第 1 回
可換環論若手シンポジウム
報 告 集

1978年10月18日(水)～21日(土)
日本大学軽井沢研修所にて

序

この報告集は1978年10月18日～21日，軽井沢日本大学研修所で行なわれた"可換環論若手シンポジウム"の講演の記録である。参加者は29名で，数学界の一部の"若手"の概念より，少し年長かもしれないが，だいたい20代から30代前半の可換環論（と可換環論に興味をもつ代数幾何）の研究者が集まった。"若手"とつけた理由は以下のスケジュールを見ていただけばおわかりと思うが，朝早くから深夜まで，非常に活発な講演・討論が行われて非常に有意義であった。

このような会がもてた事を資金の援助をいただいた（半分以上は科研費で賄ったが）松永記念財団と作行会，また，すばらしい会場を提供していただいた日本大学に深く感謝したい。

スケジュール．

10月18日．

2000～2140 後藤四郎（日大・文理）．

Gorenstein 環に関する最近の話題について．

2150～2250 浅沼照雄（富山大・教育）．

Lüroth's Problem for rings.

10月19日．

900～1000 吉田憲一（阪大・理）．

On the cancellation problems of the torus extensions.

1010~1110 馬場 清 (阪大・理)

Higher derivations による divisor class group の計算

1120~1210 杉江 徹 (阪大・理)

Affine surfaces with A^1-cylinders.

1500~1545 藤田 和實 (香川大・教育)

Minimal prime ideals of an element.

1555~1635 坂口 通則 (広島修道大)

Polynomial Grade について

1645~1730 西村 純一 (京大・理)

Noether 環の x-adic completion について

1930~2040 中島 晴久 (慶大・工)

標数 $p>0$ の不変式論

2050~2150 丸山 直昌 (東大・理)

Chow Group の有限次元性

2155~2300 藤田 隆夫 (東大・教養)

代数幾何の中の可換環論の問題

10月20日

830~925 鈴木 直義 (静岡薬大)

Generalized local cohomology の応用について

935~1025 青山 陽一 (愛媛大・理)

Canonical module の depth と projective dimension.

1035~1115 竹内 康滋 (神戸大・教養)

極小移入分解から誘導されたある種の複体について

1125～1215　大石彰（広島大・理）

絶対純粋加群と連接環

1500～1550　渡辺純三（名大・理）

Height 2 の Perfect Ideals の構造定理の Invariant Theory への応用.

1600～1640　伊藤史朗（広島大・理）

Krull 環上の加群の Fitting Invariants.

1650～1740　橋　貞雄（日大・文理）

Numbers of generators of ideals in local rings.

夜　　コンパ.

10月21日.

850～945　小山陽一（早大・理工）

特異点の変形について

1000～1040　下田保博（都立大・理）

Buchsbaum ring 上の Rees 環について.

1050～1140　石田正典（東北大・理）

完全交叉となる半群環について.

1140～1215　渡辺敬一（都立大・理）

完全交叉となる不変部分環について.

この報告集を入要の方は，下記のいずれかへ：

渡辺敬一（都立大・理）　渡辺純三（名大・理）

西村純一（京大・理）　青山陽一（愛媛大・理）

目　次

有限群による不変式環の正準加群について

日大・文理　後藤四郎

Gを有限群，kは体とし$(|G|, \mathrm{ch}\, k) = 1$と仮定しよう。次の結果は今や有名である：

<u>定理</u> 1 ([2]). $G \subset GL(n, k)$, $R = k[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ (多項式環) とし，Gを自然にRに作用させる。このとき，

(1) $G \subset SL(n, k)$ ならば，R^G は Gorenstein である。

(2) G が generalized reflections を含まないときには逆も正しい。

この小論では，一般の次数付き環に対して，上の結果を拡張することを試みたい。

以下 $R = \sum_{n \geq 0} R_n$ は次数付き Gorenstein環とし$R_0 = k$であるとする。GはRのgraduationを保つようk-自己同型としてRに作用していると仮定せよ。今，PはR^GのCohen-Macaulay的k-部分次数付き代数でしかも，RはP上module-finiteになっているものとしよう。(例えば，$P = R^G$.) すると，

$$K_R = \underline{\mathrm{Hom}}_P(R, K_P)$$

である（c.f. [1]）ので，$\sigma \in G$と，$f \in K_R$に対して

$$\sigma f = f \circ \sigma^{-1}$$

と定めることにより，GをK_Rへ作用させることができる。一方で，RはGorensteinであるので，

$$K_R \cong R(t)$$

$(t = a(R))$であった（c.f. [1]）。よって，Gの$[K_R]_{-t}$への作用により，Gの一次の指標が一つ定まる。これ

を $\psi_{\mathfrak{p}}$ とかくことにしよう。すると，

<u>補題</u> 2. $\psi=\psi_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$ にはよらない。

これは $\psi_{\mathfrak{p}} = \psi_{R^G}$ によって示される。そこで $\chi = \chi_{R,G} = \psi^{-1}$ とおくことにすれば，$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{p}}(R, K_{\mathfrak{p}})^G = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{p}}(R^G, K_{\mathfrak{p}})$ であるので直ちに，

<u>定理</u> 3. $K_{R^G} = R_\chi(t)$.

がえられる。故に

<u>系</u> 4. $\chi = 1$ ならば R^G は Gorenstein である。

R^G がいつ Gorenstein になるかという問題ではこの χ が重要な役割を果していて，上の定理 3 がその一つの答えを与えることが理解される。

この χ が実際にはどのようなもの

であるかを計算する必要にせまられのであるが，次の補題がこの要請に応えてくれると思う。

<u>補題</u> 5. (1) $\dim R = 0$, $0 \neq z \in R_t$ であれば，各 $\sigma \in G$ について

$$\sigma z = \chi(\sigma) z .$$

(2) $f \in [R^G]_d$ $(0 < d)$ とし，f は R^G-正則であると仮定せよ。すると f は R-正則であって，

$$\chi_{R/fR,\, G} = \chi_{R,\, G} .$$

これを用いれば，容易に

<u>命題</u> 6. $G \subset GL(n, k)$, $R = k[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ とすれば $\chi = \det$.

がわかる。定理1の(1)がこの命題6と系1の系であることをお認め頂けると思う。

(2)に対応する主張をつくりたい。

「generalized reflections を含まぬ」という仮定に対して，「R は normal であってかつ R/R^G は divisorially unramified である」とするのが最も妥当ではないかと思うので，以下この状況下でものを考える。すると，よく知られている様に，

$$\rho : \mathrm{Ker}(\mathcal{C}\ell(R^G) \to \mathcal{C}\ell(R)) \xrightarrow{\sim} X(G)$$

であって，しかも詳細に調べると，$\chi \in X(G)$ に対して $0 \neq f \in R_{\chi^{-1}}$ をとれば

$$c\ell(fR \cap R^G) \rightsquigarrow \chi$$

となることがわかる。とくに χ として $\chi_{R,G}$ をえらべば，$fR \cap R^G = fR_\chi$ であるので，定理3より，

<u>定理</u>7. 上の状況下で，

R^G が Gorenstein である $\Leftrightarrow \chi_{R,G} = 1$.

をうる。命題6を合せれば，定理1

の(2)が系として得られることに御同意頂けると思う。

$\mathcal{X} = X_{R,G}$ は、$R=$ 多項式環$/\sim$ と書いて minimal free resolution に G の作用をもちあげれば、最後尾の項への作用の結果としても現れることや、$H^d_m(R)$ ($d = \dim R$, $m = R_+$) への作用の結果としても現れることを考えれば、ひょっとしてひょっとすると、G が必ずしも有限群ではない時にも上の様な筋書が成立するのではないかと思う(c.f. [3])。誰か一緒にやってみないかなァと思いつつペンを置きます。

References

[1] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.

[2] K. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein, I and II, Osaka J. Math., 11 (1974), 1-8, and 379-388.

[3] G. Kempf, The Grothendieck-Cousin complex of an induced representation, to appear in Advances in Math., 29 (1978).

環におけるLürothの定理

富山大学　教育学部
浅沼照雄

§1. 定義

1.1. Dを integral domain, Aを affine D-algebra とする。D上のn変数多項式環を$D^{[n]}$で D-isomorphism を$\simeq$で表わすことにする。さてKをDの quotient field としたとき$K\otimes_D A$の Krull dimension をAのD-dimension と言うことにしよう。D-dimension が1なる affine D-algebra Aについて次の5つの条件を考えそれらについて調べてみたい。出典については[1], [4]および[6]などを参照のこと。

(I)　$A\simeq D^{[1]}$

(II)　あるnについて$A^{[n]}\simeq D^{[n+1]}$. このときAは$D^{[1]}$と stably equivalent であるという。

(III)　あるnについて$A\otimes_D B\simeq D^{[n]}$なる$D$-algebra Bが存在する。このときAは invertible であるという。

(IV)　あるnについて$D\subset A\subset D^{[n]}$かつ surjective D-homomorphism φ ; $D^{[n]}\longrightarrow A$が存在して$\varphi^2=\varphi$をみたす。このときAは retract であるという。

この条件は $D^{[n]}$ の ideal $\mathfrak{a}$ が存在して $D^{[n]}=A\oplus\mathfrak{a}$ と表せることと同値であることに注意する。

(V) ある n について $D\subset A\subset D^{[n]}$ かつ $D^{[n]}$ は A 上 faithfully flat である。

$\mathfrak{p}$ を D の任意の prime ideal とするとき $D_{\mathfrak{p}}\otimes_D A$ の $D_{\mathfrak{p}}$-dimension は 1 である。

1.2. Lemma. $\mathfrak{p}\subset D$ を任意の prime ideal とする。A が (I)〜(V) の各々の条件をみたすとき、それにしたがって $D_{\mathfrak{p}}\otimes_D A$ は各々 (I)〜(V) の条件を $D_{\mathfrak{p}}$-algebra としてみたす。

たとえば A が invertible であれば $D_{\mathfrak{p}}\otimes_D A$ は $D_{\mathfrak{p}}$-algebra として invertible になるということである。次の定理は Bass, Connell, Wright による。[2]

1.3. Theorem. R を任意の D-algebra とする。もしある n に対しすべての D の prime ideal について $D_{\mathfrak{p}}\otimes_D R\simeq D_{\mathfrak{p}}{}^{[n]}$ ならば $R\simeq \mathrm{Sym}_D(P)$。ここで P は rank n の projective D-module, $\mathrm{Sym}_D(P)$ は P の symmetric algebra を表わす。

1.3. をみたす R を locally polynomial という。

R が locally polynomial ならば 1.3 より R の構造が決まる。ゆえ (I)〜(V) においては D が local domain なるときが基本的であろう。

§2. (I), (II), (III), について

(II) についてはまず次の定義から始める。

2.1. Definition. K (= D の total quotient field) の元 t について正整数 n が存在して $t^2, t^3, nt = t + \cdots + t$ (n 回) $\in D$ ならばつねに $t \in D$ なるとき D を F-domain という。また D と K の間にあって最少なる F-domain を D の F-closure といい $F(D)$ で表わす。

この F-domain は (I) と (II) の関係について決定的な役割をはたす。例としては D が $\mathbb{Q}$ = rational number field を含む場合，D が integrally closed である場合などがある。F-domain でない例として k を characteristic $p > 0$ なる体とおいて $D = k[X^2, X^3]$ (ここで X は indeterminate を表わす) 又は $D = \mathbb{Z}[2\sqrt{2}]$ などがある。

2.2. Theorem. (I) および (II) が同値なるための必要十分条件は D が F-domain なることである。

一般には (II) をみたす A の構造はきわめて複雑であるが次の場合には比較的簡単である。すなわち

2.3. Theorem. k を $\mathrm{ch}\, k = p$ なる体で $D \supset k$ と仮定する。A が (II) をみたすための必要十分条件は $A \cong D[X^{p^e}, X + a_1X^p + \cdots + a_nX^{np}]$。ここで X は D 上の indeterminate, a_i は $a_i \in F(D)$ で $a_i^{p^e} \in D$ $(i=1,\cdots,n)$ をみたすものである。

2.4. Remark. 2.3 において $A \cong D^{(1)}$ なるための必要十分条件は $a_1, \cdots, a_n \in D$ なることである。

次に (III) についてのべる。

2.5. Theorem. D が local とすると (II) および (III) は同値である。

ゆえ 1.3 および 2.2 より次の系を得る。

2.6. Corollary. D を F-domain とする。すると (II) をみたす A は $A \cong D[\mathfrak{a}X]$ である。ここで $\mathfrak{a}$ は D の invertible ideal で X は D 上の indeterminate を表わす。

Invertible D-algebra A は次の性質をもつ。

2.7. Theorem. D が無限体を subring として含み A, B は D-dimension が 1 であるような任意の2個の invertible D-algebra とする。すると projective D-module of rank 2 なる P が存在して $A\otimes_D B \cong \mathrm{Sym}_D(P)$。とくに D が local ならば $A\otimes_D B \cong D^{[2]}$。

(III)と(IV)又は(III)と(V)の関係については

2.8. Theorem. A が(III)をみたすならば(IV)および(V)をみたす。

逆は一般には D が F-domain であってもなりたたない。

§3 (IV), (V) について

この§では D を one dimensional local Noetherian domain と仮定する。A の D 上の differencial module および derivation module をそれぞれ $\Omega_D(A)$ および $\mathrm{Der}_D(A)$ で表わす。

3.1. Theorem. 次の5つの条件 (i) ~ (v) は同値である。

(i) A が(IV)をみたす。

(ii) A が(V)をみたす。

(iii) $\mathrm{Sym}_A(\mathrm{Der}_D(A)) \cong D^{[2]}$

(iv) $\mathrm{Sym}_A(\mathrm{Der}_D(A)) \cong D^{[2]}$ かつ $\mathrm{Der}_D(A)$ は projective A-module of rank 1 である。

(V) $\mathrm{Der}_D(A)$ は projective A-module of rank 1 で $\mathfrak{a}$ を $\mathrm{Der}_D(A)$ に A-isomorphic (A-module として) な A の invertible ideal とすると $A[\mathfrak{a}X] \cong D^{[2]}$。ここで X は A 上の indeterminate を表わす。

この定理の系として

3.2. Corollary. (II)〜(V) がすべて同値なるための必要十分条件は $\Omega_D(A)$ 又は $\mathrm{Der}_D(A)$ が free A-module of rank 1 であることである。

2.2 および 3.2 よりただちに

3.3. Corollary. D が F-domain で $\Omega_D(A)$ が free A-module of rank 1 ならば (I)〜(V) はすべて同値である。

次に (I)〜(V) がすべて同値なるための D の必要十分条件をのべる。そのためにまず Traverso による次の定義をする。[5]

3.4. Definition. D の quotient field K の元 t について $t^2, t^3 \in D$ ならばつねに $t \in D$ なるとき D は

seminormal であるという。

Seminormality は一般の integral domain D について定義されているがこの場合特に D が dimension 1 local Noetherian を仮定しているので S. Endo による week normality と同じ概念である。[3]

次の定理は S. Endo, Traverso による。

3.5. Theorem. $Pic(D^{[2]}) = 0$ なるための必要十分条件は D が seminormal であることである。

最後に次の定理を得る。

3.6. Theorem. D が seminormal ならば (I) ~ (V) はすべて同値である。

Refferences

[1] T. Asanuma, D-algebras stably equivalent to D[Z]. Proc. Int. Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto. 1977.

[2] H. Bass, H. Connell and D. Wright, Locally polynomial algebras are symmetric algebras, Invent. Math. 38, 279-299 (1977).

[3] S. Endo, Projective modules over polynomial rings. J. Math. Soc Japan, 15; 339-352 (1963)

[4] S. Glaz, J. Sally and W. Vasconcelos, Lüroth's Problem for rings, J. Algebra, 43, 699-708 (1976)

[5] C. Traverso, Seminormality and Pic group, Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa 24 585-595 (1970)

[6] D. Wright, algebras which resemble symmetric algebras, Proc. Queen's University Conf. on Commutative Algebra, Kingston, Ontario, 1975.

トーラス環の係数環について

阪大・理 吉田憲一

Introduction. 最近 Abhyanker (Jour of alg 72年23) によって多項式環の uniqueness が論じられてきた，すなわち $A[X] = B[Y]$ ならば $A = B$? であるが $A \neq B$ なる例は簡単にみつかるが $A \neq B$ でも $A \cong B$ は成り立つのではないかと思われたが，これも反例があった。

そこで我々は $A[X, \frac{1}{X}] = B[Y, \frac{1}{Y}]$ に対して，$A = B$ となるための必充条件，又 $A \cong B$ は常に成り立つか？という問題を考えよう。

この報告集には軽井沢でスピーチした以外に，その後わかった次の事が含まれている。

(1) $A \neq B$ なる例として，A が graded ring しか考えつかなかったが，もう1つの例として A が locally finite iterative higher derivation をもつ場合があった。これは $\mathrm{Aut}(A)$ が部分群として $G_m = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t, \frac{1}{t}])$ 又は $G_a = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t])$ を含む事と同値である。

(2) $\mathrm{Aut}(A)$ が有限群ならば必ず $A = B$。

以下において，環はすべて整域とする。

定義：A が strongly torus invariant (以後 s.t. inv と書く) であるとは，

$$A[X, \tfrac{1}{X}] = B[Y, \tfrac{1}{Y}] \Rightarrow A = B$$

A が torus invariant (以後 t. inv と書く) であるとは，上で $A \cong B$ が成立。

1. A が t. inv であるための十分条件。

$R = A[X, \frac{1}{X}] = B[Y, \frac{1}{Y}]$ であれば，Y は R の可逆元故 $Y = aX^{f'}$ と書ける，ここで a は A の可逆元，同じく $X = bY^{f}$，b は B の可逆元，と書ける。a, b は々 R の可逆元なので $a = b'Y^{g}$，$b = a'X^{g'}$ とかけるが，これを先の式に代入して，

$$(*)\ \begin{cases} a = \left(\frac{1}{b}\right)^{f'} Y^{g}, & b = \left(\frac{1}{a}\right)^{f} X^{g} \\ g = 1 - f \times f' \end{cases}$$

を得る。そこで $g = 0$ (これは $a \in B$ と同値) ならば $f = \pm 1$ 故，我々は $X = Y$ としてよいから，$A \cong B$ を得る。

命題；環 A がある体 k を含み

$$A^* = \{A \ni a \mid a \text{ は可逆元}\} = k^*$$

ならば A は t-inv。

証明．$A[X, \frac{1}{X}] = B[Y, \frac{1}{Y}]$ ならば

$k \subset B$。よって $g = 0$ から $A \cong B$ を得る。

従って A^* が大きくなると困ると思われるが次の様なものであればよい。

命題；$A = A_0[t_1, t_2, \cdots, t_n, \frac{1}{t_1 \cdots t_n}]$

で $A_0^* = k^*$ であれば A は t-inv.

証明は省略.

$R = A[X, \frac{1}{X}] = B[Y, \frac{1}{Y}]$ において，A のイデアル I が vertical relative to B とは

$^\exists J \subset B$, イデアル，で $IR = JR$ と定義すれば，

補題；$R = A[X, \frac{1}{X}] = B[Y, \frac{1}{Y}]$ に

おいて，Aの極大イデアル$\mathfrak{m}$でrelative vertical to Bなるものがあれば，$A \cong B$。

証明．${}^{\exists}\mathfrak{n}$；Bのイデアルで$\mathfrak{m}R = \mathfrak{n}R$だから

$$A/\mathfrak{m}\left[X, \frac{1}{X}\right] = B/\mathfrak{n}\left[Y, \frac{1}{Y}\right],$$

ここで$A/\mathfrak{m} = k'$は体，なので$k' \subset B/\mathfrak{n}$。従って(*)の$g = 0$だから$f = \pm 1$，よって$A \cong B$を得る。

従って次の結果を得る。

命題；Aをアフィン環でisolated singularityをもつならばAは$t.\mathrm{inv}$。

2. s.t. inv について。

まず先に次の事を示す。

補題；$A[X, \frac{1}{X}] = B[Y, \frac{1}{Y}]$ において，
$Q(A) \subseteq Q(B)$ ならば，$A = B$，ここで
$Q(A)$ とは A の全商体。

証明；$A \ni {}^{\forall} x$ とすれば，${}^{\exists} a, b \in B$ で
$x = \frac{b}{a}$，よって $ax = b$。
$x \in B[Y, \frac{1}{Y}]$ なので $x = \sum y_j Y^j$
と表わされるが $a, b \in B$ だから，これ
から $x \in B$ がわかる，$\therefore A \subseteq B$。
$B \ni {}^{\forall} y$ とすれば，$y \in A[X, \frac{1}{X}]$ なので，
$y = \sum x_i X^i$，ここで $(*)$ から $X = bY^f$
故 $y = \sum x_i b^i Y^{fi}$，ここで $f \neq 0$ な
らば，$y, x_i b^i \in B$ 故 $y = x_0 \in A$.
$f = 0$ ならば，$X = b \in B$，一方 $Y = aX^{f'}$
で $a \in B$ だから $f' = \pm 1$ $\therefore Y \in B$ となり
矛盾である。$\therefore A = B$。

先に $A^* = k^*$ ならば A は t. inv を示
したが $J(A)$；A の Jacobson radical，$\neq 0$
ならば A は s.t. inv，従ってもちろん t. inv。

命題；$J(A) \neq 0$ ならば A は s.t. inv。

証明；$R = A[X, \frac{1}{X}] = B[Y, \frac{1}{Y}]$ とする。
$J(A) \ni {}^\forall x \neq 0$ に対して、$1+x$ は R の可逆元なので $1+x = b'Y^d$, $b' \in B^*$,
従って $1 = b'Y^d - x$, これから $d = 0$ がわかる。よって、$x \in B$。
${}^\forall a \in A$ に対して $ax \in J(A)$ なので $ax \in B$, よって $A \subseteq B[\frac{1}{x}]$。従って先の補題より $A = B$。

従って我々は $J(A) = 0$ なる環（たとえばアフィン環）について考えて行けばよい。

以下では s.t. inv でない例について考えてみよう。

命題；A が graded ring であれば A は s.t. inv ではない。

証明；$A = \sum A_d$ として、

X を A 上の変数として，$B_j = A_j X^j$ とおくと，$B = \sum B_j \subset A[X, \frac{1}{X}]$ は自然に graded ring になり，X は B 上の変数で $A[X, \frac{1}{X}] = B[X, \frac{1}{X}]$ で $A \neq B$ である。
ただし，もちろん $A \cong B$ である。

次に A が locally finite iterative higher derivation をもつ場合について考えてみる。
l.f.i.h.d の定義は省略する。
次の結果がある。

命題；$\{\Delta_j\ j \in Z^+\}$ が locally finite higher derivation $\Longleftrightarrow$ $\varphi(a) = \sum \Delta_j(a) T^j$, $a \in A$, は $A \longrightarrow A[T]$ なる ring homomorphism である。

命題；上で，更に iterative であれば，$B = \varphi(A)$ とすれば，

$$A[T] = B[T]$$ 。

従って $A[T, \frac{1}{T}] = B[T, \frac{1}{T}]$ を得る。

命題；Aは graded ring $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Aut}(A) \supset G_m$

Aは l.f.i.h.d をもつ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Aut}(A) \supset G_a$

ここで $G_m = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T, \frac{1}{T}])$, $G_a = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T])$。

従って $\mathrm{Aut}(A) \supset G_m$ 又は G_a であれば Aは s.t. inv ではないが Aが体k(有限体ではない)を含むならば、$\mathrm{Aut}(A)$が有限群であればAは s.t. inv である。

命題；kを$|k| = \infty$なる体として、Aがkを含むとする。このとき、

$|\mathrm{Aut}(A)| < +\infty$ ならば Aは s.t. inv。

証明；$R = A[X, \frac{1}{X}] = B[Y, \frac{1}{Y}]$ で $A \neq B$ とする。このとき、$|\mathrm{Aut}(A)| = \infty$ を示す。

$k^* \ni \lambda$ に対して $\Phi_\lambda ; R \longrightarrow R$ をB上は恒等で $\Phi_\lambda(Y) = \lambda Y$ と定める。Φ_λはRの自己同型である。このとき、$X = \ell Y^f$ だから $\Phi_\lambda(X) = \lambda^f X$, よって $R = \Phi_\lambda(A)[X, \frac{1}{X}]$。

$\iota : A \hookrightarrow R$

$p : R \longrightarrow A$　　$X = 1$ によって定まる全射。

として　$\sigma_\lambda = p \circ \Phi_\lambda \circ \iota$　と定義する。

(1) σ_λ は全射である。

$A \ni {}^\forall x$,　$x \in \Phi_\lambda(A)[X, \frac{1}{X}]$ だから、

${}^\exists a_j \in A$,　$x = \sum \Phi_\lambda(a_j) X^j$

このとき　$x = p(x) = \sum p \circ \Phi_\lambda(a_j)$。

$x' = \sum a_j \in A$ とおくと、

$\sigma_\lambda(x') = \sum p \cdot \Phi_\lambda(a_j)$，よって

$$x = \sigma_\lambda(x')$$

(2) σ_λ は単射である。

σ_λ：単射 $\Longleftrightarrow (X-1) R \cap \Phi_\lambda(A) = (0)$

$\Longleftrightarrow (X - \lambda^f) R \cap A = (0)$

よって σ_λ は単射。

従って σ_λ は A の自己同型である。

$\{\sigma_\lambda\}^\# = \infty$ を示す。

(*) より $a = (\frac{1}{t})^{f'} Y^g$ 故 $\sigma_\lambda(a) = \lambda^g a$。

$g \neq 0$ ならばよい。

$g=0$ とすれば，$X=Y$ としてよいわけである。
$A\subseteq B$ ならば $A=B$ なので $A\not\subseteq B$．
従って $A\ni{}^\exists x$　$x=\sum y_j X^j$，$x\notin B$．

よって $\sigma_\lambda(x)=\sum \phi(y_j)\lambda^j$．従って，この場合もよい。

以上により $|\mathrm{Aut}(A)|=\infty$．

従って，あとに残るのは $|\mathrm{Aut}(A)|=\infty$ で $\mathrm{Aut}(A)\not\supset G_m, G_a$ なるものは存在するだろうか？という問題が残っている。
$\mathrm{Aut}(A)$ が代数群の構造をもてば必ず $\mathrm{Aut}(A)\supset G_m$ 又は G_a は保証されている。

3．1次元及び2次元アフィン環について。
以下において環はすべてアフィンとする。
1次元アフィン環については完全にわかっている。
A を1次元アフィン環とする。係数体を k とする。このとき A が l.f.i.h.d をもつ必要十分条件は，実は，$A=k[t]$ なることであり，A が graded ring であるならば，

$A = k[t^{e_1}, t^{e_2}, \ldots, t^{e_r}]$, $0<e_1<e_2<\cdots<e_r$

で $(e_1, e_2, \ldots, e_r) = 1$, $(\ ,\ ,\ )$ は公約数,

か又は $A = k[t, \frac{1}{t}]$. A が integrally closed

ならば $A = k[t]$ か又は $k[t, \frac{1}{t}]$。

命題; A を1次元アフィン環とすれば,

(1) A は s.t. inv でない $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Aut}(A) \supset G_m$ 又は G_a

(2) A は t. inv である。

証明; $A[X, \frac{1}{X}] = B[Y, \frac{1}{Y}] = R$ とおく。

今 $^\forall \mathfrak{m}$; A の極大イデアルに対して,

$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}R \cap B \neq (0)$

とすれば $\mathfrak{m}R = \mathfrak{n}R$ なので $A = B$。

そこで, $^\exists \mathfrak{m}$; A の極大イデアルで,

$\mathfrak{m}R \cap B = (0)$,

とすれば $B \hookrightarrow A/\mathfrak{m}[X, \frac{1}{X}]$, 故

$\bar{B} = B$ の integrally closure $= k[S]$ 又

は $k[S, \frac{1}{S}]$。

そこで A が integrally closed ならば $A = k[t]$ 又は $k[t, \frac{1}{t}]$ なので証明は終り。

A は integrally closed でないとすれば、A には isolated singularity があるので $X = Y$ としてよい。

$\bar{A} = k[t, \frac{1}{t}]$ の場合。$A \ni {}^{\forall}x$, で、$x = \sum y_j X^j$, $y_j \in B$, において $y_j X^j \in A$ を示す。従って A は graded ring である。

$\bar{A}[X, \frac{1}{X}] = \bar{B}[X, \frac{1}{X}]$, すなわち $k[t, \frac{1}{t}][X, \frac{1}{X}] = k[s, \frac{1}{s}][X, \frac{1}{X}]$ 故、$t = sX^n$ としてよい。

$x \in \bar{A} = k[t, \frac{1}{t}]$ なので、$x = \sum \lambda_i t^i$, $\lambda_i \in k$, であるが $t = sX^n$ なので、

$x = \sum (\lambda_i s^i) X^{ni}$, $\lambda_i s^i \in B$

一方 $x = \sum y_j X^j$ $y_j \in B$, だから $y_j \neq 0$ ならば $n \mid j$, $j = ni$ とすれば、$y_j X^j = \lambda_i t^i \in \bar{A}$。

従って $y_j X^j \in B[X, \frac{1}{X}] \cap \bar{A} = A[X, \frac{1}{X}] \cap \bar{A} = A$。

$\bar{A} = k[t]$ の場合。上の証明と同様にしようとすれば $t = sX^n$ と出来る事を見ればよい。

$k[t][X, \frac{1}{X}] = k[s][X, \frac{1}{X}]$ であるから

$$\begin{cases} t = \sum f_j(X) s^j & \cdots (1) \quad f, g \in k[X, \frac{1}{X}] \\ s = \sum g_i(X) t^i & \cdots (2) \end{cases}$$

(1) を (2) に代入する事によって

$$\begin{cases} t = X^n s + f_0(X) & \cdots (3) \\ s = X^{-n} t + g_0(X) & , \end{cases}$$

A は integrally closed であるので，$A \supset {}^\exists m$
$B \supset {}^\exists n$; 極大イデアル，$m\bar{R} = n\bar{R}$。
従って ${}^\exists \lambda_{l-1}, \cdots, \lambda_0 \in k$

$$t^l + \lambda_{l-1} t^{l-1} + \cdots + \lambda_0 \in m\bar{R}$$

(3) を代入して，s に関しての定数項を見ると

$$f_0(X)^l + \lambda_{l-1} f_0(X)^{l-1} + \cdots + \lambda_0 \in n\, k[s][X, \tfrac{1}{X}]$$

これは $f_0(X) = f_0 \in k$ である。
よって $t' = t - f_0$ とおけばよい。

A が t-inv なのは証明をみていただければ容易にわかる。

Aを2次元のアフィン環とするときには、体kに標数0と1の巾根をすべて含むという仮定のもとでAのt-invである事がわかる。この際、1次元のs.t-invがよくわかっているので証明が出来た。

命題；Aを2次元のアフィン環で、係数体kは標数0で1の巾根をすべて含む。このときAはt-invである。

証明；(*)において$g=0$ならば$A \cong B$なので$g \neq 0$とする。xを$x^g=a$なるものとすれば、$y=(\frac{1}{x})^f X$とおくと$y^g=b$、そして

$$A[x] \supset {}^{\exists}A_0$$
$$B[y] \supset {}^{\exists}B_0 \quad \text{で}$$

$$A[x] = A_0[x, \tfrac{1}{x}]$$
$$B[y] = B_0[y, \tfrac{1}{y}] \quad \text{が出る。}$$

kは1のg-th rootsをすべて含むので
$A[x]/A$ は cyclic Galois extension.
Galois group を $G=\langle\sigma\rangle$, $|G|=n$ とすれば

訂　正

P.28 の命題は次の命題に改めます。

命題：Aを2次元のアフィン整閉環で，係数体 k は標数0で，1の巾根をすべて含むものとする。Aが t-inv. でなければ，Aは degree non-zero な可逆元をもつ $\mathbb{Z}$-graded ring となる。

ここで，$\mathbb{Z}$-graded ring とは，$A=\Sigma A_i$，$i\in\mathbb{Z}$ で，$A_i\neq 0$ なる graded ring である。

2次元のアフィン整閉環で，t-inv. でない例を構成することができる。

k を代数的に閉じた体，D を k を含む整閉環で，$D^*=k^*$．a を D の元で，α を a の5乗根，即ち $\alpha^5=a$ で $\alpha\notin D$ とする。D はネーター環で $D[\alpha]$ が s-t-inv. なるものという仮定をつけよう。T を D 上の変数として，$A=D[\alpha T, T^5, T^{-5}]$ とおく。X を A 上の変数として，$S=T^2X$ で $Y=T^5X^2$ として，$B=D[\alpha^2S, \alpha^4S^2, \alpha S^3, \alpha^3S^4, S^5, S^{-5}]$ とすれば，

$A[X, X^{-1}]=B[Y, Y^{-1}]$ で，$A\neq B$ である。

従って，A は t-inv. ではない。

n/g で $A[x] = A + Ax + \cdots + Ax^{n-1}$
は free A-module, そして $\sigma(x) = \zeta x$,
ζ は 1 の原始 n-th root, である。
従って $A_0[x, \frac{1}{x}]^G = A$。

さて今 $\sigma(A_0) \subset A_0$ とすれば, $\sigma(A_0 x^i) \subseteqq A_0 x^i$ なので

$A \ni {}^{\forall}x$, $\quad x = \sum x_j'$, $x_j' \in A_0 x^j$
とおくと.
$$\sigma(x) = \sum \sigma(x_j') \quad \sigma(x_j') \in A_0 x^j$$
一方
$$\sigma(x) = x = \sum x_j' \quad x_j' \in A_0 x^j$$

よって $\sigma(x_j') = x_j' \quad \therefore x_j' \in A$,

従って A は graded ring.

$\sigma(A_0[x, \frac{1}{x}]) = \sigma(A_0)[x, \frac{1}{x}] = A_0[x, \frac{1}{x}]$
であるから A_0 が s.t. inv ならば $\sigma(A_0) = A_0$,
そうでないときは場合分けをして, A_0 をとり直して, $\sigma(A_0) \subseteq A_0$ と出来る。

$\tilde{\sigma}$ を $\tilde{\sigma}(X)=X$, 従って $\tilde{\sigma}(Y)=Y$ によって σ を拡大する。

$y=\left(\frac{1}{x}\right)^{f}X$ なので $\tilde{\sigma}(y)=\zeta^{-f}X$.

