前書き

本稿は, 2021 年度前期に大阪市立大学で行われる幾何学講義 I・幾何学特論 I の講義資料である．講義の内容が全て記載されている訳ではなく, 概要と流れだけが分かることを目的としたレジメと言った方が近い.

講義の内容

Lie 群および Lie 代数の基本的な事項について解説する．標語的にいうと, Lie 群は「多様体かつ群」であり, Lie 代数は「ベクトル空間かつ (所定の条件をみたす) 積」である．これらがそれぞれ何であるかということと, これら両者が実は対応するということを紹介する．これが本講義の目的である.

しかし, いきなり抽象論に入るのは難しいと思われるので, Lie 群と Lie 代数の特別な場合である「線型 Lie 群」と「線型 Lie 代数」から話を始めたい．線型 Lie 群と線型 Lie 代数は, 不正確さを無視してざっくり言うと「行列で書ける Lie 群と Lie 代数」である．行列で書けるものは, 一般的な Lie 群・Lie 代数としても典型的な例になっているので, その扱いに慣れておくことは重要である.

なお, 本講義で扱うものは, 正確に言うと, 有限次元実 Lie 群あるいは有限次元実 Lie 代数である.

成績および単位

小テスト問題あるいはレポート問題を授業中に提示し, それを解いて提出することを要請する．解答が不十分な場合には再提出とし, さらに問題ごとに提出期限を決める．従って, 再提出があったとしても期限内にクリアできるように, 余裕をもって提出することが望ましい．様子と状況を見て変更する可能性はあるが, 基本的には小テストあるいはレポートの提出状況で成績を付ける予定.

遠隔対応

この講義は 4 回生および大学院生が対象であり, 受講者数はそれほど多くはならないと思われるので, 基本的には対面授業で行う (当然ながら感染状況等により変更する可能性はある). 上述の小テストあるいはレポートの提出については, 授業時間時に提出したものは時間に余裕があればその場で採点して結果を伝える. WebClass を通じた提出も受け付ける予定だが, その希望があるかどうかは講義時に照会する.

第 1 章

線型 Lie 群

一般線型群 $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の閉部分群を線型 Lie 群とよぶ. ここでは, その定義と例を紹介する. また, 線型 Lie 群の間の同型の概念を定義する.

1.1 線型 Lie 群の定義

本稿を通して, $M(n,\mathbb{R})$ を $n\times n$ 実行列全体の集合とする. 行列 g の行列式を $\det(g)$ で表す.

定義 1.1.1. $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) := \{g \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を 一般線型群 と呼ぶ.

一般線型群 $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ は, 行列の積に関して群となる. また, $M(n,\mathbb{R})$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n^2}$ との自然な同一視によって位相空間となるので, $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ にはその相対位相を入れることにより, 位相空間となる.

定義 1.1.2. $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の閉部分群を **線型 Lie 群** と呼ぶ.

従って $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ そのものは線型 Lie 群である. 念のために, 群 G 内の部分集合 K が 部分群 であるとは, 以下が成り立つこと :

(i) $e \in K$. ただし e は G の単位元.
(ii) 任意の $g,h \in K$ に対して, $gh \in K$.
(iii) 任意の $g \in K$ に対して, $g^{-1} \in K$.

1.2　線型 Lie 群の例

まずは典型的な線型 Lie 群の例を挙げる．行列 g の転置行列を ${}^t g$ で表し，n 次の単位行列を I_n で表す．

例 1.2.1. 以下は線型 Lie 群である:

(1) $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R}) := \{g \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ (特殊線型群),

(2) $\mathsf{O}(n) := \{g \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \mid {}^t gg = I_n\}$ (直交群),

(3) $\mathsf{SO}(n) := \mathsf{SL}(n,\mathbb{R}) \cap \mathsf{O}(n)$ (特殊直交群),

(4) 次で定義される群 H_3 (ハイゼンベルグ群):

$$H_3 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

後で使う可能性があるので, 直交行列の性質を紹介しておく.

命題 1.2.2. 次が成り立つ:

(1) $\mathsf{O}(n) = \{g \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \langle gX, gY \rangle = \langle X, Y \rangle \ (\forall X, Y \in \mathbb{R}^n)\}$,

(2) $\mathsf{SO}(2) = \{R(\theta) \in \mathsf{GL}(2,\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, ただしここで

$$R(\theta) := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

本稿では主として実行列を扱うが, 複素行列も実質的に含んでいることを述べておく. そのため, $M(n,\mathbb{C})$ で $n \times n$ 複素行列の全体を表す.

定義 1.2.3. $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C}) := \{g \in M(n,\mathbb{C}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を 複素一般線型群 と呼ぶ.

命題 1.2.4. 次の写像は単射かつ群準同型であり, その像 $\mathrm{Im}(f)$ は線型リー群:

$$f : \mathsf{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathsf{GL}(2n,\mathbb{R}) : A + iC \mapsto \left[\begin{array}{c|c} A & -C \\ \hline C & A \end{array}\right].$$

従って $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ あるいはその閉部分群は, 上の写像を用いた同一視によって線型 Lie 群と思うことができる．最後に, $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の部分群だが線型 Lie 群ではない例を挙げる.

例 1.2.5. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする．次で定義される群 G_λ は, $\mathsf{GL}(4,\mathbb{R})$ の部分群だが閉集合ではない:

$$G_\lambda := \left\{ \begin{bmatrix} R(\pi\theta) & 0 \\ 0 & R(\lambda\pi\theta) \end{bmatrix} \in \mathsf{GL}(4,\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.3 線型 Lie 群の同型

$\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の 2 つの線型 Lie 群の間の同型を定義する.

定義 1.3.1. 各 $a \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ に対して, 次で定義される写像 I_a を a による <u>内部自己同型</u> と呼ぶ: $I_a : \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) : g \mapsto aga^{-1}$.

定義 1.3.2. $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群 G_1, G_2 が (線型 Lie 群として) <u>同型</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) : I_a(G_1) = G_2$.

ここで定義した同型は, 正確に言うと "内部自己同型による同型" である. それ以外の同型の概念が登場する場合は, 気を付けて区別する必要がある.

命題 1.3.3. $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群 G_1, G_2 が同型ならば, これらは群同型かつ同相.

この命題の逆は成り立たない. 次がその反例.

例 1.3.4. 次の G_1, G_2 は, 線型リー群として同型ではない:

$$G_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \mid x \neq 0 \right\}, \quad G_2 := \left\{ \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \mid y \neq 0 \right\}.$$

同型でないことの証明には, 固有値を見るのが常套手段. 同型であることを示すためには, 内部自己同型を見付ける必要がある.

問題 1.3.5 (小テスト (1))**.** G を $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群とする. このとき以下の 2 つの $\mathsf{GL}(n+1,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群は同型であることを示せ:

$$G_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \mid g \in G \right\}, \quad G_2 := \left\{ \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid g \in G \right\}.$$

また, 同型よりも弱い局所同型も定義しておく.

定義 1.3.6. $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群 G_1, G_2 が <u>局所同型</u> とは, 次が成り立つこと: $\exists U_1$ (G_1 の単位元の近傍), $\exists U_2$ (G_2 の単位元の近傍), $\exists a \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) : I_a(U_1) = U_2$.

同型ならば局所同型であることは容易に分かるが, その逆は成立しない.

例 1.3.7. $\mathsf{O}(n)$ と $\mathsf{SO}(n)$ は局所同型だが同型ではない.

