量子力学３　演習問題　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
配布：6 月 3 日(月)
締切：6 月 10 日(月)２限　授業開始時

14.(ポテンシャル問題)　波数kを持つ質量m の粒子が、$x<0$の領域から下記のような斥力ポテンシャルに入射した。

$$V(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0 \\ V_0>0, & x>0 \end{cases}$$

ここで入射波のエネルギー $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$はV_0より大きいとする。

(i) $x>0$における粒子の波数k'を求めよ。
(ii) ３個の定数 $A\sim C$ を用いると波動関数は

$$\varphi(x)=\begin{cases} A\exp(ikx)+B\exp(-ikx)\ , & x<0 \\ C\exp(ik'x), & x>0 \end{cases}$$

と書ける。$x=0$で波動関数の値とその空間微分が連続であることを要請すると３個の定数の間に２本の関係式が導ける。それらを導け。

(iii)原点における粒子の反射率$\frac{|B|^2}{|A|^2}$をk,k'の関数として決定せよ。

次に入射波のエネルギー $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$をV_0より小さくした。

(iv) $x>0$における粒子の波動関数の形を求めよ。
原点における粒子の反射率を考える。A さんは「EがV_0より小さいから全部反射されてしまう。反射率は１」と主張している。B さんは「量子力学では波動関数が$x>0$に染み出すので反射率は１にはならない」と主張している。
(v) 実際に反射率を計算し、２つの主張を論評せよ。

今度はポテンシャルを引力に変更した。ポテンシャルはV_0を正として

$$V(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0 \\ -V_0, & x>0 \end{cases}$$

と書ける。A さんは「引力だから反射が起きる訳が無い」と主張している。B さんは「引力でも波動関数の波数が急に変わると反射が起きる」と主張している。
(vi) $x>0$における粒子の波数k'を求めよ。原点における粒子の反射率をk,k'の関数として求めよ。

(vii) 2 つの主張を論評せよ。特に、$E \ll V_0$の時、反射率がどうなるか議論せよ。

15. 前問では、引力ポテンシャルでも反射が存在し、特に入射粒子のエネルギーがポテンシャルの深さより著しく小さいと、反射率がほとんど 100%に近くなることが分かった。この高い反射率を実験で再現することにしたのだが、実際の系では試料の都合により、 $-V_0$の部分の厚さが薄くなってしまうことが分かった。その場合、影響があるのだろうか。ポテンシャルは以下の式で表せる。

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & 0 \le x \le a \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

ここで V_0は正であり、粒子は$x < 0$の領域から入射する。A さん、B さんは共に「そもそも、粒子は$x = 0$で反射されてしまうので、その先の$x = a$で何があっても変わらないでしょう。」と言う。しかし C さんは「量子力学だと干渉とか起こるから、計算してみないと分からない」と主張する。そこで計算してみることにした。

(i) 5 個の定数 A~E を用いると波動関数は

$$\varphi(x) = \begin{cases} A\exp(ikx) + B\exp(-ikx) & x < 0 \\ C\exp(ik'x) + D\exp(-ik'x) & 0 < x < a \\ E\exp(ikx) & a < x \end{cases}$$

と書ける。$x = 0$、および$x = a$において波動関数の値とその空間微分が連続であることを要請すると、次の関係が導けることを示せ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k' & -k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{ik'a} & e^{-ik'a} \\ k'e^{ik'a} & -k'e^{-ik'a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} E e^{ika}$$

(ii) (i)で得られた式からC, D を消去し、残った定数の比の絶対値自乗を求めることにより、1 次元引力型ポテンシャルによる粒子の反射率と透過率をk, k', aの関数として決定せよ。

(iii) $k \to 0$において、反射率はほとんどの場合 100%になることを示せ。

(iv) 問題なのはV_0が$\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a = n\pi$ （ただしnは自然数）を満たす場合である。この時、$k \to 0$において、反射率はどうなるか？

(v) $\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a = n\pi$の時、何が起きているのか。平易な言葉で説明せよ。

（以上）