時空特異点

京大基研　　　小玉英雄

1 時空の特異性

2 特異点の発生条件

3 特異点の構造

4 宇宙検閲仮説

5 まとめ

1．時空の特異性

完備性の破れ

測地的完備性

時間的（光的）測地線がアフィンパラメーターに関して無限に延長可能．

例えば，Bianchi モデルでは，一様面に対する法ベクトル n に関して

$$R_{ab}n^a n^b = \frac{\kappa^2}{2}(T_{00} + T^I_I) \geq 0$$

が成り立てば，時間的測地線に関して完備でない．

b-完備性

任意の曲線 $\gamma(t)$ に対して，γ 上の平行な正規直交基底 E_a (pp-frame) を用いて，γ の一般化されたアフィンパラメーター s を

$$s = \int_0^t \left[\sum_a (E_a \cdot \dot\gamma)^2\right]^{1/2} dt$$

により定義するとき，γ が s に関して無限に延長可能．[Schmidt 1971]

（注） 測地的に完備だが有限加速度の時間的曲線に関して b-不完備な時空を作ることができる．[Geroch(1968) Ann. Phys. 48: 562]

曲率の発散

スカラ曲率特異点 (sp-特異点)

b-不完備な曲線を γ とするとき，曲率テンソルから作られる多項式型スカラ量の中に γ 上で値が非有界なものが存在する．

非スカラ曲率特異点 (nsp-特異点)

b-不完備な曲線 γ に対して，γ 上の pp-frame に関する曲率テンソルの成分の中に非有界なものが存在するが，多項式型曲率スカラがすべて有界．[Ellis, Schmidt (1977) GRG8: 915]

準正則特異点 (qr-特異点)

b-不完備で延長可能な曲線 γ が曲率特異点に近づかない場合，すなわち，pp-frame に関する曲率テンソルの成分がすべて有界．

因果律

整時性条件 (chronology condition)

CTC(closed timelike curve)が存在しない.

因果条件 (causality condition)

CCC(closed causal curve)が存在しない.

強い因果条件 (strong causality condition)

各点pの任意の近傍が，すべての因果的曲線が高々一回しか交わらないpの近傍を含む.

予言可能性

Causal simplicity

任意の点 p に対して，$J(p)$ が閉集合.

依存領域 $D(\Sigma) = D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$

$p \in D^+(\Sigma)$ $\Leftrightarrow$ p を通るすべての延長不可能な過去向きの因果的曲線が Σ と交わる.

準 Cauchy 面

次の 2 条件を満たす閉超曲面：

i) 非因果的である，すなわち，任意の因果的曲線と高々一点でのみ交わる.

ii) 端を持たない，すなわち，任意の点 $p \in \Sigma$ に対して，2 点の組 $q \in I^+(p), r \in I^-(p)$ で p, q を結ぶ時間的曲線が常に Σ と交わるものが存在する.

大域的双曲性

$\mathcal{M} = D(\Sigma)$ となる準 Cauchy 面（i.e.，Cauchy 面）が存在.

（注） 大域的双曲性は強い因果律の成立を要求するが，完備性の概念とは独立である．例えば，Anti de Sitter 時空は完備で曲率特異性を持たないが Cauchy 面を持たない.

2. 時空特異点の発生条件

$\sim$ 1950

高い対称性を持つ時空における特異点の存在

$\Rightarrow$ 特異点発生の一般性？

- 高い対称性のためか？
- 状態方程式の変化によりさけられるか？

1950 $\sim$ 1965

様々な厳密解の大域的構造の研究

大域的微分幾何学の手法の導入

1965 $\sim$ 1970

Penrose, Hawkingによる一般的な特異点定理の証明

特異点定理

- Convergence condition:
  Strong energy condition $\cdots$ $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$
  (Generic condition) $\cdots$ $K_{[a}R_{b]cd[e}K_{f]}K^c K^c \neq 0$
- Causality condition $\cdots$ CTCが存在しない
- Strong gravity condition $\cdots$ trapped set

$\Rightarrow$ 特異点の存在 $\cdots$ geodesic incompleteness

1970 ∼

Energy conditionは弱められるか？.

Causality conditionの破れは特異点の発生を妨げるか？

Strong gravity conditionはゆるめられるか？

特異点定理

Penroseの定理 [1965]

- Null convergence condition: $R_{ab}K^aK^b \geq 0$
- $\exists$ a non-compact Cauchy surface Σ
- $\exists$ a closed trapped surface $\mathcal{F}$

$\Rightarrow$ null geodesically incomplete.

Hawkingの定理 [1967]

- Timelike convergence condition: $R_{ab}K^aK^b \geq 0$
- Strong causality condition
- $\exists$ a past trapped point p: pにおける過去向きの時間的単位ベクトル W を用いて，p を通過する過去向きの時間的測地線のアフィンパラメーターを接ベクトル K が $K \cdot W = -1$ を満たすよう規格化するとき，有限なアフィン距離で一様に $\theta = \nabla \cdot K < -\epsilon (\epsilon > 0)$ となる．

$\Rightarrow$ p を通る過去向きに不完備な因果的測地線が存在．

Hawkingの定理 [1967]

- Timelike convergence condition: $R_{ab}K^aK^b \geq 0$
- $\exists$ a compact closed spacelike 3-surface Σ
- Σ の mean curvature K がいたるところ正（負）

$\Rightarrow$ time-like geodesically incomplete.

