このプリントは, 2021 年度の解析 I (田丸担当クラス) の講義内容をまとめたものです.

1 (2021/04/13) 連続関数 (1)

1.1 前置き

一変数関数 $f = f(x)$ の微分積分については高校でも学んだ. この講義では, それを "より深く" 学ぶ. 例えば, 高校では出てこなかった関数も登場するし, 高校では学ばなかった新しい概念も登場する. この講義の前半では微分, 後半では積分を学ぶ. 前半の微分に関しては, "テーラー展開" を到達目標とする.

1.2 実数の連続性

今日の目標 1 は, 次の "実数の公理" である. "実数の連続性" と呼ばれることもある. 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す.

公理 1.1. 実数 $\mathbb{R}$ 内の有界な単調数列は収束する.

ここに登場した用語を説明していく. 実数の数列と, その収束については, 高校で学んだはず. 数列が単調であるということは, 次で定義される.

定義 1.2. 数列 $\{a_n\}$ について次のように定義する:

(1) $\{a_n\}$ が <u>単調増加</u> とは, 次が成り立つこと: $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq \cdots$;
(2) $\{a_n\}$ が <u>単調減少</u> とは, 次が成り立つこと: $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq a_4 \geqq \cdots$;
(3) $\{a_n\}$ が <u>単調</u> とは, 単調増加または単調減少であること.

次に有界という用語を定義する. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ や集合の元 (要素) $a \in A$, といった記号は今後頻繁に使う.

定義 1.3. $A \subset \mathbb{R}$ とする.

(1) $x \in \mathbb{R}$ が A の <u>上界</u> とは, 次が成り立つこと: 全ての $a \in A$ に対して $a \leqq x$.
(2) A が <u>上に有界</u> とは, 上界が存在すること.
(3) A の下界, 下に有界, も同様に定義する.
(4) A が <u>有界</u> とは, 上にも下にも有界であること.

有界な集合と有界でない集合の例を挙げておく.

例 1.4. $\mathbb{R}$ 内の部分集合について以下が成り立つ:

(1) 以下で定義されるような区間 (a, b), $[a, b]$ 等は有界:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \qquad [a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}.$$

(2) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$, 無理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は有界でない (上にも下にも有界でない).

(3) 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ や次の半直線 $(a, +\infty)$ は, 下に有界だが上に有界ではない:

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}.$$

上で定義した (a, b) を開区間, $[a, b]$ を閉区間という. 他にも $(a, b]$, $[a, b)$, あるいは $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ などの記号も同様に定義する. これらを総称して, 単に "区間" と呼ぶことが多い.

注意 1.5. 先の公理に関して, 実数以外の場合には成立するとは限らないことに注意する. 例えば, 有理数 $\mathbb{Q}$ だけの世界では同様の性質は満たされない. 実際, 3.1, 3.14, 3.141, ... という π の小数 n 桁までを a_n とする数列は, 有界な単調増加数列だが, $\mathbb{Q}$ の中では収束しない ($\pi \notin \mathbb{Q}$ だから).

最後に実数の公理を使った一つの応用を紹介する.

命題 1.6. $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ は収束する.

証明のためには, 上の lim の中身の数列が有界な単調増加数列であることを示せば良い. なお, 言うまでもなく, 上記の極限値はネピア数あるいは自然対数の底と呼ばれるものであり, e で表す.

1.3 連続関数

今日の目標 2 は, 連続関数を定義すること. まずは定義を先に述べる.

定義 1.7. $a \in \mathbb{R}$ とし, 関数 $f(x)$ が a を含む区間で定義されているとする. このとき $f(x)$ が $x = a$ で <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

定義域の全ての点で連続のとき, その関数を <u>連続関数</u> という. ここで, $f(x)$ の定義域は実数 $\mathbb{R}$ 全体とは限らない. 例えば $f(x) = \sqrt{x}$ ならば定義域は最大でも $[0, +\infty)$. また, 定義域は故意に小さくしておく場合もある. しかし, 定義域は "区間" としているので, 例えば $\mathbb{Q}$ 上だけで定義される関数, といったものはここでは考えない.

あとは極限 lim の定義を整理すれば, 連続の定義の説明が終わる.

定義 1.8. 関数 $f(x)$ が $x > a$ で定義されているとする. このとき, b が $f(x)$ の $x = a$ における <u>右極限</u> であるとは, x を a の右側から a に近付けたときに $f(x)$ が b に限りなく近付くこと. またこのとき次のように書く:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b.$$

同様に左極限も定義される. いずれの場合も厳密な定義はここでは与えないが, $x = a$ における極限は $f(a)$ の値には無関係であることに注意する.

例 1.9. 関数 $f(x)$ を次で定義する: $f(x) = 0$ $(x \leqq 0)$, $f(x) := 1$ $(x > 0)$. このとき

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to -0} f(x) = 0.$$

例 1.10. 関数 $f(x)$ を次で定義する: $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{Q})$, $f(x) := 1$ $(x \notin \mathbb{Q})$. このとき, $f(x)$ の $x = 0$ における右極限も左極限も存在しない.

右極限と左極限を使って, 関数の極限を定義する.

定義 1.11. 関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで定義されているとする. このとき, $f(x)$ の $x = a$ における右極限と左極限が存在して一致するとき, それを $f(x)$ の $x = a$ における <u>極限</u> といい, 次のように書く:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

極限についても, $f(x)$ の $x = a$ における極限は, $f(a)$ の値には無関係である. 次がその典型的な例であろう.

例 1.12. 関数 $f(x)$ を次で定義する: $f(x) = 0$ $(x \neq 0)$, $f(x) := 1$ $(x = 0)$. このとき次が成り立つ: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. 従ってこの関数は $x = 0$ で連続でない.

次も連続でない関数の例. その証明を小テスト問題とする. 解答は, 所定の解答用紙 (またはそれと同じような書式のもの) に書き, 授業中の指定した時間あるいは webclass を通して提出すること. なお, 解答は, 単に式を羅列するのではなく, 「…とおく」, 「…と仮定する」のような語句を適宜用いること. 不十分な解答の場合には再提出を要請する.

問題 1.13 (小テスト (1))**.** 次の関数 $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ が連続でないことを示せ:

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leqq x < 1), \\ 0 & (x \geqq 1). \end{cases}$$

2　(2021/04/20) 連続関数 (2)

2.1　連続関数の基本的な例

ここでは, 連続関数の基本的な例として, 次を紹介する.

命題 2.1. 多項式, 有理式 (多項式の分数), 三角関数を “組み合わせて” できる関数は連続.

例えば次のような関数は連続:

$$f(x) = \frac{\sin(x^2) + \tan^3 x}{x^2 + 1}, \ldots$$

一般に, 関数 $f(x)$ が連続を示すためには, 定義域の全ての点 a において連続であること, すなわち次を確かめなくてはならない:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

例 2.2. $f(x) = c$ (定数), $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$ は連続関数.

ここで, $f(x) = \sin x$ が連続であることの証明は, 教科書 p11 を参照. これを毎回やるのは大変なので, 一般的な命題を 2 つ用意しておく.

