.

以上で示された. 最後に上で定めた $\mathfrak{U}$ が A の開被覆であることを示す.

- (示すことは (i) 開であること, (ii) 被覆であること.)
- (i) を示す. (示すことは $\forall k$, U_k は開集合.)　$\forall k$ をとる.
- (示すことは U_k は開集合.)　$U_k = \{(x_1, x_2) \mid x_2 < k\}$ より, これは開集合.
- (ii) を示す. (示すことは $A \subset \bigcup \mathfrak{U}$.)　$\mathfrak{U}$ の定め方から $\bigcup \mathfrak{U} = \mathbb{R}^2 \supset A$.

以上で全て示された. 集合族の和集合については, 不確かな場合は示しておくと良い.　□

後に示すように, $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合について, コンパクトと有界閉は同値である. 上の例は (まだ有界の定義はしていないが) 有界でない例であった. 次に有界だが閉集合でない例を挙げる.

例 2.4.4. $a \in \mathbb{R}^n$ とする. このとき $U(a; 1)$ は $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合でない.

証明. コンパクトでないことを示すので, 良い感じの開被覆を作らなくてはならない. 今の場合だと例えば $\mathfrak{U} := \{U(a; r) \mid r \in (0, 1)\}$ などとすれば良い ($k \in \mathbb{N}$ として半径を $1/k$ にしても良い). 詳しい証明は演習とする.　□

以下では $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合の例を挙げる. 一般にコンパクトであることの証明は, 大変なことが多い. しかし有限集合の場合は比較的容易.

例 2.4.5. $\mathbb{R}^n$ 内の有限部分集合はコンパクトである.

証明. 有限集合は $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ と表せる.

- (示すことは $\forall \mathfrak{U}$ (A の開被覆), $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) : $A \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\forall \mathfrak{U}$ (A の開被覆) をとる.
- (示すことは $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) : $A \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とおく. すると被覆の定義より $A \subset \bigcup \mathfrak{U} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. 従って, 各 $a_i \in A$ に対して, $\exists \lambda_i \in \Lambda$: $a_i \in U_{\lambda_i}$. これを使って $\mathfrak{U}' := \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_k}\}$ とおく. $\mathfrak{U}'$ は定義より有限.
- (示すことは $A \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\mathfrak{U}'$ の定め方より $\bigcup \mathfrak{U}' = \bigcup_{i=1}^k U_{\lambda_i} \supset \bigcup_{i=1}^k \{a_i\} = A$.

以上で示された. 要するに, k 点集合ならば開集合 k 個あれば被覆できる, という話.　□

次は, 後の議論でも必要となる例なので, 命題にしておく. しかし証明は比較的面倒なので, 省略して主張だけ紹介する.

命題 2.4.6. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\ (\forall i)\}$ は $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合.

証明. 閉区間 $[a,b]$ は $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合であった. これを用いて証明するが, ここでは詳細は省略する. 後期の授業において, より一般的な設定で証明されることになると思われる (位相空間において, コンパクトとコンパクトの直積がコンパクト, という定理が紹介される予定であり, この命題はその特別な場合になっている). □

2.4.3 コンパクト部分集合の性質

ここでは $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合について, コンパクトであることと有界閉集合であることが同等であることを示す. 閉集合はすでに定義されている. 有界集合は次のように定義する.

定義 2.4.7. A $(\subset \mathbb{R}^n)$ が 有界 であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in \mathbb{R}^n$, $\exists R > 0$: $A \subset U(a;R)$.

ちなみに A が有界であることは次と同値: $\exists R > 0$: $A \subset U(0;R)$. ただし 0 は $\mathbb{R}^n$ の零ベクトルである. もちろん 0 でなくても固定されたベクトルなら何でも良い.

命題 2.4.8. K を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合とする. このとき K は有界閉集合である.

証明. 有界であることの証明は, 例えば開被覆として $\mathfrak{U} = \{U(0;k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ を取ってコンパクト性を用いればできる. 閉集合であることの証明は, $\mathbb{R}$ の場合と同様にすればできる. コンパクト部分集合 K が閉集合でないと仮定する. すると $\exists a \in \overline{K}$: $a \notin K$. これに対して,

$$\mathfrak{U} := \{U_r \mid r > 0\}, \quad \text{ただし } U_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) > r\}$$

という開被覆を考えて, コンパクト性を用いれば良い. 詳細は演習とする. □

以上でコンパクトならば有界閉が示された. 以下ではその逆を示す. そのためには「コンパクト内の閉集合はコンパクト」という命題が必要.

命題 2.4.9. K を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合, F を $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合とし, $F \subset K$ が成り立つとすると, F はコンパクト集合である.

証明. $\mathbb{R}$ の場合の対応する命題と全く同じ方法で証明できる. □

定理 2.4.10. K $(\subset \mathbb{R}^n)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, K が有界閉集合となること.

証明. コンパクトなら有界閉は既に示した. 逆を示す. K $(\subset \mathbb{R}^n)$ が有界閉集合であるとする. 有界性より $\exists R > 0$: $K \subset U(0;R)$. ここで次のようにおく:

$$K' := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in [-R, R] \ (\forall i)\}.$$

すると K' はコンパクトであり, $K \subset U(0;R) \subset K'$ をみたす．よって K は, コンパクト集合 K' 内に含まれる閉集合なので, コンパクトである． □

2.4.4　演習問題

問題 2.4.11. $U_k = \{(x_1, x_2) \mid x_2 < k\}$ とする．このとき $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k = \mathbb{R}^2$ を示せ．

問題 2.4.12. $a \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき $U(a;1)$ は $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合でないことを示せ．

問題 2.4.13 (小テスト 8)**.** $A, B \subset \mathbb{R}$ とし, $A \times B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in A,\ x_2 \in B\}$ と定める．このとき, $A \times B$ が $\mathbb{R}^2$ 内のコンパクト部分集合ならば, A は $\mathbb{R}$ 内のコンパクト部分集合であることを定義に従って示せ．ただし $B \neq \emptyset$ とする．また, U が $\mathbb{R}$ 内の開集合のとき, $U \times \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}^2$ 内の開集合であることは, ここでは認めて用いても良い．

問題 2.4.14. A $(\subset \mathbb{R}^n)$ が有界であるとする．このとき次を示せ: $\exists R > 0 : A \subset U(0;R)$. ただしここで, $U(0;R)$ の中の 0 は $\mathbb{R}^n$ の零ベクトル．

問題 2.4.15. A を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合とする．本文中の命題に書かれた略証を参考して, A が有界であることと閉集合であることを示せ．

問題 2.4.16. K を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合, F を $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合とし, $F \subset K$ が成り立つとする．このとき F が $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合であることを, $\mathbb{R}$ の場合の証明を参考にして示せ．

2.5　$\mathbb{R}^n$ 上の連続写像

ここでは写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であることを定義し, その例と性質を調べる. 実数 $\mathbb{R}$ の場合と同様に, 連続写像は開集合を用いて特徴付けることができる. また, この特徴付けを用いて, 様々な性質が導かれる.

2.5.1　連続写像の定義

一変数の場合と同様に, 連続性は ε-近傍を用いて定義する. 条件の意味も同様で, 連続とは「入力の誤差を小さくすれば出力の誤差も小さくできる」こと.

定義 2.5.1. $a \in \mathbb{R}^n$ とする. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が <u>点 a で連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :\ f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.

当然ながら $n = m = 1$ のときには, 以前の定義と一致する. 写像そのものが連続でことは, 定義域の全ての点で連続であることと定義する.

定義 2.5.2. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in \mathbb{R}^n$, f は a で連続.

2.5.2　連続写像の例

ここでは, 連続であることを定義に従って証明できるような, 極めて簡単な例を挙げる. まずは初めに恒等写像が連続であることを確かめておく.

例 2.5.3. 恒等写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto x$ は連続.

証明. 練習のために定義に従って示す.

- (示すことは $\forall a \in \mathbb{R}^n$, f は a で連続.)　 $\forall a \in \mathbb{R}^n$ をとる.
- (示すことは f は a で連続. すなわち $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :\ f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.) $\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $\exists \delta > 0 :\ f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.)　 $\delta := \varepsilon$ とおく. すると $\delta > 0$.
- (示すことは $f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.)　 f は恒等写像なので,
  $$f(U(a;\delta)) = U(a;\delta) = U(f(a);\varepsilon).$$

以上で示された. □

次に定値写像, すなわち像が一点集合となるような写像を考える. これは恒等写像とは

違って極端な連続写像なので, 様々な主張の反例を考える際によく登場する.