Hawking-Penroseの定理[1970]

- Timelike convergence condition: $R_{ab}K^aK^b \geq 0$
- Generic condition
- Chronology condition
- Strong gravity condition(次のいずれかが成立）:

  i) $\exists$ a compact achronal set without edge

  ii) $\exists$ a closed trapped surface

  iii) $\exists$ a trapped point p: pを通過するすべての過去向き光的測地線に対して，θが有限なアフィン距離で負となる．

$\Rightarrow$ time-like geodesically incomplete
または null geodesically incomplete.

Marginal Example

Senovilla解

[Senovilla(1990)PRL64:2219; Chinea, Fernandez- Jambrian, Senovilla(1992)PRD45:481]

$$\begin{aligned} ds^2 =& C^4(at)C^2(3ar)(-dt^2 + dr^2) \\ &+ (9a^2)^{-1}C^4(at)S^2(3ar)C^{-2/3}(3ar)d\phi^2 \\ &+ C^{-2}(at)C^{-2/3}(3ar)dz^2 \end{aligned}$$

$$S(u) := \sinh(u), \quad C(u) := \cosh(u).$$

この解は輻射 ($p = \rho/3$) の円筒対称な収縮と膨張を表し，

$$\theta = 3aS(at)C^{-3}(at)C^{-1}(3ar),$$

- timelike convergence conditionを満たし，
- generic conditionを満たし，
- globally hyperbolicで，特に，strong causality conditionを満たし，
- 任意の測地線ついて測地的に完備

であるが，Strong gravity conditionを満たさない．

Strong Energy Condition

Tiplerによる拡張[Tipler(1978) PRD17:2521]

• Penroseの特異点定理は，Cauchy面がコンパクトでも，その普遍被覆面がS^3でなければ成立する．

• Hawking-Penroseの定理は，strong energy conditionをweak energy conditionおよび任意の完備な時間的測地線に対するstrong energy condition on the averageの組に置き換えても成立する．ここで'strong energy condition on the average'とは，時間的測地線$\gamma(t)$上で，

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{ab}V^aV^b dt \geq 0$$

が成り立ち，かつ等号は$\gamma(t)$上すべての点で$R_{ab}V^aV^b = 0$が成り立つことを意味する．

Bordeによる一般化

Borde Theorem[Borde(1987)CQG4: 343]

時空$(\mathcal{M}, g)$が単連結で次の条件を満たすならば，$\mathcal{M}$は過去向きで光的に測地的に不完備である：
- i) Null convergence condition
- ii) stable causality condition
- iii) no compact closed achronal 3-submanifold
- iv) ∃ past null converging cone.

Focusing Theorem 1[Borde(1987)CQG4:343]

> アフィンパラメーターをt，接ベクトルをT^aとする因果的測地線$\gamma(t)$が$t > t_0$において完備で，任意の$\epsilon > 0$に対してある$B > 0$が存在し，任意の$t' > t_0$に対して次の条件が成り立つ区間$I > t', |I| \le B$が存在するとする：
>
> $$\int_{t_0}^{t} R_{ab}T^aT^b dt \ge -\epsilon \quad \forall t \in I.$$
>
> このとき，γを含む測地線束で$\theta(t_0) \le 0$となるものが存在すれば，$\theta(t) \equiv 0(\forall\ t \ge t_0)$であるか，または，ある$t > t_0$で$\theta \to -\infty$となる.

Focusing Theorem 2[Borde(1987)CQG4:343]

> γを完備な因果的測地線とし，tをそのアファインパラメーター，Tを対応する接ベクトルとする．γ上のある点で$T_{[a}R_{b]cd[e}T_{f]}T^cT^d \neq 0$が成り立ち，かつ，任意の$\epsilon > 0$に対して$B > 0$が存在して，任意のアフィンパラメーターの組$t_1 < t_2$に対して次の不等式が成り立つような区間の組，$I_1, I_2$で$|I_1|, |I_2| \ge B$かつ$I_1 < t_1, I_2 > t_2$となるものが存在するならば，$\gamma$上に互いに共役な点が存在する：
>
> $$\int_{t'}^{t''} R_{ab}T^aT^b dt \ge -\epsilon; \quad \forall t' \in I_1,\ \forall t'' \in I_2.$$

Hawkingの定理の一般化[gr-qc/9403049]

コンパクトで閉な準Cauchy面Σを仮定するHawkingの定理は，Strong energy conditionとStrong gravity conditionを次の2条件で置き換えても成立する：

$$R_{ab}V^aV^b \ge -K^2/3 \quad \forall\ V : V \cdot V < 0,$$

$$\chi < -K \qquad \text{on } \Sigma.$$

Cf. Primordial inflation modelにおける初期特異点の不可避性についての議論[Borde, Vilenkin (1997) PRD56: 717; (1996) IJMP D5: 813]

Kánnárによる一般化

断面曲率を用いたFocusing Theorem
[Kánnár(1991)CQG8:L179;
Kánnár, Rácz(1992) JMP33:2842]

