第10回

可換環論シンポジウム報告集

昭和63年度科学研究費総合Ａ

（課題番号　61302001.代表　小田　忠雄）

1988年10月26～10月29日

於　関西地区大学セミナーハウス

序

この報告集は，1988年10月26日から10月26日にかけて，関西セミナーハウスで行なわれた第10回可換環論シンポジウムの記録です。

このシンポジウムは，講演者の旅費と報告集の出版費を，東北大学の小田忠雄氏の科研費でまかないました。講演総数は20，参加者数は60名余りの，有意義で充実したセミナーを持てましたことを，参加して下さった方々に代わり深く感謝いたします。

会期中，ミニシンポジウムと称して，大学院生を中心とした小規模なセミナーを設けました。これは熱気のこもった有意義な企画であったと思います。私達が軽井沢で第1回のセミナーを開いた頃を思い出させる若い息吹を感じさせるものであり，ここに特記しても良いと思います。

１９８９年1月

Ｋ．Ｙ　生

可換環論シンポジウム

氏名	所属	氏名	所属
大塚　香代	京都大学教養部	下田　保博	
宮崎　充弘	京都大学理学部	後藤　四郎	日本大学文理学部
西村　純一	京都大学理学部	泊　昌孝	筑波大学数学系
秋葉　知温	京都大学教養部	渡辺　敬一	東海大学理学部
鈴木　敏	京都大学教養部	鈴木　直義	静岡県立大学薬学部
岩井　齋良	京都大学教養部	池田　信	岐阜教育大学
尼崎　睦実	京都大学数理解析研究所	岩田　恵司	岐阜教育大学
竹内　康滋	神戸大学教養部	山内　紀夫	岐阜教育大学
廣森　勝久	神戸大学教養部	松村　英之	名古屋大学理学部
柳原　弘志	兵庫教育大学	橋本　光晴	名古屋大学理学部
織田　進	兵庫教育大学大学院	川本　琢二	名古屋大学理学部大学院
菊池　徹平	奈良教育大学	長　行洋	名古屋大学理学部大学院
渡辺　純三	北海道東海大学工学部	関口ひでみ	名古屋大学理学部大学院
日高　文夫	専修大学北海道短期大学	金光　三男	愛知教育大学
石田　正典	東北大学理学部	吉田　憲一	岡山理科大学理学部
佐藤耕次郎	東北工業大学	佐藤　淳郎	岡山理科大学理学部大学院
菅谷　孝	富山大学理学部	有吉　栄二	岡山理科大学理学部大学院
浅沼　照雄	富山大学教育学部	成瀬　弘	岡山大学教育学部
小山　陽一	金沢工業大学	大石　彰	広島大学理学部
河合　秀泰	石川工業高等専門学校	伊藤　史郎	広島大学理学部
小野田信春	福井大学教育学部	五十川　読	広島大学理学部研究生
松田　隆輝	茨城大学理学部	石橋　康徳	広島大学学校教育学部
岡部　章	小山工業高等専門学校	清水池有治	広島工業大学
宮崎　誓	早稲田大学理工学研究科大学院	坂口　通則	広島修道大学
衛藤　和文	早稲田大学理工学研究科大学院	藤田　和憲	香川大学教育学部
寺川　宏之	早稲田大学理工学研究科大学院	奥山　廣	徳島大学総合科学部
神蔵　正	早稲田大学	青山　陽一	愛媛大学理学部
蔵野　和彦	東京都立大学理学部	小駒　哲司	高知大学理学部
石川　武志	東京都立大学理学部	谷本　洋	宮崎大学教育学部
中村　幸男	東京都立大学理学部大学院		

目　　　次

Buchsbaum 加群の surjectivity criterion について

日大・文理　後藤四郎

1．序文

このノートの目的は、次の定理(1.1) を証明することにある：

定理(1.1). $(R, \mathfrak{m})$ を Cohen-Macaulay 局所環で $\dim R \geqq 2$ のものとすれば、次の２つの条件は同値である。

(1) Rは正則である。

(2) MがBuchsbaum R－加群であれば、すべての $i \neq \dim_R M$ に対して自然な射

$$\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M) := \varinjlim_n \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}^n, M)$$

は、全射である。

よく知られているように、J. Stückrad とW. Vogel によってBuchsbaum 加群のコホモロジー的判定法が1980年に見出された：

定理(1.2)([1],[2]). Mを局所環 $(R, \mathfrak{m})$ 上の有限生成加群とする。もしも、すべての $i \neq \dim_R M$ に対して射 $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ が全射であれば、Mは、Buchsbaum である。（Rが正則であれば、逆も正しい。）

さらにこのとき、埋め込み $H_{\mathfrak{m}}^0(M) \subsetneq M$ によって、導かれる射 $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, H_{\mathfrak{m}}^0(M)) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, M)$ は、$0 \leqq i \leqq \dim_R M$ の範囲で単射となる。

この(1.2) はsurjectivity criterion と呼ばれ、様々な言い換えの後に、その有効性が今日では広く認められるに至っている。(もちろん我々の定理(1.1) の中の(1) ⇒ (2) は、J. Stückrad [1] による。) 一般に$\mathfrak{m}$ − adic な完備化を経由すればbase ring は正則と仮定できるので、この観点からは、(1.2) があれば十分であり(1.1) の主張はpedantic にすぎるという批判があるかもしれないけれど、しかし今日に至るまで(Rが正則でないとき) $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, M)$ から$H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ へ向かう射が全射でないBuchsbaum R − 加群は、実は、J. Stückrad [1] 中にただ1つの例が与えられているのみであることを考えると、正則でないCohen-Macaulay 局所環Rで$\dim R \geqq 2$ のものの上には必ずその様なSurjectitity を備えないBuchsbaum 加群が存在することを保証しておくのも、あながち無意味ではないと思う。

定理(1.1) の証明は次節で述べる。残念なことに、(1.1) から前提「Rは Cohen-Macaulay である」を取り除くことは、一般には不可能である。第3節で、(1.1) の条件(2) をみたしていて、しかし正則ではない局所環の例を、2つ与える。何がobstruction となっているのか、実は今日でも判然としていない。講演では、このobstruction の正体をみきわめるために行った作業についてかなり詳しく報告し、さらにいくらか明らかになったobstruction の1つを備える局所環の例を報告したが、このノートでは割愛したい。

なお講演は、日本大学文理学部における宮崎哲、下田保博両氏との共同研究を基礎にしている。両氏に謝意を表する次第である。

2. 定理(1.1) の証明

Rは、Cohen-Macaulay 局所環で$d = \dim R \geqq 2$ のものとする。Rの極大イデアル$\mathfrak{m}$の極小な生成系$x_1, x_2, \cdots, x_n$ をとくに、すべての$1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leqq n$に対して、$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_d}$ がRのs.o.p.をなすようにとっておく。次に、

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow R^n \xrightarrow[{[x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n]}]{} R \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

を、剰余体$R/\mathfrak{m}$のminimal free resolution の一部分とし、$\{e_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$によっ

て$F_1=R^n$の標準基底を表すことにすると、

$$L \ni f_{ij} = x_i e_j - x_j e_i$$

である。Kにより$\{f_{ij}\}_{1 \leqq i < j \leqq n}$で生成されたLのR－部分加群を表すことにしよう。最後に、

$$N = \mathfrak{m} L + K, \quad M = F_1/N$$

とおく。すると、

命題(2.1). Mは極大なBuchsbaum R－加群で$H^0_{\mathfrak{m}}(M) = L/N$である。

(2.1) の証明は後まわしにして、定理(1.1) の証明を先に済ませてしまうことにしよう。もちろん(1.1) 中の(2) ⇒(1) を示せば十分。(2.1) と仮定(1.1)(2) によると、すべての$i \neq d$に対して$\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M)$は全射であるから、(1.2) より$0 \leqq i \leqq d$の範囲で$\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, H^0_{\mathfrak{m}}(M)) \xrightarrow{j_*} \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M)$は単射である（但し$j : H^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow M$は埋め込みとする）。完全列

$$0 \longrightarrow L/N \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

から$H^0_{\mathfrak{m}}(M) = L/N$であるので、とくに$i=2$に対して

$$\mathrm{Ext}^2_R(R/\mathfrak{m}, L/N) \xrightarrow{j_*} \mathrm{Ext}^2_R(R/\mathfrak{m}, M)$$

は単射となる。上の射j_*は、剰余体$R/\mathfrak{m}$のminimal free resolution

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 = R^n \xrightarrow[{[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]}]{\partial_1} F_0 = R \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

から得られる2つのcomplexes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(F_1, L/N) \arrow[r, "\partial_2^*"] \arrow[d, "j_*"] & \mathrm{Hom}_R(F_2, L/N) \arrow[r, "\partial_3^*"] \arrow[d, "j_*"] & \mathrm{Hom}_R(F_3, L/N) \arrow[d, "j_*"] \\
\mathrm{Hom}_R(F_1, M) \arrow[r, "\partial_2^*"] & \mathrm{Hom}_R(F_2, M) \arrow[r, "\partial_3^*"] & \mathrm{Hom}_R(F_3, M)
\end{tikzcd}$$

によって計算される。このdiagram を追いつつ、可換図形

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\partial_2'"'] & F_1 \arrow[dd, "\varepsilon"] \\ L \arrow[d, "\tau"'] & \\ L/N \arrow[r, "j"'] & M = F_1/N \end{tikzcd}$$

（但し ε，τ は自然な全射を、$\partial_2' : F_2 \longrightarrow L$ は ∂_2 から導かれる全射を表す）を見れば、$\tau \circ \partial_2'$ のコホモロジー類 $\overline{\tau \circ \partial_2'}$ は j_* の核に含まれること、すなわち

$$\overline{\tau \circ \partial_2'} \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Ext}_R^2(R/\mathfrak{m}, L/N) \xrightarrow{j_*} \mathrm{Ext}_R^2(R/\mathfrak{m}, M))$$

が得られる。$\mathrm{Ext}_R^2(R/\mathfrak{m}, L/N) = \mathrm{Hom}_R(F_2, L/N)$ で j_* は単射であるから $\tau \circ \partial_2' = 0$ であって、したがって $L = N$。

中山の補題より $L = K$ で、これは $L = \mathrm{Ker}\,(R^n \xrightarrow[{[x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n]}]{} R)$ が Koszul relations $\{f_{ij}\}_{1 \leqq i < j \leqq n}$ で生成されることを意味するので、R は正則でなければならない。

次に(2.1)を証明しよう。完全列

$$0 \longrightarrow L/N \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

より

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) = \begin{cases} L/N & (i = 0), \\ R/\mathfrak{m} & (i = 1), \\ (0) & (i \neq 0, 1, d) \end{cases}$$

をうる。したがって M は（FLC）で、Buchsbaum Invariant $I_R(M) = \ell_R(L/N) + (d-1)$ をもつ。次の補題を必要とする。

補題(2.2) (N. V. Trung[3]). 局所環（$R, \mathfrak{m}$）上の有限生成加群 M が（FLC）をもつと仮定せよ。このとき M が Buchsbaum であるための必要十分条件は、$\mathfrak{m}$ の生成系 $y_1, y_2, \cdots, y_r$ を、次の性質(*)を満たすようにとれることである。

(*) 任意の $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqq r$ ($s = \dim_R M$) に対して、$\mathfrak{q} = (y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_s})R$ はMのパラメーターイデアルであってかつ、等式

$$\ell_R(M/\mathfrak{q}M) - e_{\mathfrak{q}}(M) = I_R(M)$$

が成立する。

この(2.2)によれば、我々のMは(FLC)をもちかつ $\dim_R M = d$ であるので、すべての $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leqq n$ に対して($\mathfrak{q} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_d})R$ とおいたのちに)等式 $\ell_R(M/\mathfrak{q}M) - e_{\mathfrak{q}}(M) = I_R(M)$ が成り立つことを示せばよいことがわかる。一方で、極大イデアル $\mathfrak{m}$ はR－加群としてBuchsbaum であって $I_R(\mathfrak{m}) = d-1$ をもちさらに $e_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{m}) = e_{\mathfrak{q}}(M)$ であるから、

$$\begin{aligned}\ell_R(M/\mathfrak{q}M) - e_{\mathfrak{q}}(M) &= \ell_R(M/\mathfrak{q}M) - e_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{m}) \\ &= \ell_R(M/\mathfrak{q}M) - [\ell_R(\mathfrak{m}/\mathfrak{q}\mathfrak{m}) - (d-1)] \\ &= [\ell_R(M/\mathfrak{q}M) - \ell_R(\mathfrak{m}/\mathfrak{q}\mathfrak{m})] + (d-1)\end{aligned}$$

をうる。したがって、前に注意しておいたように $I_R(M) = \ell_R(L/N) + (d-1)$ であったから、結局MがBuchsbaum であることをたしかめるには、上のような $\mathfrak{q}$ に対して等式 $\ell_R(M/\mathfrak{q}M) = \ell_R(L/N) + \ell_R(\mathfrak{m}/\mathfrak{q}\mathfrak{m})$ が成立すること、すなわち完全列 $0 \longrightarrow L/N \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow 0$ から導来された系列

$$0 \longrightarrow L/N \longrightarrow M/\mathfrak{q}M \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{q}\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

が再び完全であること、すなわち包含関係

$$L \cap \mathfrak{q}F_1 \subset N$$

が成立することをcheck すれば十分であることになる。次の(2.3)による。

claim (2.3). $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leqq n$ に対して、$\mathfrak{q} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_d})R$ とおくと、

$$L \cap \mathfrak{q}F_1 \subset K$$

となる。

(2.3) の証明． 一般性を失うことなく$\mathfrak{q}=(x_1, x_2, \cdots, x_d)$として十分である。$\mathfrak{q}F_1\subset\sum_{i=1}^{d}Re_i+K$であるから、$L\cap\sum_{i=1}^{d}Re_i\subset K$を示せばよい。

$l=\sum_{i=1}^{d}a_ie_i\in L$とすると、$\sum_{i=1}^{d}a_ix_i=0$。RはCohen-Macaulayで$x_1, x_2, \cdots, x_d$はRのs.o.p.であるから、$\sum_{i=1}^{d}a_ie_i=\sum_{1\leqq i<j\leqq d}b_{ij}(x_ie_j-x_je_i)$とあらわせる。すなわち $l=\sum_{i=1}^{d}a_ie_i\in K$である。

以上で定理(1.1) の証明が完成した。

3．反例

Mを局所環$(R, \mathfrak{m})$上のBuchsbaum 加群とし$t=\mathrm{depth}_R M$、$s=\dim_R M$とおく。とくに$t<s$であってかつ$H_{\mathfrak{m}}^{i}(M)=(0)$ $(i\neq t, s)$の場合には、射

$$\mathrm{Ext}_R^t(R/\mathfrak{m}, M)\longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^t(M)$$

が全射である（したがって、このようなMは必ず(1.1) の(2) の述べられた性質をもつ）ことはよく知られていて実際、容易にcheck できる([2])。これが定理(1.1) 中で、$\dim R\geqq 2$と仮定した理由でもある。全くおなじ理由から、$\dim R=2$のときには、環Rが(1.1) の条件(2) を満たすかどうかは、実は、$\dim_R M=\dim R=2$のBuchsbaum R－加群Mがすべて(1.1) の(2) に述べられた性質をもつかどうかによって定まることがわかる。

命題(3.1)． Rを２次元の局所整域で$e(R)=1$ではあるが、正則ではないものとする。このときRは(1.1) の条件(2) をみたす。

証明． R上には $\dim_R M=2$のBuchsbaum 加群Mがないことを示せば十分である。その様なMが存在したと仮定する。このときRは$\mathrm{End}_R M$に含まれるので、$\widehat{R}$は$\mathrm{End}_{\widehat{R}}\widehat{M}$の部分代数となる。よって、$\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}\widehat{R}$を任意にとると、$\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_{\widehat{R}}\widehat{M}$であるが、一方、$\widehat{M}$は$\widehat{R}$上のBuchsbaum 加群で$\dim_{\widehat{R}}\widehat{M}=2$をもつために、$\dim\widehat{R}/\mathfrak{p}=2$か

または $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\widehat{R}$ でなければならない。もちろん depth $\widehat{R} > 0$ であるから、$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\widehat{R}$。よってすべての $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,\widehat{R}$ に対して、$\dim \widehat{R}/\mathfrak{p} = 2$ —— これはRがunmixedであることを示しており、したがって永田の定理によりRは正則となる。これはRのとり方に反する。

命題(3.2). (P , $\mathfrak{n}$) を3次元の正則局所環とし $X \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{n}^2$ をとる。IはPのイデアル ($I \neq P$) で $\mathrm{ht}_P I \geqq 2$ とし $R = P/XI$ とおく。するとRは正則ではないが、(1.1) の条件(2) を満たす。

証明. 昨年のシンポジウムで報告したように、R上には2次元の直既約なBuchsbaum加群は、$R/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$, $R/\mathfrak{m}\mathfrak{p}$ (但し $\mathfrak{p} = XR$) の3つしか存在せず、これらの直和が(1.1) の(2) に述べられた性質をもつことは容易に確かめられる。

References

[1] Stückrad, J., Über die kohomologische Charakterisierung von Bychsbaum-Moduln, Math. Nachr., **95** (1980), 265-272.

[2] Stückrad, J. and Vogel, W., Toward a theory of Buchsbaum singularities, Amer. J. Math., **100** (1978), 727-746.

[3] Trung, N. V., Toward a theory of generalized Cohen-Macaulay modules. Nagoya Math. J. **102** (1986), 1-49.

正標数の多項式環の正規部分環について

富山大学　教育学部　浅沼照雄

体 k 上の 1 変数多項式環 $k[x]$ の k-form とは k のある代数的閉体 $\bar{k}$ に対して

$$\bar{k}\otimes_k A \cong_{\bar{k}} \bar{k}[x]$$

となる k-algebra A のことである。まずこのような $k[x]$ の k-form の structure について考えてみる。ここでいう k-algebra の structure とは k-algebra isomorphism を同一視して得られる同値類のことである。A が $k[x]$ の k-form ならばある有限次代数拡大体 k'/k が存在して

$$k'\otimes_k A \cong_{k'} k'[x]$$

がなりたつ。このことから A は k-affine normal domain of Krull dim $A = 1$ (i.e., dedekind ring) となる。k'/k が separable にとれるとき A は trivial (i.e., $A \cong k[x]$) になることは比較的容易に示すことができる。k'/k が separable にとれないときは，k' として，k' を含む k の正規拡大体 k'' を考えると明らかに

$$k''\otimes_k A \cong_{k''} k''\otimes_{k'}(k'\otimes_k A) \cong_{k''} k''[x]$$

がなりたつ。一方 k'' と k の中間体 k_i が存在して

k''/k_i ; separable かつ k_i/k ; purely inseparable

とできる。

$$k''\otimes_k A \cong_{k''} k''\otimes_{k_i}(k_i\otimes_k A) \cong_{k''} k''[x]$$

であるから $k_i\otimes_k A \cong_{k_i} k_i[x]$ がなりたつ。この同型により A は $k_i[x]$ の subring で $k_i[A] = k_i[x]$ をみたすものとしてよい。さらに

$$k_i^{p^e} \subset k$$

なる整数 e が存在する。ゆえ

$$k_i^{p^e}[A^{p^e}] = k_i^{p^e}[x^{p^e}] \subset k[x^{p^e}]$$

である。ここで $p>0$ は k の標数を表わす。結局 $k[x]$ の $k[x]$ の k-form の structure については次の条件をみたす affine normal k-domain A を調べることに帰着する。

(1) $k[x^{p^e}] \subset A \subset k^{p^{-e}}[x]$ where $\mathrm{ch}\, k = p > 0$, $e > 0$.

(2) $k^{p^{-e}}[A] = k^{p^{-e}}[x]$.