例 2.5.4. 定値写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto b$ は連続. ここで $b \in \mathbb{R}^m$ は固定された元.

証明. 練習のために定義に従って示す.

- (示すことは $\forall a \in \mathbb{R}^n$, f は a で連続.) $\forall a \in \mathbb{R}^n$ をとる.
- (示すことは f は a で連続. すなわち $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.) $\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $\exists \delta > 0 : f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.) $\delta := 1$ とおく. すると $\delta > 0$.
- (示すことは $f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.) f は定値写像なので,
  $f(U(a;\delta)) = \{b\} \subset U(b;\varepsilon) = U(f(a);\varepsilon)$.

以上で示された. 最後の包含は, 左辺の任意の元が右辺に入ることを示しても良い. □

さらに, 一変数では登場しない, 多変数だから作ることができる連続写像を紹介する. その最初の例として射影を挙げる. ちなみに $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^k$ への射影でも連続である.

例 2.5.5. $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への自然な射影は連続. ただしここで, 各 $k \in \{1, \ldots, n\}$ について, 写像 $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$ を (第 k 成分への) 自然な射影という.

証明. 定義に従って示す.

- (示すことは $\forall a \in \mathbb{R}^n$, π_k は a で連続.) $\forall a \in \mathbb{R}^n$ をとる.
- (示すことは π_k は a で連続.
  すなわち $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \pi_k(U(a;\delta)) \subset U(\pi_k(a);\varepsilon)$.) $\forall \varepsilon > 0$ をとる.
- (示すことは $\exists \delta > 0 : \pi_k(U(a;\delta)) \subset U(\pi_k(a);\varepsilon)$.) $\delta := \varepsilon$ とおく. すると $\delta > 0$.
- (示すことは $\pi_k(U(a;\delta)) \subset U(\pi_k(a);\varepsilon)$.
  すなわち $\forall y \in \pi_k(U(a;\delta))$, $y \in U(\pi_k(a);\varepsilon)$.) $\forall y \in \pi_k(U(a;\delta))$ をとる.
- (示すことは $y \in U(\pi_k(a);\varepsilon)$.) 像の定義より $\exists x \in U(a;\delta) : y = \pi_k(x)$. ここで成分を用いて $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ と表すと,
  $|y - \pi_k(a)| = |x_k - a_k| \leq (\sum_{i=1}^n (x_i - a_i))^{1/2} = d(x,a) < \delta = \varepsilon$.
  従って $y \in U(\pi_k(a);\varepsilon)$.

以上で証明された. 自力で証明を復元する場合には $n = 2$, $k = 1$ 等としても良い. □

多変数だから作ることができる他の例として, 包含写像を挙げる. これも同じく, $\mathbb{R}^k$ の $\mathbb{R}^n$ への包含写像でも連続になる.

例 2.5.6. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^m$ への自然な包含写像は連続. ただしここで, 各 $k \in \{1, \ldots, m\}$ について, 写像 $\iota_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m : x \mapsto xe_k$ (第 k 成分が x, 他は 0) を (第 k 成分への) 自然な包含写像という.

証明. 証明は先のものと同様なので演習とする. ここで, 任意の $x, a \in \mathbb{R}$ に対して

$$d(\iota_k(x), \iota_k(a)) = ||\iota_k(x) - \iota_k(a)|| = ||xe_k - ae_k|| = |x - a| = d(x, a)$$

となることに注意すると, あとは自動的に証明できるはず. □

もう少し複雑な連続写像の例, あるいはそれを構成するための命題は, 連続写像の一般的な性質を見た後で紹介する. ちなみに, 与えられた写像の連続性の証明は, 一般には面倒な場合が多い.

2.5.3　連続写像の性質 - 開集合等との関係

一般次元のユークリッド空間における連続写像についても, 一変数の場合と全く同様の性質が成り立つ. まずは開集合を使った特徴付けを与える.

定理 2.5.7. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O : \mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f^{-1}(O) : \mathbb{R}^n$ 内の開集合.

証明. 一変数の場合の証明と全く同様なので, 演習とする. □

開集合による特徴付けを用いると, 連続写像に関する様々な性質が導かれる. 例えば, 開集合と閉集合は関係していたので, 連続写像と閉集合の関係が得られる.

系 2.5.8. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall F : \mathbb{R}^m$ 内の閉集合, $f^{-1}(F) : \mathbb{R}^n$ 内の閉集合.

証明. 一変数の場合の証明と全く同様なので, 演習とする. □

コンパクト性は開被覆を使って定義されていたので, 開集合と関係がある. このことから, 連続写像とコンパクト部分集合の関係も得られる.

系 2.5.9. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を連続写像とし, K を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト部分集合とする. このとき $f(K)$ は $\mathbb{R}^m$ 内のコンパクト部分集合である.

証明. 一変数の場合の証明と全く同様なので, 演習とする. □

ちなみに連続写像によるコンパクト部分集合の像はコンパクトとは限らない. 反例は思い付けば簡単なので, 各自で考えてみること.

2.5.4　連続写像の性質

ここでは, 既知の連続写像から新しい連続写像を構成する方法を紹介する (もちろん全てではない). まずは合成写像に関する性質から見る.

系 2.5.10. 連続写像と連続写像の合成は連続．すなわち，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ を連続写像とすると，$g \circ f$ も連続．

証明．開集合の逆像が開集合となることが，連続であることの同値条件であった．これを使えば簡単に示すことができる．□

次の命題は，値域の次元が 1 のものが分かっていれば，値域が一般次元のものも分かる，ということを主張している．要するに，連続関数を並べれば連続写像が作れる．

命題 2.5.11. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対し，$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ と表す．このとき，f が連続であるための必要十分条件は，次が成り立つこと：$\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続．

証明．まず ($\Rightarrow$) は容易に示すことができる．写像 f が連続であるとする．このとき，各 $i \in \{1, \ldots, m\}$ について $f_i = \pi_i \circ f$ である．ここで自然な射影 π_i は連続だったので，連続と連続の合成となり，f_i は連続である．次に ($\Leftarrow$) を示すが，簡単のために $m = 2$ の場合だけを考える．すなわち $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ とする．

- (示すことは $\forall a \in \mathbb{R}^n$, f は a で連続.)　$\forall a \in \mathbb{R}^n$ をとる．
- (示すことは f は a で連続．すなわち $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.)
  $\forall \varepsilon > 0$ をとる．
- (示すことは $\exists \delta > 0 : f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.)　仮定より f_1, f_2 は a で連続なので，$\varepsilon' := \varepsilon/\sqrt{2}$ とおくと，
  $$\exists \delta_i > 0 : f_i(U(a;\delta_i)) \subset U(f_i(a);\varepsilon').$$
  ここで $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおく．すると $\delta > 0$.
- (示すことは $f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$．すなわち $\forall y \in f(U(a;\delta))$, $y \in U(f(a);\varepsilon)$.)
  $\forall y \in f(U(a;\delta))$ をとる．
- (示すことは $y \in U(f(a);\varepsilon)$．すなわち $d(y, f(a)) < \varepsilon$.)　像の定義より，
  $$\exists x \in U(a;\delta) : y = f(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$
  また $d(x, a) < \delta \leq \delta_i$ なので，δ_i の決め方から $f_i(x) \in U(f_i(a);\varepsilon')$．よって
  $$d(y, f(a))^2 = (f_1(x) - f_1(a))^2 + (f_2(x) - f_2(a))^2 < (\varepsilon')^2 + (\varepsilon')^2 = \varepsilon.$$

以上で証明された．ここで $\varepsilon' = \varepsilon/\sqrt{2}$ とおいた理由は，平面内の円と内接する正方形を考えると分かる．この係数は $m > 2$ のときは変える必要があることに注意する．いずれにしても $U(f(a);\varepsilon)$ の図を描いて考えると良い．□

2.5.5　演習問題

問題 2.5.12. 以下の写像が連続であることを, 定義に従って示せ:

(1) 射影 $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1$;
(2) 射影 $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$;
(3) 包含写像 $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$;
(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$.

問題 2.5.13 (小テスト 9)**.** 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるとする. このとき, 任意の開集合の逆像が開集合であることを定義に従って示せ.

問題 2.5.14. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について, 任意の開集合の逆像が開集合であるとする. このとき f は連続写像であることを示せ.

問題 2.5.15. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるための必要十分条件は, 任意の閉集合の逆像が閉集合となることである. これを連続写像と開集合の関係を用いて示せ.