$\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$を因果的測地線，$t_1, t_2 \in (a, b)$，$0 < \delta \leq (t_2 - t_1)/2$，$[t_1 - \delta, t_2 + \delta] \subset [a, b]$とする．$\gamma$に沿ったベクトル場$E$で，$E$と$T = \dot{\gamma}$に関する断面曲率$k_{E \wedge T}(t)$が区間$[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$，$[t_2 - \delta, t_2 + \delta]$のそれぞれで一定の符号を持ち，かつ次の不等式を満たすものが存在するならば，γは区間$[t_1 - \delta, t_2 + \delta]$に共役点を持つ：

$$\int_{t_1}^{t_2} k_{E \wedge T}(t) dt \geq 2/\delta.$$

因果律の破れた時空における特異点

一般に因果律の破れは特異点の発生を妨げない．[Tipler 1976-1977]

Causality violating setが全時空と一致しなければ，適当な物理的条件の下で，Hawking-Penroseの特異点定理は，causality conditionが破れていても成立．[Maeda, Ishibashi(1996) CQG13:2596]

Hawkingの議論

Compactly generate Cauchy horizon $H^+(\Sigma)$

$H^+(\Sigma)$の任意のnull geodesic generatorは過去にのぼすと，あるコンパクト集合Cに入りその中に留まる．

定理 [Hawking(1992)PRD46:603]

> コンパクトでない準 Cauchy 面 Σ に対して，$H^+(\Sigma)$ が compactly generatedならば，weak energy condition が破れていなければならない．さらに，このとき，一般に $H^+(\Sigma)$ は光的閉測地線を含む．

Chronology Protection Conjecture

Causalityの破れにより生じたCauchy horizonは量子論的に不安定である．

Time Machine

定義：極大な時空$\mathcal{N}$に対して次の条件を満たす領域$L_N \subset \mathcal{N}$をタイムマシーンと呼ぶ：

i) L_Nは$\mathcal{N}$のcausality violating set

$$V = \{p \in \mathcal{N} \mid J^-(p) \cap J^+(p) \neq \emptyset\}$$

を含む.

ii) あるcausality conditionの満たされた極大な時空$\mathcal{M}$とその相対コンパクトな領域L_Mが存在して, $\mathcal{N} - L_N$は$\mathcal{M} - L_M$に等長である.

CTMの困難

- Σがコンパクトでないとき, $J^+(\Sigma)$にCTM(VがコンパクトなTM)を作るにはWECを破らねばならない. [Hawking 1992]
- ある種のエネルギー条件を破らなければ, CTMは特異点を伴う. [Tipler(1977) Ann. Phys. 108:1]

NTMの存在

WECを満たし特異点を伴わないTMが存在する.
[Krasnikov(1998) CQG15: 997]

3．時空特異点の構造

なめらかさのカテゴリーと極大性

時空の完備性や大域的双曲性の破れが時空の特異性と結びつくのは，極大な時空に対してのみである．[Geroch(1970); Clarke (1976) CMP49: 17]

数学的には，極大性の概念は時空（計量）をどのようななめらかさのクラスで考えるかに大きく依存する．

- Penrose-Hawkingの特異点定理は，計量がC^{2-}級の時に成立する．[Hawking-Ellis1973]
- 測地線の存在,（時間的測地線の）一意性，Jacobi方程式は次の条件下（C^{0-}級)で成り立つ：[Clarke(1982) J. Math. Anal. Appl. 88: 270]
  - i) $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$は可測で局所有界,
  - ii) $g_{\mu\nu}$は局所有界な一般化微係数をもつ,
  - iii) 弱い意味で定義された曲率テンソルが存在し，局所有界である．
- Kastor-Traschen解は，内部ホライズンを越えてC^1級の拡張が可能であるがC^2級の拡張は存在しない．また，宇宙論的ホライズンで少なくともC^2級の拡張が可能であるが，C^∞級の拡張は質量の総和がある離散的な値と一致する場合を除いて存在しない．[Brill et al(1994) PRD49: 840; Brill gr-qc/9501023]
- C^{122}級の拡張が可能であるが解析的拡張が存在しない厳密解が存在する．[Cruściel, Singleton (1992) CMP147: 137]
- Mass inflation singularityでは，Cauchy horizonを越えてC^0級の拡張が可能であるが，sp-曲率特異点でC^1級の拡張は存在しない．[Ori (1991) PRL67: 789; (1992)

PRL68: 2117; Brady, Smith (1995) PRL75: 1256; Hod, Piran (1998) PRL81: 1554]

Einstein 方程式の初期値問題に対する解の存在と一意性は,

$$(h, \chi) \in W^{t+1} \otimes W^t;\ t = 1.5 + \epsilon$$

に対して成立. ($W^{2.5} \Rightarrow \quad C^{0.5}$)

（注）場の量子論は一般に非常に弱いなめらかさのクラスで定式化される.

