量子力学３　演習問題（１０）　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
配布：6 月 24 日(月)
締切：7 月 1 日(月)２限　授業開始時
参考：<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/phys/laser/class/class-j.html>

20.(コヒーレント状態) 消滅演算子の固有状態として定義されるコヒーレント状態$|\alpha\rangle$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

について考える。

(i) $|\alpha\rangle$ を $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有状態 $|n\rangle$ で展開する。係数 c_n を

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$$

と定義すると、c_n は $c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}c_n$ を満たすことを示せ。

(ii) $|\alpha\rangle$ はある係数 C を用いて

$$|\alpha\rangle = C\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

と書けることを示せ。

(iii) $|\alpha\rangle$ を規格化すると

$$C = e^{-|\alpha|^2/2}$$

と求まることを示せ。粒子数 n の確率分布

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

の名称を答えよ。また、n の平均値、および分散を求めよ。

(iv) $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$、$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a - a^\dagger)$として調和振動子の位置と運動量を導入した上で、$\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$、$\langle(\Delta p)^2\rangle = \langle(p - \langle p\rangle)^2\rangle = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2$を計算し、コヒーレント状態が最小不確定性を満たすことを示せ。

21. $\hat{p}$ を運動量の演算子とする時、演算子 $\exp\left(-i\frac{\hat{p}}{\hbar}\Delta\right)$ は並進演算子であると言われる。

(i)フーリエ変換（ $\varphi_k(k) = \int \varphi(x)\exp(-ikx)dx$、$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int \varphi_k(k)\exp(ikx)dk$ ）、もしくはテーラー展開 $\varphi(x+\eta) = \sum \frac{\eta^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x)$ などを用いて、波動関数に演算子 $\exp\left(-i\frac{\hat{p}}{\hbar}\Delta\right)$ をかけると実際に粒子の位置が Δ だけずれることを示せ。

調和振動子のハミルトニアン$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$とその基底状態 $\varphi_0(x) = C\exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right)$ を考える。

(ii) C と l を求めよ。

(iii) (i)から $\varphi_0(x)$ に $\exp\left(-i\frac{\hat{p}}{\hbar}\Delta\right)$ を作用させると$\varphi_0(x-\Delta) = C\exp\left(-\frac{(x-\Delta)^2}{2l^2}\right)$ となることが分かる。この関数が消滅演算子 $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$ の固有状態であることを示し、固有値 α を求めよ。

(iv) 時刻 $t = 0$ に系が固有値 α のコヒーレント状態にあったとする。系はその後、ハミルトニアン$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$に従って時間発展する。コヒーレント状態の光子数表示 $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$ 、およびハミルトニアンの固有値 $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ を用いて、時刻 t には系が固有値 $\alpha e^{-i\omega t}$ のコヒーレント状態にあることを示せ。

(v) 時刻 $t = 0$ に系が $C\exp\left(-\frac{(x-\Delta)^2}{2l^2}\right)$ の状態にあった。時刻 t における $\langle x\rangle$、$\langle p\rangle$ を Δ, m, ω などの関数として求めよ。

（以上）