このような A で non-trivial な例が存在する。

例 1. $A = k[x^{p^e}, a_0 + x + a_1 x^p + \cdots + a_n x^{np}]$ $(a_i \in k^{p^{-e}})$ とおく。すると

$$\bar{k} \otimes_k A \cong \bar{k}[x]$$

さらに

$$A \cong k[x] \Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \in k$$

がなりたつ。

上の例 1 である a_i について $a_i \notin k$ とすれば A は non-trivial な $k[x]$ の k-form の例になっている。ゆえ non-trivial な $k[x]$ の k-form の structure を決定するという古典的な問題が生ずる。この問題は次の問題のごく特殊な場合でである。

問題 I. k を $\mathrm{ch}\, k = p \geq 0$ なる体, A は affine k-domain で

$$k \subset A \subset \bar{k}[x] \text{ where } \bar{k} \text{ is an algebraic closure of } k$$

をみたすとする。A が normal domain なるときの A の structure を決めよ。

この問題についても

$$k \subset A \subset k'[x] \qquad k'/k：有限次代数拡大体$$

と仮定してよい。k'/k が separable にとれるとき A は k の A における代数的閉体上の多項式環となる。ゆえ k-form のときと同様にして

$$k \subset A \subset k^{p^{-e}}[x]$$

をみたすとしてよい。

さらに問題をひろげて次の問題を考えてみよう。

問題 II　A を標数 $p>0$ なる k-affine Dedekind domain とする。A の structure を調べよ。

この問題IIは漠然としているがたとえば問題Iの解を与えるような A の structure theorem を見つけることと言いかえて考えてみる。

問題IIの A に関連してその separable prime ideal が存在するかどうかは興味ある問題である。ここで A の prime ideal $\mathfrak{p} \subset A$ が separable (resp. insep., purely insep.) とは $A/\mathfrak{p}$ が k 上 separable (resp. insep., purely insep.) なることをいう。ゆえとくに $k = k_s =$ separably closed field とすると $\mathfrak{p} \subset A$ が separable なることと rational (i.e., $A/\mathfrak{p} = k$) なることとは同値である。

例2.　$k \subset A \subset k(\alpha)[x]$，$\mathrm{ch}\, k = p > 0$，$\alpha \in k^{p^{-1}} \setminus k$ なる dedekind domain A は separable prime ideal をもつか？

この例2に関して答えは以下である。

$$A \text{ が separable prime ideal をもつ} \Leftrightarrow k(\alpha) \not\subset A$$

例3　$k \subset A = k[x, \alpha + \beta x] \subset k(\alpha, \beta)[x]$，$\mathrm{ch}\, k = p > 0$，$\alpha, \beta \in k^{p^{-1}} \setminus k$ かつ $[k(\alpha,\beta) : k] = p^2$

とおくとAはdedekind domainでseparable prime idealはもたない。

例4. $ch\,k \geqq 0$, A, Bをk上tr.deg.が1なるaffine k-domainで

$$A[X_1, \cdots, X_n] = B[Y_1, \cdots, Y_n]$$

とする。ここで$X_1, \ldots, X_n$はA上variable $Y_1, \ldots, Y_n$は多項式環$A[X_1, \ldots, X_n]$のn個の元である。ゆえ$B[Y_1, \ldots, Y_n]$も又B上多項式環となる。このようなA, BはA≠Bならばk'をAにおけるkの代数的閉包とおくと

$$A \underset{k'}{\cong} B \underset{k'}{\cong} k'[x]$$

となる。(アビヤンカー, イーキン, ハイエンツェル)

この例4の証明では例2で見たようなある条件をみたすdedekind domainのseparable prime idealの存在がkey pointになる。

以上のような問題及び例に関連したdedekind domainのstructure theoremを与えることが本稿の目的である。

以下pは素数で環の標数を表わす。

$$S \hookrightarrow A \hookrightarrow R$$

をintegral domainのinjectionの列とする。この列はdifferential moduleのexact sequence

$$\Omega_S(A) \otimes_A R \xrightarrow{\alpha} \Omega_S(R) \longrightarrow \Omega_A(R) \longrightarrow 0$$

をinduceする。このexact sequenceについて次の4つの条件がなりたつときRはS上Aに関してP^e-Galois拡大ということにする。

(i) $R^{p^e} \subset S$

(ii) R/S : finite flat extension

R/A : finite flat extension

(iii) $\Omega_S(A)$: projective A-module

$\Omega_S(R)$, $\Omega_A(R)$: projective R-module

(iV) α は injective

とくに $R=A$ のとき単に A/S は p^e Galois 拡大という。

補題　$R^{p^e} \subsetneq S \subsetneq A \subsetneq R$ を k-affine dedekind domain の列とする。すると上の条件 (i)〜(iii) はつねにみたされる。ゆえこの場合 R が S 上 A に関して p^e Galois extension なるための必要十分条件は上の α が injective なることである。

dedekind domain A の任意の ideal $\mathfrak{a}$ はつねに2つの元で generate され $\mathfrak{a}^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, A)$ を $\mathfrak{a}$ の双対加群とすると $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}^*$ i.e., $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* =$ principal ideal of A, となることに注意する。

$S \subsetneq A \subsetneq R$ を k-affine dedekind domain の列で $\Omega_S(A)$ の rank を1とする。ここで任意の A-module M の rank とは外積について $\bigwedge^n M \neq 0$, $\bigwedge^{n+1} M = 0$ なる n のことである。すると $\Omega_S(A) \otimes_A R \in \mathrm{Pic}\, R$ ゆえ $\Omega_S(A) \otimes_A R$ は R-module として R のある ideal $\mathfrak{a}$ に同型である。$\Omega_S(A) \otimes_A R$ の双対加群 $(\Omega_S(A) \otimes_A R)^*$ は $\Omega_S(A)^* \otimes_A R$ に R-同型，一方 $\Omega_S(A)^*$ は S 上の derivation A-module $\mathrm{Der}_S A$ に A-同型となる。ゆえに $\mathfrak{a}^{-1} \cong \mathfrak{a}^* \cong (\mathrm{Der}_S A) \otimes_A R$ となる。

次の定理が k-affine dedekind domain で $\mathrm{ch}\, k = p \geq 3$ なるときの structure theorem である。

定理1.　ch $k=p\geq 3$，$(R^{p^e}\subset)S\subset A\subset R$ を k-affine dedekind domain（R^{p^e} は k^{p^e}-affine dedekind domain）の列で

$$\Omega_S(A)\otimes_A R \xrightarrow{\alpha} \Omega_S(R)$$

が injective かつ rank $\Omega_S(A)=1$ とする。するとこの dedekind domain の列は p^e Galois extension になる。又 $\Phi\in A$ をうまく選んで以下の条件をみたすようにできる。

(i)　$D(\Phi)R$ は R の ideal $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{a}^*$ の積で R-module として

$$\mathfrak{a}\cong_R (\mathrm{Der}_S A)\otimes_A R \quad , \quad \mathfrak{a}^*\cong_R \Omega_S(A)\otimes_A R$$

となる。

(ii)　$\mathfrak{a}$ は R の2つの元で generate されている。

$\mathfrak{a}=(a,b)R$ なる任意の2つの元 $a,b\in A$ について

$$A=S[\Phi,\ a^{p^e}D(\Phi)^{-p^e}\Phi^{(p^e+1)/2},\ b^{p^e}D(\Phi)^{-p^e}\Phi^{(p^e+1)/2}]$$

と表わせる。とくに $\Omega_S(A)\otimes_A R$ が free（又は $\mathrm{Der}_S(A)\otimes_A R$ が free）ならば $\varphi,\psi\in R$ が存在して

$$A=S[\varphi^2\psi,\ \psi\varphi^{(p^e+1)/2}]$$

で　$\varphi D(\psi)+2\psi D(\varphi)=1$　をみたす。

定理1の A は S 上一般的には3つの元で generate されているが実は2つでよい。

系　A を定理1のものとする。$r_{ij}\in R^{p^e}$ $(i=1,2,\ j=1,2,3)$ をうまく選んで

$$A=S[r_{11}\Phi+r_{12}\Phi_1+r_{13}\Phi_2,\ r_{21}\Phi+r_{22}\Phi_1+r_{23}\Phi_2]$$

とすることができる。この r_{ij} は Φ 及び D より具体的に

求めることができる。

この定理1において $p\geq 3$ という仮定は本質的である。$p=2$ のときは Φ の存在がなりたたないのである。ゆえに $p=2$ のときは別に考えなければならないが $p\geq 3$ のときにくらべて非常に複雑になるのでここでは略す。

補題. A は $\mathrm{ch}\, k>0$ なる k-affine dedekind domain とする。すると A の k-subalgebra S が存在して S は dedekind domain かつ A/S は p^e-Galois extension で $\Omega_S(A)$ の rank は 1 とできる。

ゆえに $p\geq 3$ のとき k-affine dedekind domain に1つの具体的な structure を定理1によって入れることができる。この一つの応用として次の $k[x]$ の k-form に関する structure theorem を得ることができる。

定理2. $p\geq 3$, D を $k^{p^{-e}}[x]$ の x による偏微分,

$\varphi, \psi \in k^{p^{-e}}[x]$ を $\varphi D(\psi)+2\psi D(\varphi)=1$ をみたす任意の元とする。すると

$$k[x^{p^e}, \varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p^e+1)/2}]=A$$

は $k[x]$ の k-form である。逆に任意の $k[x]$ の k-form はこの様な環に k-同型となる。

さて定理2の A は k 上3つの元で generate される。つまり A は space curve の座標環である。この curve を k 上で定義する $k[X, Y, Z]$ (= 3変数の多項式環) の prime ideal $\mathfrak{P}$ について考えてみよう。まず $\mathfrak{P}$ は natural surjection

$$f: k[X, Y, Z]\longrightarrow k[x^{p^e}, \varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p^e+1)/2}]$$

の kernel として定義されている。ここで

$\Phi(X)=\varphi(X^{p^{-e}})^{p^e}$, $\Psi(X)=\psi(X^{p^{-e}})^{p^e}\in k[X]$

とおく。すなわちΦ, Ψは多項式$\varphi, \psi \in k^{p^{-e}}[x]$の係数を$p^e$乗して得られた$k[X]$の多項式（$x$を$X$にとりかえている）として定義されている。すると

$$\mathfrak{P} = \sqrt{(Y^{p^e} - \Phi(X)^2\Psi(X),\ Z^{p^e} - \Phi(X)\Psi(X)^{(p^e+1)/2}}$$

$$= (Y^{(p^e+1)/2} - \Psi(X)Z,\ Z^2 - \Phi(X)Y,\ Y^{(p^e-1)/2}Z - \Phi(X)\Psi(X))$$

である。つまり$\mathfrak{P}$は set theoritic に complete intersection である。

定理 3. 上の$\mathfrak{P}$が ideal theoritic complete intersection である (i.e., $\mathfrak{P}$が 2 つの元で generate されている) ための必要十分条件は

$$A = k[x^{p^e}, \varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p^e+1)/2}] = k[x^{p^e}, \varphi, \psi]$$
$$= k[x^{p^e}, \theta] \quad \text{for some } \theta \in A$$

なることである。

次の問題は未解決である。

問題. k上 2 つの元で generate されない$k[x]$のk-form は存在するか?

おそらく存在すると思われる。

例 5. $p=3$, $\alpha \in k^{p^{-1}} \setminus k$とする。すると affin domain over k Aが$k(\alpha)\otimes_k A \cong k(\alpha)[x]$なるための必要十分条件は

$$A \cong_k k[x^3, (a+bx)^2(c+dx), (a+bx)(c+dx)^2]$$

where

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(k(\alpha)[x^3])$$

である。

この例のAは一般的にはk上2つの元でgenerateされないと思われる。

定理2及び定理3を用いて$k[X]$のk-formに関する種々の未解決の問題が解決される。

さらに一般的に定理1のdedekind domainのstructure theoremの応用その他くわしくは次を参照してください。

T. Asanuma. Structure theorem on dedekind domain of characteristic $p>0$. 準備中.

小行列式で生成されるイデアルが極小自由分解をもつための条件

橋本光靖（名大・理学部）

§0. 序

R は可換環、m, n, t は自然数、$t \leq \min(m, n)$ とするとき、mn 変数多項式環 $S = R[x_{ij}]_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$ を考え、S 係数の $m \times n$ 行列 (x_{ij}) の $t \times t$-minors で生成される S の ideal を I_t で表す。S/I_t は determinantal ring と呼ばれ、その性質は色々研究されている（たとえば [B-V]）が、次の結果は重要である。

定理A （[H-E]） R が Noether 環のとき、

① S/I_t は R-free

② $\mathrm{pd}_S\, S/I_t = \mathrm{grade}\, I_t = (m-t+1)(n-t+1)$

③ R が CM (resp. normal, domain)

$\Rightarrow$ S/I_t は CM (resp. normal, domain)

定理B （[S]） R が Gorenstein 環のとき、

S/I_t が Gorenstein $\Leftrightarrow$ $t=1$ または $m=n$

さて、各変数 x_{ij} を次数 1 とみて、S は graded ring であり、I_t は明らかに homogeneous である。S/I_t の graded minimal free resolution（S-module とみての graded な finite free resolution であって、各 boundary map を行列表示したときの各成分が定数項をもたないもの，

以下では単に resolution と呼ぶ。）を構成するという問題は古くから研究されて来た。 $R=\mathbb{Z}$（有理整数環）のときに、S/I_t の resolution $\mathbb{P}.$ が得られれば、勝手な R について $R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{P}.$ が R 上での resolution を与える。 $t=1$ のとき（変数 X_{ij} についての Koszul complex）、$t=\min(m,n)$ のとき（Eagon-Northcott complex, [E-N]）、$t=\min(m,n)-1$ のとき（Akin-Buchsbaum-Weyman complex, [A-B-W 1]）にはそれぞれ、$\mathbb{Z}$ 上での resolution が構成されている。

今回は、S/I_t の resolution が $\mathbb{Z}$ 上存在するための、m, n, t に関する条件がわかったので、それを報告させて頂きます。この話題に関して、蔵野和彦氏、J. Weyman 氏とはそれぞれ informal に討論する機会があり、その際、今度の研究にたいへん有益な情報を頂きましたので、感謝の意を表したく思います。

§1、 main result

$R=k$ が体のとき、$i, j \geqq 0$ に対して、

$$\beta_{ij} := \dim_k [\,\underline{\mathrm{Tor}}_i^S(S/I_t, S/I_1)]_j$$

$$\beta_i := \dim_k \underline{\mathrm{Tor}}_i^S(S/I_t, S/I_1) = \textstyle\sum_{j\geqq 0} \beta_{ij}$$

とおく。ここに、$[\quad]_j$ は graded S-module の degree j 成分である。β_i は、Betti 数と呼ばれている。β_{ij} は（従って β_i も）体 k の標数のみで決まる。そこで、k の標数が p（p は素数または 0）のときの β_{ij}（または β_i）を、β_{ij}^p（β_i^p）で表すことにする。素数 p について、一般に $\beta_{ij}^p \geqq \beta_{ij}^0$ が成立している。次のことが知られている。

命題C ([R2]) 上の記号のもとに、次は同値。

① S/I_t の resolution が $\mathbb{Z}$ 上存在する。
② $\forall i,j$ $\beta_{i,j}^p$ は p によらない。
③ $\forall i$ β_i^p は p によらない。
④ $R=\mathbb{Z}$ のとき、$\forall i,j$ について
$[\underline{\mathrm{Tor}}_i^S(S/I_t, S/I_1)]_j$ は $\mathbb{Z}$-free

S/I_t の Betti 数については、今まで次のことがわかっていた。

定理D ([K 1]) 上の記号のもとに、
① $\forall j \geqq 0$ $\beta_{2,j}^p$ は p によらない。
② $j \neq t+1 \Rightarrow \beta_{2,j}^p = 0$

定理E ([H-K]) $t \geqq \min(m,n)-2$ とする。このとき、
① $\forall j \geqq 0$ $\beta_{3,j}^p$ は p によらない。
② さらに、$m=n$ であれば、$\forall i,j \geqq 0$ について $\beta_{i,j}^p$ は p によらない。従ってこの場合、S/I_t の resolution が $\mathbb{Z}$ 上存在する。

定理F ([H]) $2 \leqq t \leqq \min(m,n)-3$ のとき、
$\beta_{3,t+3}^3 > \beta_{3,t+3}^0$ である。従ってこの場合、S/I_t の resolution は $\mathbb{Z}$ 上存在しない。

$2 \leqq t = \min(m,n)-2$, $m \neq n$ の場合には今まで $\mathbb{Z}$ 上 S/I_t の resolution が存在するかどうかわからなかったが、その存在がわかった。

定理1 上の記号のもとで $t=\min(m,n)-2$

ならば、$\forall i,j$ $\beta_{i,j}^{p}$ は p によらない。従って、

S/I_t の resolution が $\mathbb{Z}$ 上存在する
$\Longleftrightarrow$ $t=1$ または $t \geqq \min(m,n)-2$

§2、 GLの表現論の応用

$R=\mathbb{Q}$（有理数体）の場合の S/I_t の resolution は、P. Roberts（[R 1]）、A. Lascoux（[L]）、P. Pragacz、J. Weyman（[P-W]）らの努力により、GLの表現論を使って極めて具体的に表わされた。K. Akin, D. A. Buchsbaum, J. Weyman は、GLの表現論を S/I_t の resolution の構成に応用することは、$R=\mathbb{Z}$ でも有効と考え、A-B-W complex を構成した。彼らは、'characteristic free representation theory of GL' と呼ぶべきGLの表現論を開拓し、それを用いたのである。定理 D、E、F の証明にもこの表現論が重要な役割を果たしており、定理1についてもそうである。以下、このことについて見てゆきたい。

有限生成自由R加群 V に対して、$SV=\bigoplus_{i\geqq 0} S_iV$
$\wedge V=\bigoplus_{i\geqq 0}\wedge^i V$ はそれぞれ V の symmetric algebra, exterior algebra とする。$v_1,\cdots,v_r\in V$ に対して、

$$\Delta_{SV}(v_1\cdots\cdots v_r)=\sum_{k=0}^{r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k,r-k}} v_{\sigma 1}\cdots\cdots v_{\sigma k}\otimes v_{\sigma(k+1)}\cdots v_{\sigma r}$$

$$\Delta_{\wedge V}(v_1\wedge\cdots\wedge v_r)=\sum_{k=0}^{r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k,r-k}}(-1)^{\sigma} v_{\sigma 1}\wedge\cdots\wedge v_{\sigma k}\otimes v_{\sigma(k+1)}\wedge\cdots\wedge v_{\sigma r}$$

とおく。ここに、$\mathfrak{S}_{k,r-k}=\{\sigma\in\mathfrak{S}_r$（r次対称群）$|\ \sigma 1<\cdots<\sigma k,$

$\sigma(k+1)<\cdots<\sigma r\}$ である。 SV, $\wedge V$ はそれぞれ $\Delta_{SV}, \Delta_{\wedge V}$ を余積として bialgebra になる。 $g \in GL(V)$ に対して、$g(v_1 \cdot \cdots \cdot v_r) = gv_1 \cdot \cdots \cdot gv_r$, $g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = gv_1 \wedge \cdots \wedge gv_r$ で、SV, $\wedge V$ にはそれぞれ GL(V) が作用しているが、$\Delta_{SV}, \Delta_{\wedge V}$ は GL(V) 準同型である。以下、現れる bialgebra の積は m で、余積は Δ で(誤解のおそれのない限り)単に表す。また R 上の tensor 積 $\otimes_R$ は $\otimes$ で単に表す。さらに、

$$\wedge^{i+j+k} V \xhookrightarrow{\text{inc.}} \wedge V \xrightarrow{\Delta_{\wedge V}} \wedge V \otimes \wedge V \xrightarrow{id \otimes \Delta_{\wedge V}} \wedge V \otimes \wedge V \otimes \wedge V$$

$$\xrightarrow{\text{proj.}} \wedge^i V \otimes \wedge^j V \otimes \wedge^k V$$

のような合成射も、誤解のおそれがなければ単に Δ で表す。

さて、SV^* の graded dual $DV = \bigoplus_{i \geq 0} D_i V$, $(D_i V = (S_i V^*)^*)$ を V の divided power algebra と呼ぶ (graded dual については [N] 参照)。DV も GL(V)-bialgebra (GL(V)-module であって、積、余積、単位射、双対単位射が GL(V)-準同型となる bialgebra) である。R が有理数体 $\mathbb{Q}$ を含めば、GL(V)-bialgebra として、$DV \simeq SV$ である。

さて、$\varphi : V \longrightarrow W$ が有限生成自由 R 加群の準同型とするとき、$S\varphi := SW \otimes \wedge V$, $\wedge \varphi := \wedge W \otimes DV$ と $\partial^{S\varphi} : S\varphi \rightarrow S\varphi$ を、

$$S\varphi = SW \otimes \wedge V \xrightarrow{1 \otimes \Delta} SW \otimes V \otimes \wedge V$$

$$\xrightarrow{1 \otimes \varphi \otimes 1} SW \otimes W \otimes \wedge V \xrightarrow{m \otimes 1} SW \otimes \wedge V$$

の合成によって定義すれば、$\partial^{S\varphi} \circ \partial^{S\varphi} = 0$ が容易にわかり、$S\varphi$ は R-complex になる。$\wedge \varphi$ についても、

$\partial^{\Lambda\varphi} : \Lambda\varphi \longrightarrow \Lambda\varphi$ を,

$$\Lambda\varphi = \Lambda W \otimes DV \xrightarrow{1\otimes\Delta} \Lambda W \otimes V \otimes DV$$

$$\xrightarrow{1\otimes\varphi\otimes 1} \Lambda W \otimes W \otimes DV \xrightarrow{m\otimes 1} \Lambda W \otimes DV$$

の合成で定義すれば, $\partial^{\Lambda\varphi} \circ \partial^{\Lambda\varphi} = 0$ となって, $\Lambda\varphi$ も chain complex となる。 $S\varphi$, $\Lambda\varphi$ は共に,'R-complex の bialgebra' と呼ぶべきものになるが, そのためには少し準備が必要である。

$\mathbb{Z}^2$-graded R-module の圏を G_R^2 で表す。M, N が G_R^2 の object のとき, $[M \otimes N]_{i,j} = \bigoplus_{\substack{i_M + i_N = i \\ j_M + j_N = j}} M_{i_M j_M} \otimes N_{i_N j_N}$ によって, $M \otimes N$ は G_R^2 の object になり, G_R^2 は monoidal category になる(圏論の言葉づかいは,[M] に従った)。また, $T_{M,N} : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$ を, $m \in M_{i,j}$, $n \in N_{i',j'}$ に対して, $T_{M,N}(m \otimes n) = (-1)^{ii'+jj'} n \otimes m$ と定めれば, $T_{M,N}$ は, M, N について natural で, T によって, G_R^2 は symmetric category となることが容易に示される。さて, G_R^2 の monoid を, G_R^2 の algebra とよび, monoid の準同型を, algebra の準同型であると定義する。comonoid は coalgebra とよぶことにする。G_R^2 の algebra (または coalgebra) A が commutative であるとは, 図式

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "m"'] & & A\otimes A \arrow[dl, "m"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{または} \quad \begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[rr, "T"] & & A\otimes A \\ & A \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] & \end{tikzcd} \right)$$