同型でないことの証明は, 行列式をみるか, 連結性をみるか, どちらかが簡単であろう. ちなみに「$\mathsf{SO}(n) \subsetneq \mathsf{O}(n)$ だから」というだけでは証明としては不十分. 次のような例がある.

例 1.3.8. 以下の G_1, G_2 は, 共に $\mathsf{GL}(2,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群で, 同型だが, $G_1 \subsetneq G_2$ を満たす:

$$G_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}, \quad G_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid m \in Z \right\}.$$

第 2 章

線型 Lie 代数

一般線型 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 内の部分代数を線型 Lie 代数とよぶ．ここでは, その定義と例を紹介する．また, 線型 Lie 代数の間の同型の概念を定義する．

2.1 線型 Lie 代数の定義

まずは一般線型 Lie 代数から定義する．

定義 2.1.1. $M(n,\mathbb{R})$ に積 $[\cdot,\cdot]$ を次で定めたものを **一般線型 Lie 代数** と呼び, これを $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ で表す: $[X,Y] := XY - YX$.

上で定義した積 $[\cdot,\cdot]$ を 括弧積 と呼ぶ．

命題 2.1.2. 一般線型 Lie 代数の括弧積は以下をみたす:

(1) $[,]$ は双線型;
(2) $\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $[X,Y] = -[Y,X]$;
(3) $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$.

特に, 一般線型 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ は, ベクトル空間の構造と双線型な積を持つ代数である．上記の (3) の等式を **Jacobi 律** という．

定義 2.1.3. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 内の部分集合 $\mathfrak{g}$ が **線型 Lie 代数** であるとは, 次が成り立つこと:

(i) $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 内の線型部分空間,
(ii) $\mathfrak{g}$ は括弧積に関して閉じている (すなわち, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X,Y] \in \mathfrak{g}$).

特に $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 自身は線型 Lie 代数である．

2.2　線型 Lie 代数の例

線型 Lie 代数の例として, 線型 Lie 群と同様のものが挙げられる.

例 **2.2.1.** 以下は線型 Lie 代数:

(1) $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ (特殊線型 **Lie** 代数);

(2) $\mathfrak{o}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid {}^tX + X = 0\}$ (直交 **Lie** 代数);

(3) 次で定義される $\mathfrak{h}_3$ (ハイゼンベルグ代数):

$$\mathfrak{h}_3 := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

線型 Lie 群の時と同様に, 簡単な性質を見る. 特に $\mathfrak{o}(n)$ は内積と関係する.

命題 **2.2.2.** 以下が成り立つ:

(1) $\mathfrak{o}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n)$;

(2) $\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \langle Xv, w\rangle + \langle v, Xw\rangle = 0 \ (\forall v, w \in \mathbb{R}^n)\}$;

(3) $\mathfrak{o}(2) = \mathrm{span}\{J\}$, ただしここで

$$J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

線型 Lie 代数はベクトル空間なので, 次元が定義される. すなわち, ベクトル空間としての次元を, 線型 Lie 代数の次元と呼ぶ.

命題 **2.2.3.** 線型 Lie 代数の次元について, 以下が成り立つ:

(1) $\dim \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = n^2$;

(2) $\dim \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1$;

(3) $\dim \mathfrak{o}(n) = (1/2)n(n-1)$;

(4) $\dim \mathfrak{h}_3 = 3$.

次元を求めるためには, 基底を作れば良い. 場合によって, 次元定理 (準同型定理) を使うと簡単になるものもある.

2.3 線型 Lie 代数の同型

線型 Lie 代数の同型は, 随伴作用で移りあうという性質によって定義される.

定義 2.3.1. 各 $a \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ に対して, 次で定義される写像 Ad_a を a による <u>随伴作用</u> と呼ぶ: $\mathrm{Ad}_a : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : X \mapsto aXa^{-1}$.

線型 Lie 群の章で定義した内部自己同型との違いは, 定義域と値域だけである. 記号と名前を変えているのは, 後の都合によるもの. ちなみに随伴の英語は adjoint.

定義 2.3.2. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 内の線型 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ が (線型 Lie 代数として) <u>同型</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) : \mathrm{Ad}_a(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$.

線型 Lie 群の同型と同じように, 次が言える.

命題 2.3.3. 随伴作用 Ad_a は線型同型かつ括弧積を保つ. 従って, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 内の線型 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ が同型ならば, これらは代数として同型.

随伴作用と内部自己同型は式の形が同じなので, 線型 Lie 群の場合と同様に, 線型 Lie 代数についても次が言える.

問題 2.3.4. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ が代数として同型であったとしても, 線型 Lie 代数として同型であるとは限らない. 反例を挙げよ.

問題 2.3.5. 線型 Lie 群の場合と同様に, 線型 Lie 代数の間の "局所同型" を定義せよ. また, 線型 Lie 代数の場合には, 局所同型ならば同型になる (つまり局所同型という概念を新たに定義する意味がない) ことを示せ.

第 3 章

線型 Lie 群と線型 Lie 代数の対応

ここでは線型 Lie 群と線型 Lie 代数の間の "対応" を紹介する. その対応は, 行列の指数写像によって与えられる.

3.1 行列の指数写像

行列の指数写像は, $\mathbb{R}$ 上の指数関数を次のように一般化したものである.

定義 3.1.1. 次で定義される $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ を 行列の指数写像 という:

$$\exp(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I_n + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots .$$

この exp が well-defined であることを示すためには, この級数が収束することを確かめる必要がある. それは後にして, いくつかの具体例から.

例 3.1.2. 以下が成り立つ:

(1) $\exp(\begin{bmatrix} a_1 & \\ & a_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} e^{a_1} & \\ & e^{a_2} \end{bmatrix}$;

(2) $\exp(\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $\exp(\begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{bmatrix}$.

ここで exp の定義の級数が収束することをみておく．そのために行列のノルムを用いる．一般に $X, Y \in M(n, \mathbb{R})$ に対して, 自然な内積は $\langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}({}^t XY)$ で表される．これを用いて, 行列 $A = (a_{ij})$ のノルムを次で定義する:

$$|A| := \langle A, A \rangle^{1/2} = (\sum_{i,j} a_{ij}^2)^{1/2}.$$

補題 3.1.3. 行列 $A = (a_{ij})$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\forall(i, j)$, $|a_{ij}| \leq |A|$;

(2) (Cauchy-Schwarz の不等式) $|AB| \leq |A||B|$.

この補題を用いると, exp の well-defined 性が確かめられる．

命題 3.1.4. 任意の $X \in M(n, \mathbb{R})$ に対して, 行列の指数写像 $\exp(X)$ の各成分は絶対収束する．

念のために exp の定義を再掲しておく:

$$\exp(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I_n + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots .$$

行列の指数写像を具体的に求めることは, 一般には難しいが, 以下の性質を使うと便利な場合がある.

命題 3.1.5. 行列の指数写像 exp は次をみたす:

(1) $\exp(O_n) = I_n$;

(2) $\forall g \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$, $\exp(gXg^{-1}) = g \exp(X) g^{-1}$;

(3) $[X, Y] = 0$ ならば $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$; 特に $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$;

(4) $\frac{d}{ds}\exp(sX) = X\exp(sX)$.

上記の (2) より, 例えば X が対角化可能である場合には, $\exp(X)$ を求めることが容易になる. また (3) より, $\exp(X)$ は X に依らずに可逆である. すなわち, 行列の指数写像の値域は次のように取ることができる:

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}).$$

3.2　線型 Lie 群に対応する線型 Lie 代数の例

線型 Lie 群が与えられたとき, 次の方法で線型 Lie 代数が得られる.