従って $\tilde{\sigma}\left(A_0\left[y,\frac{1}{y}\right]\right) = A_0\left[y,\frac{1}{y}\right]$

$B' = A_0\left[y,\frac{1}{y}\right]^{\tilde{\sigma}}$ とおくと、B' は A と同型になる。そして、$\tilde{\sigma}(Y)=Y$ から

$$\left(A_0\left[y,\frac{1}{y}\right]\left[Y,\frac{1}{Y}\right]\right)^{\tilde{\sigma}} = B'\left[Y,\frac{1}{Y}\right]$$

$$= \left(B_0\left[y,\frac{1}{y}\right]\left[Y,\frac{1}{Y}\right]\right)^{\tilde{\sigma}} = B\left[Y,\frac{1}{Y}\right]$$

よって $B'\cong B$ だから $A\cong B$ を得る。

高次導分による因子類群の計算について

馬場　清（阪大理）

§0　AをKrull整域，Kをその商体で $\mathrm{char}\, K = p > 0$，DをAの導分とし，Kまで拡張して考えて $K' = D^{-1}(0)$，$A' = A \cap K'$ とおく。P. Samuelは対数微分を用いてA'の因子類群を計算する方法を考察したが，ここではK/K'の指数(exponent)が高い場合にも適用できる方法として，高次導分を用いてSamuelの方法を一般化することを考える。最初に高次導分の定義を述べる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K \arrow[d, dash] \\ A' \arrow[r, dash] & K' \end{tikzcd}$$

Aを単位元を持つ可換環とする．$\underline{D} = \{D_i\}_{0 \le i \le m}$ が階数mのAの高次導分であるとは，次の(i),(ii)を満たすAの自己準同型写像の集合のことである：

(i)　D_0 はAの恒等写像

(ii)　$A \ni {}^\forall a, b$，$D_n(ab) = \sum_{i=0}^{n} D_i(a) D_{n-i}(b) \quad (0 \le n \le m)$

このとき，Aから $A[t]/(t^{m+1})$ への準同型写像 $\varphi := \varphi_{\underline{D}}$ を

$$\varphi(a) = \sum_{i=0}^{m} D_i(a) t^i \text{ の剰余類}$$

によって定めると，φは環としての準同型写像となる。

§1　Aを標数 $p>0$ のKrull整域，Kをその商体とする．さらに，$\underline{D} = \{D_i\}_{0 \le i \le m}$ を階数mのAの高次導分とする．$\underline{D}$ を階数mのKの高次導分に拡張して

$$K' = \{ z \in K \mid \varphi(z) = z \pmod{t^{m+1}} \}$$

とおくと，K'はKの部分体である。$A' = A \cap K'$ とおくと，A'はK'を

商体に持つ Krull 整域とする。n を $p^{n-1} \leq m < p^n$ となる自然数とすれば、$K^{p^n} \subset K'$, $A^{p^n} \subset A'$ で、特に A は A' 上の整拡大である。このことから因子群の準同型写像 $j: \mathrm{Div}(A') \longrightarrow \mathrm{Div}(A)$ から因子類群の準同型写像 $\bar{j}: Cl(A') \longrightarrow Cl(A)$ が導かれる。$F(A)$ を A の主因子のなす $\mathrm{Div}(A)$ の部分群とし、$\mathfrak{D} = j^{-1}(F(A))$ とおくと、$\mathrm{Ker}(\bar{j}) = \mathfrak{D}/F(A')$ となる。ここで集合 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}'$ を次のように定義する:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{\varphi(z)}{z} \;\middle|\; z \in K^*,\ \frac{\varphi(z)}{z} \in A[t]/(t^{m+1}) \right\},$$

$$\mathcal{L}' = \left\{ \frac{\varphi(u)}{u} \;\middle|\; u \in A^* \right\}$$

このとき、 $\dfrac{\varphi(z_1 z_2)}{z_1 z_2} = \dfrac{\varphi(z_1)}{z_1} \cdot \dfrac{\varphi(z_2)}{z_2}$, $\dfrac{\varphi(z^{-1})}{z^{-1}} = \left(\dfrac{\varphi(z)}{z}\right)^{-1} (\mathrm{mod}\ t^{m+1}) \in A[t]/(t^{m+1})$ より、$\mathcal{L}$ はアーベル群、$\mathcal{L}'$ はその部分群となる。

$\mathfrak{D}$ から $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$ への準同型写像 Φ を次の様に定める:

$\mathfrak{D}$ の因子 E に対して、$j(E) = \mathrm{div}_A(x)$ となる K^* の元 x が存在するから、この x について $\Phi(E) =$ "$\dfrac{\varphi(x)}{x}$ の剰余類" と定義する。このとき、$\dfrac{\varphi(x)}{x} \in \mathcal{L}$ でしかもこの定義は x の取り方に依らない。Φ から、$\bar{\Phi}: \mathrm{Ker}(\bar{j}) \longrightarrow \mathcal{L}/\mathcal{L}'$ を導けば、$\bar{\Phi}$ は単射準同型写像であることが分る。さらに、

$P(A)$: A の高さ 1 の素イデアルの全体

$\mu := \mu(\underline{D}) = \min\{ i \in \mathbb{N} \mid D_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq m \}$

とおく。このとき次の定理が得られる。

定理1　$[K:K'] = p^n$ かつ K の K' 上の指数を n とする。さらに、条件(*) $P(A)$ の任意の元 $\mathfrak{p}$ について $D_\mu(A) \not\subset \mathfrak{p}$ であると仮定すれば $\bar{\Phi}: \mathrm{Ker}(\bar{j}) \cong \mathcal{L}/\mathcal{L}'$ は同型写像である。

Aが一意分解環であれば，$\operatorname{Ker}(\bar{J}) \cong Cl(A')$となり定理1での条件が満たされていれば$Cl(A')$を求めるためには$\mathcal{L}/\mathcal{L}'$を計算すればよいことが分る．

<u>例1</u>　kを標数$p>0$の体として$A' = k[x^{p^n}, y^{p^n}, xy]$とおけば，$Cl(A') \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$である。

定理1で(*)の条件が満たされなければ，Φは同型写像とは限らないが，その場合に$\operatorname{Coker}\Phi$を決定することを考えてみよう．

<u>定理2</u>　$[K:K'] = p^n$かつKのK'上の指数をnとする．$D_\mu(A)$を含む$P(A)$の元の全体を$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_r$とする。（これらは高々有限個である。）ここで，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_r$が単項であると仮定する。

$$\mathfrak{p}_j = c_j A, \quad s_j := \min\left\{ s \in N \;\middle|\; \frac{\varphi(c_j^s)}{c_j^s} \in A[t]/(t^{n+1}) \right\},$$

e_j：$\mathfrak{p}_j$の$\mathfrak{p}_j \cap A'$上の分岐指数$(1 \leq j \leq r)$とおく。

このとき，次の完全列が得られる：

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(\bar{J}) \longrightarrow \mathcal{L}/\mathcal{L}' \longrightarrow \mathbb{Z}/\tfrac{e_1}{s_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/\tfrac{e_r}{s_r}\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

定理2を使う例として次がある．

<u>例2</u>　$A' = k[x^{p^n}, y^{p^n}, xy^{p^n} - y]$とおくとき，$Cl(A') \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

定理2の系としてAが一意分解環である場合，Φが同型写像であるための必要十分条件が得られる。

系　$[K:K']=p^n$ かつ K の K' 上の指数を n, A を一意分解環であると仮定する。このとき、次の条件(i)(ii)は同値である。

(i) $\Phi : \mathrm{Ker}(\bar{\mathcal{J}}) \to \mathcal{L}/\mathcal{L}'$ が同型写像である。

(ii) $P(A)$ の各元 $\mathfrak{p}$ に対して、$D_\mu(A) \not\subset \mathfrak{p}$ であるか $e_\mathfrak{p} = s_\mathfrak{p}$ であるかのいずれかが成立する。ただし

$$e_\mathfrak{p} : \mathfrak{p} = cA \text{ の } \mathfrak{p} \cap A' \text{ 上の分岐指数},$$

$$s_\mathfrak{p} := \min\left\{ s \in N \;\middle|\; \frac{\varphi(c^s)}{c^s} \in A[t]/(t^{m+1}) \right\}$$ とする。

§2. S. Yuan は、Samuel の結果の拡張として、次の定理を証明している。

定理　A を標数 $p>0$ の Krull 整域、K をその商体とする。$\mathcal{g}$ を A の有限個の導分の集合とし

$$A' = \{ a \in A \mid \Delta(a) = 0 \text{ for } \forall \Delta \in \mathcal{g} \}$$

とおく。A を有限表示的 A'-加群で、さらに

$$\mathrm{Hom}_{A'}(A, A) = A[\mathcal{g}]$$

と仮定する。このとき

$$\mathrm{Ker}(\bar{\mathcal{J}}) \cong \left\{ \left(\frac{\Delta(z)}{z}\right)_{\Delta \in \mathcal{g}} \;\middle|\; z \in K^* \right\} \Big/ \left\{ \left(\frac{\Delta(u)}{u}\right)_{\Delta \in \mathcal{g}} \;\middle|\; u \in A^* \right\}$$

となる。

この定理での自己準同型環に関する条件と定理1での条件(*)との関係を考えてみたい。

最初に、高次導分に対して Wronskian を定義する。

$\underline{D} = \{D_i\}_{0 \le i \le m}$ を階数 m の A の高次導分とし、$\mu := \mu(\underline{D})$

とおき，$\mu p^{n-1} \leq m$ と仮定する．自然数 s $(1 \leq s \leq p^n-1)$ に対して s の p 進展開を $s = s_0 + s_1 p + \cdots + s_{n-1} p^{n-1}$ としておく。

A の自己準同型写像 D_s を

$$D_0 = A \text{ の恒等写像}$$

$$D_s = D_\mu^{s_0} \cdot D_{\mu p}^{s_1} \cdot D_{\mu p^2}^{s_2} \cdot \cdots \cdot D_{\mu p^{n-1}}^{s_{n-1}}$$

で定義する。A の r $(1 \leq r \leq p^n-1)$ 個の元 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ に対して Wronskian $W(\alpha_1, \alpha_2, \cdots; \alpha_r)$ を

$$W(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = \det \begin{pmatrix} D_1(\alpha_1), & \cdots, & D_1(\alpha_r) \\ D_2(\alpha_1), & \cdots, & D_2(\alpha_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_r(\alpha_1), & \cdots, & D_r(\alpha_r) \end{pmatrix}$$

で定義する。$\mathfrak{S} := \{ D_s \mid 0 \leq s \leq p^n-1 \}$ とおく。

定理3　$[K:K'] = p^n$, $\mu p^{n-1} \leq m$ と仮定する。このとき次の3つの条件は同値である。

(i) $P(A)$ の各元 $\mathfrak{p}$ に対して $D_\mu(A) \not\subset \mathfrak{p}$

(ii) $P(A)$ の各元 $\mathfrak{p}$ に対して p^n-1 個の A の元 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{p^n-1}$ が存在して $W(\alpha_1, \alpha_2, \cdots; \alpha_{p^n-1}) \notin \mathfrak{p}$

(iii) $\mathrm{Hom}_{A'}(A, A) = A\langle \mathfrak{S} \rangle$

付記　例1について：r を自然数，k を標数 $p \geq 0$ の体とする。(*) $A' = k[x^r, y^r, xy]$ とおけば，例1と Galois descent を使うことによって $Cl(A') \cong \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ が得られる。

(*) 最初，体kに次の条件を仮定したが，この仮定は不要であった。

$p=0$ ならば，kは1の原始r乗根を含む。

$p>0$ ならば，$r=ap^s$，$p\nmid a$ と書いたとき，kは1の原始a乗根を含む。

Affine surfaces containing cylinderlike open sets

杉江徹(阪大)

二変数の多項式環の cancellation problem に関連して今まで得られている結果及び最近主に宮西氏が中心になって進められている研究方法を紹介する。次の問題を考察する。但し以後体kは標数が0の代数的閉体とする。

Zariski 問題；Xを二次元のアフィン曲面とするとき $X \times \mathbb{A}^1_k \simeq \mathbb{A}^3_k$ ならば $X \simeq \mathbb{A}^2_k$ であるか？
($\mathbb{A}^n_k$ は k上 n次元のアフィン空間を表わす。)

Xを二次元のアフィン曲面とするとき、$X \times \mathbb{A}^1_k \simeq \mathbb{A}^3_k$ ならば次のことは容易にわかる。Xは non-singular な有理曲面，$X = \mathrm{Spec}\, A$ とおくとき、Aは U.F.D で $A^* = k^*$。但しここで A^* は Aの unit を表わす、等。

上の問題と関連して、宮西氏はアフィン曲面が $\mathbb{A}^2_k$ と同型になるための必要十分条件を次の様に与えた。

定理(Miyanishi[2]) (1) アフィン曲面 $X=\operatorname{Spec} A$ が $\mathbb{A}^2_k$ に同型になるためには次の三条件が成り立つことが必要かつ十分。

i) A : U.F.D　　ii) $A^* = k^*$

iii) X は non-trivial な G_a-action をもつ。

(2) 非特異アフィン曲面 $X=\operatorname{Spec} A$ が $\mathbb{A}^2_k$ に同型になるためには次の三条件が成り立つことが必要かつ十分。

i) A U.F.D　　ii) $A^* = k^*$

iii) $^\exists$ open set U st $U \cong C \times \mathbb{A}^1_k$, C は非特異アフィン曲線. (i.e. X は cylinderlike open set を含む。)

Remark (1)-(iii)の条件は次の条件でおきかえることができる。

(iii)′ A は non-trivial な locally finite iterative higher derivation over k をもつ。

中井氏によって (1)-(iii)を(iii)′でおきかえ

l.f.i.h. derivation を用いた代数的な証明が与えられている。

また飯高氏と藤田氏により、対数的小平次元を用いて次の事が示されている。

定理 (Iitaka & Fujita [1])
$X \times \mathbb{A}^1_k \simeq \mathbb{A}^3_k$ ならば $\bar{\kappa}(X) = -\infty$

従って Zariski 問題を考える上で $\bar{\kappa}(X) = -\infty$ となる非特異アフィン曲面を調べることが意味があると思われる。
$\kappa(X) = -\infty$ となる非特異完備曲面の分類にならって、次の補題を考える。

補題 V を非特異射影曲面, D を V 上の正の因子で $V - \mathrm{Supp}\, D$ が affine になるものとする。次の条件を考える

(1) $^\exists$ cylinderlike open set $U \subset V - \mathrm{Supp}(D)$
(2) $^\exists$ irreducible curve C, s.t. $C \not\subset \mathrm{Supp}(D)$, $(C \cdot D + K) < 0$
(3) for $^\forall$ divisor A, $|A + m(D+K)| = \phi$ for $^\forall m \gg 0$

(4) $|m(D+K)| = \phi$ for $^\forall m > 0$.

この時 (2)⇒(3)⇒(4) はつねになり立つ。

Supp(D) が高々 nodal な double points しかもたなければ (1)⇔(2)⇔(3).

<u>Remark</u> 上の Lemma で V を relatively minimal surface, $D=0$ とおけばよく知られた complete surface の分類理論で (1)⇔(2)⇔(3)⇔(4).

以後証明の詳細は Miyanishi–Sugie [3] を参照。

現在, (4)⇒(1) が成り立つかどうかについては部分的にしかわかっていない。

<u>定理</u> 上の補題の記号の下で $q > 0$ なら (4)⇒(1) が成り立つ.

<u>証明</u> (I) 次の様な結果を使う。

(1) V 非特異射影曲面, $D=\sum_{i=1}^{n} C_i$ reduced な正の因子, m = Supp(D) の連結成分の数, D の各既約成分は非特異と仮定する。その時次の事が成り立つ。

$e(D) := m - r + \sum_{i<j} (C_i \cdot C_j) \geqq 0$

$e(D) = 0 \iff$ (a) D normal crossing しかもたない。

(b) D の dual graph は tree.

(II) V, D を上の通りとする．

$\dim |D + K_V| = p_a(D) + p_g - q + m + t - 2$

$= \sum_{i=1}^{r} p_a(C_i) + p_g - q + e(D) + t - 1$

但し $t = \dim \mathrm{Ker}\, \varphi$, $\varphi : H^1(V, \mathcal{O}_V) \to H^1(D, \mathcal{O}_D)$.

(III) 定理の証明．

$P_m(V) = 0$, $\forall m > 0$ より V は ruled.

$f : V \longrightarrow B = f(V) \hookrightarrow \mathrm{Alb}(V)$ を Albanese mapping とする。B は genus q の非特異曲線．$D = \sum_{i=1}^{r} C_i$. もし f の general fiber Γ に対し，$(D \cdot \Gamma) = 0$ なら $\forall C_i \subset$ a fiber of f よって定理は成立つ．

もし $\exists C_1$, s.t. $(C_1 \cdot \Gamma) > 0$ であれば

$q \leqq p_a(C_1)$ 故

$q \leqq \sum_{i=1}^{r} p_a(C_i) = q - t - e(D) \leqq q - t$

だから I－II より次の事がわかる。

- C_1：種類 q の非特異曲線．
- $C_2, \ldots, C_r \subset$ fibers of f
- D は normal crossing しかもたない。
- D の dual graph は tree.

Hurwitz の公式を $\varphi := f|_{C_1} : C_1 \longrightarrow B$ に適用する。

$$2g-2 = (\deg \varphi)(2g-2) + \deg R_\varphi$$

$q>1$ の時 $\deg\varphi = 1$, 従って C_1 が f の cross-section になるから定理は O.K.
$q=1$ の時 $\deg\varphi=1$ なら O.K. 故 $n = \deg\varphi > 1$ と仮定する。φ は不分岐で、アーベル多様体の間の順同型と仮定してよい。$A' = C_1$ とおき $V' := V \times_A A'$ を考える。

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f'"'] & V \arrow[d, "f"] \\ A' \arrow[r, "\varphi"] & A \end{tikzcd}$$

$G = \mathrm{Ker}\,\varphi$ とおくと G は translation によって V' に free に作用する。また $V = V'/G$。
V' は非特異な ruled 曲面で、$f' : V' \to A'$ が Albanese mapping になる。
f' は cross-section $C' := \{(a', a') ; a' \in A'\}$ をもつ。

$$\psi^*(C_1) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(C'), \quad \sigma(C') = \{(a', a'+\sigma) ; a' \in A'\}$$

また、$\sigma(C') \cap \tau(C') = \phi$ if $\tau \neq \sigma$.
$|m(C_1 + K_V)| = \phi$ for $\forall m > 0$ だから
$|m(\psi^*(C_1) + K_{V'})| = \phi$ for $\forall m > 0$.

Zariski 問題との関連で重要な $\bar{q}(V)=0$ のケースに関しては次の事がわかる。

定理 次のいずれかの case, (4) ⇒ (1) が成り立つ。
(a) $((D+K)^2) \geqq -1$ (cf. $\dim|-(D+K)| \geqq (D+K)^2+1$
(b) $((D+K)^2) \leqq -2$,
$\exists$ 第一種例外曲線 E s.t. $|E+D+K| \neq \phi$,
$K(E+D+K) \leqq 1$
(c) V が relatively minimal.

この定理を証明する段階で次の二つの補題を用いる。

補題 A. V 非特異射影曲面, D reduced な正の因子で $V-\mathrm{Supp}(D)$ がアフィンになるものとする。
$\exists$ irreducible curve C s.t. $(C^2) \geqq 0$, $|C+D+K| = \phi$ ならば $V-\mathrm{Supp}(D)$ は cylinderlike open set を含む。

補題 B 第一種例外曲線 E で $|E+D+K| = \phi$ となるものが存在すると仮定する。Riemann-Roch の定理から $(D \cdot E) \leqq 1$.

次の二つの可能性がある。

i) $(D \cdot E) = 0$; E は D の terminal component

ii) $(D \cdot E) = 1$; either $E \subset \mathrm{Supp}(D)$ and $(D \cdot E) = 1$

or $E \not\subset \mathrm{Supp}(D)$

$\sigma: V \longrightarrow \bar{V}$ を E の contraction, $\bar{D} = \sigma_*(D)$ とおく。すると次の事が成り立つ。

1) $\bar{D}$ は $\bar{V}$ 上の reduced な正の因子.

2) $\sigma^*(\bar{D}) = \begin{cases} D & \text{if } (D \cdot E) = 0 \\ D + E & \text{if } (D \cdot E) = 1 \end{cases}$

$D + K_V \sim \begin{cases} \sigma^*(\bar{D} + K_{\bar{V}}) + E & \text{if } (D \cdot E) = 0 \\ \sigma^*(\bar{D} + K_{\bar{V}}) & \text{if } (D \cdot E) = 1 \end{cases}$

3) $|m(\bar{D} + K_{\bar{V}})| = \phi$ for $^\forall m > 0$

$\bar{V} - \mathrm{Supp}(\bar{D}) \cong V - \mathrm{Supp}(D)$

アフィン開集合。

よって、cylinderlike open set の存在を証明するためには、E を contract してもよい。

Remark 上の定理の a) b) c) と補題の A, B を使えば 次の事を示せば十分であることがわかる。

$((D+K)^2) \leq -2,$

$\exists$ 第一種例外曲線 E, s.t

$|E+D+K| = \phi$

$\kappa(E+D+K) = 2$

ならば

$\exists n > 0$ s.t $|E + n(D+K)| = \phi$

References

[1] S. Iitaka and T. Fujita: Cancellation theorem for algebraic varieties. J. Fac. Sci Univ. of Tokyo Sec. IA. Vol. 24 (1977) : 123–127

[2] M. Miyanishi: An algebraic characterization of ~~the~~ affine plane. J. Math. Kyoto Univ. 15 (1975) 169 – 184.

[3] M. Miyanishi and T. Sugie: Affine surfaces containing cylinderlike open sets. preprint.

(P6の後に追加)

$$\therefore\ -1 = \dim \left| \sum_{\sigma \in G} \sigma(C') + K_V \right|$$

$$= P_a\left(\sum_{\sigma \in G} \sigma(C')\right) + P_g - g + n + t' - 2$$

$$= n + t' - 2$$

$\therefore\ n + t' = 1$ となり 矛盾を得る。

Q.E.D

Minimal prime ideals of an element

藤田和憲（香川大・教育）

$a\ (\neq 0)$ を noetherian domain R の non-unit とすると，aR の任意の minimal prime ideal の高さは，1である．(Krull の principal ideal theorem) ここでは，この命題の一般化を行う．便宜上，次の定義をしておく．

定義 integral domain R が K_0-domain
$\Longleftrightarrow$ $\exists A$: Krull domain s.t.
$A \supseteq R$
A は R 上 integral

integral domain R が K-domain
$\Longleftrightarrow$
R は ある K_0-domain の integral extension domain.

以下 示すように，K-domain R の principal ideal aR $(a\neq 0)$ の任意の minimal prime ideal の高さは 1である．

noetherian domain R の ideal $\mathfrak{a}=(a_1,a_2)R$ $(\mathfrak{a}\subsetneq R)$ の任意の minimal prime ideal の高さは 2以下である．しかし K-domains

においては、必ずしもこの性質は、成立しない。それを示すKrull domainのexampleを与える。

つぎの命題は、K_0-domain、K-domainの定義より明らかである。

命題 1. (a) RがK_0-domain (resp. K-domain) ならば、$R[X]$もK_0-domain (resp. K-domain) である。
(b) RをK_0-domain、BをRのintegral extensionとする。このとき、Bの任意の元bに対して$R[b]$は、K_0-domainである。
(c) noetherian domainのintegral extension domainはK-domainである。

定理 2 RをK-domain、$a(\neq 0)$をRのnon-unitとする。このとき、aRの任意のminimal prime idealの高さは1である。

証明. AをRがAのintegral extension domainとなるようなK_0-domainとする。命題1の(b)より、aはAの元としてよい。$B(\supseteq A)$をKrull domainで、A上integralであるものとする。RとBは共通な体Lに含

まれるとしてよい. CをLにおけるRのintegral closureとする. $\mathfrak{p}$をaRのminimal prime ideal, $\{P_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$を$\mathfrak{p}$の上にある$C$のprime ideals全体とする. CはR上integralなので, P_λはaCのminimal prime idealである. 従ってBが正規であることより, $P_\lambda \cap B$は, aBのminimal prime idealである. BはKrull domainであるから, $P_\lambda \cap B$の高さは1である. 従ってP_λの高さも1である. 故に$\mathfrak{p}$の高さは, 1である.

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, dash] \\ R \arrow[ur, phantom] \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C \arrow[d, dash] \\ A \arrow[r, dash] & B \end{tikzcd}$$

系 Aをnoetherian domainのintegral extension domain, $\mathfrak{p}$をAのprime idealで高さが1とする. このとき, $A[X]$のprime ideal $\mathfrak{p}A[X]$の高さは1である. (cf. [2])

証明. aを$\mathfrak{p}$に含まれる零でない元とする. $\mathfrak{p}$の高さは, 1であるから, $\mathfrak{p}A[X]$は$aA[X]$のminimal prime idealである. 命題1の(a)と(c)より, $A[X]$は, K-domainである. 従って, 定理2より $ht(\mathfrak{p}A[X]) = 1$である.

example の構成の前に補題を用意する

補題 3. $(A, \mathfrak{m})$ を 3次元の regular local ring、y_1, y_2, y_3 を A の regular system of parameters とする.

このとき、次の (a), (b), (c) が成立する.

(a) $(y_1, y_3X+y_2)A[X]$ は、$A[X]$ の prime ideal である.

(b) $(y_1, y_3X+y_2)A(X)\cap A = y_1A$ (ring $A(X)$ については、[1] の p.18 を参照)

(c) $A[y_2/y_1]_{\mathfrak{M}}$ は 3次元の regular local ring である.

ここに $\mathfrak{M} = (y_1, y_2/y_1, y_3)A[y_2/y_1]$.

証明 (a) $A[X]/(y_1, y_3X+y_2)A[X] \simeq A/y_1A[X]/(\bar{y}_3X+\bar{y}_2)$

より明らか. ここに $\bar{y}_i$ は A/y_1A における y_i の image.

(b) (a)より $(y_1, y_3X+y_2)A[X]\cap A = y_1A$ を示せばよい. c を $(y_1, y_3X+y_2)A[X]\cap A$ の任意の元とすると、$c = fy_1 + g(y_3X+y_2)$, $f, g \in A[X]$ と表わせる. X に $-y_2/y_3$ を代入することにより、$c = (b/y_3^m)\cdot y_1$ $(b\in A - y_1A)$ となることがわかる. A は UFD, y_1 と y_3 は互いに素であるから、b は y_3^m で割り切

れる。故に $c \in y_1 A$.

(c) $\mathfrak{n} = (y_1, y_2, y_3, X)A[X]$ とおくと、

$$\left(A[X] / (y_1 X - y_2) \right)_{\mathfrak{n}} \simeq A[y_2/y_1]_{\mathfrak{m}}$$

さらに $ht(\mathfrak{n}/(y_1 X - y_2)) = ht\,\mathfrak{n} - 1 = 3$. 従って $A[y_2/y_1]_{\mathfrak{m}}$ は、3次元の regular local ring である。

以下において次の記号を用いる

(1) k を体、$Y_1, Y_2, Y_3, X_1, X_2, \cdots$ を不定元とする。

(2) $A_0 = k[[Y_1, Y_2, Y_3]]$, $\mathfrak{m}_0 = (Y_1, Y_2, Y_3)A_0$, $\mathfrak{z}_0 = Y_1 A_0$

(3) $A_1 = A_0(X_1)$, $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_0 A_1$, $f_1 = Y_3 X_1 + Y_2$,
$\mathfrak{p}_1 = (Y_1, f_1)A_1$, $\mathfrak{z}_1 = Y_1 A_1$
$A_2 = A_1[f_1/Y_1]_{\mathfrak{n}_1}$ ここに $\mathfrak{n}_1 = (Y_1, f_1/Y_1, Y_3)A_1[f_1/Y_1]$
$\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{n}_1 A_2$, $\mathfrak{p}_2 = (Y_1, f_1/Y_1)A_2$, $\mathfrak{z}_2 = Y_1 A_2$
$A_3 = A_2(X_2)$, $\mathfrak{m}_3 = \mathfrak{m}_2 A_3$, $f_2 = Y_3 X_2 + (f_1/Y_1)$
$\mathfrak{p}_3 = (Y_1, f_2)$, $\mathfrak{z}_3 = Y_1 A_3$

以下帰納的に

$A_{2n+1} = A_{2n}(X_{n+1})$, $\mathfrak{m}_{2n+1} = \mathfrak{m}_{2n} A_{2n+1}$,
$f_{n+1} = Y_3 X_{n+1} + (f_n/Y_1)$, $\mathfrak{p}_{2n+1} = (Y_1, f_{n+1})A_{2n+1}$,
$\mathfrak{z}_{2n+1} = Y_1 A_{2n+1}$
$A_{2n+2} = A_{2n+1}[f_{n+1}/Y_1]_{\mathfrak{n}_{n+1}}$, ここに
$\mathfrak{n}_{n+1} = (Y_1, f_{n+1}/Y_1, Y_3)A[f_{n+1}/Y_1]$
$\mathfrak{m}_{2n+2} = \mathfrak{n}_{n+1} A_{2n+2}$, $\mathfrak{p}_{2n+2} = (Y_1, f_{n+1}/Y_1)A_{2n+2}$,

$\mathfrak{q}_{2n+2} = Y_1 A_{2n+2}$ とおく.
明らかに $\mathfrak{p}_{2n+2} \cap A_{2n+1} = \mathfrak{p}_{2n+1} = \mathfrak{q}_{2n+2} \cap A_{2n+1}$.
また 補題 3, (b) より、$\mathfrak{p}_{2n+1} \cap A_{2n} = \mathfrak{q}_{2n} = \mathfrak{q}_{2n+1} \cap A_{2n}$
従って

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[dr] & \vdots \arrow[d] \\
\mathfrak{m}_{2n+2} \arrow[d] & \mathfrak{p}_{2n+2} \arrow[d] & \mathfrak{q}_{2n+2} \arrow[dl] \\
\mathfrak{m}_{2n+1} \arrow[d] & \mathfrak{p}_{2n+1} \arrow[dr] & \mathfrak{q}_{2n+1} \arrow[d] \\
\mathfrak{m}_{2n} \arrow[d] & \mathfrak{p}_{2n} \arrow[d] & \mathfrak{q}_{2n} \arrow[dl] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

$\to$ は ideal の contraction を表わす

(4) $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$, $\mathfrak{m} = \bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{m}_n$, $\mathfrak{p} = \bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{p}_{2n+1}$

$\mathfrak{q} = \bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{q}_{2n}$. すると $\mathfrak{p}_n$, $\mathfrak{q}_n$ の構成より
$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

(5) $B_0 = A_0$ とおき、帰納的に $B_{n+1} = B_n(X_{n+1})$ とおく. 各 n について B_n は Y_1, Y_2, Y_3 を regular system of parameters とする regular local ring. $B = \bigcup_{n\geq 0} B_n$ とおくと 容易にわかるように

$$B = A_0[X_1, X_2, \cdots]_{\mathfrak{m}_0 A_0[X_1, X_2, \cdots]}$$

従って B は UFD.

命題 4 次の (a)〜(g) が成立する

(a) $\mathfrak{p}_{2n+1} \not\ni Y_3 \quad \forall n \in N$ とくに $\mathfrak{p} \not\ni Y_3$

(b) $\mathfrak{p} \cap A_{2n+1} = \mathfrak{p}_{2n+1}$

(c) $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p} \supset 0$ は A の prime ideals の saturated chain

(d) $\dim A = 3$

(e) A は catenary でない

(f) A は UFD

(g) $(Y_1, Y_3)A$ の minimal prime ideal は $\mathfrak{m}$ だけ
とくに $ht(Y_1, Y_3)A = 3$.

証明 (a) $\mathfrak{p}_{2n+1} \ni Y_3$ と仮定すると、$\mathfrak{p}_{2n+1} \ni Y_1$, すなわち Y_1, Y_3
故に $\mathfrak{p}_{2n+1} \supseteq \mathfrak{m}_{2n+1}$ 矛盾.

(b) $\mathfrak{p} \not\ni Y_3$ より、$\mathfrak{p}_{2n+1} \subseteq \mathfrak{p} \cap A_{2n+1} \subset \mathfrak{m}_{2n+1}$. 従って
高さを比べることにより $\mathfrak{p}_{2n+1} = \mathfrak{p} \cap A_{2n+1}$.

(c) $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ なる A の prime ideal $\mathfrak{q}$ をとる. (b)
より、$\mathfrak{q} \cap A_{2n+1} \supseteq \mathfrak{p}_{2n+1}$ もし $\mathfrak{q} \cap A_{2n+1} = \mathfrak{p}_{2n+1}$, $\forall n \geq n_0$
をみたす n_0 が存在するならば、$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ である.
一方 $\mathfrak{q} \cap A_{2n_i+1} = \mathfrak{m}_{2n_i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ をみたす自然数
$n_1 < n_2 < \cdots$ が存在するならば、$\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ となる.
故に $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$ は saturated chain. 同様にして
$\mathfrak{p} \supset 0$ も saturated chain であることがわかる.

(d) $A_{2n-1}[1/Y_1] = B_{n-1}[1/Y_1]$ かつ $A_{2n}[1/Y_1] = B_n[1/Y_1]$ なので、$A[1/Y_1] = B[1/Y_1]$. A と B は quasi local ring なので、$\dim A[1/Y_1] < \dim A$,
$\dim B[1/Y_1] < \dim B = 3$. 故に $\dim A \geq 3$.
一方 各 n について $\dim A_n = 3$ かつ $A = \varinjlim_n A_n$
より $\dim A \leq 3$. 従って $\dim A = 3$.

(e) $ht\, \mathfrak{m} = \dim A = 3$. これと (c) より明らか

(f) (c)より $\mathfrak{p}=Y_1A$ の高さは 1. 故に A_{Y_1A} は principal valuation ring. 各 n について $A_{2n}[1/Y_1]\cap(A_{2n})_{Y_1A_{2n}}=A_{2n}$ なので、$A[1/Y_1]\cap A_{Y_1A}=A$. $A[1/Y_1]=B[1/Y_1]$ は Krull domain、A_{Y_1A} は principal valuation ring であることより、A も Krull domain. $A[1/Y_1]$ は UFD であり、Y_1 は A の prime element であるから、A は UFD. (cf. [3], p.21)

(g) (c)より $\mathfrak{M}\supset Y_1A\supset 0$ は saturated chain. 従って $(Y_1, Y_3)A$ の minimal prime ideal は $\mathfrak{M}$ のみ.

命題 4 の結果より、A は UFD であり、$ht(Y_1, Y_3)A=3$ である.

文献

[1] M. Nagata, Local rings, Interscience, New York, 1962

[2] L. J. Ratliff, Note on local integral extension domains, Can. J. Math. XXX (1978), 95-101.

[3] P. Samuel, Lectures on unique factorization domains, Lectures on Math. NO. 30, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964.

Polynomial Grade について

坂口通則（広島修道大）

M. Sakaguchi

A note on the Polynomial Grade and the Valuative Dimension

Hiroshima Math. J. vol. 8 no. 2, 1978, 327 - 333

を見て下さい。

ON INTEGRAL CLOSURES OF NOETHERIAN DOMAINS

Jun-ichi NISHIMURA

INTRODUCTION

Let A be a noetherian domain with field of quotients K. The integral closure $\bar{A}$ of A in K (= the derived normal ring of A) is always a Krull domain (Mori-Nagata Theorem).

If the dimension of A is at most one, all rings between A and K are noetherian (Krull-Akizuki Theorem).

If the dimension of A is at most two, $\bar{A}$ is always noetherian (Mori-Nagata).

There are examples of noetherian domains of dimension three whose derived normal rings are not noetherian (Nagata).

In Section 1, we begin with a theorem of Matijevic which is a nice generarization of Krull-Akizuki Theorem. We give a half part of Mori-Nagata Theorem using henselizations (cf. Proposition (1.4)).

In Section 2, using the results of global transforms of local domains, we get an elementary proof of Mori-Nagata Theorem.

In Section 3, we give a criterion of a Krull domain to be noetherian. This criterion has some applications, for example, the noetherianness of the derived normal ring of a noetherian domain of dimension at most two.

Terminology and notations are usual ones.

1. THEOREM OF MATIJEVIC

Let A be a noetherian ring. We define the total transform $T(A)$ of A as follows: $T(A) = \{ a \in Q(A)$ (= the total quotient ring of A) ; the conductor of a in A contains finite products of maximal ideals $\}$. If (A , $m_1, \ldots, m_r$) is a semi-local ring with radical $m = m_1 \dots m_r$, we write $T(A)$ by $A(m)$ and call it the global transform of A .

THEOREM (1.1) Let B be an A-algebra contained in $T(A)$. Then B/xB is a finite A-module for any non-zero divisor of A .

For proof, see [3].

COROLLARY (1.2) If A is reduced, B is always noetherian. Especially, if A is a noetherian domain of dimension at most one, then all rings between A and its field of quotients are noetherian (Krull-Akizuki Theorem).

PROPOSITION (1.3) Let (A , m) be a henselian local domain with field of quotients K . Let (B , n) be the integral closure of A in a finite extension field of K . Then $[B/n : A/m] < \infty$.

Proof is given by induction on the dimension of A (cf. Krull-Akizuki Theorem).

Since the henselization $({}^hA , {}^hm)$ of a local domain (A , m) is a reduced (noetherian) local ring with ${}^hA/{}^hm = A/m$, we have:

PROPOSITION (1.4) Let (A , m) be a local domain with field of quotients K . Let B be the integral closure of A in a finite extension field of K . Then B has only a finite number of maximal ideals n_i and $[B/n_i : A/m] < \infty$ for each maximal ideal.

PROPOSITION (1.5) Let (A , m) be a local domain. Suppose $\dim \bar{A}_{\bar{m}_i} > 1$ for any maximal ideal $\bar{m}_i$ of $\bar{A}$. Then $A(m)$ is integral over A .

PROOF. Let $B = A(m) \cap \bar{A}$. Then $(B , n_1 , \dots , n_r)$ is a semi-local domain with radical $n = n_1 \dots n_r$ by Corollary (1.2) and Proposition (1.4).

We claim: $A(m) = B$.

1) $n : n = B$. Since $n : n \subset A(m) : m = A(m)$ and $n : n \subset \bar{B} = \bar{A}$, $B \subset n : n \subset A(m) \cap \bar{A} = B$.

2) $B(n) = B$. As $\dim B_{n_i} > 1$ for any i, $(B : n_i)n_i = n_i$. Hence, $B : n = n : n = B^1$.

3) $A(m) = B$. Since B is noetherian and $\mathrm{rad}(mB) = n$, $A(m) = \bigcup_{\nu>0}(A : m^\nu) \subset \bigcup_{\nu>0}(B : m^\nu) = \bigcup_{\mu>0}(B : n^\mu) = B(n) = B$.

PROPOSITION (1.6) Let (A, m) be a henselian local domain of dimension greater than one. Write $m = a_1A + \dots + a_kA$. Then $\bar{A} = \bigcap_{j=1}^{k} \bar{A}_{a_j}$.