が可換になることをいう。A, B が G_R^2 の algebra であるとき, $A \otimes B$ は,

$$m_{A\otimes B} : A\otimes B\otimes A\otimes B \xrightarrow{1\otimes T\otimes 1} A\otimes A\otimes B\otimes B \xrightarrow{m\otimes m} A\otimes B$$

$$u_{A\otimes B}: R \xrightarrow{\cong} R\otimes R \xrightarrow{u\otimes u} A\otimes B$$

によって、再び algebra になる。ここに、u は単位射を表す。A, B が commutative ならば、$A\otimes B$ も commutative となる。coalgebra の tensor 積も同様に定義する。

さて、A が algebra かつ coalgebra で、$\Delta_A: A \to A\otimes A$ が algebra の準同型であるとき、A は (G_R^2 の) bialgebra であると呼ぶ。bialgebra が commutative であるとは、algebra としても、coalgebra としても commutative であることをいう。bialgebra の tensor product は、再び bialgebra であり、commutative bialgebra の tensor product は再び commutative となる。

さて、SW は、S_iW を $(2i, 0)$ 次とみて、G_R^2 の commutative bialgebra になる。ΛV は、$\Lambda^i V$ を $(2i, i)$ 次とみて、commutative bialgebra となる。従って、$S\varphi$ もそうである。一方、ΛW は、$\Lambda^i W$ を、$(i, 0)$ 次とみて、DV は、D_iV を (i, i) 次とみて、それぞれ commutative bialgebra であるから、$\Lambda\varphi$ も commutative bialgebra となる。

補題 G ([A-B-W 2]) $S\varphi$, $\Lambda\varphi$ の積、余積、単位射、双対単位射は、chain map である。

さて、$\mathbb{Z}$-graded R-module の chain complex は、G_R^2 の object A に、次数 $(0, -1)$ の射 $\partial_A: A \to A$ で、$\partial_A \circ \partial_A = 0$ をみたすものを考え合わせたものと同一視できる。$\mathbb{Z}$-graded R-module の complex の圏を $C(G_R)$ で表すと、$A, B \in Ob(C(G_R))$ と、$a\in A_{i,j}$, $b\in B_{i',j'}$ に対して、$\partial_{A\otimes B}(a\otimes b) = \partial_A a\otimes b + (-1)^j a\otimes \partial_B b$ とすることにより、$A\otimes B \in G_R^2$ は、$C(G_R)$ の object になり、$\otimes$, T によって、$C(G_R)$ も symmetric category である。

G_R^2についての定義と同様にして、$C(G_R)$のalgebra, coalgebra, bialgebra等が定義がなされる。

$S\varphi$, $\Lambda\varphi$のboundaryは、次数$(0,-1)$である。補題Gにより、$S\varphi$, $\Lambda\varphi$は、$C(G_R)$のcommutative bialgebraである。$S\varphi$の$(2i,*)$次のpartを$S_i\varphi$で表す。R-complexとして、$S\varphi=\bigoplus_{i\geq 0} S_i\varphi$である。$\Lambda\varphi$の$(i,*)$次のpartを$\Lambda^i\varphi$で表すと、$\Lambda\varphi=\bigoplus_{i\geq 0}\Lambda^i\varphi$である。

さて、$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$とし、

$\Omega^*=\mathrm{Hom\,set}(\mathbb{N},\mathbb{Z})=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots)\mid\lambda_i\in\mathbb{Z}\}$

$\Omega^+=\{\lambda\in\Omega^*\mid\forall i\ \lambda_i\in\mathbb{N}_0,\ \ \lambda_j=0\ (j\gg 0)\}$

$\Omega^-=\{\lambda\in\Omega^+\mid\forall i\in\mathbb{N}\ \ \lambda_i\geq\lambda_{i+1}\}$とおく。$\lambda,\mu\in\Omega^*$に対して、$\lambda\pm\mu$は各項ごとの和(または差)で、$k\in\mathbb{Z}$に対し、$k\cdot\lambda$は、各項ごとの$k$倍で定義する。$\lambda\in\Omega^+$に対して、

$\mathrm{supp}\,\lambda:=\{i\in\mathbb{N}\mid\lambda_i\neq 0\}$

$\ell(\lambda):=\max[(\mathrm{Supp}\,\lambda)\cup\{0\}]$

$|\lambda|:=\sum_{i\in\mathbb{N}}\lambda_i$　　で定義して、それぞれ、

λのsupport, length, weightと呼ぶ。$\lambda\in\Omega^-$に対して、

$S_\square(\lambda)=\{\mu\in\Omega^+\mid\exists i\ (1\leq i<\ell(\lambda))\ \exists k\ (1\leq k\leq\lambda_{i+1})$
$\mu-\lambda=k\cdot\alpha_i\}$　とおく。ここに、

$\alpha_i=(0,\cdots,0,\underset{i}{1},\underset{i+1}{-1},0,\cdots)\in\Omega^*$　である。

$\lambda\in\Omega^+$と、$\varphi: V\longrightarrow W$に対して、

$S_\lambda\varphi:=S_{\lambda_1}\varphi\otimes\cdots\otimes S_{\lambda_\ell}\varphi$

$\Lambda_\lambda\varphi:=\Lambda^{\lambda_1}\varphi\otimes\cdots\otimes\Lambda^{\lambda_\ell}\varphi$　　$(\ell=\ell(\lambda))$と定義する。

$\lambda\in\Omega^-$と、$\mu=\lambda+k\cdot\alpha_i\in S_\square(\lambda)$に対して、

$\square_\lambda^\mu(\varphi):\Lambda_\mu\varphi\longrightarrow\Lambda_\lambda\varphi$　が、

$$\Lambda_\mu\varphi=\Lambda^{\lambda_1}\varphi\otimes\cdots\otimes\Lambda^{\lambda_{i-1}}\varphi\otimes\Lambda^{\lambda_i+k}\varphi\otimes\Lambda^{\lambda_{i+1}-k}\varphi\otimes\Lambda^{\lambda_{i+2}}\varphi\otimes\cdots$$

$$\xrightarrow{1\otimes\cdots\otimes 1\otimes\square\otimes 1\otimes\cdots} \Lambda^{\lambda_1}\varphi\otimes\cdots\otimes\Lambda^{\lambda_{i-1}}\varphi\otimes\Lambda^{\lambda_i}\varphi\otimes\Lambda^{\lambda_{i+1}}\varphi\otimes\Lambda^{\lambda_{i+2}}\varphi\otimes\cdots$$

によって定義される。ここに、$\square$ は、

$$\Lambda^{\lambda_i+k}\varphi\otimes\Lambda^{\lambda_{i+1}-k}\varphi \xrightarrow{\Delta\otimes 1} \Lambda^{\lambda_i}\varphi\otimes\Lambda^{k}\varphi\otimes\Lambda^{\lambda_{i+1}-k}\varphi$$

$$\xrightarrow{1\otimes m} \Lambda^{\lambda_i}\varphi\otimes\Lambda^{\lambda_{i+1}}\varphi$$ の合成を表す。

<u>定義・定理 H</u> ([A-B-W 2]) 上の記号のもとで、

$$\square_\lambda(\varphi) : \bigoplus_{\mu\in S_\square(\lambda)}\Lambda_\mu\varphi \xrightarrow{\sum_\mu \square^\mu_\lambda} \Lambda_\lambda\varphi$$ の

cokernel を $L_\lambda\varphi$ で表し、φ の partition λ に対応した Schur complex とよぶ。自然な projection $\Lambda_\lambda\varphi \longrightarrow L_\lambda\varphi$ を $d_\lambda\varphi$ で表し、(φ の λ に対応した) Schur map とよぶ。

$L_\lambda\varphi$ は free complex である。φ が同型ならば、$|\lambda|>0$ である限り、$L_\lambda\varphi$ は homotopically trivial である。

finite free R-module V に対しては、準同型 $\varphi: 0 \longrightarrow V$ を考え、$\Lambda_\lambda\varphi$, $S_\lambda\varphi$, $L_\lambda\varphi$ によって、$\Lambda_\lambda V$, $S_\lambda V$, $L_\lambda V$ を定義する。定義・定理 H により、$L_\lambda V$ は finite free であり、V の λ に対応した Schur module と呼ばれる。$\square_\lambda(\varphi)$ は、$GL(V)$-準同型なので、$L_\lambda V$ は $GL(V)$-module であるが、R が標数 0 の体で、$\dim V \geqq \lambda_1$ のとき、$L_\lambda V$ は irreducible であることが知られている。

さて、以上の準備のもとに、§1 の状況を考える。F, G をそれぞれ rank m, n の free R-module とする。

$S(F\otimes G)$ は R 上の mn 変数多項式環であるから、
$S=S(F\otimes G)$ とみなせる。さて、$k\geqq 0$ に対して、
$\Phi^S_k:\Lambda^k F\otimes\Lambda^k G\longrightarrow S_k(F\otimes G)$ を、
$f_1,\cdots,f_k\in F$, $g_1,\cdots,g_k\in G$ に対して、
$\Phi^S_k(f_1\wedge\cdots\wedge f_k\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_k)=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\det(f_i\otimes g_j)$
で定義すると well-defined であり、明らかに、
$I_t=S\cdot(\mathrm{Im}\,\Phi^S_t)$ である。$\Phi^S:\Lambda F\otimes\Lambda G\rightarrow S(F\otimes G)$
を、$\Lambda^k F\otimes\Lambda^k G$ 上では Φ^S_k, $\Lambda^i F\otimes\Lambda^j G$ $(i\neq j)$
上では 0 と定義すると、Φ^S は G^2_R の hom. であり、
さらに、$\Lambda^1 F\otimes\Lambda^1 G=F\otimes G=S_1(F\otimes G)$ 上で identity.
また、coalgebra の準同型でもある。$R=\mathbb{Z}$ のときは、
この3条件が Φ^S を特徴づける。この Φ^S の性質
は、[A-B-W 2] で調べられ、[K 1] で有効に用い
られている。ここでは、Φ^S の 'chain complex version'
を定義して、[K 1] の analogy を展開する。

<u>補題 I</u> ([H-K]) F, G についての G^2_R への functor
の自然変換 $\Phi^\Lambda: DF\otimes\Lambda G\longrightarrow\Lambda(F\otimes G)$
であって、① Φ^Λ は $\mathbb{Z}$ 上定義されている。
② $D_1F\otimes\Lambda^1 G=F\otimes G=\Lambda^1(F\otimes G)$
上では identity
③ Φ^Λ は coalgebra の準同型
であるものが、一意的に存在する。

さて、上の補題の Φ^Λ を用いて、
$\theta:\Lambda\,\mathrm{id}_F\otimes\Lambda G\longrightarrow S(\mathrm{id}_{F\otimes G})$ が、

$$\Lambda\,\mathrm{id}_F\otimes\Lambda G=\Lambda F\otimes DF\otimes\Lambda G\xrightarrow{1\otimes\Delta}\Lambda F\otimes DF\otimes\Lambda G\otimes\Lambda G$$

$$\xrightarrow{1\otimes T\otimes 1}\Lambda F\otimes\Lambda G\otimes DF\otimes\Lambda G\xrightarrow{\Phi^S\otimes\Phi^\Lambda}S(F\otimes G)\otimes\Lambda(F\otimes G)$$

$= S(id_{F\otimes G})$ の合成によって定義される。

<u>補題 J</u> ([H-K]) θ は chain map である。

さて、$S(id_{F\otimes G}) = S\otimes\wedge(F\otimes G)$ は、S-complex でもあり、I_1 の minimal free resolution (Koszul complex) である。従って、$i \geqq 1$ に対して、

$$\underline{\mathrm{Tor}}_i^S(S/I_t, S/I_1) \cong \underline{H}_{i-1}(I_t \otimes_S S(id_{F\otimes G}))$$

を得る。$\mathcal{J}^t = I_t \otimes_S S(id_{F\otimes G})$ とおく。$\mathcal{J}^t$ は、自然に $S(id_{F\otimes G})$ の subcomplex である。$\mathcal{J}^t$ の degree j part を $\mathcal{J}^{t,j}$ とおく。我々の目的は、$H_*(\mathcal{J}^{t,j})$ を、$m=t+2$ のときに計算することである。

さて、$k \geqq 0$ に対し、$\wedge^k id_F$ の subcomplex $\wedge^{t,k} id_F$ を、

$$\wedge^{t,k} id_F := 0 \to \wedge^t F\otimes D_{k-t}F \to \wedge^{t+1}F\otimes D_{k-t-1}F \to \cdots \to \wedge^{k-1}F\otimes D_1 F \to \wedge^k F \to 0 .$$

によって(つまり、$(k-t+1)$ 項目より後ろを切り落として)定義する。θ の定義から直ちに、

$$\theta(\wedge^{t,k} id_F \otimes \wedge^k G) \subset \mathcal{J}^{t,k}$$

を得る。さて、$\lambda \in \Omega^-$ に対して、$\theta_\lambda : \wedge_\lambda id_F \otimes \wedge_\lambda G \longrightarrow S_{|\lambda|}(id_{F\otimes G})$ を、合成射

$$\wedge_\lambda id_F \otimes \wedge_\lambda G = \wedge^{\lambda_1} id_F \otimes \cdots \otimes \wedge^{\lambda_q} id_F \otimes \wedge^{\lambda_1} G \otimes \cdots \otimes \wedge^{\lambda_q} G$$

$$\xrightarrow{\ \ T\ \ } \Lambda^{\lambda_1}\mathrm{id}_F \otimes \Lambda^{\lambda_1} G \otimes \cdots \otimes \Lambda^{\lambda_q}\mathrm{id}_F \otimes \Lambda^{\lambda_q} G$$

$$\xrightarrow{\theta\otimes\cdots\otimes\theta} S_{\lambda_1}(\mathrm{id}_{F\otimes G}) \otimes \cdots \otimes S_{\lambda_q}(\mathrm{id}_{F\otimes G}) \xrightarrow{m} S_{|\lambda|}(\mathrm{id}_{F\otimes G})$$

によって定義する。ここに、$q = \ell(\lambda)$ である。ここで

$$\Lambda_{t,\lambda}\mathrm{id}_F := \Lambda^{t,\lambda_1}\mathrm{id}_F \otimes \Lambda^{\lambda_2}\mathrm{id}_F \otimes \cdots \otimes \Lambda^{\lambda_q}\mathrm{id}_F$$

とおき、θ_λ の $\Lambda_{t,\lambda}\mathrm{id}_F \otimes \Lambda_\lambda G$ への制限を $\theta_{t,\lambda}$ で表せば、$\mathrm{Im}\,\theta_{t,\lambda} \subset \mathcal{D}^{t,|\lambda|}$ が成立する。

さて、Ω^- には、辞書式順序を導入する。すなわち、$\lambda, \mu \in \Omega^-$ に対して、$\lambda \geqq \mu \underset{\mathrm{def.}}{\Longleftrightarrow} \lambda = \mu$ または、$\exists i\ \forall j < i$ $\lambda_j = \mu_j$ かつ、$\lambda_i > \mu_i$ と定義する。$|\lambda| = k$ である partition (Ω^- の元) λ の全体を Ω^-_k で表す。

以上の定義のもとに、$\lambda \in \Omega^-_k$ に対して、

$$M^{t,\lambda} := \sum_{\substack{\mu \in \Omega^-_k \\ \mu \geqq \lambda}} \mathrm{Im}\,\theta_{t,\mu} \quad \subset \mathcal{D}^{t,k}$$

$$\dot{M}^{t,\lambda} := \sum_{\substack{\mu \in \Omega^-_k \\ \mu > \lambda}} \mathrm{Im}\,\theta_{t,\mu} \quad \subset M^{t,\lambda}$$

と定義する。また、Schur map $d_\lambda \mathrm{id}_F$ による $\Lambda_{t,\lambda}\mathrm{id}_F$ の image を $L_{t,\lambda}\mathrm{id}_F$ で表すことにする。

<u>命題2</u> ① $\{M^{t,\lambda}\}_{\lambda\in\Omega^-_k,\ \lambda_1 \geqq t}$ は、$\mathcal{D}^{t,k}$ の filtration を与える。

② 図式

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_{t,\lambda}\mathrm{id}_F \otimes \Lambda_\lambda G \arrow[r, "\theta_{t,\lambda}"] \arrow[d, "d_\lambda \mathrm{id}_F \otimes d_\lambda G"] & M^{t,\lambda} \arrow[d, "\mathrm{proj.}"] \\
L_{t,\lambda}\mathrm{id}_F \otimes L_\lambda G \arrow[r, "\beta_{t,\lambda}"] & M^{t,\lambda}/\dot{M}^{t,\lambda}
\end{tikzcd}$$

を可換にする同型 $\beta_{t,\lambda}$ が存在する。従って、filtration $\{M^{t,\lambda}\}$ の associated graded object は、

$$\sum_{\lambda \in \Omega_k, \lambda_1 \geqq t} L_{t,\lambda} id_F \otimes L_\lambda G$$ である。

③ R が有理数体 $\mathbb{Q}$ を含めば、R-complex の同型

$$\mathcal{J}^{t,k} \cong \sum_\lambda L_{t,\lambda} id_F \otimes L_\lambda G$$

が存在する。従って、$i \geqq 1$, $j \geqq 0$ に対して、

$$\beta^0_{i,j} = \sum_\lambda (\dim_{\mathbb{Q}} L_\lambda G) \cdot (\dim_{\mathbb{Q}} H_{i-1}(L_{t,\lambda} id_F))$$

である。(λ は $\lambda \in \Omega_j$, $\lambda_1 \geqq t$ であるものを走る)

上の命題の ①, ② は、$t=0$ とすると、[H-K] の Theorem III. 2. 7. (Cauchy formula) の特別な場合であるが、t が一般の場合には、同様の形では成立しない (G のかわりに、chain complex id_G とするとだめ) ことを注意しておく。③ は、標数 0 の体上の、$GL(F) \times GL(G)$ の polynomial representation が完全可約なことから従う。

さて、$R = \mathbb{F}_p$ (標数 p の素体) の場合を考える。$\{M^{t,\lambda}\}$ に associate した、spectral sequence を考えれば分かるように、$i \geqq 1$, $j \geqq 0$ に対して、

$$\beta^p_{i,j} \leqq \sum_\lambda (\dim_{\mathbb{F}_p} L_\lambda G) \cdot (\dim_{\mathbb{F}_p} H_{i-1}(L_{t,\lambda} id_F))$$

が成立する。したがって、次の補題が成立する。

補題3　$i \geqq 1$, $j \geqq 0$ とする。すべての $\lambda \in \Omega_j^-$ ($\lambda_1 \geqq t$) に対して、$\dim_{\mathbb{F}_p} H_{i-1}(L_{t,\lambda}\, id_F)$ が p によらないならば、$\beta_{i,j}^p$ も p によらない。

証明）定義・定理Hから容易に、$\mathrm{rank}\, L_\lambda G$ は、R によらないことがわかる。したがって仮定により、$\beta_{i,j}^p \leqq \beta_{i,j}^0$ が成立する。$\beta_{i,j}^p \geqq \beta_{i,j}^0$ は常に成立しているから、$\beta_{i,j}^p = \beta_{i,j}^0$ である。

さて、標数0の場合には、非常に多くの i, λ について、$H_i(L_{t,\lambda}\, id_F)$ は0になる。このことを述べるのに、多少準備が必要になる。

$\lambda \in \Omega^-$ に対して、$\tilde{\lambda}_i := \#\{j \in \mathbb{N} \mid \lambda_j \geqq i\}$ とおくと、$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \cdots\cdots)$ は再び partition である。$\tilde{\lambda}$ は、λ の transpose と呼ばれる。また、$\lambda \in \Omega^-$, $|\lambda| > 0$ に対して、$Drf(\lambda) := \max\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i \geqq i\}$ とおく。$|\lambda| = 0$ のときは $Drf(\lambda) = 0$ とおく。$Drf(\lambda)$ は、λ の Durfee square number と呼ばれている。$\lambda \in \Omega^-$ と、$t \geqq 1$ に対して、

$\lambda(t) := (\lambda_1 + t - 1, \cdots\cdots, \lambda_k + t - 1, \lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \cdots)$

とおく。ここに、$k = Drf(\lambda)$ である。$\lambda \in \Omega^-$ に対して、$\exists \mu \in \Omega^-$, $\lambda = \mu(t)$ であるとき、

$\lambda\langle t\rangle := \tilde{\mu}(t)$ と定義する。以上の定義のもとに、次が成立する。

補題4　R は有理数体 $\mathbb{Q}$ を含み，$i \geqq 1$, $\lambda \in \Omega^-$ とする。このとき、

$$H_{i-1}(L_{t,\lambda}\, id_F) \cong \begin{cases} L_{\lambda\langle t\rangle} F & \left(\begin{array}{l}\exists \mu \in \Omega^-,\ \lambda = \mu(t), \\ |\mu| = i \text{ のとき}\end{array}\right) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

証明は、Lascoux's resolution [L] と、命題2の③から容易である。

補題4は、標数 p の場合に、$H_*(L_{t,\lambda}\, id_F)$ を計算するのに、参考になる。しかし、標数 p での $H_*(L_{t,\lambda}\, id_F)$ は、かなり複雑で、今のところ、次の程度のことしかわかっていない。

補題5 $\lambda \in \Omega^-$, $Drf(\lambda) \leq 1$ ならば、$\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(L_{t,\lambda}\, id_F)$ は、すべての i, t について、標数 p によらない。

しかしながら、$m-t=2$ の場合には、表現論的な考察により、次の結果が得られた。証明は、その概略を記述するにも、面倒な準備が要るので、述べられない。

命題6. $\operatorname{rank} F = m$, $m-t=2$, $t \geq 2$ で、$i \geq 0$, $\lambda \in \Omega^-$ とすると、次の場合を除いて、$\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(L_{t,\lambda}\, id_F)$ は、標数 p によらない。

(*) $\lambda = (\lambda_1, 2)$ $(\lambda_1 \geq t)$ で、$i = |\lambda| - t$ または、$i = |\lambda| - t - 1$ のとき、$R = \mathbb{F}_2$ ならば、$H_i(L_{t,\lambda}\, id_F) \neq 0$ で、$R = \mathbb{F}_p$ ($p \geq 3$, pは素数) ならば、$H_i(L_{t,\lambda}\, id_F) = 0$. で標数による。

補題3と命題6により、$j-i \neq t, t\ 1$ のとき、$\beta^p_{i,j}$ は標数 pにはよらない。(*)の場合の λ, i について、$\{M^{t,\lambda}\}$ にassociateしたspectral sequenceの E^2-termを計算することにより、$\beta^p_{i,j}$ は、実はすべての i, j について、pによらないことがわかり、定理1は証明される。

・このシンポジウムで蔵野氏が話されたように、交代行列のPfaffiansで生成されたidealは、一般には$\mathbb{Z}$上minimal free resolutionをもたない([K-2])。どのような場合に、Pfaffian idealは$\mathbb{Z}$上resolutionをもつかを考えるのに、以上のような方法と類似の議論が、有効のようであり、現在考えているところである。

******** R E F E R E N C E S ***************

[A-B-W 1] K. Akin, D. A. Buchsbaum, and J. Weyman, Resolutions of determinantal ideals: the submaximal minors, *Adv. in Math.* **39** (1981), 1-30.