定理 3.2.1. G を $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群とする. このとき, 次の $\mathrm{Lie}(G)$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 代数である (これを **G に対応する線型 Lie 代数** と呼ぶ):

$$\mathrm{Lie}(G) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \exp(sX) \in G\ (\forall s \in \mathbb{R})\}.$$

この定理の証明は次に回して, 以前に紹介した線型 Lie 群の例に関して, 対応する線型 Lie 代数が何になるかを調べよう. まず次は定義から明らか.

例 3.2.2. $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ に対応する線型 Lie 代数は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

他の例を調べるために, 次の性質をみておく. 前に述べた $\exp(gXg^{-1}) = g\exp(X)g^{-1}$ という性質を用いると, 次が示される.

補題 3.2.3. 任意の $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ に対して次が成り立つ: $\det\exp(X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$.

先の補題 $\det \exp(X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$ を用いると, 以下が容易に示される.

例 3.2.4. 以下が成り立つ:

(1) $\mathsf{GL}^+(n, \mathbb{R}) := \{g \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ に対応する線型 Lie 代数は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$;

(2) $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$ に対応する線型 Lie 代数は $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

次に直交群に対応する線型 Lie 代数を求める.

補題 3.2.5. 任意の $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ に対して次が成り立つ: ${}^t\exp(X) = \exp({}^tX)$.

例 3.2.6. $\mathsf{O}(n)$ および $\mathsf{SO}(n)$ に対応する線型 Lie 代数は, どちらも $\mathfrak{o}(n)$.

証明は, $\mathfrak{o}(n) \subset \mathrm{Lie}(\mathsf{SO}(n)) \subset \mathrm{Lie}(\mathsf{O}(n))$ については, 上の補題などを使えば難しくない. また $\mathrm{Lie}(\mathsf{O}(n)) \subset \mathfrak{o}(n)$ については, $\exp(sX)$ の s による微分を考えると良い.

問題 3.2.7 (小テスト (2))**.** 次の線型 Lie 群 G に対応する線型 Lie 代数を求めよ:

$$G := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

まず求めるものが何であるかを予想し, それを $\mathfrak{g}$ とおく. 一般に $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Lie}(G)$ の証明は, (exp の計算をすれば良いだけなので) 難しくない. 逆に, $\mathrm{Lie}(G) \subset \mathfrak{g}$ の証明には, 工夫が必要. いくつか方法は考えられるが, 今の場合は $\mathfrak{g} \subsetneq \mathrm{Lie}(G)$ と仮定して矛盾を導くのが簡単かも知れない.

3.3　線型 Lie 群に対応する線型 Lie 代数の証明

ここでは, 前に主張を述べた定理 3.2.1 の証明を行う. すなわち, G を $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群としたとき, 次は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 代数である:

$$\mathrm{Lie}(G) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \exp(sX) \in G \ (\forall s \in \mathbb{R})\}.$$

そのためには, これが線型部分空間であって, 括弧積で閉じることを言えば良い. これを順に示していく. まずは一番簡単なものから.

命題 3.3.1. G を線型 Lie 群としたとき, $\mathrm{Lie}(G)$ はスカラー倍で閉じる.

次に $\mathrm{Lie}(G)$ が和で閉じることを示す．そのための準備.

命題 3.3.2. $A \in M(n, \mathbb{R})$ に対して, $|A| < 1$ の範囲で次は絶対収束する (この $\log$ を <u>行列の対数写像</u> と呼ぶ):

$$\log(I_n + A) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} A^n = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} - \cdots .$$

命題 3.3.3. 行列の指数写像 exp と対数写像 log は, 局所的に互いに逆写像である.

ここで, $\mathrm{Lie}(G)$ が和で閉じることを示すためには, $\exp(sX)$, $\exp(sY)$ と $\exp(s(X+Y))$ の間の関係が必要になる．それは次で与えられる.

補題 3.3.4. 行列の指数写像 exp は次をみたす:

(1) $s \to 0$ のとき, $\exp(sX)\exp(sY) = \exp(s(X+Y) + O(s^2))$,

(2) $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} (\exp((1/m)X)\exp((1/m)Y))^m = \exp(X+Y)$.

先の補題 (2), すなわち

$$\lim_{m\to+\infty}(\exp((1/m)X)\exp((1/m)Y))^m = \exp(X+Y)$$

と, G が閉部分群であることを用いると, 次が示される. 特に G は閉集合より, G 内の点列が収束するなら, 収束先も G に属する.

命題 3.3.5. G を線型 Lie 群としたとき, $\mathrm{Lie}(G)$ は和で閉じる.

最後に Lie(G) が括弧積で閉じることを示す．次はその準備.

命題 3.3.6. G を線型 Lie 群とする．このとき, 任意の $g \in G$ に対して, Ad_g は Lie(G) を保つ．これによって得られる次の写像を 随伴作用 と呼ぶ:

$$\mathrm{Ad}_g : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G) : X \mapsto gXg^{-1}.$$

証明は, 前に示した exp の性質から容易.

先の命題を用いて, $\mathrm{Lie}(G)$ が括弧積で閉じることを示す．その際に, 次のように少しだけ仮定を弱くしたもので示しておく．ちなみに, 線型 Lie 群でない部分群であっても, $\mathrm{Lie}(G)$ が線型部分空間になるものは存在する (例 1.2.5 が典型例).

命題 3.3.7. G を $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の部分群とし, $\mathrm{Lie}(G)$ が $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 内の線型部分空間であるとする．このとき, $\mathrm{Lie}(G)$ は線型 Lie 代数である．

証明には次の補題を用いる．

補題 3.3.8. $X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ とする．このとき, 曲線 $\gamma(s) := \mathrm{Ad}_{\exp(sX)}(Y)$ に対して次が成り立つ: $\gamma'(0) = [X, Y]$.

ここで, $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ のとき, 上の $\gamma(s)$ は $\mathrm{Lie}(G)$ 内の曲線である．さらに $\mathrm{Lie}(G)$ が線型部分空間であるとすると, $\gamma'(0) \in \mathrm{Lie}(G)$ が従う．

3.4　線型 Lie 群と線型 Lie 代数の対応と同型

前節までに線型 Lie 群と線型 Lie 代数の対応を見た. ここでは, この対応と同型の間の関係を見る. 次を示すことが目標.

定理 3.4.1. $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群 G_1, G_2 が局所同型であるための必要十分条件は, 対応するリー代数 $\mathrm{Lie}(G_1)$, $\mathrm{Lie}(G_2)$ が同型となることである.

線型 Lie 群の (局所) 同型は I_a で定義され, 線型 Lie 代数の同型は Ad_a で定義されていた. これらは次のような関係をもつ.

補題 3.4.2. 任意の $a \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ に対して, 次が成り立つ: $\exp \circ \mathrm{Ad}_a = I_a \circ \exp$.

この補題を用いると,「G_1, G_2 が同型ならば, 対応する線型リー代数 $\mathrm{Lie}(G_1)$, $\mathrm{Lie}(G_2)$ も同型である」ことの証明は容易.

線型 Lie 群が局所同型ならば対応する線型 Lie 代数が同型となることを示す．そのためには, 次が必要になる．

補題 3.4.3. $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群 G と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Lie}(G) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \forall s \in (0,\varepsilon),\ \exp(sX) \in G\}.$$

命題 3.4.4. 線型 Lie 群 G_1 と G_2 が局所同型ならば, 対応する線型リー代数 $\mathrm{Lie}(G_1)$ と $\mathrm{Lie}(G_2)$ は同型である．

線型 Lie 代数の同型から線型 Lie 群の局所同型を導くためには, 次を用いる.