弱い特異点

準正則特異点

γ を $\mathcal{C}^{0-}$ 型大域的双曲型時空 $\mathcal{M}$ の因果的曲線とする．γ が一般曲率型準正則特異点を end point とするならば，時空 $\mathcal{N}$ と等長写像 $\theta : I^-(\gamma) \to \mathcal{N}$ が存在して，$\theta(\gamma)$ は $\mathcal{N}$ で延長可能である．[Clarke 1993B]

これより，準正則特異点は一般的でなく，かつ何らかの位相的特異性と結びついていると考えられているが，厳密な証明はない（Clarke によるより強い内容の定理は間違い）．

nsp-曲率特異点

因果的曲線 γ が nsp-曲率特異点を end point とするとき，γ の開近傍 $\mathcal{U}$ とそこで定義された frame field E_a が存在して，E_a に関する曲率テンソルの成分は $\mathcal{U}$ 上で有界となる．[Siklos (1979) GRG10: 1003]

$\rho > 0$，$0 \le dp/d\rho \le 1$，$\rho + p > 0$ を満たす流体を重力源とする Bianchi モデルでは，nsp-曲率特異点は tilted class B モデルに対してのみ発生する．また，nsp-曲率特異点を持つ解は一般的でない．[Ellis, King (1974) CMP38: 119; Siklos (1978) CMP58: 1978; Collins, Ellis (1979) Phys. Rep. C56: 65]

RN-BH 時空に incoming null flux を加えた RN-Vaidya 時空では，Cauchy horizon が nsp-特異点となるが，out going flux を加えるとこれは sp-特異点へと変わる．[Hiscock (1981) PLA83: 110; Poisson, Israel (1990) PRD41: 1796; Ori 1991]

これより，nsp-曲率特異点は一般的でないことが予想されるが証明はない．

nsp-曲率特異点はある意味で非局在型の特異性なので，その量子論への影響は不明．

曲率特異点の強度

$\gamma(t)(0 \leq t < 1)$: Inextendible, incomplete geodesic

$\theta_{t_0}(t)$: $t = t_0$ の点から出る光的測地線束に対する θ

$$\theta_{t_0}(t) = \frac{d}{dt} \ln S_{t_0}(t)$$

- Strong curvature condition(SCC) [Tipler(1977) PRD15: 942]

$$\liminf_{t_0 \leq t < 1} S_{t_0}(t) = 0 \quad \forall\ t_0$$

必要条件 [Clarke, Krolak (1985) JGP2: 127]

$\gamma : [0,1)$ が SC-特異点を end point とするならば，積分

$$I_{ij}(v) = \int_0^v dv' \int_0^{v'} dv'' |R_{i4j4}(v'')|$$

は収束しない.

十分条件 1

積分

$$\int_0^v dv' \int_0^{v'} dv'' R_{44}(v'')$$

が発散するならば，γ は SC-特異点を end point とする.

十分条件 2

ある m, n に対して ${C^m}_{4n4}$ が定符号で積分

$$\int_0^v dv' \int_0^{v'} dv'' \left(\int_0^{v''} dv''' |{C^m}_{4n4}(v''')| \right)^2$$

が発散するならば，γ は SC-特異点を end point とする.

- Limiting focusing condition(LFC)
  [Krolak(1986) CQG3: 267]

$$\forall\ t_0, \exists\ t_1(t_0 < t_1 < 1)\ \mathrm{st.}\theta_{t_0}(t_1) < 0$$

必要条件 [Clarke, Krolak (1985) JGP2: 127]

$\gamma : [0,1)$ が LF-特異点を end point とするならば，積分

$$I_{ij}(v) = \int_0^v dv' |R_{i4j4}(v')|$$

は収束しない.

十分条件 1

積分

$$\int_0^v dv' R_{44}(v')$$

が発散するならば，γ は LF-特異点を end point とする.

十分条件 2

ある m, n に対して $C^m{}_{4n4}$ が定符号で積分

$$\int_0^v dv' \left(\int_0^{v'} dv'' |C^m{}_{4n4}(v'')| \right)^2$$

が発散するならば，γ は LF-特異点を end point とする.

宇宙の初期特異点

Bianchiモデル

空間的に一様なモデルの初期特異点は一般に空間的であり，物質が理想流体の場合，Bianchi IXを除いて，初期特異点は一般に物質特異点である，すなわちRicciテンソルから作られるスカラ量が発散する．[Ellis, King (1974) CMP38: 119; Siklos (1978) CMP58: 255]

（注）Cauchy horizonをもつclass B tilted modelでは，解析接続により時間的特異点が現れることがある．[Ellis, Collins 1979]

BKL予想

重力崩壊により作られる一般的な時空特異点は空間的で，局所的に真空Bianchi IX型と同じくmixmaster的振る舞いをする．[Belinsky, Lifshitz, Khalatnikov (1971) JEPT 35: 838]

$U(1)$対称性をもつモデル

Gowdy時空（$G2$対称な時空）の空間的特異点は，漸近的に局所一様，局所Kasner的である(AVTD)．[Berger, Garfinkle (1998) PRD57: 4767]

$U(1)$対称な時空の空間的特異点は，Mixmaster的である．[Berger et al (1998) MPL A13: 1565]

Mass Inflation

Event horizon stability

Stability of massless field perturbations on Schwarzschild spacetime background. [Price (1972) PRD5: 2419; Kay and Wald (1987) CQG4: 893]

Perturbationの減衰則：第lモーメントの摂動に対して

$$\delta\Phi \sim v^{-2(l+1)}.$$

Stability of massless field perturbations on Kerr spacetime background. [Whiting (1989) JMP30: 1301]

