量子力学３　演習問題（１３）　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
配布：7 月 18 日(木)
締切：7 月 22 日(月)２限　授業開始時
参考：<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/phys/laser/class/class-j.html>

26.（自由空間のプロパゲーターと経路積分）自由空間の粒子の運動を考えよう。時刻t_aに$x = x_a$にあった粒子が時刻t_bに$x = x_b$に発見される確率振幅を求める。

(i)自由空間では平面波が固有状態であり、エネルギー固有値は$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$であることを用いると、

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \langle x_b, t_b | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_b - t_a)} | x_a, t_a \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{-\frac{i\hbar k^2}{2m}(t_b - t_a) + ik(x_b - x_a)}$$

と表されることを示せ。積分を実行し、$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle$を求めよ。

(ii) 経路積分で考えよう。自由空間のラグランジアン$L[x(t), \dot{x}(t)] = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t)$は$x(t), \dot{x}(t)$について２次形式なので、経路積分は時間にのみ依存する関数と、古典的作用の寄与の積でかける。

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \int_{x_a}^{x_b} \mathcal{D}[x(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} \dot{x}^2(t)\, dt \right)$$

$$= F(t_b - t_a) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} \dot{x}_{cl}^2(t)\, dt \right)$$

ここで、$x_{cl}(t)$は粒子の古典軌道である。$x_{cl}(t)$を実際の軌道で置き換えよ。さらに$T = t_b - t_a \to 0$の時、$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle$がデルタ関数に収束することを利用して、$F(T)$を定めよ。$\alpha$が虚数でも$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ が成り立つことに注意。

(iii) 前問の結果を３次元に拡張すると

$$\langle \vec{x}_b, t_b | \vec{x}_a, t_a \rangle = F(t_b - t_a)^3 \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} (\dot{x}_{cl}^2(t) + \dot{y}_{cl}^2(t) + \dot{z}_{cl}^2(t))\, dt \right)$$

となる。$t=0$の時に波動関数が距離dだけ離れた空間の２点に分布しており、$\varphi(x_a,y_a,z_a)=\frac{1}{2}\left(\delta\left(x_a-\frac{d}{2}\right)\delta(y_a)\delta(z_a)+\delta\left(x_a+\frac{d}{2}\right)\delta(y_a)\delta(z_a)\right)$で近似できる状態にあった。時刻$t=T$における波動関数 $\psi(x_b,y_b,z_b)$ を求めよ。

(iv) 時刻$t=T$における$z=0$の平面上の粒子数の分布$|\psi(x_b,y_b,0)|^2$を観測するとどのような分布になるか答えよ。
注：アルカリ原子気体のボース凝縮によって実際に同じ状況が実験で実現されている。"Observation of Interference Between Two Bose Condensates", M.R. Andrews, *et al.,* Science **275**, 637 (1997)　DOI: 10.1126/science.275.5300.637

27. スピン 1/2 の粒子に関する次のハミルトニアンを考える。

$$H=\varepsilon\left(c_\uparrow^\dagger c_\uparrow+c_\downarrow^\dagger c_\downarrow\right)+Uc_\uparrow^\dagger c_\downarrow^\dagger c_\downarrow c_\uparrow$$

(i) ハミルトニアンの各項の物理的解釈を述べよ。

(ii) 次の４状態がハミルトニアンの固有状態であることを示し、固有エネルギーを求めよ。

$$|0\rangle,\qquad |\uparrow\rangle=c_\uparrow^\dagger|0\rangle,\qquad |\downarrow\rangle=c_\downarrow^\dagger|0\rangle,\qquad |\uparrow\downarrow\rangle=c_\uparrow^\dagger c_\downarrow^\dagger|0\rangle$$

次に、超伝導と関連した項が付け加わった、次のハミルトニアンを考える。

$$H=\varepsilon\left(c_\uparrow^\dagger c_\uparrow+c_\downarrow^\dagger c_\downarrow\right)+Uc_\uparrow^\dagger c_\downarrow^\dagger c_\downarrow c_\uparrow-\Delta\left(c_\uparrow^\dagger c_\downarrow^\dagger+c_\downarrow c_\uparrow\right)$$

(iii)次の２状態がハミルトニアンの固有状態であることを示し、固有エネルギーを求めよ。

$$|\uparrow\rangle=c_\uparrow^\dagger|0\rangle,\qquad |\downarrow\rangle=c_\downarrow^\dagger|0\rangle$$

(iv)残りの２状態$|0\rangle,|\uparrow\downarrow\rangle=c_\uparrow^\dagger c_\downarrow^\dagger|0\rangle$を考える。この２状態を基底としてハミルトニアンを行列表示すると

$$H=\begin{pmatrix}0 & -\Delta\\ -\Delta & 2\varepsilon+U\end{pmatrix}$$

となることを示せ。固有エネルギーを求めよ。