問題 2.5.16. コンパクト部分集合の連続写像による像はコンパクトである. この主張を正確に述べた上で示せ.

第 3 章

距離空間

前章までででは, ユークリッド空間における開集合, 閉集合, コンパクト部分集合, 連続写像を調べた. ここではユークリッド空間を更に一般化した「距離空間」を導入し, これまでに登場した諸概念を拡張していく. ユークリッド空間においても距離空間においても, 定義は実はほとんど同様だが, 成り立つ性質に違いが現れることがある.

3.1 距離空間

ここでは, ユークリッド空間を一般化した「距離空間」の概念を定義する. ユークリッド空間やその中の部分集合は距離空間の例となるが, ここでは, それ以外にも様々な例が含まれることを紹介する.

3.1.1 距離空間の定義

ユークリッド空間には, 標準的な距離が備わっていた. 開集合等の諸概念を定義する際には, この距離を本質的に用いた. ここでは一般の集合に対して「距離」の概念を導入する. ただし, ある距離が自然に定まる訳ではない. 点を二つ与えたら実数が決まるものであって, 然るべき性質をもつものを「距離」と呼ぶことにする, という形で定義する.

定義 3.1.1. X を集合とする. 関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が 距離 または 距離関数 であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ かつ “$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$”.

(ii) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

この定義の条件 (iii) に現れる不等式を 三角不等式 と呼ぶ. ユークリッド空間の場合

と同様に, 三角形の二辺の長さの和は他の一辺の長さより大きい, ということを意味する (一般の距離空間における「三角形」は定義していないが). また, 集合 X と距離 d の組 (X, d) を <u>距離空間</u> と呼ぶ. 特に断らない限り, 距離空間 (X, d) というときには, X が空集合である場合は除外されていると考えて差支えない.

3.1.2　距離空間の例

ここでは距離空間の例を紹介する. 同じ集合 X の上にいくつかの異なる距離が入ることがある. 例えば, ユークリッド空間の標準的な距離は上の意味でも距離だが, それだけとは限らない.

例 **3.1.2.** 以下は $\mathbb{R}^n$ 上の距離である:

(1) 標準的な距離 $d_{\mathrm{st}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$.

(2) $d_{\max} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \max\{|x_i - y_i| \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

証明. 標準的な距離に関しては, ユークリッド空間の章で示している. ここでは (2) について示す. 条件 (i), (ii), (iii) を示す必要がある. まずは (i) から.

- (示すことは (i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d_{\max}(x, y) \geq 0$ かつ "$d_{\max}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ をとる.
- (示すことは $d_{\max}(x, y) \geq 0$ かつ "$d_{\max}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".)
  全ての $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して次が成り立つ:
  $$0 \leq |x_i - y_i| \leq d_{\max}(x, y).$$
  従って前者の主張 $d_{\max}(x, y) \geq 0$ が成り立つ. また, $d_{\max}(x, y) = 0$ であることは, x と y の全ての成分が一致することと同値なので, 後者の主張も成り立つ.

条件 (ii) の証明は明らかなので省略. 最後に (iii) を示す.

- (示すことは (iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $d_{\max}(x, y) + d_{\max}(y, z) \geq d_{\max}(x, z)$.) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ をとる.
- (示すことは $d_{\max}(x, y) + d_{\max}(y, z) \geq d_{\max}(x, z)$.)　考えている距離 $d_{\max}$ の定義より $\exists k \in \{1, \ldots, n\} : d_{\max}(x, z) = |x_k - z_k|$. これを用いると,
  $$d_{\max}(x, z) = |x_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \leq d_{\max}(x, y) + d_{\max}(y, z).$$

以上で証明された. ここで用いた絶対値の不等式は, $\mathbb{R}$ 上の標準的距離に関する三角不等式に他ならない. □

次の命題により, 距離空間の部分集合には自然に距離が入る. これを使うと, 例えば曲線や曲面, 球面やトーラス面なども距離空間となる.

命題 3.1.3. (X,d) を距離空間, $A \subset X$ とする. このとき $d_A := d|_{A\times A}$ は A 上の距離である (これを 部分距離 と呼ぶ).

証明. 明らか. 気になる場合には $A \neq \emptyset$ くらいは仮定しても良い. □

次に, 極端な距離空間の典型例である離散距離を紹介する. ユークリッド空間で成り立つ性質が一般の距離空間でも成り立つかどうかを判定するときに, まずは離散距離で確認するというのは常套手段.

命題 3.1.4. 任意の集合 X に対して, 次で定義される d_∞ は距離である (これを 離散距離 と呼ぶ):

$$d_\infty : X \times X \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & (\text{if } x = y), \\ 1 & (\text{if } x \neq y). \end{cases}$$

証明. 演習とする. 同じく気になる場合は $X \neq \emptyset$ だと思って良い. □

これ以外にも, 関数全体の空間の上の距離, 群の上の距離, 統計におけるデータとデータの間の距離, さらに複雑なものとしては距離空間と距離空間の間の距離, なども定義することができる. このように, 距離空間の概念は数学のかなり広い範囲で登場する.

3.1.3 距離空間における ε-近傍

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の場合と同様に, 距離空間においても, 様々な概念を定義する際に ε-近傍を用いる.

定義 3.1.5. (X,d) を距離空間とする. $a \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して, 次を a の ε**-近傍** と呼ぶ:

$$U_X(a;\varepsilon) := \{x \in X \mid d(x,a) < \varepsilon\}.$$

当然ながら ε-近傍は距離 d にも依存するので, 本来ならば $U_{(X,d)}(a;\varepsilon)$ のような記号で表すべきである. しかし, 記号が煩雑になりすぎるのもよくないので, ある程度省略して表す. 単に $U(a;\varepsilon)$ と書く場合もある.

命題 3.1.6. (X,d) を距離空間とし, $x,y \in X$, $\varepsilon, \delta > 0$ とする.

(1) $U_X(x;\varepsilon) \cap U_X(y;\delta) \neq \emptyset$ ならば $d(x,y) < \varepsilon + \delta$.
(2) $d(x,y) + \delta \leq \varepsilon$ ならば $U_X(y;\delta) \subset U_X(x;\varepsilon)$.

証明. いずれも三角不等式を使えば証明できる. (1) の証明は $\mathbb{R}^n$ の章で紹介したものと同様. (2) の証明は, $\mathbb{R}^n$ の章の小テスト問題の中で実質的に示すはず. □

上の命題の逆は, 一般の距離空間ではいずれも成り立たない. 例えば離散距離空間で反例が構成できるので, 各自考えてみるとよい. (ヒント: 離散距離空間の ε-近傍がどのような形になるかをまず考えよ. 例えば $\varepsilon = 1, 2$ だと...)

3.1.4　演習問題

問題 3.1.7. 離散距離 d_∞ が三角不等式をみたすことを示せ.

問題 3.1.8. 次が $\mathbb{R}^n$ 上の距離であることを示せ (これを マンハッタン距離 と呼ぶ):

$$d(x, y) := \textstyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

問題 3.1.9. 次が $\{0, 1\}^n$ 上の距離であることを示せ (これを ハミング距離 と呼ぶ):

$$d(x, y) := \#\{i \mid x_i \neq y_i\}.$$

問題 3.1.10. $\mathbb{R}^2$ 上の標準的な距離 d_{st}, $d_{\max}$, 離散距離 d_∞, マンハッタン距離に関して, それぞれの $U(0; \varepsilon)$ (零ベクトル 0 の ε-近傍) を図示せよ.

問題 3.1.11. (X, d_∞) を離散距離空間とする. このとき以下の主張はいずれも正しくない. それぞれについて反例を挙げよ:

(1) $d_\infty(x, y) < \varepsilon + \delta$ ならば $U_X(x; \varepsilon) \cap U_X(y; \delta) \neq \emptyset$.

(2) $U_X(y; \delta) \subset U_X(x; \varepsilon)$ ならば $d_\infty(x, y) + \delta \leq \varepsilon$.

3.2 距離空間内の開集合

以下では特に断らない限り (X,d) を距離空間とする．ここでは (X,d) 内の部分集合の内点や内部を定義し, 開集合を考えていく．一般論は $\mathbb{R}^n$ の場合とほぼ同様だが, X や d に取り方に応じて何が開集合であるかが変わることがある, ということに注意が必要.

3.2.1 距離空間における内点と内部

距離空間内の部分集合の内点や内部を定義する．定義そのものは $\mathbb{R}^n$ の時と全く同様. 距離空間 (X,d) における ε-近傍を $U_X(a;\varepsilon)$ で表す.