Cauchy horizon stability

Imploding null flux [Hiscock (1981) PL83A: 110]

RN-Vaidya計量 ($G = 1$)

$$ds^2 = -f(v,r)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2,$$

$$f(v,r) = 1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2}.$$

$m(v) = M - \delta v^{-n}$のとき，Cauchyホライズンは nsp-特異点.

mass inflation

一般の球対称計量

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b + r^2 d\Omega^2$$

に対して，local mass m と gravity strength κ を

$$g^{ab}\partial_a r\partial_b \equiv f \equiv 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2},$$
$$\kappa \equiv -\frac{1}{2}\partial_r f = -\frac{m}{r^2} + \frac{Q^2}{r^3}$$

で定義する．このとき，

$$\Psi_2 = \frac{\kappa}{r}.$$

- Hiscock モデルの RNV 時空にさらにブラックホール内部での outgoing null flux を加えると，outgoing null ray に沿って Cauchy ホライズンに近づいたとき，r は正の有限値に近づくが，m は発散する:

  $$m \sim |V|^{-1}(-\ln|V|)^{-n-1}.$$

  したがって，Cauchy ホライズンは null curvature singularity となる．[Poisson, Israel (1990) PRD41: 1796]

- この mass inflation singularity は LFC を満たすが，SCC を満たさない．さらに，適当な null 座標系では g_{ab} が有限な極限を持ち，Cauchy ホライズンを横切る物体の tidal 力による変形は有限にとどまる．[Ori (1991) PRL67: 789]

- 点電荷を源にする RN 時空に正則な初期条件をもつ中性スカラ場を加えた系の時間発展を数値的に求めると，null Cauchy horizon にそう mass inflation singularity の発生が確認される．この horizon の半径 r は horizon にそって減少し，最終的に空間的な強曲率特異点につながる．[Brady, Smith (1995) PRL75: 1256; Burko, Ori (1998) PRD57: R7084; Burko gr-qc/9809073]]

- 球対称荷電スカラ場の重力崩壊の数値シミュレーションでも Brady-Smith と同じ結果が得られる．[Hod, Piran (1998) PRL81: 1554]

- 正の宇宙項を持つ場合の RNdS ブラックホールの Cauchy horizon も mass inflation 型の不安定性を持つ．[Brady, Moss, Myers (1998) PRL80: 3432]

- Kerr ブラックホールの Cauchy ホライズンも，一般的な非線形摂動に対して，球対称荷電時空の場合と同様の振る舞いをする．[Ori (1992) PRL68: 2117]

4. 宇宙検閲仮説

基本予想

- 弱い宇宙検閲仮説 [Penrose 1969]
- 強い宇宙検閲仮説 [Penrose 1979]
- Hoop予想 [Thorne 1972]
- Seifert予想 [Seifert 1979]

様々なアプローチ

- ブラックホールの安定性 [1970-1989]
- ブラックホールの'overcharging' [1974-1994]
- Cauchyホライズンの不安定性 [1969-現在]
- 球対称重力崩壊の解析的研究：
  - ダスト [1973-1992]
  - 流体(等方圧力) [1987-1999]
  - 流体(非等方圧力) [1997-1999]
  - EKG [1987-1999]
- 非球対称重力崩壊の解析的研究：
  - Szekeres時空 [1975-]
- 数値計算による初期値問題の研究 [1988-1992]
- 数値計算によるシミュレーション [1991-]
- 幾何学的考察による一般定理 [1986-?]

弱い宇宙検閲仮説

WCCH[Penrose 1969]

物質が現実的な状態方程式に従うとき，なめらかな初期条件(Σ, q)から Einstein 方程式の解として決まる漸近的に平坦な時空(M, g)は “一般に” ホライズン上およびその外に特異点を持たない．

根拠

- 特異点定理における strong gravity condition
- Hoop conjecture[Thorne 1973]

$$C \leq 4\pi m \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{ホライズンの存在}$$

- 一様なダスト球の重力崩壊[Oppenheimer, Snyder 1939]

数学的な表現

(M, g): strongly future predictable from Σ

i.e.,

$$\mathcal{I}^+ \subset \overline{D^+(\Sigma)} \text{ in } \bar{M}, \quad J^+(\Sigma) \cap \overline{J^-(\mathcal{I}^+, M)} \subset D^+(\Sigma)$$

(注)

WCCH は，ブラックホールの一意性定理，正エネルギー定理の成立にとって本質的である．

強い宇宙検閲仮説

SCCH[Penrose 1979]

物質が現実的な状態方程式に従うとき，なめらかな初期条件に対する Einstein 方程式の解は，一般に globally hyperbolic な拡張を持つ．

根拠

RN BH の Cauchy horizon は不安定 [MacNamara (1978) PRSLA358: 499; A364: 121; Gürsel et al (1979) PRD19: 413; PRD20: 1260]]

（注） WCC は無限遠（$\mathcal{I}^+$）の構造が壊されないことを要請するので、SCC が成立しても必ずしも WCC は成立しない。一般には、むしろ SCC の成立は特異点の発生が破壊的な影響を外部にもたらすことを意味している。

球対称スカラ場の重力崩壊

— Christodoulouの研究 —

Notation

$$ds^2 = -e^{2\nu}du^2 - 2e^{\nu+\lambda}dudr + r^2 d\Omega^2,$$

$$1 - \frac{2m}{r} := g^{ab}\partial_a r \partial_b r = e^{-2\lambda},$$

$$\theta = r\frac{\partial\phi}{\partial r},\ \zeta = -2re^{\lambda-\nu}\frac{\partial\phi}{\partial u} + r\frac{\partial\phi}{\partial r}.$$

正則な原点の時空における軌跡をΓ，(u, v)を光的座標として，Γ上の点を頂点とする未来の光円錐を$C^+(u)$，球対称な過去向きの光円錐を$C^-(v)$.