命題 2.3. $f(x)$, $g(x)$ が $x = a$ で連続であるとする. このとき以下の関数も $x = a$ で連続:

$$f(x) \pm g(x), \quad cf(x) \ (c \text{ は定数}), \quad f(x)g(x), \quad f(x)/g(x) \ (\text{ただし } g(a) \neq 0).$$

関数 $f(x) = x$ が連続であることを既知とすれば, その加減乗除を考えることにより, 多項式あるいは有理式で表される関数が連続であることが分かる. ちなみに証明のためには, 極限に関して以下のような性質を示せば良い (極限が存在する場合に):

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x), \ldots$$

用意する 2 番目の命題は, $\sin(x^2)$ のような項が連続を示すためのものである.

命題 2.4. 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続, $z = g(y)$ が $y = f(a)$ で連続であるとする. このとき $g \circ f(x)$ は $x = a$ で連続.

ここで $g \circ f(x) = g(f(x))$. これを f と g の合成関数という. この命題を使うことにより, 例えば次が連続関数であることも言える:

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

最後に補足として, $f(x) = 1/x$ は連続であることに注意しておく (単に "グラフが繋がっている" のが連続だと思うと間違える例).

2.2 連続関数の性質

ここでは連続関数の性質として,「中間値の定理」と「最大値・最小値」に関する性質を紹介する.

定理 2.5 (中間値の定理)**.** $f(x)$ が $[a,b]$ 上で連続であり, $f(a) < f(b)$ であるとする. このとき全ての $\ell \in [f(a), f(b)]$ に対して, $\ell = f(c)$ となる $c \in [a,b]$ が存在する.

ちなみに $f(a) > f(b)$ のときも同様の主張が成り立つ.

問題 2.6. 中間値の定理の主張は, 関数 $f(x)$ が連続でないとき, 成り立つとは限らない. また, 定義域が閉区間でない場合 (例えば $\mathbb{R} - \{0\}$ など) にも, 成り立つとは限らない. これらの反例を挙げよ.

連続関数の性質として 2 番目に紹介するのは, 最大値・最小値に関するものである.

定理 2.7. 関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で連続であるとき, $f(x)$ は $[a,b]$ 上で最大値と最小値をもつ.

この定理に関しては, まずは最大値と最小値とは何だったかを復習する. 実数 $\mathbb{R}$ 内の部分集合の最大値・最小値は, 次で定義される.

定義 2.8. $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ とする.

(1) x が A の <u>**最大値**</u> であるとは, 次が成り立つこと: $x \in A$ かつ x は A の上界;
(2) x が A の <u>**最小値**</u> であるとは, 次が成り立つこと: $x \in A$ かつ x は A の下界.

最大値が存在すれば上に有界だが, その逆は成り立たない. 次がその例.

例 2.9. 閉区間 $[a,b]$ の最大値は b, 最小値は a である. $[a,+\infty)$ の最大値は存在せず, 最小値は a である. 開区間 (a,b) には最大値も最小値も存在しない.

部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ の最大値・最小値を使って, 関数の最大値・最小値を定義する.

定義 2.10. $A \subset \mathbb{R}$ とし, $f : A \to \mathbb{R}$ を関数とする. このとき次を f による A の <u>像</u> とよぶ:

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}.$$

また, $f(A)$ が有界集合であるときに f は有界関数であるといい, $f(A)$ の最大値および最小値を, 関数 f の最大値および最小値という.

例 2.11. 関数 $y = x^2$ を考えと, 定義域が $\mathbb{R}$ 全体のときは最大値は存在せず, 最小値は 0. 定義域を取り替えると, 最大値や最小値ももちろん変わる.

定義域が閉区間でない場合や, 関数 $f(x)$ が連続でない場合には, 当然ながら最大値や最小値は存在するとは限らない.

3　(2021/04/27) 連続関数 (3)

今回の講義動画の中では, 資料の他に「GeoGebra」というフリーの数学ソフトウェアを用いた.

3.1　逆関数

連続関数を作る方法として, 既知の関数の逆関数を用いる方法を紹介する.

定義 3.1. $f(x) = x$ で定義される関数を <u>恒等関数</u> といい, id で表す. また, $f : A \to \mathbb{R}$ に対して, 関数 $g : f(A) \to \mathbb{R}$ が f の <u>逆関数</u> であるとは, 以下が成り立つこと: $g \circ f = \mathrm{id}$, $f \circ g = \mathrm{id}$.

関数 f の逆関数を f^{-1} で表す. 逆関数は常に存在するとは限らない.

例 3.2. $f(x) = 2x + 1$ の逆関数は $f^{-1}(x) = (x - 1)/2$. 一方で $f(x) = x^2$ については, 定義域を $[0, +\infty)$ とした場合には $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ だが, 定義域を $\mathbb{R}$ とすると逆関数は存在しない.

逆関数を求めるには, $y = f(x)$ を変形して $x = g(y)$ の形にすれば良い. また, $y = f^{-1}(x)$ のグラフは, $y = f(x)$ のグラフを $y = x$ に関して折り返せば描ける.

逆関数がいつ存在するかという問題について, 次が知られている.

定理 3.3. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続な単調増加関数とする. このとき逆関数 $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ が存在し, さらに f^{-1} は連続である.

ここで, 関数 $f(x)$ が単調増加とは, 次が成り立つこと: $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$. 連続な単調減少関数についても, 上の定理と同様の主張が成り立つ.

例 3.4. 指数関数 $f(x) = a^x$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であり, $a > 1$ なら単調増加, $0 < a < 1$ なら単調減少. 従ってこれらの場合には連続な逆関数が存在する. その逆関数を $\log_a x$ と書き, (a を底とする) 対数関数と呼ぶ.

3.2 逆三角関数

逆関数の存在に関する定理を用いて, (定義域を所定の範囲に制限すれば) 三角関数の逆関数が存在することが分かる.

例 3.5. 以下を総称して <u>逆三角関数</u> という:

(1) $\sin x$ は $[-\pi/2, \pi/2]$ で連続かつ単調増加. その逆関数を $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ で表す;

(2) $\cos x$ は $[0, \pi]$ で連続かつ単調減少. その逆関数を $\cos^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ で表す;

(3) $\tan x$ は $[-\pi/2, \pi/2]$ で連続かつ単調増加. その逆関数を $\tan^{-1} : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ で表す.

例 3.6. $\sin^{-1} x \in [-\pi/2, \pi/2]$. これを用いると, $\sin^{-1}(1/2) = \pi/6$.

問題 3.7 (確認用)**.** 以下を求めよ: $\cos^{-1}(1/2)$, $\sin^{-1}(-\sqrt{3}/2)$, $\tan^{-1}(-\sqrt{3}/3)$.

問題 3.8 (確認用)**.** $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ の定義域と値域を確認し, これらのグラフを描け.

その他の連続関数の例として, 以下の双曲線関数がある.

例 3.9. 以下は連続関数:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

双曲線関数の名前は, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ をみたすことから来る.

4 (2021/05/11) 微分法 (1)

4.1 関数の微分

まずは微分を定義する. 正確に言うと, 微分係数と微分可能性と導関数を定義する.

定義 4.1. $f(x)$ が a を含む開区間で定義されているとする. 極限値

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき, これを <u>$x = a$ での微分係数</u> とよぶ. また, 微分係数 $f'(a)$ が存在するとき, $f(x)$ は <u>$x = a$ で微分可能</u> という.