Proof is easy, because $A(m) = \bigcap_{j=1}^{k} A_{a_j}$ is integral over A by Proposition (1.5).

2. MORI-NAGATA THEOREM

We begin by summerizing the results on global transforms of local domains, which can be easily proved using Theorem (1.1) and Proposition (1.4).

PROPOSITION (2.1) Let (A, m) be a local domain of dimension greater than one with the derived normal ring $(\bar{A}, \bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r)$. Then

(2.1.1) $(A(m), m_1^*, \dots, m_s^*)$ is a semi-local domain.

Put $B = A(m) \cap \bar{A}$.

Suppose that $\{\bar{m}_{r_o+1}, \dots, \bar{m}_r\}$ is the set of height one maximal ideals of $\bar{A}$ (which may be empty). Then

(2.1.2) $(B, n_1, \dots, n_s, n_{s+1}, \dots, n_{s+t})$ is a semi-local domain such that $B_{n_i} = A(m)_{m_i^*}$ for any i ($i = 1, \dots, s$) and that $B_{n_{s+j}} = A_{m_{r_o+j}}$ for any j ($j = 1, \dots, t = r - r_o$).

COROLLARY (2.2) Let (A, m) be a local domain. Then $A(m)$ is integral over A if and only if $\bar{A}$ has no height at most one maximal ideal (cf. Proposition (1.5)).

PROPOSITION (2.3) Let (A, m) be a local domain. Then

(2.3.1) $A(m)$ is integral over A if and only if $\dim \hat{A}/\hat{p} > 1$ for any minimal prime ideal $\hat{p}$ of $\hat{A}$.

(2.3.2) $A(m)$ is a finite A-module if and only if $\dim \hat{A}/\hat{p} > 1$ for any associated prime ideal $\hat{p}$ of $\hat{A}$.

By Corollary (2.2) and Proposition (2.3), we have:

PROPOSITION (2.4) Let A be a noetherian domain, $\bar{p}$ a height one prime ideal of $\bar{A}$ and $p = \bar{p} \cap A$. Then $\operatorname{depth} A_p = 1$.

PROOF. We may assume A is local with maximal ideal p. Then $A(p)$ is not integral over A by Corollary (2.2). Hence $\hat{A}$ has a minimal prime ideal $\hat{p}$ such that $\dim \hat{A}/\hat{p} = 1$ by Proposition (2.3). Therefore, $\operatorname{depth} A = 1$.

DEFINITION (2.5) An integral domain A is called a Krull domain if A satisfies the following three conditions:

(2.5.1) For each height one prime ideal p of A, A_p is a discrete valuation ring.

(2.5.2) $A = \bigcap_{\operatorname{ht} p = 1} A_p$.

(2.5.3) Each f in A, $f \neq 0$, is contained in at most a finite number of height one prime ideals.

By Definition (2.5), we get:

PROPOSITION (2.6) Let A be a Krull domain with field of quotients K.

(2.6.1) If K_o is a subfield of K, then $A \cap K_o$ is a Krull domain.

(2.6.2) If L is a finite extension field of K, then the integral closure of A in L is a Krull domain.

Let $\{A_i\}_{i \in I}$ be a family of Krull domains (with common field of quotients).

(2.6.3) If $\bigcap_{i \in I} A_i = A$ satisfies (2.5.3) (e.g. if I is a finite set), then A is a Krull domain.

Now we prove:

THEOREM (2.7) Let A be a noetherian domain. Then the derived normal ring of A is a Krull domain.

PROOF. We prove it in several steps.

(2.7.1) Assume that Theorem (2.7) is true for all noetherian domains of dimension at most $(n-1)$. Then the assertion is valid for all henselian local domains of dimension at most n by Corollary (1.2), Proposition (1.6) and (2.6.3).

(2.7.2) Assume that Theorem (2.7) is true for all henselian local domains of dimension at most n. Then the assertion is valid for all local domains by (2.6.1) and (2.6.3).

(2.7.3) Assume that Theorem (2.7) is true for all local domains of dimension at most n. Then, since $A = \bigcap A_m$, where m runs all maximal ideals of A, the assertion is valid for all noetherian domains of dimension at most n by Propositions (1.4), (2.4) and (2.6.3).

(2.7.4) Theorem (2.7) is valid for all local domains by (2.7.1), (2.7.2) and (2.7.3).

(2.7.5) Theorem (2.7) is valid for all noetherian domains by the same reasoning as in (2.7.3).

3. A CRITERION OF A KRULL DOMAIN TO BE NOETHERIAN

The following two theorems are well-known.

THEOREM (3.1) Let A be a Krull domain with field of quotients K. Let $n(p)$ be a given integer for each height one prime ideal p of A, such that $n(p) = 0$ for almost all p.

For any preassigned set $\{ p_1, \dots, p_r \}$ of height one prime ideals, there is an x in K^* such that $\upsilon_{p_i}(x) = n(p_i)$ with $\upsilon_p(x) \geq 0$ otherwise, where υ_p is the associated valuation for a height one prime ideal p.

For proof, see [2, Theorem 5.8].

THEOREM (3.2) Let A be a subring of a noetherian ring B such that B is a finite A-module. Then A is noetherian.

For proof, see [1] or [4].

LEMMA (3.3) Let A be a Krull domain with field of quotients K. Let p be a height one prime ideal of A.

If A/p is noetherian, then $A/p^{(e)}$ is noetherian for any natural number e.

PROOF. By Theorem (3.1), we can find an x in K^* such that $\upsilon_p(x) = 1$ and $\upsilon_q(x) \leq 0$ for any other height one prime ideal q.

Consider the natural injection of A to $A[x]$. Then it induces a natural isomorphism of A/p to $A[x]/xA[x]$. Since $A[x]/xA[x]$ is noetherian by assumption, $A[x]/x^eA[x]$ is noetherian.

We have a natual injection of $A/p^{(e)}$ to $A[x]/x^eA[x]$, making $A[x]/x^eA[x]$ a finite $(A/p^{(e)})$-module. Therefore, $A/p^{(e)}$ is noetherian by Theorem (3.2).

PROPOSITION (3.4) Let A be a Krull domain. If A/p is noetherian for each height one prime ideal p, then A is noetherian.

Since the derived normal ring of a noetherian domain is a Krull domain, we get:

COROLLARY (3.5) Let A be a noetherian domain. Then its derived normal ring $\bar{A}$ is noetherian if $\bar{A}/\bar{p}$ is noetherian for any height one prime ideal $\bar{p}$ of $\bar{A}$.

PROPOSITION (3.6) Let A be a noetherian domain of dimension at most two. Let B be a Krull domain containing A.

If the field of quotients of B is a finite extension of that of A, then B is noetherian of dimension at most two.

PROOF. It is sufficient to show that, for each height one prime ideal P of B, B/P is noetherian and of dimension at most one.

We may assume P is not maximal. Take a prime ideal Q of B such that $P \subsetneqq Q$, and an x in Q such that $x \notin P$.

Thinking $A[x]$ instead of A, we may assume $p = P \cap A \subsetneqq q = Q \cap A$. Then p is a height one prime ideal of A. Hence $Q(B/P)$ is a finite extension field of $Q(A/p)$ by Theorem (1.1).

Since A/p is of dimension one, B/P is noetherian and of dimension at most one by Corollary (1.2).

COROLLARY (3.7) The derived normal ring of a noetherian domain of dimension at most two is again noetherian.

REFERENCES

[1] P. Eakin, Jr. : The converse to a well known theorem on noetherian rings, Math. Ann. 177(1968), 278-282.

[2] R. Fossum : The divisor class group of a Krull domain, Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik 74, 1973.

[3] J. Matijevic : Maximal ideal transforms of noetherian rings, Proc. Amer. Math. Soc. 54(1976), 49-52.

[4] M. Nagata : A type of subrings of a noetherian ring, Jour. Math. Kyoto Univ. 8(1968), 465-467.

標数 $p>0$ の不変式論

慶大・工 中島晴久

R を commutative ring, G を finite group, V を G-faithful R-free RG-module of finite type, $R[V]$ をその symmetric algebra とする。G の action を $R[V]$ まで延長しておき invariant subring $R[V]^G$ を考える。finite group のいろいろな linear representation に応じて invariant theory を考察できるが ordinary representation に比して integral あるいは modular representation についてはかなり異なった事情を観察できる。例えば ordinary representation の場合、

<u>Theorem</u> (Shephard - Todd - Chevalley - Serre)
k を field, $|G| \in k^*$ とするときに
$k[V]^G$; polynomial ring $\Leftrightarrow$ G ; $GL(V)$ の pseudo-reflection で生成。

が成り立つことはよく知られているが、modular representation の場合には多くの reflection group G について $k[V]^G$ は polynomial ring とならない。もっと悪く Macaulay ring にさえならない例が存在する。しかし pseudo-reflection で生成された finite group G の invariant subring $k[V]^G$ は例えば Dress により指摘されている

する は unique factorization domain である。

modular representation の invariant theory について、いま述べたような病理的(?)な事情を認識したうえで $k[V]^G$ が regular となるような representation V を決定することを試みる。irreducible な G については、ある種の linear group の classification との関わりにおいて、$k[V]^G$ が polynomial ring となる G をかなり決めることができる（極めて稀にしか $k[V]^G$ は regular とならない）。しかし一般の G については、その indecomposable な kG-module V は無限にあり（indecomposable module の isomorphism type が有限となるのは極めて限られた時）、原理的にはそのような表現について全て check しなければならないはずである。というのも、$V=\bigoplus_{i=1}^{l} V_i$, V_i を indecomposable kG-module とすると、$k[V]^G$ が polynomial ring であるためには $k[V_i]^G$ が polynomial ring である $(1\le i\le l)$ ことが必要なのであるから。例えば G を abel 群とする。このとき $\mathrm{char}(k)=p>0$ で G_p を G の p-part とするなら $k[V]^G$: regular $\Leftrightarrow$ $k[V]^{G_p}$: regular となるから はじめから abel p-group を考えればよいのだが、この場合 $k[V]^G$ が polynomial ring となる representation V は極めてはっきりした形である制限下（それも計算上

の都合のため生じる制限)で完全に決定できるのである。そうして我々の問題意識は irreducible group や abelian group とは異なる方向へ拡大される。

invariant theory の応用(?)として relative invariant の理論があるが、最近 Stanley などが ordinary representation の場合は Springer の結果を利用して $N = G \cap SL(V)$ の $k[V]^N$ についてとくにその complete intersection property に関し調べている。しかし relative invariant には characteristic $= ch(k)$ はそれほど essential でないようであり、$k[V]^G$ がわかれば $k[V]^N$ がわかるという事情は modular representation でも同じであるということが適当な条件下で示されよう。

integral representation の invariant theory の困難さは $\mathbb{Z}[V]^G$ の事情が $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V$ によってほとんど規制されていないと感じられる例を提出することによっても確認できよう。

cyclic p-group C_{p^n} の characteristic p の field k 上の invariants については Fossum–Griffith, Almkvist–Fossum, Ellingsrud–Skjelbred などで詳述されている。例えば k-th symmetric power, k-th exterior power 上での C_p の indecomposable module への decomposition の様子は Gaussian polynomial

と表現環のAdams operationで示されることがわかる。こういった研究は$k[V]^{C_{p^m}}$のHilbert seriesを決定する問題に直接役立つ。Stanleyによって予想されたunique factorization graded algebraのHilbert seriesに対するある種の対称性について反例を構成できる（Almkvist-Fossum）。また$k[V]^{C_{p^m}}$のhomogeneous maximal ideal $\mathfrak{m}$のところでのdepthをdepth $k[V]^{C_{p^m}}$と書くことにするとdepth $\bar{k}[V]^{C_{p^m}}=$ depth $k[V]^{C_{p^m}}$だから$k=\bar{k}$としてよいが一般に$GA^{n-d}(k)$の、ideal $I=\langle x\in V^G\rangle$で定義されるvariety $V(I)$のclosed pointsへのtransitive actionが存在することからdepth $k[V]^{C_{p^m}}\geqq\min\{\dim V, \dim V^G+2\}$となる（ただし$d=\dim V^G$）。一方$i$次のcohomology $H^i(C_{p^m},k[V])$は$k[V]^{C_{p^m}}C_{p^m}$-moduleとなるが、cyclic groupのcohomologyは$H^{2i}(C_{p^m},k[V])\cong H^2$, $H^{2i+1}(C_{p^m},k[V])\cong H^1$ $(i>0)$で簡単にわかり、またと同様に$GA^{n-d}(k)$の、variety $\operatorname{supp}(H^i(C_{p^m},k[V]))$（実は$V(I)$）のsubset of closed pointsへのtransitive actionを自然に作れるから、ただちに$H^i(C_{p^m},k[V])$ $(i>0)$はCohen-Macaulay moduleであることが示される。以上の議論からdepth $k[V]^{C_{p^m}}$が完全に決定された（Ellingsrud-Skjelbred）。このように$k[V]^{C_{p^m}}$のMacaulaynessの決定は非常に表現論からみれば深い考察で解決している。実際証明できてしまえばそのtechnique

のやさしさからみると remarks にすぎない。またここでの idea の多くは homogeneous polynomial ring だけでなく一般の graded polynomial algebra への grade preserving action でも homogeneous regular system of parameters の言葉で制約を与えるとこのまま一般化できるし、群 G が有限でなくとも $k[X]^G$ の有限生成性さえあれば同じである（例えばある表現については $k[X]^{G_a}$ は noetherian ring でありこのとき $k[X]^{G_a}$ は更に polynomial ring であることが以下の議論：A^{n-1} の closed points への transitive action の構成によりわかる）。

Chow group の有限次元性

Murthy & Swan

"Vector Bundles over Affine Surfaces"

Inv. math. 37(?) (Serre Volume)

の紹介

丸山直昌 (東大・理)

§0 Chow group の有限次元性について次の定理が知られている。

定理A (Mumford[3])

X は $\mathbb{C}$ 上の2次元 smooth projective variety で
$P_g = \dim H^0(X, \Omega_X^2) \neq 0$ とするとき

$\Rightarrow$ $CH_0(X)$ は有限次元でない!

$CH_0(X)$ が有限次元であるとは、これが「アーベル多様体による表現をもつ」と言うこととほぼ同値であり、上の結果は codim 1 のときのピカール多様体の理論のアナロジーが 0-cycle の場合には成り立たないことを示している。

Roitman[5] は基礎体が $\mathbb{C}$ でなくとも一般に標数0の"十分大きな"体であれば上の定理は成立つことを示した。

Bloch は上の定理の逆を予想し、実際いくつかの例についてはその予想は確かめられている。[6, 7]

Murthy & Swan は $CH_0(X)$ の有限次元性について次の定理Bを示した。これは上記 Bloch 予想を考察する上で何らかの手がかりを与えるのではないと思われ、

興味深い。よってここにその証明の概略を紹介する。

定理B　k を任意の代数閉体，X を k 上の smooth projective surface，$V = \mathrm{Spec}\, A \subset X$ を open affine subset とする。このとき

$CH_0(X)$ が有限次元 $\Longleftrightarrow$ A のすべての maximal ideal は2個の元で生成される。┘

§1. 諸定義

以下 X は smooth quasi projective algebraic variety of dim n over an algebraically closed field k とする。

Def.1　$Z_\ell(X) = Z^{n-\ell}(X) = \{X$ の ℓ-次元部分多様体の $\mathbb{Z}$ 係数一次結合$\}$

$Z_\ell(X)$ の元を X 上の ℓ-cycle と言う。

Def.2　smooth variety T から $Z^\ell(X)$ への写像 f が代数的

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$　$^\exists F \in Z^\ell(T\times X)$ such that
交わり $(\{t\}\times X)\cdot F$ がすべての $t \in T$ について定義され $\{t\}\times f(t)$ と一致する。

Def.3　$x, y \in Z^\ell(X)$ が rational (resp. algebraic) equivalent

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$　$^\exists$ smooth rational (resp. ϕ) variety T,

代数的な $^{\exists}f : T \longrightarrow Z^{\ell}(X)$, $^{\exists}a, ^{\exists}b \in T$
such that $f(a) = x$, $f(b) = y$

Def. 4 $Z^{\ell}(X)_{rat} = Z_{n-\ell}(X)_{rat} = \{x \in Z^{\ell}(X) \mid x \text{ is rat. eq. to } 0\}$

$Z^{\ell}(X)_{alg} = Z_{n-\ell}(X)_{alg} = \{ \ \text{〃} \mid \text{〃 alg. eq. to } 0\}$

$CH^{\ell}(X) = CH_{n-\ell}(X) = Z^{\ell}(X)/Z^{\ell}(X)_{rat}$

$CH^{\ell}(X)_{alg} = CH_{n-\ell}(X)_{alg} = Z^{\ell}(X)_{alg}/Z^{\ell}(X)_{rat}$

$CH^{\ell}(X)$ を codim ℓ の Chow group と言う。
$CH_{\ell}(X)$ を dim ℓ 〃

Def. 5 (Mumford の有限次元性) [3]

variety P と代数的な全射

$f : P \longrightarrow CH_{\ell}(X)_{alg}$ が存在するとき
$CH_{\ell}(X)_{alg}$ (又は単に $CH_{\ell}(X)$) は有限次元であると言う。

Def. 6 (アルバネーゼ写像) (ここでは X は projective とする)
$Alb(X)$ を X の アルバネーゼ多様体, $\lambda : X \longrightarrow Alb(X)$ を標準写像とする。すなわち $Alb(X)$ は λ の Im によって群として生成され、すべての アーベル多様体 A と正則写像 $f : X \longrightarrow A$ に対し $f = g \circ \lambda$ となる正則写像 $g : Alb(X) \longrightarrow A$ が存在する、と言う性質を持つアーベル多様体である。$z = \sum\{(x_i) - (y_i)\} \in Z_0(X)_{alg}$ に対し $\overline{\lambda}(z) = \sum\{\lambda(x_i) - \lambda(y_i)\}$

$\in Alb(X)$ と定めると $\bar{\lambda}$ は z の有理同値類にのみより、従って
$\bar{\lambda}: CH_0(X) \longrightarrow Alb(X)$ が定義される。

Def. 7　$K_0(A)$: Grothendieck の K_0

$Pic(A)$: rank 1 の projective A module が $\otimes$ についてなす群

$$rk : K_0(A) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad (\text{rank homo})$$

$$\tilde{K}_0(A) = Ker(rk : K_0(A) \to \mathbb{Z})$$

$$det : K_0(A) \longrightarrow Pic(A) \quad (\text{det-homo})$$

$$SK_0(A) = Ker(det : \tilde{K}_0(A) \longrightarrow Pic\, A)$$

$$A(X) = CH_0(X), \quad A_0(X) = CH_0(X)_{alg}$$

$$CH_0(X) \longrightarrow Alb(X) : \text{アルバネーゼ写像}$$

$$SA_0(X) = Ker(A_0(X) \longrightarrow Alb(X))$$

<u>$K_0(A)$ の filtration</u>

$K_0(A)$ には自然に環構造が入る。すなわち、2つの proj. module P_1, P_2 の定める同値類 $[P_1]$, $[P_2]$ の積を $[P_1 \otimes P_2]$ とする。
A を regular ring とすれば任意の finite A module M に対し $[M] \in K_0(A)$ が def される。

Def. 8　$supp\, M = \{ [\mathfrak{p}] \in Spec\, A \mid M \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \neq 0 \}$

Def.9 $\dim \operatorname{supp} M \leq n-i$ となる $[M]$によって生成される $K_0(A)$ の部分群を $F_iK_0(A)$ と定義する。ただし $n = \dim A$ 。

$F_i \cdot F_j \subset F_{i+j}$ i.e F_i は $K_0(A)$ の filtration である。

No.

§2 定理Bの証明の概略を追ってみよう。Murthy & Swan から次の3つの定理を引用する。(カッコ内は Murthy & Swan における Th 等の番号)

定理C $A(V) \cong SK_0(A) = F_2K_0(A)$
(Th 4.2)
ただしここの同型対応は、$V \ni x$ に対し x に対応する A の maximal ideal を m_x とすれば

$$A(V) \ni (x) \longleftrightarrow [A/m_x] \in K_0(A) \quad (\text{実は } \in SK_0(A))$$

によって与えられる。

定理D (Th. 4.5)
A のすべての maximal ideal が2個の元で生成される
$\Longleftrightarrow SK_0(A) = 0$

定理E (Cor 5.5)

$$SA_0(X) \longrightarrow A(V) \longrightarrow 0 \qquad (\text{exact})$$

これらの定理より定理Bは次の手順で示される。
定理Bの証明)
まずAの max. ideal がすべて2個の元で生成されるとすれば、定理D より $SK_0(A) = 0$。よって定理C より $A(V) = 0$。
ところで一般に次の exact sequence が容易に示される。

$$A_0(X-V) \longrightarrow A_0(X) \longrightarrow A(V) \longrightarrow 0 \qquad (\text{exact})$$

これより $\quad A_0(X-V) \longrightarrow A_0(X) \longrightarrow 0 \qquad (\text{exact})$
であるが $X-V$ は有限個の曲線(一次元代数多様体)の和集合であり、曲線については $A_0(\cdot)$ はピカール多様体の理論より有限次元であることがわかっているので $A_0(X-V)$ は有限次元。よって $A_0(X)$ も有限次元。

No.

逆に $A_0(X)$ が有限次元ならば Roitman [5] により $SA_0(X)$ は finite である。正確に言えば Roitman は標数が 0 の場合に

$$A_0(X) \text{ が finite dim} \iff SA_0(X)=0$$

を示したのだが、Murthy & Swan は右辺を $SA_0(X)=$ finite にゆるめれば Roitman の証明が標数一般でもそのまま通用することを指適している。(ただし最近 S. Bloch が標数一般でもやはり $SA_0(X)=0$ にして良いことを示したと聞く。) すると定理 E により $A(V)$ も finite。しかし良く知られているように $A(V)$ は divisible だから $A(V)=0$. 定理 C により $SK_0(A)=0$. 定理 D により A のすべての max. ideal が 2 個の元で生成される。

なお定理 C, D, E の証明は筆者の下手な解説よりは、Murthy & Swan を見て頂く方が良いであろう。

No.

§3

筆者が定理B（Murthy & Swan では Th. 2）に興味を持ったのは、Chow group の有限次元性と言う現在代数幾何で大きな話題となっている問題が、イデアルの生成元の個数と言う極めて素朴な話題に結びつくことであった。

試みにすでに Chow group が有限次元であることがわかっている例について max. ideal の生成元をさがしてみよう。$C \subset \mathbb{A}^2$ を非特異曲線，$\bar{C}$ をその非特異完備化，$k[x,y]/(f(x,y))$ を C の座標環とする。$f(x,y) = y^2 - x^3 - 3ax - b$ で $4a^3 + b^2 \neq 0$ のときには良く知られているように $\bar{C}$ は種数1の曲線で $\bar{C} - C$ はただ一点よりなる。$k[x,y]/(f(x,y))$ の max. ideal m が $m = (g)$ とただ一個の元で生成されていれば，g は C 上の関数と考えると，Hilbert の零点定理により m に対応する一点でのみ一位零点を持ち他の点では零でない値をとる。よって g を $\bar{C}$ 上の有理関数と考えると，$\bar{C} - C$ はただ一点だからここで一位の極を持つ。しかしこのような有理関数 g の存在は C の種数が1であることに矛盾する。従って $k[x,y]/(f(x,y))$ の max. ideal は一般には一個の元では生成されない。

他方 $C \times \mathbb{A}^1$ の完備化は $\bar{C} \times \mathbb{P}^1$ で，これの Chow group は $\bar{C}$ の Chow group と同型で従って有限次元である。よって定理Bにより $k[x,y,z]/(f(x,y))$ のすべての max. ideal は2個の元で生成されなければならない。実際2個の生成元は次のようにして与えられる。

C が非特異だから，適当に座標を変換して

$$f(x,y) = a(x) \cdot x + y \cdot b(x,y) \qquad \text{で} \qquad a(0) \neq 0$$

かつ問題の max. ideal を $k[x,y,z]/(f(x,y)) \supset (x,y,z)$ として良い。すると，

コクヨ シヨー80 (33×17)

No.

定理 $(x, y, z) = (y,\ a(x)\cdot z - x)$ （イデアルとして）

証明） $-y \cdot h(x,y) \equiv a(x)\cdot x \pmod{f(x,y)}$

$\therefore\ a(x)\cdot x \in$ 右辺

$a(x)\cdot x$ と $a(x)\cdot z - x$ から $x^2 \in$ 右辺，x^2 と $a(x)\cdot x$ から

ユークリッドの互除法により $x \in$ 右辺。（注．$a(0) \neq 0$）

x と $a(x)\cdot z - x$ から z も $\in$ 右辺。

証明終り．

最近筆者は標数 $p>0$ のとき，supersingular elliptic curve の直積の Chow group が有限次元であることに気づいた。supersingular elliptic curve とは原点以外に order p の点を持たないような一次元完備代数群のことであって $p=2$ ならば $y^2+y=x^3$ で定義される affine 曲線の完備化が同型を除いて唯一のそのようなものであり，$p>2$ ならば一般には唯一ではなく，

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \quad \text{かつ} \quad \Phi_p(\lambda) = 0 .$$

$$\text{ただし} \quad \Phi_p(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{\frac{p-1}{2}}{\nu}^2 \lambda^\nu .$$

と表わされる affine 曲線の完備化である。これらの曲線の種数は1であるから，座標環の max. ideal は前ページの議論により，1個の元では生成されない。しかし定理Bと筆者の上述の結果を用いれば，このような曲線2個の直積の座標環は max. ideal が2個の元で生成されてしまうはずである。

大変残念なことに，筆者はそのような2個の元の具体形を見つけることに未だ成功していない。これについては読者諸氏で興味を持たれた方にも考えて頂ければ幸である。

Reference

[1] Chevally Anneau de Chow et appication
Sem Chevally 2e année 1958

[2] Chevally Sur la theorie de la variété
de Picard Amer. J. vol 82 '60

[3] Mumford Rational equivalence of 0-cycles on
Surfaces J. Math Kyoto Univ '69

[4] Roitman On Γ-equivalence of zero-dim cycles
Math USSR Sbornik vol 15 '71

[5] 〃 Rational equivalence of 0-cycles
Math USSR Sbornik vol 18 '72

[6] Artin, Bloch, Kas Lieberman : Zero cycles on surfaces
with $P_g = 0$ Brandeis Univ Lect. note

[7] Inose & Mizukami Rational equivalence of 0-cycles
on some surfaces of general type with $P_g = 0$

[8] Eagon The Grothendiek group of finitely
generated modules Proc. Amer. Math. Soc.
19 (1968)

[9] Bass Algebraic K-Theory Benjamin

可換環論と代数幾何の一接点

東大教養　藤田隆夫

筆者は可換環論には素人であるが、日頃代数幾何の研究に際して両者の関係の深さを痛感させられることも数多い。そこで、不勉強をも省みず、日常思うところを憶面もなく記してみたい。

代数幾何学の基礎づけが問題とされていた頃，特に重要だったのが交叉理論であり，そのため多様体の特異性の分析が課題とされた。それは即ち局所環の研究に他ならない。こうして，代数幾何の土台をなすところの可換環論，という認識が一般化した。しかし，これは両者の関係のある一面をしかとらえたものに過ぎない。可換環論は，単に代数多様体の局所理論であるのみならず，その大局的構造理論に直接に結びついてくる面をも有しているのである。

さて $V \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を射影多様体とする。そのアフィン cone の頂点を考えると、これが一つの局所環に対応する。さらに自然な G_m-action も定義されている。このことから一つの次数多元環が定まってくるが、これは V から言えばその座標環に他ならない。だからその Proj を考えればもとの V が得られる。$\mathcal{O}(1)$ としては超平面切断直線束がでてくる。これらの対応関係を次のような対象の間に一般化して考えてみよう。

① V とその埋入：$V \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ の対.

①′ 多様体 V とその上の直線束 L の対.

② 次数 1 の元により生成される次数多元環 G.

②′ 有限生成次数多元環 G

②″ 一般の次数多元環 G

③ 局所環 R と G_m-action の対.

対応 ①→② は座標環をとることにより得られる。②′→①′ には Proj, $\mathcal{O}(1)$ をとればよい。また ①′→②″ が $\bigoplus_{t\geq 0} H^0(V, L^{\otimes t})$ をとることによって得られる。以下これを $Gr(V, L)$ と書き表わすことにしよう。また

自明な対応 ① → ①′ が超平面切断をとることにより得られる。

さて以上の対応は必ずしも互いに他の逆になっているわけではない。例えば ② の G が ② → ① → ①′ → ②″ で元にもどるには G が projectively normal であることが必要十分である。また ①′ の (V, L) について $Gr(V, L)$ が ②′ に入り ②′ → ①′ で元の (V, L) が得られるには L が ample であることが必要十分である。ともあれ、こうした視点からも ample とか normal とかいう概念の重要性が解釈できるわけである。

以上の対応に付随して様々な関係がある。例えば ②′ での G-module と ①′ での V 上の sheaf とが対応する。③ での様々な局所コホモロジーと ①′ での V 上の sheaf の cohomology とが対応する。③ での因子類群には ①′ での $Pic(V)/\mathbb{Z}L$ が対応する。②′ ③′ での canonical module の理論は ①′ での canonical bundle を考えることにあたる。etc. そこで、対象 ①′, ②′, ③ を扱う理論の間にも

しばしば並行した関係が見られる。特異点，つまりは局所環の変形理論と，対 (V, L) の変形理論の関連など，その重要な一例であろう。（cf. 本集 小山氏の報告）.

さてこれらの対応をもう少し吟味したい。まず $Gr(V, L)$ をとる対応 ①′⟶②″ に於てこれが有限生成となるのはどんな場合か？

例（Zariski）. $\mathbb{P}^2$ 上の非特異3次曲線 C の上に，general に12個の点をとる。そこでの blow up を V とし，$L = 4H - (E_1 + \cdots + E_{12}) = \tilde{C} + H$ とおく（H は超平面の total transform，$E_1 \cdots E_{12}$ は例外曲線，$\tilde{C}$ は C の proper transform）。すると，任意の自然数 t に対し，線型系 $|tL|$ は $\tilde{C}$ を fixed component に持ち，その重複度 $= 1$ であり，$\tilde{C}$ を除くと base point のない線型系が得られる。従って $Gr(V, L)$ は有限生成ではない。

その他にも；曲線 C 上の rank $= 2$ の vector bundle E で，$Gr(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(1))$ が有限生成でないものがたくさん存在することが知られている。

Problem. Noether ではないにしても，$Gr(V, L)$ の満たすべき何か良い環論的性質はないか？

ではGr(V, L)が有限生成となるための条件について現在どの程度知られているか？筆者の知る限り既知の結果はすべて次に帰着する：

Th. Lがsemi-ample，即ち，ある正数mに対し$|mL|$がbase pointを持たない（$\Leftrightarrow \mathcal{L}^{\otimes m}$がglobal sectionで生成される）とき，Gr(V, L)は有限生成である。

注意．Lがsemi-ampleなら，V上の任意のcoherent sheaf $\mathcal{F}$，任意の整数aに対し，$\bigoplus_{t \geq a} H^p(V, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes t})$はGr(V, L)-moduleとして有限生成。

また，semi-ampleになるための十分条件としては次がある。

Th. $B_s|L|$へのLの制限がampleなら，Lはsemi-ample．特に$B_s|L|$が有限集合ならLはsemi-ample.

さて次の問題がある。

Problem. manifold Mのcanonical bundleをK_Mとするとき，$Gr(M, K_M)$は有限生成か？

$\dim M \leq 2$なら答は肯定的。ただし，$=2$の場合，その証明は曲面論の深い結果に次のように大きく依存している。

M：曲面での証明方針。小平次元$\kappa(M)$により

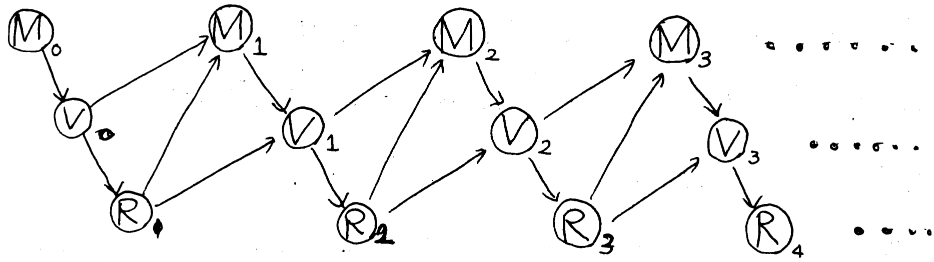
場合わけして考える。$\kappa \geqq 0$ としてよい。そこで minimal model をとって考えてよい (Zariski)。
$\kappa = 0$ なら $12K_M = 0$ という結果がある。これには Albanese 写像のくわしい研究が手がかりとなる。ともあれ K_M は semi-ample。
$\kappa = 1$ なら M は elliptic surface。そこで小平の構造理論が適用でき，やっさもっさ計算してみるとやはり K_M は semi-ample。
$\kappa = 2$ なら M 上の任意の曲線 C に対し $K_M \cdot C \geqq 0$ となる。さらに $K_M \cdot C = 0$ となる状況を調べてみると このような曲線は有限個しかなく その全体の各連結成分における交わり具合は rational double point に対応するグラフで表わされることがわかる。Artin の理論よりこうした曲線は実際 r. double pt. に contract できる。こうして局所 Gorenstein 多様体 $M^{\#}$ が得られ，ω_M は $\omega_{M^{\#}}$ の引き戻しとなる。さらに $\omega_{M^{\#}}$ は中井の criterion より $M^{\#}$ 上 ample となる。従って K_M は semi-ample。

このように証明を振り返ってみると $\dim M = 2$ での $Gr(M, K_M)$ の有限生成というのは見かけ以上に深い結果である。また特異性の研究 (上の場合 rational double pt. の理論) が global 理論にきいてくる様子がよくわかる。

注．この結果は次のように拡張できるらしい (リヌ)。

Th. Dを曲面S上のeffective, reducedなdivisorとする。このとき $Gr(S, K_S+D)$ は有限生成。

ともあれ非特異曲面の構造論にはそれを支えるものとして曲線の特異性の理論（例：楕円曲面の特異ファイバーの分類論），曲面の特異性に関する局所理論（例：rational double pointの理論）があることがわかった。我々が初めに見たcone singularityに関する観察からすると，この両者もまた深く関係しあっているはずである。それは現実に上の例にあげた二つの理論の対応としてよく知られている。また，rational double pointの理論のめざましい成功の原因に思いを馳せるとき，その遠因は $\kappa=-\infty$ の非特異曲線が $\mathbb{P}^1$ に限られるという事実（これはまた一次元でのLürothの定理の成立をも意味する）にあることを否定できない。この3種の理論，即ち n 次元非特異多様体の理論 M_n，n 次元特異多様体の理論 V_n，n 次元多様体の特異性の局所理論 R_n の間の関係は次のように言えよう。即ち，M_n と R_n があって V_n に手がつく。V_n ができて R_{n+1} が問題となってくる。R_{n+1} と V_n とができて M_{n+1} が射程内に入いってくる。図示すると



となる。M_0はすべて自明。V_0はArtin環の理論。R_1では平面曲線のcharacteristic pairとかconductorの理論とかが出てくる。そうした準備の後でWeylがリーマン面の本を書く，即ちM_1。V_1はなかなか難しく現在でも完成したとは言い切れないだろう。R_2でrational double pt.の理論，M_2が古典代数幾何の華，曲面論である。V_2，R_3，M_3はようやく研究が始まったばかり，というところだろう。V_3から先はほぼ何もないに等しい(全くの一般論を除けば)。このうちで$M_.$は代数幾何，$R_.$は環論の守備範囲ということになっている。しかし両者はこれまで二人三脚のごとく歩んできたのであり，そして今後ともそうであろう。

未来を展望すべく再び$Gr(M, K_M)$の有限生成性の問題をとりあげてみよう。$\dim M = 3$の場合がさしあたりの課題だが，これはM_3に属す。その準備としてV_2やR_3では何をなしておくべきだろうか?

まず，次ができねば話になるまい：

Problem. V が局所 Gorenstein 曲面のとき，$Gr(V, \omega_V)$ は有限生成か？

これが open かどうか筆者不勉強のせいでよく知らない。Ⓜ$_2$ のと同様に証明できるのかもしれない。

さて Ⓡ$_3$ においては，$Gr = Gr(M, K_M)$ が有限生成となったときにその canonical model $\mathrm{Proj}(Gr)$ としてどのような特異性をもつ多様体があらわれるかを調べておくのが先決であろう。これについては

Th. K_M が semi-ample のとき，M の canonical model は rational な局所 Gorenstein singularity しか持たない.

