量子力学３　演習問題　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
締切：4 月 22 日(月)２限　授業開始時

1.(調和振動子)

１次元調和振動子

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

で表される系を考える。

(i) 量子論において、$\hat{x}$ と $\hat{p}$ の交換関係はどう仮定されるか。

(ii) 生成・消滅演算子 $\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$を$\hat{x}$と$\hat{p}$の線型結合としてうまく定義すると、
交換関係が$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$となるようにできる。どうすれば良いか。

(iii) ハミルトニアンを$\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$を用いて表せ。

標準的な手法に従えば、ハミルトニアンの固有状態と固有エネルギーは、整数n（ただし$n \geq 0$）用いて$|n\rangle$および$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$と表される。このとき、

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

が成り立つ。

(iv)

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

を示せ。

(v)

$$\langle n'|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right)$$

を示せ。よって、$\langle n'|\hat{x}|n\rangle$は$n$と$n'$が隣合う場合以外はゼロである。

2.(摂動)

摂動による基底状態のエネルギーシフトを考える。

(i)縮退のない場合の１次と２次のエネルギーシフトの表式を示せ。

１次元調和振動子が摂動

$$\hat{H}_1 = b\hat{x}$$

を受ける。b は実の定数である。

(ii) 基底状態$|0\rangle$の１次と２次のエネルギーシフトを計算せよ。ただし次式を使って良い。

$$\langle n'|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right)$$

$\hat{H}_1$は調和振動子に一定の力がかかっていることを意味している。力が加わるとバネのつりあいの位置が変化する。

(iii)このことを用いて$\hat{H}_1$による基底状態のエネルギーを厳密に求めよ。
結果を(ii)で得た結果と比較せよ。

---

3. (摂動) 一様な静磁場$(B_x, 0, B_z)$中に置かれた電子スピンのハミルトニアンはパウリのスピン行列を用いて

$$\hat{H} = \mu_B(\hat{\sigma}_x B_x + \hat{\sigma}_z B_z)$$

と書ける。

(i) パウリのスピン行列$\hat{\sigma}_x$、$\hat{\sigma}_y$、$\hat{\sigma}_z$を2×2の行列で表せ。これらの行列のもつ性質を列挙せよ。

$0 < B_x \ll B_z$と仮定する。$\hat{H}$のエネルギー固有値を次の３個の方法で求めて比較せよ。

(ii)ハミルトニアンを対角化して固有エネルギーを求めよ。

(iii) z 方向のスピン上向き、下向きを無摂動状態の固有状態とし、B_xを摂動と解釈して固有エネルギーを２次の摂動まで求めよ。

(iv) $(B_x, 0, B_z)$の方向に新たなz'軸を取り、固有値を求めよ。