定義 4.2. I を開区間とするとき, $f : I \to \mathbb{R}$ が <u>I 上で微分可能</u> とは, f が I 上の全ての点で微分可能であること. またこのとき, 次の関数を f の <u>導関数</u> という:

$$f' : I \to \mathbb{R} : a \mapsto f'(a).$$

例 4.3. 次の関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でない:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \leqq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

先の例からも想像できるかも知れないが, 一般に次が成り立つ.

命題 4.4. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば, $x = a$ で連続.

関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続を示すためには, $\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0$ を示せば良い. なお当然ながら, この命題の逆は成り立たない.

例 4.5. $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で (連続だが) 微分可能でない.

問題 4.6 (自習用)**.**

(1) 例 4.3 の証明を書け.

(2) 例 4.5 の証明を書け.

(3) n を自然数とする. 次の関数が $x = 0$ で微分可能であるための n の条件を求めよ:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \leqq 0), \\ x^n & (x > 0). \end{cases}$$

4.2 関数の微分の計算方法

高校でも学んだ x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x などの微分は既知とする．ここでは, それ以外の関数の微分方法をいくつか紹介する．まずは簡単なものから．

命題 4.7. $f(x)$, $g(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとする．このとき以下の関数も $x = a$ で微分可能であり, 次をみたす:

(1) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,

(2) $(cf)'(a) = cf'(a)$ （ただし c は定数）,

(3) $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$,

(4) $(f/g)'(a) = (f'g - fg')(a)/g(a)^2$ （ただし $g(a) \neq 0$）.

従って, 既知の微分可能関数の四則演算で書かれた関数も微分可能であり, その微分も原理的には計算できる．なお, 関数 $1/g$ を g^{-1} と書くことがあるが, 逆関数と同じ記号になってしまうので, 十分に注意が必要.

次は合成関数の微分に関する性質.

命題 4.8. 関数 $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ が微分可能であり, $f(I) \subset J$ のとき, 合成関数 $g \circ f$ も微分可能で, $y = f(x)$, $z = g(y)$ とおくとき次をみたす:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

この命題を用いると, 例えば次の関数の微分を求めることができる. 恐らく高校でもやっている内容だが, 例えば次のようなもの.

例 4.9. $(\cos x^2)' = -2x \sin x^2$, $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cos x$.

最後に, 逆関数の微分について紹介する.

命題 4.10. 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が微分可能で, 単調な関数とする. もし $f'(x) \neq 0$ (全ての $x \in I$ で) ならば, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ も微分可能で, 次をみたす:

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}.$$

この命題を用いると, 逆三角関数の微分も計算できる. このとき定義域と値域を明記するようにすると良い. 例えば $\sin : (-\pi/2, \pi/2) \to (-1, 1)$, $\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$.

例 4.11. $(\sin^{-1}(x))' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $(\cos^{-1}(x))' = -1/\sqrt{1-x^2}$.

問題 4.12 (小テスト (2))**.** $f(x) = \sin^{-1}(x)$ $(-1 < x < 1)$ の増減と凹凸を調べ, グラフの概形を描け. (逆関数のグラフは, 元の関数のグラフが分かっていれば描けるが, ここでは二階微分まで求めて増減表を作ること. 微分は, $\sin(x)$ の微分と逆関数の微分の性質を用いて求めること.)

問題 4.13 (自習用)**.**

(1) 上と同様に $f(x) = \cos^{-1}(x)$ の増減と凹凸を調べ, グラフの概形を描け.

(2) 以下を示せ: $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$, $(\tan^{-1}(x))' = 1/(1+x^2)$.

(3) $f(x) = \tan^{-1}(x)$ の増減と凹凸を調べ, グラフの概形を描け.

5　(2021/05/18) 微分法 (2)

5.1　曲線のパラメータ表示と接線

ここで教科書の順番と多少前後するが, 曲線のパラメータ表示と, 接線に関する話を先に紹介する. 微分係数は接線の傾きと一致するが, ところで接線とは何か, という話をする.

定義 5.1. 区間 I で定義された関数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ に対して, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ で与えられる xy 平面内の図形を <u>パラメータ表示された曲線</u> という.

これを次のように表す: $C : x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (t \in I)$. 省略して $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ のように書くこともある. ここで, 曲線 C が連続とは, φ, ψ がともに連続であること. 同様に, C が微分可能とは, φ, ψ がともに微分可能であること.

例 5.2. $r > 0$ とすると, $C : x = r\cos t,\ y = r\sin t$ は半径 r の円を表す.

例 5.3. $f : I \to \mathbb{R}$ に対して, $C : x = t,\ y = f(t)$ とおくと, これは $y = f(x)$ のグラフのパラメータ表示.

接線をきちんと定義するために, 2 つの曲線が「接する」という概念を定義する.

定義 5.4. パラメータ表示された曲線 $C : x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ が微分可能であるとする. このとき $(\varphi'(a), \psi'(a))$ を $t = a$ における <u>速度ベクトル</u> という. また, パラメータ表示された二つの曲線 C_1, C_2 が $t = a$ で <u>接する</u> とは, $t = a$ のときに同じ点を与え, さらにその点での速度ベクトルが平行となること.

便宜上, 速度ベクトルが 0 になるものは考えないことにする. また, 特に曲線 C と直線 ℓ が接するとき, ℓ を C の接線という.

命題 5.5. $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき, $y = f(x)$ には点 $(a, f(a))$ における接線が唯一つ存在し, 次のようにかける:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

問題 5.6 (自習用)**.**

(1) 半径 $r > 0$ の円の上半分という曲線に対して, そのパラメータ表示として $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ および $(x, y) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$ を考える. これらの速度ベクトルは, 同じ点では平行になることを確かめよ.

(2) 命題 5.5 の証明を自力で復元せよ.

5.2 平均値の定理

ここでは「平均値の定理」と, その特別な場合である「ロルの定理」を紹介する. これらの定理は, 他の様々な定理の基礎となる. その準備として, まずは極値を定義する. 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ について, $f(c)$ が最大値であるとは, 全ての $x \in I$ に対して $f(x) \leqq f(c)$ となることだった.

定義 5.7. 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ について, $f(c)$ が <u>極大値</u> であるとは, c を含む開区間 J が存在して, 全ての $x \in J$ (ただし $x \neq c$) に対して $f(x) < f(c)$ となること.

極小値も同様に定義し, 極大値と極小値を合わせて <u>極値</u> という. なお, 極値の定義の不等式に等号を許す場合もある.

命題 5.8. I を開区間, $f : I \to \mathbb{R}$ を関数とし, $x = c$ で微分可能とする. このとき $f(x)$ が $x = c$ で最大値・最小値・極値のいずれかをとるなら, $f'(c) = 0$.

証明には, 関数の極限に関する次の性質を使う: $g(x) \geqq 0$ なら $\lim_{x \to a} g(x) \geqq 0$. なお, 右極限や左極限についても同様の性質が成り立つ.

以前に紹介したように, 有界閉区間で定義された連続関数は最大値と最小値をもつ. これと前頁の命題を合わせると, 次が示される.

定理 5.9 (ロルの定理)**.** 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続で, (a, b) 上で微分可能とし, $f(a) = f(b)$ が成り立つとする. このとき次をみたす $c \in (a, b)$ が存在する: $f'(c) = 0$.

ロルの定理を使うと, 平均値の定理が示される.