[A-B-W 2] K. Akin, D. A. Buchsbaum, and J. Weyman, Schur functors and Schur complexes, *Adv. in Math.* **44** (1982), 207-278.

[B-V] W. Bruns, and U. Vetter, "Determinantal rings," Springer lecture notes **1327** (1988).

[E-N] J. A. Eagon, and D. G. Northcott, Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **269** (1962), 188-204.

[H] M. Hashimoto, Determinantal ideals without minimal free resolutions, preprint.

[H-E] M. Hochster, and J. A. Eagon, Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 1020-1058.

[H-K] M. Hashimoto, and K. Kurano, Resolutions of Determinantal ideals: n-minors of (n+2)-square matrices, preprint.

[K 1] K. Kurano, The first syzygies of determinantal ideals, *J. Alg.* to appear.

[K 2] K. Kurano, Relations on Pfaffians II: A Counterexample, preprint.

[L] A. Lascoux, Syzygies des variétés déterminantales, *Adv. in Math.* **30** (1978), 202-237.

[M] S. Mac Lane, "Categories for the Working Mathematician," Springer, New York, 1971.

[N] D. G. Northcott, "Multilinear algebra," Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[P-W] P. Pragacz and J. Weyman, Complexes Associated with Trace and Evaluation. Another Approach to Lascoux's Resolution, *Adv. in Math* **57** (1985), 163-207.

[R 1] P. Roberts, A minimal free complex associated to the minors of a matrix, preprint.

[R 2] P. Roberts, "Homological invariants of modules over commutative rings", Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal 1980.

局所環の正規種数（曲線と曲面の場合）

広島大学 理学部　大石 彰

(0) 序（種数の定義）．　ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m}, k)$ の $\mathfrak{m}$－準素イデアル I に対して，その種数 $g(I)$，算術種数 $p_a(I)$，切断種数 $g_s(I)$，正規種数 $\bar{g}(I)$，正規算術種数 $\bar{p}_a(I)$，正規切断種数 $\bar{g}_s(I)$，Δ－種数 $g_\Delta(I)$ など幾つかの種数を定義して，それらにより局所環を研究することを目標とする。この試みについては，既に何回か報告した（詳しくは［大石 1］，［大石 2］，［大石 3］を参照して下さい）。今回は特に曲線の特異点及び曲面の特異点について更に分った幾つかの結果を紹介する。

$(R, \mathfrak{m}, k)$ を解析的不分岐な d 次元 Cohen-Macaulay 局所環，I をその $\mathfrak{m}$－準素イデアルとして，整数 $e_i(I) = e_i$，$\bar{e}_i(I) = \bar{e}_i$ $(0 \leqslant i \leqslant d)$ を次で定義する：

$$\ell(R/I^{n+1}) = e_0\binom{n+d}{d} - e_1\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d, \quad n \gg 0,$$

$$\ell(R/\overline{I^{n+1}}) = \bar{e}_0\binom{n+d}{d} - \bar{e}_1\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d \bar{e}_d, \quad n \gg 0,$$

但しここで $\bar{J}$ はイデアル J の整閉包を表わす。

<u>種数の定義</u>：

$g(\mathrm{I}) = e_d$ （Ｉの種数）

$p_a(\mathrm{I}) = (-1)^d \left(\sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i - \ell(R/\mathrm{I}) \right)$ （Ｉの算術種数）

$g_s(\mathrm{I}) = e_1 - e_0 + \ell(R/\mathrm{I})$ （Ｉの切断種数）

$\overline{g}(\mathrm{I}) = \overline{e}_d$ （Ｉの正規種数）

$\overline{p}_a(\mathrm{I}) = (-1)^d \left(\sum_{i=0}^{d} (-1)^i \overline{e}_i - \ell(R/\overline{\mathrm{I}}) \right)$ （Ｉの正規算術種数）

$\overline{g}_s(\mathrm{I}) = \overline{e}_1 - e_0 + \ell(R/\overline{\mathrm{I}})$ （Ｉの正規切断種数）

$g_\Delta(\mathrm{I}) = e_0 + (d-1)\ell(R/\mathrm{I}) - \ell(\mathrm{I}/\mathrm{I}^2)$ （ＩのΔ－種数）。

更に，Ｉの還元指数 $\delta(\mathrm{I})$，正規還元指数 $\overline{\delta}(\mathrm{I})$ を次で定義する：

$$\delta(\mathrm{I}) = \min\{ n \mid \text{あるＩの極小還元Ｊについて } J\mathrm{I}^n = \mathrm{I}^{n+1} \},$$

$$\overline{\delta}(\mathrm{I}) = \min\{ n \mid \text{ある}\overline{\mathrm{I}}\text{の極小還元Ｊについて } J\overline{\mathrm{I}^m} = \overline{\mathrm{I}^{m+1}} \ (\forall m \geqq n) \}$$

又，$\mathrm{I} = \mathfrak{m}$ のとき $e_i(\mathfrak{m}) = e_i(R)$，$g(\mathfrak{m}) = g(R)$，$\delta(\mathfrak{m}) = \delta(R)$ などと書く。（但し，k は無限体とする。）

(I) <u>曲線の特異点の場合</u>．　$d = 1$ とする。従って R は被約な一次元ネーター局所環で，その整閉包 $\overline{R}$ は有限生成 R－加群である。R の $\mathfrak{m}$－準素イデアル Ｉ による blowing-up $B(\mathrm{I})$ を $B(\mathrm{I}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathrm{I}^n : \mathrm{I}^n)$ で定めると次が成り立つ：

$$\ell(R/I^n) = e(I)n - \ell(B(I)/R) + \ell(I^nB(I)/I^n),\ n \gg 0$$
$$\ell(R/\overline{I^n}) = e(I)n - \ell(\overline{R}/R) + \ell(I^n\overline{R}/\overline{I^n}),\ n \gg 0$$
$$g(I) = \ell(B(I)/R),\ p_a(I) = g_s(I) = \ell(IB(I)/I)$$
$$\overline{g}(I) = \ell(\overline{R}/R),\ \overline{p_a}(I) = \overline{g}_s(I) = \ell(I\overline{R}/\overline{I})。$$

次の二つの定理は基本的である。

<u>定理</u> 1.1（"有理型特異点"）. 次の条件は全て同値である：

(1) $\overline{p_a}(R) = 0$ 。

(2) 任意の m－準素イデアル I について $\overline{p_a}(I) = 0$ 。

(3) $emb(R) = e(R)$ かつ m^n が任意の n について整閉。

(4) R は Arf 環で，任意の整閉 m－準素イデアル I と任意の n について I^n が整閉。

(5) 任意の m－準素イデアル I に対して $I\overline{I} = \overline{I^2}$。

(6) R は DVR 又は $c(R) = \overline{g}(R) + 1$，但し $c(R) = \ell(\overline{R}/R:\overline{R})$。

ここで R が Arf 環であるとは，任意の整閉 m－準素イデアル I に対して $g_s(I) = 0$ が成り立つことである。（一般に条件 $g_s(I) = 0$，$g_\Delta(I) = 0$，$\delta(I) \leqslant 1$ は全て同値で，このとき I は <u>安定イデアル</u>（stable ideal）であると言う。）

R が Arf 環であるためには，R の任意の無限近点 (infinitely near point) の局所環 R' が最大埋入次元 ($\mathrm{emb}(R') = e(R')$) を持つことが必要十分である (Lipman)。

<u>定理</u> 1．2 (″楕円型特異点″)．R が Gorenstein 環のとき次の条件は全て同値である：

(1) $\overline{p}_a(R) = 1$。

(2) $\overline{\delta}(R) = 2$。

(3) $\overline{g}(R) = 2$ (このとき $e(R) = 2$) 又は $\mathrm{emb}(R) = e(R) - 1$ かつ $\mathfrak{m}^n$ が任意の n について整閉 (このとき $e(R) \geqslant 3$)。

もう少し詳しく R を調べるために準備をする。

<u>局所環の貼り合わせと良交叉な局所環</u>．$(R_1, \mathfrak{m}_1, k)$, ---, $(R_r, \mathfrak{m}_r, k)$ が同じ剰余体 k を持つ局所環のとき，R_1, ---, R_r の<u>貼り合わせ</u> (glueing 又は amalgamation) とは次の図式を pull-back 図式とするような環 R のことである：

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{r} R_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \longrightarrow & \prod k \end{array}$$

但し，ここで $k \longrightarrow k^r$ は対角写像である。即ち，R は環 $R' = \prod_{i=1}^{r} R_i$ の部分環

$\{x = (x_1, \cdots, x_r) \in \prod_{i=1}^{r} R_i \mid \overline{x}_i = \overline{x}_j \text{ in } k \text{ for all } i, j\}$

と同一視される（$\overline{x}_i$ は $x_i \in R_i$ の k における像を表わす）。このとき R は $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}R' = \mathfrak{m}_1 \times \cdots \times \mathfrak{m}_r$ を極大イデアル，k を剰余体とする局所環であり，又，この逆も成り立つ。準同型 $R \longrightarrow R_i$ は全射で，その核を I_i とおくと

$I_i + I_j = \mathfrak{m}$ for all $i \neq j$ ，$\bigcap_{i=1}^{r} I_i = 0$ ，

$R_i \cong R/I_i$ ，$R'/R \cong k^{r-1}$

が成り立つ。更に，各 R_i が解析的不分岐な一次元ネーター局所環ならば R もそうで

$Q(R) \cong \prod_{i=1}^{r} Q(R_i)$，$\overline{R} \cong \prod_{i=1}^{r} \overline{R}_i$ ，$B(R) \cong \prod_{i=1}^{r} B(R_i)$

が成り立ち，次の完全列がある：

$$0 \longrightarrow G(R) \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} G(R_i) \longrightarrow k^{r-1} \longrightarrow 0$$

但し $G(R) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ 。従って

$e(R) = \sum_{i=1}^{r} e(R_i)$ ，$emb(R) = \sum_{i=1}^{r} emb(R_i)$

$g_\Delta(R) = \sum_{i=1}^{r} g_\Delta(R_i)$

$g(R) = \sum_{i=1}^{r} g(R_i) + r - 1$ ，　$p_a(R) = \sum_{i=1}^{r} p_a(R_i)$

$\overline{g}(R) = \sum_{i=1}^{r} \overline{g}(R_i) + r - 1$ ，　$\overline{p_a}(R) = \sum_{i=1}^{r} \overline{p_a}(R_i)$ 。

局所環 R が有限個の局所整域の貼り合わせになっているとき，R は良交叉（good crossing）であると言う。又，

$\widehat{R}$が 良交叉であるとき，Rは 解析的良交叉(analytically good crossing）であると言う。一般に Rを解析的不分岐な一次元ネーター局所環，$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ を Rの極小素イデアルとして

$$R_i = R/\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i, \quad R' = \prod_{i=1}^{r} R_i$$
$$B = B(R), \quad B' = \prod_{i=1}^{r} B(R_i)$$

とおくと

$$p_a(R) = \sum_{i=1}^{r} p_a(R_i) + \ell(\mathfrak{m}R'/\mathfrak{m}) - \ell(B'/B)$$
$$\overline{p}_a(R) = \sum_{i=1}^{r} \overline{p}_a(R_i) + \ell(\mathfrak{m}R'/\mathfrak{m})$$

が成り立つ。従って

$$R\text{が良交叉} \iff p_a(R) = \sum_{i=1}^{r} p_a(R_i) \text{ かつ } B(R) \cong \prod_{i=1}^{r} B(R_i)$$
$$\iff \overline{p}_a(R) = \sum_{i=1}^{r} \overline{p}_a(R_i) \ .$$

Rが整域でない Gorenstein環とすると，Rが良交叉であるためには，Rの極小素イデアルが2個 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ で $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{m}$ を満たすことが必要十分である。

Rの分枝と導手次数． $\overline{R}$ の任意の極大イデアル$\mathfrak{n}$ について $\overline{R}/\mathfrak{n} = R/\mathfrak{m}$ が成り立つとき，Rは(剰余)有理的な正規化を持つ（R has a (residually) rational normalization ）と言う（kが代数的閉体ならば これは自動的に満たされる）。

$\hat{R}$の極小素イデアル $\mathfrak{q}$（又は環 $\hat{R}/\mathfrak{q}$）のことを Rの<u>分枝</u>（branch）と言う。Rの分枝の数は $\overline{R}$ の極大イデアルの数に等しい。それを $b(R)$ で表わす。$\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_s$ が $\overline{R}$ の極大イデアル，$\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_s$ が Rの分枝として

$$\mathfrak{m}\overline{R} = \mathfrak{n}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{n}_s^{e_s} \quad , \quad f_i = [\overline{R}/\mathfrak{n}_i : R/\mathfrak{m}]$$

とおくと 関係式

$$e(R) = \sum_{i=1}^{s} e_i f_i = \sum_{i=1}^{s} e(\hat{R}/\mathfrak{q}_i) \geqslant b(R)$$

が成り立つ。等式 $e(R) = b(R)$ が成立するためには $\overline{R}/\mathfrak{m}\overline{R}$ が被約で R が有理的な正規化を持つこと，又は同じことだが R の分枝 $\hat{R}/\mathfrak{q}_i$ が全て DVR であることが必要十分である。このとき Rの全ての分枝が滑らかであると言う。

一方，R の <u>導手次数</u>（conductor degree）を $c(R) = l_R(\overline{R}/R : \overline{R})$ で定めると，R が DVR でないとき，不等式

$$b(R) \leqslant e(R) \leqslant \overline{g}(R) + 1 \leqslant c(R)$$

が成り立つ。又，$\overline{p_a}(R) = 0$，$c(R) = \overline{g}(R) + 1$，$c(R) = e(R)$ などの条件は全て同値である。

<u>定理</u> 1.3（Aleksandrov）．R が剰余体と同型な体を含み有理的な正規化を持つとする。このとき $\overline{p_a}(R) = 0$

であるためには，$\hat{R}$ が $k[[t^e, t^{e+1}, \cdots, t^{2e-1}]]$ の型の環を有限個貼り合わせたものと同型であることが必要十分である。

<u>証明</u>．R が完備整域のとき，$e(R)=e$, $\overline{R}=k[[t]]$ とおくと

$\overline{p_a}(R)=0 \iff \mathfrak{m}\overline{R}=\mathfrak{m}$

$\iff R=k+\mathfrak{m}\overline{R}=k+t^e k[[t]]=k[[t^e, t^{e+1}, \cdots, t^{2e-1}]]$。

R が一般の場合，$\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_s$ を $\hat{R}$ の極小素イデアルとして

$\overline{p_a}(R)=0 \iff \overline{p_a}(\hat{R})=0$

$\iff \hat{R}$ は $\hat{R}/\mathfrak{q}_i$ の貼り合わせに同型で，各 i について $\overline{p_a}(\hat{R}/\mathfrak{q}_i)=0$（従って $\hat{R}/\mathfrak{q}_i \cong k[[t^{e_i}, \cdots, t^{2e_i-1}]]$）。

<u>定理</u> 1．4．R が解析的既約な Gorenstein 環で剰余体と同型な体を含み有理的な正規化を持つとする。このとき $\overline{p_a}(R)=1$ であるためには，$\hat{R}$ が $k[[t^2, t^5]]$ 又は $k[[t^e, t^{e+1}, \cdots, t^{2e-2}]]$ と同型であることが必要十分である。

<u>証明</u>．十分性は容易である。必要性：R は完備で

あるとしてよい。すると $\overline{R}=k[[t]]$ と書ける。仮定 $\mathfrak{m}\overline{R}/\mathfrak{m}\cong k$ により $\mathfrak{m}^2\overline{R}\subset \mathfrak{c}:=(R:\overline{R})$ で，従って

$$2e(R)=\ell(\overline{R}/\mathfrak{m}^2\overline{R})\geqslant \ell(\overline{R}/\mathfrak{c})=2\ell(\overline{R}/R)=2e(R)。$$

故に $\mathfrak{c}=\mathfrak{m}^2\overline{R}=t^{2e}k[[t]]$，$e=e(R)$ となり，$S=k[[t^e, t^{e+1}, \cdots, t^{2e-2}, t^{2e}, t^{2e+1}, \cdots]]$ とおくと $t^{2e-1}\notin R$ より $R\subset S$ かつ $e(R)=\ell(\overline{R}/R)\geqslant \ell(\overline{R}/S)=e(R)$。故に $R=S$。これで主張が示された。証明終。

先に述べたように一般に不等式 $\overline{g}(R)\geqslant b(R)-1$ が成立している。

<u>命題</u> 1.5. 次の条件は全て同値である：

(1) $\overline{g}(R)=b(R)-1$。

(2) $\overline{p_a}(R)=0$ かつ $e(R)=b(R)$。

(3) R は解析的良交叉で R の全ての分枝は滑らか（即ち $\hat{R}$ が有限個の DVR の貼り合わせに同型）。

(4) R は seminormal で有理的な正規化をもつ。（従って R が剰余体に同型な体を含めば，$\hat{R}$ は $k[[X_1, \cdots, X_n]]/(X_iX_j \mid i\neq j)$ と同型である。

<u>証明</u>. 定理1.3 の前に述べたことにより

$$\bar{g}(R) = b(R) - 1 \iff b(R) = e(R) \text{ かつ } e(R) = \bar{g}(R) + 1$$

$$\iff b(R) = e(R) \text{ かつ } \bar{p}_a(R) = 0$$

$\iff \bar{R}/\mathfrak{m}\bar{R}$ が被約，R は有理的な正規化を持ち

$$\bar{p}_a(R) = 0$$

$\iff R$ は seminormal かつ有理的な正規化を持つ。

一方，R が完備として $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_s$ を R の極小素イデアル，

$R' = \prod_{i=1}^{s} R/\mathfrak{q}_i$ とおくと

$$\mu(R'/R) \leqslant l(R'/R) \leqslant l(\bar{R}/R)$$

において $\mu(R'/R) = b(R) - 1$, $l(\bar{R}/R) = \bar{g}(R)$。故に

$$\bar{g}(R) = b(R) - 1 \iff \mu(R'/R) = l(\bar{R}/R)$$

$$\iff \mu(R'/R) = l(R'/R) \text{ かつ } l(R'/R) = l(\bar{R}/R)$$

$$\iff \mathfrak{m}R' = \mathfrak{m} \text{ かつ } R' = \bar{R}$$

$\iff R$ は良交叉で R の全ての分枝が滑らか。

<u>命題</u> 1.6. R は剰余体と同型な体を含み，有理的な正規化を持つとする。このとき $\bar{g}(R) = b(R)$ であるためには，R が次のいずれかの条件を満たすことが必要十分である：

(1) $\hat{R}$ は $k[[t^2, t^3]]$ と有限個の DVR を貼り合わせた環に同型（このとき $\bar{p}_a(R) = 0$）。

(2) $\bar{p}_a(R) = 1$ かつ R の全ての分枝が滑らか。

証明. R は完備であるとしてよい。今 $\overline{g}(R)=b(R)$ とする。すると $e(R)-1 \leqslant \overline{g}(R)=b(R) \leqslant e(R)$ より $\overline{g}(R)=b(R)=e(R)-1$ 又は $\overline{g}(R)=b(R)=e(R)$ である。前者のとき $\overline{p_a}(R)=0$，従って R は良交叉で，R の極小素イデアルを $\mathfrak{q}_1, ---, \mathfrak{q}_s$ とすると

$$s+1 = e(R) = \sum_{i=1}^{s} e(R/\mathfrak{q}_i)$$

より ある i について $e(R/\mathfrak{q}_i)=2$ かつ $j \neq i$ ならば $e(R/\mathfrak{q}_j)=1$ （即ち $R/\mathfrak{q}_i \cong k[[t^2, t^3]]$, $R/\mathfrak{q}_j \cong k[[t]]$ ）。後者の場合，$\overline{p_a}(R)=1$ かつ $e(R)=b(R)$ 従って R の全ての分枝は滑らかである。逆の主張は明白。証明終。