が知られている。しかし一方では，非 Gorenstein singularity をもつ canonical model の実例も構成されている (by 上野)。そこで Gorenstein だけではいささか狭すぎるわけだが，この例での特異性は Gorenstein にかなり近い (実は quotient singularity)。そこで，Gorenstein の quotient たる singularity，あるいはより一般に，canonical module を適当な意味で何乗かすると free になるような C.M. singularity の研究が望まれる。そしてそれは，より一般に，C.M.

singularity における multi-canonical module の理論として構築されるべきであろう。

$Gr(M, K_M)$ を調べるとは即ち multi-canonical sheaf の sections を調べることに他ならず，これに関しては Ⓜ. で小平次元の理論があってそれに基き多様体の分類理論の建設が試みられている。Ⓡ. でそれに対応する理論は今のところ見あたらないが，しかし何かあるはずである。その点で，渡辺公夫氏の最近の仕事 "Two-dimensional quotient singularities and integrable differential forms" は注目に値する。また，本シンポジウム後藤氏の lecture に出てきた不変量 $a(R)$ は，小平次元と深い関係にあること明らかである。また最近筆者は一般の超曲面の特異性に関して exponent なる量を考えその性質を調べてみたが，これがやはり小平次元と似た性格をも持っている。その正，零，負により双曲型，放物型，楕円型と分類してみると，「楕円型の2次元孤立特異点は rational double pt.」が成立して，「$\kappa=-\infty$ の非特異曲線は $\mathbb{P}^1$」に対応する感じが出ている。

まとまりのない話はこの辺でやめよう。//

Generalized Local Cohomology の応用について。

静岡薬科大学　鈴木直義

§0. $(A,\mathfrak{m},k)$ を local ring, $\dim A=d$, $\operatorname{depth} A=\ell$ とする。

Generalized local cohomology とは, J. Herzog によって定義された次の bi-functor である:

(0.1) ([1]) $H^i_{\mathfrak{m}}(M,N) := \varinjlim_{\nu} \operatorname{Ext}^i_A(M/\mathfrak{m}^\nu M, N)$,

ここで, M と N とは A-modules である。これは, $M=A$ のときは, local cohomology $H^i_{\mathfrak{m}}(\ )$ に一致する。本稿では, $H^i_{\mathfrak{m}}(M,N)$ の計算に必要な基本的事項で [1] に述べられているもの, 及び, その generalized local duality theory について [2] で述べてあることの紹介と, この functor に関しての, いくつかの問題を述べ, さらにその応用例を示す。

§1. 基本的な事項

(1.0) 以下次の記号を用いる。

$E^i_A(M,N) := \operatorname{Hom}_A(H^i_{\mathfrak{m}}(M,N), E_A(k))$, $D^i_A(N)=E^i_A(A,N)$, ここで $E_A(k)$ は k の injective envelope をあらわす。

$\mathcal{M}(A)$, $\mathcal{F}(A)$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{I}(A)$ は, それぞれ Category of A-modules, of f.-g. A-modules, of f.-g. A-modules of finite projective dimension,

及び of f.-g. A-modules of finite injective dimension とする.

$M \in \mathcal{M}(A)$ に対して, $\hat{M}$ は M の $\mathfrak{m}$-adic completion とする.

(1.1) ([1]) $M, N \in \mathcal{F}(A)$ に対して, 次の2つの convergent spectral sequences がある:

(1.1.1) $\mathrm{Tor}_p^{\hat{A}}(\hat{M}, D_A^q(N)) \underset{p}{\Rightarrow} E_A^{p+q}(M,N)$,

(1.1.2) $E_A^p(M, D_A^{d-q}(N)) \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{Tor}_{p+q-d}^{\hat{A}}(\hat{M}, \hat{N})$, ここで $d = \dim A$.

(1.2) ([2]) $M, N \in \mathcal{F}(A)$ に対して, 次の convergent spectral seq. がある.

(1.2.1) $D_A^p(\mathrm{Ext}_A^q(M,N)) \underset{p}{\Rightarrow} E_A^{p+q}(M,N)$.

以上の3つの spectral sequence が $H_{\mathfrak{m}}^{\cdot}(M,N)$ の計算に直接的に利用できる手段として有効である. 特に, C.-M. ring 上の C.-M. module の特徴付けや, injective modules と projective modules の間の Duality を統一的に説明するのに [1] で活用されている.

(1.3) ([1]) $M, N \in \mathcal{F}(A)$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ を $\sqrt{(x)} = \mathfrak{m}$ なる A の元とする. $K.(x^\nu; A)$ を $x^\nu = (x_1^\nu, \cdots, x_n^\nu)$ で generate される A 上の Koszul Complex, $F.$ を M の finite free resolution とする. C^ν を $K.(x^\nu; A) \otimes_A F.$ に associate する simple complex とする. このとき

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M,N) \cong \varinjlim_{\nu} H^i(\mathrm{Hom}_A(C^\nu, N)).$$

(1.4)([2]) $M \in \mathcal{F}(A)$, $N \in \mathcal{M}(A)$, $J^{\cdot}$ を N の minimal injective resolution とすると，

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M,N) \cong H^i(H^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Hom}_A(M,J^{\cdot}))) \cong H^i(\mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(J^{\cdot}))).$$

以上から明らかなように，functor $H^i_{\mathfrak{m}}(\#,\#)$ については，reasonable な要求はほとんど満される，かなり自然なものであり，詳細については [1] 及び [2] を参照されたい。

§2. $H^i_{\mathfrak{m}}(M,N)$ の vanishing (又は nonvanishing) について．

周知の如く，$H^i_{\mathfrak{m}}(N)$ の nonvanishing な i の分布は N の重要な特徴付けを与えている。その analogy を $H^i_{\mathfrak{m}}(M,N)$ について考えてみたい。

次の結果は [2] で，Duality theory を構成するのに重要な役割を担っている。

(2.1) $M, N \in \mathcal{F}(A)$ に対して，($M \neq 0$)，

$$\mathrm{depth}\, N = \inf\{i \in \mathbb{Z};\ H^i_{\mathfrak{m}}(M,N) \neq 0\}.$$

さらに，上限については，

(2.2) $M \in \mathcal{P}(A)$, $N \in \mathcal{M}(A)$, $M \neq 0$ について，

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M,N) = 0 \quad \text{for } i > \mathrm{pd}_A M + \dim N.$$

この証明は，例えば (1.2) を用いれば易しい。しかし，一般には，

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M,N) \neq 0 \quad \text{for } i = \mathrm{pd}_A M + \dim N$$

が成立するかどうかは，わからない。そこで，次の問題を提示したい。

(2.3) $H^i_{\mathfrak{m}}(M,N) \neq 0$ なる $i \in \mathbb{Z}$ の分布と M, N の性質の間の(良い)相関関係をさがせ!

§3. *Generalized local duality.*

この§は、[2] の主なる結果の概略の紹介である。

(3.1) Theorem ([2]). $M \neq 0, \in \mathcal{F}(A)$ について、次は同値。ただし $t = \operatorname{depth} A$ とする。

(i) $E^i_A(M,N) \cong \operatorname{Ext}^{e-i}_{\hat{A}}(\hat{N}, \mathfrak{K}(M))$ for $\forall i$ and for $\forall N \in \mathcal{F}(A)$ が成立するような $e \geq 0$ が存在する。(ただし、$\mathfrak{K}(M) = E^e_A(M,A)$).

(ii) $E^i_A(M,N) = 0$ for all $i > t$ and for $\forall N \in \mathcal{F}(A)$.

もし、上の命題を満す M があるとすると、(i)の e は t と一致し、又、$E^e_A(M,A) = \mathfrak{K}(M) \cong M \otimes D^t_A(A)$.

(3.2) Definition. 上の Theorem の条件を満足する M のなす $\mathcal{F}(A)$ の full subcategory を $\mathcal{D}(A)$ とかくことにする。この category は実は:

(3.3) Theorem ([2]) $M \in \mathcal{F}(A)$ について、次は同値。

(i) $M \in \mathcal{D}(A)$

(ii) $M \in \mathcal{P}(A)$ かつ $\operatorname{Supp}_{\hat{A}}(\hat{M}) \subseteq \operatorname{Supp}_{\hat{A}}(D^t_A(A))$.

(3.4) A is a C-M. ring $\Leftrightarrow \mathcal{D}(A) = \mathcal{I}(A)$

これは $\mathrm{Supp}_{\hat{A}}(D_A^{\ell}(A)) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\hat{A})\,;\ \mathrm{depth}(\hat{A}_{\mathfrak{p}}) + \dim(\hat{A}/\mathfrak{p}) = \ell\}$ がわかり (3.3) の系として得る。さらに、

(3.5) Theorem([2]). $\omega \in \mathcal{F}(A)$ で $\hat{\omega} \cong D_A^{\ell}(A)$ となるものがあれば、 $\omega \otimes_A (\ \ ) : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{I}(A)$ と $\mathrm{Hom}_A(\omega,\ \ ) : \mathcal{I}(A) \to \mathcal{D}(A)$ は $\mathcal{D}(A) \approx \mathcal{I}(A)$ を与える。

尚これらに付随する応用は [2] に詳しく述べてある。

§4. Bass' の予想が成立するある種の ring について.

以下 $\omega \in \mathcal{F}(A)$ で $\hat{\omega} \cong D_A^{\ell}(A)$ となるものが存在する場合を考える。

(4.1) $\mathrm{depth}\,\omega \geq \ell - 1$ となる A について Bass' の予想は正しい。

これは実は次のことと同じことになる。

(4.1)′ ω が C-M. of $\dim \omega = \ell$ となる A について Bass' conjecture は正しい。

(4.2) Theorem R = d-dimensional Gorenstein local ring, $x \in R$ を R の zero divisor とすると、$A = R/(x)$ について、Bass' の予想は成立する。

これは、次の一般的な Theorem の系として得る。

(4.3) Theorem. もし, ある $p>0$ について;

$\operatorname{depth} N = \min\{\dim A, \operatorname{depth} A + p\}$ となるような $N \in \mathcal{F}(A)$ があれば, そのような A については Bass' の予想が成立する.

これは, $\mathcal{I}(A) \neq \{0\}$ っまり $\mathcal{D}(A) \neq \{0\}$ ならば Generalized local duality により, N は maximal C-M. module となることから証明される. 又, (4.2) は. $N = (0 : \mathfrak{X})_R$ が 上の条件を満すことから得る.

尚, 本節の結果の詳細は, [3] に述べられている。

§5. Buchsbaum module に関連して.

本§では, $A = \hat{A}$ とにおく. (以下の結果は全て, (1.1.2) で $M=A$, $N=M$ として得る。)

(5.0) Definition. (1) (一般に) $M \in \mathcal{F}(A)$ と $x_1, \cdots, x_r \in \mathfrak{m}$ について, $\mathfrak{m}(0 : x_1)_M = 0$ かつ $\mathfrak{m}(0 : x_i)_{M/(x_1,\cdots,x_{i-1})M} = 0$ for $i = 2, \cdots, r$ が成立するとき $\{x_1, \cdots, x_r\}$ は weakly M-sequence であると呼ばれる.

(2) かってな M の system of parameters が weakly M-seq. をなしているとき M を Buchsbaum module と呼ぶ.

(3) $M \in \mathcal{F}(A)$ が $\mathfrak{m} H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ for $i < \dim M$ となっているとき M を q-B-module と呼ぶ.

以下 $\dim M = d$, $\operatorname{depth} M = t$ とする.

(5.1) <u>Proposition</u> M: q-B-module, $d \geqq 2$, $t=0$ のとき,

(i) $0 \to D^0D^0(M) \to M \to D^dD^d(M) \to D^0D^1(M) \to 0$: exact.

(ii) $D^iD^d(M) \cong D^0D^{d-i+1}(M)$, for $2 \leqq i < d$.

(iii) $D^1D^d(M) \cong D^0D^d(M) = 0$.

従って, $D^d(M)$ は, 又, q-B-module で depth $D^d(M) \geqq 2$.

(5.2) <u>Proposition</u> $d=1$, $t=0$ の場合は,

$0 \to D^0D^0(M) \to M \to D^1D^1(M) \to 0$ exact かつ $D^0D^1(M)=0$.

従って, $D^1(M)$ は C_M-module になる.

(5.3) <u>Corollary</u> $d \geqq 2$, $t=0$, M: q-B-module とする.

もし, $D^d(M)$ が C_M, ならば $D^j(M)=0$ for $j=2,\cdots,d-1$.

(5.4) <u>Proposition</u> $d \geqq 2$, $t>0$, M: q-B-module とする.

(i) $0 \to M \to D^dD^d(M) \to D^0D^1(M) \to 0$: exact.

(ii) $D^iD^d(M) \cong D^0D^{d-i+1}(M)$, $2 \leqq i < d$.

(iii) $D^1D^d(M) = D^0D^d(A) = 0$.

(iv) $D^iD^d(M) = 0$ for $d-t+1 < i < d$ かつ

$D^{d+1-t}(D^d(M)) \simeq D^0D^t(M) \neq 0$.

従って, $2 \leqq \operatorname{depth} D^d(M) \leqq d-t+1$ かつ $D^d(A)$ も又 q-B-module.

(5.5) Cor. $\ell \geqq 2$ ならば $M \cong D^d D^d(M)$.

実は，Mが q-B-moduleで $H^i_{\mathfrak{m}}(M)=0$ for $i \neq \ell, d$ ならば Mは Buchsbaumであることがわかっているので，次は おもしろい。

(5.6) Cor. M: q-B-module of positive depth とすると.
depth $D^d(A) = d-\ell+1 \Leftrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M)=0$ for $i \neq d, \ell$.

尚，このtypeのBuchsbaum moduleは特に興味あるもので，下田，後藤両氏は，$H^i_{\mathfrak{m}}(A)=0$ for $i \neq d, 1$. なるBuchsbaum ring Aの特徴付けをAのparameter idealにassociateするRees環がC-M.となることとして得ることを最近証明している。

(5.7) Corollary $d-\ell=1$ とすると，$D^p D^d(M)=0$ for $2<p<d$ となり，従って，$D^d(M)$ は Buchsbaum module of depth 2 となる。

(5.8) Corollary M: q-B-module とすると，depth $M>0$ のとき.
$D^d(M)$: C-M. $\Leftrightarrow$ $H^i_{\mathfrak{m}}(M)=0$ for $i \neq d, 1$.

(5.9) Corollary M: Buchsbaum $\Rightarrow$ $D^d D^d(M)$ もBuchsbaum.

(5.10) Corollary. M : q-B-module of dim 3 ⇒ $D^3(M)$ は Buchsbaum.

(5.11) 問題 d=3 で, q-B-module であっても, Buchsbaum でない module は存在するか? 〈(n.b.) d=2 のときはある.〉

(5.12) 問題 M : q-B-module. もし $D^d(M)$ が Buchsbaum ならば M も Buchsbaum か?

参考文献

[1] Herzog, J., Komplex, Auflösungen und Dualität in der lokalen Algebra. in preprint.

[2] Suzuki, N., On the Generalized Local Cohomology and its duality. J. of Math. of Kyoto Univ. vol. 18, no.1 (1978).

[3] Suzuki, N., A Note on the Generalized Local Cohomology and a Type of Local Rings. 静岡薬科大学開学25周年記念論文集 (昭和53年10月)

静岡薬科大学 数学研究室

〒422 静岡市小鹿2丁目2番1号

Canonical module の depth と projective dimension

青山陽一（愛媛大・理）

§0. Introduction.

ring はすべて，commutative，noetherian，with unit とする。
まず，[11] 5 Vortrag に従って，canonical module の定義を述べる。
A を complete local ring，$\mathfrak{m}$ をその max. ideal，$\dim A = n$，E を $A/\mathfrak{m}$ の injective envelope とする。$K_A = \mathrm{Hom}_A(H^n_{\mathfrak{m}}(A), E)$ とおく。($H^i_{\mathfrak{m}}$ は i-th local cohomology w.r.t. $\mathfrak{m}$ を表わす。) K_A は functor $\mathrm{Hom}_A(H^n_{\mathfrak{m}}(\ ), E)$ の表現加群である. i.e. $\mathrm{Hom}_A(H^n_{\mathfrak{m}}(M), E) \cong \mathrm{Hom}_A(M, K_A)$ for A-module M.（[11] Satz 5.2).

A を local ring，$\hat{A}$ をその completion とする。A-module K が canonical module of A であるとは，$K \otimes_A \hat{A} \cong K_{\hat{A}}$ なることと定義する。

canonical module の概念は Grothendieck あたりからだと思われる。文献 [6], [7].（詳しくは，[4] §3，[3] Introduction を参照して下さい。）そこでは，module of dualizing differentials と呼ばれている。（[4] では dualizing module と言っている。） なお，graded case（体上有限生成，graded by $\mathbb{N}$）の場合，Serre [15] Chap. III §4. にあらわれている。（graded case の詳しいことは [5] を見て下さい。） Cohen-Macaulay ring 上の canonical module は Sharp による Gorenstein module (of rank 1) に一致する。（[15], [16], [17]. なお [4] も参照。） そして，この場合には，かなり研究されている。 ここでは，環が Cohen-Macaulay でない場合の canonical module の depth と projective を調べる。そして，応用として，almost complete intersection の性質を調べる。

§1. Preliminaries.

後に必要となる結果をまとめておく.

A を local ring, dim n で canonical module K を持つものとする.

(1.1) K は同型を除いて一意的で, dim n の有限生成加群である. ([11])

(1.2) A が Gorenstein local ring R の剰余類環ならば, $K \cong \mathrm{Ext}_R^r(A, R)$ ($r = \dim R - n$) であり, $\mathfrak{p}$ prime ideal of A s.t. ht $\mathfrak{p}$ + coht $\mathfrak{p} = n$ に対し, $K_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の canonical module である. ([11])

(1.3) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(K)$, depth $K_{\mathfrak{p}} \geq \min\{2, \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}\}$. ([4])

(1.4) $\mathrm{Ass}(K) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A) \mid \dim A/\mathfrak{p} = n\}$. ([7])

(1.5) A が complete ならば, $\mathrm{ann}(K) = \cap\, \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ は $(0) \subset A$ の dim n の primary comp. 全てを動く. ([7])

A が Cohen-Macaulay のとき,

(1.6) K は Cohen-Macaulay で, $\mathrm{Hom}_A(K, K) \cong A$. ([11])

(1.7) 次は同値: (a) A Gorenstein (b) $K \cong A$ (c) $\mathrm{pd}_A K < \infty$. ([11])

(1.8) $n \geq 1$ のとき, 次は同値: (a) K reflexive (b) $A_{\mathfrak{p}}$ Gorenstein for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ with ht $\mathfrak{p} = 1$. ([11])

§2. The depth.

(2.1) Theorem ([2] Theorem 1). n, d, t を, $0 \leq d < n$, $2 \leq t \leq n$ なる整数とする. このとき, complete local ring A で, $\dim A = n$, depth $A = d$, depth $K_A = t$ なるものが存在する.

$(A, \mathfrak{m})$ を complete local ring, E を $A/\mathfrak{m}$ の injective envelope とし, $\dim A = n$, depth $A = d$ とおく. ($n > d$) このとき,

(2.2) Lemma ([2] Lemma 1). $s = \max\{i < n \mid H_{\mathfrak{m}}^i(A) \neq 0\}$ とおく.

(i) $H_{\mathfrak{m}}^s(A)$ が長さ有限なら,
$$\operatorname{depth} K_A = \begin{cases} n - s + 1 & \text{if } s > 0, \\ n & \text{if } s = 0. \end{cases}$$

(ii) $s=d$ で, $\operatorname{depth} \operatorname{Hom}_A(H^d_{\mathfrak{m}}(A), E)=u$ なら, $\operatorname{depth} K_A = \begin{cases} n-d+u+1 & \text{if } u<d, \\ n & \text{if } u=d. \end{cases}$

(2.3) Example ([19] §3). k を complete regular local ring, $\dim k = a$, $S = k[[X_1, \dots, X_b, Y_1, \dots, Y_b]]$ とする. $1 \le c < b$ なる整数 c に対し, c が奇数ならば, $\mathfrak{X} = (X_1Y_1, \dots, X_{b-1}Y_{b-1}, X_b, X_{i_1}Y_{i_2}X_{i_3}\cdots Y_{i_{c-1}}X_{i_c})$, $\mathfrak{Y} = (X_1Y_1, \dots, X_{b-1}Y_{b-1}, Y_b, Y_{i_1}X_{i_2}Y_{i_3}\cdots X_{i_{c-1}}Y_{i_c})$ とおく. ここに, $(i_1, \dots, i_c)$ は $0 < i_1 < \dots < i_c < b$ なる組全てを動く. c が偶数ならば, $\mathfrak{X} = (X_1Y_1, \dots, X_{b-1}Y_{b-1}, X_b, Y_{i_1}X_{i_2}\cdots Y_{i_{c-1}}X_{i_c})$, $\mathfrak{Y} = (X_1Y_1, \dots, X_{b-1}Y_{b-1}, Y_b, X_{i_1}Y_{i_2}\cdots X_{i_{c-1}}Y_{i_c})$ とおく. $T = S/\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{n}$ を T の max. ideal, I を $T/\mathfrak{n}$ の injective envelope とする.

(2.4) Lemma ([19] Lemma 8). $\dim T = a+b$, $\operatorname{depth} T = a+c$. $H^i_{\mathfrak{n}}(T) = 0$ for $i \ne a+b, a+c$. $\operatorname{Hom}_T(H^{a+c}_{\mathfrak{n}}(T), I) \cong k$.

((2.1) の proof)

$2 \le t \le n-d$ のとき: $s = n-t+1$ とおく. (2.3) において, $a=0$, $b=n$, $c=s$ とおいたときの T をとり, $U = S/(X_{d+1}, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ とおく. $A = T \oplus U$ (idealization) とすれば, これが所要の例である.

$n-d < t \le n$ のとき: $u = t-n+d-1$ とおく. (2.3) において, $a=u$, $b=n-u$, $c=d-u$ とおいたときの T をとれば, 所要の例になっている.

(2.5) Remark. (2.2) の Corollary として, [9] Corollary 1.8. 或いは [4] Corollary 2.7. の別証を得る.

§ 3. The endomorphism ring and the reflexivity.

A を local ring で, canonical module K を持つものとする.

$h: A \to \mathrm{Hom}_A(K, K)$ を natural map とする.

(3.1) Proposition ([2] Proposition 2). h iso. $\Leftrightarrow$ A が unmixed で, $\hat{A}$ が (S_2) を満たす.

(3.2) Proposition. A が Gorenstein local ring の剰余類環, $\dim A \geq 1$, $\forall \mathfrak{p}$ min. prime, $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A$ とするとき, 次は同値である.

(a) K reflexive

(b) A は embedded prime を持たず, ht 1 の prime $\mathfrak{p}$ に対し $A_\mathfrak{p}$ は Gorenstein.

(proof) $\mathrm{Hom}_A(\ , A) = {}^*$ と書く. 任意の prime $\mathfrak{p}$ に対し, $K_\mathfrak{p}$ は $A_\mathfrak{p}$ の canonical module である. ((1.2))

(a) $\Rightarrow$ (b): $K \cong K^{**}$. $\therefore$ $\mathrm{Ass}(K) = \mathrm{Supp}(K^*) \cap \mathrm{Ass}(A) = \mathrm{Ass}(A)$. (1.4) より A は embedded prime を持たない. ht 1 の prime $\mathfrak{p}$ をとれば, $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}(A)$. $\therefore$ $A_\mathfrak{p}$ は Cohen-Macaulay. $K_\mathfrak{p}$ は reflexive. よって, $A_\mathfrak{p}$ は Gorenstein. ((1.8))

(b) $\Rightarrow$ (a): $\dim A = 1$ のときは明らか. $\dim A > 1$, $\dim A - 1$ まで正しいとする. A の全商環 Q は仮定より artinian, Gorenstein である. $\therefore$ $K \otimes_A Q \cong Q$. K は torsion free ((1.4)) だから, $K \hookrightarrow K \otimes_A Q \cong Q$. 故に, K は torsionless.

exact sequence $0 \to K \to K^{**} \to C \to 0$ を考える. max. でない prime $\mathfrak{p}$ に対し, $C_\mathfrak{p} = 0$ となる. $\therefore$ $l(C) < \infty$. $C \neq 0$ とすると, $\operatorname{depth} C = 0$. ところが, $\operatorname{depth} K \geq \min\{2, \dim A\} = 2$, $\operatorname{depth} K^{**} \geq \min\{2, \operatorname{depth} A\} \geq 1$ だから, exact sequence より $\operatorname{depth} C > 0$. $\therefore$ $C = 0$, 即ち K は reflexive.

§4. The projective dimension.

A を local ring で, canonical module K を持つものとする.

(4.1) Theorem ([2] Theorem 3). $K \cong A$ or $\mathrm{pd}_A K = \infty$.

(proof) A は complete であるとしてよい. $\mathrm{pd}_A K < \infty$ を仮定する.

$\mathrm{ann}(K) = 0$ となる. $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$, $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A$ を得, また A が (S_2) を

満たすことが判り，$\mathrm{Hom}_A(K,K)\cong A$．全商環 Q は *artinian, Gorenstein* となり，(3.2) の *proof* より，K は *fractional ideal* となる．故に，$K\cong\mathfrak{a}$ *ideal of* A．$\mathrm{pd}_A\,\mathfrak{a}<\infty$ だから，Buchsbaum-Eisenbud の *fin. free resol.* の *structure theorem* の系より，$\mathfrak{a}=x\mathfrak{b}$，$x$ は非零因子，$\mathfrak{b}$ は *grade* ≥ 2 の *ideal*，となる．よって，$0\to K\to A\to A/\mathfrak{b}\to 0$ *exact* を得，$H^n_{\mathfrak{m}}(A)\cong H^n_{\mathfrak{m}}(K)$．($n=\dim A$，$\mathfrak{m}$ は A の *max. ideal*)　E を $A/\mathfrak{m}$ の *injective envelope* とする．$K\cong \mathrm{Hom}_A(H^n_{\mathfrak{m}}(A),E)\cong \mathrm{Hom}_A(H^n_{\mathfrak{m}}(K),E)\cong \mathrm{Hom}_A(K,K)\cong A$．

§5. Almost complete intersections.

R を *regular local ring*，I を *ideal of* R，$\mathrm{ht}\, I=r$ とする．I の極小生成系の個数が $r+1$ 個のとき，R/I を *almost complete intersection* という．

(5.1) Proposition.　$A=R/I$ を *almost complete intersection*，K を A の *canonical module* とする．

(i) $\mathrm{pd}_A\,K=\infty$．([12] Proposition 1.1. と我々の (4.1))

(ii) ([14] Proposition 1.) I が *prime* のとき，次の *exact sequence* が存在する：

$$0\longrightarrow K\longrightarrow A^{r+1}\longrightarrow I/I^2\longrightarrow 0\qquad (r=\mathrm{ht}\,I)$$

(5.2) Theorem ([14] Theorem and [1] Theorem).　k を完全体，$R=k[X_1,\ldots,X_t]_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p}$ は *prime*)，$I\in\mathrm{Spec}(R)$ とする．$A=R/I$ が *almost complete intersection* であれば，*module of differentials* $\Omega_{A/k}$ の *proj. dim.* は無限．

R を *regular local ring*，$I\in\mathrm{Spec}(R)$，$\mathrm{ht}\,I=r$，R/I が *almost complete intersection* とする．[1] Theorem の *proof* より，I^2 が *primary* でなく，P がその *embedded prime* なら $\mathrm{ht}\,P/I=1$ であることが判る．これと，[12] Corollary 1.2. を合わせれば，次の定理の (b) ⇒ (a) を得る．また，[12] Corollary 1.2. と我々の

(3.2) より, (b) ⇔ (c) を得る.

(5.3) Theorem (Kunz [13]). R を *regular ring*, $I \in \mathrm{Spec}(R)$, I は局所的に *complete intersection* か *almost complete intersection* であるとし, $A = R/I$ とおく. このとき, 次は同値:

(a) I/I^2 は *torsion free* A-module, i.e. I^2 が *primary*.

(b) $\mathrm{ht}\ 1$ の *prime ideal* $\mathfrak{p}$ *of* A に対し, $A_{\mathfrak{p}}$ は *complete intersection*.

(c) K_A は *reflexive* A-module. (K は A の *canonical module*.)

([13] においては, (a),(b) ⇔ (c) は特別な場合のみ証明されている. 一般の場合は, 松岡氏によって与えられた. (上で述べたのとは違う方法で))

この節で述べたことの一般化が Herzog [10] に見られる.

References

[1] Y. Aoyama, *A remark on almost complete intersections*, manus. math. 22 (1977) 225 ~ 228.

[2] ――――, *On the depth and the projective dimension of the canonical module*, preprint.

[3] H. Bass, *On the ubiquity of Gorenstein rings*, Math. Zeit. 82 (1963) 8 ~ 28.

[4] R. Fossum, H.-B. Foxby, P. Griffith and I. Reiten, *Minimal injective resolutions with applications to dualizing modules and Gorenstein modules*, Publ. Math. I.H.E.S. 45 (1975) 193 ~ 215.

[5] S. Goto and K. Watanabe, *On graded rings* I, J. Math. Soc. Japan 30 (1978) 179 ~ 213.

[6] A. Grothendieck, *Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents*, Sém. Bourbaki Expose 149, Mai 1957.

[7] ――――, *Local cohomology*, Lect. Notes Math. 41, Springer Verlag, 1967.

[8] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lect. Notes Math. 20, Springer Verlag, 1966.

[9] R. Hartshorne and A. Ogus, *On the factoriality of local rings of small embedding codimension*, Commun. Alg. 1 (1974) 415 ~ 437.

[10] J. Herzog, *Ein Cohen-Macaulay Kriterium mit Anwendungen auf den Konormalenmodul und den Differentialmodul*, preprint.

[11] J. Herzog, E. Kunz et al., *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings*, Lect. Notes Math. 238, Springer Verlag, 1971.

[12] E. Kunz, *Almost complete intersections are not Gorenstein rings*, J. Alg. 28 (1974) 111 ~ 115.

[13] ———, *The conormal module of an almost complete intersection*, to appear in Proc. A. M. S.

[14] T. Matsuoka, *On almost complete intersections*, manus. math. 21 (1977) 329 ~ 340.

[15] R. Y. Sharp, *Gorenstein modules*, Math. Zeit. 115 (1970) 117 ~ 139.

[16] ———, *On Gorenstein modules over a complete Cohen-Macaulay local ring*, Quart. J. Math. 22 (1971) 425 ~ 434.

[17] ———, *Finitely generated modules of finite injective dimension over certain Cohen-Macaulay rings*, Proc. London Math. Soc. 25 (1972) 303 ~ 328.

[18] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. Math. 61 (1955) 197 ~ 278.

[19] J. Stückrad and W. Vogel, *Toward a theory of Buchsbaum singularities*, Amer. J. Math. 100 (1978) 727 ~ 746.

注：(3.1) Proposition について、
$\hat{A}$ が (S_2) を満たせば，A は *unmixed* であることは知られているとのことです。

極小移入分解から誘導されたある種の複体について.

神大、教養 竹内康滋

1968年に H. Bass は次の予想をした.

ネーター的局所環 R が有限移入次元の有限生成加群 $\neq 0$ をもてば, R は Cohen-Macaulay である.

この予想は, 局所環 R が体を含む場合, また $\dim R \leqq 2$ などのときは, 肯定的に解決されているが, 一般の場合は未解決である。

以下, R はネーター局所環とする。R が有限移入次元の有限生成加群 $N \neq 0$ をもつとき, N の極小移入分解と極大 R-列の間にある種の関係があることは良く知られている。例えば, 極小移入分解の長さと, 極大 R-列の長さが等しいなどである. これらの関係は, Bass の予想を考えるとき, 重要な役割を演じている. そこで我々は, 極小移入分解と極大 R-列とのさらに詳しい関係を調べたい.

$\mathfrak{m}$を局所環Rの極大イデアルとする. R-加群N(有限移入次元, 有限生成性は仮定しない)の極小移入分解を

$$0 \to N \xrightarrow{d^{-1}} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

とする.

定義. $\mathfrak{m}$の元の列 $(x) = (x_0, x_1, \cdots, x_r)$に対して, E^iの部分加群$N^i_{(x)}$を, 帰納的に次のように定義する.

$$N^0_{(x)} = \{ e \in E^0 \mid x_0 e \in d^{-1}(N) \}$$

$$N^i_{(x)} = \begin{cases} \{ e \in (0 : (x_0, \cdots, x_{i-1}))_{E^i} \mid x_i e \in d^{i-1}(N^{i-1}_{(x)}) \} & (i \leqq r) \\ (0 : (x_0, x_1, \cdots, x_r))_{E^i} & (i > r) \end{cases}$$

d^iは準同型: $N^i_{(x)} \to N^{i+1}_{(x)}$をひき起すが, この準同型も$d^i$で表わすことにする。このとき, 複体 $0 \to N \xrightarrow{d^{-1}} N^0_{(x)} \xrightarrow{d^0} N^1_{(x)} \xrightarrow{d^1} \cdots$ をうる. この複体をNの(x)-complexと呼ぶことにする。$N^i_{(x)}$を簡単のため, N^iと表わすこともある。

次のことは明らかであろう。

12. N^iは$\mathrm{Hom}_R(R/(x_0, \cdots, x_{i-1}), E^i)$の部分加群

と同一視出来る、とくに、$i>r$ なら $N^i = Hom_R(R/(x), E^i)$

2) したがって、N^i は $R/(x)$ − 移入的 $(i>r)$

3) $(x)=(x_0, \cdots, x_r)$ が R−列なら、$N^{r+1} \to N^{r+2} \to \cdots$ は完全

以下の議論において、次の定理は重要である。

定理1、 R−列 $(x)=(x_0, \cdots, x_r)$ に対して任意 R−加群 N の (x)−complex は、つねに非輪状である。

[証] 函手 $Hom_R(R/(x_0), \ )$ が essential monomorphism および移入加群を保存することと、同型性 $Hom_R(R/(x_0), E^0/d^{-1}(N)) \cong d^0(N^0)$ に注意すれば、証明は容易である。

以下、N は R−加群とする。R−列 $x_0, x_1, \cdots, x_r$ が N−列になるための条件をいくつか与えよう。

定理2、 R−列 $x_0, x_1, \cdots, x_r$ が N−列になるために、x_i が N^i の非零因子であり $(i=0, 1, \cdots, r)$

$N \neq (x)N$ なることが必要かつ十分である。

［証］ N の極小移入分解を $0 \to N \xrightarrow{d^{-1}} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$ とする． x_0 が N^0 の非零因子であれば，x_0 の乗法によってひき起される写像；$E^0 \to E^0$ は E^0 の自己同型．このことから，$d^0(N^0) \cong N/x_0N$．したがって，x_1 が N^1 の非零因子なら，x_0, x_1 は N-列．また，$0 \to N/x_0N \to Hom_R(R/(x_0), E^1) \to Hom_R(R/(x_0), E^2) \to \cdots$ は $R/(x_0)$-加群 N/x_0N の極小移入分解である。先の議論を繰り返していけば，定理の十分性は証明できる．

必要性はつぎのことに注意すればよい。$x_0, x_1, \cdots, x_r$ が N-列なら，$N/(x_0, x_1, \cdots, x_i)N \cong d^i(N^i)$ なることと，$d^i(N^i)$ は N^{i+1} の essential な部分加群である．

定理 1, 2 よりつぎの系は明らかであろう。

系　$x_0, x_1, \cdots, x_r$ を $\mathfrak{M}$ の元の列とする．このとき，$x_0, x_1, \cdots, x_r$ が R-列になるために，R の $(x_0, x_1, \cdots, x_r)$-complex ; $0 \to R \to R^0 \to R^1 \to \cdots$ が非輪状で，x_i が R^i の非零因子 $(i = 0, 1, \cdots, r)$

なることが必要かつ十分である.

定理3. $(x)=(x_0, x_1, \cdots, x_r)$ を R-列, N を有限生成 R-加群 $(\neq 0)$ とする。$x_0, x_1, \cdots, x_s$ $(s \leqq r)$ が N-列なら, N の (x)-complex の各項 N^i $(0 \leqq i \leqq s)$ は有限生成である。逆に, 各 N^i $(0 \leqq i \leqq s < r)$ が有限生成なら, $x_0, x_1, \cdots, x_s$ は N-列をなす.