定理 5.10 (平均値の定理)**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続で, (a, b) 上で微分可能とする. このとき次をみたす $c \in (a, b)$ が存在する:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

ここで左辺の $(f(b) - f(a))/(b - a)$ は, 2 点 $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を結ぶ直線の傾きである. 右辺の $f'(c)$ は $(c, f(c))$ における接線の傾き. この定理の証明には, ロルの定理を用いる. 実際, 題意の関数を $f(x)$ とすると, 次の関数にロルの定理を適用することができる:

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

問題 5.11 (自習用)**.**

(1) 極大値だが最大値ではない例, 最大値だが極大値ではない例を挙げよ.

(2) $f'(c) = 0$ だが $f(x)$ が $x = c$ で極値を取らない例を挙げよ.

(3) ロルの定理は, 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が微分可能でないときには成立しない. 成立しないような関数の例を挙げよ.

(4) 平均値の定理が表す状況を図で説明せよ.

6　(2021/05/25) 微分法 (3)

6.1　関数の増減

ここでは平均値の定理の応用として, 関数の増減に関する命題を紹介する.

命題 6.1. I を区間とし, $f : I \to \mathbb{R}$ が微分可能であるとする. このとき以下が成り立つ:

(1) 常に $f'(x) = 0$ ならば $f(x)$ は定数である;

(2) 常に $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は単調増加;

(3) 常に $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は単調減少.

ちなみに平均値の定理は, 所定の関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して, 次をみたす $c \in (a, b)$ の存在を主張するものだった:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

問題 6.2 (自習用)**.** I を区間とし, $f : I \to \mathbb{R}$ が微分可能であるとする.

(1) 常に $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は単調減少であることを示せ.

(2) $f(x)$ は単調減少だとしても, 常に $f'(x) < 0$ とは限らない. 反例を挙げよ.

(3) 教科書 p39, 問題 2.2 問 1 (微分を使って不等式を示す問題) を解け.

6.2 ロピタルの定理

ここでは, 平均値の定理の他の応用例のとして, ロピタルの定理を紹介する. ロピタルの定理は, 不定形の極限値を求める際に有効な方法だが, 高校では範囲外のはず (受験テクニックとして習った人もいるかも知れないが).

定理 6.3 (ロピタルの定理)**.** 関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x = a$ の近くで定義されていて微分可能とする. もし $f(a) = g(a) = 0$, $g'(x) \neq 0$ であり, $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ が存在するならば, 次が成り立つ:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

この定理は $0/0$ の場合を扱っているが, $x \to \pm\infty$ の場合や, ∞/∞ の場合にも同様の定理が成り立つ. 証明の前に, 状況を理解するための例を紹介する.

例 6.4.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x^2+3x)'}{(x^2+x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{4x+3}{2x+1} = 3.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2+3x}{x^2+x} = \lim_{x\to \infty} \frac{(2x^2+3x)'}{(x^2+x)'} = \lim_{x\to \infty} \frac{4x+3}{2x+1} = \lim_{x\to \infty} \frac{(4x+3)'}{(2x+1)'} = \lim_{x\to \infty} \frac{4}{2} = 2.$

これらの例は, ロピタルの定理を使わなくても極限は分かる. 一方で, $\lim_{x\to 0}(x+1)/(2x+1)$ などの場合に間違って適用しないように注意.

ロピタルの定理が有効に使われるのは, 当然ながら, 分母分子が多項式でないときである.

例 6.5.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^x=1.$ ($\log x^x$ の極限を調べればよい.)

なお, $(\sin x)'=\cos x$ の証明に上の事実を用いる場合が多いので, 循環論法っぽいが, 単に例なので気にしないことにする.

問題 6.6 (自習用)**.** 次の極限を調べよ:

(1) $\lim_{x\to 0}(x-\sin x)/x^3$;

(2) $\lim_{x\to 0}(e^x-(1+x+(1/2)x^2))/x^3$;

(3) $\lim_{x\to\infty}x^{1/x}$.

ロピタルの定理の証明には, 次の定理を用いる.

定理 6.7 (コーシーの平均値の定理)**.** 関数 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続で, (a, b) 上で微分可能であるとし, 常に $g'(x) \neq 0$ が成り立つと仮定する. このとき, 次をみたす $c \in (a, b)$ が存在する:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

注意 6.8.

(1) 定理において, 「常に $g'(x) \neq 0$」という仮定から, $g(b) - g(a) \neq 0$ が自動的に従う.

(2) コーシーの平均値の定理で特に $g(x) = x$ とした場合が, 通常の平均値の定理.

(3) コーシーの平均値の状況は, 曲線 $(g(t), f(t))$ 上の 2 点を通る直線と速度ベクトルを考えると理解しやすい.

なお証明は, ロルの定理を次の関数に適用すれば良い:

$$F(x) := f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) + f(a) \right).$$

コーシーの平均値の定理を使って, ロピタルの定理を証明する. 関数 $f(x)$, $g(x)$ が, $f(a) = g(a) = 0$, $g'(x) \neq 0$ をみたすとし, $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ が存在すると仮定する. この設定の下で, 次を示せば良い:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

この状況にコーシーの平均値の定理を適用すれば良い.

問題 6.9 (自習用)**.**

(1) コーシーの平均値の定理が表す状況を図で説明せよ.

(2) 教科書 p39, 問題 2.2 問 4 (ロピタルの定理を使って極限を求める問題) を解け.

7　(2021/06/01) 微分法 (4)

大学からの要請により 6/20 まで遠隔授業期間. この講義は 6/22(火) まで遠隔, 6/29(火) に中間試験を行う. 中間試験は, 可能なら対面で行うが, 状況によっては遠隔実施の可能性もある.

7.1　高次の導関数

関数 $y = f(x)$ の導関数が存在するときに $f'(x)$ とかいた. さらに $f'(x)$ の導関数が存在するときに $f''(x)$ とかき, $f(x)$ の 2 回微分あるいは 2 次の導関数という. 以下同様に, n 回微分が存在するとき, 以下のように表す:

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad y^{(n)}.$$

定義 7.1. 関数 $f(x)$ が $\underline{C^n \text{ 級}}$ であるとは, n 回微分 $f^{(n)}(x)$ が存在して, さらにこれが連続であること. また, 何回でも微分できるときには $\underline{C^\infty \text{ 級}}$ であるという.

一般に, 関数の n 階微分が一つの簡潔な式で表せるとは限らないが, 以下のような場合にはそれができる.

例 7.2. $\sin x$, $\cos x$, e^x, a^x $(a > 0)$ は C^∞ 級であり, 以下をみたす:

(1) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + (n/2)\pi)$;

(2) $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + (n/2)\pi)$;

(3) $a > 0$ のとき $(a^x)^{(n)} = (\log a)^n a^x$. よって特に $(e^x)^{(n)} = e^x$.

問題 7.3 (自習用)**.** $(\cos x)^{(n)}$ を cos を使って表せ.

例えば $f(x) = |x|$ のような関数は, 連続だが微分不可能だった (そのような関数を C^0 級であるという). 同様に, C^k 級だが C^{k+1} 級でない関数が存在する. 次がその典型的な例.

例 7.4. $f(x) = x|x|$ は C^1 級だが, 2 回微分は存在しない (このとき $f'(x) = 2|x|$).

高次の微分の応用として, 曲線の凹凸に関する話題を紹介する. 2 階微分を見ると曲線の凹凸が分かる, という事実は, 高校でも登場していたと思うが, ここではその復習をする.

定義 7.5. 曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $P(a, f(a))$ での接線を ℓ とする.