この節の最後に，一回の blowing-up で正規化される（即ち $\overline{R}=B(R)$ が成り立つ）ような曲線の特異点について調べる。

命題 1.7. (1) $\overline{R}=B(R)$ であるためには 任意の $n \geqslant \delta(R)$ について $\mathfrak{m}^n$ が整閉であることが必要十分である。

(2) $\overline{p_a}(R)=0 \Longleftrightarrow p_a(R)=0$ かつ $\overline{R}=B(R)$

$\Longleftrightarrow emb(R)=e(R)$ かつ $\mathfrak{m}^n$ が任意の n について整閉。

(3) $\overline{p_a}(R)=1$ かつ $emb(R) \leqslant e(R)-1$

$\Longleftrightarrow p_a(R)=1$ かつ $\overline{R}=B(R)$

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{emb}(R) = e(R) - 1$ かつ m^n が 任意の n について 整閉。

証明には 次の事実を使う： 次数付環 $\overline{G}(R) = \bigoplus_{n \geq 0} \overline{m^n}/\overline{m^{n+1}}$ は $\overline{R}/m\overline{R}[X]$ の部分環で 常に Cohen-Macaulay 環であり，

$\overline{G}(R)$ が 被約 $\Longleftrightarrow$ Proj $\overline{G}(R)$ が 被約 $\Longleftrightarrow$ $\overline{R}/m\overline{R}$ が 被約。

(これに 関連する事実として， $G(R)$ が 被約であるためには Proj $G(R)$ が 被約 かつ $G(R)$ が Cohen-Macaulay 環 であることが 必要十分で，更に R が 有理的な 正規化を持つときには， Proj $G(R)$ が 被約 $\Longleftrightarrow$ R の全ての分枝が 滑らか。)

(II) 曲面の特異点の場合． ここでは (R, m, k) を解析的不分岐な 2次元 Cohen-Macaulay 局所環とし，剰余体 k は 無限体 であるとする。 R の m-準素イデアル I に対して

$$\overline{n}(I) = \min \left\{ n \;\middle|\; \begin{array}{l} \ell(R/\overline{I^{m+1}}) = \overline{e}_0 \binom{m+2}{2} - \overline{e}_1 \binom{m+1}{1} + \overline{e}_2 \\ \quad \text{for all } m \geq n \end{array} \right\}$$

とおく (但し $\overline{e}_i = \overline{e}_i(I)$)。 先ず これまでに 分っていることを 復習する。

定理 2.1 (Huneke). J を I の 極小還元とし，$\overline{v}_n =$

$\ell(\overline{I^{n+1}}/J\overline{I^{n}})$とおくと 次が成り立つ：

$$\bar{g}_s(I)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{v_n}$$
$$\bar{g}(I)=\sum_{n=1}^{\infty}n\overline{v_n}$$
$$\overline{p_a}(I)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\overline{v_n}\text{。}$$

特に，これらの種数は 全て 非負整数である。(これに対して $g_s(I)$, $g(I)$ は非負整数だが $p_a(I)$ は 非負であるとは 限らない。) $\bar{g}(I)=\overline{p_a}(I)+\bar{g}_s(I)$ であることに注意する。

定理 2.2 ([大石 1, 2]). I が 整閉 のとき 次の条件は全て 同値 である：

(1) $\bar{g}(I)=0$ 。

(2) $\bar{g}_s(I)=0$ 。

(3) $\bar{\delta}(I)\leqslant 1$ 。

(4) $\bar{\pi}(I)<0$ 。

更に，これらの条件が 満たされると，I^n は全ての n について 整閉で，次数付環 $G(I)=\bigoplus_{n\geqslant 0}I^n/I^{n+1}$ は Cohen-Macaulay 環 である。

定理 2.3 (Huneke, 伊藤). 次の条件は全て同値で

ある：

(1) $\overline{p_a}(I) = 0$ 。

(2) $\overline{\delta}(I) \leqslant 2$ 。

(3) $\overline{r}(I) \leqslant 0$ 。

更に，これらの条件が満たされるとき 次数付環 $\overline{G}(I) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \overline{I^n}/\overline{I^{n+1}}$ は Cohen-Macaulay 環 である。

次に曲面の特異点の理論との関係について説明する。R が 解析的正規 であると仮定する。すると Lipman により desingularization $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ が存在し，$p_g(R) := \ell(H^1(X, \mathcal{O}_X))$ は desingularization に依らない整数である（R の幾何種数と呼ばれている）。$p_g(R) = 0$ なるとき R は 有理型特異点，$p_g(R) = 1$ なるとき R は 楕円型特異点 であると言う。我々にとって重要なのは一般に 関係式

$$p_g(R) = \sup\{\, \overline{g}(I) \mid I \text{ は } R \text{ の } m\text{-準素イデアル} \,\}$$

が 成立することである。従って，例えば R が 有理型特異点 であるためには，任意の m-準素イデアル I に対して $\overline{g}(I) = 0$ が 成り立つことが 必要十分である。

さて，今回 報告するのは 次の 結果である：

定理 2.4. R が曲面の楕円型特異点とすると，任意の整閉 $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して次数付環 $G(I)=\bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ は Cohen-Macaulay 環で，更に $emb(R)\leqslant e(R)$ とすると $\mathfrak{m}^n$ が全ての n について整閉である。

証明のために $\bar{g}(I)=1$ なるイデアルについて調べる。まず $\bar{g}(I)=1$ であるためには $\overline{g_s}(I)=1$ かつ $\overline{p_a}(I)=0$ であることが必要十分である。

補題 2.5. I が整閉とする。一般に不等式 $\overline{g_s}(I)\geqslant g_\Delta(I)$ が成り立つ。等式 $\overline{g_s}(I)=g_\Delta(I)$ が成り立つためには $p_a(I)=0$ かつ I^n が全ての n について整閉であることが必要十分で，更にこのとき次数付環 $G(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

証明は先の記号を使って $\overline{g_s}(I)=g_\Delta(I)+\ell(\overline{I^2}/I^2)+\sum_{n=2}^{\infty}\overline{v_n}$ なることから明白である。（$G(I)$ についての主張は (2.3) から分る。）

系 2.6. I が整閉で $\overline{g_s}(I)\leqslant 1$ とすると次数付環 $G(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

証明. $g_\Delta(I)=0$ ならば $G(I)$ は Cohen-Macaulay (G. Valla)。 $g_\Delta(I)\geqq 1$ とすると $1\leqq g_\Delta(I)\leqq \overline{g_s}(I)\leqq 1$ より $\overline{g_s}(I)=g_\Delta(I)=1$。 従って (2.6) により $G(I)$ は Cohen-Macaulay。

命題 2.7. I が整閉のとき 次の条件は全て同値である:

(1) $\overline{g}(I)=g_\Delta(I)=1$ 。

(2) $\overline{g}(I)=1$ かつ $g_\Delta(I)\geqq 1$ 。

(3) $g_s(I)=1$ かつ I^n が全ての n について整閉。

証明. (1)$\Longleftrightarrow$(2) は不等式 $\overline{g}(I)\geqq\overline{g_s}(I)\geqq g_\Delta(I)$ より明白。

(1)$\Longrightarrow$(3): [大石 2] より $g_s(I)=0$ と $g_\Delta(I)=0$ は同値である。 従って $1=\overline{g}(I)\geqq\overline{g_s}(I)\geqq g_s(I)\geqq 1$ より $\overline{g}(I)=\overline{g_s}(I)=g_s(I)=g_\Delta(I)=1$。 よって (2.5) より I^n は全ての n について整閉である。

(3)$\Longrightarrow$(1): $1=g_s(I)=\overline{g_s}(I)\geqq g_\Delta(I)\geqq 1$ より $\overline{g_s}(I)=g_\Delta(I)=1$。 よって (2.5) より $\overline{p_a}(I)=0$ で $\overline{g}(I)=\overline{p_a}(I)+\overline{g_s}(I)=1$。

定理2.4の証明： 先ず $\bar{g}_s(I) \leqslant \bar{g}(I) \leqslant p_g(R) = 1$ なので（2.6）より 次数付環 $G(I)$ は Cohen-Macaulay。次に $\mathrm{emb}(R) \leqslant e(R)$ とすると $1 \geqslant \bar{g}(R) \geqslant g_\Delta(R) \geqslant 1$ より $\bar{g}(R) = g_\Delta(R) = 1$。従って（2.7）により $\mathfrak{m}^n$ が全ての n について整閉である。

例. $R = \mathbb{C}[[X, Y, Z]]/(X^2 + Y^4 + Z^4)$ とすると $p_g(R) = 1$ だが $\overline{\mathfrak{m}^2} \neq \mathfrak{m}^2$。 従って（2,4）の後半の主張で条件 $\mathrm{emb}(R) \leqslant e(R)$ は外せない。（因に，このRについては $\bar{g}(R) = \bar{g}_s(R) = 1$, $g(R) = g_s(R) = \bar{p}_a(R) = p_a(R) = g_\Delta(R) = 0$。）

参考文献

[大石 1] A. Ooishi, Genera and arithmetic genera of commutative rings, Hiroshima Math. J. 17 (1987), 47–66.

[大石 2] A. Ooishi, Δ-genera and sectional genera of commutative rings, Hiroshima Math. J. 17 (1987), 361–372.

[大石 3] 大石，可換環の種数について，第32回代数学シンポジウム（1986年7月）報告集，159–178.

（December 1988）

Syzygy problem について

高知大 理 小駒哲司

Evans と Griffith による次の定理を考える. [1]

定理. 体を含む Cohen Macaulay 局所整域 A 上の加群 M が、自由でなく $pd_A M < \infty$ かつ k 番目の syzygy となるものとする。この時. $\mathrm{rank}\, M \geq k$ となる。

homological 予想の立場は. 正則環上の加群の一般的性質は. 一般の環上でも有限射影次元を持つ加群の一般的性質となるであろうということであり. Cohen Macaulay 整域という前提条件は、この思想からすれば当然除かれるべきだということになる。(「体を含むことについてはどうなんだ?」とその人の先生が陰で言っていたと、告げてくれた方がいたが. この先生の言も もとより もっともである。今回は この点については何も言えないが. 近いうちに この

条件も除けたろうと考えている。）Evans と Griffith 自身もこの点は気になったと見えて、彼ら自身により、Cohen Macaulay 整域という条件は、universally catenary で equi-dimensional [2][3]，又は、Serre の条件 S_k [4] で置き換えても成立することを示している。

本稿の目的は、これらの条件はすべて除けることの概略を示すことである。（詳しい証明は [6] を参照。）

先ず、$\mathrm{pd}\, M < \infty$ なる A-加群 M は、M の射影分解 $F_\cdot$ により $\operatorname{rank} M = \sum_{i=0} (-1)^i \operatorname{rank} F_i$ で問題なく定義されることに注意しておこう。又 $x \in M$ について

$$\mathcal{O}_M(x) = \{ f(x) \mid f \in \mathrm{Hom}_A(M, A) \}$$

である。

さて、Evans と Griffith のアイデアは k-番目の syzygy という条件を、取扱い易い S_k に置換えて成功したので

あるが、その為には Cohen Macaulay 的条件が除けなかった。そこで我々のアイデアは次の概念である。

A-加群 M が T_k であるとは、次のことが成立することである。任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ について、$M_\mathfrak{p}$ は自由 $A_\mathfrak{p}$-加群であるか又は、 $\operatorname{depth} A_\mathfrak{p} \geq \operatorname{depth} M_\mathfrak{p} \geq k$ が成立。

Remark 1. 上の定義で、k ではなくて $\min(k, \operatorname{ht}\mathfrak{p})$ が元の（本当の？）定義であるが、M が k 番目の syzygy で $\operatorname{pd} M < \infty$ という条件から今の場合はどちらでもうまくいく。ここでは簡略の方で示すことにする。

証明は、Evans と Griffith によるもの [1] に平行に行なわれる。すなわち、定理の反例があったとして、それはどのようなものになるかを考える。

命題 2　　M は、$\operatorname{pd} M < \infty$, T_k, $r = \operatorname{rank} M$ なる A-加群で自由でないとする。$r < k$ が成り立つと仮定する。今、M はそのような条件を満たすものの

うち最小のrankをもつものとし、又Aも局所化によって Krull次元を最小にしておく。その時、Mの元xで $x \notin \mathfrak{m}M$（$\mathfrak{m}$はAの極大イデアル）となるものについて $\mathrm{ht}\,\mathfrak{O}_M(x) \le r$であり、$x$は$M/\mathfrak{O}_M(x)M$で長さ有限の0でないA-加群を生成する。更に、Mは$\mathrm{Spec}\,A-\{\mathfrak{m}\}$でlocally free.

この証明には、次の2つの補題を必要とする。

命題2の最初の仮定の下で、

補題3　$x \in M$が$\mathrm{ht}\,\mathfrak{O}_M(x) \geq k > r$とすれば、

$$\mathrm{Ann}_A\, x = 0.$$

証明）　$a \in A$について、$ax = 0$とする。Aの素イデアル$\mathfrak{p}$が$\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{O}_M(x)$であれば、$A_\mathfrak{p}x \simeq A_\mathfrak{p}$となって$a_\mathfrak{p} = 0$がわかる。

$M_\mathfrak{p}$が自由A-加群となる時は、$M_\mathfrak{p}$のbaseを一つ決めて$x = (x_1, \ldots, x_r)$と表わせば、$\mathfrak{O}_M(x)_\mathfrak{p} = \sum_{i=1}^{r} x_i A_\mathfrak{p}$がわかるから、$\mathfrak{O}_M(x) = A_\mathfrak{p}$である。実際、もしそうなら

なければ，Krullの単項イデアル定理より $ht\, \mathcal{O}_M(x)_{\mathfrak{q}} \leq r < k$

となり，仮定に反するからである。

$\mathfrak{q} \supseteq \mathcal{O}_M(x)$ のときは，$ht\, \mathfrak{q} \geq k$ となり，上の議論から

$M_{\mathfrak{q}}$ は自由でない。よって $\operatorname{depth} A_{\mathfrak{q}} \geq \operatorname{depth} M_{\mathfrak{q}} \geq k$

となって $\mathfrak{q} \notin \operatorname{Ass}_A A$ がわかる。

以上より，すべての $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_A A$ について $a_{\mathfrak{q}} = 0$ がわかり，

$a = 0$ を得る。

補題 4. $x \in M$ が $ht\, \mathcal{O}_M(x) \geq k$ であれば

M/Ax は T_{k-1} である。

証明）　補題 3 より完全列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow M/Ax \longrightarrow 0$$

が得られ，補題 3 の議論を援用して主張を得る。

命題 2 の証明

$ht\, \mathcal{O}_M(x) > r$ であれば，補題 4 より M/Ax は

T_r であり，$\operatorname{pd} M/Ax < \infty$．これは $\operatorname{rank} M$ の最小性

に反する．よって $\mathrm{ht}\, \mathfrak{a}_M(x) \leq r$．特に $\mathfrak{a}_M(x) \subseteq \mathfrak{m}$．

また，素イデアル $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$ によって $M_{\mathfrak{q}}$ が自由でなければ，A を $A_{\mathfrak{q}}$ に置き換えることにより，Krull 次元が下がって取り方に反する．よって $M_{\mathfrak{q}}$ は自由 $A_{\mathfrak{q}}$-加群．

$M_{\mathfrak{q}}$ の base を決めて $x = (x_1, \dots, x_r)$ と表わせば，

$x_i \in \mathfrak{a}_M(x)_{\mathfrak{q}}$ $(i = 1, \dots, r)$。よって $x \in \mathfrak{a}_M(x) M_{\mathfrak{q}}$，すなわち

x は $M/\mathfrak{a}_M(x)M$ で長さ有限の A-加群を生成し，

$x \notin \mathfrak{m}M$ よりそれは 0 でない。

universally catenary や equi-dimensonal の条件を排除するのに，次の補題が必要であるが，知られていると思われるので証明は省略．

補題 5．　局所環 $(A, \mathfrak{m})$ の素イデアル $\mathfrak{q}$ について

$$\mathrm{ht}\, \mathfrak{q} + \dim A/\mathfrak{q} \geq \mathrm{depth}\, A$$

が成り立つ。

homological 予想については，new intersection property まで一般のnoether環がもつことが最近知られたが[7] 我々には，それより少し強い improved new intersection property が必要である。すなわち，

(I.N.I.) 局所環 $(B, \mathfrak{n})$ 上の自由加群の complex

$F_\bullet$ $\qquad 0 \to F_d \to F_{d-1} \to \cdots \to F_0 \to 0$

で $H_i(F_\bullet)$ $(1 \le i \le d)$ は長さ有限，かつ $\mathfrak{n}H_0(F_\bullet)$ に含まれない長さ有限の元が $H_0(F_\bullet)$ にあれば，$\dim B \le d$.

Hochster により，体を含む環は improved new intersection property をもつことが示されている。[5]

定理 6. 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ はその準同型像の局所化がすべて improved new intersection property を持つとする。A-加群 M が自由でなく，T_k で $\mathrm{pd}\,M < \infty$ とする。この時 $r = \mathrm{rank}\,M \ge k$ である。

証明）主張が成立しなかったとして，そのような M の

うちで r が最小かつ環 A の Krull 次元も最小に取ると．命題 2 より $x \in M \setminus \mathfrak{m}M$ について

$$\mathrm{ht}\, \mathfrak{O}_M(x) \leq r < k$$

である。$\mathrm{ht}\,\mathfrak{q} < k$，$\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{O}_M(x)$ となる素イデアル $\mathfrak{q}$ を取り，$B = A/\mathfrak{q}$ を M の minimal free resolution

$$0 \to F_d \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$$

に Tensor すると，自由 B-加群の complex

$$0 \to \overline{F_d} \to \cdots \to \overline{F_0} \to 0$$

で $H_0(\overline{F.}) = \overline{M}$ となるものを得る。但し A-加群 N について $\overline{N}$ は $N \otimes_A B = N/\mathfrak{q}N$ を意味する。

M は $\mathrm{Spec}\, A - \{\mathfrak{m}\}$ で locally free より $H_i(\overline{F.})$ $(1 \leq i \leq d)$ は長さ有限，一方補題 5 より

$$d = \mathrm{pd}_A M \leq \mathrm{depth}\, A - k \leq \dim B + \mathrm{ht}\,\mathfrak{q} - k < \dim B$$

である。x は $M/\mathfrak{O}_M(x)M$ で長さ有限の部分加群を生成するので，$H_0(\overline{F.})$ でもそうである。よって $d < \dim B$

は improved new intersection property に矛盾する。

系 7. 体を含む局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の加群 M が自由でなく $\mathrm{pd}\, M < \infty$ かつ k 番目の syzygy となるものとする。このとき，$\mathrm{rank}\, M \geq k$ である。

証明） 定理 6 より、M が T_k となることを示せばよい。

A の素イデアル $\mathfrak{p}$ について，$M_{\mathfrak{p}}$ が $A_{\mathfrak{p}}$ 上自由でなければ，$M_{\mathfrak{p}}$ はやはり k-番目の syzygy で $\mathrm{pd}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} < \infty$ となる。

よって

$$k \leq \mathrm{depth}\, A_{\mathfrak{p}} = \mathrm{depth}\, M_{\mathfrak{p}} + \mathrm{pd}\, M_{\mathfrak{p}}$$

が導かれ， $\mathrm{depth}\, A_{\mathfrak{p}} \geq \mathrm{depth}\, M_{\mathfrak{p}} \geq k$ がわかる。

References

1. Evans, E.G. and Griffith, P. The syzygy problem, Annals of Math. 114 (1981) 323-353.
2. Evans, E.G. and Griffith, P. The syzygy problem; a new proof and historical perspective, Commutative Algebra: Durham 1981, London Math. Soc. Lecture note Ser.72 (1982) 2-11.
3. Evans, E.G. and Griffith, P. Order ideals of minimal generators, Proc. Amer. Math. Soc. (1982) 375-378.
4. Evans, E.G. and Griffith, P. Syzygies, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 106 (1985).
5. Hochster, M. Canonical elements in local cohomology modules and the direct summand conjecture, J. Algebra 84 (1983) 503-553.
6. Ogoma, T. A note on the syzygy problem, forthcoming.
7. Roberts, P. Le theoreme d'intersection, C. R. Acad. Sc. Paris, t 304 Serie 1 no 7 (1987).