定義 3.2.1. $A \subset X$ とする.

(1) x $(\in X)$ が A の <u>内点</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists \varepsilon > 0 : U_X(x;\varepsilon) \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in X \mid x$ は A の内点 $\}$ を A の <u>内部</u> と呼ぶ.

例えば同じ X 内の部分集合であっても, X 上の距離が変わると内部や内点も変わる. 従って「端の点」のような直観的なイメージに囚われ過ぎないように注意が必要. 今までの直観と反する例として, 次を挙げておく.

例 3.2.2. $\mathbb{R}$ に標準的な距離 d_{st} を入れた空間を考える．また $A := [0,2)$ として, ここに部分距離 d_A を入れる．このとき, (A, d_A) 内の部分集合としては $0 \in [0,1)^\circ$.

証明. 定義に従って示す. (A,d_A) における ε-近傍を $U_A(a;\varepsilon)$ で表す.

- (示すことは $\exists \varepsilon > 0 : U_A(0;\varepsilon) \subset [0,1)$.)　 $\varepsilon := 1$ とおく．すると $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $U_A(0;\varepsilon) \subset [0,1)$.)　 (A,d_A) における ε-近傍の定義より, $U_A(0;\varepsilon) = U_A(0;1) = [0,1) \subset [0,1)$.

以上で示された．ここで $U_A(0;1)$ の定義は「A の点であって 0 からの距離が 1 未満の点」の全体であったことに注意する. □

他の例は本節の最後に見ることにして, まずは内部と内点に関する一般的な性質を示しておく．成り立つ性質もその証明も, $\mathbb{R}$ および $\mathbb{R}^n$ の場合と全く同様.

命題 3.2.3. $A \subset X$ とする. (X,d) に関する内部について以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $U_X(x;\varepsilon) \subset A$ ならば $U_X(x;\varepsilon) \subset A^\circ$.

(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

証明. 演習とする. □

3.2.2　距離空間内の開集合の定義

実数 $\mathbb{R}$, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の場合と同様に, 一般の距離空間 (X, d) 内の開集合を定義する. 少なくとも定義の見た目は全く同じ.

定義 3.2.4. A $(\subset X)$ が <u>開集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0$: $U_X(x; \varepsilon) \subset A$.

この定義の条件は, A 内の全ての点は内点であるという意味なので, 次のように言い換えることができる.

命題 3.2.5. A $(\subset X)$ が開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

当然ながら, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の開集合は, 距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{st}})$ 内の開集合と同じ意味である.

3.2.3　距離空間内の開集合の性質

距離空間内の開集合の和集合や共通部分については, これまでと同様に以下の性質が成り立つ. 証明も同様.

定理 3.2.6. (X, d) の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, X は開集合.
(2) O_i $(i = 1, \ldots, n)$ が開集合ならば, $\bigcap_{i=1}^n O_i$ も開集合.
(3) O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も開集合.

証明. 演習. □

3.2.4　距離空間内の開集合の例

距離空間 (X, d) 内の開集合の定義は, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の場合と全く同様だったが, 与えられた部分集合が開集合であるかどうかは X や d に依存する. まずは $\mathbb{R}^n$ の場合と同様に成り立つものを紹介する.

例 3.2.7. 各 $a \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して, 次が成り立つ: $U_X(a; \varepsilon)^\circ = U_X(a; \varepsilon)$. 従って ε-近傍 $U_X(a; \varepsilon)$ は (X, d) 内の開集合である.

証明. $U_X(a;\varepsilon)^\circ \supset U_X(a;\varepsilon)$ だけ示せば十分. これも内部に関する一般的な命題を用いると, $\mathbb{R}^n$ の場合と同様に簡単に示せる. □

次は距離を変えると状況が変わる典型的な例である. 離散距離に関して, 部分集合 A は形に依らずに全て開集合となる.

例 3.2.8. (X, d_∞) を離散距離空間とする. このとき任意の部分集合 $A \subset X$ は (X, d_∞) 内の開集合である.

証明. 開集合の定義に従って示す.

- (示すことは $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : U_X(x;\varepsilon) \subset A.$)　$\forall x \in A$ をとる.
- (示すことは $\exists \varepsilon > 0 : U_X(x;\varepsilon) \subset A.$)　$\varepsilon := 1$ とおく. すると $\varepsilon > 0$.
- (示すことは $U_X(x;\varepsilon) \subset A.$)　離散距離の定義より, x との距離が 1 未満の点は x のみである. 従って $U_X(x;\varepsilon) = U_X(x;1) = \{x\} \subset A$.

以上で示された. 当然ながら ε は 1 以下の正数ならば何でも良い. □

次の例として部分距離に関する開集合を扱いたい. そのために, 次の命題を用意しておく. 外の距離空間内の開集合と部分距離空間内の開集合が関係する.

命題 3.2.9. $A \subset X$ とし, d_A を A 上の部分距離とする. このとき, U が (A, d_A) 内の開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\exists O$ ((X,d) 内の開集合) : $U = O \cap A$.

証明. まずは ($\Leftarrow$) を示す. $\exists O$ ((X,d) 内の開集合) : $U = O \cap A$ を仮定する.

- (示すことは $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 : U_A(x;\varepsilon) \subset U.$)　$\forall x \in U$ をとる.
- (示すことは $\exists \varepsilon > 0 : U_A(x;\varepsilon) \subset U.$)　$x \in O$ であり, O は (X,d) 内の開集合なので, $\exists \varepsilon > 0 : U_X(x;\varepsilon) \subset O$.
- (示すことは $U_A(x;\varepsilon) \subset U.$)　ε-近傍の定義より,
  $U_A(x;\varepsilon) = U_X(x;\varepsilon) \cap A \subset O \cap A = U.$

次に ($\Rightarrow$) を示す. U が (A, d_A) 内の開集合であるとする.

- (示すことは $\exists O$ ((X,d) 内の開集合) : $U = O \cap A.$)　各 $x \in U$ に対して, U は (A, d_A) 内の開集合なので, $\exists \varepsilon_x > 0 : U_A(x;\varepsilon_x) \subset U$. ここで次のようにおく:
  $O := \bigcup_{x \in U} U_X(x;\varepsilon_x).$
  各 $U_X(x;\varepsilon_x)$ は (X,d) 内で開なので, その和集合 O も (X,d) 内で開.
- (示すことは $U = O \cap A.$)
  $O \cap A = (\bigcup_{x \in U} U_X(x;\varepsilon_x)) \cap A = \bigcup_{x \in U}(U_X(x;\varepsilon_x) \cap A) = \bigcup_{x \in U} U_A(x;\varepsilon_x) = U.$

以上で示される. ただし最後の等式は見慣れるまでは不思議に感じられるかも知れないの

で, ここで証明しておく. 少し簡略形で書く.

- (示すことは $\bigcup_{x\in U} U_A(x;\varepsilon_x) \subset U$. すなわち $\forall x \in U, U_A(x;\varepsilon_x) \subset U$.)　$\forall x \in U$ をとる. すると ε_x の取り方から $U_A(x;\varepsilon_x) \subset U$.
- (示すことは $\bigcup_{x\in U} U_A(x;\varepsilon_x) \supset U$. すなわち $\forall y \in U$, $y \in \bigcup_{x\in U} U_A(x;\varepsilon_x)$.) $\forall y \in U$ をとる. すると $y \in U_A(y;\varepsilon_y) \subset \bigcup_{x\in U} U_A(x;\varepsilon_x)$.

最後の議論は, 後期に位相空間論を学ぶ際にも, 何度か登場する. □

この命題を用いて, 部分距離空間内の開集合の例を挙げる.「開集合というのは (a,b) みたいな形のもの」などと単純に思ってはいけない, という例.

例 3.2.10. $A := [0,2)$ とし, d_A を $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ から決まる部分距離とする. このとき $[0,1)$ は (A, d_A) 内の開集合である.

証明. 上の命題を使って示す.

- (示すことは $\exists O$ ($(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内の開集合) : $[0,1) = O \cap A$.)　$O := (-1,1)$ とおく. これは $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内の開集合.
- (示すことは $[0,1) = O \cap A$.)　$O \cap A = (-1,1) \cap [0,2) = [0,1)$.

以上で証明された. 要するに, $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内の開集合が分かっていれば, 簡単に示せる. □

内点や内部は距離の取り方に依存する. しかし, 場合によっては, 異なる距離に関しても内部が一致する場合もある.