命題 3.4.5. 線型 Lie 群 G に対して, 指数写像 $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ は局所的な同相を与える. すなわち, $\exists V$ ($\mathrm{Lie}(G)$ の 0 の近傍), $\exists U$ (G の単位元の近傍) : $\exp : V \to U$ は同相.

指数写像は $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ と見たときは局所的な同相を与えていた. それを制限しても同様の性質が成り立つ, ということが主張である. ただし証明は全く自明ではなく, 特に $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ が局所的に全射であることは, G が閉部分群でないと成立しない.

命題 3.4.6. G_1, G_2 を $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群とする. 対応する Lie 代数 $\mathrm{Lie}(G_1)$, $\mathrm{Lie}(G_2)$ が同型となるとき, G_1 と G_2 は局所同型である.

第 4 章

Lie 群

多様体かつ群となるものを Lie 群とよぶ. ここでは, その定義と例, および同型や局所同型の概念を定義する. 特に, 線型 Lie 群は Lie 群となり, 重要な例を供給する.

4.1 Lie 群の定義

まずは Lie 群を定義する. 定義は多様体かつ群だが, 当然ながら両者の構造が適合することが要請される.

定義 4.1.1. 次をみたす G を **Lie 群** と呼ぶ:

(i) G は群;

(ii) G は C^∞-級多様体;

(iii) 積をとる写像 $G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh$ は C^∞-級;

(iv) 逆元をとる写像 $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ は C^∞-級.

ここで $G \times G$ には積多様体の構造を入れる.

まずは恐らく最も簡単な Lie 群の例を挙げる.

例 4.1.2. 加法群 $\mathbb{R}^n$ は Lie 群である.

多様体構造は $\mathbb{R}^n$ の標準的なものを当然ながら考える. 群であることと多様体であることは分かっているので, 積と逆元をとる操作が C^∞ 級であることを示せば良い.

例 4.1.3. 一般線型群 $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ は Lie 群である.

多様体構造は, $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ が $M(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ 内の開集合であることから定まる. この構造に関して, 積と逆元をとる操作が C^∞ 級であることを示せば良い.

4.2　線型 Lie 群と Lie 群

ここでは線型 Lie 群が Lie 群となることを見る．これにより，前に挙げた $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathsf{O}(n)$, $\mathsf{SO}(n)$ 等は全て Lie 群となることが分かる．

定理 4.2.1. G を線型 Lie 群とする．このとき，単位元 e の近傍における局所座標を行列の指数写像 $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ で与えることにより，G は Lie 群になる．よって特に $\dim(G) = \dim \mathrm{Lie}(G)$ が成り立つ．

指数写像 $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ が 0 の近傍から e の近傍への局所同相写像であることは，以前に述べた．このことから e の座標近傍が与えられる．他の点 $a \in G$ での座標近傍は，左移動 $L_a : G \to G : g \mapsto ag$ を使って作ることができる．

先の定理から線型 Lie 群は多様体になるので, その接空間を考えることができる. 単位元における接空間が, 対応する線型 Lie 代数 $\mathrm{Lie}(G)$ に他ならない.

系 4.2.2. $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群 G に対して, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Lie}(G) = T_e G := \{c'(0) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G : C^{\infty},\ c(0) = e\}.$$

証明は, $(\subset)$ は定義から. $(\supset)$ は次元の比較から. また, この系を用いると, $\mathrm{Lie}(G)$ が簡単に求まる場合もある.

4.3　Lie 群の同型と局所同型

ここでは Lie 群の同型と局所同型の概念を紹介する．線型 Lie 群の場合よりもこれらの概念が “緩い” ことに注意する．

定義 4.3.1. 写像 $f : G_1 \to G_2$ が Lie 群の <u>同型写像</u> であるとは, 次が成り立つこと: f は群同型かつ C^∞-同相. また, G_1 と G_2 が <u>同型</u> であるとは, これらの間に同型写像が存在すること.

例 4.3.2.

(1) 線型 Lie 群として同型ならば Lie 群として同型;

(2) 以下の 2 つは Lie 群としては同型だが, 線型 Lie 群としては同型でない:

$$G_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \mid x \neq 0 \right\}, \quad G_2 := \left\{ \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \mid y \neq 0 \right\}.$$

同型と同様に, 局所同型も次のように定義される.

定義 4.3.3. G_1, G_2 を Lie 群とし, U_1, U_2 をそれぞれ G_1, G_2 の単位元の近傍とする. 写像 $f : U_1 \to U_2$ が Lie 群の <u>局所同型写像</u> であるとは, 次が成り立つこと:

(i) f は C^∞-同相写像;

(ii) $\forall g, h \in U_1$ $(gh \in U_1)$, $f(g)f(h) = f(gh)$.

また, G_1 と G_2 が <u>局所同型</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists U_1$ (G_1 の単位元の近傍), $\exists U_2$ (G_2 の単位元の近傍), $\exists f : U_1 \to U_2$: 局所同型写像.

例 4.3.4.

(1) 線型 Lie 群として局所同型ならば Lie 群としても局所同型;

(2) 加法群 $\mathbb{R}$ と $\mathsf{SO}(2)$ は, 局所同型だが同型ではない.

第 5 章

Lie 代数

Lie 代数は, 所定の性質をみたす括弧積をもつ線型空間として定義される. ここでは, その定義と例, および同型の概念を定義する. 特に, 線型 Lie 代数は Lie 代数となり, 重要な例を供給する.

5.1 Lie 代数の定義

Lie 代数の定義は次で与えられる.

定義 5.1.1. 実線型空間 $\mathfrak{g}$ と積 $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の組 $(\mathfrak{g}, [,])$ が **Lie 代数** であるとは, 次が成り立つこと:

(i) 積 $[,]$ は双線型,

(ii) $[X, Y] = -[Y, X] \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{g})$,

(iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g})$.

条件 (ii) より $[X, X] = 0$ が従う. 条件 (iii) を **Jacobi 律** と呼ぶ. 線型空間は, この講義では実線型空間の場合のみを考える. このことを強調して **実 Lie 代数** と呼ぶこともある (複素線型空間の場合には複素 Lie 代数と呼ぶ).

例 5.1.2. 線型空間 $\mathbb{R}^n$ に積を $[X, Y] := 0$ で定義したものは Lie 代数である (これを **可換 Lie 代数** と呼ぶ).

命題 5.1.3. 線型 Lie 代数は Lie 代数である.

線型 Lie 代数は Lie 代数の典型例を与えるが, いつでも行列の形で書くのが簡単な方法とは限らない. 例えば基底と関係式で表示する方法がよく用いられる.

例 5.1.4. $\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{x, y, z\}$ は, 次をみたす括弧積によって Lie 代数となる:

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = 0, \quad [z, x] = 0.$$

このように表示したとき, 括弧積は双線型かつ交代的になるように定める. また, 0 になる関係式は省略する場合も多い. 例えば上の場合だと「$[x, y] = z$ で定まる Lie 代数」と単にいうことがある.

上のように関係式で定義された場合, Jacobi 律をみたすかどうかは非自明なので, それだけは確認が必要. そのためには, 基底の間の関係だけ見れば十分である.

補題 5.1.5. $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ に括弧積の関係式が与えられているとする. このとき, 任意の i, j, k (ただし $i < j < k$) に対して

$$[x_i, [x_j, x_k]] + [x_j, [x_k, x_i]] + [x_k, [x_i, x_j]] = 0$$

が成り立つならば, この括弧積は Jacobi 律をみたす.