2－Buchsbaum complex について

京都大学理学部数学教室・宮崎　充弘

1．Stanley-Reisner環

Kを体とし、K上の多項式環$A=K[x_1,\ldots,x_n]$をmonomialで生成されたイデアルIで割った環を考えたいとする。

$$I=(m_1,m_2,\ldots,m_t),\ m_i=x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

とするとき、新しい変数$x_{11},x_{12},\ldots,x_{21},x_{22},\ldots,x_{n1},x_{n2},\ldots$を用意して、

$$m'_i=x_{11}x_{12}\cdots x_{1i_1}x_{21}x_{22}\cdots x_{ni_n}$$

とおき、

$$I'=(m'_1,\ldots,m'_t)$$

を$A'=K[x_{ij}\mid x_{ij}$は$m'_1,m'_2,\ldots,m'_t$の中に現れる$]$　のイデアルとすれば、A/IはA'/I'をregular sequence $x_{11}-x_{12},x_{11}-x_{13},\ldots,x_{21}-x_{22},\ldots,x_{n1}-x_{n2},\ldots$で生成されるイデアルで割った環になる。従って多くの問題を考えるにあたって、Iはsquare freeなmonomialで生成されていると考えて良いことになる。そこで以下では、Iがsquare freeなmonomialで生成されているとする。

$V=\{x_1,\ldots,x_n\}$を変数全体の集合とし、$\Delta=\{\sigma\subseteq V\mid(\Pi_{x\in\sigma}x)\notin I\}$とおけば$\Delta$は、

（i）$\sigma\in\Delta$、$\tau\subseteq\sigma\ \Rightarrow\ \tau\in\Delta$

をみたす。さらに、余分な変数を取り除いて、すべての$x\in V$に対して、$x\notin I$であるとすれば、

（ii）すべての$x\in V$に対し、$\{x\}\in\Delta$

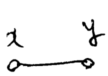
となり、ΔはVを頂点集合とする有限単体複体であることがわかる。

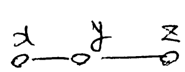
逆に、Vを頂点集合とする有限単体複体Δが与えられたとき、Vの元をそのまま変数だと思って多項式環$K[x\mid x\in V]$をつくり、

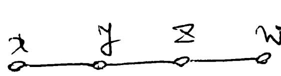
$$I_\Delta=(x_{i_1}\cdots x_{i_t}\mid\{x_{i_1},\ldots,x_{i_t}\}\notin\Delta)$$

とすれば、I_Δはsquare free なmonomialで生成されたイデアルになり、この対応により、Vを頂点集合とする有限単体複体と、$K[x\mid x\in V]$の、変数を含まない、square freeなmonimialで生成されたイデアルとは１対１に対応する。従って、多項式環をmonomialで生成されたイデアルで割った環の研究は、有限単体複体の研究に置き換えられることになる。そこで$K[x\mid x\in V]/I_\Delta$を$K[\Delta]$と書き表し、Stanley-Reisner環と呼ぶ。

Example

$\Delta=$  $\quad K[\Delta]=K[x,y]$

$\Delta=$  $\quad K[\Delta]=K[x,y,z]/(xz)$

$\Delta=$ 

$$K[\Delta]=K[x,y,z,w]/(xz,xw,yw)$$

Δが有限単体複体であるとき、Δの元のことをΔのfaceと呼び、極大なfaceのことをfacetと呼ぶ。このとき、

$$I_\Delta = \bigcap_{\sigma:\mathrm{facet}} P_\sigma$$

（但し、$P_\sigma = (x \in V \mid x \notin \sigma)$）は$I_\Delta$のprimary decompositionなので、$K[\Delta]$はreduced ringである。また、

$$\dim K[\Delta] = \max \operatorname{coht} P_\sigma = \dim \Delta + 1$$

であることもわかる。

$K[\Delta]$がCohen-Macaulay（Buchsbaum、etc.）であるときに、ΔはK上Cohen-Macaulay（Buchsbaum、etc.）であるという。また、Δのfacetの次元がすべて等しいとき、Δはpureであるという。以下、体Kを固定して話を進めるので、「K上」という言葉は省略する。また以下では、多項式環$k[x \mid x \in V]$をAで表し、その変数で生成された極大イデアル$(x \mid x \in V)$をmで表す。

2. Topological properties of Cohen-Macaulay and 2-Cohen-Macaulay complexes

上にみたように、２つの複体Δ_1とΔ_2の幾何学的実現が同相であったとしても、それらのStanley-Reisner環の様子はだいぶ違ったものになっている。ところが、Cohen-Macaulayという性質に関していえば、同相なもので置き換えても保たれることが、Reisner,Munkresによって知られているので、以下にその概要を述べる。まず次の定理を認めることから始めよう。（証明は［５］参照）

定理２．１（Hochster）αをZ^nの任意の元とするとき、

$$H_m^i(K[\Delta])_\alpha = \begin{cases} \tilde{H}_{i-\#\mathrm{supp}\,\alpha-1}(\mathrm{link}_\Delta(\mathrm{supp}\,\alpha)) & \text{if } \alpha \leqq 0, \mathrm{supp}\,\alpha \in \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

但し、$\sigma \in \Delta$に対し、$\mathrm{link}_\Delta(\sigma) = \{\tau \in \Delta \mid \tau \cap \sigma = \phi, \tau \cup \sigma \in \Delta\}$。また、$\mathrm{supp}\,\alpha = \{x_j \mid \alpha_j \neq 0\}$。

系２．２（Reisner）次の２条件は同値。

（１）ΔはCohen-Macaulay。

（２）任意の$\sigma \in \Delta$と$i < \dim(\mathrm{link}_\Delta(\sigma))$に対し、$\tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta(\sigma)) = 0$

証明　（１）⇒（２）上の定理と、次のことからただちにわかる。

$$\dim K[\Delta] = \dim \Delta + 1$$
$$\dim(\mathrm{link}_\Delta(\sigma)) \leqq \dim \Delta - \#\sigma$$

（２）⇒（１）Δがpureであることをいえばよい。$\dim\Delta$に関する帰納法で示す。$\dim\Delta \leqq 0$のときは、常にΔはpure。

$\dim\Delta \geqq 1$とする。$\Delta = \mathrm{link}_\Delta(\phi)$なので、$H_0(\Delta) = 0$。即ち、$\Delta$は連結。一方帰納法の仮定から、任意のproperなlinkはpureなので、Δ自身もpureであることがわかる。

系２．３（Munkres）$|\Delta| = X$とするとき、次の２条件は同値。

（１）ΔはCohen-Macaulay。

（２）任意$p \in X$と、$i < \dim X$に対し、$\tilde{H}_i(X) = H_i(X, X-p) = 0$

証明　$p\in X$ が $\sigma\in\Delta$ のinterior pointであるとき、

$$H_i(X,X-p)=\tilde{H}_{i-\#\sigma}(\mathrm{link}_\Delta(\sigma))$$

であることからわかる。

最後に得られたCohen-Macaulaynessの特徴付けは、Xの三角形分割によらないものなので、Cohen-Macaulayという性質は同相な複体で置き換えても保たれることがわかる。

次にBaclawskiによって定義された2-Cohen-Macaulay（doubly Cohen-Macaulay）という概念について述べる。

定義２．４　Δ がCohen-Macaulayで、かつ、任意の $x\in V$ に対して Δ から x を取り除いて得られる複体（x を含むfaceはすべて除かれる）$\Delta\setminus x$ もCohen-Macaulayで、$\dim\Delta=\dim(\Delta\setminus x)$ であるときに、Δ は2-Cohen-Macaulayであるという。

2-Cohen-Macaulayという性質も三角形分割のしかたによらないことが知られている。

定理２．５（Walker）Δ をCohen-Macaulay複体、$X=|\Delta|$ とするとき、次の２条件は同値。

（１）Δ は2-Cohen-Macaulay。

（２）任意の $p\in X$ に対し、$\tilde{H}_{\dim X-1}(X-p)=0$

実をいうと、筆者は当初、Walkerの結果について2-Cohen-Macaulayという性質が三角形分割によらないということだけしか知らなかったので、その証明を自分なりに考えたところ、次のようなものが得られた。

定理２．６　Δ をCohen-Macaulay複体、$\dim\Delta=d-1$、$X=|\Delta|$ とするとき、次の４条件は同値。

（１）Δ は2-Cohen-Macaulay。

（２）任意のnon empty face $\sigma\in\Delta$ に対し、canonical map

$$\tilde{H}_{d-1}(\Delta)\rightarrow H_{d-1}(\Delta,\Delta\setminus\sigma)$$

は全射。但し、$\Delta\setminus\sigma=\{\tau\in\Delta\mid\tau\not\supseteq\sigma\}$。

（３）任意のnon empty face $\sigma\in\Delta$ に対し、$\tilde{H}_{d-2}(\Delta\setminus\sigma)=0$。

（４）任意の $p\in X$ に対し、$\tilde{H}_{\dim X-1}(X-p)=0$

（証明は［３］参照）

この（２）がBuchsbaum caseを考えるときに重要な役割をはたす。

３．Topological propreties of Buchsbaum and 2-Buchsbaum complexes.

ここでも、次の定理を認めることから始めよう。（証明は［２］参照）

定理３．１　$m_l(x_1^l,\ldots,x_n^l)$ とするとき、

$$\mathrm{Ext}_A^i(A/m_l, K[\Delta])_\alpha$$
$$=\begin{cases}\tilde{H}_{i-\#\mathrm{supp}\,\alpha-1}(\mathrm{link}_\Delta(\mathrm{supp}\,\alpha-E)_{V-E}) & \text{if } \alpha\in\{0,-1,\ldots,-l\}^n\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

但し、$E=\{x_j \mid \alpha_j=-l\}$。また、Vの部分集合Wに対し、$\Delta_W=\{\sigma\in\Delta \mid \sigma\subseteq W\}$。

さらに、$\alpha\in\{0,-1,\ldots,-l+1\}^n$のときは、canonical map

$$\mathrm{Ext}_A^i(A/m_l, K[\Delta])_\alpha \to H_m^i(K[\Delta])_\alpha$$

は同型。

系３．２（Schenzel）次の３条件は同値。

（１）ΔはBuchsbaum。

（２）Δはpureで、任意のnon empty face σに対し、$\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$はCohen-Macaulay。

（３）$X=|\Delta|$とすると、任意の$p\in X$と$i<\dim X$に対し、$H_i(X,X-p)=0$

証明　上の定理と、定理２．１から、（１）と次の（４）が同値であることがsurjectivity criterionによりわかる。

（４）任意のnon empty face σに対し、

$$\tilde{H}_{i-\#\sigma-1}(\mathrm{link}_\Delta(\sigma))=0 \quad (\text{if } i<\dim\Delta)$$

これと、$\mathrm{link}_\Delta(\sigma\cup\tau)=\mathrm{link}_{\mathrm{link}_\Delta(\sigma)}(\tau)$であることから容易にわかる。

特に、（３）の性質は三角形分割によらないものなので、Buchsbaumという性質は同相な複体で置き換えても保たれることがわかる。

次に、Cohen-Macaulayの場合にならい次の定義をする。

定義３．３　ΔがBuchsbaumで、かつ、任意の$x\in V$に対してΔからxを取り除いて得られる複体$\Delta\setminus x$もBuchsbaumで、$\dim\Delta=\dim(\Delta\setminus x)$であるときに、$\Delta$は2-Buchsbaumであるという。

この2-Buchsbaumという性質に対しても、それが同相な複体で置き換えても保たれるかという疑問が生じるが、これは肯定的に解決することができた。まず次の補題を用意する。

補題３．４　Δはpureな複体であるとする。このとき、Δが2-Buchsbaumであることと、任意のnon empty face σに対し$\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$が2-Cohen-Macaulayであることは同値。

証明　$x\notin\sigma$であれば、

$$\mathrm{link}_{\Delta_{V-x}}(\sigma)=\mathrm{link}_\Delta(\sigma)_{V-x}$$

となることからわかる。

定理３．５　ΔがBuchsbaumで、$\dim\Delta=d-1$であるとするとき、次の４条件は同値。

（１）Δは2-Buchsbaum。

（２）$\sigma\supseteq\tau$を満たす任意のnon empty faces σ、τに対し、canonical map

$$H_{d-1}(\Delta,\Delta\setminus\tau)\to H_{d-1}(\Delta,\Delta\setminus\sigma)$$

は全射。
（３） $\sigma \supseteq \tau$ を満たす任意のnon empty faces σ、τ に対し、

$$H_{d-2}(\Delta \setminus \sigma, \Delta \setminus \tau)=0$$

（４）任意の $p \in X$ に対し、pを含む開集合Uで次の（ａ），（ｂ）を満たすものが存在する。

（ａ）包含写像からinduceされたホモロジー群の写像

$$\tilde{H}.(X-U) \to \tilde{H}.(X-p)$$

は同型。

（ｂ）任意の $q \in U$ に対し、

$$H_{d-2}(X-q, X-U)=0$$

証明の概略　（１）⇔（２）は上の補題と、定理２．６と次の事実からわかる。

$$H_{d-1}(\Delta, \Delta \setminus \tau) \cong \tilde{H}_{d-\#\tau-1}(\mathrm{link}_\Delta(\tau))$$

$$H_{d-1}(\Delta, \Delta \setminus \sigma) \cong H_{d-\#\tau-1}(\mathrm{link}_\Delta(\tau), \mathrm{link}_\Delta(\tau) \setminus (\sigma-\tau))$$

であり、canonical mapがこれらの同型によって保たれる。
（２）⇔（３）　ホモロジー群のlong exact sequence

$$H_{d-1}(\Delta, \Delta \setminus \tau) \to H_{d-1}(\Delta, \Delta \setminus \sigma)$$

$$\to H_{d-2}(\Delta \setminus \sigma, \Delta \setminus \tau) \to H_{d-2}(\Delta, \Delta \setminus \tau)$$

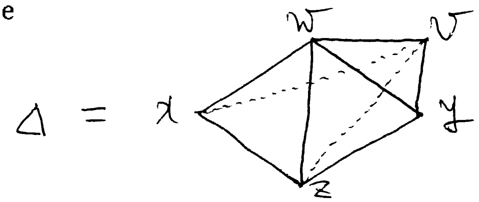
において、$H_{d-2}(\Delta, \Delta \setminus \tau) \cong \tilde{H}_{d-\#\tau-2}(\mathrm{link}_\Delta(\tau))=0$ であることからわかる。
（３）⇔（４）pを内点として含む Δ のfaceを τ とすると、$U=X-|\Delta \setminus \tau|$ の場合を考えれば良いことがわかる。（これには多少の議論を要する。）qが $\sigma \supseteq \tau$ の内点であれば、$q \in U$ で、多少の議論により

$$H_{d-2}(X-q, X-U) \cong H_{d-2}(\Delta \setminus \sigma, \Delta \setminus \tau)$$

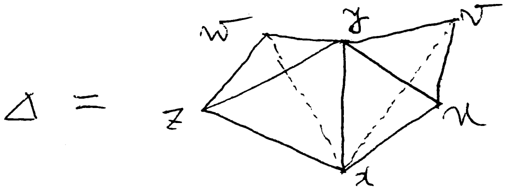
であることがわかる。これから結論が導かれる。

特にこの定理の条件（４）は、Xの三角形分割に無関係なので、2-Buchsbaumという条件は同相な複体で置き換えても保たれることがわかった。

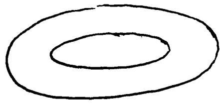
Example



$K[\Delta]=K[x,y,z,w,v]/(xy,xzwv,yzwv)$　2-Cohen-Macaulay



$K[\Delta]=K[x,y,z,w,u,v]/(zu,zv,wu,wv,xyzw,xyuv)$
Cohen-Macaulay、2-Buchsbaumでない

$|\Delta| \approx$  torus

2-BuchsbaumであるがCohen-Macaulayでない

4. Skeletons

前節までで2-Cohen-Macaulayや2-Buchsbaumの特徴付けが得られたわけだが、2-Cohen-Macaulayあるいは2-Buchsbaumであるような複体の例をたくさん作る方法はないであろうか。その一つがこの節で述べるskeletonをとることである。

まずBaclawskiによる2-Cohen-Macaulay複体の特徴付けから始めよう。次の定理を認めることから始める。（証明は［2］参照）

定理4．1（Hochster）

$$\mathrm{Tor}_i^A(K[\Delta],K)_\alpha = \begin{cases} \tilde{H}_{\#\mathrm{supp}\,\alpha - i - 1}(\Delta_{\mathrm{supp}\,\alpha}) & \text{if } \alpha \in \{0,1\}^n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

定理4．2（Baclawski）ΔはCohen-Macaulayで、$\dim\Delta = d-1, \#V = n$であるとする。このとき、次は同値。

（1）Δは2-Cohen-Macaulay。

（2）$\mathrm{Tor}_{n-d}^A(K[\Delta],K)_\alpha = 0 \quad \text{if}\ \alpha \neq (1,1,\ldots,1)$

証明

$$0 \to F_{n-d} \to F_{n-d-1} \to \cdots \to F_0 \to K[\Delta] \to 0 \qquad (*)$$

を$K[\Delta]$のA-moduleとしてのminimal free resolutionであるとする。任意の$x \in V$に対して$K[\Delta \setminus x]$は$K[\Delta]$のxに関するdegreeが0の部分なので、

$$\cdots \to G_{j+1} \to G_j \to G_{j-1} \to \cdots \qquad (**)$$

を（$*$）のxに関するdegreeが0の部分であるとすれば、（$**$）は$K[\Delta \setminus x]$の$B = A/(x)$-moduleとしてのminimal free resolution。従って

$\Delta \setminus x$がCohen-Macaulayで、$\dim(\Delta \setminus x) = d-1 \iff G_{n-d} = 0$

xをVの元全体にわたって走らせれば、

Δは2-Cohen-Macaulay $\iff (F_{n-d})_\alpha = 0$ if $\mathrm{supp}\,\alpha \neq V$

これとHochsterの定理4．1から結論を得る。

2-Cohen-Macaulaynessのこの特徴付けを用いて、次の結果が得られる。

定理4．3（日比）Δのfaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$が次の条件を満たしているとする。

（i）$\sigma_i \cup \sigma_j \notin \Delta \quad \text{if}\ i \neq j$

（ii）$\Delta_1 = \{\tau \in \Delta \mid \forall i; \sigma_i \subsetneq \tau\}$とするとき、$\dim\Delta_1 < \dim\Delta$。

このとき、ΔがCohen-Macaulayであれば、Δ_1は2-Cohen-Macaulay。特に、Δの$(\dim\Delta - 1)$-skeletonは2-Cohen-Macaulay。

証明　$\dim\Delta = d-1, \#V = n$とする。

$$\alpha^{(i)}=(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},\dots,\alpha_n^{(i)}),\ \alpha_j^{(i)}=\begin{cases}1 & \text{if } x_j\notin\sigma_i\\ 0 & \text{if } x_j\in\sigma_i\end{cases}$$

によって$\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\dots,\alpha^{(t)}$を定義すれば、次のexact sequenceが得られる。（［１］参照）

$$0\to\bigoplus_{i=1}^{t}K[\mathrm{star}_\Delta(\sigma_i)](-\alpha_i)\to K[\Delta]\to K[\Delta_1]\to 0 \qquad (***)$$

但し$\sigma\in\Delta$に対し$\mathrm{star}_\Delta(\sigma)=\{\tau\in\Delta \mid \tau\cup\sigma\in\Delta\}$。
$K[\mathrm{star}_\Delta(\sigma_i)]=K[\mathrm{link}_\Delta(\sigma_i)][x \mid x\notin\sigma_i]$なので、仮定とBaclawskiの定理４．２により、

$$\mathrm{Tor}^A_{n-d}(K[\mathrm{star}_\Delta(\sigma_i)](-\alpha_i),K)_\alpha=0 \text{ if } \alpha\neq(1,1,\dots,1)。$$

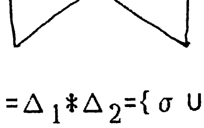
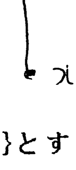
一方（＊＊＊）から$\mathrm{depth}K[\Delta_1]\geq d-1$なので（$\Delta$および$\mathrm{star}_\Delta(\sigma_i)$はすべてCohen-Macaulayで次元が$d-1$であることに注意）、$\Delta_1$はCohen-Macaulayで$\dim\Delta_1=d-2$。従ってBaclawskiの定理から結論を得る。

2-Buchsbaumnessに対しても類似の結果が成り立つ。

定理４．３　$\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_t$が定理＊・＊の条件（ｉ）、（ｉｉ）を満たしているとする。いま、ΔがBuchsbaumで、各$\mathrm{link}_\Delta(\sigma_i)$が2-Cohen-Macaulayであれば、$\Delta_1$は2-Buchsbaum。特に、$\Delta$の$(\dim\Delta-1)$-skeletonは2-Buchsbaum。
証明　σをΔ_1の任意のnon empty faceとする。$\mathrm{link}_{\Delta_1}(\sigma)$は、$\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$に$\Delta$から$\Delta_1$を作ったのと同じ操作を施して得られる。よって定理４．２により$\mathrm{link}_{\Delta_1}(\sigma)$は2-Cohen-Macaulay。従って補題３．４によりΔ_1は2-Buchsbaum。

定理４．３のCohen-Macaulayの部分をそのままBuchsbaumに置き換えたstatementには反例がある。

Example

Δ_1 = 　　Δ_2 = 

$(\dim\Delta_1=\dim\Delta_2=1)$、$\Delta=\Delta_1*\Delta_2=\{\sigma\cup\tau \mid \sigma\in\Delta_1,\tau\in\Delta_2\}$とする。
このとき、ΔはCohen-Macaulay（従ってBuchsbaum）で、$\sigma=\{x,y\}$とすると
$\mathrm{link}_\Delta(\sigma)=\Delta_1$:2-Buchsbaum
$\mathrm{link}_{\Delta\setminus\sigma}(x)=\Delta_1$:not 2-Cohen-Macaulay
従って、$\Delta\setminus\sigma$は2-Buchsbaumではない。

文献表

1 T.Hibi, Union and Glueing of a Family of Cohen-Macaulay Partially Ordered Sets, Nagoya Math. J. 107 (1987),91-119.

2 M.Hochster, Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, Ring Theory II, Proc. of the second Oklahoma Conf. (B.R.McDonald and R.Morris, ed.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., No.26, Dekker, New York, 1977, 171-223.

