量子力学３　演習問題　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
締切：5 月 8 日(水)２限　授業開始時

---

4. (摂動)　３次元の等方的調和振動子を考える。このハミルトニアンは

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{\hat{p}_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2)$$

で与えられる。

(i) 固有エネルギーを低いものから３個挙げよ。さらに、それぞれ固有状態が何重に縮退しているか答えよ。

次に摂動

$$\hat{V} = \delta m\omega^2\hat{x}\hat{y}$$

をかける。ここでδは１よりずっと小さい正の実数である。

(ii) 最低エネルギー状態に対する１次のエネルギー補正を求めよ。必要なら次の式を用いよ。

$$\langle n'|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right)$$

(iii) 第１励起エネルギー状態に対する１次のエネルギー補正を求めよ。
（Hint: 行列の対角化を行えば良い）

(iv) 近似を使わず、問題を厳密に解くことを考える。ハミルトニアンが$\hat{H}_0 + \hat{V}$の時、調和振動子のポテンシャルエネルギーが$y = x$に沿った方向には高く、$y = -x$に沿った方向には低くなっていることを示せ。

(v) x軸とy軸をそれぞれz軸の周りに 45 度回転した座標系を導入することにより、ハミルトニアンが$\hat{H}_0 + \hat{V}$の問題を、方向によって周波数の異なる３次元調和振動子の問題に帰着できる。この方法でエネルギー固有値の正確な表式を求めよ。得られた結果を(iii)の結果と比較せよ。

5.(摂動) １次元調和振動子が摂動

$$H_1 = b\hat{x}^3$$

を受ける。bは実の定数である。必要なら次式を使って良い。

$$\langle n'|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right)$$

(i) $\langle 0|b\hat{x}^3|3\rangle$を求めよ。

(ii) $\langle 0|b\hat{x}^3|n\rangle$のうち、ゼロでないものを全て求めよ。

(iii) 基底状態$|0\rangle$に対する１次の摂動エネルギー補正を求めよ。

(iv) 基底状態$|0\rangle$に対する２次の摂動エネルギー補正を求めよ。