1987 最終的なBondi質量が正の値M_∞に近づくとき，M_∞の質量をもつブラックホールが形成される．[CMP109:613(1987)]

1991 特性初期値問題において，特異点がホライズンで隠されるための十分条件．[Comm. Pure Appl. Math. 44:339(1991)]

定理

$v_1 < v_2$ に対して，$S_{1,0} = C^-(v_1) \cap C^+(u_0), S_{1,0} = C^-(v_1) \cap C^+(u_0)$，$u_0 < u$ に対して，$S_1 = C^-(v_1) \cap C^+(u), S_1 = C^-(v_1) \cap C^+(u)$ とする．δ_0, η_0 を

$$\delta_0 = \frac{r(u_0, v_2)}{r(u_0, v_1)} - 1,\ \ \eta_0 = \frac{2(m(u_0, v_2) - m(u_0, v_1))}{r(u_0, v_2)}$$

と定義すると，適当な定数 $c_0 \leq 1/e, c_1 \geq 1$ に対して，もし

$$\delta_0 \leq c_0, \quad \eta_0 > c_1 \delta_0 \log(1/\delta_0)$$

の 2 条件が成り立てば，常に未来の光円錐 $C^+(u_*)(u_0 < u_*)$ で $r(u_*, v_1) > 0$ かつ (u_*, v_2) が見かけのホライズンの中に含まれるものが存在する．

1993 解の拡張定理 [CPAM46:1131(1993)]

$I^-(C^-)$ が正則でかつ，C^- を生成する内向きの光的測地線に沿って原点に近づくと m/r がゼロに近づくとき，C^- は Γ 上の正則点を頂点とする光円錐である．

さらに，特異点が形成されるための十分条件および形成されないための十分条件を与え，解が Γ 上の正則点の近傍で局所的なスケール普遍性をもつことをしめした．

1994 裸の特異点が実際に形成される解の例
[Ann. Math. 140:607 (1994)]

特異点が時空的に" 一点" となる例，および line的な" future light cone" となる例（collapsed cone singularity）．

Cf. Schwarzschildブラックホールの特異点は，causal boundary としては $\mathbb{R} \times S^2$.

1999 球対称スカラ場の重力崩壊に対する宇宙検閲定理

[Ann. Math. 149: 183(1999)]：

相似的座標系: 初期特性面 C_0^+ が $u = -2a$，特異点を頂点とする光円錐 C_0^- と C_0^+ との交わりが $r = a$ となるように (u, r) 座標を取り，

$$u = -2ae^{-t}, \quad r = ae^{s-t}$$

とおく．この座標では C_0^+ は $t = 0$，C_0^- は $s = 0$，特異点は $s = 0, t = +\infty$ となる．以下，$C_0^-(s = 0)$ 上の量は添え字 0 を付けて表す．

Notations

$$\gamma(t) := \int_0^t \left(\kappa_0(t') - 1\right) dt'; \quad \kappa := \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}.$$

$$I(t) := -\int_0^t e^{-\gamma(t')}\zeta_0(t')dt'.$$

不安定性定理 1

C_0^- の頂点 P が特異点であるならば $\gamma(t)$ は非有界である．このとき，$t \to \infty$ で $I(t)$ が有界な極限を持たないか，または

$$\theta_0(0) \neq \lim_{t\to\infty} I(t)$$

が成り立つならば，P は見かけのホライズンの端点であり，特異点はホライズンに含まれる．

不安定性定理２

$\gamma(t)$が非有界で，$\lim_{t\to\infty} I(t) = \theta_0(0)$となったとする．このとき，

$$g(x) = e^{-\gamma(t)/4};\quad x = e^{-t-5\gamma(t)}$$

$$h(x) = \left[\frac{1}{x}\int_0^x \left(e^s\theta(0,s) - \theta(0,0)\right)^2 ds\right]^{1/2}$$

とおくと，

$$\limsup_{x\to 0+} \frac{h(x)}{g(x)} = \infty$$

が成り立てば，不安定定理１と同じ結論が成り立つ．

宇宙検閲定理

C^+上の特性初期値問題において，裸の特異点を生み出す初期値の集合の余次元は２以上である．

証明：
基本変数ν,λ,θ,ζに対する方程式は

$$r\left(\frac{\partial\nu}{\partial r} - \frac{\partial\lambda}{\partial r}\right) = e^{2\lambda} - 1,$$

$$r\left(\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{\partial\lambda}{\partial r}\right) = \theta^2,$$

$$r\frac{\partial\zeta}{\partial r} = -(e^{2\lambda} - 1)\zeta - \theta,$$

$$r\left(2e^{\lambda-\nu}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial r}\right) = (e^{2\lambda} - 1)\theta + \zeta$$

