# 対称空間とカンドル入門 *

田丸 博士 (大阪市立大学)

**概要**

対称空間は, 各点において点対称をもつ空間である. カンドルは, 結び目に由来する条件をみたす二項演算をもつ集合である. 点対称を二項演算に読み替えることにより, 対称空間はカンドルとなる. この講義では, それぞれの定義や典型的な例を紹介する. また, 最後に, これらの部分集合に関する問題も紹介したい.

## 1　イントロ

対称空間は, 多様体版やリーマン多様体版など, 様々な場合があるが, まずは最も基本的な "集合としての" 対称空間の定義を述べる.

**定義 1.1.** $X$ を集合, $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$ とする. このとき $(X, s)$ が (集合としての) <u>対称空間</u> とは, 以下が成り立つこと:

(S1) $\forall x \in X$, $s_x(x) = x$;
(S2) $\forall x \in X$, $s_x^2 = \mathrm{id}.$;
(S3) $\forall x, y \in X$, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

ここで $s(x, y) = s_x(y)$ と書いている. 写像 $s_x : X \to X$ を $x$ における点対称という. すなわち, 対称空間とは, 各点において "点対称" をもつ空間である.

**例 1.2.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上に点対称を $s_x(y) = 2x - y$ で定めたものは対称空間.

---

* 2021 年度「数学概論」講義資料

もう一方の登場人物はカンドルである．カンドルは, 所定の性質をみたす二項演算をもつ集合として定義される．

**定義 1.3.** $X$ を集合, $* : X \times X \to X$ とする．このとき $(X, *)$ が <u>**カンドル**</u> (<u>**quandle**</u>) とは, 以下が成り立つこと:

(Q1) $\forall x \in X,\ x * x = x$;

(Q2) $\forall x, y \in X,\ \exists 1 z \in X : z * x = y$;

(Q3) $\forall x, y, z \in X,\ (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

カンドルの概念は, 結び目の研究の課程で導入されたものである．実際, これら三条件は結び目の Reidemeister 変形と対応する (本講義では踏み込まないが).

**命題 1.4.** $(X, s)$ を (集合としての) 対称空間とする．このとき, $x * y := s_y(x)$ によって二項演算 $*$ を定めると, $(X, *)$ はカンドルである．

証明は直接計算．ちなみに, 対称空間の条件 (S2) を "$\forall x \in X$, $s_x$ は全単射" に緩めると, カンドルと同値になる．ということで以下では, カンドルも $(X, s)$ で表すこととする．このときの $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$ をカンドル構造と呼ぶ．

**問題 1.5** (自習用)**.** 命題 1.4 を示せ．

## 2　対称空間の例

対称空間の典型的な例を挙げる．ここで紹介する例は, 全てコンパクトなリーマン対称空間になっているが, 集合としての側面のみを紹介する.

**例 2.1.** 球面 $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$ は次により対称空間: $s_x(y) = -y + 2\langle y, x\rangle x$.

ちなみにこの $s_x$ は, 直線 $\mathbb{R}x$ に関する "折り返し" を意味する．すなわち, $y = \pm x$ のとき $s_x(y) = y$ であり, また $y \perp x$ のとき $s_x(y) = -y$ である．上記の $s_x$ が条件 (S3) をみたすことを確かめるために, 折り返しに関する一般的な命題を用意しておく.

**命題 2.2.** $V$ を $\mathbb{R}^n$ 内の線型部分空間とし, $V$ に関する折り返し $r_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次で定義する: $r_V(v + w) := v - w$, ただし $v \in V$, $w \in V^{\perp}$. このとき以下が成り立つ:

(1) $r_V^2 = \mathrm{id}.$;

(2) $r_V \in \mathsf{O}(n)$;

(3) $\forall g \in \mathsf{O}(n)$, $g \circ r_V = r_{g(V)} \circ g$.

命題の主張 (2) を示すためには, 内積を保つことを言えば良い．主張 (3) は, $V$ 上と $V^{\perp}$ 上で両辺の写像が一致することを示せば良い．また, この命題を用いれば, 球面 $S^n$ が対称空間となることが容易に証明できるだろう.

対称空間の次の例として, 実グラスマン多様体を挙げる (多様体構造には触れないが). 実グラスマンは, 実射影空間の一般化である.

**例 2.3.** $G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V$ は $\mathbb{R}^n$ 内の $k$ 次元部分空間 $\}$ を 実グラスマン とよぶ. この $G_k(\mathbb{R}^n)$ は次により対称空間: $s_V(W) := r_V(W)$ (すなわち, 折り返し $r_V$ で $W$ を移したときの像).

証明は, 先の命題 2.2 から容易であろう. また, 定義から $G_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ($n$ 次元実射影空間) であることに注意しておく. 点対称の感覚を掴むために, 次の例を見ておく. ここで, $\{x_1, \ldots, x_k\}$ で張られるベクトル空間を, 記号の簡略化のために次のように書く:

$$(x_1, \ldots, x_k) := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{x_1, \ldots, x_k\}.$$

**例 2.4.** $G_2(\mathbb{R}^6)$ に対して, $V_0 := (e_1, e_2)$ における点対称は以下をみたす:

(1) $s_{V_0}(e_1, e_3) = (e_1, e_3)$;

(2) $s_{V_0}(e_1, e_2 + e_3) = (e_1, e_2 - e_3)$.