例 3.2.11. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. このとき, A が $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}})$ 内の開集合であることと, $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ 内の開集合であることは同値.

証明. A の $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\mathrm{st}}$ とし, $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\max}$ で表す. また, d_{st} および $d_{\max}$ に関する ε-近傍を, それぞれ $U_{\mathrm{st}}(x;\varepsilon)$, $U_{\max}(x;\varepsilon)$ で表す. 次を示せば良い: $(A^\circ)_{\mathrm{st}} = (A^\circ)_{\max}$. まずは $(\supset)$ を示す.

- (示すことは $\forall x \in (A^\circ)_{\max}, x \in (A^\circ)_{\mathrm{st}}$.)　$\forall x \in (A^\circ)_{\max}$ をとる.
- (示すことは $x \in (A^\circ)_{\mathrm{st}}$. すなわち $\exists \varepsilon > 0 : U_{\mathrm{st}}(x;\varepsilon) \subset A$.)　$x \in (A^\circ)_{\max}$ より, $\exists \varepsilon > 0 : U_{\max}(x;\varepsilon) \subset A$.
- (示すことは $U_{\mathrm{st}}(x;\varepsilon) \subset A$. すなわち $\forall y \in U_{\mathrm{st}}(x;\varepsilon), y \in A$.)　$\forall y \in U_{\mathrm{st}}(x;\varepsilon)$ をとる.
- (示すことは $y \in A$.)　$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ とおくと, 次が成り立つ:
  $$\varepsilon > d_{\mathrm{st}}(x,y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2} \geq |x_i - y_i|.$$
  従って $d_{\max}(x,y) = \max\{|x_i - y_i|\} < \varepsilon$ となるので, $y \in U_{\max}(x;\varepsilon) \subset A$.

以上で $(\supset)$ が示された. ここで上記の ε の取り方は, $U_{\mathrm{st}}(x;\varepsilon)$ は円板型であり, 四角形

$U_{\max}(x;\varepsilon)$ に内接している, ということから来ている．このような状況は必ず図示して考えること．反対に, $(\subset)$ の証明のためには, 四角形 $U_{\max}(x;\varepsilon)$ に含まれるような円板 $U_{\mathrm{st}}(x;\varepsilon')$ を考えれば良い．こちらの証明は演習とする． $\square$

ちなみに今の例で述べた性質は $\mathbb{R}^n$ でも成り立つ．すなわち, $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合について, $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{st}})$ 内の開集合であることと $(\mathbb{R}^n, d_{\max})$ 内の開集合であることは同値．マンハッタン距離だとどうなるかは, 余力のある場合は考えてみると良い．

3.2.5　演習問題

問題 3.2.12. (X,d) を距離空間とし, $A \subset X$ とする．このとき以下を示せ:

(1) $A^\circ \subset A$;

(2) $U_X(x;\varepsilon) \subset A$ ならば $U_X(x;\varepsilon) \subset A^\circ$.

問題 3.2.13. $A \subset \mathbb{R}^2$ とし, A の $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\mathrm{st}}$ で表し, $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\max}$ で表す．このとき次を示せ: $(A^\circ)_{\mathrm{st}} \subset (A^\circ)_{\max}$.

問題 3.2.14. (X,d) を距離空間とし, O_i $(i = 1, \ldots, n)$ が (X,d) 内の開集合であるとする．このとき $\bigcap_{i=1}^n O_i$ も (X,d) 内の開集合であることを示せ．

問題 3.2.15. (X,d) を距離空間とし, O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が (X,d) 内の開集合であるとする．このとき $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ も (X,d) 内の開集合であることを示せ．

問題 3.2.16. (X,d) を距離空間, O を (X,d) 内の開集合とする．また $A \subset X$ とし, d_A を A 上の部分距離とする．このとき, $O \cap A$ は (A, d_A) 内の開集合であることを定義に従って示せ．

問題 3.2.17. (X,d) を距離空間とし, $a \in X$, $\varepsilon > 0$ とする．このとき, ε-近傍 $U(a;\varepsilon)$ が開集合であることを, 開集合の定義に従って示せ．

問題 3.2.18. 円周 $S^1 := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ に対して, $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}})$ から決まる部分距離を d_{S^1} で表す．また S^1 の上半分 $U := \{(x_1,x_2) \in S^1 \mid x_2 > 0\}$ を考える．

(1) U が $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}})$ 内の開集合でないことを示せ;

(2) U が (S^1, d_{S^1}) 内の開集合であることを, 部分距離の開集合の性質を用いて示せ;

(3) U が (S^1, d_{S^1}) 内の開集合であることを, 定義に従って示せ．

3.3　距離空間内の閉集合

ここでは, 距離空間 (X, d) 内の部分集合の触点や閉包を定義し, 閉集合を考えていく. 開集合の場合と同じく, 一般論は $\mathbb{R}^n$ の場合とほぼ同様だが, X や d に取り方に応じて何が閉集合であるかが変わることがある.

3.3.1　距離空間における触点と閉包

距離空間内の部分集合の触点や閉包を定義する. 内点や内部の場合と同じく, 定義そのものは $\mathbb{R}^n$ の時と全く同様.

定義 3.3.1. $A \subset X$ とする.

(1) $x\ (\in X)$ が A の 触点 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0,\ U_X(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(2) $\overline{A} := \{x \in X \mid x$ は A の触点 $\}$ を A の 閉包 と呼ぶ.

触点や閉包も, 全体空間やその上の距離が変わると, それに応じて変わる. そのような具体例は後で見ることにして, 一般的な性質を先に見ておく.

命題 3.3.2. $A \subset X$ とする. 次が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $O\ (\subset X)$ が (X, d) 内の開集合, $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $O \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

証明. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の場合と同様. 演習とする. □

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の時のように, 単純に「閉包は端の点を付け加えれば良い」と思い込んでいると間違えることがある. 次はその典型的な例.

例 3.3.3. $A := (0, 2)$ とおき, $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ から決まる A 上の部分距離を d_A とする. このとき, (A, d_A) 内の部分集合として, $\overline{(0, 1)} = (0, 1]$.

証明. 集合が等しいことを示すので, $(\subset)$ と $(\supset)$ を示す. いずれも難しくないので, 少し省略した書き方にする. まずは $(\subset)$ から示す. 補集合を考える.

- $(\subset)$ を示す. (示すことは $\forall a \in A - (0, 1],\ a \in A - \overline{(0, 1)}$.)　$\forall a \in A - (0, 1]$ をとる. すなわち $a \in (1, 2)$. このとき $a \notin \overline{(0, 1)}$ であることは, 実数 $\mathbb{R}$ の時と同じ議論で示すことができる.
- $(\supset)$ を示す. (示すことは $\forall a \in (0, 1],\ a \in \overline{(0, 1)}$.)　$\forall a \in (0, 1]$ をとる. 一般的な

性質から $(0,1) \subset \overline{(0,1)}$ は分かっている. 従って $a=1$ の場合だけ示せば良い. これも実数 $\mathbb{R}$ の時の議論と同様にできる.

以上で示された. 要するに, $\overline{(0,1)} = [0,1]$ とならないのは, $0 \notin A$ なので, A の中での触点と言った場合には 0 はそもそも考える対象になっていない, ということ. □

上のような命題の証明では, 補集合を単に $(0,1)^c$ のように書いていると, $\mathbb{R}$ 内での補集合なのか $A=(0,2)$ 内での補集合なのか分からなくなるので注意が必要. この講義では $A-(0,1]$ のように差集合の形で書いて区別している.

3.3.2 距離空間内の閉集合の定義

距離空間内の閉集合を定義し, 開集合との関係を見る. 閉包が定義されているので, 以降の一般論は $\mathbb{R}^n$ の場合と全く同じ.

定義 3.3.4. A が (X,d) 内の <u>閉集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} \subset A$.

3.3.3 距離空間内の閉集合の性質

閉集合と開集合の関係を見る. そのためには, 閉包と内部の関係を見る必要がある. それを実際に述べたものが次の命題.

命題 3.3.5. 次が成り立つ: $X - \overline{A} = (X-A)^\circ$.

証明. $\mathbb{R}$ および $\mathbb{R}^n$ の場合と全く同様に示される. □

この命題を用いると, 閉集合と開集合の関係が直ちに導かれる. すなわち, 閉集合であることと, 補集合が開集合であることは同値.

定理 3.3.6. A が (X,d) 内の閉集合であるための必要十分条件は, $X-A$ が (X,d) 内の開集合となること.