3 M.Miyazaki, Characterizations of Buchsbaum Complexes, to appear in manuscripta mathematica.

4 M.Miyazaki, On 2-Buchsbaum complexes, preprint.

5 R.Stanley, "Combinatorics and Commutative Algebra", Progress in Math., Vol.41, Birkhauser, Boston/ Basel/ Stuttgart, 1983

アルチン環のHilbert数列とDilworth数

関口　ひでみ（名大理）

$(A, \mathfrak{m})$をネーター局所環とする。

$$d(A) = \sup\{\mu(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a}はAのイデアル\}$$

をAのDilworth数という。ここに$\mu(\mathfrak{a})$はイデアル$\mathfrak{a}$の生成元の個数を表わす。Dilworth数が有限値として確定するための必要十分条件は$\dim A \leq 1$である（[1]）。

上のDilworth数は、以下のように一部のアルチン環に限ると、組み合わせ論において古くから研究がなされている、有限半順序集合の"Dilworth数"とみなすことができ、数年前、この点に着目された渡辺純三氏によりその名を与えられた。体k上の多項式環$k[X_1, \cdots, X_n]$とその単項式ばかりから生成されるイデアルIにより$k[X_1, \cdots, X_n]/I$と表わされるアルチン環を単項式型アルチン環と呼ぶことにする。単項式型アルチン環$A = k[X_1, \cdots, X_n]/I$の$k$上のベクトル空間としての単項式による基底$P(A)$をとり、$M \in P(A)$が$N \in P(A)$を割り切るとき$M \leq N$であると定義することにより$P(A)$を半順序集合とみる。$P(A)$の独立集合、すなわち任意の2元が比較不可能であるような$P(A)$の部分集合と、Aの単項式イデアルの極小底とは一対一に対応する。元の個数が最大である独立集合を最大独立集合といい、最大独立集合の元の個数が$P(A)$の"Dilworth数"である。一方、AのDilworth数は単項式イデアルで実現できる（[2]）。従って$P(A)$の"Dilworth数"とAのDilworth数は一致する。

単項式型アルチン環のDilworth数に関して組み合わせ論的に導びかれる諸性質は、環論上の性質として一般のアルチン環にひきつがれることが少なくないが、その証明は、組み合わせ論の結果を直接引用して成される場合もあれば、全く無関係な代数的手法により独立に証明せざるを得ない場合もある。今回の

結果は前者の場合の典型例であり、アルチン環のDilworth数のHilbert数列による制約を具体的な数値で以って述べたものである。

定義

・アルチン環 $(A, \mathfrak{m})$ のHilbert数列 $h(A)$ を

$$h(A) = (1, \ell(\mathfrak{m}), \ell(\mathfrak{m}^2), \cdots, \ell(\mathfrak{m}^s)), \quad \text{但し } \mathfrak{m}^s \neq 0,\ \mathfrak{m}^{s+1} = 0$$

なる自然数の有限列で定義する。

・$h = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$ を自然数の有限列とする。$h(A) = h$ を満たすアルチン環 A が存在するとき h を O-sequence という。

・h, n を自然数とする。二項係数を用いて

$$h = \binom{a_n}{n} + \binom{a_{n-1}}{n-1} + \cdots + \binom{a_j}{j}, \quad a_n > a_{n-1} > \cdots > a_j \geq j \geq 1$$

となる整数 j 及び $a_n, \cdots, a_j$ が一意的に定まる。

$$h^{\langle n \rangle} = \binom{a_n - 1}{n} + \binom{a_{n-1} - 1}{n-1} + \cdots + \binom{a_j - 1}{j}$$

とおく。便宜上、$h^{\langle 0 \rangle} = h$ と定める。

定理

$h = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$ を O-sequence とする。h を Hilbert数列にもつアルチン環のDilworth数の上限は

$$h_0^{\langle 0 \rangle} + h_1^{\langle 1 \rangle} + \cdots + h_s^{\langle s \rangle}$$

である。

定理の意味するところを説明する。まず、自然数列 $h = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$ を固定する。$X_1, \cdots, X_{h_1}$ に関する n 次単項式全体に逆辞書式順序

$$X_1^{\mu_1} \cdots X_{h_1}^{\mu_{h_1}} < X_1^{\nu_1} \cdots X_{h_1}^{\nu_{h_1}}$$

$\Leftrightarrow$ $\mu_{h_1} < \nu_{h_1}$ または $1 \leq l < h_1$ なる l が存在して $\mu_i = \nu_i \ (i > l)$ かつ $\mu_l < \nu_l$

を入れ、この順序で小さいもの h_n 個を $0 \leq n \leq s$ に関して集めた単項式の集合

をP(h)とおく。hがO-sequenceであるための必要十分条件はP(h)が単項式型アルチン環の基底となることであることが知られている([3])。$h_n^{(n)}$はP(h)のn次単項式のうちX_1で割り切れないものの個数であり、hがO-sequenceのときP(h)のDilworth数は$h_0^{(0)}+h_1^{(1)}+\cdots+h_s^{(s)}$である。つまり、逆辞書式順序はアルチン環の基底となり易い単項式の組み合わせを小さい方に寄せて並べた全順序であり、そのような組み合わせは、アルチン環の基底となる限り、Dilworth数を最大にするものでもあるのである。

定理の証明は、既に述べたように、まず、

定理(単)

O-sequence $h=(h_0, h_1, \cdots, h_s)$をHilbert数列にもつ単項式型アルチン環のDilworth数の上限は$h_0^{(0)}+h_1^{(1)}+\cdots+h_s^{(s)}$である。

を示すのであるが、これは煩雑な数え上げの組み合わせ論の問題なので、ここではその概要を述べるにとどめる。必要な道具立ては次のDilworthの定理一つである。

定義

Pを有限半順序集合とする。Pの部分集合Lで任意の2元が比較不可能であるものをPの独立集合、#LをLの大きさという。Pを覆う交わりのない部分集合の組$C=\{C_1, \cdots, C_r\}$で各C_iの任意の2元が比較可能であるものをPの鎖分割、rをCの大きさといい$|C|$で表す。Pの部分集合P_1, P_2のマッチングφとは、$P_1 \times P_2$の部分集合で

i) $(a_1, a_2) \in \varphi$ ならば $a_1 \lessgtr a_2$

ii) $(a_1, a_2) \in \varphi$, $(b_1, b_2) \in \varphi$, $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$ ならば

$a_1 \neq b_1$ かつ $a_2 \neq b_2$

を満たすものをいう。

$d(P_1, P_2) = \min\{\#P_2 - \#\varphi \mid \varphi$ は(P_1, P_2)のマッチング$\}$

とおく。

Dilworthの定理(例えば[4]参照)

Pを有限半順序集合、$d(P)$をPのDilworth数とする。このとき、

i) 任意の独立集合Lと鎖分割Cに対し $\#L \leq |C|$ が成り立ち、また $\#L_0 = |C_0|$ を満たす独立集合L_0及び鎖分割C_0が存在する。$d(P) = \#L_0$ である。

ii) $d(P) = d(P, P)$ である。

定理(単)の証明

$P(\mathfrak{h})$のx_1で割り切れない元全体を$L = \{M_1, \cdots, M_d\}$とし、M_iにx_1の巾を乗じて得られる$P(\mathfrak{h})$の元全体をC_iとすると、L, $C = \{C_1, \cdots, C_d\}$はそれぞれ$P(\mathfrak{h})$の独立集合、鎖分割である。Dilworthの定理 i) より

$$d(P(\mathfrak{h})) = d = h_0^{(0)} + h_1^{(1)} + \cdots + h_s^{(s)}$$

である。次にAを$\mathfrak{h}(A) = \mathfrak{h}$を満たす単項式型アルチン環とする。$x_1, \cdots, x_{h_1}$に関するn次単項式の全体を$I_n$, 逆辞書式順序で$x_1^{n-1}x_k$と$x_k^n$の間にある単項式の全体を$I_n^k$, $P(A) \cap I_n$をP_n, I_n^kの中で小さいもの$\#(P(A) \cap I_n^k)$個を$1 \leq k \leq h_1$に関して集めた単項式の集合をP_n'とおくと、Dilworthの定理 ii) より

$$\begin{aligned} d(P(A)) &= d(P(A), P(A)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{s} d(P_{n-1}, P_n) \\ &= \sum_{n=1}^{s} d(I_{n-1}, P_n) \end{aligned}$$

である。h_1に関する帰納法により

$$d(I_{n-1}, P_n) \leq d(I_{n-1}, P_n')$$

が、nに関する帰納法により

$$d(I_{n-1}, P_n') \leq d(I_{n-1}, P(\mathfrak{h}) \cap I_n)$$

が示されるが、その方法は、I_n^kはその各元をx_kで割ることにより$I_{n-1}^1 \cup \cdots \cup I_{n-1}^k$と同一視できる等、逆辞書式順序の特質を観察して単項式を数え上げることにつきる。

$$\sum_{n=1}^{s} d(I_{n-1}, P(\mathfrak{h}) \cap I_n) = d(P(\mathfrak{h}))$$

であるから $d(P(A)) \leq d(P(\mathfrak{h}))$ である。

Weakly normal ring についての若干の注意

柳　原　弘　志（兵庫教育大学）

Ａは商体Ｋ＝Ｑ（Ａ）をもつ可換整域とする。このときＡがＫにおける準正規化に一致するとき、Ａは準正規環と呼ばれる。同様にＡがＫにおける弱正規化に等しいとき、Ａは弱正規環と呼ばれる。Anderson と Dobbs は論文［1］において次の結果を与えた。

<u>定　理</u>　体Ｋに対して次の条件は互いに同値である：

（ｉ）Ｋの準正規な underring は整閉である。

（ii）Ｋの準正規な underring は root closed である。

（iii）Ｋは有理数体Ｑに同型かまたはＫは有限体の代数拡大体である。

更に彼らはこの定理に於いて、条件（ｉ）、（ii）の「準正規」というところを「弱正規」で置き換えられるかどうかは知らないと述べている。この講演ではまず上の定理に於いて、「準正規」が「弱正規」により置き換えられることを示す。ここで整域Ａの部分環ＢがＡの underring であるというのはＢの商体とＡの商体が一致するときである。

この講演で取り上げるもう一つの話題は論文［２］で与えられている弱正規環の特徴付けに関する命題の証明の誤りを訂正することである。

まず次の結果が必要である。

<u>命　題　1</u>.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

を可換環の pull-back 図形とする。Ａが弱正規環、Ｂが正標数ｐの完全体、Ｃが既約とすると、Ｄは弱正規である。

<u>命　題　2</u>. 命題１と同じ可換環の pull-back 図形｛Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ；α，β，ｆ，ｇ｝において、ＡとＢは標数０の弱正規整域、ｇは単射、Ｃは既約と

する。もしＢの非零因子がgによってＣの非零因子に移れば、Ｄは弱正規である。

定　義. Ａが整域でＫがその商体とする。xをＫの元で、ある自然数nに対し x^n がＡに含まれるならxが常にＡの元であるとき、Ａは root closed であると呼ばれる。更に自然数nが与えられたとき、Ｋの元xで x^n がＡに含まれるならxがＡの元であるとき、Ａは n-root closed であると呼ばれる。

このとき我々の主結果は次のように正標数の場合と標数０の場合に分けて述べられる。まずＡが正標数pの整域のときを考える。

定　理　1. Ａが正標数pの弱正規整域とするとき、次は互いに同値である。
(i) Ａの任意の準正規な underring は整閉である。
(ii) Ａの任意の準正規な underring は root closed である。
(iii) pと異なる素数qでＡの任意の準正規な underring は q-root closed となるものが存在する。。
(iv) Ａの任意の弱正規な underring は整閉である。
(v) Ａの任意の弱正規な underring は root closed である。
(vi) pと異なる素数qでＡの任意の弱正規な underring は q-root closed となるものが存在する。
(vii) Ａは有限体の代数拡大体である。

次にＡの標数が０の場合を考える。

定　理　2. Ａが標数０の弱正規整域とするとき、次は互いに同値である。
(i) Ａの任意の準正規な underring は整閉である。
(ii) Ａの任意の準正規な underring は root closed である。
(iii) Ａの任意の弱正規な underring は整閉である。
(iv) Ａの任意の弱正規な underring は root closed である。
(v) Ａは有理数体の部分環に同型である。

定理１及び２の証明は［１］の主結果の証明の方針に従って与えられる。その場合、［１］においては我々の弱正規環に関する命題１及び２に対応する準正規環に関する結果が用いられているが、それを命題１及び２で置き換える必要がある。更に定理１及び２において、Ａが弱正規整域の代わりに準正規整域

定理(単) ⇒ 定理の証明

$(A, \mathfrak{m})$ を $H(A)$ にわたるアルチン環として $d(A) \leq h_0^{(0)} + h_1^{(1)} + \cdots + h_s^{(s)}$ を示せばよい。

$a_1, \ldots, a_d$ が A のイデアルの極小底であるとき、$a_i \in \mathfrak{m}^{\nu_i}$, $a_i \notin \mathfrak{m}^{\nu_i+1}$ なる ν_i をとり、$G = \mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ の ν_i 次の項が a_i の像で他が 0 であるような元を a_i^* とおくと、$a_1^*, \ldots, a_d^*$ は G のイデアルの極小底であるから $d(A) \leq d(G)$ である。$H(A) = H(G)$ であるから A を G でおきかえて

$$A = k[X_1, \ldots, X_n]/I, \quad k: \text{体}, \quad I: \text{斉次イデアル}$$

なる形としてよい。

$\mathfrak{a}$ を $d(A) = \rho(\mathfrak{a})$ を満たす A のイデアルとするとき $\bar{A} = A/\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ を考えると $d(\bar{A}) \leq d(A)$ であり、一方 $\rho(\mathfrak{a}) = \rho(\bar{\mathfrak{a}}) \leq \rho(0 : \bar{\mathfrak{m}})$ であるから

$$d(A) = d(\bar{A}) = \rho(0 : \bar{\mathfrak{m}})$$

が成り立つ。$H(\bar{A}) \leq H(A)$ より、A を $\bar{A}$ でおきかえて $d(A) = \rho(0 : \mathfrak{m})$ としてよい。

A において k 上一次独立な単項式を逆辞書式順序で小さい順にとったもの全体を P とする。単項式を乗ずるという操作により逆辞書式順序は保たれるから、$P(B) = P$ となる単項式型アルチン環 $(B, \mathfrak{n})$ が存在し、しかも $H(A) = H(B)$ である。

$\{f_{nj}\}$, $\deg f_{nj} = n$ を $0 : \mathfrak{m}$ の極小底とする。各 f_{nj} を P の元の一次結合で

$$f_{nj} = f'_{nj} + a_{nj} M_{nj}$$

とかく。ここに M_{nj} は f_{nj} に現われる単項式のうち逆辞書式順序で最大のもの、$0 \neq a_{nj} \in k$ とする。$M_{nj} = M_{nk}$ のときは f_{nj} を $f_{nj} - \frac{a_{nj}}{a_{nk}} f_{nk}$ でおきかえて $j \neq k$ ならば $M_{nj} \neq M_{nk}$ であるとしてよい。A において $X_i M_{nj} = -X_i f'_{nj}$ が $i = 1, \ldots, n$ について成り立つから、B において $M_{nj} \in 0 : \mathfrak{n}$, 従って $\{M_{nj}\}$ は $0 : \mathfrak{n}$ の極小底の一部をなすことより $\rho(0 : \mathfrak{m}) \leq \rho(0 : \mathfrak{n})$ である。

B に定理(単)を適用すれば $d(B) \leq h_0^{(0)} + h_1^{(1)} + \cdots + h_s^{(s)}$ であるから証明すべきを得る。

上限に関する今回の定理と同様の問題を下限に関して考えた場合、少なくとも上限の場合ほどすっきりした結果は望めないように思われるが、Dilworth数の下界 $\max\{h_0, h_1, \cdots, h_s\}$ に着目するならば、Gorenstein環、或いは complete intersection ring の Dilworth 数はこの値をとりやすい傾向がある。

参考文献

[1] J. Sally, Numbers of generators of ideals in local rings, Marcel Dekker, New York, 1978.

[2] J. Watanabe, The Dilworth number of Artinian rings and finite posets with rank function, Proceedings of coference on commutative algebra and combinatorics, Kyoto 1985, Kinokuniya Co. and North-Holland Publ. Co.

[3] R. Stanley, Hilbert functions of graded algebras, Adv. in Math. 28 (1978) 57-83.

[4] M. Aigner, Combinatorial Theory, Springer, New York, 1979.

とすれば、定理１においては（ｉ）、（ii）、（iii）及び（vii）の間の同値が、また定理２においては（ｉ）、（ii）及び（ｖ）の間の同値が示されることがわかる。

この講演のもう一つの目的は、Dobbs と Fontana による論文［２］において与えられている弱正規環の特徴付けに関する結果の証明の誤りを正すことである。そのためには次の補題が必要である。

補　題. Ｂが可換環で、Ａは極大イデアルＰをもつＢの局所部分環とする。更にＢはＡ上整とする。このとき次の条件の一つが満たされれば、ＡはＢで弱正規である。

（ｉ）ＡはＢで準正規で、剰余体 A/P の標数が０である。

（ii）ＡはＢで準正規で、剰余体 A/P の標数が $p>0$ とする。Ｂの元 x で x^p 及び px がＡに含まれるものはＡの元である。

（iii）Ａの標数は素数冪 p^n とする。Ｂの元 x で x^p 及び px がＡに含まれるものはＡの元である。

この補題を用いれば次の定理を証明できる。

定　理　３. Ｂは可換環で、ＡはＢの部分環でＢがＡ上整となるものとする。このときＡがＢで弱正規であるためには次の条件が満たされることが必要十分条件である。

（ｉ）ＰがＡの素イデアルで A/P の標数が０ならば、A_P は B_P で準正規である。

（ii）ＰがＡの素イデアルで A/P の標数が $p>0$ ならば、B_P の元 x で x^p 及び px が A_P に含まれるものはＡの元である。

論文［２］においては、この定理３のＡが整域でＢがＡの商体におけるＡの整閉被の場合を扱っているが、その証明は完全でない。それは定理３の条件が成り立つとき、ＡがＢで準正規であるということを証明なしに用いているからである。実はＡがＢで準正規であるということを示すのが証明の本質的な部分であり、このことが分かれば上に与えた補題より容易に定理３は示される。

この講演の詳しい内容は参考文献［３］を見られたい。

Embedded primary component について

金光三男（愛知教育大）
吉田憲一（岡山理大・理）

ネータ局所整域 (R, M) は次元公式が成立するような永田環で $\mathit{depth}\, R = d < \dim R = n$ であると仮定する。ネータ環 B が永田環とは B の任意の素イデアル P に対して B/P の商体の任意の有限次代数拡大体 L における B/P の整閉包が B/P 加群として有限生成であることであった。また R が次元公式の成立する環であるとは、R の任意の有限生成拡大整域 T と T の任意の素イデアル Q に対して、$P = Q \cap R$ とおいたとき次式が成立することであった。

$$\mathit{height}\, P + \mathrm{tr.deg}_R T = \mathit{height}\, Q + \mathrm{tr.deg}_{R/P} T/Q$$

但し、$\mathrm{tr.deg}_R T$ は（R の商体上の）T の商体の超越次数を表わす。

$a_1, a_2, \cdots, a_d$ を R における正則列とし、これらで生成される R のイデアル $(a_1, a_2, \cdots, a_d)$ を I とおく。このとき、知られているように任意の正の整数 l に対して $\mathrm{ass}_R(R/I) = \mathrm{ass}_R(R/I^l)$

が成立し、$M \in \mathrm{ass}_R(R/I)$ である。これより

$$\mathrm{ass}_R(R/I) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_n, M\}$$

とおく。また、I^l の irredundant である準素分解を

$I^l = \mathfrak{q}_{1,l} \cap \mathfrak{q}_{2,l} \cap \cdots\cdots \cap \mathfrak{q}_{u,l} \cap Q_l$ （$\mathfrak{q}_{i,l}$ は $\mathfrak{p}_i$—準素成分 $1 \leq i \leq u$, Q_l は M—準素成分）とする。また、

$$J_l = \mathfrak{q}_{1,l} \cap \mathfrak{q}_{2,l} \cap \cdots\cdots \cap \mathfrak{q}_{u,l}$$

とおくと、$J_l = I^l R[\frac{1}{a}] \cap R$ （ここで、$a \in M - \bigcup_{i=1}^{u} \mathfrak{p}_i$）となり、$J_l J_m \subset J_{l+m}$ が成立する。

参　考　文　献

[1] D.F.Anderson and D.E.Dobbs, Fields in which seminormality implies normality, to appear in Houston J. Math.

[2] D.E.Dobbs and M.Fontana, Some results on the weak normalizatiion of an integral domain, Preprint.