この補題より, 2 次元なら自動的に Jacobi 律をみたす.

例 5.1.6. $\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{x, y\}$ は, 次をみたす括弧積によって Lie 代数となる:

$$[x, y] = y.$$

5.2　Lie 代数の同型

ここでは Lie 代数の同型を定義する.

定義 5.2.1. Lie 代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ に対して,

(1) 写像 $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ が 準同型 とは, 次が成り立つこと: f が線型, かつ括弧積を保つ (すなわち $f([X,Y]) = [f(X), f(Y)]$ が成り立つ);

(2) 写像 $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ が 同型 とは, 次が成り立つこと: f が全単射かつ準同型;

(3) $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ が 同型 とは, 次が成り立つこと: $\exists f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$: 同型写像.

容易に分かるように, 次が成り立つ.

例 5.2.2.

(1) 線型 Lie 代数として同型ならば, Lie 代数としても同型;

(2) 以下の 2 つは Lie 代数としては同型だが, 線型 Lie 代数としては同型でない:

$$\mathfrak{g}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{g}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

括弧積の関係式で定義された Lie 代数のいくつかが, ある線型 Lie と同型であることを見る. ちなみに線型写像が括弧積を保つことを示すためには, 基底の間の関係式が保たれることを示せば十分.

例 5.2.3. $\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{x, y, z\}$ を $[x, y] = z$ で定まる Lie 代数とする. このとき $\mathfrak{g}$ は 3 次元 Heisenberg 代数と同型.

問題 5.2.4 (自習用)**.** $\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{x, y\}$ を $[x, y] = y$ で定まる Lie 代数とする. このとき $\mathfrak{g}$ は次の線型 Lie 代数と同型であることを示せ:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

問題 5.2.5 (小テスト (3)). $\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{x, y\}$ を $[x, y] = y$ で定まる Lie 代数とする. 任意の 2 次元非可換 Lie 代数は, この $\mathfrak{g}$ と同型であることを示せ.

すなわち 2 次元 Lie 代数は (同型を除いて) 可換なものと上記のもの, 二つに限る. 3 次元以上の場合は, このように簡単に分かる訳ではない.

最後に証明抜きで事実だけを紹介するが, 線型 Lie 代数ならば Lie 代数という命題に関して, 実は逆も成り立つ.

定理 5.2.6 (Ado の定理). 任意の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}$ と Lie 代数として同型となる線型 Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ $(\subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ が存在する.

第 6 章

Lie 群に対応する Lie 代数

ここでは, Lie 群に対して Lie 代数が構成されることを示す. Lie 群 G の単位元での接空間 T_eG に括弧積を定義する方法と, 左不変ベクトル場を使う方法を紹介したい. 当然ながら, どちらでも同じものが構成され, さらに G が線型 Lie 群の場合には対応する線型 Lie 代数と同型なものが得られる.

6.1 接空間

以下, M を C^∞ 級多様体とする. ここでは, 多様体の接空間には以下の 3 通りの表示方法があることを復習する:

- 関数の微分;
- 曲線の速度ベクトル;
- 局所座標を用いた偏微分.

まずは “関数の微分” としての表示を与える. 次のようにおく:

$$C^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : C^\infty\}.$$

多様体上の関数が C^∞ 級であることの定義は既知とする. また, $C^\infty(M)$ には関数の和・スカラー倍・積の構造が入ることに注意する.

定義 6.1.1. 写像 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が $p \in M$ における <u>接ベクトル</u> とは, 次が成り立つこと:

(i) v は線型写像;

(ii) v は積の微分の公式をみたす, すなわち, $\forall f, g \in C^\infty(M),\ \ v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

点 $p \in M$ における接ベクトルの全体を T_pM で表し, これを <u>接空間</u> と呼ぶ. 接空間 T_pM が線型空間となることは, 多様体の基本的な演習問題.

次に 2 番目の "曲線の速度ベクトル" について述べる.

例 **6.1.2.** 曲線の速度ベクトルは接ベクトルである. すなわち, C^∞ 級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ に対して, 次は $p := c(0)$ における接ベクトル:

$$c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto (f \circ c)'(0).$$

次が 3 番目の“局所座標を用いた偏微分”である.

例 6.1.3. 局所座標を用いて (ある点で) 偏微分する操作は接ベクトルである. すなわち, (U, φ) を M の局所座標とし, $\varphi(U)$ の座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ と表すとき, 次は $p \in U$ における接ベクトルとなる:

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

最後に, 以上の三通りの表示方法が同等である, という定理の主張を述べる.

定理 6.1.4. 上と同様の設定の下で, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} T_pM &= \{c'(0) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty,\ c(0) = p\} \\ &= \mathrm{span}\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}. \end{aligned}$$

6.2 微分写像

ここからは, 多様体から多様体への C^∞ 級写像に対して, その微分写像に関する復習をする. 微分写像は接空間から接空間への写像である. 接空間には 3 通りの表示方法があったので, それらに応じて微分写像も 3 通りの表示が考えられる.

定義 6.2.1. C^∞-級写像 $F : M \to N$ の $p \in M$ での 微分写像 を次で定義する:

$$(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N : v \mapsto (dF)_p(v), \quad (dF)_p(v) : C^\infty(N) \to \mathbb{R} : f \mapsto v(f \circ F).$$

接空間は, 曲線の速度ベクトルを使って表示することができた. それを用いると, 微分写像は次のように表される.

例 **6.2.2.** 接ベクトル $c'(0) \in T_pM$ (ただし $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$) に対して, C^∞ 級写像 $F : M \to N$ の $p \in M$ での微分写像は次をみたす: $(dF)_p(c'(0)) = (F \circ c)'(0)$.

微分写像の 3 番目の表示方法として, 局所座標を用いた表示を与える.

例 6.2.3. $F : M \to N$ を C^∞ 級写像, $p \in M$ とし, 微分写像 $(dF)_p$ を考える. このとき, p を含む局所座標を (U, φ), $F(p)$ を含む局所座標を (V, ψ) とし, $\varphi(U)$, $\psi(V)$ の座標をそれぞれ $(x_1, \ldots, x_m)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ とすると, 次が成り立つ:

$$(dF)_p \left((\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p \right) = \left((\frac{\partial}{\partial y_1})_{F(p)}, \ldots, (\frac{\partial}{\partial y_n})_{F(p)} \right) J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}.$$

6.3 Lie 群の接空間と Lie 代数

ここでは G を Lie 群とし, その Lie 代数を定義する. 証明は後回しにして, 単位元での接空間 T_eG に括弧積を導入する方法を述べる.

定義 6.3.1. $g \in G$ に対して, 次を g による 内部自己同型 と呼ぶ:

$$I_g : G \to G : h \mapsto ghg^{-1}.$$

内部自己同型は, 線型 Lie 群の項でも登場していた. Lie 群の場合, 定義から I_g は C^∞ 級写像. 従って微分写像を考えることができる.

定義 6.3.2. $g \in G$ に対して, 次を g による 随伴作用 と呼ぶ:

$$\mathrm{Ad}_g := (dI_g)_e : T_eG \to T_eG.$$

ここで, T_eG から T_eG への線型写像全体の成す線型空間を $\mathrm{End}(T_eG)$ と表す. 定義より $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{End}(T_eG)$ なので, Ad は次のような写像だと見ることができる:

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{End}(T_eG) : g \mapsto \mathrm{Ad}_g.$$

定義 6.3.3. 次で定義される ad を 随伴表現 と呼ぶ:

$$\mathrm{ad} := (d\mathrm{Ad})_e : T_eG \to \mathrm{End}(T_eG).$$

ちなみに Ad と ad の名前はあまり定かではない...