となるので，初期条件は $C^{+}0$ 上の θ の値 $\vartheta(s)$ となる．対応して，初期値空間は，有界変動かつ可積分な関数 ϑ の集合である．

$f_1(s)$ を $(-\infty, 0)$ でゼロ，$[0,\infty)$ で絶対連続かつ

$$\lim_{s\to 0+} f_1(s) = 1$$

となる非負可積分関数，$f_2(s)$ を $(-\infty, 0)$ でゼロ，$(0,1)$ 上で

$$f_2(s) = e^{-s}\left(\frac{d(s(g(s))}{ds}\right)^{1/2}$$

により与えられる非負可積分絶対連続関数として，裸の特異点を生み出す初期値 ϑ から新たな初期値の 2 次元的集合

$$\tilde{\vartheta}_{\xi_1,\xi_2} = \vartheta + \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2$$

を作る．このとき，$I^{-}(C_0^{-})$ では $\tilde{\vartheta} = \vartheta$ となるので，$\gamma(t), I(t)$ は ξ_1, ξ_2 に依存しない．ところが，

$$\tilde{\vartheta}_{\xi_1,\xi_2}(0) = \lim_{t\to\infty} I(t) + \xi_1,$$

$$\limsup_{s\to 0+} \frac{\tilde{h}_{0,\xi_2}(s)}{g(s)} = \infty$$

となるので，$(\xi_1,\xi_2) \neq (0,0)$ なら裸の特異点は発生しない．

Tolman-Bondiモデル

厳密解

Comoving synchronous gauge

$$ds^2 = -d\tau^2 + e^{2\omega} d\chi^2 + r^2 d\Omega_2^2$$

Einstein equations

$$\dot{r}^2 - \frac{2m(\chi)}{r} = \Gamma(\chi)^2 - 1$$

$$e^{\omega} = \frac{|r'|}{\Gamma(\chi)}$$

$$\rho = \frac{m'}{4\pi r^2 r'}$$

初期条件

$$\omega(0,\chi), r(0,\chi), \rho(0,\chi) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma(\chi), m(\chi), r(0,\chi)$$

これらのうち一つはゲージ自由度．以下，$r(0,\chi) = \chi$

一般解

$$\frac{\tau}{=} \frac{F(p)}{\bar{\rho}^{1/2}} \left[1 - \left(\frac{r}{\chi} \right)^{3/2} \frac{F(pr/\chi)}{F(p)} \right]$$

$$p = \frac{\chi}{2m}(1 - \Gamma^2), \ \bar{\rho} = m(\chi) / \frac{4\pi}{3}\chi^3$$

$$F'(\chi), F''(\chi) > 0, \ F(-\infty) = 0, \ F(1) = \pi/2$$

正則性条件: ρが有界

３つのタイプの特異点

- Final singularity: $r(t_s, \chi) = 0, \quad \chi > 0$

- Shell crossing singularity: $r'(t_{sc}, \chi) = 0,\ t_{sc} < t_s$

  発生条件: $\bar{\rho}'/\bar{\rho} > 2p'F'(p)/F(p)$

  性質：LFCを満たさない裸の特異点

- Shell focusing singularity: $\chi = 0$での裸の特異点

  発生条件：

$$h_0 = -\frac{9\rho''(0)}{20\rho(0)}F(p_0) + \frac{3}{2}p''(0)F^1(p_0) > 0$$

  性質：[Christodoulou 1984, Newman 1986]

  - LFCを満たすが，SCCを満たさない．
  - 質量ゼロの特異点である．

球対称な null dust collapse

Vaidya 時空

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(v)}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega_2^2$$

$$\begin{aligned} & m(v) = 0; && v < 0 \\ & \dot{m}(v) \geq 0; && v \geq 0 \\ & \dot{m}(0) = \mu > 0 \end{aligned}$$

発生条件：$(r, v) = (0, 0)$ が裸の特異点となる条件は

$$\mu \geq \frac{1}{16}$$

性質：γ_+ は SCC を満たす.
[Papapetrou 1985, Hollier 1986, Dwivedi, Joshi 1989, 1991]

圧力のあるガスの球対称重力崩壊

Self-similar解

○ Self-similar, spherical, $P=(\gamma-1)\rho$
[Ori, Piran 1987, 1990]

Sonic pointで解が解析的に接続できることより，離散的な解の系列$n=1,2,\cdots$がきまる．

- GR Penston-Larson解$(n=1)$に対して，$\gamma \lesssim 1.0105$のとき裸の特異点が発生．

  性質：

  - SCCを満たす
  - 無限大の赤方偏移を引き起こす

- $n\geq 2$となる解では，γによらず裸の特異点が発生

（注）$D_0 = D(0)/4\pi t^2$とおくと，$D_0=600$のとき$n=2$，$D_0=8\times 10^5$のとき$n=3$．これに対して，通常のSNにより作られる中性子星では，$D_0\geq 10^{15}$!!.

Self-similarでない系

○ Spherical gas collpase, no radial pressure
[Nakao, Harada, Iguchi 1998]

このモデルは厳密に解くことができ，次の性質を持つ.