[証明] $x_0, x_1, \cdots, x_s$ が N-列なら, $N^i/d^{i-1}(N^{i-1}) \cong N/(x_0, \cdots, x_i)N$ $(0 \leqq i \leqq s)$ (ただし, $N^{-1}=N$). N が有限生成なることより, N^0 は有限生成である. 以下, 帰納的に N^i $(0 \leqq i \leqq s)$ が有限生成なることをうる. 逆に, 各 N^i $(0 \leqq i \leqq s < r)$ は有限生成であると仮定しよう. $(0 : x_0)_{E^0} \subseteq N^0$ より $(0 : x_0)_{E^0}$ は有限生成である. ところで $(0 : x_0)_{E^0}$ は $R/(x_0)$-移入的であるが, depth $R/(x_0) > 0$ より $(0 : x_0)_{E^0} = 0$. ゆえに, x_0 は N の非零因子である. したがって, $d^0(N^0) \cong N/x_0N$ をうる. 同様の論法をくり返し用いて, $x_0, x_1, \cdots, x_s$ は N-列をなすことが解る.

系　$(x)=(x_0,x_1,\cdots,x_s)$ を R-列（$s<\operatorname{depth} R$），N を有限生成 R-加群（$\neq 0$）とする。このとき，$x_0,x_1,\cdots,x_s$ が N-列をなすために，$N\cong N^0$, $d^0(N^0)\cong N^1$, $\cdots$, $d^{s-1}(N^{s-1})\cong N^s$ なることが必要かつ十分である。ただし，$0\to N\xrightarrow{d^{-1}}N^0\xrightarrow{d^0}N^1\xrightarrow{d^1}\cdots$ は N の (x)-complex.

〔証〕十分性は定理より明らかである。N の極小移入分解 $0\to N\to E^0\to E^1\to\cdots$ に対して，x_0 の乗法によってひき起される写像；$E^0\to E^0$ は E^0 の自己同型を与える。したがって，N^0 の定義より $N^0\xrightarrow{x_0}d^{-1}(N)$。一般に，$x_i$ は $d^{i-1}(N^{i-1})$ の非零因子で，$\operatorname{Hom}_R(R/(x_0,\cdots,x_{i-1}),E^i)$ は $R/(x_0,\cdots,x_{i-1})$-加群 $d^{i-1}(N^{i-1})$ の injective envelope なるゆえ，$N^i\xrightarrow{x_i}d^{i-1}(N^{i-1})$。

最後に，(x)-complex の２，３の応用について述べよう。

定理４．整数 $n\geq 0$ に対して，$\operatorname{depth} R\leq n+1$ とする。$\mathfrak{m}$ の元の列 $(x)=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ が存在して，R の (x)-complex が acyclic で，その各項が有限生

成ならば，$\dim R \leqq n+1$

[証] $0 \to R \xrightarrow{d^{-1}} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$ を R の極小移入分解とする。$(0:x_0)_{E^0} \subseteq R^0$ なる故 $(0:x_0)_{E^0}$ は有限生成である。$(0:x_0)_{E^0} \neq 0$ なら，$R/(x_0)$ は Artinian，したがって，$\dim R \leqq 1$.
$(0:x_0)_{E^0} = 0$ のとき，x_0 は非零因子である。$n \geqq 1$ のとき $(0:(x_0,x_1))_{E^1} (\subseteq R^1)$ は有限生成であるので $(0:(x_0,x_1))_{E^1} \neq 0$ なら，$\dim R \leqq 2$. $(0:(x_0,x_1))_{E^1} = 0$ ならば，x_1 は $(0:x_0)_{E^1}$ の非零因子であるから $R/x_0R \,(\cong d^0(R^0) \subset (0:x_0)_{E^1})$ の非零因子である。以上の議論を繰り返していくと，$\dim R \leqq i+1$ $(0 \leqq i \leqq n)$ かまたは，$x_0, x_1, \cdots, x_n$ は R-列をなす。後者の場合，$\operatorname{depth} R = n+1$ であるから，$(0:(x))_{E^{n+1}}$ $(\neq 0)$ は有限生成である。ゆえに $\dim R \leqq n+1$.

定理5. ネーター的局所環 R に対して，有限移入次元の有限生成 R-加群 $N (\neq 0)$ が存在して任意の極大 R-列 $(x) = (x_0, x_1, \cdots, x_r)$ について，N の (x)-complex の1つの項 $N^i_{(x)}$ $(0 \leqq i \leqq r+1)$ が有限生成であるならば，R は Cohen-Macaulay で

ある。

［証］　$0 \to N \xrightarrow{d^{-1}} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^r} E^{r+1} \to 0$ をNの極小移入分解とする。$0 \leq i \leq r$に対して $N^i_{(x)}$ は有限生成として証明すれば十分である。このとき，$(0 : (x_0, x_1, \cdots, x_i))_{E^i} = 0$，すなわち，$x_i$ は $(0 : (x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}))_{E^i}$ の非零因子である。したがって，$d^{i-1}(N^{i-1}_{(x)}) \neq 0$．$d^{i-1}(N^{i-1}_{(x)})$ は $R/(x_0, \cdots, x_{i-1})$－加群として移入次元は有限であるから，$\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_{R/(x_0, \cdots, x_{i-1})}\, d^{i-1}(N^{i-1}_{(x)}) = 0$ のときは，$R/(x_0, \cdots, x_{i-1})$ は Cohen-Macaulay である．$\mathfrak{a} \neq 0$のとき，$\bar{x}'_i \in \mathfrak{a}$ なるRの元x'_iが存在して，x'_iは$R/(x_0, \cdots, x_{i-1})$の非零因子となる．極大R-列$(x') = (x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, \cdots, x'_r)$に対して，$N^i_{(x')}$は有限生成でない．なぜなら，$0 \neq (0 : (x_0, \cdots, x_{i-1}, x'_i))_{E^i} \subseteq N^i_{(x')}$であるから．ゆえに，$R/(x_0, \cdots, x_k)$ $(0 \leq k \leq r)$ が Cohen-Macaulay であるか，極大R-列(x'')が存在して，$N^{r+1}_{(x'')}$が有限生成になるかのいずれかである．いずれの場合も，Rは Cohen-Macaulay.

参考文献

[1]. H. Bass : Injective dimension in noetherian rings, Trans. Amer. Math. Soc. 102, 18–29 (1962)

[2]. H. Bass : On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Zeitschr. 82, 8–28 (1963)

[3]. G. Levin and W. V. Vasconcelos : Homological dimension and Macaulay rings, Pacific J. of Math. 25, 315–325 (1968).

絶対純粋加群と連接環

広島大学理学部　大石彰

ネーター環上の injective 加群については，E. Matlis，H. Bass その他の人々により，以前から良く研究されている。例えば，injective 加群を用いて，幾つかの環を特徴付けることが出来る。injective 加群の1つの一般化として，B. H. Maddox 及び B. Stenström により，絶対純粋加群（absolutely pure module）の概念が導入された。これは，又，平坦加群の双対概念と見なすことが出来る。以下で分るように，絶対純粋加群を考える環としては，連接環（coherent ring）が最も自然である。この論文では，絶対純粋加群について，今までに知られていること，及びそれを使った幾つかの環の特徴付けを与え，又，J. R. Jans，H. Bass によるネーター環上の torsionless 及び reflexive 加群についての結果を，絶対純粋加群を用いて，連接環に拡張する。

環は全て可換環であるとし，Mod(A) で A-加群全体の圏，$\mathrm{Mod}^{FP}(A)$ で有限表示的 A-加群全体の圏を表わす。A-加群 M が有限表示的であること

は，A-加群の任意の族 (N_λ) に対し，$M \otimes_A (\prod_\lambda N_\lambda) \to \prod_\lambda (M \otimes_A N_\lambda)$ が同型であること，又，A-加群の任意の帰納系 (N_λ) に対し，$\varinjlim \mathrm{Hom}_A(M, N_\lambda) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \varinjlim N_\lambda)$ が同型（全射で十分）であることと同値であることに注意しておく。$M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対して，$M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$，$M^\circ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$（Mの指標加群）又は，Mの Matlis dual，即ち，EをAの1つの injective cogenerator としたときの $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ とおく。

定義 1. A-加群の完全列 $X^\cdot : \cdots \to X^{n-1} \to X^n \to X^{n+1} \to \cdots$ が pure exact であるとは，任意の $N \in \mathrm{Mod}(A)$ に対して，$X^\cdot \otimes_A N$ が完全であること，とする。ここで，Nとしては，$\mathrm{Mod}^{FP}(A)$ の対象のみ考えれば十分である。

例えば，$0 \to \bigoplus_\lambda M_\lambda \to \prod_\lambda M_\lambda$，$0 \to M \to M^{\circ\circ}$，及び $0 \to K \to \bigoplus_\lambda M_\lambda \to \varinjlim M_\lambda \to 0$ 等は，全て pure exact である。

完全列 (*) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ が pure exact であることは，次のいずれの条件とも同値である：

(1) 任意の $L \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ に対して，次の列が完全：

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(L, M') \to \mathrm{Hom}_A(L, M) \to \mathrm{Hom}_A(L, M'') \to 0$$

(2) $0 \leftarrow M'^{\circ} \leftarrow M^{\circ} \leftarrow M''^{\circ} \leftarrow 0$ が split exact。
(3) (※) は split exact列の帰納的極限。

定理－定義2. (cf. [3], [4]) 環 A が次の全て同値な条件を満たすとき，A を連接環(coherent ring)と言う。
(1) A の任意の有限生成イデアルが有限表示的。
(2) $X = \mathrm{Spec}(A)$ の構造層 $\mathcal{O}_X$ が環の連接層。
(3) (i) $\forall a \in A$ に対して，$\mathrm{Ann}_A(a)$ が有限生成
(ii) 任意の有限生成イデアル I, J に対して，$I \cap J$ が有限生成。
(4) $\mathrm{Mod}^{FP}(A)$ がアーベル圏をなす。
(5) 任意の平坦 A-加群の族 (M_λ) に対し，$\prod_\lambda M_\lambda$ が平坦。
(6) 任意の集合 I に対して，A^I が平坦 A-加群。

ネーター環，絶対平坦環，semihereditary環，ネーター環上の(無限変数)多項式環などは，全て連接環である。

定義3. (B. H. Maddox) $M \in \mathrm{Mod}(A)$ が absolutely pure (略して，abs. pure) とは，任意の完全列：
$0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ が pure exact になること，とする。
abs. pure加群は，又，FP-injective加群とも言う。(cf.

B. Stenström [16])。

$M \in \mathrm{Mod}(A)$ が平坦加群であることは，任意の完全列 $0 \to M'' \to M' \to M \to 0$ が pure exact であることと同値だから，abs. pure と flat とは互いに双対な概念であることが推察される。

A-加群について，injective ⇒ abs. pure ⇒ divisible は容易に分る。（NB. A-加群は，任意の regular element $a \in A$ に対し $aM = M$ となるとき，divisible と言う。）又，整域上の torsion-free 加群について，3つの概念は一致する。M が injective ⟺ M が abs. pure かつ pure injective，も明らか。

<u>定理 4.</u>　$M \in \mathrm{Mod}(A)$ について，次は同値：

(1)　M が abs. pure。

(2)　M の injective hull $0 \to M \to E_A(M)$ が pure exact。

(3)　$\exists E$: injective s.t. $0 \to M \to E$ が pure exact。

(4)　$\exists M'$: abs. pure s.t. $0 \to M \to M'$ が pure exact。

(5)　任意の $L \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ について，$\mathrm{Ext}_A^1(L, M) = 0$。

(6)　$0 \to N \to F$ (exact)，N：有限生成，F：(finite) free なら，$\mathrm{Hom}_A(F, M) \to \mathrm{Hom}_A(N, M) \to 0$ (exact)。

証明．(1) → (2) → (3) → (4) は明白。(4) → (1)：$0 \to M \to N$

(exact)として, push-out $\begin{matrix} M & \to & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \to & N' \end{matrix}$ を作ると, 各写像は単射で, 仮定により, 合成 $(M \xrightarrow[\text{monic}]{\text{pure}} M' \xrightarrow[\text{monic}]{\text{pure}} N') = (M \to N \to N')$ が pure monic だから, $M \to N$ が pure monic である。(1)$\Leftrightarrow$(5): $0 \to M \to E \to N \to 0$ (exact), E: injective とすると, $L \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ に対して, $\mathrm{Hom}_A(L,E) \to \mathrm{Hom}_A(L,N) \to \mathrm{Ext}_A^1(L,M) \to \mathrm{Ext}^1(L,E)=0$ (exact)。これから同値性は明白。次に, $0 \to N \to F \to L \to 0$ (exact), N: 有限生成, F: finite free とすると, $\mathrm{Hom}_A(F,M) \to \mathrm{Hom}_A(N,M) \to \mathrm{Ext}_A^1(L,M) \to \mathrm{Ext}_A^1(F,M)=0$ (exact)。これから, (5)$\Leftrightarrow$(6) は明らか。証明終。

命題5. (1) A-加群の族 (M_λ) について, 次は同値:
(i) 各 M_λ が abs. pure, (ii) $\prod_\lambda M_\lambda$ が abs. pure, (iii) $\bigoplus_\lambda M_\lambda$ が abs. pure。

(2) abs. pure 加群の directed union は abs. pure。

(3) $M \in \mathrm{Mod}(A)$ について,
M が flat $\Leftrightarrow$ M° が abs. pure $\Leftrightarrow$ M° が injective。

(4) $M \in \mathrm{Mod}(A)$ について, M° が flat $\Rightarrow$ M が abs. pure.

証明. (1) (i)$\Rightarrow$(ii): $0 \to M_\lambda \to E_\lambda$ が pure exact, E_λ: injective とすると, $0 \to \prod_\lambda M_\lambda \to \prod_\lambda E_\lambda$ が pure exact, $\prod_\lambda E_\lambda$: injective。(ii)$\Rightarrow$(iii): $0 \to \bigoplus_\lambda M_\lambda \to \prod_\lambda M_\lambda$ の pure exactness から明白。(iii)$\Rightarrow$(i): $0 \to M_\lambda \to \bigoplus_\lambda M_\lambda$ の pure exactness から明白。(2): $M = \bigcup_\lambda M_\lambda$

(directed union) として，$M \subset M'$ とすると，合成：$M_\lambda \subset M \subset M'$ が pure monic で，$M \subset M'$ はそれらの帰納的極限だから，pure monic である。(3) は同型 $\mathrm{Ext}^n_A(L, M^\circ) = \mathrm{Tor}^A_n(L, M)^\circ$ から明白。(4)：M° が flat なら，(3) より $M^{\circ\circ}$ が abs. pure で，$0 \to M \to M^{\circ\circ}$ が pure exact，よって M が abs. pure。証明終。

次に，abs. pure 加群を用いて，幾つかの環の特徴付けを与えよう。

<u>命題 6</u>. 環 A について，次は同値：

(1) A が絶対平坦環（即ち，von Neumann regular）

(2) 任意の $M \in \mathrm{Mod}(A)$ が abs. pure

(3) 任意のイデアル I について，A/I が abs. pure A-加群

証明。(1) ⇒ (2)：仮定より M° が平坦で，従って命題 5.(4) より，M は abs. pure。(2) ⇒ (3) は明白。(3) ⇒ (1)：任意の $a \in A$ について，cyclic 加群 Aa は仮定より abs. pure。よって $0 \to aA \to A \to A/aA \to 0$ (pure exact) で，$A/aA \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ よりこれは split する。よって，Aa は 1 つの巾等元で生成されるから，A は絶対平坦である。証明終。

<u>命題 7</u>. 環 A について，次は同値：

(1) A がネーター環。

(2) abs. pure 加群は injective。

証明. (1) ⇒ (2): M : abs. pure とすると, A の任意のイデアル I について, $A/I \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ より $\mathrm{Ext}_A^1(A/I, M) = 0$。よって M は injective。(2) ⇒ (1): (E_λ) を injective A-加群の任意の族とすると, 命題5.(1) より $\bigoplus_\lambda E_\lambda$ は abs. pure で, よって仮定より injective。故に, Bass の定理から, A はネーター環である。証明終.

<u>定理8.</u> 環 A について, 次は同値:

(1) A が連接環。

(2) M が abs. pure $\Longleftrightarrow$ M° が flat 。

(3) E が injective なら E° が flat。

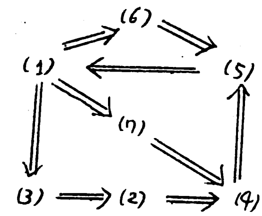
(4) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ (exact), M', M が abs. pure なら, M'' もそうである.

(5) abs. pure 加群の帰納的極限が abs. pure.

(6) 任意の有限表示的イデアル I について, $\mathrm{Ext}_A^1(A/I, M) = 0$ ならば, M は abs. pure。

(7) M が abs. pure のとき, $\mathrm{Ext}_A^n(L, M) = 0$ $({}^\forall n > 0, {}^\forall L \in \mathrm{Mod}^{FP}(A))$。

証明. (1) ⇒ (3): I を A の有限生成イデアルとすると, 仮定より, I は有限表示的で, $E \to \mathrm{Hom}_A(I, E)$ が全射だから, $I \otimes_A E^\circ \cong \mathrm{Hom}_A(I, E)^\circ \to E^\circ$ が単射。故に, E° は A-平坦。



(3) ⇒ (2): $0 \to M \to E \to N \to 0$ (exact), E: injective とすると, M: abs. pure より, $0 \leftarrow M^\circ \leftarrow E^\circ \leftarrow N^\circ \leftarrow 0$ が split exact で, 仮定より, E°: 平坦だから, M°も平坦である。(2) ⇒ (4): M'が abs. pure より, $0 \leftarrow M'^\circ \leftarrow M^\circ \leftarrow M''^\circ \leftarrow 0$ が split exact で, Mが abs. pure より仮定から M°は平坦。従って M''°も平坦で, 命題5.(4)より M は abs. pure である。(4) ⇒ (5): (M_λ) が abs. pure 加群の帰納系とすると, $\bigoplus_\lambda M_\lambda$ が abs. pure で, $0 \to K \to \bigoplus_\lambda M_\lambda \to \varinjlim M_\lambda \to 0$ が pure exact。よって, 仮定より, $\varinjlim M_\lambda$ が abs. pure。(5) ⇒ (1): Aの有限生成イデアル I が有限表示的であることを示す。帰納系 (M_λ) に対し, $\varinjlim \mathrm{Hom}_A(I, M_\lambda) \to \mathrm{Hom}_A(I, \varinjlim M_\lambda)$ が全射であることを示せば良い。帰納系の射 $0 \to (M_\lambda) \to (E_\lambda)$ が, 各 E_λ が injective となるように取れる。$f: I \to \varinjlim M_\lambda$ が与えられたとして, 仮定より $\varinjlim E_\lambda$ は abs. pure だから, $f: I \to \varinjlim M_\lambda \to \varinjlim E_\lambda$ は, ある $g: A \to \varinjlim E_\lambda$ に拡張され, この g はある E_μ を経由する。$I \to A \to E_\lambda \to E_\lambda/M_\lambda$ $(\lambda \geqq \mu)$ の極限は 0 で I は有限生成だから, 十分大な λ について, $I \to A \to E_\lambda/M_\lambda$ は 0 よって $I \to A \to E_\lambda$ は M_λ を経由する。(1) ⇒ (6): 任意の有限生成イデアル I に対し, $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M^\circ) \cong \mathrm{Ext}_A^1(A/I, M)^\circ = 0$ よって M° は flat で, 命題5.(4) から M は abs. pure。(6) ⇒ (5): $M = \varinjlim M_\lambda$,

各M_λはabs. pureとすると，有限表示的イデアルIに対し，$M_\lambda \to \mathrm{Hom}_A(I, M_\lambda)$は全射，故に，$\varinjlim M_\lambda \to \varinjlim \mathrm{Hom}_A(I, M_\lambda) \cong \mathrm{Hom}_A(I, \varinjlim M_\lambda)$が全射で，仮定から，$M$はabs. pure。(1)$\Rightarrow$(ウ)：$n$についての帰納法。$n=1$のときは定理4。$n \geqq 2$のとき，$L \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$に対し，$0 \to N \to F \to L \to 0$ (exact)，F : finite freeとすると，仮定より$N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$。故に，$0 = \mathrm{Ext}_A^{n-1}(N, M) \to \mathrm{Ext}_A^n(L, M) \to \mathrm{Ext}_A^n(F, M) = 0$ (exact)より$\mathrm{Ext}_A^n(L, M) = 0$。(ウ)$\Rightarrow$(エ)：任意の$L \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$に対して，$0 = \mathrm{Ext}_A^1(L, M) \to \mathrm{Ext}_A^1(L, M'') \to \mathrm{Ext}_A^2(L, M') = 0$ (exact)より，$\mathrm{Ext}_A^1(L, M'') = 0$。よって，定理4.より$M''$はabs. pure。証明終。

定理8.から分るように，abs. pure加群を扱う上で，連接環が最も自然な環であることが分る。例えば，Aが連接環のとき，MがA-abs. pure $\Leftrightarrow$ 任意の$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$について，$M_\mathfrak{m}$が$A_\mathfrak{m}$-abs. pure；$M$が$A$-abs. pure，$N$が$A$-injectiveならば，$\mathrm{Hom}_A(M, N)$が$A$-平坦；更に$A$が整域のとき，$A$-abs. pure加群$M$に対し，$tM$ (Mのtorsion部分加群)がA-abs. pureである，等が分る。

良く知られているように，hereditary環は，injective加群の準同型像がinjectiveになる環として特徴付けられる。次の定理はその類似

である。

<u>定理9</u>. 環 A について，次は同値：
(1) A は semihereditary 環．
(2) abs. pure A-加群の準同型像は abs. pure.
(3) divisible 加群は abs. pure。

証明. (1)⇒(3)：M が divisible なら，M° は torsion-free で，従て仮定より M° は平担（[5]）。よって，命題5. より M は abs. pure. (3)⇒(2) は明白。(2)⇒(1)：I を A の有限生成イデアルとすると，$A^\circ \to I^\circ$ は全射で，A° は injective。よって仮定より I° は abs. pure で，命題5. より I は平担。定理8. より A は連接環だから，I は有限表示的かつ平担だから射影的。故に，A は semihereditary 環である。証明終。

<u>注意10</u>. ネーター環でない hereditary 環が存在することから，定理9. により「A が hereditary ⇒ divisible 加群は injective」と言う命題は<u>成立しない</u>ことが分る。（A が整域のときは正しい。又，逆は常に正しい。）

次に，絶対純枠環について調べよう。

<u>定義11</u>. 環 A が A-加群として，divisible (resp.

abs. pure, resp. injective)のとき，Aは divisible (resp. abs. pure, resp. self-injective) ring であると言う。

注意12. (1) Aが divisible $\Leftrightarrow$ $A = Q(A)$ (Aの全商環)

(2) $\dim A = 0$ ならば，Aは divisible。逆は成り立たない。実際，任意の自然数 n 又は $n = \infty$ に対して，$\dim A = n$ なる divisible ring が存在する。($n < \infty$ のとき，$B = k[x_0, \cdots, x_n]/(x_0) \cap (x_0, \cdots, x_n)^2$，kは体，として，$A = Q(B)$ を考えれば良い。$n = \infty$ のときも同様。)

(3) $A = \prod_\lambda A_\lambda$ が divisible (resp. abs. pure, resp. self-injective) $\Longleftrightarrow$ 各 A_λ がそう。

(4) ネーター divisible ring は半局所環。更に，Aが reduced なら，Aは有限個の体の直積。

定理13. (S. Jain) 環Aについて，次は同値：

(1) Aが絶対純粋環。

(2) 任意の有限表示的加群が torsionless。

証明は，次の補題から明白である：

補題14. (M. Auslander, J. Lipman)

$F_0 \to F_1 \to M \to 0$，$F_1^* \to F_0^* \to N \to 0$ (exact)，F_0, F_1 は有限生成射影的とすると，次の完全列がある：

$$0 \to \mathrm{Ext}_A^1(N, A) \to M \to M^{**} \to \mathrm{Ext}_A^2(N, A) \to 0$$
$$0 \to \mathrm{Ext}_A^1(M, A) \to N \to N^{**} \to \mathrm{Ext}_A^2(M, A) \to 0$$

定理15. (S. Jain, B. Stenström, M. Ikeda and T. Nakayama)
連接環Aについて，次は同値である：

(1) Aが絶対純粋環。
(2) 任意の有限表示的加群がreflexive.
(3) 平坦加群がinjective。
(4) abs. pure 加群は平坦。
(5) injective加群は平坦。
(6) (i) $\forall a \in A$について，$\mathrm{Ann}_A(\mathrm{Ann}_A(a)) = Aa$
  (ii) I, Jが有限生成イデアルのとき，$\mathrm{Ann}(I \cap J) = \mathrm{Ann}(I) + \mathrm{Ann}(J)$.
(7) 任意の有限生成イデアルIについて，$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)) = I$。
(証明略。)

命題16. $A = \bigcup_\lambda A_\lambda$が環のdirected unionで，各$A_\lambda$がabs. pure (resp. divisible)ならば，Aもそうである。(証明略。)

注意17. 命題16.のself-injective ringについての類似は成立しない。例 (cf. D. Lazard et P. Huet):
kを体として，$A = \lim\limits_{n\to\infty} k[X]/(X^{2^n}) = k[x_1, x_2, \cdots]/(x_1^2, x_2^2 - x_1, \cdots)$。

(但し, $k[X]/(X^{2^n}) \to k[X]/(X^{2^{n+1}})$ は $x \mapsto x^2$) とすると, A は self-injective ring $k[X]/(X^{2^n})$ の directed union で, 従って, abs. pure だが, self-injective ではない。

命題18. 環 A について, 次は同値:
(1) A は reduced な絶対純粋環。
(2) A は絶対平坦環。

証明. (1) ⇒ (2) : $a \in A$ に対し, $b \in \mathrm{Ann}(a^2)$ なら, $ba^2 = 0$ 従って $(ba)^2 = 0$ で, 仮定から, $ba = 0$ 即ち, $b \in \mathrm{Ann}(a)$。よって, $\mathrm{Ann}(a^2) = \mathrm{Ann}(a)$。定理 15. より, $Aa^2 = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(a^2)) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(a)) = Aa$ となり, A は絶対平坦である。(2) ⇒ (1) は明白。証明終。

$\mathcal{P}$ が環 A についての或る性質のとき, A が strongly $\mathcal{P}$-ring であるとは, A の任意のイデアル I について, A/I が $\mathcal{P}$ を満たすこと, とする。
例えば, A が strongly divisible ring と言うのは, $\dim A = 0$ であることと同値である。
A がネーター環のとき, strongly self-injective ring がアルチン主イデアル環として特徴付けられることは良く知られている (cf. [15], P.163, Th.6.7.)。次の定理は, これをネーター環でない場合に, 一般化したものである。

定理19. 環 A について，次は同値：
(1) A が strongly absolutely pure ring。
(2) A は 0次元 Bezout 環
(3) A は 0次元 arithmetical ring。
(環 A は，任意の有限生成イデアルが単項であるとき，Bezout 環と言う。又，任意の局所化 $A_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$) が valuation ring ($A_{\mathfrak{p}}$ のイデアルの全体が totally ordered) のとき，arithmetical ring と言う。)

証明．(2)⟺(3) の同値性は，[11], Th. 4.1. で示されている。(1)⟹(2)： A が strongly abs. pure ならば，A は [11] の意味で strongly pure (即ち，任意のイデアル I について，任意の ring extension $A/I \subset B$ が pure)。このとき，(2) が成り立つことは，[11], Th. 4.1.。あと，(3)⟹(1) を示せば良い。環 B について，$B_{\mathfrak{p}}$ が abs. pure ($\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$) ⟹ B が abs. pure，だから，結局，A が 0次元 valuation ring のとき，任意の $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ が torsionless であることを示せば良い (cf. 定理13.)。所が，A は valuation ring だから，$M = A/a_1A \oplus \cdots \oplus A/a_nA$ ($a_i \in A$) と書ける。(cf. [18]) よって，任意の $a \in A$ に対して，A/aA が torsionless であることを示せば良い。一方，A のイデアル I に対し，A/I が torsionless ⟺ $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)) = I$，だから，

$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(a)) = Aa$ を示せば良い。[11], Th.3.7. により，0次元 valuation ring は dominant で，[17], Kor. 4.4. により dominant ring については，$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(a)) = Aa$ が成り立つ。よって，定理が証明された。

系 20. 整域 A について，次は同値：

(1) A は Prüfer 整域かつ $\dim A \leq 1$。

(2) A の任意の non-zero ideal I に対し，A/I が 0次元 Bezout 環。

(3) A の任意の non-zero ideal I に対し，A/I が abs. pure ring.

この系は，Dedekind 整域の特徴付けの一般化である（cf. [15], p. 174, Th. 6.14.）。

系 21. A が Prüfer 整域で $\dim A \leq 1$ なら A の任意の有限生成イデアルは 2個の元で生成される。

A がネーター環のとき，系21. は良く知られている。一般に，n 次元 Prüfer 整域の有限生成イデアルは $n+1$ 個の元で生成されることが知られている（R. Heitmann）。

次に，injective加群を用いて得られた，ネーター環上の torsionless 及び reflexive 加群についての，J. R. Jans 及び H. Bass の結果を，abs. pure 加群を用いて，連接環に一般化しよう。

A のイデアルは，A の regular element を含むとき，regular ideal と言う。環 A の任意の有限生成忠実なイデアルが regular になるとき，A は正直（honest）であると呼ぶことにする。

命題 22. 環 A について，次は同値：

(1) A が honest である。

(2) A の全商環 $Q(A)$ が honest である。

(3) $Q(A)(X) \cong Q(A(X))$ as $A(X)$-algebras。

(4) $M \in \mathrm{Mod}^{fp}(A)$，$M^* = 0$ なら M は torsion 加群。

証明は容易なので，省略する。環 $A(X)$ については，[7]，p.18，[14]，p.410 を参照。又，f が $A[x]$ の regular element であるための必要十分条件は f の content イデアルが A の忠実なイデアルであることであるという McCoy の定理（cf. [14]，p.17 (6.13)）を使う。

この命題の応用として，$A(X)$ が divisible ring

であるための必要十分条件は、A が honest な divisible ring であることが分る。又、A が semihereditary 環のとき、A(X) も semihereditary 環になることを示すことが出来る。

命題23. 次の環は、いずれも honest である：

(1) 整域

(2) Bezout 環（特に、絶対平坦環）。

(3) ネーター環（一般に、$\# \mathrm{Ass}_f(A) < \infty$ なら良い。）

(4) 0 次元の環。

(5) semihereditary 環。

(6) 絶対純粋環。

証明. (1), (2) は明白。(3)：I が有限生成忠実なイデアルだが、$I \subset \mathfrak{Z}(A)$ とすると、$I \subset \mathfrak{p}$ なる $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_f(A)$ がある。$\mathfrak{p}$ は或る $\mathrm{Ann}(a)$ の極小素イデアルで、I は有限生成だから、$\exists n > 0$, $\exists t \notin \mathfrak{p}$ s.t. $tI^n \subset \mathrm{Ann}(a)$, i.e., $taI^n = 0$。I は忠実だから、$ta = 0$ 即ち、$t \in \mathrm{Ann}(a) \subset \mathfrak{p}$ となり矛盾。(4)：I が有限生成忠実として、$I = A$ を示す。もし、$I \subset \mathfrak{p}$ なる $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ があれば、$A_\mathfrak{p}$ は 0 次元局所環だから、$\exists n > 0$, s.t. $I^n A_\mathfrak{p} = 0$ 故に、$\exists t \notin \mathfrak{p}$

s.t. $tJ^n = 0$ で，I は忠実だから，$t = 0 \in \mathfrak{J}$ となり矛盾。(5)：$Q(A)$ が絶対平坦になる (cf.[5]) から $Q(A)$ は honest 従って，命題22.より A が honest。(6)：I を有限生成忠実なイデアルとすると，$A/I \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ より，定理13.から A/I は torsionless 即ち，$I = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)) = A$ となり，A は honest である。証明終。

注意24. 正直でない環の例：$A = k[X, Y]$ (k は体)，$I = (X, Y)$ として，$M = \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} A/\mathfrak{p}$，$B = D_A(M)$ (trivial extension，永田の idealization とも言う。)，$J = IB$ とおくと，J は有限生成忠実だが，regular でない。

補題25. A を連接環とする。

(1) $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ について，次は同値：

(i) M が torsionless。

(ii) $\exists N$；有限生成 A-加群 s.t. $M \subset N^*$

(iii) $\exists F$；finite free A-加群 s.t. $M \subset F$

(2) $\forall M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ に対し，$\exists E$: finite free，$\exists N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ s.t. $0 \to N^* \to E \to M \to 0$ (exact)

(3) $\forall N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ に対し，$\exists E$: finite free，$\exists M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ s.t. $0 \to N^* \to E \to M \to 0$ (exact)

(4) $\forall M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ に対し，$\exists N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ s.t.

N は torsionless かつ $M^* \cong N^*$。(証明略。)

定理26. (cf. J. R. Jans [10]) A が連接環, $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ が torsionless のとき, 或る $N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ があって,

$$0 \to M \to M^{**} \to \mathrm{Ext}_A^1(N, A) \to 0 \quad (\text{exact})$$

$$0 \to N \to N^{**} \to \mathrm{Ext}_A^1(M, A) \to 0 \quad (\text{exact})$$

$M^{***} = M^* \oplus \mathrm{Ext}_A^1(N, A)^*$, $N^{***} = N^* \oplus \mathrm{Ext}_A^1(M, A)^*$。
(証明略。)

定理27. 連接環 A について, 次は同値:
(1) $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ のとき, $hd_A(M) = 0$ 又は ∞。
(2) $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$, $M^* = 0$ ならば $M = 0$。
(3) A は honest な divisible ring。

補題28. A が連接環, $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ とする。
(1) $M \neq 0$, $n = hd_A(M)$, $0 \leqq n < \infty$ とすると, $\mathrm{Ext}_A^n(M, A) \neq 0$。
(2) $n = hd_A(M)$, $0 < n < \infty$ とすると, $\mathrm{Ext}_A^n(M, A)^* = 0$。
(3) $M \neq 0$, $M^* = 0$ とすると, $\exists N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$, s.t. $hd_A(N) = 1$, $M = \mathrm{Ext}_A^1(N, A)$。(証明略。)

定理27の証明: (1) $\Rightarrow$ (2): $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$,

$M \neq 0$, $M^* = 0$ とすると，補題 28, (3) より，$M = \mathrm{Ext}_A^1(N, A)$, $hd_A(N) = 1$ なる $N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ が存在し，矛盾。(2) ⇒ (1)：$M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$, $0 < n = hd_A(M) < \infty$ とすると，補題28, (1) より，$\mathrm{Ext}_A^n(M, A) \neq 0$，同 (2) より，$\mathrm{Ext}_A^n(M, A)^* = 0$ となり矛盾。(2) ⟺ (3) の同値性は，命題22. から分る. 証明終。

<u>命題29</u>. 連接環 A について，次は同値：

(1) $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ に対し，M^* が reflexive。

(2) $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ が torsionless なら $\mathrm{Ext}_A^1(M, A)^* = 0$。

(3) $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ に対し，$\mathrm{Ext}_A^2(M, A)^* = 0$

証明. (1) ⇒ (2)：$M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ が torsionless なら，定理 26. より，$\exists N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ s.t. $N^{***} = N^* \oplus \mathrm{Ext}_A^1(M, A)^*$。仮定より，$N^*$ は reflexive だから，$\mathrm{Ext}_A^1(M, A)^* = 0$。(2) ⇒ (1)：補題25, (4) より，$M$ は torsionless と仮定して良い。定理26.より，$\exists N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ s.t. $M^{***} = M^* \oplus \mathrm{Ext}_A^1(N, A)^*$, N は torsionless. よって，仮定より，$\mathrm{Ext}_A^1(N, A)^* = 0$ から，$M^{***} = M^*$ となり，M^* が reflexive。(2) ⟺ (3) は，$0 \to N \to F \to M \to 0$ (exact), F : finite free, $N, M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ のとき，$\mathrm{Ext}_A^1(N, A) = \mathrm{Ext}_A^2(M, A)$ に注意すると，補題 25, (2), (3) から明らか。証明終。

定理30. 連接環 A について，次は同値:

(1) $Q(A)$ が絶対純粋環。

(2) $Q(A)$ が絶対純粋 A-加群。

(3) A は正直で，任意の $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ に対し，M^* が reflexive。

(4) A の任意の有限生成イデアル I に対して，$\varphi : (A:I)_{Q(A)} \to I^*$, $\varphi(x)(y) = xy$ ($x \in (A:I)_Q$, $y \in I$) が全射。

証明。(1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (4) は容易。(1) $\Leftrightarrow$ (3): A は正直と仮定してよい (cf. 命題23)。

$$(1) \Leftrightarrow \mathrm{Ext}^1_Q(N, Q) = 0 \quad (\forall N \in \mathrm{Mod}^{FP}(Q(A)))$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, A) \otimes_A Q = 0 \quad (\forall M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A))$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, A)^* = 0 \quad (\forall M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)) \text{(cf. 命題22.)}$$

$$\Leftrightarrow (3) \quad \text{(cf. 命題29)。}$$

但し，ここで，$M \in \mathrm{Mod}^{FP}(Q(A))$ に対して，$M = N \otimes_A Q(A)$ となる $N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ が存在する，という事実を使った。証明終。

定義31. A が連接環のとき，$M \in \mathrm{Mod}(A)$ の<u>絶対純粋次元</u> $\mathrm{Apd}_A(M)$ を，

$\mathrm{Apd}_A(M) \leqslant n \Leftrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(L, M) = 0$, ${}^\forall i > n$, ${}^\forall L \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$

$\Leftrightarrow 0 \to M \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_n \to 0$，各 E_i は，abs. pure なる完全列がある，で定義する。

$\mathrm{Apd}_A(M) \leq \mathrm{id}_A(M)$, Aがネーター環ならば、$\mathrm{Apd}_A(M) = \mathrm{id}_A(M)$, 又, $\mathrm{Apd}_A(M) = \mathrm{Wd}_A(M^\circ)$, $\mathrm{Apd}_A(M^{\circ\circ}) = \mathrm{Apd}_A(M)$ 等が成り立つ。

定理32. Aが連接環のとき、次は同値:

(1) $\mathrm{Apd}_A(A) \leq 1$。

(2) $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$が torsionless なら, $\mathrm{Ext}_A^1(M, A) = 0$

(3) $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$が torsionless なら reflexive。

Aが整域のとき、これらは、次とも同値:

(4) $Q(A)/A$ が abs. pure A-加群。

証明. (1)⇒(3): $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$が torsionless なら, 補題14.より, $\exists N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$ s.t. $0 \to \mathrm{Ext}_A^1(N, A) \to M \to M^{**} \to \mathrm{Ext}_A^2(N, A) \to 0$ (exact)。M: torsion less より, $\mathrm{Ext}_A^1(N, A) = 0$, $\mathrm{Apd}_A(A) \leq 1$ より, $\mathrm{Ext}_A^2(N, A) = 0$。よって, Mは reflexive。(3)⇒(2): 上と同様, 補題14.から明白。(2)⇒(1): $M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$, $0 \to N \to F \to M \to 0$ (exact), F: finite free とすると, $N \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$は torsionless。よって, $0 = \mathrm{Ext}_A^1(N, A) \to \mathrm{Ext}_A^2(M, A) \to \mathrm{Ext}_A^2(F, A) = 0$ (exact) から, $\mathrm{Ext}_A^2(M, A) = 0$。これから, $\mathrm{Ext}_A^n(M, A) = 0$, $\forall n \geq 2$, $\forall M \in \mathrm{Mod}^{FP}(A)$となり, $\mathrm{Apd}_A(A) \leq 1$。

最後の主張は明白。証明終。

A が semihereditary 環ならば，$\mathrm{Apd}_A(A) \leq 1$ が成り立つ（cf. 定理9）。

参考文献

[1] H. Bass : Injective dimension in noetherian rings, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 18–29.