先で得られた ad により, 各 $u \in T_eG$ に対して $\mathrm{ad}_u \in \mathrm{End}(T_eG)$ が得られたことになる. これを用いる.

定理 6.3.4. G を Lie 群とする. このとき T_eG に積を $[u,v] := \mathrm{ad}_u(v)$ で定義したものは Lie 代数である.

Lie 群から Lie 代数を構成する時に, Lie 代数の条件をみたすかどうかと, 線型 Lie 代数の場合に前に述べた $\mathrm{Lie}(G)$ と一致するかどうかを, 確認する必要がある. 前者は次回に行う. 後者は括弧積の定め方から直ちに分かる.

系 6.3.5. G を線型 Lie 群とする. このとき, 対応する線型 Lie 代数 $\mathrm{Lie}(G)$ と, Lie 群と考えた時に対応する Lie 代数 $(T_eG, [,])$ は, Lie 代数として同型.

また, 次も容易に分かる.

系 6.3.6. Lie 群 G が可換ならば, 対応する Lie 代数 $(T_eG, [,])$ も可換.

6.4　ベクトル場

Lie 群と Lie 代数の対応は, ベクトル場を使って表すこともできる (というか, こちらが標準的な方法だろう). それを紹介するための準備として, ここでは多様体上のベクトル場の復習をする. 接空間と同様に, ベクトル場もいくつかの同値な表示方法がある.

定義 6.4.1. 写像 $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ が M 上の ベクトル場 であるとは, 次が成り立つこと:

(i) X は線型写像,
(ii) 積の微分の公式をみたす, すなわち, $\forall f, g \in C^\infty(M),\ \ X(fg) = X(f)g + fX(g)$.

多様体 M 上のベクトル場の全体を $\mathfrak{X}(M)$ で表す. 上の定義は接ベクトルの定義と似ており, 簡潔な定式化だと思うが, 直観的なイメージは伝わりにくいかも知れない. 次のような, ベクトル場は "各点に接ベクトルを対応させるもの" という定式化の方が, 直観的にイメージしやすい.

命題 6.4.2. ベクトル場は, 各点に接ベクトルを対応させる. すなわち, X を M 上のベクトル場とすると, 各点 $p \in M$ に対して, 接ベクトル $X_p \in T_pM$ が次によって決まる:

$$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto (Xf)(p).$$

接ベクトルは局所座標を用いて表すことができた. 同様に, ベクトル場も局所座標を用いて表すことができる.

例 6.4.3. 局所座標を用いて偏微分する操作はベクトル場である. すなわち, (U, φ) を M の局所座標とし, $\varphi(U)$ の座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ と表すとき, 任意の $f_i \in C^\infty(U)$ に対して次は U 上のベクトル場:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} : p \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(p)(\frac{\partial}{\partial x_i})_p.$$

ベクトル場には, 括弧積などの演算が定義される. 実は, ベクトル場の集合 $\mathfrak{X}(M)$ には (無限次元の) Lie 代数の構造が定まる. 和とスカラー倍は, 次で定義する:

$$aX + bY : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : f \mapsto a(Xf) + b(Yf).$$

命題 6.4.4. X, Y を M 上のベクトル場とすると, $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ も M 上のベクトル場である (これをベクトル場の 括弧積 と呼ぶ).

この命題において, ベクトル場は $C^\infty(M)$ から $C^\infty(M)$ への写像だと思って合成を考えている. 関数 f にあてた形で書くと,

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf).$$

問題 6.4.5 (自習用)**.** $\mathfrak{X}(M)$ は上記の括弧積に関して Lie 代数となることを示せ.

最後に, ベクトル場の括弧積を局所座標を用いて表しておく. 具体例の計算には, この方法が最も適していると思われる.

例 6.4.6. (U, φ) を M の局所座標とし, $\varphi(U)$ の座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ と表すとき, 任意の $f_i \in C^\infty(U)$ に対して次が成り立つ:

$$[f_i \frac{\partial}{\partial x_i},\ f_j \frac{\partial}{\partial x_j}] = f_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

例えば $\mathbb{R}^n$ の標準的な座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ とすると, 次が成り立つ:

$$[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0.$$

また, $\mathbb{R}^2$ の座標を (x, y) とするとき, 次が成り立つ:

$$X := y \frac{\partial}{\partial x},\ Y := y \frac{\partial}{\partial y} \text{ とおくと,} \quad [X, Y] = -X.$$

6.5　左不変ベクトル場

以下では G を Lie 群とし, その上のベクトル場全体の集合 $\mathfrak{X}(G)$ を考える. このとき $\mathfrak{X}(G)$ は Lie 代数の構造をもっていたが, そのままでは大きすぎるので, 左不変なものだけを考えたい.

定義 6.5.1. G を Lie 群とする. このとき,

(1) 各 $g \in G$ に対して, 次を g による <u>左移動</u> と呼ぶ: $L_g : G \to G : h \mapsto gh$,

(2) ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ が <u>左不変</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall g \in G$, $\forall f \in C^\infty(G)$, $X(f \circ L_g) = (Xf) \circ L_g$.

先の左不変の条件 $X(f \circ L_g) = (Xf) \circ L_g$ から, 直ちに次が従う. G 上の左不変ベクトル場の全体を $\mathfrak{g}$ で表すことが多い.

命題 6.5.2. G 上の左不変ベクトル場全体の集合 $\mathfrak{g}$ は, $\mathfrak{X}(G)$ 内の Lie 部分代数である. すなわち, 線型部分空間であって括弧積で閉じる.

これを Lie 群 G の Lie 代数と定義する場合も多い. これが前回定義した $(T_eG, [,])$ と同型であることは, 後で見る.

ベクトル場 X は, 各点に接ベクトル X_a を対応させるものと考えることもできた. それを用いると, 左不変性は次のように述べることができる.

命題 6.5.3. ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ に対して, 以下は互いに同値である:

(1) X は左不変,

(2) $\forall g, h \in G,\ (dL_g)_h(X_h) = X_{gh}$,

(3) $\forall g \in G,\ (dL_g)_e(X_e) = X_g$ (ただし e は単位元).

上の (3) より, 左不変ベクトル場 X は, 単位元での接ベクトル X_e から決まることが分かる. よって次が従う.

系 6.5.4. Lie 群 G に対して, $\mathfrak{g} \to T_eG : X \mapsto X_e$ は線型同型. 従って特に $\dim \mathfrak{g} = \dim G$ が成り立つ.

6.6　Lie 群の左不変ベクトル場と接空間

Lie 群 G に対応する Lie 代数として, 接空間を考えるものと左不変ベクトル場を考えるものと, 二通りの方法を紹介した. ここではそれらが一致すること, すなわち次を示す.

定理 6.6.1. G を Lie 群とする. このとき, 単位元での接空間 T_eG に括弧積を入れたものと, 左不変ベクトル場の全体 $\mathfrak{g}$ にベクトル場の括弧積を入れたものは, Lie 代数として同型.

ここで, 写像 $\mathfrak{g} \to T_eG : X \mapsto X_e$ (左不変ベクトル場 X に, その単位元での接ベクトル X_e を対応させる写像) は線型同型だったので, この写像が括弧積を保つことを示せば良い. そのために, 各左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{g}$ に対して, 次をみたす C^∞ 曲線 $c_X : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ を考える (一意的ではないことは注意する):

$$c_X(0) = e, \quad c'_X(0) = X_e.$$

接空間の括弧積は, $[X_e, Y_e] := \mathrm{ad}_{X_e}(Y_e)$ によって定義されていた. 先の曲線を用いて, これを記述する.

