量子力学３　演習問題（１２）　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
配布：7 月 8 日(月)
締切：7 月 18 日(木)２限　授業開始時
参考：<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/phys/laser/class/class-j.html>

24.(磁場中の電子) 電子１個が z 方向を向いた一様な静磁場（$\vec{B} = B\hat{z}$）の中を運動している。ハミルトニアンは、$\hat{\Pi}_x = \hat{p}_x - e\hat{A}_x$ ， $\hat{\Pi}_y = \hat{p}_y - e\hat{A}_y$を用いて

$$\hat{H} = \frac{\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m}$$

と表せる。ここでは、２次元面内の運動にのみ注目して、

$$\hat{H}' = \frac{\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2}{2m}$$

の性質を調べよう。

(i) $[\hat{x}, \hat{\Pi}_x]$、$[\hat{y}, \hat{\Pi}_y]$、$[\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y]$を計算せよ。必要なら運動量演算子の位置座標表示

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$$

を用いよ。

(ii)ハイゼンベルグ表示を用いて$\frac{d\hat{x}}{dt}$、$\frac{d\hat{y}}{dt}$と$\hat{\Pi}_x$、$\hat{\Pi}_y$の関係を調べ、さらに$\frac{d\hat{\Pi}_x}{dt}$、$\frac{d\hat{\Pi}_y}{dt}$を調べることで、粒子の運動を運動方程式で表せ。$\frac{eB}{m}$は運動の何を決めるか。

(iii) $\hat{a} = \frac{\hat{\Pi}_x + i\hat{\Pi}_y}{\sqrt{2\hbar eB}}$、$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{\Pi}_x - i\hat{\Pi}_y}{\sqrt{2\hbar eB}}$と定義する。$\hat{a}$と$\hat{a}^\dagger$の交換関係を求めよ。

(iv) 生成・消滅演算子の通常の取り扱いを用いて、系のエネルギー固有値が

$$E_n = \hbar\frac{eB}{m}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

で表されることを示せ。ここで n はゼロを含む負でない整数である。

(v)系の基底状態を求めよう。ベクトルポテンシャルにはゲージの自由度がある。ここでは $\vec{A} = (0,\ xB,\ 0)$ と取ろう。$\hat{a}|0\rangle = 0$を解くと、任意の定数k_yを用いて基底状態の波動関数 $\psi(x, y) = \langle\vec{x}|0\rangle$ は

$$\psi_{k_y}(x, y) \propto \exp\left(-\frac{eB}{2\hbar}\left(x - \frac{\hbar k_y}{eB}\right)^2\right)\exp(ik_y y)$$

と書けることを示せ。

(vi) 前問で得られた波動関数は一見 y 方向には全域に広がっているのに x に関しては局在しているように見え、ハミルトニアンが等方的なことと矛盾しているように見える。しかしこの波動関数の本質は k_y に関して無限個の波動関数がエネルギー的に縮退していることにある。$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{k_y}(x,y)dk_y$、および $\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{k_y}(x,y)\exp\left(-\frac{\hbar k_y^2}{2eB}\right)dk_y$を計算し、それぞれ積分の結果が y に関して局在、もしくは x,y の両方に関して局在していることを示せ。（特に最後の波動関数の密度分布ではx,yに関して対称性が復活している。）

25. (Bogoliubov 変換) フェルミオンが２つの状態の間を行ったり来たりする系がある。フェルミオンの演算子c_1,c_2を用いると、ハミルトニアンは

$$\hat{H}_a = -\hbar J\left(\hat{c}_1^\dagger\hat{c}_2 + \hat{c}_2^\dagger\hat{c}_1\right)$$

と書ける。

(i)全粒子数の演算子$\hat{n} = \hat{c}_1^\dagger\hat{c}_1 + \hat{c}_2^\dagger\hat{c}_2$とハミルトニアンの交換関係を計算し、このハミルトニアンでは全粒子数が保存することを確かめよ。

次に超伝導などで現れる、粒子数が保存しないハミルトニアンを考えよう。フェルミオン演算子$\hat{c}_1,\hat{c}_2$を用いてハミルトニアンが

$$\hat{H}_b = -\hbar g\left(\hat{c}_1^\dagger\hat{c}_2^\dagger + \hat{c}_2\hat{c}_1\right)$$

とかけると仮定する

(ii) $\hat{H}_b$は粒子数を保存しないことを示せ

複素数u,vを用いて新しい演算子$\hat{a}_1,\hat{a}_2$を

$$\hat{a}_1^\dagger = \hat{c}_1^\dagger u - \hat{c}_2 v$$

$$\hat{a}_2 = \hat{c}_1^\dagger v^* + \hat{c}_2 u^*$$

で定義する。（共役を取ると$\hat{a}_1 = \hat{c}_1 u^* - \hat{c}_2^\dagger v^*$、$\hat{a}_2^\dagger = \hat{c}_1 v + \hat{c}_2^\dagger u$が成り立つ。）

(iii) $\hat{a}_1,\hat{a}_2$とその共役が全てフェルミオンの交換関係（＝反交換関係）を満たすために、複素数u,vが満たすべき条件を求めよ。

(iv) 複素数u,vを適当に選ぶと、$\hat{a}_1,\hat{a}_2$を用いてハミルトニアンを

$$\hat{H}_b = E_0 + E_1\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)$$

のように対角化することができる。複素数 u,v の例を挙げよ。また、エネルギー固有値を全て求めよ。