**例 2.5.** 実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ において, $[x] := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{x\}$ とおく. このとき $s_{[e_1]}$ による固定点集合は $\{[e_1]\} \cup \{[x] \mid x \perp e_1\} \cong \{[e_1]\} \cup \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.

**問題 2.6** (レポート問題 1)**.** $G_2(\mathbb{R}^6)$ において, $V_0 := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ とおく. このとき $s_{V_0}$ による固定点集合を求めよ.

ちなみにグラスマンには, 複素グラスマンなどのバリエーションもいくつかある. ここでは, その一つとして, 有向実グラスマンを紹介しよう.

**定義 2.7.** $V \in G_k(\mathbb{R}^n)$ とし, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ と $\{w_1, \ldots, w_k\}$ を $V$ の順序付き基底とする. これらが <u>同じ向き</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists g \in \mathsf{GL}(k, \mathbb{R}) : \det(g) > 0$ かつ $(v_1, \ldots, v_k) = (w_1, \ldots, w_k)g$.

順序付き基底の集合において, 同じ向きという関係は同値関係である. その商集合の元を $[(v_1, \ldots, v_k)]$ のように表し, $V$ の <u>向き</u> とよぶ. 当然ながら, 向きは 2 個しかない (表と裏, あるいは正と負, と考えられる).

**例 2.8.** $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim := \{(V, \sigma) \mid V \in G_k(\mathbb{R}^n),\ \sigma$ は $V$ の向き $\}$ を <u>有向実グラスマン</u> とよぶ. この $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ は折り返し $r_V$ によって対称空間となる.

折り返しは, 部分空間を向きも込めて折り返す. 式で書くと

$$\begin{aligned} &s_V(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{w_1, \ldots, w_k\}, [(w_1, \ldots, w_k)]) \\ &= (r_V(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{w_1, \ldots, w_k\}), [(r_V(w_1), \ldots, r_V(w_k))]). \end{aligned}$$

**例 2.9.** $G_2(\mathbb{R}^6)^\sim$ を考える. 記号の簡略化のため $(x_1, x_2) := (\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{x_1, x_2\}, [(x_1, x_2)])$ と表し, その向きを反転させたものを $-(x_1, x_2)$ を書く. このとき以下が成り立つ:

(1) $s_{(e_1, e_2)}(e_1, e_3) = (e_1, -e_3) = -(e_1, e_3)$;

(2) $s_{(e_1, e_2)}(e_3, e_4) = (-e_3, -e_4) = (e_3, e_4)$.

対称空間の今回の最後の例として, 群を紹介する.

**例 2.10.** $G$ を群とし, 点対称を次で定める: $s_g(h) := gh^{-1}g$. このとき $(G, s)$ は対称空間.

ちなみに上記の点対称は, 単位元では $s_e(h) = h^{-1}$ と定めて, それを他の点に左移動で "ばらまいた" ものである. 左移動を $L_g(h) := gh$ で表すと, $s_g = L_g \circ s_e \circ L_{g^{-1}}$. この考え方は, 今回は紹介できないが, 様々な場面で登場する.

**注意 2.11.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は点対称 $s_x(y) = 2x - y$ によって対称空間となることを紹介したが, これは, $\mathbb{R}^n$ を加法群とみて, その群演算から上記の方法で対称空間の構造を定めたものに一致する.

**問題 2.12** (自習用)**.** 例 2.10 を示せ.

# 3　カンドルの例

対称空間の場合には, 定義では要請されていないが, 多様体になっているものを考えることが多い. 一方でカンドルでは, 離散的なもの (あるいは有限なもの) を考えることも多い. ここではいくつかの例を挙げたい.

**例 3.1.** 単位円 $S^1$ 上の $n$ 等分点の集合は, $S^1$ 上の点対称の制限によってカンドルとなる (これを位数 $n$ の <u>二面体カンドル</u> といい $R_n$ で表す).

この例は $s_x^2 = \mathrm{id}.$ となるので集合としての対称空間でもある. 対称空間ではないような例も挙げておこう.

**例 3.2.** $X := \{1, 2, 3, 4\}$ に次のように巡回置換を使って $s$ を定めたものはカンドルになる: $s_1 = (234)$, $s_2 = (143)$, $s_3 = (124)$, $s_4 = (132)$.

この例で得られたカンドルを <u>正四面体カンドル</u> と呼ぶ. これは正四面体の頂点に "120° 回転" で構造を定めたものとみなすことができる. 明らかに $s_x^2 \neq \mathrm{id}.$ である.

**問題 3.3** (自習用)**.** 正四面体カンドルに対して, 条件 (Q3) を確かめよ.

ここで, カンドルの準同型および同型を定義する.

**定義 3.4.** $(X, s^X)$, $(Y, s^Y)$ をカンドルとする.

(1) 写像 $f : X \to Y$ が <u>準同型</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall x \in X$, $f \circ s^X_x = s^Y_{f(x)} \circ f$;
(2) 全単射な準同型写像を <u>同型写像</u> と呼ぶ.

