量子力学３　演習問題（１１）　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
配布：7 月 1 日(月)
締切：7 月 8 日(月)２限　授業開始時
参考：<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/phys/laser/class/class-j.html>

22. （カシミール効果）電磁場の量子ゆらぎが直接観測にかかる例として、カシミール効果がある。カシミール効果とは、２枚の鏡を向かい合わせたと仮定して、その間の空間の量子場ゆらぎのエネルギー $\frac{1}{2}\hbar\omega$ の総和を求めると、それが鏡の間隔 d に依存するので、２つの鏡の間には力が働くというものである。実際に計算してみよう。

(i) 鏡が完全導体でできていると仮定する。鏡の表面の法線方向をz軸にとる。電場が xy 平面内にあるモードを TE モード、磁場が xy 平面内にあるモードを TM モードと呼ぶ。いずれの場合においても、鏡の表面における電磁場の境界条件を考えると、伝搬モードの波数ベクトルのz成分が自然数 n を用いて $k_z = \frac{n\pi}{d}$ と表されることを示せ。

(ii) 鏡の一辺の長さを L とし、x および y 方向に関しては電磁場に周期的境界条件を課して考える。鏡の間の空間の量子場ゆらぎ（零点振動）のエネルギーの総和E_{vac}は次のように書けることを示せ。

$$E_{\mathrm{vac}} = \frac{L^2\hbar c}{(2\pi)^2}\sum_n^{\infty}\iint dk_x dk_y \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}$$

(iii) 鏡に単位面積当たりにかかる力を計算するために、単位面積あたりのエネルギー$\frac{E_{\mathrm{vac}}}{L^2}$を求めよう。変数変換を施すことで次の式を導け。

$$\frac{E_{\mathrm{vac}}}{L^2} = \frac{\pi^2\hbar c}{2d^3}\left(\sum_n \int_0^{\infty} q\sqrt{q^2 + n^2}\,dq\right)$$

(iii)の表式をそのまま計算しようとしても、括弧の中が無限大になり、発散するだけのように見える。しかし、鏡が近づくと鏡の外の体積は増え、そちらの量子場ゆらぎ（零点振動）のエネルギーも変化する。実験ではその差額が観測さ

れる。外側でもエネルギーの計算は全く同じはずだが、違いは電磁場モードが飛び飛びになっていないことである。従って、外側のエネルギーの計算では、nの和をdnの積分で置き換える。

$$\frac{E_{\mathrm{vac}} - E_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{out}}}{L^2} = \frac{\pi^2 \hbar c}{2d^3}\left[\left(\sum_n \int_0^\infty q\sqrt{q^2+n^2}dq\right) - \left(\int_0^\infty \int_0^\infty q\sqrt{q^2+n^2}dqdn\right)\right]$$

大括弧の中は Euler-Maclaurin 展開を用いて、$[\ldots] = -\frac{1}{360}$ と計算できる。

(iv) 上記の取り扱いを認めて、鏡の単位面積あたりにかかる力を求めよ。力は距離の何乗に比例するか？またその力は引力か斥力か？

23. （古典論の問題）古典論では電磁場中の電荷の動きを解くのに

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

が用いられた。磁場がなければ、$E = -\nabla\phi$で定義されるスカラーポテンシャル$\phi(\vec{r})$を用いて、ラグランジアンは$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\phi(\vec{r})$となり、それからハミルトニアン$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + q\phi(\vec{r})$が導かれる。では磁場がある場合にはどうすれば良いか、ローレンツ不変性を頼りに拡張してみよう。作用にローレンツ不変性を課すと、$dS = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 dt$の部分は$dS_1 = -mc\sqrt{(cdt)^2 - d\vec{r}^2}$となることが知られている。

(i) $\left|\frac{v}{c}\right| \ll 1$ を仮定してdS_1を展開し、dS_1が定数をのぞいて$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 dt$と一致することを示せ。

電場中の荷電粒子の作用の $-q\phi(\vec{r})dt$ の部分を相対論的に不変にすることを考える。$\left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$と$(cdt, d\vec{r})$がそれぞれ４元の（反変）ベクトルをなすことを考えると、その内積の$\phi dt - \vec{A}d\vec{r}$はローレンツ不変である。従って、

$$dS_2 = -q\left(\phi(\vec{r})dt - \vec{A}(\vec{r})d\vec{r}\right)$$

が導かれる。dS_1とdS_2を合わせて

$$dS_{all} = -mc\sqrt{(cdt)^2 - d\vec{r}^2} - q\left(\phi(\vec{r})dt - \vec{A}(\vec{r})d\vec{r}\right)$$

がローレンツ不変な作用の形となる。

(ii) dS_{all}をdtで割ることで、ラグランジアンを求めよ。さらに$\left|\frac{v}{c}\right| \ll 1$を仮定すると、ラグランジアンが（定数を除いて）

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\left(\phi(\vec{r}) - \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{v}\right)$$

と近似できることを示せ。

(iii) ハミルトン形式に直すには運動量が必要である。$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$を求めよ。

(iv) $\vec{p} \cdot \vec{v} - L$を計算することにより、$H = \frac{\left(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r})\right)^2}{2m} + q\phi(\vec{r})$ となることを示せ。

(v) 実際に、このハミルトニアンから$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$、$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$を計算し、$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$、

$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$を用いると、$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$ となることを示せ。

（ヒント：必要ならば、$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$、もしくはこの関係を用いて導かれる関係式$\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_i = v_j\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right)$ を用いよ。）