(1) C が P で <u>下に凸</u> とは, P の近くにおいて, P 以外の点では C が ℓ より上にあること;

(2) C が P で <u>上に凸</u> とは, P の近くにおいて, P 以外の点では C が ℓ より下にあること;

(3) P が C の <u>変曲点</u> であるとは, P の前後で C と ℓ の上下が入れ替わること.

例 7.6. 以下が成り立つ:

(1) $C : y = x^2$ は全ての点において下に凸.

(2) $C : y = x^3$ は $x = 0$ のときに変曲点.

次の定理が, 2 階微分をみると曲線の凹凸が分かる, ということを主張する. ただし十分条件を与えているだけなので, 完全に分かる訳ではないことに注意する (自習用問題を参照).

定理 7.7. $f''(x)$ が $x = a$ で連続とする.

(1) $f''(a) > 0$ のとき, $f(x)$ は $(a, f(a))$ で下に凸;

(2) $f''(a) < 0$ のとき, $f(x)$ は $(a, f(a))$ で上に凸;

(3) $f''(a) = 0$ のとき, $f''(x)$ の符号が a の前後で入れ替わるなら, $(a, f(a))$ は変曲点.

問題 7.8 (自習用)**.**

(1) $f(x) = x^4$ の $x = 0$ での 2 階微分と凹凸を調べよ;

(2) 上の定理 (2) を示せ;

(3) $f(x) = x^3$ は $x = 0$ において上の定理 (3) の条件をみたすことを確かめよ.

先の凹凸の判定条件を使うと, 極大・極小に関する判定条件も得られる. これも十分条件である (必要ではない) ことに注意する.

定理 7.9. $f'(a) = 0$ とし, $f''(x)$ が $x = a$ で連続とする.

(1) $f''(a) > 0$ のとき, $f(x)$ は a で極小値をもつ;

(2) $f''(a) < 0$ のとき, $f(x)$ は a で極大値をもつ.

問題 7.10 (自習用)**.** C^2 級関数 $f(x)$ が $x = a$ で極小値をもつとしても, $f''(a) > 0$ とは限らない. 反例を挙げよ.

7.2 テーラーの定理

関数 $f(x)$ の微分や極限を調べる際に, 多項式ならば計算しやすい場合が多い. ここで紹介するテーラーの定理は, 一般の微分可能関数を "多項式で近似" できることを主張する.

定理 7.11 (テーラーの定理)**.** $f : I \to \mathbb{R}$ が n 回微分可能であるとする. 任意の $a, b \in I$ について, 次をみたす $c \in (a, b)$ が存在する:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

テーラーの定理の $n = 1$ の場合が平均値の定理. 上の定理の $(f^{(n)}(c)/n!)(b-a)^n$ を <u>剰余項</u> という. また, テーラーの定理で $b = x$ とおくと次が得られる.

定理 7.12 (有限テーラー展開)**.** $f : I \to \mathbb{R}$ が n 回微分可能であるとする. $a \in I$ を固定すると, 各 $x \in I$ に対して, 次をみたす $\theta \in (0, 1)$ が存在する:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!}(x-a)^n.$$

問題 7.13 (自習用)**.**

(1) 上記のテーラーの定理の式を写せ;

(2) テーラーの定理から有限テーラー展開を復元せよ.

有限テーラー展開の $a=0$ の場合を, 特に有限マクローリン展開という. すなわち, 各 $x \in I$ に対して, 次をみたす $\theta \in (0,1)$ が存在する:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n.$$

例 7.14. $f(x) = e^x$ をマクローリン展開すると, $\theta \in (0,1)$ が存在して

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{e^{\theta x}x^7}{7!}.$$

このマクローリン展開の応用として, 次が示される.

例 7.15. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x + x^2/2)}{x^3} = \frac{1}{6}.$

問題 7.16 (自習用)**.** 教科書 p.53, 問題 2.4 (1), (2) の関数の有限マクローリン展開を求めよ.

また, 先のマクローリン展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{e^{\theta x}x^7}{7!}$$

の別の応用として, 近似値の計算がある. ここで $e^\theta < e < 3$ を用いると誤差の評価もできる.

例 7.17.

(1) $e \sim 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2.718055;$

(2) $|e - 2.718055| < 0.0006.$

問題 7.18 (自習用)**.** 教科書 p.53, 問題 2.4 (6) の近似値を求めよ.

8 (2021/06/08) 微分法 (5)

マクローリン展開の剰余項は, 例えば極限値を求める場合には, その正確な表示は重要ではなかった. そこで, その剰余項を“ざっくり”表示した漸近展開と, いくつかの応用を紹介する.

8.1 ランダウの記号と漸近展開

マクローリン展開の剰余項を“ざっくり”表示したい. 例えば, 先のマクローリン展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{e^{\theta x}x^7}{7!}$$

を考えると, 最後の項は“次数が x の 7 次式以上”という情報さえあれば, 極限値を求めるためには十分だった. それを表示するために, 次で定義されるランダウの記号を用いる.

定義 8.1. 関数 f, g に対して, $f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ であるとは 次が成り立つこと:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

この $o(g(x))$ という記号を <u>ランダウの記号</u> という. 例えば $f(x) = o(x^6)$ $(x \to 0)$ は

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^6} = 0$$

すなわち $f(x)$ は (多項式に換算すると) x の 7 次以上の式, ということを意味する. これを用いてマクローリン展開を表示したものが, 次の漸近展開である.

定理 8.2 (漸近展開)**.** $f : I \to \mathbb{R}$: C^n 級とし, $0 \in I$ とする. このとき

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0).$$

例 8.3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6).$

問題 8.4 (自習用)**.** 以下を示せ:

(1) $\log(1+x) = x - (1/2)x^2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$;

(2) $\cos x = 1 - (1/2)x^2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$;

(3) $\sin x = x + o(x^2)$ $(x \to 0)$.

このような簡単な関数の場合は直接計算すれば良いが, 例えば $e^x \cos x$ のような関数の漸近展開を求める際に, いちいち微分するのは面倒であろう. このような場合は, e^x と $\cos x$ の漸近展開を組み合わせて求めることができる. その際に次を使う.

命題 8.5. $x \to 0$ のとき以下が成り立つ:

(1) $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$;

(2) $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})$;

(3) $m \leqq n$ のとき $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$.

ここで $o(x^n)$ は通常の意味の式ではないことに注意. あくまで "$n+1$ 次以上の何らかの式" を略記しただけである. 従って, 例えば $o(x^n) - o(x^n) = 0$ ではない.

先のランダウの記号の演算を使うと, 次が分かる.

例 8.6. $(\cos x)e^x = (1-(1/2)x^2+o(x^2))(1+x+(1/2)x^2+o(x^2)) = 1+x+o(x^2)$ $(x \to 0)$.

問題 8.7 (自習用)**.** 教科書 p53, 問題 2.4 (3) を解け.

8.2 漸近展開の応用

ここでは, 漸近展開の応用を二つ紹介する. 一つは, 極限を求めるものである.

例 8.8. 次が成り立つ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

問題 8.9 (自習用)**.** 教科書 p53, 問題 2.4 (4) を解け.

問題 8.10 (小テスト (3))**.** 漸近展開を用いて次の極限を求めよ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\sin x}.$$

漸近展開の応用のもう一つは, 関数の極値の判定である.