カンドルの定義から, 任意の $x \in X$ に対して $s_x : X \to X$ は同型写像である.

**問題 3.5** (自習用)**.** 写像 $f : X \to Y$ が全単射な準同型写像であるとき, 逆写像も準同型であることを示せ.

**問題 3.6** (レポート問題 2)**.** 二面体カンドル $R_n$ は, 巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に例 2.10 の方法で点対称を定めたものと同型になることを示せ.

# 4 部分カンドルの話

対称空間およびカンドルの研究に関しては, 理論が完成している訳では全くなく, 現在も様々な研究が進展中である. ここでは, そのほんの一部ではあるが, 部分カンドルに関する話題を紹介する.

**定義 4.1.** $(X, s)$ をカンドルとする. このとき $A \subset X$ が <u>**部分カンドル**</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A$, $s_a(A) = A$.

この条件は $s_a^{\pm 1}(A) \subset A$ と言っても良い. 特に対称空間の場合には $s_a(A) \subset A$ で十分. 部分群が群になるのと同様に, 部分カンドルならばカンドルになる. 我々は, 漠然としているが "良い部分カンドルの例を見付けよ", あるいは "部分カンドルに関する良い性質を定義し, それをみたす部分カンドルを分類せよ" といった問題に取り組んでいる.

**注意 4.2.** 例えば群論においては, 特別な部分群として正規部分群や中心といったものがあった. 例えばコンパクト Lie 群の理論では, "極大トーラス" という特別な部分群が重要な役割を担っていた (半単純 Lie 代数の Cartan 部分代数を想定しても良い). いずれにせよ, 構造理論を構築する上で何らかの "特別な部分集合" に着目することは, 数学の様々な分野で見られる常套手段であろう.

**例 4.3.** 円 $S^1$ に対して, $\{\pm e_1\}$ は点対称が自明な部分集合. また $\{\pm e_1, \pm e_2\}$ は点対称が可換な部分集合. これらはいずれも部分カンドル.

カンドル内の部分集合に関して, 次のような性質を考える.

**定義 4.4.** $(X, s)$ をカンドル, $A \subset X$ とする.

(1) $A$ が <u>対蹠的</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a, b \in A$, $s_a(b) = b$;

(2) $A$ が <u>$s$-可換</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a, b \in A$, $s_a \circ s_b = s_b \circ s_a$.

**問題 4.5** (レポート問題 3)**.** カンドル内の部分集合に対して, 対蹠的ならば $s$-可換であることを示せ.

**命題 4.6.** 球面 $S^n$ に対して,

(1) $\{\pm e_1\}$ は極大な対蹠集合;

(2) $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\}$ は極大な $s$-可換集合.

上記の部分集合は, 直交群 $\mathsf{O}(n+1)$ の作用の下で一意的であることも分かる. すなわち, $A \subset S^n$ を極大な対蹠集合とすると, $\exists g \in \mathsf{O}(n+1) : g(A) = \{\pm e_1\}$.

**命題 4.7.** 実グラスマン $G_k(\mathbb{R}^n)$ に対して,

(1) $\{(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}$ は極大な対蹠集合;

(2) $n \neq 2k$ のとき, $s$-可換集合は全て対蹠的.

この場合も同様に, 直交群 $\mathsf{O}(n)$ の作用の下で一意的であることが知られている. ちなみに $n = 2k$ のとき, 極大な $s$-可換部分集合がどのようになっているか, 現時点で筆者は $k = 1, 2$ の場合しか知らない.

**問題 4.8** (自習用)**.** $G_k(\mathbb{R}^n)$ 内で上記の部分集合が対蹠的であることを確認せよ.

最後に, 有向実グラスマンの場合を紹介する.

**命題 4.9.** 有向実グラスマン $G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim}$ に対して, $n \neq 2k$ のとき, 次は極大な $s$-可換集合となる: $\{\pm(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \in G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim} \mid 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}$.

この場合も, $n = 2k$ の結果は知られていないと思われる. また, 極大な対蹠集合の分類も, $k$ が小さい場合を除いて未解決である. ちなみに, これらの部分集合の "一意性" も成立しない.

# 参考文献


[1] 鎌田 聖一: 曲面結び目理論, シュプリンガー現代数学シリーズ, 丸善出版, 2012.

[2] 田丸 博士: 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part I, In: Geometry and Analysis 2014 (福岡大学微分幾何研究会) 記録集, 99–107 (2015).
`http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/tamaru/files/14fukuoka-proceeding.pdf`

[3] 田丸 博士: 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part II, In: 部分多様体論・湯沢 2014 記録集, 55–60 (2015).
`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/yuzawa/yuzawa2014.html`

[4] 田丸 博士: 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part III, In: 第 35 回代数的組合せ論シンポジウム記録集, 67–73 (2018).
`https://hnozaki.jimdofree.com/proceedings-symp-alg-comb/no-35/`

[5] 田丸 博士: 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part IV, In: 部分多様体論・湯沢 2018 記録集 (2019).
`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/yuzawa/yuzawa2018.html`