[2] H. Bass : On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z. 82 (1963), 8–28.

[3] N. Bourbaki : Algèbre Commutative.

[4] S. U. Chase : Direct product of modules, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 457–473.

[5] S. Endo : On semi-hereditary rings, J. Math. Soc. Japan, 13 (1961), 109–119.

[6] E. Enochs : On absolutely pure modules, preprint.

[7] R. Gilmer : Multiplicative ideal theory. 1972.

[8] M. Ikeda and T. Nakayama : On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 15–19.

[9] S. Jain : Flat and FP-injectivity, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 437–442.

[10] J. R. Jans : Duality in noetherian rings,

Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 829–835.

[11] D. Lazard et P. Huet : Dominions des anneaux commutatifs, Bull. Sc. Math. France, 94 (1970), 193–199.

[12] B. H. Maddox : Absolutely pure modules, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 155–158.

[13] C. Megibben : Absolutely pure modules, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 561–566.

[14] M. Nagata : Local rings.

[15] D. W. Sharpe and P. Vámos : Injective modules, Cambridge Univ. Press, 1972.

[16] B. Stenström : Coherent rings and FP-injective modules, J. London Math. Soc. 2 (1970), 323–329.

[17] H. H. Storrer : Epimorphismen von kommutativen Ringen, Comm. Math. Helv. 43 (1968), 378–401.

[18] R. B. Warfield : Decomposability of finitely presented modules, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 168–172.

[19] T. Würfel : über absolut reine Ringe, Algebra-Berichte, Nr. 4 (1973).

AN APPLICATICN OF THE STRUCTURE THEOREM OF HEIGHT TWO PERFECT IDEALS TO INVARIANT THEORY

Junzo WATANABE

INTRODUCTION

Let $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, and let G be a finite subgroup of $GL(n,k)$ acting on R by linear transformation of the variables. Write the ring of invariants as $R^G = k[f_1, f_2, \ldots, f_m]$. Assume for a moment $\mathrm{ch}\, k = 0$. Because $\dim R^G = n$, the least possible m is n, and Chevalley and Serre proved $m = n$ if and only if G is generated by reflexions. As to the number m, the next easiest case to deal with is probably the case $m = n + 1$, or phrasing it, R^G is a hypersurface. (In this kind of words, Chevalley and Serre treated the case R^G is an Affine space.)

Consider the ideal J of R which is generated by all the maximal minors of the Jacobian matrix $[\partial f_i / \partial x_j]$. By the very fact proved by Chevalley and Serre, we assume (as we may) G dose not contain any reflexions. Then, if $m = n + 1$, it can be proved that J has height 2 and R/J is Cohen-Macauley (which is the same as saying J is a perfect ideal of height 2). On the other hand, by a theorem due to K. Watanabe, if G contains no reflexions, and if $m = n + 1$, G has to be contained in $SL(n, k)$. It is quite likely that for any finite subgroup of $SL(n, k)$ having some property from which we can derive the condition of J to be perfect of height 2, the ring of invariants is a hypersurface. Note that the condition of J is something to be interpreted in the terms of the matrices of the group.

Although the condition on J is extreamly a strong one, it becomes automatically satisfied in the case $\dim R = 2$ (provided that G contains no reflexions). Now one might be interested in the minimal number m for $G \subset SL(2, k)$. F. Klein, in his book [2], computed, among other things, a set of basic invariant forms for each finite subgroup of $SL(2, \mathbf{C})$. And the result enables us to conclude: FOR ANY FINITE GROUP $G \subset SL(2, \mathbf{C})$, THE RING OF INVARIANTS IS A HYPERSURFACE.

In this note we give a new proof for this fact using a theorem of homological algebra. The theorem to be used is stated in the first section. (The theorem is applied to the ideal I of R generated by a set of basic invariant forms, and not to J considered above.)

In what follows we assume finite generation of R^G with its proof (when G is finite and $\mathrm{ch}\, k = 0$) to be well known. This is to say that the following, which let us call a theorem, is taken for granted:

THEOREM: Assume $\mathrm{ch}\, k = 0$ (or if not, $(\mathrm{ch}\, k, o(G)) = 1$). Let I be the ideal of R generated by R^G_+. Then the minimal number of generators of I as an ideal is equal to the embedding dimension of R^G.

In fact, finite generation of R^G is proved by showing that a set of generators of I (chosen from among the invariant forms) generates the ring of invariants as a k-algebra. This is the prototype of argument in the proof of finiteness theorems for various groups.

1. THE STRUCTURE THEOREM OF HEIGHT TWO PERFECT IDEALS

Let R be a polynomial ring over k, an arbitrary field, and I a homogeneous ideal of R minimally generated by f_1, f_2, ..., f_{n+1} such that hd R/I = ht $I = 2$ (such an ideal is called a perfect ideal of height 2). Let

$$0 \to R^n \overset{M}{\to} R^{n+1} \overset{F}{\to} R \to R/I \to 0$$

be a minimal free resolution of R/I. We write an element of a free module as a row vector and think of a homomorphism between free modules as a matrix in such a way that, in the notation $M : R^n \to R^{n+1}$, for example, if $v \epsilon R^n$, then its image by M is vM which is the usual matrix product. With this convention, F is a column vector (a matrix consisting of only one column). Entries of F are a set of minimal generators of I, thus we may assume F is such that ${}^tF = [f_1 \ f_2 \ .... \ f_{n+1}]$ (${}^tF$ is the transpose of F). Certainly all the entries of M can be taken to be homogeneous. Now let us state the structure theorem of height two perfect ideals in the form suitable to our purpose.

THEOREM (1.1): With the above notation, let M_i be the matrix obtained by deleting the i-th column of M, and $\det M_i = D_i$. Then there is a constant $c \epsilon k$, such that $f_i = (-1)^i cD_i$. (M can be adjusted so that $c = 1$ or -1.)

For proof, see Peskin-Szpiro [3].

DEFINITION (1.2): An element in $\ker F$ is called a <u>relation</u> of F. A row of M (considered as an element of R^{n+1}) is called a <u>basic relation</u> of F. If $[a_1 \ a_2 .... \ a_{n+1}]$ is a relation of F, then we have: $\deg a_1f_1 = \deg a_2f_2 = \ldots = \deg a_{n+1}f_{n+1}$ (whenever $a_i \neq 0$). Say this number is equal to p. Then p is called the degree of the relation.

Let $M = [a_{ij}]$, and assume the i-th row of M is a relation of degree p_i. Set $d_i = \deg f_i$. Then by definition $\deg a_{ij} = p_i - d_j$ for $a_{ij} \neq 0$. The theorem in particular says:

COROLLARY (1.3): $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_{n+1}$. (cf. Buchsbaum-Eisenbud [1] p. 466)

REMARK (1.4): The numbers p_i may also be explained as follows: If $R(p)$ denotes a free module on one generator having degree p, then p_i are such that make M a degree 0 map in the sequence

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} R(-p_i) \xrightarrow{M} \bigoplus_{i=1}^{n+1} R(-d_i) \xrightarrow{F} R(0) .$$

The next easy lemma, together with Prop.(3.5), is crucial in the sequel.

LEMMA (1.5): Let $R = k[x, y]$, I a homogeneous ideal of R minimally generated by f_1, f_2 and f_3 such that $\mathrm{ht}\,(f_1, f_2) = 2$. With $d_i = \deg f_i$, assume that $d_1 + d_2 = d_3 + 2$. Then we have $(f_1, f_2) : f_3 = (x, y)$.

PROOF. Note, in R, any ideal of ht 2 is perfect. Let $M = [a_{ij}]$ and F be as above with $n + 1 = 3$. Then it is easy to see that $(f_1, f_2) : f_3 = (a_{13}, a_{23})$. Since $\mathrm{ht}\,(f_1, f_2) = 2$, $a_{13} \neq 0$ and $a_{23} \neq 0$. That is $\deg a_{i3} > 0$ for $i = 1, 2$, because a_{i3} cannot be constants. Thus, if p_1 and p_2 are the degree of the first and second rows (=relations) of M, then $p_i \geq d_3 + 1$ for $i = 1, 2$. This says that $2(d_1 + 1) \leq p_1 + p_2 = d_1 + d_2 + d_3$.

Because of the condition posed on the degree of the generators, the only possibility is that $p_i = d_3 + 1$, which implies $\deg a_{13} = \deg a_{23} = 1$. These two elements generate an ideal of height 2, hence $(a_{13}, a_{23}) = (x, y)$.

REMARK (1.6): For any two elements f_1 and f_2 in $R = k[x, y]$ with $\mathrm{ch}\, k = 0$, if f_3 is the Jacobian of f_1 and f_2, then the condition of the lemma concerning degree is satisfied.

REMARK (1.7): Assume M and F are as before. As was said in the proof of the lemma, the ideal of R generated by all the elements that appear in the last column of M is the ideal $(f_1, f_2, \ldots, f_n) : f_{n+1}$.

2. THE REPRESENTATION ρ

In this section we consider finite subgroups of $GL(2, k)$ acting on $R = k[x, y]$. We assume $\mathrm{ch}\, k = 0$. For $G \subset GL(2, k)$, let $R^G = k[f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}]$, where f_i's are a set of basic invariant forms, and let $I = (f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})R$. Note f_i's are also a set of minimal generators of I. (See the last part of Introduction.)

As in the previous section, let us consider a minimal free resolution of R/I:

$$(^\circ) \qquad 0 \to R^n \overset{M}{\to} R^{n+1} \overset{F}{\to} R\,, \quad \text{where } {}^tF = [f_1 \;\; f_2 \ldots \;\; f_{n+1}].$$

When $g \in G$ is applied to this sequence, we obtain, as a result, a new exact sequence

$0 \to R^n \overset{M^g}{\to} R^{n+1} \overset{F}{\to} R$, where, if $M = [a_{ij}]$, M^g denotes

$[a_{ij}^g]$. So, by the exactness of (°), there is an $n \times n$ invertible matrix $C = [c_{ij}]$, $c_{ij} \in k$, such that $M^g = CM$. Because such C is uniquely determined by g, we may define a map ρ by $\rho(g) = C$. Clearly ρ is a homomorphism, and thus we have obtained a representation: $\rho : G \to GL_k(V)$, where V is the vector space spanned by all the rows of M, or we can also say, V is the vector space spanned by a set of minimal generators of the first syzygy of I. Certainly a different choice of M for fixed F only causes conjugation of $\rho(G)$.

THEOREM (2.1): (i) $\rho(G) \subset SL_k(V)$.

(ii) If $V = V_1 \oplus V_2$ is a proper dicomposition of V by G-submodules, and $\rho_i : G \to GL_k(V_i)$ are the corresponding representations, it never happens that $\rho_i(G) \subset SL_k(V_i)$.

PROOF. (i) Let M_1 be the matrix obtained from M by deleting the first column. Then, since $\det M_1$ is an invariant of G by Theorem (1.1), we have $\det M_1 = \det M_1^g$ for all $g \in G$. On the other hand, $M_1^g = \rho(g) M_1$, and by taking determinant we see $\det \rho(g) = 1$.
(ii) We may assume that V_1 is the vector space spanned by the first n_1 rows of M, where $n_1 = \dim V_1$. Let N be the matrix consisting of these rows, and let $\{b_r\}$ be the set of all the maximal minors of N. If we assume $\rho_1(G) \subset SL_k(V_1)$, then all the b_r are invariant, hence $b_r \in I$. According to Theorem (1.1), f_i's are the maximal minors of M, and so each f_i is a linear combination of b_r's with coefficients in (x, y), as long as $V_2 \neq 0$. (For this, just recall how determinant is computed.) Thus it follows that $I \subset (x, y)I$, which is an obvious contradiction.

REMARK (2.2): It is easy to see that all of the basic relations of F of the same degree span a G-submodule of V.

REMARK (2.3): We have made no effort to elucidate the nature of ρ.

For example, we do not know what $\ker \rho$ is. We conjecture, however, that it is the subgroup generated by all the reflexions in G. If this is true, proof will be easy. What we can say for sure is: $\ker \rho = G. \Longleftrightarrow G$ is generated by reflexions. $\Longleftrightarrow n = 1$.

EXAMPLES (2.4): In the following, G is a cyclic group generated by g.

(i) $g = \omega E_2$, where ω is a primitive n-th root of unity.

$$ {}^tF = [x^n \quad x^{n-1}y \quad x^{n-2}y^2 \ldots\ldots \quad y^n] $$

$$ M = \begin{bmatrix} -y & x & & & & & \\ & -y & x & & & \mathbf{0} & \\ & & -y & x & & & \\ & & & \cdots & \cdots & & \\ & \mathbf{0} & & & \cdots & \cdots & \\ & & & & & -y & x \end{bmatrix} $$

$$ \rho(g) = \omega E_n $$

(ii) $g = \begin{bmatrix} \omega & \\ & \omega^2 \end{bmatrix}$, where $\omega^5 = 1$, $\omega \neq 1$.

$$ {}^tF = [xy^2 \quad x^3y \quad x^5 \quad y^5] $$

$$ M = \begin{bmatrix} -x^2 & y & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & -y & 0 \\ y^3 & 0 & 0 & -x \end{bmatrix} $$

$$ \rho(g) = \begin{bmatrix} \omega^2 & & \\ & \omega^2 & \\ & & \omega \end{bmatrix} $$

(iii) $g = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $i^2 = -1$.

$${}^tF = [x^2 \quad xy^2 \quad y^4]$$

$$M = \begin{bmatrix} y^2 & -x & 0 \\ 0 & -y^2 & x \end{bmatrix}$$

$$\rho(g) = -E_2, \quad \ker \rho = \langle g^2 \rangle$$

REMARK (2.5): ρ can be defined in the same fashion for G and k of arbitrary order and characteristic. Theorem (2.1) is valid under the assumption $(\mathrm{ch}\ k, o(G)) = 1$.

3. THE NUMBER OF BASIC INVARIANTS OF $G \subset SL(2, k)$

In this section we assume $\mathrm{ch}\ k = 0$, $k = \bar{k}$. G always denotes a finite subgroup of $SL(2, k)$. As before, R is $k[x, y]$, on which G acts by linear transformation of x and y. R^G is the ring of invariants. We will be always assuming G is non-trivial, in which case G cannot leave a linear form invariant.

NOTATION (3.1): For $f_1, f_2 \in R$, $J(f_1, f_2)$ denotes the Jacobian of the two elements, i.e. $J(f_1, f_2) = \det [\partial f_i / \partial x_j]$, where $x_1 = x$ and $x_2 = y$.

LEMMA (3.2): If $f, h \in R^G$, then $J(f, h) \in R^G$. More generally, if f and h are semi-invariants of G such that $fh \in R^G$, then $J(f, h) \in R^G$.

Proof is easy by direct computation.

PROPOSITION (3.3): Let $R^G = k[f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}]$ with $\deg f_1 \leq$

$\deg f_2 \le \deg f_i$ for $i \ge 3$. Assume $\deg f_1 > 2$. Then $\mathrm{ht}\,(f_1\ f_2) = 2$.

PROOF. Everything will be considered in R. Assume $\mathrm{ht}\,(f_1, f_2) = 1$. Then f_1 and f_2 have a greatest common divisor. Let it be f. Write $f_i = fh_i$, $i = 1, 2$. Then $\mathrm{ht}\,(h_1, h_2) = 2$, for h_1 cannot be constant. Since f_1 is an invariant of G, G permutes the divisors of f_1, and the same is true for f_2. From the fact that h_1 and h_2 have no common divisor, it follows that f and h_1 are semi-invariant. By the preceding lemma, $J(f, h_1)$ is an invariant whose degree is equal to $\deg f + \deg h_1 - 2 = \deg f_1 - 2$. Because of the minimality of the degree of f_1 and the assumption $\deg f_1 > 2$, this is a contradiction.

PROPOSITION (3.4): For $f, h \in R$ such that $\mathrm{ht}\,(f, h) = 2$, $J(f, h) \notin (f, h)$.

Proof is left to the reader.

PROPOSITION (3.5): Let $R^G = k[f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}]$, with f_i's a set of minimal generators of the algebra (or equivalently, of the ideal $(R^G_+)R$). Assume $2 < \deg f_1 \le \deg f_2 \le \deg f_i$ for all $i \ge 3$. Set $\delta = J(f_1, f_2)$. Then f_1, f_2, δ can be a part of a minimal generators of R^G as a k-algebra.

PROOF. Let $\underline{m} = (f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})R^G$ be the maximal ideal of R^G. Note $\deg \delta = \deg f_1 + \deg f_2 - 2$. Then by considering the degrees of generators of $\underline{m}^2$, we see that, if $\delta \in \underline{m}^2$, then the only possibility is $\delta = f_1^{\,2}$, which is not true by Prop.(3.4). Thus $\delta \notin \underline{m}^2$, and again by Prop.(3.4), we see that f_1, f_2 and δ are linearly independent mod $\underline{m}^2$, which is exactly the meaning of the assertion.

PROPOSITION (3.6): Let $R^G = k[f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}]$ with minimal n which makes this expression possible. Assume $2 < \deg f_1 \le \deg f_2 \le \deg f_i$ for all $i \ge 3$, and $f_{n+1} = J(f_1, f_2)$. Then $(f_1, f_2, \dots, f_n) : f_{n+1} = (x, y)$.

PROOF. $(f_1, f_2, \dots, f_n) : f_{n+1} \supset (f_1, f_2) : f_{n+1} = (x, y)$, by Lemma (1.4). (cf. Remark (1.7))

THEOREM (3.7): Write $R^G = k[f_1, f_2, \dots, f_{n+1}]$ with minimal n. Then $n = 2$. Moreover we can choose f_i, so that f_3 is the Jacobian of the first two.

PROOF. Case I. Assume $\deg f_i > 2$, for all i. Then, by Prop. (3.5), we may further assume $\deg f_1 \le \deg f_2 \le \deg f_i$ for $i \ge 3$, and $f_{n+1} = J(f_1, f_2)$. Let M be a matrix (with entries homogeneous) making the following sequence exact:

$$0 \to R^n \xrightarrow{M} R^{n+1} \xrightarrow{F} R, \quad \text{where} \quad {}^tF = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{n+1}].$$

Then we have $\rho : G \to GL_k(V)$, where V is the vector space spanned by the rows of M. (See Section 2.)

By Prop. (3.6) and Remark (1.7), there are at least two basic relations of degree equal to $\deg f_{n+1} + 1$, which, say, is equal to p. Let M_1 be the matrix consisting of all the rows of M which are relations of degree P (see Definition (1.2)), and M_2 the matrix consisting of the other rows of M. Let V_1 and V_2 be the vector spaces spanned by the rows of M_1 and by those of M_2 respectively. V decomposes: $V = V_1 \oplus V_2$ as G-modules, and correspondingly $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, where $\rho_i : G \to GL_k(V_i)$. (cf. Remark (2.2))

Let us restrict our attension to M_1, V_1 and ρ_1.

Because all the rows of M_1 are relations of degree p, all the elements of the last column of M_1 are either linear forms or 0. Thus, in view of Prop. (3.6), we may assume that the last column of M_1 is ${}^t[x\ \ y\ \ 0 \ldots 0]$. (Just for saving space we write the transpose.) Now consider the effect of $g \in G$ to the last column of M_1. g transforms ${}^t[x\ \ y\ \ 0 \ldots 0]$ to ${}^t[x^g\ \ y^g\ \ 0 \ldots 0]$, and hence $\rho_1(g)$ takes the form

$$\rho_1(g) = \left[\begin{array}{c|c} \rho_{11}(g) & * \\ \hline \bigcirc & \rho_{12}(g) \end{array}\right],$$

where $\rho_{11}(g)$ is a 2×2 matrix satisfying

$$\rho_{11}(g)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^g \\ y^g \end{bmatrix}, \text{ so that } \det \rho_{11}(g) = 1.$$

This shows that the first two rows of M spans a G-module. Now, by semi-simplicity of G-modules and by Theorem (2.1), we are forced to conclude that there have been only two basic relations, and therefore $n = 2$.

Case II. Assume $\deg f_1 = 2$. Then f_1 is either a product of two independent linear forms or a square of a linear form. Hence we may assume, by change of variables, that f_1 is either xy or x^2. Keeping in mind the fact $G \subset SL(2, k)$, one easily sees that in the first case ($f_1 = xy$), G is generated by

$$\begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{bmatrix}, \text{ where } \omega^s = 1,$$

and in the second case, $G = \langle -E_2 \rangle$. In either case $R^G = k[xy, x^s, y^s]$ for some s, hence $n = 2$. Rewrite $R^G = k[xy, x^s + y^s, x^s - y^s]$. Then the last generator is the Jacobian of the first two. Q.E.D.

REMARK (3.8): Certainly we wanted to conclude $n = 2$ without computing the invariants. So treating Case II in the proof of the theorem as an exceptional case is something undesirable, though the argument is very easy. The exception occurs because of Prop.(3.3), for which there is possibility of improvement.

CONJECTURE: For $G \subset SL(n, k)$, assume G leaves no linear forms invariant. Then the type of the ideal $(R_+^G)R$ is equal to n. (The type of a primary ideal belonging to the maximal ideal is the "last rank" of a minimal free resolution of the ideal.)

REFERENCES

[1] D. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3, Amer. J. Math., Vol.99, No.3, 1977, pp.447-485.

[2] F. Klein, Vorlesungen uber das Ikosaeder, Leibzig, 1884.

[3] C. Peskine and L. Szpiro, Dimension projective finie et cohomologie local, Publ. Math. I.H.E.S. 42, Paris, 1973.

Krull環上の加群のFitting invariantsについて

広島大学　　伊藤史朗

1. Krull環上の有限生成torsion加群

A を Krull 環，M を有限生成 torsion A-加群とする．[1] p. 59 により pseudo-isomorphism

$$(1.1) \qquad M \longrightarrow \bigoplus A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$$

が存在する．ここで $\mathfrak{p}_i$ は高さ1の素イデアルで $n_i \geqq 0$.
同じく [1] Exercise に invariant factors の定義があって，それを divisorial イデアルの形で表わせば

$$e_k(M) = \widetilde{F_{k-1}(M)} :_K \widetilde{F_k(M)} .$$

ここで $F_k(M)$ は M の k-th Fitting invariant であって，イデアル $\mathfrak{a}$ を含む最小の divisorial イデアルを $\tilde{\mathfrak{a}}$ と表わす．K は A の商体．　A が PID であれば M は $e_k(M)$ を用いて表わすことができた．ここでは一般の Krull 環のとき (1.1) と同じ内容を $e_k(M)$ を用いて表現してみる．

(1.2) A, M を上の通りとする．このとき pseudo-isomorphism

$$M \longrightarrow A/e_1 \oplus \cdots \oplus A/e_n$$

が存在する．ここで各 e_k は divisorial イデアルであって

$$0 \neq \mathfrak{e}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{e}_n \subsetneqq A.$$

さらに
$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_k &= \widetilde{F_{k-1}(M)} :_A \widetilde{F_k(M)} \\ &= \widetilde{F_{k-1}(M) :_A F_k(M)} \\ &= \widetilde{\mathrm{Ann}_A(\Lambda^k M)} \qquad (k=1,\cdots,n). \end{aligned}$$

証明の前に次のことを注意しておく.

注意 1. $\mathfrak{a}$ をイデアル, $\{\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_r\}$ を高さ 1 の素イデアルの集合で, $\mathfrak{a}$ を含む高さ 1 の素イデアルはどれかの $\mathfrak{z}_i$ と一致しているとする. このとき $S = \bigcap (A - \mathfrak{z}_i)$ とおくと $\tilde{\mathfrak{a}} \cdot S^{-1}A = \mathfrak{a} \cdot S^{-1}A$ で, $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \cdot S^{-1}A \cap A$.

注意 2. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ を 2 つのイデアルとすると $\tilde{\mathfrak{a}} :_A \tilde{\mathfrak{b}} = \widetilde{\mathfrak{a} :_A \mathfrak{b}}$.

(1.2) の証明.

まず exact sequence $0 \to L \to A^m \to M \to 0$ を考える. (m は適当な整数). $\mathrm{Ann}_A(M)$ を含む高さ 1 の素イデアルは有限個である. それを $\{\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_r\}$ とし $S = \bigcap (A - \mathfrak{z}_i)$ とおく. $S^{-1}A$ は PID であるから $S^{-1}L, S^{-1}A^m$ に単因子論を用いると $S^{-1}L = a_1 S^{-1}A\varepsilon_1 + \cdots + a_m S^{-1}A\varepsilon_m$ となる. ここで $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ は $S^{-1}A^m$ の適当な free base, $a_1, \cdots, a_m \in S^{-1}A$ で $a_1 S^{-1}A \subseteq \cdots \subseteq a_m S^{-1}A$.
$A^m \subset S^{-1}A^m \subset K^m$ とみて 各 $\varepsilon_i \in A^m$ としてもよい. このとき $\exists s \in S$, $A^m \subseteq \sum A \cdot \varepsilon_i/s$. 右辺を G とおく. G は free A-加群である. さて $G \to S^{-1}A^m \to S^{-1}M$

の合成射を α, $L_1 = \mathrm{Ker}\,\alpha$, $N = G/L_1$ とおくと次の図式を得る.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & L & \to & A^m & \to & M & \to & 0 \\
 & & \cap & & \cap & & \downarrow f & & \\
0 & \to & L_1 & \to & G & \to & N & \to & 0 \\
 & & \cap & & \cap & & \downarrow & & \\
0 & \to & S^{-1}L & \to & S^{-1}A^m & \to & S^{-1}M & \to & 0
\end{array}
$$

容易に解るように $L_1 = \sum \mathfrak{a}_i \cdot \varepsilon_i/_A$, $\mathfrak{a}_i = a_i S^{-1}A \cap A$ となっている. 又 f は pseudo-isomorphism である. 実際 $\mathfrak{z}$ を高さ1の素イデアルとすると, $S \cap \mathfrak{z} = \phi$ ならば $M_{\mathfrak{z}} = (S^{-1}M)_{\mathfrak{z}} = N_{\mathfrak{z}}$. $S \cap \mathfrak{z} \neq \phi$ ならば $M_{\mathfrak{z}} = N_{\mathfrak{z}} = 0$.
さて, $a_i S^{-1}A = F_{i-1}(S^{-1}M) :_{S^{-1}A} F_i(S^{-1}M)$
$= S^{-1}F_{i-1}(M) :_{S^{-1}A} S^{-1}F_i(M)$. 今, $F_i(M)$ を含む高さ1の素イデアルはどれかの $\mathfrak{z}_i$ と一致しているから
$S^{-1}F_{i-1}(M) :_{S^{-1}A} S^{-1}F_i(M) = S^{-1}\widetilde{F_{i-1}(M)} :_{S^{-1}A} S^{-1}\widetilde{F_i(M)}$
$= S^{-1}(\widetilde{F_{i-1}(M)} :_A \widetilde{F_i(M)})$. 従って $\mathfrak{a}_i = \widetilde{F_{i-1}(M)} :_A \widetilde{F_i(M)}$. 一方 $a_1 S^{-1}A \subseteq \cdots \subseteq a_m S^{-1}A$ であったから $\mathfrak{a}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_m$. 次に $f: M \to N$ は pseudo-isomorphism であったから $\mathrm{Ann}_A(\Lambda^k M)^\sim = \mathrm{Ann}_A(\Lambda^k N)^\sim = \mathfrak{a}_k$. (1.2) の証明終り.

一般の有限生成加群 M について (1.2) にあたる結果もほとんど同様にして得られる. 即ち $l = \inf\{i \mid F_i(M) \neq 0\}$ とおき $\{\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_r\}$ を $F_l(M)$ を含む高さ1の素イデアル全体とする. この $\{\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_r\}$ でもって

(1.2)の証明をたどると $f: M \longrightarrow N$ を得る．今度は f が pseudo-isomorphism であるとは限らない．しかし $S \cap \mathfrak{z} = \phi$ となる高さ1の素イデアル $\mathfrak{z}$ について $f_{\mathfrak{z}}: M_{\mathfrak{z}} \longrightarrow N_{\mathfrak{z}}$ は isomorphism である．次に $N = F \oplus t(N)$，(F は rank $l-1$ の free A-加群，$t(N)$ は N の torsion 部分) であるから合成射 $M \longrightarrow N \xrightarrow[\text{proj}]{} F$ の image を $\overline{M}$ とする．このとき f は

$$M \xrightarrow{g} \overline{M} \oplus t(N) \hookrightarrow N$$

と分解する．この g は pseudo-isomorphism である．実際 $\mathrm{Ker}(M \longrightarrow \overline{M}) = t(M)$ であって $\mathfrak{z} \cap S \neq \phi$ なる高さ1の素イデアルで $t(M)_{\mathfrak{z}} = t(N)_{\mathfrak{z}} = 0$ となっている．

2. Co-divisorial 加群の Fitting invariants.

Krull 環 A 上の加群 M が，$\forall x (\neq 0) \in M$ について $\mathrm{Ann}_A(x)$ は divisorial イデアル となっているとき M は co-divisorial であると言う．M が有限生成，co-divisorial，torsion A 加群であれば $\mathrm{Ann}_A(M)$ は divisorial イデアルである．一般に $\mathrm{Ann}_A(M) \subseteq F_0(M) :_A F_1(A)$ であるから $\mathrm{Ann}_A(M) = F_0(M) :_A F_1(M)$ となる．とくに $F_0(M) :_A F_1(M)$ は divisorial イデアルである．しかし $F_0(M)$ は divisorial であるとは限らない．

(2.1) $(A, \mathfrak{m})$ をネーター，局所 Krull 環とする．このとき次は同値である．

(i) 任意の有限生成 codivisorial, torsion A-加群の 0-th Fitting invariant はいつも divisorial イデアル．

(ii) A は次元 2 をこえない正則局所環．

証明．(i) ⇒ (ii)．もし $\dim A \geqq 3$ であれば $\mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{p}$ となる高さ 2 の素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在する．$x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$ をとり $M = \mathfrak{p} + xA/xA$ とおくと M は co-divisorial である．簡単な計算で $F_0(M) = F_0(\mathfrak{p}) + F_1(\mathfrak{p})x + \cdots + F_n(\mathfrak{p})x^n$ であることがわかる．今 $\mathfrak{p}$ は高さ 2 の素イデアルであるから $F_0(\mathfrak{p}) = 0$, $\widetilde{F_1(\mathfrak{p})} = A$ である．よって $F_0(M) = x \cdot \{F_1(\mathfrak{p}) + \cdots + F_n(\mathfrak{p})x^{n-1}\}$ は divisorial でない．従って $\dim A \leqq 2$ である．次に $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を divisorial イデアルとすると $A/\mathfrak{a}$, $A/\mathfrak{b}$ はともに co-divisorial であって $F_0(A/\mathfrak{a} \oplus A/\mathfrak{b}) = F_0(A/\mathfrak{a})F_0(A/\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. 従って $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ は又 divisorial である．[2] により，A は UFD．さて $f(\neq 0) \in \mathfrak{m}$ をとる．$\mathfrak{m}/fA$ は codivisorial であるから $F_0(\mathfrak{m}/fA)$ は divisorial イデアル，即ち単項イデアル．よって $pd_A(\mathfrak{m}/fA) = 1$．これから $pd_A(\mathfrak{m}) \leqq 1$．従って A は正則局所環．

(ii) ⇒ (i) $\dim A = 2$ としてよい．M を有限生成 codivisorial, torsion A-加群とする．$\mathrm{depth}_A M = 1$ であるから $pd\, M = 1$．よって $F_0(M)$ は単項イデアル．

参考文献

[1] N. Bourbaki., Algèbre Commutative, Chap. 7 Hermann, Paris, 1965

[2] D. D. Anderson, π-domains, over-rings, and divisorial ideals, Glasgow Math. J. 19 (1978)

[3] M. Nishi and M. Shinagawa, Codivisorial and divisorial modules over completely integrally closed domains (I), Hiroshima Math. J. 5 (1975)

[4] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, What annihilates a module?, J. Algebra, 47 (1977)

[5] R. M. Fossum, The divisor class group of a Krull domain, Springer-Verlag, 1973

イデアルの生成元の個数について

橘　貞雄（日大・文理）

Judith D. Sally
Numbers of generators of ideals in local rings
Lecture Notes in pure and appl. Math. 35, Marcel Dekker Inc., New York・Basel, 1978.

の紹介。

特異点の変形

(curve singularity の non-rigidity について)

早大理工　小山陽一

$k = \bar{k}$,　$ch(k) = 0$

$\mathcal{C}$:　category of artin local k-algebras with residue field $= k$

とする。　complete local k-algebra R の <u>deformation</u> (A 上の) とは，pair $(\bar{R}, \bar{f})$ で，

$$(*)\quad \begin{array}{ccc} R & \longleftarrow & \bar{R} \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \bar{f}} \\ k & \longleftarrow & A \\ \| & & \\ A/m_A & & \end{array}$$

(i)　$\bar{R}$: A-algebra , $\bar{f}$: Flat

(ii)　$\bar{R} \otimes_A k \simeq R$

となるものである。

(但し. $A \in \mathcal{C}$ とする。)

2つの A 上の deformations $(\bar{R}, \bar{f})$, $(\bar{R}', \bar{f}')$ に対し、

$(\bar{R}, \bar{f}) \sim (\bar{R}', \bar{f}') \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, \varphi . \bar{R} \to \bar{R}'$　A-isomophism

s.t.　$\varphi \otimes 1_k = 1_R$

$D_R(A) \doteqdot \{ R$ の A 上の deformation の同値類 $\}$

とすると、D_R は $\mathcal{C}$ から $\{$sets$\}$ への functor をなす。

これを <u>deformation functor</u> of R とよぶ。 特に $A = k[\varepsilon]$ ($\varepsilon^2 = 0$) のとき、$D_R(A)$ は k-vector space の構造を持ち、R の formal versal family の base space の tangent space T^1_R と一致する。

<u>定義</u>　R が <u>rigid</u> とは、$\forall A \in \mathcal{C}$ に対し、

$D_R(A) = \{\text{one pt.}\}$ となることである。

<u>定理 1.</u> ([L.-S.])　$P = k[\![x_1, \cdots, x_n]\!]$, I: ideal of P に対し、

$$D_R(k[\varepsilon]) \cong \operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}_R(\Omega_P \otimes R, R) \to \operatorname{Hom}_R(I, R))$$
$$(= T^1_R)$$

<u>定理 2.</u> ([S.1])

$$R : \text{rigid} \iff D_R(k[\varepsilon]) = 0$$

rigid なものとして、次のようなものがある。

(0)　regular local k-algebra

(1)　$k[\![x, y]\!] \times_k k[\![x, y]\!]$ $(\cong k[\![x, y, z, w]\!]/(x, y) \cap (z, w))$ ([R.])