補題 6.6.2. $X, Y \in \mathfrak{g}$ とし, 対応する曲線 c_X, c_Y を考える. このとき, 任意の $f \in C^\infty(G)$ について次が成り立つ:

$$(\mathrm{ad}_{X_e}(Y_e))f = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(c_X(t)c_Y(s)(c_X(t))^{-1})|_{s=t=0}.$$

次に左不変ベクトル場の括弧積を, 対応する曲線 c_X, c_Y を用いて記述する.

補題 6.6.3. $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $\forall f \in C^\infty(G)$, $\forall g \in G$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $(Xf)(g) = \dfrac{d}{dt} f(gc_X(t))|_{t=0}$,

(2) $([X,Y]f)(g) = \dfrac{\partial}{\partial s}\dfrac{\partial}{\partial t} f(gc_X(t)c_Y(s)(c_X(t))^{-1})|_{s=t=0}$.

証明のうち, (1) は良い演習問題. また (2) の証明では (1) を繰り返し使う. ベクトル場の括弧積は $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ で与えられていた.

6.7 Lie 群の指数写像

線型 Lie 群と線型 Lie 代数の時と同様に, Lie 群の局所同型と Lie 代数の同型が対応する. 二つの Lie 群が局所同型ならば対応する Lie 代数が同型であることは, 今までの議論から分かる. 逆を示すために, 線型 Lie 群の指数写像に対応するものを用いる.

定義 6.7.1. G を Lie 群とする. 写像 $c : \mathbb{R} \to G$ が 一径数部分群 とは, 次が成り立つこと:

(i) c は C^∞ 級,
(ii) c は群準同型.

例 6.7.2. G を線型 Lie 群, $X \in \mathrm{Lie}(G)$ とする. このとき, 行列の指数写像を用いて作られる $c(t) = \exp(tX)$ は G の一径数部分群.

命題 6.7.3. G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とすると, 次が成り立つ: $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\exists 1 c_X : \mathbb{R} \to G$: 一径数部分群 s.t. $c'_X(0) = X_e$.

証明は後で. 線型 Lie 群の場合には, 指数写像を用いて一径数部分群を作ったが, 一般の Lie 群の場合には逆の道筋になる.

定義 6.7.4. G を Lie 群とする. このとき $\exp : \mathfrak{g} \to G : X \mapsto c_X(1)$ を Lie 群 G の 指数写像 と呼ぶ.

6.8 積分曲線

ここでは多様体のベクトル場と積分曲線を復習する. Lie 群 G の一径数部分群の存在と一意性を示すためには, ここで紹介する事実を用いる.

定義 6.8.1. M を C^∞-級多様体とし, $\mathbb{R} \supset I$ を開集合とする. なめらかな曲線 $c : I \to M$ がベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の 積分曲線 とは, 次が成り立つこと: $\forall t \in I$, $c'(t) = X_{c(t)}$.

命題 6.8.2. 任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ と $p \in M$ に対して, 次が成り立つ: $\exists 1 c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$: C^∞ s.t. $c(0) = p$.

6.9　対応の基本定理

ここでは次の定理を示す.

定理 6.9.1. Lie 群 G_1 と G_2 が局所同型であるための必要十分条件は, 対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ が同型となること.

十分性の証明は, 前にも述べた通りである. 必要性の証明をするために, まずは次をみる.

命題 6.9.2. Lie 群の指数写像 exp は C^∞ 級写像であり, $\mathfrak{g}$ の 0 の近傍から G の e の近傍への局所 C^∞ 同相を与える.

従って, G_1 の e での近傍と G_2 の e での近傍の間の C^∞-同相が, 指数写像を使って与えられる. これが群構造を保つことを示せば良い. このことは, 群構造が Lie 代数の構造で決まるという次の定理から従う.

定理 6.9.3 (Baker-Campbell-Hausdorff)**.** G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とし, $X, Y \in \mathfrak{g}$ をとる. $t \to 0$ のとき, $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(Z(t))$ とおくと, $Z(t)$ は X, Y とその括弧積だけで書ける.

ちなみに具体的に書くと $Z(t) = t(X+Y)+(t^2/2)[X,Y]+(t^3/12)[X-Y,[X,Y]]+\cdots$ である. この級数の一般項も書こうと思えば書ける.

6.10　演習問題

次からの話題の伏線のための演習問題. Lie 群の表現の話.

定義 6.10.1. G を Lie 群とする. このとき, Lie 群準同型写像 $\varphi : G \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ を G の n 次元 <u>表現</u> という.

表現 $\varphi : G \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ に対して, $\mathbb{R}^n$ 内の部分空間 V が <u>G-不変</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall g \in G$, $\varphi_g(V) \subset V$.

問題 6.10.2 (小テスト (4))**.** $G = \mathsf{SL}(2, \mathbb{R})$ とする. 包含写像 $G \to \mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$ という表現に対して, $\mathbb{R}^2$ 内の G-不変部分は $\{0\}$ または $\mathbb{R}^2$ 全体に限ることを示せ.

(後日注: 簡単すぎた人は $\mathsf{SL}(3, \mathbb{R})$ で考えてみて下さい.)

第 7 章

Lie 群と Lie 代数の表現

ここでは Lie 群と Lie 代数の有限次元実線型表現について, その定義や例を紹介する.

7.1 Lie 群の表現の定義

以下では, V を有限次元実線型空間とする. また, $\mathsf{GL}(V)$ によって V から V への線型同型写像全体の成す群を表す. このとき V の基底を固定すれば $\mathsf{GL}(V)$ と $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ (ただし $n := \dim V$) の間に同型が得られるので, $\mathsf{GL}(V)$ は Lie 群である.

定義 7.1.1. G を Lie 群, V を有限次元実線型空間とする. このとき $\varphi : G \to \mathsf{GL}(V)$ が G の <u>表現</u> であるとは, φ が Lie 群の準同型写像であること.

例 7.1.2. G を任意の Lie 群, V を任意の実線型空間とすると, 全てを id に送る写像は表現 (これを <u>自明表現</u> という).

例 7.1.3. G を $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群, $V := \mathbb{R}^n$ とすると, 包含写像 φ は表現.

例 7.1.4. G を $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の線型 Lie 群, $V := M(n,\mathbb{R})$ とすると, 次で定義される写像 φ は表現: $\varphi_g(X) := gXg^{-1}$.

例 7.1.5. G を Lie 群, $V := \mathfrak{g}$ をその Lie 代数とすると, $\mathrm{Ad} : G \to \mathsf{GL}(\mathfrak{g})$ は表現 (これを <u>随伴表現</u> という).

7.2 表現の同値

Lie 群 G が与えられた時に, G の表現はどのくらいあるか, という問題を考えよう. そのためには, 表現の同値の概念が必要 (ちなみに同値を除いても表現は無限にあるが).

定義 7.2.1. G を Lie 群, $\varphi_i : G \to \mathsf{GL}(V_i)$ を表現とする (ただし $i \in \{1,2\}$). このとき φ_1 と φ_2 が 同値 であるとは, 次が成り立つこと: $\exists F : V_1 \to V_2$ (線型同型) : $\forall g \in G$, $F \circ (\varphi_1)_g = (\varphi_2)_g \circ F$.