証明. $\mathbb{R}$ および $\mathbb{R}^n$ の場合と同様に, 内部と閉包の関係に関する命題を用いれば良い. □

閉集合と開集合の関係を用いると, 閉集合の和集合および共通部分の性質が得られる. 証明は $\mathbb{R}^n$ の場合と全く同様.

定理 3.3.7. (X,d) 内の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, X は閉集合.

(2) F_i $(i \in \{1,\ldots,n\})$ が閉集合ならば, $\bigcup_{i=1}^n F_i$ も閉集合.

(3) F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

証明. 演習. □

3.3.4　距離空間内の閉集合の例

ここでは閉集合の例を紹介する. 特に $\mathbb{R}^n$ の時の直観に囚われていると間違える例を中心とする. まずは距離が離散の場合.

例 3.3.8. (X, d_∞) を離散距離空間とする. このとき任意の部分集合 $A \subset X$ は (X, d_∞) 内の閉集合である.

証明. (X, d_∞) において, 任意の部分集合は開集合だったので, 特に $X - A$ も開集合. 補集合が開集合なので A は閉集合. □

次は部分距離に関する例. 閉集合であることを示すためには, 閉包を決定しても良いが, 補集合が開集合であることを示す方が簡単な場合が多い.

例 3.3.9. $A := (0, 2)$ とし, d_A を $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ から決まる部分距離とする. このとき $(0, 1]$ は (A, d_A) 内の閉集合である.

証明. 触点と閉包の箇所で既に $\overline{(0,1)} = (0, 1]$ を示しているので, それを用いると直ちに分かる. ここでは補集合が開集合であることを示す方法を紹介する.

- (示すことは $A - (0, 1]$ が (A, d_A) 内の開集合. すなわち $\exists O$ ($(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内の開) : $A - (0, 1] = O \cap A$.)　$O := (1, 3)$ とおく. このとき O は $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内の開集合.
- (示すことは $A - (0, 1] = O \cap A$.)　$O \cap A = (1, 3) \cap (0, 2) = (1, 2) = A - (0, 1]$.

以上で証明された. このように $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内の開集合を用いるのが簡単であろう. □

最後の例は, 全ての距離空間で成り立つ例. ちなみに一般の位相空間 (距離空間をさらに一般化したもの) では, このような性質すら一般には成り立たない.

命題 3.3.10. (X, d) 内の一点集合は閉集合. 従って有限部分集合も閉集合.

証明. $a \in X$ とする. $\{a\}$ が (X, d) 内の閉集合であることを示す. 補集合を考える.

- (示すことは $X - \{a\}$ が (X, d) 内の開集合. すなわち $\forall x \in X - \{a\}$, $\exists \varepsilon > 0$: $U_X(x; \varepsilon) \subset X - \{a\}$.)　$\forall x \in X - \{a\}$ をとる.
- (示すことは $\exists \varepsilon > 0$: $U_X(x; \varepsilon) \subset X - \{a\}$.)　ε を, $U_X(x; \varepsilon)$ が a を含まないように取れば良い. 具体的にどう取れば良いかは演習とする.

また, 一般的な性質から, 閉集合の有限個の和集合は閉集合だった. 従って有限部分集合は, 一点集合の有限個の和集合なので, これも閉集合である. □

3.3.5　演習問題

問題 3.3.11. $A \subset X$ とする. このとき $A \subset \overline{A}$ を定義に従って示せ.

問題 3.3.12. $A \subset X$ とし, O $(\subset X)$ が (X, d) 内の開集合であるとする. このとき, $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $O \cap A \neq \emptyset$ を示せ.

問題 3.3.13. F_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ が (X, d) 内の閉集合であるとする. このとき $\bigcup_{i=1}^n F_i$ も (X, d) 内の閉集合であることを示せ.

問題 3.3.14. F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が (X, d) 内の閉集合であるとする. このとき $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も (X, d) 内の閉集合であることを示せ.

問題 3.3.15 (小テスト 10)**.** (X, d) を距離空間とし, $a \in X$ とする. このとき, 一点集合 $\{a\}$ は (X, d) 内の閉集合であることを示せ.

問題 3.3.16. 距離空間内の空集合と全体集合は, 開集合かつ閉集合である. どんな距離空間 (X, d) でも良いので, 空集合と全体集合以外で「開集合かつ閉集合」となる例を挙げよ.

問題 3.3.17. $A := [0, 2)$ とし, $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ から決まる部分距離を d_A で表す.

(1) $[0, 1)$ は (A, d_A) 内で開集合かどうか, 閉集合かどうかを調べよ;
(2) $[0, 1]$ は (A, d_A) 内で開集合かどうか, 閉集合かどうかを調べよ;
(3) $[1, 2)$ は (A, d_A) 内で開集合かどうか, 閉集合かどうかを調べよ;
(4) $(1, 2)$ は (A, d_A) 内で開集合かどうか, 閉集合かどうかを調べよ.

3.4　距離空間内のコンパクト部分集合

以下では (X, d) を距離空間とし, そのコンパクト部分集合を紹介する. 一般の距離空間においては, コンパクトと有界閉は同値でない. また, A が X 内のコンパクト部分集合であるかどうかは, 部分距離を入れた (A, d_A) を見れば分かる. このことを, コンパクト性は「内在的」な性質であるという.

3.4.1　距離空間内のコンパクト部分集合の定義

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の場合と同様に, まずは開被覆を定義する.

定義 3.4.1. $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の部分集合族とする. $\mathfrak{U}$ が X における A の 開被覆 (**open cover**) であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, U_λ は (X, d) 内の開集合,

(ii) $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

コンパクト部分集合の定義も, $\mathbb{R}^n$ の場合と見た目は全く同じである.

定義 3.4.2. $A \subset X$ とする. このとき A が (X, d) 内の コンパクト部分集合 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U}$ (A の開被覆), $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) : $A \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.

3.4.2　距離空間内のコンパクト部分集合の例

同じ集合でも距離を変えると開集合が変わるので, コンパクトであるかどうかは距離の決め方に依存する. その典型的な例として次を挙げる.

例 3.4.3. 閉区間 $[0, 1]$ は, $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内のコンパクト部分集合だが, $(\mathbb{R}, d_\infty)$ 内のコンパクト部分集合ではない.

証明. $A := [0, 1]$ とおく. これが $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内のコンパクト部分集合であることは, 実数 $\mathbb{R}$ の章で紹介している. 後者の主張を示す. 離散距離 d_∞ に関しては, 任意の部分集合は開集合であった.

- (示すことは $\exists \mathfrak{U}$ (A の開被覆) : $\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限), $A \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)
  $\mathfrak{U} := \{\{a\} \mid a \in [0, 1]\}$ とおく. このとき $\mathfrak{U}$ は A の開被覆であることを示す.
  - (示すことは (i) $\mathfrak{U}$ は開である, (ii) $\mathfrak{U}$ は A の被覆である.)
  - まず (i) 示す. (示すことは $\forall a \in [0, 1]$, $\{a\}$ は $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内で開.)　$\forall a \in [0, 1]$

をとる.

– (示すことは $\{a\}$ は $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内で開.)　離散距離の性質より, $\{a\}$ は $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内の開集合である.

– 次に (ii) を示す. (示すことは $\bigcup \mathfrak{U} = A$.)　$\bigcup \mathfrak{U} = \bigcup_{a \in [0,1]} \{a\} = [0,1] = A$.

従って $\mathfrak{U}$ は A の開被覆である.

- (示すことは $\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限), $A \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\forall \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) をとる.
- (示すことは $A \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\mathfrak{U}'$ は有限なので

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists a_1, \ldots, a_k \in [0,1] : \mathfrak{U}' = \{\{a_1\}, \ldots, \{a_k\}\}.$$

従って $\bigcup \mathfrak{U}' = \{a_1, \ldots, a_k\}$ は有限集合. 一方 $A = [0,1]$ は無限なので $A \not\subset \bigcup \mathfrak{U}'$.

以上で示された. 同様の方針で, 離散距離空間内のコンパクト部分集合は有限集合に限ることも分かる. □

3.4.3　距離空間内のコンパクト部分集合とコンパクト距離空間

ここでは, 距離空間そのものがコンパクトであるという概念を考える.

定義 3.4.4. (X, d) が コンパクト距離空間 であるとは, 次が成り立つこと: X が (X, d) 内のコンパクト部分集合である.

次の命題より, コンパクト部分集合かどうかは, 部分距離を入れた空間を見れば分かる. すなわち, コンパクトという性質は, 外の空間への入り方には依存しない.