(2)　finite group G が $P = k[\![x_1, \cdots, x_n]\!]$ に作用しているとき、$\operatorname{Codim}(\operatorname{Sing}(P^G)) \geq 3$ ならば、P^G は rigid　([S.1])

(3)　$\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b$ ($a+b \geq 3$) の Segre embedding, 又は

$\mathbb{P}^m$ ($m \geqq 2$) の degree d ($\geqq 2$) の Veronese embedding の affine cone の頂点 (に対応する local ring) は rigid ([G.-K.], [S.2])
現在、知られているのは、本質的にはこれだけである。
◦ 0 次元 ◦ 1 次元 ◦ 2 次元 normal
な rigid singularity の存在はわかっていない。

さて、<u>normally flat deformation</u> $(\bar{R}, \bar{f}, \bar{s})$ を次のように定義する：(i) $(\bar{R}, \bar{f})$ は deformation

(ii) $\bar{m} = \ker \bar{s}$ とするとき、$gr_{\bar{m}}(\bar{R})$ は flat / A

(**)
$$\begin{tikzcd}
R \arrow[dr, "s"] & & \bar{R} \arrow[ll] \arrow[dr, "\bar{s}"] & \\
& k & & A \arrow[ll] \\
k \arrow[uu, "f"] \arrow[ur, "1_k"] & & A \arrow[ll] \arrow[uu, "\bar{f}"] \arrow[ur, "1_A"'] &
\end{tikzcd}$$

deformation functor の時同様、自然な同値関係が定義できて、

$ND_R(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ A$ 上の R の normally flat deformation の同値類 $\}$
とすれば、ND_R も $\mathcal{C}$ から $\{\text{sets}\}$ への functor となる。

<u>例</u> $P = k[\![x, y]\!]$, $f = y^2 - x^3$, $R = P/(f)$
$A = k[\varepsilon]$ とするとき、$\bar{f} = y^2 - x^3 + \varepsilon \cdot x^e$ ($e \geqq 2$)
とすると、$\bar{R} = P \otimes A / (\bar{f})$ は normally flat deform. を与える。$e \geqq 3$ の時は、$\bar{R} \xrightarrow{\varphi} R \otimes A$ とする φ で、k 上では R の identity を reduce する φ

が存在するので、trivial な normally flat deformation
になる。

$S = gr_{m_R}(R)$ の conical deformation（すなわち、
pair $(\bar{S}, \bar{g})$ で、deformation で、$\bar{S}$ が A 上 graded,
$\bar{S} \to \bar{S} \otimes_A k \simeq S$ が grade を保つもの）に対応する
functor を CD_S とすると、normally flat deformation
$(\bar{R}, \bar{f}, \bar{S})$ に対し、$(gr_{\bar{m}}(\bar{R}), gr(\bar{f}))$ を対応させる
ことにより、functors の morphism $u : ND_R \longrightarrow CD_S$
が得られる。また、$\bar{S}$ を忘れることにより、$v : ND_R \to D_R$
が得られる。この 2 つの morphisms について、

<u>定理 3</u> ([K]) $u : ND_R \longrightarrow CD_S$ は smooth.

<u>定理 4</u> ([K]) $K = \ker(ND_R(k[\varepsilon]) \to D_R(k[\varepsilon]))$
とすると、

$$\dim_k K = \max\{ l \in \mathbb{N} \mid S \simeq S' \otimes_k k[x_1, \cdots, x_r] \text{ as gr. ring for some gr. } k\text{-algebra } S' \}$$

が成り立つ。1 次元（curve）singularity の場合、
定理 4 より $\dim_k K \leq 1$。従って

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & ND_R(k[\varepsilon]) & \longrightarrow & D_R(k[\varepsilon]) \\ & & & & \downarrow & & \| \\ & & & & CD_S(k[\varepsilon]) & & T^1_R \end{array}$$

系　$\dim R = 1$ のとき

$$\dim_k CD_S(k[\varepsilon]) \geqq 2 \Rightarrow R : \text{not rigid}$$

ということがいえる。また、

定理5　R が unibranch curve singularity のとき

$$gr_{m_R}(R) \simeq S_0 \otimes_k k[t]$$

（但し、S_0 は 0-次元 graded k-algebra）

ということから、unibranch ならば $\dim_k K = 1$。（[注] これは2次元以上ではいえない。）$S = gr_m(R)$ について、定理1のことから、$T_S^1 = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} T_S^1(\nu)$ と grade ごとに分けることができる。

定理6　前定理の仮定のもとに、

$$CD_S(k[\varepsilon]) \cong T_S^1(0)$$
$$\cong \bigoplus_{\nu \leq 0} T_{S_0}^1(\nu)$$

以上のことから、次のことが得られる。

系　定理5の仮定のもとに、

$$\bigoplus_{\nu \leq 0} T_{S_0}^1(\nu) \geqq 2 \Rightarrow R : \text{not rigid}$$

文　献

[G-K] Grauert, Kerner : Deformationen von Singularitaten komplexer Räume, ~~Inv. Math. 15~~ Math. Ann. 153 (1964)

[K] Y. Koyama : Normally flat deformations of isolated singularities I, 修士論文

[L-S] Lichtenbaum. Schlessinger : On the cotangent complex of a morphism, Trans. A.M.S. 128 (1967)

[R] D.S. Rim : Torsion differentials and deformations Trans. A.M.S. 169 (1972)

[S1] M. Schlessinger : Rigidity of quotient singularities Inv. Math. 14 (1971)

[S2] ―――― : On Rigid singularities Rice Univ. Studies vol. 59 (1973)

Buchsbaum ring について

都立大　下田保博

$(A, \mathfrak{m})$ を d-dim local ring. $a_1, a_2, \cdots, a_d$ を parameter system of A. $\mathfrak{q} = (a_1, \cdots, a_d)$ とおく. ここでは $\mathcal{R}(A, \mathfrak{q}) = A[a_1X, \cdots, a_dX]$ と A の Buchsbaum 性について調べる。軽井沢のときには $d \leqq 3$ 以下しかわかっていなかったが、その後、日大の後藤さんとの共同研究によって一般次元の時についての考察もできたのでここに紹介します。なお、この結果はまとめて共著で論文にするつもりです。

<u>Main Theorem</u>　$(A, \mathfrak{m})$: d-dim local ring とする. 次は同値

(i) $\mathcal{R}(A, \mathfrak{q})$: C.M for every parameter ideal $\mathfrak{q}$.

(ii) $\mathfrak{m}H^1_\mathfrak{m}(A) = 0$ かつ $H^i_\mathfrak{m}(A) = 0$ for $i \neq 1, d$

このとき　A は Buchsbaum ring で　$I(A) = \binom{d-1}{1} \dim_k H^1_\mathfrak{m}(A)$.

まず (i) ⇒ (ii) への証明の準備から始める。以下 $\mathcal{R}(A, \mathfrak{q})$: C.M とする.

<u>lemma 1</u>　$d \geqq 3$ とする.

$\mathfrak{q}^2 \cap (a_1, \cdots, a_{d-1}) \ni r$ とすると $r a_d^{d-3} \in (a_1, \cdots, a_{d-1})\mathfrak{q}^{d-2}$

(proof)　$r = a_1 r_1 + \cdots + r_{d-1} a_{d-1}$ に a_d^{d-2} をかける.

$$r a_d^{d-2} = a_1 a_d^{d-2} r_1 + \cdots + a_{d-1} a_d^{d-2} r_{d-1}$$

よって　$a_d (r a_d^{d-3} X^{d-1}) = a_1 a_d^{d-2} X^{d-1} + \cdots + a_{d-1} a_d^{d-2} r_{d-1} X^{d-1}$

$$\equiv a_1 a_d^{d-2} r_2 X^{d-2} + \cdots + a_{d-2} a_d^{d-2} r_{d-1} X^{d-2} \quad (\mathrm{mod}\ a_1X, a_1 + a_2X, \cdots, a_{d-1}X + a_{d-2})$$

$$\equiv \cdots \equiv a_1 a_d^{d-2} r_{d-1} X \equiv 0 \quad (\quad〃\quad)$$

∴ $a_d, a_{d-1}X + a_{d-2}, \cdots, a_2X + a_1, a_1X$: $\mathcal{R}_{(\mathfrak{M}, \mathcal{R}_+)}$-reg seq より

$$r a_d^{d-3} X^{d-1} \in (a_1X, a_1 + a_2X, \cdots, a_{d-1}X + a_{d-2})_{(\mathfrak{M}, \mathcal{R}_+)}$$

従って $\exists f \in (\mathfrak{m}, \mathfrak{R}_+)$ ($=M$ とおく) s.t. $f \cdot (r a_d^{d-3} X^{d-1}) \in (a_1 X, a_1 + a_2 X, \cdots, a_{d-1}X + a_{d-2})$
ここで $f(X)$ の定数項は A の unit より 上の X^{d-1} の係数を比較すると
$$r a_d^{d-3} \in (a_1, \cdots, a_{d-1}) q^{d-2}.$$

<u>lemma2</u> $(a_1, \cdots, a_{d-1}) : a_d^2 = (a_1, \cdots, a_{d-1}) : a_d$ 従って $(a_1, \cdots, a_{d-1}) : a_d^l$
$= (a_1, \cdots, a_{d-1}) : a_d$. for $\forall l \geq 1$. ただし ここでは $d \geq 1$ として おく.

(proof) $d = 1$ のとき, a_1 : N.Z.D on A より O.K.

$d = 2$ のとき, $r \in (a_1) : a_2^2 \to r a_2^2 = A a_1$ かつ $r a_2 (a_1 X + a_2)$
$= a_1 (r a_2 X) + A a_1$ $\therefore$ $r a_2 \in (a_1)_M$ よって $r a_2 \in (a_1) A$.
$\therefore$ $r \in (a_1) : a_2$.

$d \geq 3$ のとき, $y \in (a_1, \cdots, a_{d-1}) : a_d^2$ とすると $y a_d^2 \in (a_1, \cdots, a_{d-1}) \cap q^2$.
lemma1 より $y a_d^{d-1} \in (a_1, \cdots, a_{d-1}) q^{d-2}$. よって $y a_d^{d-1} = a_1 x_1 + \cdots + a_{d-1} x_{d-1}$
ここで $x_i \in q^{d-2}$.

$$y a_d (a_{d-1} X + a_d)^{d-2} = y a_d \left(a_{d-1}^{d-2} X^{d-2} + \binom{d-2}{1} a_{d-1}^{d-3} X^{d-3} a_d + \cdots + a_d^{d-2} \right)$$
$$\equiv y a_d^{d-1} \quad (\mathrm{mod}\ a_1, a_1 X + a_2, \cdots, a_{d-2} X + a_{d-1}, a_d X)$$
$$\equiv a_1 x_1 + \cdots + a_{d-1} x_{d-1} \quad (\quad " \quad)$$
$$\equiv a_2 x_2 + \cdots + a_{d-1} x_{d-1} \quad (\quad " \quad)$$
$$\equiv a_1 x_2 X + \cdots + a_{d-2} x_{d-1} X \quad (\quad " \quad)$$
$$\equiv \cdots \equiv a_1 (x_{d-1} X^{d-2}) \equiv 0 \quad (\quad " \quad)$$

よって $y a_d \in (a_1, a_1 X + a_2, \cdots, a_{d-2} X + a_{d-1}, a_d X)_M$
従って $y a_d \in (a_1, a_2, \cdots, a_{d-1})$.

<u>Theorem1</u> $\mathfrak{R}(A, q)$: C.M for every parameter ideal q
$\Rightarrow$ A : Buchsbaum ring.

(proof) ○ Stückrad-Vogel (J. Kyoto. Math 13.) の Th 5 の同値条件を使う。

A : Buchsbaum ring $\Longleftrightarrow$ $a_1, \cdots, a_d$: 任意の parameter system に対して
$a_1, \cdots, a_{d-1}, a$: parameter となるような $a \in \mathfrak{m}$ をとると
$(a_1, \cdots, a_{d-1}) : a = (a_1, \cdots, a_{d-1}) : a_d$.

lemma 2 より $r \in (a_1, \cdots, a_{d-1}) : a_d$ をとると $a_1, \cdots, a_{d-1}, a_d$: s.o.p だから
$a^l \in (a_1, \cdots, a_d)$ for $\exists l > 0$. $\therefore r \in (a_1, \cdots, a_{d-1}) : a^l = (a_1, \cdots, a_{d-1}) : a$
逆も成り立つから A は Buchsbaum ring.

さて $(A, \mathfrak{m})$: Buchsbaum ring のときに $a \in \mathfrak{m}$: s.o.p の一部をとり
$U(aA)$ を考察してみることにしよう。

<u>lemma 3</u> $U(aA)$ は A-mod として $\operatorname{depth}_A U(aA) \geq 2$.

(proof) 今我々が考えているのは Main Th の (i) or (iii) の条件が成り立つものの中であるから (i) or (iii) から $\operatorname{depth} A > 0$ がでてくる。この時 A は Buchsbaum ring になるから、lemma 3 のように a をとると a は N.Z.D on A. 従って $U(aA)$ でも N.Z.D になる。$\{a, b\}$ が s.o.p の一部になるような b をとると a, b は $U(aA)$-reg になる。これは Buchsbaum ring の簡単な性質からでる。

<u>lemma 4</u> $a_1 = a, a_2, \cdots, a_d$: A の s.o.p とする。$\mathfrak{q} = (a, a_2, \cdots, a_d)$ とおく。
$\mathfrak{q}^n \cap U(aA) = a\mathfrak{q}^{n-1}$ for $\forall n \geq 1$ が成立する。

(proof) $\mathfrak{q}^n \cap U(\mathfrak{q}_k A) = \mathfrak{q}_k \mathfrak{q}^{n-1}$ ($\forall n \geq 1$, $0 \leq \forall k \leq d$) を示せば充分
ただし $\mathfrak{q}_k = (a_1, \cdots, a_k)$ とする。
$k = d$ のとき o.k
$k < d$ として $k+1$ で o.k とすると
$$\mathfrak{q}^n \cap U(\mathfrak{q}_k) \subset \mathfrak{q}^n \cap U(\mathfrak{q}_{k+1}) = \mathfrak{q}_{k+1}\mathfrak{q}^{n-1} = \mathfrak{q}_k \mathfrak{q}^{n-1} + a_{k+1}\mathfrak{q}^{n-1}.$$
$x \in \mathfrak{q}^n \cap U(\mathfrak{q}_k) \longrightarrow x = y + a_{k+1} f$ とかける。
$n = 1 \Rightarrow a_{k+1} f \in \mathfrak{q}_k$ $\therefore x \in \mathfrak{q}_k$ でよい。
~~n > 1 とする~~

$n \geqq 2$ とする. $f \in U(q_k) \cap q^{n-1} = q^{n-2} q_k$ より

$x = y + a_{k+1} f \in q_k q^{n-1}$.

ここで $\bar{A} = A/(aA)$, $\bar{q} = q\bar{A}$ とおく。

$0 \longrightarrow I \longrightarrow R(A, q) \longrightarrow R(\bar{A}, \bar{q}) \longrightarrow 0$ なる exact seq が

とれるが $I = \oplus\, q^n \cap U(aA) = U(aA) \oplus aA \oplus aq \oplus \cdots$

とかける。(lemma 4). 今 $f = (0, a, 0, 0 \cdots)$ とおくと

(*) $0 \longrightarrow U(aA) \longrightarrow R(A, q)/fR(A,q) \longrightarrow R(\bar{A}, \bar{q}) \to 0$: exact.

この時 次が成り立つ。

<u>Theorem 2</u> (A, m) : Buchsbaum ring. $d = \dim A$

$\Rightarrow \operatorname{depth}_A U(aA) = \operatorname{depth} R - 1$ for $\forall a \in m$: s.o.p の一部.

ただし $\operatorname{depth} R$ は R_M の depth とする。

(proof) $d \leqq 2$ ならば, R は C.M より O.K

$d = 3$ のときは (*) より $\bar{R}$: C.M より $\operatorname{depth} \bar{R} = 3$. よって 上の式が成り立つ.

$d \geqq 4$ とする。$\bar{A}$: Buchsbaum ring より (*) と同様の式

(**) $0 \to U(\bar{a}_2 \bar{A}) \to R(\bar{A}, \bar{q}) \to R(A_2, q_2) \to 0$

ただし $A_2 = \bar{A}/(\bar{a}_2 \bar{A})$, $q_2 = \bar{q} A_2$ とする。

$\operatorname{depth} U(\bar{a}_2 \bar{A}) = \lambda$ とおく. $\lambda \geqq 3$ のとき.

$2 \leq i \leq d-1$ について $H_m^i(U(\bar{a}_2 \bar{A})) \cong H_m^i(\bar{A}) \cong H_m^i(A/a_1 A)$ が成立.

$\cong H_m^i(A) \oplus H_m^{i+1}(A)$

よって $\begin{cases} H_m^i(A) = 0 & i \leqq \lambda - 1 \\ H_m^{\lambda}(A) = 0, & H_m^{\lambda+1}(A) \neq 0 \end{cases}$ $\therefore \operatorname{depth} A = \lambda + 1 \geqq 4$

$\therefore H_m^i(U(a_1 A)) = H_m^i(A)$ より $\operatorname{depth} U(a_1 A) = \lambda + 1$.

ここで (*) と $\bar{A}$ についての ind より $\operatorname{depth} R = \lambda + 2$..

$d=2$ の時. $H_m^2(A)=0$ とすると

$0 \to U(\mathfrak{a}A) \to A \to A/U(\mathfrak{a}A) \to 0$ から

$$0 \to H_m^1(U(\mathfrak{a}A)) \to H_m^1(A) \to \underset{\displaystyle H_m^1(A)\oplus H_m^2(A)}{\overset{\displaystyle H_m^1(A/U)}{\parallel}} \to H_m^2(U(\mathfrak{a}A)) \to 0$$

従って $H_m^1(U(\mathfrak{a}A)) = H_m^2(U(\mathfrak{a}A)) = 0$. $\therefore \operatorname{depth} U(\mathfrak{a}A) \geqq 3$.

(*) と $\bar{A}$ での ind より $\operatorname{depth} R/\mathfrak{A}R \geqq 3$ $\therefore \operatorname{depth} R = \operatorname{depth} U(\mathfrak{a}A)+1$.

$H_m^2(A) \neq 0 \to \operatorname{depth} U(\mathfrak{a}A)=2$ (*) と ind より $\operatorname{depth} R/\mathfrak{A}R = 2$.

$\therefore \operatorname{depth} R - 1 = \operatorname{depth} U(\mathfrak{a}A)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) の proof ; Th 1 より A : Buchsbaum ring. Th 2 より

$\operatorname{depth} U(\mathfrak{a}A) = d$ $\therefore U(\mathfrak{a}A)$: C-M A-mod.

今 $H_m^1(A)=0 \Rightarrow U(\mathfrak{a}A) \cong A$ $\therefore$ A : C.M より (ii) は成立.

$H_m^1(A) \neq 0$ とする. i.e. $\operatorname{depth} A = 1$ かつ $U(\mathfrak{a}A)$: C.M A-mod

$0 \to U(\mathfrak{a}A) \to A \to A/U \to 0$ より

$$H_m^i(U(\mathfrak{a}A)) \to H_m^i(A) \to \underset{\displaystyle H_m^i(A)\oplus H_m^{i+1}(A)}{\overset{\displaystyle H_m^i(A/U)}{\parallel}} \to H_m^{i+1}(U(\mathfrak{a}A)) \text{ : exact.}$$

$H_m^i(U(\mathfrak{a}A))=0$ for $i \neq d$ より $H_m^i(A)=0$ for $i \neq 1, d$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) の proof ; 条件より A は Buchsbaum ring. Th 2 より

$U(\mathfrak{a}A)$: C.M ring $\dim U(\mathfrak{a}A)=d$ をいえば充分.

これを d についての induction でいう. $d \leqq 2$ 以下は o.k

$d \geqq 3$ として $d-1$ まで o.k とする。その時は (*) での $R(\bar{A}, \bar{\mathfrak{q}})$: C.M になっている。

さて $H_m^i(A/U) = H_m^i(A) \oplus H_m^{i+1}(A) = 0$ $(1 < i < d-1)$

また $H_m^0(A/U)=0$ ($A/U(\mathfrak{a}A)$ の depth >0 より)

そこで $H_m^i(A/U(\mathfrak{a}A)) \to H_m^{i+1}(U(\mathfrak{a}A)) \to H_m^{i+1}(A)$ から

$H_m^i(\mathfrak{n}A)=0$ for $3 \leq i \leq d-1$.

また $H_m^1(A/\mathfrak{v}) = H_m^1(A) \oplus H_m^2(A) = H_m^1(A)$ から、

$$0 \to H_m(A) \xrightarrow{\sim} H_m^1(A/\mathfrak{v}) \to H_m^1(\mathfrak{v}(\mathfrak{n}A)) \to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{H_m^2(A)}}$$

$\therefore$ $H_m^2(\mathfrak{v}(\mathfrak{n}A))=0$. $\therefore$ $\mathfrak{v}(\mathfrak{n}A)$ は C.M d-dim. A-mod.

<u>example</u> Main Th. の条件をみたす例は?

k: field. $X_1, \cdots, X_d$, $Y_1, \cdots, Y_d$: indeterminates.

$$A = k[[X_1, \cdots, X_d, Y_1, \cdots, Y_d]] / (X_1, \cdots, X_d) \cap (Y_1, \cdots, Y_d)$$

$(d \geq 2)$

完全交叉となる半群環について

石田正典(東北大・理)

kを体とし，Sを単位元 0 を持つ加法的半群とすると，文字の集合 $\{e(m)\}_{m\in S}$ を基底とする k上のベクトル空間 $k[S]=\bigoplus_{m\in S} k\,e(m)$ は積を $e(m)e(m')=e(m+m')$ $\forall m,m'\in S$ と定めることにより k上の多元環となる。たとえば半群 $\mathbb{Z}_0=\{n\in\mathbb{Z}\mid n\geq 0\}$ に対し多元環 $k[\mathbb{Z}_0]$ が考えられるが $e(1)=X$ とおけば $k[\mathbb{Z}_0]$ は一変数多項式環 $k[X]$ であることがわかる。一般に半群の直和 $\mathbb{Z}_0^n=\mathbb{Z}_0\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_0$ に対しては $k[\mathbb{Z}_0^n]=k[X_1,\cdots,X_n]$ となることも明らかであろう。ここで $\mathbb{Z}^n$ を実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の格子点の集合と考えれば，半群 $\mathbb{Z}_0^n$ は $\mathbb{R}^n$ の第一象限 $C=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_i\geq 0\ i=1,\cdots,n\}$ と $\mathbb{Z}^n$ の交わりに等しいことに注意する。

さてわれわれは S としてある有限生成自由 $\mathbb{Z}$-加群 M の部分半群となっているものを考える。Sが有限生成つまり $\exists m_1,\cdots,m_n\in S$ で $S=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_0 m_i$ であれば多元環 $k[S]$ はk上 n個の元 $e(m_1),\cdots,e(m_n)$ で生成される。逆に k上有限個の元 $a_1,\cdots,a_n$, $a_i=\sum_{m\in S} a_{i,m}\,e(m)$

$i=1,\cdots,n$, $a_{i,m}\in k$ で各 i に対し有限個の m を除き $a_{i,m}=0$, で $k[S]$ が生成されていれば, S はその有限部分集合 $\{m\in S \mid \exists i, a_{i,m}\neq 0\}$ で生成されることは容易にわかる。したがって

<u>命題 1</u>　半群 $S\subset M$ が有限生成 $\Longleftrightarrow$ 多元環 $k[S]$ が k 上有限生成。

S が有限生成で $S=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_0 m_i$ とする。実ベクトル空間 $M_{\mathbb{R}}=M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ の有理多角錐 $C=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{R}_0 m_i$ $(\mathbb{R}_0=\{t\in\mathbb{R}\mid t\geq 0\})$ を考えると, 明らかにこれは S の生成系のとり方によらず, 半群 $M\cap C$ は S を含む。このとき多元環 $k[S]$ の正規性について次の結果がある。

<u>命題 2</u> ([1, Ch.1, §1, Lemma 1])　S が $\mathbb{Z}$-加群 M を生成しているとき $M\cap C=S$ となることが $k[S]$ が正規となる必要十分条件である。

証明) (必要性) 条件より $S-S=M$ であるから $\forall m\in M\cap C$ に対し $\exists m_1, m_2\in S$, $e(m)=e(m_1)/e(m_2)$ となり $k[M\cap C]$ は $k[S]$ の商体に含まれる。m を $M\cap C$ の任意の元とすれば, 正の整数 k で $km\in S$ となるものがあり, $e(km)=e(m)^k\in k[S]$. ここで $k[S]$ が正規であれば $e(m)\in k[S]$ すなわち $m\in S$ で $M\cap C=S$ を得る。(十分性) 有理多角錐は有限個の

有理半空間の交わりとして得られるから $C=\bigcap_{i=1}^{n}H_i$, H_i 有理半空間 $(i=1,\cdots,n)$ とする。このとき $k[S]=\bigcap_{i=1}^{n}k[M\cap H_i]$ であり, 各 $k[M\cap H_i]$ は M の階数を r とすれば $k[X_1,\cdots,X_r,X_1^{-1},\cdots,X_{r-1}^{-1}]$ と同型であるから UFD であり その交わり $k[S]$ は正規となる。

Gordan の補題 ([1, Ch.1, §1]) によれば $M_{\mathbb{R}}$ の任意の r-次元 有理多面錐 C (r は M の階数) に対し 半群 $M\cap C$ は 有限生成となる。よって 命題 2 により $k[M\cap C]$ は 正規環 となる。われわれは 半群環 という用語を 次のように制限された意味で用いる。

<u>定義</u> C を $M_{\mathbb{R}}$ の r-次元 有理多面錐で $C\cap(-C)=\{0\}$ を満たすとき $k[M\cap C]$ を <u>半群環</u> という。

$C\cap(-C)=\{0\}$ を仮定した理由は, もし $C\cap(-C)\neq\{0\}$ であれば 半群 $M\cap C$ は, そのある部分半群と $\{0\}$ でない自由 $\mathbb{Z}$-加群の直和となり 低い階数の M の半群環の議論に帰着できるからである。

N を M の双対加群 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z})$ とし

$$\langle\ ,\ \rangle : M\times N \longrightarrow \mathbb{Z}$$

を自然な双線型写像とする。$\langle\ ,\ \rangle$ は自然

に $M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ $(N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$ に拡張される。さて線型不等式論の一般論によれば任意の有理多角錐 $C \subset M_{\mathbb{R}}$ に対し $N_{\mathbb{R}}$ の有理多角錐 π でその双対錐

$$\pi^{\vee} = \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle x, a \rangle \geq 0 \quad \forall a \in \pi\}$$

が C と一致するものが唯一つ存在する。しかもそのとき等式

$$\dim C + \dim \pi \cap (-\pi) = \dim \pi + \dim C \cap (-C) = r$$

が成り立つので $\dim C = r$, $C \cap (-C) = \{0\}$ であれば $\dim \pi = r$, $\pi \cap (-\pi) = \{0\}$ となる。

さて半群環 $k[M \cap \pi^{\vee}]$ は常に Cohen-Macaulay 環であり (Hochster [2]) その双対化加群はイデアル $k[M \cap (\mathrm{int}\, \pi^{\vee})]$ と等しい ([1, Ch.1; Th 9, Th 14] または Stanley [3]) 但し $\mathrm{int}\, \pi^{\vee}$ は $\pi^{\vee}$ の内点より成る集合である。よって半群環が次数付き環の構造をもつことを考えれば, $k[M \cap \pi^{\vee}]$ が Gorenstein 環となる必要十分条件は $k[M \cap (\mathrm{int}\, \pi^{\vee})]$ が単項イデアルであることであり, 次の結果を得る。

<u>定理 3</u> (Stanley [3]) 半群環 $k[M \cap \pi^{\vee}]$ が Gorenstein 環 $\Longleftrightarrow$ $\exists m_0 \in M$, $M \cap (\mathrm{int}\, \pi^{\vee}) = m_0 + M \cap \pi^{\vee}$

しかしこの形ではこのような多角錐 $\pi^{\vee}$ がどの程度存在するか判定しにくい.

さて N をある同型により $\mathbb{Z}^r$ と同一視す

れば M はその双対加群 $\mathbb{Z}^r$ と自然に同一視される。また定理3の m_0 を含む M の基底が存在することに注意すれば $m_0=(1,0,\cdots,0)\in\mathbb{Z}^r$ となるように同型 $N\simeq\mathbb{Z}^r$ がとれることがわかる。

E を $\mathbb{R}^r=N_{\mathbb{R}}$ の超平面 $\{(1,c_2,\cdots,c_r)\in\mathbb{R}^r \mid c_2,\cdots,c_r\in\mathbb{R}\}$ とすれば $N_{\mathbb{R}}$ の r-次元の多角錐 π で $\pi\cap(-\pi)=\{0\}$ となるものに対して

$$(1,0,\cdots,0)\in \operatorname{int}\check{\pi} \iff E\cap\pi \text{ は } E \text{ の } (r-1)\text{次元の(有界な)多面体}$$

が成り立つ。そこで $m_0=(1,0,\cdots,0)$ に対する定理3の条件を多面体 $E\cap\check{\pi}$ の条件におきかえることにより次の定理を得る。

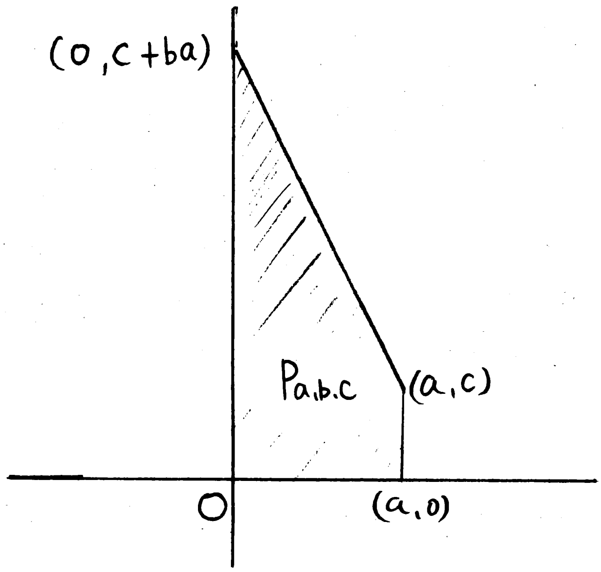
<u>定理4</u>　P を $\mathbb{R}^{r-1}$ の $(r-1)$-次元多面体でその頂点 $a_1,\cdots,a_s$ がすべて $\mathbb{Z}^{r-1}$ に含まれるとする。そのとき π を $\{(1,a_1),\cdots,(1,a_s)\}$ で生成される $\mathbb{R}^r$ の多角錐とすると半群環 $k[M\cap\check{\pi}]$ は Gorenstein 環となる。逆にすべての Gorenstein 半群環はこの形の半群環に同型である。また $k[M\cap\check{\pi}_1]$, $k[M\cap\check{\pi}_2]$ をそれぞれ多面体 P_1, P_2 に対する Gorenstein 半群環とすればそれらが同型である必要十分条件はある $\mathbb{Z}^{r-1}$ を $\mathbb{Z}^{r-1}$ の上にうつす $\mathbb{R}^{r-1}$ のアフィン変換により P_1 が P_2 に移されることである。但し半群環の同型は、半群の同型から引き起こされるもののみを考えている。

この定理により Gorenstein 半群環は格子点に頂点をもつ多面体の同値類により分類されることがわかる。さて k 上有限生成の環 A は $A \simeq k[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_m)$ $\dim A = n-m$ となるとき完全交叉と呼ばれるが よく知られているように完全交叉であれば Gorenstein環である。

<u>問題</u> 完全交叉となる半群環を決定せよ。

$r=2$ のときは定理4より容易にわかるように Gorenstein 半群環は $k[x, y, z]/(xy-z^n)$ (n はある自然数) と同型であり，したがって完全交叉である。しかし $r \geq 3$ の場合 完全交叉となる半群環はごくわずかしかないと思われる。$r=3$ のとき 定理4により Gorenstein 半群環はすべての頂点が $\mathbb{Z}^2$ に含まれる $\mathbb{R}^2$ の(凸)多角形の同値類全体で分類されるが，そのうち完全交叉となるものを次のように決定できる。

<u>定理5</u> a, b, c を非負整数で条件 (1) $a>0$，(2) $b \neq 0$ または $c \neq 0$ (3) もし $b \neq 0$ なら $c \geq a$，を満たすとする。そのとき $P_{a,b,c}$ を $\{(0,0), (a,0), (0, c+ba), (a, c)\} \subset \mathbb{Z}^2$ を頂点とする多角形とすれば，$P_{a,b,c}$ に対応する半群環 $k[M \cap \check{\sigma}]$ は $k[x, y, z, w, u]/(xz - w^b u^c, yw - u^a)$ と同型で完全交互となる。



逆に3次元の半群環が完全交叉であれば唯一組の (a,b,c) に対し $P_{a,b,c}$ に対応する半群環と同型である。

(注) 定理5において $P_{a,b,c}$ は $c=0$ のとき三角形で $c>0$ のとき四角形である。

さて半群環 $k[S]$, $S=M\cap\check{\tau}$ が完全交叉とし m を S の 0 以外の元とする。そのとき $M'=M\oplus\mathbb{Z}$, $M'\supset S\langle m\rangle = S+\mathbb{Z}_0(0,1)+\mathbb{Z}_0(m,-1)$ とおけば半群環 $k[S\langle m\rangle]$ は $k[S]$ 上 $e((0,1))$ と $e((m,-1))$ で生成され $k[S][x,y]/(xy-e(m))$ と同型であるから $\dim k[S\langle m\rangle]=\dim k[S]+1$ に注意すれば $k[S\langle m\rangle]$ も完全交叉であることがわかる。このように完全交叉となる半群環から1つ階数の高い M の完全交叉となる半群環

が帰納的に作られる。

<u>予想</u>　すべての完全交叉となる半群環は $k[\mathbb{Z}_0]$ から帰納的に構成できる。すなわち r 次元の半群環 $k[S]$ が完全交叉であれば $m_i \in \mathbb{Z}_0\langle m_1\rangle\cdots\langle m_{i-1}\rangle\setminus\{0\}$, $i=1,\cdots,r-1$ が存在して半群 S は $\mathbb{Z}\langle m_1\rangle\cdots\langle m_{r-1}\rangle$ と同型になる。

$r=2$ のとき $m_1=n>0$ とすれば $k[\mathbb{Z}\langle n\rangle] \simeq k[x,y,z]/(xy-z^n)$ で2次元 Gorenstein 半群環はこの形のものしかないので予想は正しい。また定理5から容易に $r=3$ でも予想の正しいことがわかる。一方多角錐 $C\subset M_{\mathbb{R}}$ は丁度 r 個の元で生成されるとき単体的多角錐と呼ばれるが、そのとき半群環 $k[M\cap C]$ は k 上 r 変数の多項式環の有限アーベル群の線形作用による不変部分環として現われる。このとき任意の r に対して，この予想の正しいことは，本シンポジウムの渡辺敬一氏の結果によりただちにわかる。

文献

[1] G. Kempf et al. Toroidal Embeddings I, Lecture Notes in Math. 339, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, New York (1973).

[2] M. Hochster, Rings of invariants ~~of~~ of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytope, Ann. of Math. 96 (1972), 318-337.

[3] R. P. Stanley, Hilbert Functions of Graded Algebras Advances in Math. 28 (1978) 57-84.

多項式環の不変部分環が完全交叉であるための条件について.

渡辺敬一(都立大・理)

§1. 序

$G \subset GL(n, \mathbb{C})$ を有限部分群とすると, Gは自然に $S = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ の上に作用する。このとき, 次の事が知られている。(S^G で S の Gによる不変部分環をあらわす。)

<u>定理</u> (Chevalley [2]), S^Gが多項式環と同型
$\Leftrightarrow$ Gは pseudo-reflection ($\mathrm{rank}(g-I)=1$ なる元)で生成されている。

<u>定理</u>. S^Gは Macaulay 環である ([5] 参照)

<u>定理</u> ([9]) Gが pseudo-reflection をもたないとき,
S^Gが Gorenstein 環 $\Leftrightarrow$ $G \subset SL(n, \mathbb{C})$.