例 8.11. $f(x) = (\cos x - 1)\sin(x^2)$ は $x = 0$ において極大値をとる.

ちなみにこの $f(x)$ について, $f'(0) = f''(0) = 0$ である. なお, $x = 0$ において極大値をとることを示すためには, $f(x) - f(0) < 0$ (x が 0 の近いとき) を示せば良い.

問題 8.12 (自習用)**.** 教科書 p53, 問題 2.4 (5) を解け.

9　(2021/06/15) 積分法 (1)

9.1　定積分と区分求積法

教科書とは順番を少し変えて, 不定積分ではなく定積分の定義から始める. 教科書では § 3.4 の内容. 定積分は区分求積を使って定義する. 次はそのための準備.

定義 9.1. 閉区間 $[a, b]$ に対して, 次をみたす $x_1, \ldots, x_{n-1}$ を <u>分割</u> という:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

分割は, n 等分でも良いし, ばらばらの幅のものに分けるのでも良い. もう一つの準備として, 上限・下限という用語を定義する.

定義 9.2. $A \subset \mathbb{R}$ が有界であるとする. このとき A の上界のうち最小のものを <u>上限</u> と呼び $\sup A$ で表す. 同様に A の下界のうち最大のものを <u>下限</u> と呼び $\inf A$ で表す.

有界集合に対して, 最大値と最小値は常に存在するとは限らなかったが, 上限と下限は必ず存在する. 例えば $A = [0, 1]$ や $(0, 1)$ の場合に考えてみると良い.

次が定積分の定義. このような方法を区分求積法という.

定義 9.3 (定積分)**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を関数とする. このとき,

(1) 分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ に対して, 次のように定める:

$$M_i := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad S(f, \Delta) := \textstyle\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad s(f, \Delta) := \textstyle\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

(2) 分割を動かしたときの上限と下限を考えることにより,

$$S(f) := \inf\{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は分割 }\}, \quad s(f) := \sup\{s(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は分割 }\}.$$

(3) $S(f) = s(f)$ が成り立つとき, f は $[a, b]$ 上で <u>**積分可能**</u> であるといい, 次を <u>**定積分**</u> という:

$$\int_a^b f(x)dx := S(f) = s(f).$$

ここで一般に $s(f) \leqq S(f)$ が成り立つことに注意する.

例 9.4. $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ を次で定義する: $f(1) = 1$, $f(x) = 0$ $(x \neq 1)$. このとき

$$\int_0^2 f(x)dx = 0.$$

定義 9.5 (定積分 (再掲))**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を関数とする. このとき,

(1) 分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ に対して, 次のように定める:

$$M_i := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad S(f, \Delta) := \textstyle\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad s(f, \Delta) := \textstyle\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

(2) 分割を動かしたときの上限と下限を考えることにより,

$$S(f) := \inf\{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は分割 }\}, \quad s(f) := \sup\{s(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は分割 }\}.$$

(3) $S(f) = s(f)$ が成り立つとき, f は $[a, b]$ 上で <u>**積分可能**</u> であるといい, 次を <u>**定積分**</u> という:

$$\int_a^b f(x)dx := S(f) = s(f).$$

例 9.6. 次で定義される関数 $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ は積分不可能:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}). \end{cases}$$

積分可能であるかどうかを, 毎回定義に戻って証明するのは, 現実的ではない. 次の定理により, 今まで紹介したような良い関数は, ほとんどは積分可能であることが保障される.

定理 9.7. 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば積分可能.

また, 積分可能であることが分かっている関数については, 次を使うと定積分を少し簡単に表記することができる.

命題 9.8. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が積分可能であるとし, $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ を分割とする. このとき $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ とすると,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

ここで $|\Delta| := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$. これを分割 Δ の <u>幅</u> という.

10　(2021/06/22) 積分法 (2)

前回までに, 定積分を区分求積を用いて導入した. 今回は不定積分を定義し, 定積分が高校までにやっていたであろう方法で計算できることを述べる.

10.1　不定積分

定義 10.1. 関数 $F(x)$ が $f(x)$ の <u>原始関数</u> であるとは, $F(x)$ が微分可能で $F'(x) = f(x)$ となること. またこのとき次のように書く:

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

微分が常に 0 となる関数は定数関数だったので, 原始関数は定数の差を除いて一意に決まる. 正確に書くと次のようになる.

命題 10.2. $F(x)$, $G(x)$ がどちらも $f(x)$ の原始関数であるとすると, $F(x) - G(x)$ は定数.

従って不定積分を正確に書くには積分定数を考慮する必要があるが, この講義では教科書に従って省略する. ただし, 定数しかずれていなくても, 見た目が異なる場合もあるので注意.

例 10.3. $(\sin^{-1} x)' = -(\cos^{-1} x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$.

例 10.4. 積分定数を省略して, 以下が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x$; $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x$; $\displaystyle\int (1/\cos^2 x) dx = \tan x$;

(2) $a \neq -1$ のとき $\displaystyle\int x^a dx = (1/(a+1))x^{a+1}$; $\displaystyle\int x^{-1} dx = \log|x|$;

(3) $\displaystyle\int (1/\sqrt{1-x^2}) dx = \sin^{-1} x$; $\displaystyle\int (1/(1+x^2)) dx = \tan^{-1} x$.

10.2　定積分と不定積分

ここでは積分が微分の逆演算であるという微積分の基本定理を紹介する．このことから, 定積分と不定積分が関係し, 区分求積をしなくても定積分を求めることができるようになる．次の補題は, そのための準備.

補題 10.5. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が積分可能であり, $a < c < b$ のとき,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

先の補題 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ を用いて, 次が示される.

定理 10.6 (微積分の基本定理)**.** $f : I \to \mathbb{R}$ を連続とする. 各 $a \in I$ に対して次は $f(x)$ の原始関数である:

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

上の定理を原始関数の定義に従って書き直すと,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

系 10.7. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続であるとし, $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

この右辺を次のように書くことが多い: $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$. これにより, 高校で習ったであろう定積分の求め方が使えるようになった.

例 10.8. 以下が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1;$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^5 dx = 1/6.$

11　(2021/06/29) 中間試験問題

注意

小テストの解答をこの用紙に記入せよ. 解答は, 単に式を羅列するのではなく,「…とおく」,「…と仮定する」のような語句を適宜用いること.

定義や用語

解答する際には, 以下の定義などを参考にして良い.

- $f(x)$ が $x = a$ で微分可能とは, 次が存在すること: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- $f(x)$ が $x = c$ で極大とは, c を含む開区間 J が存在して, 全ての $x \in J$ (ただし $x \neq c$) に対して $f(x) < f(c)$ となること. 別の言い方をすると, "$x = c$ の十分近くでは".
- $f(x) = o(x^n)$ $(x \to 0)$ とは, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = 0$.
- $f(x)$ の x^n の項までの漸近展開とは, $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$ $(x \to 0)$.

問題

[1] 関数 $f(x) := x|x|$ が $x = 0$ で微分可能であるかどうかを答えよ. また, それを定義に従って示せ. (20 点)

[2] 以下に答えよ. (計 30 点)

(1) $\sin x$ と e^x の漸近展開を x^3 の項まで書け (証明不要).

(2) $f(x) = \sin(x) - xe^x + x^2$ が $x = 0$ で極値をとるかどうか調べよ.

