量子力学３　演習問題　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
配布：5 月 27 日(月)
締切：6 月 3 日(月)２限　授業開始時

12. (Heisenberg 表示と Schrodinger 表示)
Heisenberg 表示は Schrodinger 表示を用いて

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

と定義される。この２つは単なる表示の違いであり、どちらかの表示でないと問題が解けない、ということはない。しかしそれぞれの表示の得意・不得意はある。誤解を恐れずに言えば、古典力学との対応を見るには Heisenberg 表示が使いやすいのに対し、量子揺らぎなどを扱うには Schrodinger 表示が使いやすい。具体例を用いて両者の違いを体験してみよう。

(i) これから多くの交換関係を計算するが、交換関係の計算において特に Heisenberg 表示と Schrodinger 表示を区別する必要のないことを示せ。具体的には、Schrodinger 表示で

$$\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$$

が成り立つとき、

$$\hat{C}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{B}_H(t)]$$

が成り立つことを示せ。

以降、問題で使う表示形式のみ文章で提示し、Heisenberg 表示でも$\hat{x}_H(t), \hat{p}_H(t)$などの H の添字は省略するものとする。
調和振動子のハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

を仮定して以下の問いに答えよ。

(ii) Heisenberg 表示を用い、$\hat{x}(t)$と$\hat{p}(t)$に関する運動方程式を導け。

($i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = [\hat{A}(t), \hat{H}]$ を計算せよ)

前問の連立方程式を解くと、$\hat{x}(t)$と$\hat{p}(t)$は単振動することが容易にわかる。ではSchrodinger 表示を用いるとどうだろう。生成消滅演算子$\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$を用いるとハミルトニアンは$\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)$と書け、その固有状態は負でない整数$n$を用いて$|n\rangle$と書ける。任意の波動関数$|\psi(t)\rangle$を

$$|\psi(t)\rangle = \sum c_n e^{-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t}|n\rangle$$

のように$|n\rangle$で展開したとする。

(iii) 一般に、位置の期待値$\langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle$は単振動することを示せ。

Heisenberg 表示、Schrodinger 表示のどちらを用いても位置の期待値が周波数ωで単振動することが示せた。次に量子揺らぎに進もう。量子ゆらぎの評価には、$\hat{x}$ではなく$\hat{x}^2$の期待値の評価が欠かせない。**Schrodinger 表示を用いて**その評価を試みよう。

(iv)時刻 t=0 に系が基底状態$|0\rangle$にあった。時刻 t における$\hat{x}$の期待値と$\hat{x}^2$の期待値を求めよ。

(v)時刻 t=0 に系が基底状態$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$にあった。時刻 t における$\hat{x}$の期待値と$\hat{x}^2$の期待値を求めよ。

これらの結果から、$\hat{x}$の期待値は時間とともに単振動するが、$\hat{x}^2$の期待値は定数である、と思って良いのであろうか。

(vi) 時刻 t=0 に系が基底状態$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|2\rangle)$にあった。時刻 t における$\hat{x}$の期待値と$\hat{x}^2$の期待値を求めよ。

13. 前問で、調和振動子において、$\hat{x}^2$の期待値は初期値によりゼロでない定数をとったり、振動したりすることがわかった。Heisenberg 表示を用いて$\hat{x}^2$の期

待値の時間依存性を導くことは可能なのだろうか。
調和振動子のハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

を仮定して以下の問いに答えよ。

(i) $i\hbar\frac{d}{dt}(\hat{x}^2) = [\hat{x}^2, \hat{H}]$を計算せよ。

(ii) 前問より、$\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}$の時間依存が大事なことが分かる。$i\hbar\frac{d}{dt}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) = [\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}, \hat{H}]$を求める準備として、$[\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}, \hat{p}^2]$と$[\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}, \hat{x}^2]$を求めよ。さらにその結果を用いて$i\hbar\frac{d}{dt}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) = [\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}, \hat{H}]$を求めよ。

(iii)前問より、$\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$が大事なことが分かる。 $i\hbar\frac{d}{dt}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right) = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \hat{H}\right]$を求めよ。

(iv) (ii)と(iii)の結果を連立すると、$\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$の期待値は単振動することが分かる。その角振動数を求めよ。さらに、$\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$が運動の定数であることを利用すると、$\hat{x}^2$の期待値は「定数＋単振動」の形に書けることを示せ。

（以上）