命題 3.4.5. A が (X, d) 内のコンパクト部分集合であることと, 次は同値: 部分距離を入れた距離空間 (A, d_A) がコンパクト距離空間である.

証明. まずは $(\Leftarrow)$ を示す. 部分距離を入れた空間 (A, d_A) がコンパクト距離空間であるとする. 開被覆が二通り出てくるので,「(X, d) での A の開被覆」と「(A, d_A) の開被覆」と区別することにする. A が (X, d) 内のコンパクト部分集合であることを示す.

- (示すことは $\forall \mathfrak{U}$ ((X, d) での A の開被覆), $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) : $A \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.) $\forall \mathfrak{U}$ ((X, d) での A の開被覆) をとる.
- (示すことは $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) : $A \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　$\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とおく. このとき $\mathfrak{U}_A := \{U_\lambda \cap A \mid \lambda \in \Lambda\}$ は (A, d_A) の開被覆である.
  - (示すことは (i) $\mathfrak{U}_A$ は開である, (ii) $\mathfrak{U}_A$ は A の被覆.)
  - (i) を示す. (示すことは $\forall \lambda \in \Lambda$, $U_\lambda \cap A$ は (A, d_A) 内の開.)　$\forall \lambda \in \Lambda$ をとる.
  - (示すことは $U_\lambda \cap A$ は (A, d_A) 内の開.)　U_λ は (X, d) 内の開集合なので,

部分距離の性質より, $U_\lambda \cap A$ は (A, d_A) 内の開集合.

– (ii) を示す. (示すことは $A \subset \bigcup \mathfrak{U}_A$.)　 $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}$ は A の被覆なので,

$\bigcup \mathfrak{U}_A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda \cap A) = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) \cap A \supset A \cap A = A.$

以上より $\mathfrak{U}_A$ は (A, d_A) の開被覆である. 仮定より (A, d_A) はコンパクト距離空間なので,

$\exists \mathfrak{U}'_A \subset \mathfrak{U}_A$ ($\mathfrak{U}'_A$ は有限) : $A \subset \bigcup \mathfrak{U}'_A$.

ここで $\mathfrak{U}'_A$ は有限より,

$\exists k, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Lambda : \mathfrak{U}'_A = \{U_{\lambda_i} \cap A \mid i = 1, \ldots, k\}$.

これを用いて $\mathfrak{U}' := \{U_{\lambda_i} \mid i = 1, \ldots, k\}$ とおく. すると $\mathfrak{U}'$ は有限.

- (示すことは $A \subset \bigcup \mathfrak{U}'$.)　 $\bigcup \mathfrak{U}' = \bigcup_{i=1}^k U_{\lambda_i} \supset \bigcup_{i=1}^k (U_{\lambda_i} \cap A) = \bigcup \mathfrak{U}'_A \supset A$.

以上で示された. 仮定が「(A, d_A) がコンパクト距離空間」なので, それを使うためには (A, d_A) の開被覆を作らなくてはならない. 逆向きの ($\Rightarrow$) を示ためには, (A, d_A) の開被覆を任意に取って, そこから (X, d) での A の開被覆を作らなくてはならない. その証明は演習とする. □

上の命題より, コンパクト部分集合であることと部分距離に関してコンパクト距離空間であることは同値なので, それらの区別はあまり気にしなくて良い. 実際, 単に「A はコンパクト」のような言い方をすることが多い.

3.4.4　距離空間内のコンパクト部分集合と有界閉集合

ここでは, コンパクトと有界閉集合の関係を見ていく. 全く無関係ではないが, 必要十分条件でもない. まずは有界性を定義する.

定義 3.4.6. A を (X, d) 内の部分集合とし, $X \neq \emptyset$ とする. このとき A が <u>有界</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in X, \exists R > 0 : A \subset U(a; R)$.

ちなみに $X \neq \emptyset$ という仮定の下では, 有界であるための必要十分条件は, 次が成り立つこととなる: $\forall a \in X, \exists R > 0 : A \subset U(a; R)$. こちらを採用しておくと, 空集合も有界になるが, 以降の証明が多少面倒になるので上の定義を採用しておく.

命題 3.4.7. A を (X, d) 内のコンパクト部分集合とする. このとき A は有界閉集合.

証明. いずれの証明も $\mathbb{R}^n$ の場合と同様. 例えば有界であることの証明では, $a \in X$ を固定して, その周りの ε-近傍達を集めた開被覆を考えれば良い. 閉集合であることの証明では, $a \in \overline{A} - A$ が存在すると仮定して, a に限りなく近付いていくような開被覆を考えれば良い. 詳細は演習とする. □

このように, コンパクトなら有界閉は, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の場合と同様に成り立つ. 一方でコンパクトであるための十分条件については, 次が成り立つ.

命題 3.4.8. コンパクト距離空間内の閉集合はコンパクトである.

証明. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の場合と同様. (X, d) をコンパクト距離空間, A を (X, d) 内の閉集合とする. 示すことは, A の任意の開被覆をとり, 有限個をうまく選べること. その証明の途中で仮定を使うためには, (X, d) の開被覆を作る必要がある. 詳細は演習. $\square$

なお一般の距離空間では, 有界閉集合ならばコンパクトという主張は成立しない. 例えば $A := [0, 2)$ に $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ から決まる部分距離を入れると, A は A 内の有界閉集合だがコンパクトではない. また, 離散距離空間を考えると, その任意の部分集合は有界閉集合だが, もちろん全てがコンパクトとは限らない. このように, 閉集合であるかどうかは「相対的」な性質なので, 外の空間を取り換えればいくらでも変えられる.

3.4.5　演習問題

問題 3.4.9. $A := [0, 2)$ とし, $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ から決まる部分距離を d_A とする. このとき (A, d_A) における A の開被覆の例を挙げよ.

問題 3.4.10. $A \subset X$ とする. このとき次を示せ: $\bigcup_{a \in A} \{a\} = A$.

問題 3.4.11. (X, d_∞) を離散距離空間とし, A を (X, d_∞) 内のコンパクト部分集合とする. このとき A は有限集合であることを示せ.

問題 3.4.12. 離散距離空間 (X, d_∞) に関して, 任意の部分集合は有界であることを示せ.

問題 3.4.13. A を (X, d) 内のコンパクト部分集合とする. このとき, 部分距離を入れた空間 (A, d_A) がコンパクト距離空間であることを示せ.

問題 3.4.14. A を (X, d) 内のコンパクト部分集合とする. このとき A は (X, d) 内の有界閉集合であることを示せ.

問題 3.4.15. (X, d) をコンパクト距離空間とし, A を (X, d) 内の閉集合とする. このとき A は (X, d) 内のコンパクト部分集合であることを示せ.

問題 3.4.16. (X, d) を距離空間とし, A を X 内の有限部分集合とする. このとき, A は (X, d) 内のコンパクト部分集合であることを示せ.

3.5 距離空間上の連続写像

以下では (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする. ここでは, 距離空間から距離空間への連続写像を定義し, その性質を調べる. 当然ながら, 写像が連続であるかどうかも, 距離の取り方に依存する.

3.5.1 距離空間上の連続写像の定義

まずは距離空間から距離空間への写像の連続性を定義する. 今までと同様に, ある点での連続性を定義し, その後で写像そのものの連続性を定義する.

定義 3.5.1. $a \in X$ とする. 写像 $f : X \to Y$ が <u>点 a で連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(U_X(a; \delta)) \subset U_Y(f(a); \varepsilon)$.

定義域と値域に入っている距離を強調する時には, 写像を $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ のように表すこともある.

定義 3.5.2. 写像 $f : X \to Y$ が <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in X$, f は a で連続.

ユークリッド空間からユークリッド空間への連続写像は, 当然ながら, 標準的な距離に関する連続写像の例である. 他の例は, 一般的な性質をみた後で紹介する.

3.5.2 距離空間上の連続写像の性質

距離空間から距離空間への写像の連続性に関しても, 開集合を用いて特徴付けることができる. 証明はユークリッド空間の場合と同様.

定理 3.5.3. 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O$ ((Y, d_Y) の開集合), $f^{-1}(O)$ は (X, d_X) の開集合.

証明. ユークリッド空間からユークリッド空間への写像の場合と同様. 演習とする. □

開集合と閉集合は, 補集合を通して関係していた. このことを用いると, 連続写像は閉集合を用いて特徴付けることもできる.

命題 3.5.4. 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall F$ ((Y, d_Y) の閉集合), $f^{-1}(F)$ は (X, d_X) の閉集合.