[3] 逆三角関数 $f(x) = \cos^{-1}(x)$ $(-1 < x < 1)$ を考える. (計 60 点)

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ. どのように求めたかも書くこと.

(2) $f(x)$ の増減と凹凸を調べ, グラフの概形を描け. 端点の座標も求めること.

(3) $f(x)$ の漸近展開を x^3 の項まで求めよ.

(4) 次の極限値が有限となる実数 α と, その時の極限値を求めよ: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x+\alpha}{x^3}$.

[4] (中間アンケート) 授業全般に関して意見・コメント・要望等がありましたら, 答案の所定の欄に書いて下さい. 匿名で書きたい場合は, webclass の目安箱を使って下さい.

12 (2021/07/06) 積分法 (3)

ここから数回, 積分の計算方法をいくつか紹介する. 高校までに習った基本的な関数の積分に加えて, 逆三角関数の微分の項で紹介したことより, 我々は次の積分も知っている:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x.$$

12.1 置換積分

置換積分は, 合成関数の微分の逆操作である.

定理 12.1. $x = x(t)$ のとき,

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt.$$

証明は, 両辺を t で微分すれば良い. 上を用いた積分方法を置換積分という. 形式的に書くと,

$$dx = \frac{dx}{dt}dt.$$

例 12.2. 置換積分により以下が得られる:

(1) $\displaystyle\int \cos(ax)dx = (1/a)\sin(ax)$ $(a \neq 0)$;

(2) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x dx = (1/3)\sin^3 x$.

前者は $t = ax$, 後者は $t = \sin x$ とすれば良い (もちろん置換積分の方法は一通りではない). ちなみにこの程度のものなら, 答えの何となくの形を予想した方が早いかも知れない.

命題 12.3. 以下が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int (1/\sqrt{a^2-x^2})dx = \sin^{-1}(x/|a|)$ $(a \neq 0)$;

(2) $\displaystyle\int (f'(x)/f(x))dx = \log|f(x)|$.

問題 12.4 (小テスト (4))**.** $\tan^{-1} x$ の導関数を, $\tan x$ の微分を用いて求めよ. また $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ を求めよ. ただし $a > 0$ とする.

置換積分をどのようにすれば良いかについては, 一定の方針がある. 例えば $\sqrt{1-x^2}$ という項がある場合には, $y = \sqrt{1-x^2}$ すなわち $x^2 + y^2 = 1$ の媒介変数表示 ($(x, y) = (\cos t, \sin t)$) と相性が良い. 他にも, 例えば $\sqrt{1+x^2}$ という項がある場合には, $y = \sqrt{1+x^2}$ すなわち $x^2 - y^2 = -1$ の媒介変数表示と相性が良い. 双曲線の媒介変数表示もいろいろあるが, 例えば次は便利:

$$(x, y) = (\sinh t, \cosh t), \quad \sinh t = (e^t - e^{-t})/2, \quad \cosh t = (e^t + e^{-t})/2.$$

命題 12.5. 次が成り立つ: $\displaystyle\int (1/\sqrt{x^2+a})dx = \log|x+\sqrt{x^2+a}|$.

単に証明するだけなら, 右辺を微分すれば良い. 右辺の形が分からない状態で求める場合には, 置換積分する. その際に, $x+\sqrt{x^2+1}=t$ のような謎の変数変換をしても良いが, 双曲線を使うのが素直だと思われる.

定理 12.6. $x=x(t)$ が $[\alpha,\beta]$ 上で定義され, $f(x)$ が区間 I 上で定義されているとする. このとき, $x([\alpha,\beta])\subset I$ ならば,

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)dx = \int_a^b f(x(t))x'(t)dt.$$

12.2 部分積分

部分積分は, 積の微分法則の逆操作である.

定理 12.7. $G(x)=\displaystyle\int g(x)dx$ とおくと,

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx.$$

定理 12.8. $G(x)=\displaystyle\int g(x)dx$ とおくと,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx.$$

部分積分を行う場合には, 定理にきちんと当てはめるよりも, 答えに登場しそうな項を予想して積の微分法則を用いた方が, 簡単な場合が多いように思われる.

例 12.9. 部分積分により以下が得られる:

(1) $\displaystyle\int \log(x)dx = x\log x - x$;

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx = (1/4)e^2 + 1/4$.

命題 12.10. 以下が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = (1/2)\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}(x/|a|)\right)$;

(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}dx = (1/2)\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log|x+\sqrt{x^2+a}|\right)$.

問題 12.11. 次の不定積分を求めよ: $\displaystyle\int x^2e^{2x}dx$.

13　(2021/07/13) 積分法 (4)

13.1　有理式の積分

有理式とは, x の多項式を多項式で割った形の式である. ここでは有理式の原始関数を求める方法を紹介する. 多項式の原始関数はよく分かっている.

注意 13.1. 多項式でない有利関数について, 以下の原始関数は以前にやった:

(1) $\displaystyle\int (1/(x+a))dx = \log|x+a|$;

(2) $\displaystyle\int (1/(x^2+a^2))dx = (1/a)\tan^{-1}(x/a)$ $(a \neq 0)$.

従って, “1/(2 次式)” の積分も置換積分によって求められる.

例 13.2. $\displaystyle\int (1/(x^2+2x+2))dx = \tan^{-1}(x+1)$.

次は “(1 次式)/(2 次式)” の形の場合. このとき, 分母が因数分解できるなら, 部分分数展開を用いるのが一般的.

例 13.3. 部分分数展開により,

(1) $\displaystyle\int ((5x-4)/(2x^2+x-6))dx = (1/2)\log|2x-3| + 2\log|x+2|$;

(2) $\displaystyle\int ((x+2)/(x^2+2x+2))dx = (1/2)\log|x^2+2x+2| + \tan^{-1}(x+1)$.

一般に $f(x)$, $g(x)$ が多項式で, $\deg f(x) \geqq \deg g(x)$ のとき, 多項式の商と余りを考えることにより (つまり $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$ のように表すことにより), 分子の方が次数が低い場合に帰着できる.

例 13.4. $t^4/(1+t) = t^3 - t^2 + t - 1 + 1/(1+t)$.

次はより一般の “1 次式/3 次式” の形の場合.

例 13.5. $f(x) := (2x-3)/((x-1)^2(x+3))$ とおくと,

(1) $f(x) = -(1/(4(x-1)^2)) + (9/(16(x-1))) - (9/(16(x+3)))$;

(2) $\displaystyle\int f(x)dx = (1/(4(x-1))) + (9/16)\log|((x-1)/(x+3))|$.

このように一般の場合も変形あるいは展開すると, あとは “(1 次式)/$(x^2+b^2)^n$” および “$1/(x^2+b^2)^n$” の積分が求めれば良いことが分かる. 前者は置換積分で比較的容易に積分できる. 後者は n に関して帰納的に求めることができる.

13.2　無理関数を含む積分

上で説明したのは x の有理式の積分であったが, ここでは, x と $\sqrt[n]{ax+b}$ が入った有理式の場合を考える. このとき, 次の置換積分により有理関数の成分に帰着することができる.

命題 13.6. $t = \sqrt[n]{ax+b}$ とおくと, 以下が成り立つ:

$$x = (t^n - b)/a, \quad dx = (n/a)t^{n-1}dt.$$

例 13.7. $\displaystyle\int (1/(x+2\sqrt{x-1}))dx = 2\log(\sqrt{x-1}+1) + 2/(\sqrt{x-1}+1).$

また, x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の場合は, $t = \sqrt{ax^2+bx+c}$ とおいても上手く置換積分できない. 天下りだが, $a > 0$ のときは $t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x$ とおけば良い.