7.3　部分表現と既約表現

以下では G は全て Lie 群とする.

命題 7.3.1. $\varphi_i : G \to \mathsf{GL}(V_i)$ を表現とする (ただし $i \in \{1,2\}$). このとき自然に定義される $\varphi_1 \oplus \varphi_2 : G \to \mathsf{GL}(V_1 \oplus V_2)$ も表現. (これを 直和表現 という.)

直和表現に対しては, それぞれのパーツが分かれば全体が分かると言って良いだろう. 従って, 表現を考える際には, それ以上分解できないようなものが根源的である.

定義 7.3.2. $\varphi : G \to \mathsf{GL}(V)$ を Lie 群 G の表現とする. このとき,

(1) 部分空間 W ($\subset V$) が G-不変 とは, 次が成り立つこと: $\forall g \in G$, $\varphi_g(W) \subset W$.

(2) 表現 φ が 既約 とは, 非自明な (0 と V 以外の) G-不変部分空間が存在しないこと.

W が G-不変部分空間であるとき, 写像を制限することにより自然に表現 $\varphi^W : G \to \mathsf{GL}(W)$ が定まる (これを 部分表現 という).

命題 7.3.3. 直和表現 $\varphi_1 \oplus \varphi_2 : G \to \mathsf{GL}(V_1 \oplus V_2)$ に対して, V_1 および V_2 は G-不変部分空間. 従って, 既約表現は直和分解できない.

この命題の逆は, 特定の G に対しては成立することが知られている. しかし, 一般には成立しない. 次が反例.

例 7.3.4. 次の Lie 群 G を考える:

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

このとき G の $\mathbb{R}^2$ への自然な表現は既約でないが, 直和分解はできない.

与えられた表現が既約でないことを示すためには, 不変部分空間を見付ければ良い. 例えば, 直交群 $\mathsf{O}(n)$ の $M(n, \mathbb{R})$ への作用などを考えてみよう. 一方で一般に, 既約であることを直接証明するのは大変である.

7.4　双対表現

ここから, Lie 群 G の表現に関する操作をいくつか紹介する．これらの操作により, 既知の表現から新しい表現を作ることができる．直和という操作は既に述べた．ここでは双対表現 (反傾表現ともいう) を紹介する．まずは双対空間の復習.

定義 7.4.1. V を実線型空間とするとき, 次を V の <u>双対空間</u> という:

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} : \text{線型}\}.$$

関数の和とスカラー倍を考えることにより, 双対空間もまた線型空間になる.

命題 7.4.2. $\varphi : G \to \mathsf{GL}(V)$ を Lie 群 G の表現とする．このとき, 次によって定義される $\varphi^* : G \to \mathsf{GL}(V^*)$ も G の表現である (これを <u>双対表現</u> という):

$$\varphi^*_g(f) := f \circ \varphi_{g^{-1}} \quad (g \in G).$$

当然ながら $\dim V = \dim V^*$ なので, 元の表現と双対表現の次元は同じである．これらが同値な表現であるかどうかは, ものによる.

定義 7.4.3. $\varphi : G \to \mathsf{GL}(V)$ を表現とする．V 上の内積 $\langle , \rangle$ が <u>不変</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall g \in G$, $\forall v, w \in V$, $\langle \varphi_g(v), \varphi_g(w) \rangle = \langle v, w \rangle$．また, 不変な内積が存在する表現を <u>直交表現</u> という.

ここで定義した不変内積は, G-不変, φ-不変, などと呼ぶ方が正確．直交表現であるということは, 表現が $\varphi : G \to \mathsf{O}(V, \langle , \rangle)$ となることと同値.

命題 7.4.4. $\varphi : G \to \mathsf{GL}(V)$ が直交表現のとき, φ とその双対表現は同値.

おまけ... 不変部分空間の直交補空間,

7.5　双対表現の一般化

実線型空間 V, W に対して, 次を考える:

$$\mathrm{Hom}(V, W) := \{f : V \to W : \text{線型}\}.$$

これは双対空間を特別な場合として含む: $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$．また W の演算を用いることで $\mathrm{Hom}(V, W)$ も線型空間になる.

命題 7.5.1. $\varphi_1 : G \to \mathsf{GL}(V)$ および $\varphi_2 : G \to \mathsf{GL}(W)$ を Lie 群 G の表現とする．このとき, 次によって定義される $\varphi : G \to \mathsf{GL}(\mathrm{Hom}(V, W))$ も G の表現である:

$$\varphi_g(f) := (\varphi_2)_g \circ f \circ (\varphi_1)_{g^{-1}} \quad (g \in G).$$

この命題で得られた表現 φ を $\mathrm{Hom}(\varphi_1, \varphi_2)$ と書くことがある．

7.6 テンソル表現

実線型空間 V, W に対して, そのテンソル積 $V \otimes W$ を考える．ここにも表現が誘導される．テンソル積の定義には何通りかの方法があるが, ここでは商空間を使って定義することとする．

定義 7.6.1. 実線型空間 V, W に対して, 直積集合 $V \times W$ で生成される線型空間を $\mathcal{V}(V \times W)$ とする．また, 以下の形の元全体で生成される部分空間を X で表す:

$$\begin{aligned}
&(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), \\
&(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2), \\
&(av, w) - a(v, w), \\
&(v, aw) - a(v, w).
\end{aligned}$$

このとき, $\mathcal{V}(V \times W)$ の X による商空間を $V \otimes W$ で表し, これを V と W の <u>テンソル積</u> という．

ちなみに線型空間 V の部分空間 V_0 による商空間とは, V 上の同値関係 $v \sim w :\Leftrightarrow v - w \in V_0$ による商集合であり, 線型空間の構造を自然に誘導したものである．またテンソル積の元を $v \otimes w = [(v, w)]$ のように表す．$V \otimes W$ の元は, このような $v \otimes w$ の形の元 (“単項式”) の一次結合で表すことができる．

命題 7.6.2. $\varphi_1 : G \to \mathsf{GL}(V)$ および $\varphi_2 : G \to \mathsf{GL}(W)$ を Lie 群 G の表現とする．このとき, 次によって定義される $\varphi : G \to \mathsf{GL}(V \otimes W)$ も G の表現である:

$$\varphi_g(v \otimes w) := ((\varphi_1)_g v) \otimes ((\varphi_2)_g w) \quad (g \in G).$$

ちなみに $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W)$ である．線型同型写像は $(f \otimes w)(v) := f(v)w$ を用いて与えられる．

ここでは 2 つのテンソル積だけを紹介したが, 何個でもできる．

外部テンソル積というのもある．

7.7　対称テンソル・交代テンソル

線型空間 V への表現があったとき, 自分自身とのテンソル積 $V \otimes V$ への表現が得られる. この表現は既約ではないので, その不変部分空間を考える.

命題 7.7.1. $\varphi : G \to \mathsf{GL}(V)$ を表現とし, $\sigma : V \otimes V \to V \otimes V$ を次で定める: $\sigma(v \otimes w) := w \otimes v$. このとき σ と表現は可換であり, σ による (± 1)-固有空間は不変部分空間.

上で得られた σ による $(+1)$-固有空間を <u>対称テンソル</u>, (-1)-固有空間を <u>交代テンソル</u> という. 特に $V = \mathbb{R}^n$ で表現が直交の場合には,

$$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cong M(n, \mathbb{R})$$

となり, 上の分解は対称行列と交代行列への分解に一致する.

また, ここで紹介したのは 2 階の場合だが, 一般の個数でも定義できる (交代テンソルは次元より多い個数だと消えるが).