ここで, 次の問題を考えたい.

<u>問題</u>. S^Gが完全交叉となるための条件を求めよ。

$n=2$ のときは次の事が良く知られている。

◇ (Klein?) $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ のとき, Gは巡回群, binadry dihedral, binary tetrahedral (order 24), binary octahedral (位数48), binary icosahedral (位数120) のいずれかで, [10] 参照 このとき, S^Gは超曲面 (生成元3つで, 1つの方程式で定義される) で, 重複度は 2 である。(有名な, "rational double point" である。) ([1] 参照).

つまり，$n=2$のとき，S^GがGorenstein $\Longleftrightarrow$ S^Gは超曲面となってしまう。この事実の証明はM. Artin とか J. Herzog の "maximal Cohen-Macaulay module" の議論を使った証明とか，本Symposiumの渡辺純三氏の証明なども考えられる。

$n=2$ のときは，非常にきれいな（余りにもきれいな）結果が出てしまったわけだが，$n=3$ となると一転して事態は雑然として来る。つまり 超曲面 $\Rightarrow$ 完全交叉 $\Rightarrow$ Gorenstein のどこも逆には成立しないような S^Gの例がある。

例1. $G=\langle(e_3, e_3, e_3)\rangle$ 又は $G=\langle(e_6, e_3, e_2)\rangle$ のとき

（e_nは1の原始n乗根，$(a_1, \cdots, a_n)$は対角線に$(a_1, \cdots, a_n)$を並べた対角行列を表すとする。）$G\subset SL(3, \mathbb{C})$ だから，S^Gは Gorenstein. しかし S^Gは完全交叉でない。

例2. $G=\left\langle \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & i & \\ & & -i \end{pmatrix} \right\rangle$ 又は $G=\left\langle \begin{pmatrix} e_7 & & 0 \\ & e_7^2 & \\ 0 & & e_7^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

又は $G=\left\langle \begin{pmatrix} e_n & & \\ & e_n^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ （nは奇数）のとき，

S^Gは生成元5つ関係式2つの完全交叉（従って超曲面でない）。

しかし，$n=3$のとき，$G\subset SL(3, \mathbb{C})$ で S^Gが完全交叉となるG（完全交叉 $\Rightarrow$ Gorensteinだから $G\subset SL(3, \mathbb{C})$ として十分）を全部しらみつぶしに見つけてみると（$G\subset GL(3, \mathbb{C})$の分類はあるから，手間と暇さえかければ可能な作業である。）次のようなまとめ方は可能である。

$n=3$で，$G \subset SL(3,\mathbb{C})$，$S^G$が完全交叉とするとき，

1°．Gは $\mathrm{rank}(g-I)=2$ なる gで生成されている。

2°．S^Gは 4つ または 5つの 元で生成されている。

3°．S^Gが超曲面のときは，Gは pseudo-reflectionで生成された群と $SL(3,\mathbb{C})$との共通部分として書く事ができる。

4°．S^Gの重複度は S^Gが超曲面のとき 2又は3，S^Gが5個の元で生成されているとき 4である。

1°に関しては Schlessinger の 次のような一般的な定理がある。

<u>定理</u>（[6]） $G \subset GL(n,\mathbb{C})$，$G$は pseudo-reflectionを含まず，$\forall g \in G$，$g \neq I$，$\mathrm{rank}(g-I) \geqq 3$ とすると，S^Gの特異点は "rigid singularity"（flat deformationをもたないsingularity）である。

完全交叉ならば deformationは完全にわかっていて，smooth deformation をもつから，特に，

<u>系</u>．定理の仮定の下に S^Gは決して完全交叉でない。

$n \leqq 3$ のときと，上の 結果をにらんで，作業仮説として，次のような予想を考えて見よう。（$G \subset SL(n,\mathbb{C})$，$S^G$は完全交叉とする。）

<u>予想1.</u> Gは $\{g \in G \mid \mathrm{rank}(g-I)=2\}$ で生成される。

<u>予想2.</u> S^Gは高々 $2n-1$ 個の元で生成される。

<u>予想3.</u> S^Gが超曲面なら，Gは pseudo-reflection で生成される群と $SL(n,\mathbb{C})$の交わりとして書き表わせる。

予想4. S^Gの重複度は2^{n-1}以下である。

S^Gが超曲面のときはS^Gの重複度はn以下である。

なお，予想1の逆は成立しない。また，予想3に関しては，次のStanleyの結果がある。

定理 (Stanley, [8]) $\tilde{G} \subset GL(n, \mathbb{C})$をpseudo-reflectionたちで生成された有限群，$G = SL(n, \mathbb{C}) \cap \tilde{G}$とおく。更に，

$$P = \left\{ L \subset \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} L\text{は}n\text{-}1\text{次元 linear sub.sp.で，}L\text{の各点を} \\ \text{fixする } \underbrace{g \in \tilde{G}}_{g \neq I} \text{が存在する,} \end{array} \right\}$$

$L \in P$に対し，$n_L = \{ g \in G \mid \forall x \in L,\ g(x) = x \}$，

$A = \{ n_L \,;\, L \in P \}$ とおく。このとき，

S^Gが完全交叉 $\Longleftrightarrow$ 集合Aは完全可約である。

但し，一般に，$A \subset \mathbb{Z}_+$に対して，次の二つの操作を考え，

1°. $A = A_1 \cup A_2$と分割する (disjoint union) 但し，そのとき，$\forall a \in A_1,\ \forall b \in A_2,\ (a, b) = 1$でなければならない。

2°. ある (分割した) 組に，公約数があれば，それで全体を (その組) 一斉に割って良い。その際もし1があらわれれば，取り除く。

この二つの操作ができないときAは既約，二つの操作で，空集合まで到達するとき，Aを完全可約という。例えば，

$\{2, 3, 6\}$は既約，$\{2, 4, 8, 3, 9, 27\}$は完全可約。

予想1〜予想4は，$n \leqq 3$の時と，GがAbel群のとき (今から述べる) は正しい。

§2. R_D と G_D の構成

以後，$G\subset GL(n,\mathbb{C})$ は有限アーベル群で対角化されているものとする。
簡単のため，次の記号を導入しよう。

$(e;i)$，$(e,e';i,j)$ でそれぞれ，第 (i,i) 成分に e
（第 (i,i) 成分に e，第 (j,j) 成分に e'）をもち，他の対角
成分が 1 であるような，対角行列をあらわすとする。
一般論の前に少し，例をあげておこう。

例 3. $G=\langle (e_m, e_m^{-1}; i, i+1); i=1,\cdots,n-1\rangle\subset GL(n,\mathbb{C})$
とすると，$S^G=\mathbb{C}[X_1^m,\cdots,X_n^m, X_1X_2\cdots X_n]$

$$\cong \mathbb{C}[Y_1,\cdots,Y_n,Z]/(Z^m-Y_1Y_2\cdots Y_n).$$

S^G が超曲面となるものはこの例で尽される。

例 4. $a_1, \ell_2,\cdots,\ell_{n-1}$ を正の整数，$\geqq 2$，$a_2=a_1\ell_2$, $a_3=a_2\ell_3$,
$\cdots$, $a_{n-1}=a_{n-2}\cdot\ell_{n-1}=a_n$ とおき，

$G=\langle (e_{a_i}, e_{a_i}^{-1}; i, i+1); i=1,\cdots,n-1\rangle$ とおくと，

$$S^G=\mathbb{C}[X_1^{a_1},\cdots,X_n^{a_n}, X_1X_2\cdots X_n, (X_2\cdots X_n)^{a_1},\cdots,(X_{n-1}X_n)^{a_{n-2}}]$$

$$\cong \mathbb{C}[Y_1,\cdots,Y_n,P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}]/(P_1^{a_1}-Y_1P_2, P_2^{\ell_2}-Y_2P_3,\cdots,P_{n-1}^{b_{n-1}}-Y_{n-1}Y_n).$$

例 5. $G=\langle (e_a, e_a^{-1}; 1,3), (e_{ab}, e_{ab}^{-1}; 1,2), (e_{ac}, e_{ac}^{-1}; 3,4)\rangle\subset GL(4,\mathbb{C})$
とすると，$S^G=\mathbb{C}[X_1^{ab}, X_2^{ab}, (X_1X_2)^a, X_3^{ac}, X_4^{ac}, (X_3X_4)^a, X_1X_2X_3X_4]$

$$\cong \mathbb{C}[Y_1,Y_2,U_1,Y_3,Y_4,U_2,P]/(U_1^b-Y_1Y_2, U_2^c-Y_3Y_4, P^a-U_1U_2).$$

上の3つの例で，生成元，関係式の形が極めて良く似ている
事がおわかりと思う。これを抽象化，一般化して，

<u>定義</u>　$I=\{1,\cdots,n\}$ と書く事にする。このとき special datum とは $D\subset 2^I$ と、$w: D\to\mathbb{Z}_+$ の組 (D,w) で（面倒だから、しばしば D と単に書くが）次の条件をみたすものとする。（$J\in D$ に対し、$w(J)$ を w_J と書く）

(1) $\forall i\in I$, $\{i\}\in D$.

(2) $J, J'\in D$ のとき、J と J' の間に包含関係が存在するか、又は $J\cap J'=\phi$ である。

(3) $J, J'\in D$, $J\subsetneqq J'$ のとき、$w_{J'}\mid w_J$ かつ、$w_{J'}<w_J$. また、$J\in D$ が（包含関係に関し）極大のとき、$w_J=1$.

(4). $J, J'\in D$ のとき、$J\subsetneqq J'$ でかつ、J と J' の間に D の元が存在しないとき、$J\prec J'$ とかく。

$J_1, J_2\prec J$ のとき、$w_{J_1}=w_{J_2}$.

<u>定義</u>　special datum (D,w) と $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ の組を <u>datum</u> と呼ぶ事にする。datum $(D,w,(1,\cdots,1))$ と special datum (D,w) を以後同一視する。

<u>定義</u>　datum $\mathcal{D}=(D,w,(a_1,\cdots,a_n))$ に対し、

$$R_{\mathcal{D}}=\mathbb{C}[X_J\mid J\in D] \quad \text{但し、}\ X_J=\Bigl(\prod_{i\in J} X_i^{a_i}\Bigr)^{w_J}$$
の S^G

例13, 4, 5 は それぞれ、special datum.

(例13) $(\{\{1\},\{2\},\cdots,\{n\},I\},w)$, $w_{\{i\}}=m$ $(\forall i\in I)$, $w_I=1$.

(例14) $(\{\{1\},\{2\},\cdots,\{n\},I,\{2,\cdots,n\},\{3,\cdots,n\},\cdots,\{n-1,n\}\},w)$,

$w_{\{i\}}=a_i$, $w_I=1$, $w_{\{i+1,\cdots,n\}}=a_i$

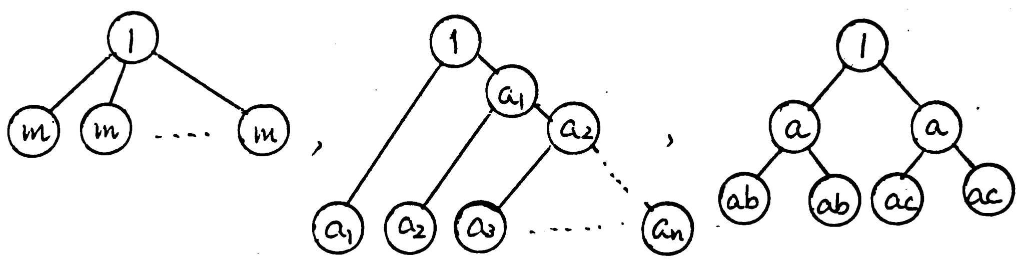
(例15) $(\{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{3\},\{4\},\{3,4\},I\},w)$,

$w_{\{1\}}=w_{\{2\}}=ab$, $w_{\{1,2\}}=w_{\{3,4\}}=a$, $w_{\{3\}}=w_{\{4\}}=ac$, $w_I=1$.

に関する $R_{\mathcal{D}}$ となっている事がおわかりと思う。

今のような記法は面倒なので，special datum に対する"グラフ"を定義しよう。 1°. $J \in D$ に対し ○ を書き，中に w_J を書く．

2°. $J < J'$ のとき，J, J' に対する丸を線で結び，J' に対するものが，上側に来るようにする。すると，例3, 4, 5 に対するグラフはそれぞれ，



となる。このグラフを使えば，n が小さい時に，すべての可能な datum を分類する事は容易であろう。

定義　$\mathfrak{D} = (D, w, (a_1, \dots, a_n))$ が datum のとき，$G_{\mathfrak{D}}$ を次のえたちで生成される $GL(n, \mathbb{C})$ の subgroup とする．

$$\{(e_{a_i}; i) \mid i \in I\},\ \left\{(e_{wa_{i_1}}, e^{-1}_{wa_{i_2}}\ ; i_1, i_2) \,\middle|\, \begin{array}{l} J_1, J_2 < J,\ i_1 \in J_1,\ i_2 \in J_2, \\ w = w(J_1) = w(J_2) \end{array} \right\}.$$

あきらかに，$\mathfrak{D}$ が special datum $\Longleftrightarrow G_{\mathfrak{D}} \subset SL(n, \mathbb{C})$.

また，$\mathfrak{D} = (D, w, (a_1, \dots, a_n))$ とし，$\mathfrak{D}' = (D, w)$ (special datum) とするとき，$R_{\mathfrak{D}} \cong R_{\mathfrak{D}'}$ はあきらかであろう。($X_i^{a_i} \longleftrightarrow X_i$ で得られる).

定理　$R_{\mathfrak{D}}$ は normal かつ complete intersection であり，(この部分では基礎体を $\mathbb{C}$ にせず，任意標数の任意の体で良い)，$R_{\mathfrak{D}} = S^{G_{\mathfrak{D}}}$ である。

(証明) 前半は $|D|$ に関する帰納法．(実は，$R_{\mathfrak{D}}$ の relation は $J_1, \dots, J_p < J$, $J = J_1 \cup \dots \cup J_p$ に対し，$X_J^{w_{J_i}/w_J} = \prod_{i=1}^{p} X_{J_i}$ の形のものに限る。) 後半は Galois 理論でできる。

§3. 主定理とその証明.

> **定理** $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ を有限Abel群（対角化されているものとする）とし，もし S^G が完全交叉であるならば，ある datum $\mathbb{D}$ が存在し，$G = G_{\mathbb{D}}$，$S^G = R_{\mathbb{D}}$ と書ける。

証明の前にいくつかの注意が必要である。

(1) S^G は単項式で生成される。また，$\forall i$，$X_i^{\ell_i} \in S^G$ となる ℓ_i が存在する。このとき，$(X_1^{\ell_1}, \cdots, X_n^{\ell_n})$ はあきらかに S^G のパラメーター系である。$S^G = \mathbb{C}[X_1^{\ell_1}, \cdots, X_n^{\ell_n}, M_1, \cdots, M_t]$ とするとき，$\bar{R} = S^G/(X_1^{\ell_1}, \cdots, X_n^{\ell_n})S^G$ の中で，M_i たちは巾零である。また単項式で生成された環の関係式は二項関係式で生成され

($\varphi : \mathbb{C}[Y_1, \cdots, Y_n, Y_{n+1}, \cdots, Y_{n+t}] \longrightarrow S^G$ を $\varphi(Y_i) = X_i^{\ell_i}$ $(i=1,\cdots,n)$，$\varphi(Y_i) = M_{i-n}$ $(n+1 \leq i \leq n+t)$ で定めると，$\mathrm{Ker}\,\varphi$ は (Y_iの単項式)－(Y_iの単項式) の形の元で生成される。)

S^G は normal だから，$M_i^x = M_j^y$ $(i \neq j)$ の形の関係式は存在しない。$\mathrm{Ker}(\varphi)$ は S^G が完全交叉のとき，丁度 t 個の元で生成されなければいけないから，その t 個の元は，

$$Y_{n+j}^{c_j} - (Y_i\text{たちの単項式}) \qquad (j=1, \cdots, t)$$

の形でなければならない。

(2). 一般に体 k 上の $\mathbb{N}^n$-graded Gorenstein ring R で $R_0 = k$ なるものに対し，$(0 = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{N}^n)$ R の canonical module K_R はある $d \in \mathbb{Z}^n$ に対し，$R(d)$ と $\mathbb{Z}^n$-graded R-module として同型である。(もちろんこの d は R に対し unique に決まる.) この d を $a(R)$ と書くことにすると，次の2つが成立する。

(2.1) (R. Stanley, [7]) $K_{S^G} = (S^G)_+$ 但し, $(S^G)_+$ は
$\{ X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \in S^G ;\ a_i > 0 \ (i=1,\dots,n) \}$ で生成された S^G の ideal である。

例 A. $G \subset SL(n,\mathbb{C}) \Longrightarrow a(S^G) = -(1,\dots,1)$. 逆に, S^G が Gorenstein で $a(S^G) = -(1,\dots,1) \Longrightarrow G \subset SL(n,\mathbb{C})$ (G; 対角化されているとして)

B. $\mathbb{D} = (D, w, (a_1,\dots,a_n))$ が datum のとき,
$a(R_D) = -(a_1,\dots,a_n)$.

(2.2) ([3], (2.2.8), (2.2.10) 参照) $R = k[Y_1,\dots,Y_{n+t}]/(F_1,\dots,F_t)$ が $\mathbb{Z}^n$-graded な多項式環の $\mathbb{Z}^n$-homogeneous な元 $F_1,\dots,F_t$ で, regular sequence をなすものによる剰余環 (つまり R; 完全交叉) とすると,

$$a(R) = -\sum_{j=1}^{n+t} \deg(Y_j) + \sum_{i=1}^{t} \deg(F_i). \quad (k は体).$$

(3). $J \subset I$, $S_J = \mathbb{C}[X_i \mid i \in J]$ とおくとき, G は S_J に作用し, $(S_J)^G = S_J \cap S^G$ であるが, もし S^G が完全交叉なら, $(S_J)^G$ も完全交叉である。(証明は n に関する帰納法で容易).

(4). G が対角化されているから, G に含まれる pseudo-reflection は $(e; i)$ (e; 1の巾根, $i \in I$) の形である。G の pseudo-reflection たち全部が生成する群を H とおくと,

$S^H = \mathbb{C}[X_1^{a_1},\dots,X_n^{a_n}]$

の形であり, G/H を linear basis $(X_1^{a_1},\dots,X_n^{a_n})$ に関して表現したものはもう pseudo-reflection をもたない. (最初にあげた定理より). 従って, もし S^G が Gorenstein なら, $G/H \hookrightarrow SL(n,\mathbb{C})$ である。この操作は一方に於て, ある datum D から special datum へ移行する操作と対応している。従って, 定理の証明のためには, $G \subset SL(n,\mathbb{C})$ として十分である。

これで一応準備はできたから, 定理の証明に入ろう。(1) で書いたように,

$S^G = \mathbb{C}[\underset{M_1}{\underset{\|}{X_1^{b_1}}}, \dots, \underset{M_n}{\underset{\|}{X_n^{b_n}}}, M_{n+1}, \dots, M_{n+t}]$ とし, S^G が完全交叉と仮定する。

また，nに関する帰納法を使うので，$J \subsetneq I$に対して，$(S_J)^G$は index set Jに関するある datum $\mathbb{D}$によって，$(S_J)^G = R_{\mathbb{D}}$となっていると仮定する。

M_iに対し，$\mathrm{Supp}(M_i) = \{ i \in I \mid X_i | M \}$とおく。

Step 1. $i \neq j$のとき $\mathrm{Supp}(M_i) \neq \mathrm{Supp}(M_j)$である。

(証明) $J = \mathrm{Supp}(M_i) = \mathrm{Supp}(M_j)$とする。$(S_J)^G$を考え，帰納法の仮定により，$J = I$として良い。しかし，$X_1 \cdots X_n \in S^G$だから，最小生成系$M$で，$\mathrm{Supp}(M) = I$なるものは高々1つで十分である。矛盾。

Step 2. $J_i = \mathrm{Supp}(M_i)$とおく。$i \neq j$のとき，J_iとJ_jは包含関係があるか，又は交わらない。

(証明) 結論を否定し，(i, j)として，$J_i \not\subset J_j$, $J_i \not\supset J_j$, $J_i \cap J_j \neq \phi$なもので，$J_i \cup J_j$が極小なものをとる。帰納法の仮定により，$J_i \cup J_j = I$として十分。このとき，$P = X_1 \cdots X_n$とおくと，$P | M_i M_j$だから，(1)で注意した事により，$P = M_k$ ($\exists k$)でかつ$\exists a$, $P^a = M_i M_j$. また，$P^a =$(単項式)なる関係式は1つしか存在し得ないから，$J_l \cup J_m = I$なる$\{l, m\}$は$\{i, j\}$に限る。$J_i \cup J_j$の最小性より，$\forall l$について，次のいずれかが成立する。

(i) $M_l = P$ (ii) $J_l \subset J_i$ (iii) $J_l < J_j$ 換言すれば，$S^G = \mathbb{C}[(S_{J_i})^G, (S_{J_j})^G, P]$である。$\varphi : \mathbb{C}[Y_1, \cdots, Y_{n+t}] \longrightarrow S^G$を(1)で書いたものとし，$\mathrm{Ker}(\varphi) = (F_1, \cdots, F_t)$とする。$(S_{J_i})^G$は$(S_{J_j})^G$はそれぞれ，帰納法の仮定より，$R_{\mathbb{D}_i}$, $R_{\mathbb{D}_j}$の形で，$R_{\mathbb{D}}$の形のringのrelationはよくわかっているから，$l \geq n+1$, $J_l \subset J_i$のとき，

$$F_l = Y_l^{v} - \prod_{m \in J_l'} Y_m$$

但し，$J_l' = \{ m ; J_m < J_l \}$, $v = w(J_l)/w(J_m)$.

degreeを計算すると，

$$\mathrm{degree}(F_l) = \sum_{J_m < J_l} \deg(Y_m) = \sum_{J_m < J_l} \deg(M_m) \cdots (*).$$

一方，$M_k = P$のとき，

$$\mathrm{degree}(F_k) = \deg(M_i) + \deg(M_j) \cdots (**).$$

$$a(S^G) = \sum_{l=n+1}^{n+t} \deg(F_l) - \sum_{l=1}^{n+t} \deg(M_l)$$

に (*), (**) を代入すると、次の式が容易に得られる。

$$a(S^G) = -\deg P + \sum \left\{ \deg(M_l) \;\middle|\; \begin{array}{l} J_l \text{は} J = J_i \cap J_j \text{に含まれるもの} \\ \text{で極大なもの。} \end{array} \right\}$$

しかし、我々は $G \subset SL(n, \mathbb{C})$ としたから、$a(S^G) = -\deg P = -(1, \cdots, 1)$ の筈であり、この矛盾は $J_i \cap J_j \neq \phi$ と仮定した事から起ったものである。

<u>Step 3.</u> $M_i = \left(\prod_{k \in J_i} X_k\right)^{w_i}$ の形である。

（証明）. まず、$J_i = I$ のとき、$M_i = P$. また、Step 2 の証明中で、$P^a = \prod_{J_k < I} M_k$ を見た。ゆえに、$M_k = \left(\prod_{i \in J_k} X_i\right)^a$ である。

この操作を下におりて行けば良い。

special datum の定義を思い出せば、定理の証明が終っている事がわかる。

注1. 定理は任意の体上の $\overset{\text{simplicial}}{\text{normal}}$ semigroup ring で完全交叉になるものの分類になっている。（つまり、$R = k[S]$, $S = L \cap \mathbb{N}^n$, L は $\mathbb{Z}^n$ の rank n の subgroup）.

注2. $n=3$ の場合は torus action に関する石田正典氏の分類がある。（本報告集にのっている (?)）

注3. $G \subset SL(n, \mathbb{C})$; 有限アーベル群, S^G が完全交叉のとき、R_D, G_D の定義より、予想1〜予想3はあきらかである。

予想4については後半はあきらか 後半については、$S^G = R_D = \mathbb{C}[X_J \,;\, J \in D]$ をパラメーター系 $\{X_J \mid J \text{は} D \text{の max. element}\}$ と、$\{X_{J'} - X_{J''} \mid J' < J, J'' < J \text{ for some } J \in D\}$ で割ったものを $\bar{R}$ とすると、$\bar{R}$ の長さは、$m(D) = \prod_{\substack{J \in D \\ |J| \geq 2}} \delta(J)$, 但し $\delta(J) = \#\{J' \in D \mid J' < J\}$ となる。

$\sum_{J \in D, |J| \geq 2} (\delta(J) - 1) = n - 1$ だから、$(R_D \text{の重複度}) \leq m(D) \leq 2^{n-1}$.

REFERENCES.

[1] M.Artin; On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math. 88 (1966), 129-136.

[2] C.Chevalley; Invariants of finite groups generated by reflections, Amer. J. Math. 67 (1955), 778-782.

[3] S.Goto-K.Watanabe; On graded rings,I. J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.

[4] ——— ;On graded rings, II, to appear in Tokyo J. Math.

[5] M.Hochster-J.Eagon; Cohen-Macaulay rings, invariant theory and the generic perfection of determinantal loci, Amer. J. Math. 93 (1971) 1020-1058.

[6]M.Schlessinger; Rigidity of quotient singularities, Invent. Math. 14 (1971), 17-26.

[7] R.Stanley; Hilbert functions of graded algebras, Adv. in Math. 28 (1978), 57-83.

[8] ——— ; Relative invariants of finite groups generated by pseudo-reflections, J. Alg. 49 (1977), 134-148.

[9] K.Watanabe; Certain invariant subrings are Gorenstein, I,II. Osaka J. Math. 11(1974), 1-8, 379-388.

[10] A.M.Cohen; Finite complex reflection groups, Ann. scient. E.N.S. 9 (1976), 379-436.

catenary でない pseudo-geometric normal domain の存在について

小駒哲司　　京大理

catenary でない noetherian ring については，Nagata [2] (Example 2) の例がよく知られている。しかしこの例では，normalization が catenary となるので，normal な noetherian ring は (universally) catenary かという問題が生まれた。まずこの問題を completion との関係について考える。すなわち次の結果を得た。

定理 1.　R を pseudo-geometric local domain とすると次は同値である。

(1) generic formal fiber は locally equi-dimensional.

(2) normalization は locally formally equi-dimensional.

KYOTO UNIVERSITY

No.

(3) normalization は universally catenary.

(4) henselization は catenary.

以下に(1)を満たさない pseudo-geometric domain を構成する。これが表題の例となっていることは定理1の(3)⇔(4)⇒(1)がわかれば十分であるが、これは[4](1.9)(1.11)などからも容易に導かれるので、定理1の証明は省略する。この例の構成には Rotthaus [3] の例を参考にした。

$\mathbb{Q}$ を有理数体，$\{a_i, b_j, c_k \mid i, j, k \in \mathbb{N}\}$ を不定元の集合とする。$K = \mathbb{Q}(\{a_i, b_j, c_k \mid i, j, k \in \mathbb{N}\})$ とおく。x, y, z, w を不定元とし，$S = K[x, y, z, w]_{(x, y, z, w)}$ とおけば，S は次元4の regular local ring である。

KYOTO UNIVERSITY

$\mathcal{P}$をSのprime elementの集合であって次の性質をもつものとする。

Sの高さ1のどのprime ideal $\mathfrak{q}$に対しても、$\mathfrak{q}$の生成元が$\mathcal{P}$の中にただ一つ存在する。

Sの元の個数は可算 したがって$\mathcal{P}$の元の個数も可算

よって $\mathcal{P}=\{p_k \mid k\in\mathbb{N}\}$ という形に書ける。

$$q_n=\prod_{k=1}^{n}p_k \qquad g_n=x+\sum_{k=1}^{n}a_k q_k^k$$

$$h_n=y+\sum_{k=1}^{n}b_k q_k^k \qquad l_n=z+\sum_{k=1}^{n}c_k q_k^k$$

とおこう。Sのprime ideal $\mathfrak{q}_n$ $(n\geq 0)$を

$$\mathfrak{q}_0=(x,y,z)S, \quad \mathfrak{q}_n=(g_n,h_n,l_n)S \quad n\in\mathbb{N}$$

で定義する。次の定理が成り立つ。

定理 2　次の条件を満たす番号づけ(双射)

$\Gamma: \mathbb{N}\longrightarrow\mathcal{P}$ が存在する。

No.

$\psi(k)=P_k$ とおいた時に，上の記号で $P_n \notin \mathcal{S}_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

この ψ を構成するには帰納的に行う。それについて次の定義をする。集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ を簡単に $[1, n]$ と書こう。 $\psi_n : [1, n] \longrightarrow \mathcal{P}$ が good map であるとは ψ_n は単射であって $P_k = \psi_n(k)$ $(k \in [1, n])$ とおいた時に $P_k \notin \mathcal{S}_{k-1}$ となるようなものとする。定理の証明には次の命題を示せば十分であることが容易にわかる。

命題　good map $\psi_n : [1, n] \longrightarrow \mathcal{P}$ と，どの $P_k = \psi_n(k)$ $(k \in [1, n])$ とも異なる $\mathcal{P}$ の元 P が与えられたとせよ。その時 ψ_n の拡張である good map $\psi_m : [1, m] \longrightarrow \mathcal{P}$ であって $P \notin \mathcal{S}_m$ となるようなものが $n \leq m \leq n+3$ となるように作れる。

KYOTO UNIVERSITY

これを証明するには次の補題を使う。

補題　Sと$\mathcal{P}$を上述のとおりとする。$\alpha\ (\in \mathfrak{m}-\mathfrak{m}^2)$, $\beta\ (\in \mathfrak{m}=(x,y,z,w)S)$, $P_1, \ldots, P_n\ (\in \mathcal{P})$ と $n_0\ (\in \mathbb{N})$をとったとしよう。今 $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ を S の prime ideal で $ht\,\mathfrak{q}_i \leq 3\ (0 \leq i \leq r)$, $\alpha \in \mathfrak{q}_0$, $(\alpha, \beta)S \not\subset \mathfrak{q}_j\ (1 \leq j \leq r)$ を満たすものとする。そのとき、どの $P_i\ (1 \leq i \leq n)$ とも異なる $\mathcal{P}$の元 P' で、$P' \notin \mathfrak{q}_0$ かつ $\alpha + \beta P'^{n_0} \notin \mathfrak{q}_j\ (1 \leq j \leq r)$ となるものが存在する。

補題の証明、及び補題を使っての命題の証明はそう容易であるとも言えないが長くなるので証明は省略。

$\mathcal{P} = \{P_n = \psi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ を定理2の番号づけとする。g, h, l を S の completion $\hat{S}$ の元で次の

ように定義されたものとする。

$$g = x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n^n \qquad h = y + \sum_{n=1}^{\infty} b_n q_n^n \qquad l = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q_n^n$$

これらは容易にわかるように $\hat{S}$ の元 $\sigma_{n+1}, \tau_{n+1}, \lambda_{n+1}$

によって $\hat{S}$ の中で

$$g = g_n + q_{n+1}^{n+1}\sigma_{n+1}, \quad h = h_n + q_{n+1}^{n+1}\tau_{n+1}, \quad l = l_n + q_{n+1}^{n+1}\lambda_{n+1}$$

という形に書ける。よって

$$g_n h_n = gh - q_{n+1}^{n+1}(g\tau_{n+1} + h\sigma_{n+1} - q_{n+1}^{n+1}\sigma_{n+1}\tau_{n+1}) \qquad (*)$$

$$g_n l_n = gl - q_{n+1}^{n+1}(g\lambda_{n+1} + l\sigma_{n+1} - q_{n+1}^{n+1}\sigma_{n+1}\lambda_{n+1})$$

という関係式が得られる。

L を S の商体とし L の元 ω_n, μ_m $(n, m \in N)$ を

$$\omega_n = \frac{g_n h_n}{q_n^n} \qquad \mu_m = \frac{g_m h_m}{q_m^m}$$

で定義する。すると次の関係式が成り立つ。

$$\omega_n = q_n P_{n+1}^{n+1}(\omega_{n+1} - a_{n+1}h_{n+1} - b_{n+1}g_{n+1} + a_{n+1}b_{n+1}q_{n+1}^{n+1}) \cdots (**)$$

No.

$$\mu_m = q_m P_{m+1}^{m+1}(\mu_{m+1} - a_{m+1} l_{m+1} - c_{m+1} g_{m+1} + a_{m+1} c_{m+1} q_{m+1}^{m+1})$$

次のように R を定義する。

$R' = S[\{\omega_n, \mu_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}]$, $R = R'(x, y, z, w) \subset L$

この R が求めるものであるが、それには次の (1)〜(5) を示せばよい。

(1) R は noether である。

$\mathfrak{q}$ を R の non-zero prime とすると R と S は同じ商体 L をもつから $\mathfrak{q} \cap S \neq 0$。 $p(\in \mathfrak{q} \cap S)$ を S の prime element とせよ。$n(\in \mathbb{N})$ を適当にとれば p は $p_n = \psi(n)$ に同伴となるが、R/pR は $(**)$ の関係式より S の準同型像となり noether である。よって $\mathfrak{q}$ は有限生成，故に R は noether である。

(2) $(g, h, l)\hat{S} \cap S = (0)$

No.

仮りに $\mathfrak{q}=(g,h,l)\hat{S}\cap S$ が zero ideal ではないとせよ。すると $\mathfrak{P}$ に属する prime element $P=P_n$ で $P_n\in\mathfrak{q}$ となるものが存在する。その時 $(g_{n-1},h_{n-1},l_{n-1})S\subset\mathfrak{q}$ となり、また作り方から $P_n\notin(g_{n-1},h_{n-1},l_{n-1})S=\mathfrak{q}_{n-1}$ である。$\mathfrak{q}_{n-1}$ は高さ3の prime ideal であるから $ht\,\mathfrak{q}\geqq 4$ となるが、それは $ht\,(g,h,l)\hat{S}=3$ であることに矛盾する([2](22.9))。

(3) $\hat{R}$ は $\hat{S}/(gh,gl)$ と S-同型である。

次の diagram を考えよう。i と j は自然単射であり P は自然射影である。

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[r, "j"] \arrow[dl, "i"'] & R \arrow[rr] \arrow[dl, "\hat{f}"] \arrow[dd, "f"] & & L\otimes_S T \\
\hat{S} \arrow[r, "\hat{j}"] \arrow[drr, "P"'] & \hat{R} \arrow[dr] & & & \\
& & \hat{S}/(gh,gl) \arrow[urr, bend right, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

である。$T=\hat{S}/(gh,gl)$ は (2) によって torsion free

KYOTO UNIVERSITY

No.

S-module であるから $h: T \to L \otimes_S T$ は単射

であり, 一方 (*) の式より 自然射 $R \to L \otimes_S T$ の

像は h の像に含まれることがわかる。よって

S-準同型 $f: R \to T$ が定義される。T は

complete で f は local hom であるから $\hat{f}: \hat{R} \to T$

が定義される。一方 (**) の式より $S/\mathfrak{m}^n \to R/\mathfrak{m}^n R$

は全射であるから $\hat{g}: \hat{S} \to \hat{R}$ は全射である

([2] (30.6))。再び (*) を使えば $\hat{g}(gh) \in q_n^n \hat{R}$ と

なるが n は任意であるから $\hat{g}(gh) = 0$. 同様

にして $\hat{g}(gl) = 0$. よって次の S-準同型を得る。

$$\hat{S}/(gh, gl) \xrightarrow{\hat{g}'} \hat{R} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{S}/(gh, gl)$$

$\hat{g}'$ は全射であり, $\hat{f} \circ \hat{g}'$ は identity であるから

$\hat{f}$ は S-同型である。

No.

(4) Rは pseudo-geometric である。

Lの標数は0だから(3)によってRの generic formal fiber は geometrically reduced である。一方 non-zero prime $\mathfrak{p}$ については $R/\mathfrak{p}$ はSの準同型像であるから点 $\mathfrak{p}$ の formal fiber は geometrically regular となる。よってRは pseudo-geometric である([1](7.6.4))。

(5) $\hat{R}(g,h,l)$ は generic formal fiber の localization であって equi-dimensional でない。

(2)及び(3)から明らかである。

参考文献

[1] A. Grothendic E. G. A. IV I. H. E. S.
Publications Mathematiques 24 1965

[2] M. Nagata Local rings, Interscience 1962

[3] C. Rotthaus Universell Japaniche Ringe mit nicht offenem regulärem Ort (to appear)

[4] H. Seydi Annaux Henseliens et conditions de chaines. Bull. Soc. math. France 98 1970 p 9-31

KYOTO UNIVERSITY