例 13.8. $\displaystyle\int (1/\sqrt{x^2-1})dx = \log|\sqrt{x^2-1}+x|.$

14　(2021/07/20) 積分法 (5)

14.1　三角関数の有理式の積分

前項では, 有理式あるいはルートの入った有理式の積分を見た. ここでは, 三角関数が入った有理式の積分を紹介する. 基本的には, 置換積分をして有理式の積分に帰着させる.

命題 14.1. $u = \tan(x/2)$ とおくと,

$$dx = \frac{2}{1+u^2}du, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

したがって, 三角関数の有理式の積分は, 上の変数変換によって u の有理式の積分にできる. ただし, これ以外の変数変換も当然考えることができる.

例 14.2. $\displaystyle\int((1+\sin x)/(1+\cos x))dx = \tan(x/2) + \log(1+\tan^2(x/2)).$

積分したい関数によっては, 上のような $u = \tan(x/2)$ ではない置換をした方が良い場合もある. また, 置換積分の方法が違うと, 答えの見た目が大幅に変わることがある. 次はそのような例.

例 14.3. $I := \displaystyle\int(1/\sin x)dx$ について,

(1) $u = \tan(x/2)$ と変数変換すると, $I = \log|\tan(x/2)|$;

(2) $u = \cos x$ と変数変換すると, $I = (1/2)\log|(\cos x - 1)/(\cos x + 1)|$.

問題 14.4. $\displaystyle\int(1/(3+2\cos x))dx = (2/\sqrt{5})\tan^{-1}((1/\sqrt{5})\tan(x/2)).$

14.2　積分の漸化式

自然数 n が入った積分, 例えば n 乗の積分などの場合には, 部分積分することによって漸化式が出てくる場合がある. ここではそのような例を紹介する.

例 14.5. $I_n := \displaystyle\int\cos^n x dx$ とおくと, 次が成り立つ: $I_n = (1/n)\cos^{n-1}x\sin x + ((n-1)/n)I_{n-2}$.

問題 14.6. $I_n := \displaystyle\int(\log x)^n dx$ とおくとき, 次が成り立つことを示せ: $I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1}$.

14.3 広義積分

これまでに紹介した定積分は, 全て閉区間 $[a,b]$ 上での積分だった. ここでは, 開区間あるいは (半) 直線上での積分を紹介する. 当然ながら, 積分が発散することがしばしば起こるが, 収束する場合もある.

定義 14.7. 関数 $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ が連続であるとする (ここで $b=+\infty$ の場合も含む). このとき, $f(x)$ が $[a,b)$ 上で <u>**積分可能**</u> であるとは, 下記の右辺が収束すること (これを広義積分と呼ぶ):

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)dx.$$

注意 14.8. 連続関数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が積分可能であることは, 適当な $c\in(a,b)$ で積分範囲を区切って, $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ と $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ がどちらも存在すること. 区切らないで $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx=0$ のような計算をしてはいけない.

例 14.9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-2}dx=1$, しかし一方で $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-1}dx=+\infty$ (発散).

15　(2021/07/27) 積分法 (6)

15.1　広義積分 (続き)

例 15.1. $\displaystyle\int_0^1 (1/\sqrt{x})dx = 2$, しかし一方で　$\displaystyle\int_0^1 x^{-1}dx = +\infty$ (発散).

命題 15.2. $a > 0$, $k \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 広義積分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^k dx$ が収束するための必要十分条件は, $k < -1$ となること. また, 収束するときの値は $-(1/(k+1))a^{k+1}$.

命題 15.3. $\displaystyle\int_a^b (b-x)^k dx$ が収束するための必要十分条件は $k > -1$ となること. また, 収束するときの値は $(1/(k+1))(b-a)^{k+1}$.

問題 15.4 (自習用)**.** $a, k \in \mathbb{R}$ とする. このとき $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{kx}dx$ が収束するための k の条件を求めよ. また, 収束するときに定積分の値を計算せよ.

15.2　広義積分の収束の判定

広義積分の値を求めることが難しくても, 収束するかどうかを判定できる方法がある. イメージとしては “はさみうち”.

定理 15.5 (優関数の原理)**.** $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ を連続とする ($b = +\infty$ も許す). 連続関数 $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ で, 以下を満たすものが存在したと仮定する:

(1) $|f(x)| \leqq g(x)$;　(2) $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が存在する.

このとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も存在する.

例 15.6. $\displaystyle\int_0^1 (\sin x/\sqrt{1-x})dx$ は収束する.

例 15.7. $\displaystyle\int_0^1 \sin(1/x)dx$ は収束する.

証明は $|\sin(1/x)| \leqq 1$ を使えば良い. ただし広義積分の値が何になるかは求めていない.

前の定理 (優関数の原理) と同様にして, 発散するための十分条件も与えることができる.

定理 15.8. $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ を連続とする ($b = +\infty$ も許す). 連続関数 $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ で, 以下を満たすものが存在したと仮定する:

(1) $0 \leqq g(x) \leqq f(x)$;　(2) $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ は発散する.

このとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も発散する.

例 15.9. $\displaystyle\int_2^{+\infty} (1/(x(x-1))^{1/3})dx$ は発散する.

命題 15.10. $s > 0$ のとき, $\Gamma(s) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する (これを <u>ガンマ関数</u> という).

これが収束することを示すためには, $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ および $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ が共に収束することを確かめなくてはならない (切る場所は 1 である必然性はない). 後者を確かめるには,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}x^{s-1}}{e^{-x/2}} = 0$$

を用いると良い.

問題 15.11 (自習用)**.** $s > 0$ とする. このとき $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ が収束することを示せ.

16　(2021/08/03) 期末試験問題

注意

解答は, 単に式を羅列するのではなく, 「…とおく」, 「…と仮定する」のような語句を適宜用いること.

定義や用語

解答する際には, 以下を参考にして良い.

- 極値をとるとは, 極大または極小となること.
- $f(x) = o(x^n)$ $(x \to 0)$ とは, $\lim_{x\to 0}(f(x)/x^n) = 0$.
- $f(x)$ の x^n の項までの漸近展開とは, $f(x) = \sum_{k=0}^{n}(f^{(k)}(0)/k!)x^k + o(x^n)$ $(x \to 0)$.
- $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.
- $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$.

問題

[1] (計 50 点) 逆三角関数 $f(x) = \tan^{-1}x$ を考える.

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ. どのように求めたかも書くこと.

(2) $f(x)$ の増減と凹凸を調べ, グラフの概形を描け.

(3) $f(x)$ の $x \to 0$ のときの漸近展開を x^3 の項まで求めよ.

(4) $g(x) = x - f(x)$ が $x = 0$ で極値をとるかどうか調べよ.

[2] (計 40 点) $u = \tan(x/2)$ とおく.

(1) dx, $\sin x$, $\cos x$ を u, du を用いて表せ.

(2) 次の不定積分を求めよ (検算もすること): $\displaystyle\int \frac{5}{3\sin x + 4\cos x}dx$.

[3] (30 点) $t = e^x$ および [1] を参考にして, 次の広義積分の値を求めよ: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx$.

[4] 授業全般に関して意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.