量子力学３　演習問題（８）　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
配布：6 月 10 日(月)
締切：6 月 17 日(月)２限　授業開始時
参考：<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/phys/laser/class/class-j.html>

16.(ポテンシャル問題) 質量mの粒子が、幅a、深さV_0の１次元引力井戸型ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & -a/2 \le x \le a/2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

に束縛されている。束縛状態の数をV_0の関数として求めたい。$V_0 > 0$とする。
(i) ここでは計算を少しでも簡単にするため、井戸のx座標を$a/2 \le x \le a/2$とした。この時、ハミルトニアンはx座標の反転操作$x \to -x$で不変であるため、固有関数は偶関数もしくは奇関数となる。
波動関数が偶関数の場合、

$$\varphi(x) = \begin{cases} _____, & 0 \le x \le a/2 \\ _____, & a/2 \le x \end{cases}$$

（かつ$\varphi(-x) = \varphi(x)$）と書ける。ここで、$x = a/2$で$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$が連続であることから、

$\alpha =$ _____、$\beta =$ _____とおくと$\beta = \alpha \tan \alpha$、および$\alpha^2 + \beta^2 =$ _____が成り立つ。
次に波動関数が奇関数の場合、

$$\varphi(x) = \begin{cases} _____, & 0 \le x \le a/2 \\ _____, & a/2 \le x \end{cases}$$

（かつ$\varphi(-x) = -\varphi(x)$）と書ける。上と同じように$\alpha$と$\beta$をおくと、$\beta = -\alpha \cot \alpha$、および $\alpha^2 + \beta^2 = ($　　$)$が成り立つ。
(ii) αとβが共に正であることに注意すると、固有状態の数は $\alpha\beta$ 平面の第一象限における

$\beta = \alpha \tan \alpha$ と $\alpha^2 + \beta^2 = ($　　$)$の交点の数
$\beta = -\alpha \cot \alpha$ と $\alpha^2 + \beta^2 = ($　　$)$の交点の数

の和となる。束縛状態の数を V_0 の関数としてグラフに表せ。

(iii) 上の(ii)の答えと 15 の(v)の答えとの関連を述べよ。

17.(散乱問題) クーロンポテンシャル

$$U(\vec{r}) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

による散乱を考えたい。

(i) 湯川型ポテンシャル

$$Y(\vec{r}) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\exp(-\mu r)}{r}$$

のフーリエ変換$Y_k(\vec{q})$を求めよ。ただし、関数$f(\vec{r})$のフーリエ変換$f_k(\vec{q})$を

$$f_k(\vec{q}) = \int f(\vec{r})\exp(-i\vec{q}\cdot\vec{r})\,d\vec{r}$$

で定義する。

(ii)前問の結果において、$\mu \to 0$とすることでクーロンポテンシャル

$$U(\vec{r}) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

のフーリエ変換$U_k(\vec{q})$を求めよ。

(iii) 質量m、波数$\vec{k}_i$の粒子がクーロンポテンシャル$U(\vec{r})$で散乱されるときの散乱微分断面積をボルン近似で求めると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 |U_k(\vec{q})|^2$$

となる。ただし、$\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$である。ここで、$\vec{k}_i$と$\vec{k}_f$のなす角を$\theta$とすると、$k = |\vec{k}_i| = |\vec{k}_f|$を用いて$|\vec{q}| = 2k\,sin(\theta/2)$と書けることを利用して、$d\sigma/d\Omega$の表式を求めよ。

(iv) (iii)の結果を、古典力学におけるクーロンポテンシャルによる散乱断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4E\sin^2(\theta/2)}\right)^2$$

と比較せよ。ただしθは散乱角、Eは入射粒子のエネルギーである。

（以上）