- 一般的な初期条件に対しては，裸の特異点は発生しない.
- 特殊な初期条件に対しては，LFCを満たす裸の特異点が発生.

○ Non-self-similar spherical gas collapse, $p = (\gamma - 1)\rho$
[Harada 1999]

Null time-slicingを用いた数値計算

十分高温で単純収縮型の初期条件に対して

- $\gamma \lesssim 1.01$に対して裸の特異点が発生.
- 解は$t \to t_s = 0$でself-similar解に近づく.

○ Perturbation of the TB solution
[Iguchi, Nakao, Harada (1998, 1999)]

TB解のshell focusing singularityにより作られるCauchy horizonは、even-parity GW perturbationに対して不安定である。

解析的研究

Quasi-spherical irrotational dust collpase
[Szekeres (1975) PRD12: 2941]

Szekeres解

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{P^2 Y'^2}{\Gamma^2(r)}dr^2 + Y^2 d\zeta d\bar{\zeta}$$

$$Y = \frac{R(t,r)}{P(t,\zeta)};\ \ P = a(r)\zeta\bar{\zeta} + b(r)\zeta + \bar{b}(r)\bar{\zeta} + c(r)$$

$$(ac - b\bar{b} = 1/4) \qquad \dot{R}^2$$

$$S' = \frac{1}{4\pi}m(r)'\Gamma(r)$$

- $S'/3S > 1/r$ のとき，裸の shell crossing singularity が発生.
- Marginal bound collapse のとき，SCC を満たす central focusing naked singularity が起こりうる. [Joshi, Krolak (1996) CQG13: 3069]

（注） Szekeres時空はSchwarzschild解に接続可能で，したがって重力波を含まない. [Bonnor (1976) CMP51: 191]

数値的研究

○ 特異解に近づく初期値問題の解の系列

[Nakamura, Shapiro, Teukolsky 1988]

Newton 理論の MacLaughrin spheroid(離心率 e, $P = 0$) に対応する相対論的初期値問題.

- $e \sim 1$ のとき, 見かけのホライズンが発生しない.

[Abrahams, Heiderich, Shapiro, Teukolsky 1992]

軸半径 a, b の prolate な波束で表される軸対称真空重力波に対する初期値問題.

- $b/a \gg 1$ のとき, 見かけのホライズンが発生しない.
- R^2 は z 軸上の波束の端で, $b/a \to \infty$ とともに限りなく増大.

○ Non-rotating collisionless gas spheroid collapse [Shapiro, Teukolsky 1991, 1992]

数値計算：Einstein 方程式 ＋ Vlasov 方程式

(100(r) $\times$ 32(θ, ϕ)grids, 6000 particles)

Maximal time slicing のもとで, prolate な初期配位に対して

- R^2 が z 軸上の spheroid の外で限りなく増大.
- 見かけのホライズンは発生しない.

（注） 見かけのホライズンの time slice 依存性 [Wald, Iyer 1993]

Schwarzschild 時空の場合でも, 非球対称な time slice を取ると, 見かけのホライズンが検出されない.

5. まとめ

特異点の発生条件

- 因果律の破れと特異点の発生との関連はまだ十分に解明されたと言えない。
- 特に、特異点なしに Time machine ができるかどうかは興味深い問題である。

特異点の構造

- 大域的な意味で、準正則特異点が時空の延長により解消可能かどうかは依然として不明である。
- nsp-特異点の安定性（一般性）は、量子論との関連で重要な問題である。
- mass inflation singularity、Kastor-Traschen 解の研究は、weak curvature singularity の取り扱い、解の極大性の議論について新たな問題を提起している。
- EKG 系についての Christodoulou の研究、EYM 系でのブラックホール内部構造の研究は、特異点の構造が物質の性質に大きく依存していることを示唆している。
- BKL 予想の研究は、重力崩壊でできる特異点の問題、特に非球対称系の特異点の具体的な構造を明らかにするうえで重要である。これまでの研究は、一般系の特異点が複雑な構造をもつ可能性を示唆している。

宇宙検閲仮説

- 球対称な EKG 系については実質的に弱い宇宙検閲仮説は示されたと思われる。

- ただし、mass gap のない臨界現象の存在は、宇宙検閲仮説の定式化に新たな問題を提起している。

- 球対称系の研究は、特異点近傍の構造の自己相似性を強く示唆しているが、これが一般系でも成り立つかどうかは明らかでない。

- 一般系での研究では、物質の存在が特異点の構造決定に重要かどうかをまず明らかにする必要がある。（空間的に一様なモデルでは、一般には特異点近傍で物質は重要でない。）

特異点の物理

- 特異点の問題が現実の現象で重要であることを明確に示す研究はない。

- 裸の特異点は、もし安定不安定で強い宇宙検閲仮説が成り立つとすると、強い null singularity を生み出すことになる。この null singularity の発生が量子論によりどのように変更を受けるかは物理的に重要な問題である。

- また、裸の特異点が発生する場合に、この特異点が instanton 的となる時空の拡張（境界条件）が存在するかどうかも興味深い問題である。

- 一般に、弦理論における duality 変換は時空特異点の構造を変える。この問題の具体的解析も、量子論との関連で興味深い。