証明. ユークリッド空間からユークリッド空間への写像の場合と同様. 演習とする. □

コンパクト部分集合も開被覆, すなわち開集合を使って定義されていた. このことから, 連続写像とコンパクト部分集合の関係も得られる.

命題 3.5.5. $f : X \to Y$ を連続写像とし, K を (X, d_X) 内のコンパクト部分集合とする. このとき $f(K)$ は (Y, d_Y) 内のコンパクト部分集合である.

証明. 示すことは $f(K)$ がコンパクトであること. 従ってまずは $f(K)$ の任意の開被覆を取る. これを使って K の開被覆を作る. 仮定より K はコンパクトなので, 有限個を選べる. このような筋道で証明できる. 詳しい証明を与えることは演習とする. □

これもユークリッド空間の場合と同様だが, コンパクト部分集合の連続写像による逆像はコンパクトとは限らない.

3.5.3　距離空間上の連続写像の例

ここでは連続写像の例をいくつか紹介する. まず, 開集合を用いた連続写像の特徴付けを用いると, 次が直ちに証明できる.

命題 3.5.6. 距離空間においても, 連続写像と連続写像の合成は連続である.

従って, 既知の連続写像を合成することで, 新しい連続写像を作ることができる. また, 部分距離に関する連続写像についても, 既知の連続写像を制限することで例が構成できる.

命題 3.5.7. 連続写像の制限は連続. すなわち, $f : X \to Y$ を連続写像とし, A を X の部分集合とすると, 制限写像 $f|_A : A \to Y$ は部分距離 d_A に関して連続.

証明. 開集合を用いて示す.

- (示すことは $\forall O$ ((Y, d_Y) 内の開), $(f|_A)^{-1}(O)$ は (A, d_A) 内の開.)
  $\forall O$ ((Y, d_Y) 内の開集合) をとる.
- (示すことは $(f|_A)^{-1}(O)$ は (A, d_A) 内の開.)　逆像の定義より,
  $$(f|_A)^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap A.$$
  仮定より f が連続なので, $f^{-1}(O)$ は (X, d_X) 内の開集合. 従って部分距離に関する開集合の性質から, $f^{-1}(O) \cap A$ は (A, d_A) 内の開集合. よって $(f|_A)^{-1}(O)$ は (A, d_A) 内の開集合.

以上で示された. 最後に, $(f|_A)^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap A$ の証明を簡略の形で書いておく:

- $a \in f^{-1}(O) \cap A \Leftrightarrow$ 「$a \in f^{-1}(O)$ かつ $a \in A$」
  $\Leftrightarrow$ 「$f(a) \in O$ かつ $a \in A$」$\Leftrightarrow (f|_A)(a) \in O \Leftrightarrow a \in (f|_A)^{-1}(O)$.

もちろん, 少なくとも最初は $(\subset)$ と $(\supset)$ を別々に示すべきである. □

例 3.5.8. 定値写像 $f : X \to Y : x \mapsto y_0$ は連続. ここで $y_0 \in Y$ は固定された元.

証明. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の時と同様に, 定義に従って示すことができる. 開集合を用いても示すことができるので, そちらは演習とする. □

距離を変えると連続かどうかが変わる典型的な例として, 次のものがある. すなわち, 恒等写像であっても, 定義域と値域に入る距離が違うと, 連続とは限らない.

例 3.5.9. 恒等写像 $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}^n, d_\infty) : x \mapsto x$ は連続でない.

証明. 開集合を用いて示す.

- (示すことは $\exists O$ $((\mathbb{R}^n, d_\infty)$ 内の開$)$: $\mathrm{id}^{-1}(O)$ は $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{st}})$ 内の開でない.)
  $O := \{0\}$ という一点集合を考える. 離散距離 d_∞ に関しては任意の部分集合が開集合なので, O は $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ 内の開集合.
- (示すことは $\mathrm{id}^{-1}(O)$ は $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{st}})$ 内の開でない.)
  恒等写像なので $\mathrm{id}^{-1}(O) = O = \{0\}$. これは $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{st}})$ 内の開でない.

要するに, 離散距離に関しては何でも開集合だったので, その逆像が必ず開集合になるという条件は厳しい. ちなみにこの写像は, 任意の点で連続ではない. そのことを示すためには, 定義に従って条件を確かめなくてはならないので, 演習とする. □

上の証明と似た議論で, 定義域の距離が離散の時は, 条件が緩くなる. このことを鑑みると, 次の性質が示される.

例 3.5.10. 定義域が離散距離空間のとき, 任意の写像 $f : (X, d_\infty) \to (Y, d_Y)$ は連続.

証明. 簡単なので演習とする. □

3.5.4　同相写像

ここでは同相写像の概念を紹介しておく. より詳しいことは, 位相空間論を学ぶ際に登場する予定.

定義 3.5.11. 写像 $f : X \to Y$ が <u>同相写像</u> とは以下が成り立つこと:
(i) f は全単射; (ii) f は連続; (iii) f^{-1} は連続.

イメージとしては, 同相写像 $f : X \to Y$ が存在するということは, X と Y では「開集合の情報が同じ」ことを意味する. これは「距離が同じ」よりも弱い関係である.

例 3.5.12. 恒等写像 $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}^2, d_{\max})$ は同相写像.

証明. $O \subset \mathbb{R}^2$ について, これが $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}})$ 内の開集合であることと, $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ 内の開集合であることは, 同値であった. このことから従う. □

従って, 例えば $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ からの連続写像を考える場合には, 標準的な距離に関する $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}})$ からの連続写像が分かっていれば十分ということになる.

例 3.5.13. 恒等写像 $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^n, d_\infty) \to (\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{st}})$ は同相写像でない. 特に, 全単射かつ連続だが, 逆写像は連続でない.

証明. 恒等写像なので全単射であり, 定義域が離散の場合は任意の写像が連続だった. ところが, 逆写像は $\mathrm{id}^{-1} : (\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ となるので, これは上で見たように連続ではない. □

この例は, 全単射かつ連続だからと言って同相写像とは限らない, ということを表している. すなわち, 同相写像の条件に「逆写像も連続」を入れておかないと, 同相という関係が同値関係にならない.

3.5.5　演習問題

問題 3.5.14. 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次で与えられることを示せ: $\forall O$ ((Y, d_Y) の開集合), $f^{-1}(O)$ は (X, d_X) の開集合.

問題 3.5.15. 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次で与えられることを示せ: $\forall F$ ((Y, d_Y) の閉集合), $f^{-1}(F)$ は (X, d_X) の閉集合. ここで, 開集合と閉集合の関係は用いて良い.

問題 3.5.16 (小テスト 11)**.** $f : X \to Y$ を連続写像とし, K を (X, d_X) 内のコンパクト部分集合とする. このとき $f(K)$ は (Y, d_Y) 内のコンパクト部分集合であることを示せ.

問題 3.5.17. 連続写像の制限は, 部分距離に関して連続である. この命題の主張と証明を自力で復元せよ.

問題 3.5.18. 距離空間から距離空間への定値写像は連続である. このことを開集合による特徴付けを用いて示せ.

問題 3.5.19. 恒等写像 $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}, d_\infty)$ は, 定義域の全ての点で連続ではないことを示せ.

問題 3.5.20. 定義域が離散距離空間のとき, 全ての写像は連続である. この主張を正確に述べた上で, 定義に従った証明と, 開集合を用いた証明を与えよ.

問題 3.5.21. 距離空間 $(X.d_X)$, (Y, d_Y) に対して, $f : X \to Y$ が等長写像であるとは, 次が成り立つことと定義する: $\forall x_1, x_2 \in X$, $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$. 以下を示せ:

(1) 全ての等長写像は単射である.

(2) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}^2, d_{\max})$ は等長写像でない.

3.5.6　期末試験について

期末試験は, 8/05(水)-06(木) 周辺の日程で, 中間試験と同様の形式で行う. また, 期末試験の前に「事前救済レポート」を提出することができる. 提出する場合は, 下記の要領に従って webclass 経由で提出すること.

問題 3.5.22 (事前レポート問題, 2020/07/30(木) 締切, 提出任意)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する期末試験問題を予想し, その問題と解答を書け. ただし, レポートは 1 つのファイルにまとめ, 一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙を付けないこと.

(1) 開集合. (2) 閉集合. (3) コンパクト集合. (4) 連続写像. (5) 答えだけ答える問題.

また, 小テストの提出は, 期末試験を開始した時点で受付を終了する予定である. (システム上では提出することができたとしても, 受け付けない.) 詳細は別途通知する.