[3] H.Yanagihara, Remarks on weakly normal rings, to appear in Hyogo University of Teacher Education Journal.

t を R 上不定元とし、$R[t^{-1}, It]$ を R の I による Rees 環とし、A とおく。また、

$$\tilde{A} = R[t^{-1}] \oplus (\bigoplus_{l>0} J_l t^l)$$

とおくと、$\tilde{A} \supset A$ で $\tilde{A}$ は $\mathbb{Z}$-graded ring、A, $\tilde{A}$ は永田環となる。

以下、特に断らなければ、A, $\tilde{A}$, I, $\overline{I^l}$, J_l などは上のようなものとする。

<u>命題1.</u> $\tilde{A}$ は A 上 integral である。

[証明] $\overline{A}$ を A の integral closure とすると、$\overline{A}$ は Krull domain だから、$\overline{A} = \bigcap_{\overline{P} \in Ht_1(\overline{A})} \overline{A}_{\overline{P}}$ (ここで、$Ht_1(\overline{A})$ は $\overline{A}$ の height が 1 の素イデアル全体とする)。$P = \overline{P} \cap A$ とおく。

R が altitude formula をみたし、A は有限生成 R-algebra だから、A も又 altitude formula をみたす。よって、$P \in Ht_1(A)$。$P \cap R = \mathfrak{p}$ とおく。このとき、$\tilde{A} \subset \overline{A}_{\overline{P}}$ が $^{\forall}\overline{P} \in Ht_1(\overline{A})$ に対していえれば、$\tilde{A} \subset \overline{A}$ となり、$\tilde{A}$ は A 上 integral であることがでてくる。

<u>Case i) $t^{-1} \in P$</u>

altitude formula を使うと、height $\mathfrak{p}$ = tr.deg$_{R/\mathfrak{p}}$ A/P がいえる。$t^{-1} \in P$ だから、$P \supset I = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$。$R$ との共通部分をとると $\mathfrak{p} \supset I$ となり、height $\mathfrak{p} \geq$ height $I = d$ がいえる。

一方、$a_1, a_2, \cdots, a_d$ は正則列だから、$X_1, X_2, \cdots X_d$ を R/I 上不定元とすると、

$$\bigoplus_{i \geq 0} I^i/I^{i+1} \cong (R/I)[X_1, X_2, \cdots, X_d]\text{。}$$

canonical homomorphism $A/t^{-1}A \longrightarrow A/P$ は上への ring homomorphism だから

$$\text{height } \mathfrak{p} = \text{tr.deg}_{R/\mathfrak{p}} A/P \leq \text{tr.deg}_{R/\mathfrak{p}} (R/\mathfrak{p})[X_1, \cdots X_d] = d$$

$$\therefore \text{ height } \mathfrak{p} = d$$

height $M = n > d$ だから. $M \supsetneqq \mathfrak{p}$ となる。従って $(I^l)_{\mathfrak{p}} = (J_l)_{\mathfrak{p}}$。

$A_{\mathfrak{p}} = R[t^{-1}]_{\mathfrak{p}} \oplus (\bigoplus_{l>0} (I^l)_{\mathfrak{p}} t^l) = R[t^{-1}]_{\mathfrak{p}} \oplus (\bigoplus_{l>0} (J_l)_{\mathfrak{p}} t^l) = \widetilde{A}_{\mathfrak{p}}$ だから.

$$\overline{A_P} \supset A_P \supset A_{\mathfrak{p}} = \widetilde{A}_{\mathfrak{p}} \supset \widetilde{A}$$

<u>Case ii) $t^{-1} \notin P$</u>

定義より. $\widetilde{A} = R[t^{-1}] \oplus (\bigoplus_{l>0} J_l t^l)$ だから. $R_{\mathfrak{p}}[t, t^{-1}] \supset \widetilde{A}$

$t^{-1} \notin P$ だから. $t = \dfrac{1}{t^{-1}} \in A_P$ $\quad \therefore\ A_P \supset R_{\mathfrak{p}}[t, t^{-1}]$

$$\therefore\ \widetilde{A} \subset A_P \subset \overline{A_P}$$

よって $\widetilde{A} \subset \overline{A}$ がいえた。
これより命題1が証明された。

次に. 命題1を使って. $\widetilde{A}$ が $\overline{A} \cap R[t, t^{-1}]$ のどのような元からなるか考察しよう。簡単のため. $\overline{A}_R = \overline{A} \cap R[t, t^{-1}]$ とおく。

<u>補題2</u> $\widetilde{A} = \{ \alpha \in \overline{A}_R \mid M^l \alpha \subset A \text{ for } {}^{\exists} l > 0 \}$

[証明] 補題2の式の右辺を A' とおく。このとき. まず $\widetilde{A} \subset A'$ であることを証明する。 $t^{-1} \in A'$ は明らかだから同次元 $at^n \in \widetilde{A}$ $(a \in J_n)$ をとる。このとき、${}^{\exists} l > 0$ $J_n M^l \subset J_n M^n \subset J_n \cap Q_n = I^n$。
$M^l(at^n) \subset (It)^n \subset A$ かつ $at^n \in \widetilde{A} \subset \overline{A}$ (命題1より)だから.

$$at^n \in \overline{A} \cap R[t, t^{-1}] = \overline{A}_R \qquad \therefore\ at^n \in A' \quad \therefore \widetilde{A} \subset A'$$

次に. $A' \subset \widetilde{A}$ を示す。 ${}^{\forall}\alpha \in A'$ とする。 α は同次元としてよいから $\alpha = at^n$ $(a \in R)$ とおく. $n \le 0$ のとき $\alpha \in \widetilde{A}$ は明らか。
$n > 0$ のとき. $M^l \alpha \subset A$ だから. $M^l \alpha = M^l a t^n \subset I^n t^n$

$$\therefore\ M^l a \subset I^n \qquad \therefore\ a \in (I^n)_{\mathfrak{p}_i} \cap R \subset \mathfrak{q}_{i,n}$$

$$\therefore\ a \in \bigcap_{i=1}^{u} \mathfrak{q}_{i,n} = J_n. \qquad \therefore \alpha = at^n \in J_n t^n \subset \widetilde{A} \qquad \therefore\ A' = \widetilde{A}$$

[Q.E.D.]

補題3. $\mathrm{ass}_R(\tilde{A}/A) = \{M\}$

[証明] "$P \in \mathrm{Ass}_A(\tilde{A}/A)$ なら $P \cap R = M$" をいえばよい。
(cf. H. Matsumura, Commutative Algebra, Second Edition の p.57 9.A)
$\tilde{A}$ と A は graded ring だから、$P = A : \alpha$ (但し $\alpha = at^n \notin A$, $a \in J_n$)。$a \notin I^n$。よって $P \cap R = I^n : a$ となる。$a \in J_n$ だから $R \neq I^n : a \supset Q_n$ 故に $I^n : a$ は M―準素イデアル。ところがこれは $P \cap R$ だから M と一致する。 [Q.E.D.]

この補題3と命題1を使って次の定理を証明しよう。その前に、N を R の ideal で $I \subset N$ なるものとし、

$$R_{\tilde{A}}(IA) = \{\alpha \in \tilde{A} \mid \alpha IA \subset IA\}$$

とおく。M がいつ N の prime divisor になるのか考察しよう。

定理4. height $N < n$ で $R_{\tilde{A}}(NA) = A$ とする。このとき、M は N の embedded prime divisor である。

[証明] M が N の prime divisor でないとする。まず、$N\tilde{A} \cap A = NA$ であることを示す。

$N\tilde{A} \cap A \subset NA$ 即ち $\forall n > 0$ に対して $NJ_n \cap I^n \subset NI^n$ を示せば十分である。$\forall \alpha \in NJ_n \cap I^n$ に対して

$$\alpha = \sum_{i_1+\cdots+i_d=n} x_{i_1\cdots i_d} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_d^{i_d}$$

$x_{i_1\cdots i_d} \in N$ を示せばよい。$N = q_1 \cap \cdots \cap q_s$ ($p_i = \sqrt{q_i}$ とおく) を N の irredundant な準素分解とする。仮定より $p_i \subsetneq M$。$p = p_i$ とおくと、命題1の証明中で述べたと同様に $(J_n)_p = (I^n)_p$ がいえる。$\alpha \in (NJ_n)_p = (NI^n)_p$ だから $\alpha = \sum_{i_1+\cdots+i_d=n} y_{i_1\cdots i_d} a_1^{i_1} \cdots a_d^{i_d}$

$y_{i_1\cdots i_d} \in N_{\mathfrak{p}}$。　$\alpha \in (I^n)_{\mathfrak{p}}$ だから.

$$\bar{\alpha} \in I_{\mathfrak{p}}^n / I_{\mathfrak{p}}^{n+1} \subset \bigoplus I_{\mathfrak{p}}^i / I_{\mathfrak{p}}^{i+1} \cong (R_{\mathfrak{p}}/I_{\mathfrak{p}})[X_1, \cdots, X_d]$$

従って
$$\bar{\alpha} = \sum \overline{y_{i_1\cdots i_d}}\, \bar{a}_1^{i_1} \cdots \bar{a}_d^{i_d} = \sum \overline{x_{i_1\cdots i_d}}\, \bar{a}_1^{i_1} \cdots \bar{a}_d^{i_d}$$

かくして

$y_{i_1\cdots i_d} \equiv x_{i_1\cdots i_d} \pmod{I_{\mathfrak{p}}}$ 即ち. $x_{i_1\cdots i_d} = y_{i_1\cdots i_d} + z_{i_1\cdots i_d}$

ここで $z_{i_1\cdots i_d} \in I_{\mathfrak{p}} \subset N_{\mathfrak{p}}$。　$\therefore x_{i_1\cdots i_d} \in N_{\mathfrak{p}} \cap R \subset q_i$

$\therefore\ x_{i_1\cdots i_d} \in q_1 \cap \cdots \cap q_s = N$　　$\therefore NJ_n \cap I^n \subset NI^n$

よって $N\tilde{A} \cap A = NA$ がいえた。

次に. $R_{\tilde{A}}(NA) = (NA)_{\tilde{A}}^{-1} \supsetneq A$ を示す。ここで

$(NA)_{\tilde{A}}^{-1} = \{\alpha \in \tilde{A} \mid \alpha NA \subset A\}$ とする。

明らかに. $R_{\tilde{A}}(NA) \subset (NA)_{\tilde{A}}^{-1}$ だから. $(NA)_{\tilde{A}}^{-1} \subset R_{\tilde{A}}(NA)$ を示す。

$\forall \theta \in (NA)_{\tilde{A}}^{-1}$ なら. $\theta \in \tilde{A}$, $\theta(NA) \subset A$　　ここで $N\tilde{A} \cap A = NA$ である

ことを使うと. $\theta(NA) \subset A \cap N\tilde{A} = NA$　　$\therefore \theta \in R_{\tilde{A}}(NA)$

$$\therefore\ R_{\tilde{A}}(NA) = (NA)_{\tilde{A}}^{-1}$$

$(NA)_{\tilde{A}}^{-1} \supsetneq A$ を示したい。補題3 より $\exists \alpha \in \tilde{A} - A$　$M = A :_R \alpha$

$N \subset M$ だから. $\alpha NA \subset A$　　$\therefore \alpha \in (NA)_{\tilde{A}}^{-1}$

$$\therefore\ (NA)_{\tilde{A}}^{-1} \supsetneq A$$

これは. 仮定 $R_{\tilde{A}}(NA) = A$ に反する。よって. M は N の prime divisor である。height $N < n$ だから. M は embedded prime divisor である。

[Q.E.D.]

Rのイデアル $\mathfrak{a}\,(\neq R)$ で $a_1, a_2, \cdots, a_d$ なる正則列を含むものに対して $\mathfrak{a}$ が M を prime divisor にもつための十分条件が上の定理4よりいえた。

逆は一般にはいえない。$\mathfrak{a}$ が M を prime divisor にもつとき $\mathfrak{a}$ は必ずしも正則列 $a_1, \cdots, a_d$ を含むとは限らない。

例. $d > 1$, $M \ni a$ で a は非零因子とする。十分大きな ℓ に対して $aR \not\subset M^{\ell}$。$\mathfrak{a} = aR \cap M^{\ell}$ とおくと M は $\mathfrak{a}$ の prime divisor であるが $\mathfrak{a} \subset aR$ だから $\mathfrak{a}$ の中から d 個の正則列 $a_1, \cdots, a_d$ はとれない。

イデアルの巾の中に表われる素因子について

菅谷孝（富山大学理学部）
吉田憲一（岡山理科大理学部）

R をネーター整域，t を変数，I を R の non-zero なイデアルとする。

$A_I = R[t^{-1}, tI]$ を R の I に関する Rees 環という．Mirbagheri と Ratliff [4] によって導入された概念であるが，$I^* = \bigcup_{i\geq 1}(I^{i+1} : I^i)$ を I の relevant component と言う．そして，$(I^i)^*(I^j)^* \subseteq (I^{i+j})^*$ が保証されているので，

$$B_I = R[t^{-1},\ t^i(I^i)^*,\ i \geq 1]$$

は A_I と torus extension $T_R = R[t^{-1}, t]$ の中間環となる，B_I を I の relevant transform という．

$A^*(I)$ で $\{ \mathfrak{p} \in Spec(R) \mid \mathfrak{p} \in Ass_R(R/I^n)$ for all large $n\}$ を表わす。

この論文の目的は，$Ass_R(R/I^n)$ の初期の変動について調べる事にある。すでに良く知られているように，$Ass_R(R/I^n)$ は，ある数以上では stational であって，それは

$A^*(I) = \{ P \cap R \mid P$ は A_I の prime ideal で $t^{-1}A_I$ の素因子で tI を含まないもの$\}$

である事がわかっている．

ここで tI を含まないという条件と relevant transform とが密接な関係にある事が後で示される。

Proposition 1

The relevant transform B_I of I is the greatest subring C between A_I and T_R satisfying the condition that $(tI)^N C$ is contained in A_I for some positive integer N. In particular, B_I is a finite A_I-module.

Proof

次の結果が [5] によって知られている.

(a) $I^* = I^{n+1} : I^n$ for all large n,

(b) $(I^k)^* = \bigcup_{i \geq 1} (I^{k+i} : I^i)$

(c) $(I^k)^* = I^{k+n} : I^n$ for all large n,

(d) $(I^n)^* = I^n$ for all large n.

これらの結果からある正の整数 H があって,

$$(I^i)^* = I^i \quad \text{for all } i \geq H$$

そして, ある正の整数 N があって,

$$(I^i)^* = I^{i+N} : I^N \quad \text{for all } i < H.$$

従って, $(tI)^N (I^i)^* t^i = I^N (I^{i+N} :_R I^N) t^{i+N} \subsetneqq I^{i+N} t^{i+N} \subsetneqq A_I$ for all $i < H$.

$i \geqq H$ に対しては,

$$(tI)^N (I^i)^* t^i = (tI)^N (I^i) t^i = I^{N+i} t^{N+i}$$

よって, $(tI)^N B_I \subsetneqq A_I$.

今, C を A_I と T_R の中間環で, ある $N > 0$ によって

$$(tI)^N C \subsetneqq A_I$$

となるものとする。

$c \in C$ とする. ここで $c = at^i$, $a \in R$, $i > 0$ としてよい. $I^N a \subsetneqq I^{i+N}$ 故 $a \in I^{i+N} : I^N \subsetneqq (I^i)^*$

$$\therefore \quad C \subsetneqq B_I$$

この結果は relevant transform B_I の特徴付けである。

もう一つの relevant transform B_I の特徴付けを行なおう.
T_R の中でのイデアル $(tI)^n A_I$ の idealizer $Id((tI)^n)$ とは,

$$Id((tI)^n) \overset{\mathrm{def}}{=} (tI)^n A_I :_{T_R} (tI)^n A_I .$$

Theorem 2

There exists a finite sequence of idealizers $Id((tI)^n)$ from A_I to B_I such that

$$A_I \subset Id(tI) \subset \cdots\cdots \subset Id((tI)^N) = B_I$$

Proof

proposition 1 から $Id((tI)^n) = A_I :_{T_R} (tI)^n A_I$ が示されれば良い。片一方の包含関係は明らか. そこで

$$Id((tI)^n) \supseteqq A_I :_{T_R} (tI)^n A_I$$

を示そう.

$b \in T_R$ とする. ここで $b = at^i$, $a \in R$, $i > 0$ としてよい,
そして b は右辺に入るとすれば, $b(tI)^n A_I \subseteq A_I$.
従って, $b(tI)^n \subseteq I^{i+n} t^{i+n} \subseteq (tI)^n A_I$

$\therefore \quad b \in Id((tI)^n)$.

Corollary 3

$B_I = A_I$ *if and only if* $Id(tI) = A_I$

Proof

$B_I = A_I$ であれば, theorem 2 から $Id(tI) = A_I$.
そこで $Id(tI) = A_I$ と仮定しよう. theorem 2 の証明から $A_I = A_I :_{T_R} tIA_I$ となる。
$b \in B_I$ とすれば proposition 1 からある $n > 0$ で,

$$b(tI)^n A_I \subseteqq A_I$$

従って, $b(tI)^{n-1} A_I \subseteqq A_I$. これをくりかえせば

$$b(tI) A_I \subseteq A_I$$

$\therefore \; b \in A_I \qquad \therefore \; B_I = A_I$

$\{ \mathrm{Ass}_R R/I^n,\ n \geqq 1 \}$ の初期変動の内，ある n で $\mathrm{Ass}_R R/I^n$ の元ではあるが，$A^*(I)$ に入らないものについて考えよう．

ここで $n \leqq 0$ の場合には，$I^n = R$ とする．

Theorem 4

For a prime ideal P of A_I, the following statements are equivalent.

(1) P is a prime divisor of $t^{-1}A_I$ containing tI.

(2) $P \in \mathrm{Ass}_{A_I}(B_I/A_I)$.

Proof

(1) $\Rightarrow$ (2)：ある $b \in A_I$ があって，$P = t^{-1}A_I :_{A_I} b$．

$b = \sum_{i=e}^{n} a_i t^i$，ここで $a_i \in I^i$，$e \leqq i \leqq n$．

$tI \subseteq P$ 故 $a_i I \subseteq I^{i+2}$，従って，$a_i \in I^{i+2} :_R I \subseteq (I^{i+1})^*$．

よって $bt \in B_I$ であるから $P = A_I :_{A_I} bt$ より

$P \in \mathrm{Ass}_{A_I}(B_I/A_I)$．

(2) $\Rightarrow$ (1)：ある $a \in R[t^{-1}]$ と $n > 0$ があって，$at^n \in B_I$ で，$P = A_I :_{A_I} at^n$．従って depth $(A_I)_P = 1$．

$t^{-1} \notin P$ とすれば，$P = A_I :_{A_I} at^n = A_I :_{A_I} a = A_I$ となり矛盾．$\therefore$ $t^{-1} \in P$ なので P は $t^{-1}A_I$ の素因子．

proposition 1 から $P \supset It$ がわかる．

この結果から次を得る．

Theorem 5

Let $\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_R(R/I^n)$ for some n. If $\mathfrak{z} \notin A^*(I)$, then $\mathfrak{z} = P \cap R$ for some $P \in \mathrm{Ass}_{A_I}(B_I/A_I)$.

Proof

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/I^n)$ とする。 $t^{-n}A_I \cap R = I^n$ なので、
$t^{-n}A_I$ の素因子 P で $P \cap R = \mathfrak{p}$ となるものがある。
$\mathfrak{p} \notin A^*(I)$ であるから $P \supset It$ でなければならない。
従って theorem 4 の (1) を満たすので、 $P \in \mathrm{Ass}_{A_I}(B_I/A_I)$

これらの結果から次を得るが証明は省略する。

Theorem 6

The following statements hold.

$$\mathrm{Ass}_{A_I}(T_R/A_I) \subseteq \mathrm{Ass}_{A_I}(B_I/A_I) \cup \mathrm{Ass}_{A_I}(T_R/B_I),$$

where the union of the right hand side is disjoint, and we have

$$A^*(I) = \{ P \cap R \mid P \in \mathrm{Ass}_{A_I}(T_R/B_I) \text{ such that } \operatorname{depth}(A_I)_P = 1 \}.$$

さて次に $\{ \mathrm{Ass}_R R/I^n,\ n \geq 1\}$ が初めから stational となるための条件をあたえよう。
まず graded R/I-algebra $G_R(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$ を考え、Robbiano と Valla [6] の結果を一般化した次の結果を示そう。

Proposition 7

Let N be a positive integer. The following statement holds.
$\mathrm{Ass}_R(R/I^n) \subseteq \mathrm{Ass}_R(R/I)$ for all $n \leq N$ if and only if I^{n-1}/I^n is a torsion free R/I-module for all $n \leq N$.

Proof

$\mathrm{Ass}_R(R/I^n) \subseteq \mathrm{Ass}_R(R/I)$, $n \in N$, とする。

x を R の元で R/I の中では non-zero divisor とする.

従って, $x \notin \mathfrak{p}$ for any $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R R/I$.

$y \in I^{n-1}$ で $xy \in I^n$ とする. 仮定より, $x \notin \mathfrak{p}$ for any $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/I^n)$ 故 $y \in I^n$. よって, I^{n-1}/I^n は torsion free R/I-module.

逆を示す。$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/I^n)$ とする。我々は R のかわりに $R_\mathfrak{p}$ で考えてよいので, R は $\mathfrak{p}$ を maximal ideal にもつ local ring とする.

$\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}_R(R/I)$ と仮定する.

従って, $^\exists x \in \mathfrak{p}$ で, x は $\mathrm{Ass}_R(R/I)$ のどの元にも入らない.

$\mathfrak{p}$ は I^n の素因子故, $^\exists y \in R$ で $y \notin I^n$ だが $y\mathfrak{p} \subseteq I^n$ となるものがある。

よって, $xy \in I^n$. 今 integer $r \geq 0$, を $r < n$ として, $y \in I^r$, $y \notin I^{r+1}$ となるものとする。

I^r/I^{r+1} は仮定から torsion free R/I-module.

ところが $xy \in I^n \subseteq I^{r+1}$ で, x は R/I の中で non-zero divisor だから $y \in I^{r+1}$ となり矛盾.

Theorem 8

The following statements hold.

(1) $G_R(I)$ is a torsion free R/I-module if and only if $\bigcup_{n \geq 1} \mathrm{Ass}_R(R/I^n) = \mathrm{Ass}_R(R/I)$. In particular, in this case $A^*(I) \subseteq \mathrm{Ass}_R(R/I)$.

(2) Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal and I be a $\mathfrak{p}$-primary ideal of R. Then $G_R(I)$ is a torsion free R/I-module if and only if I^n is a $\mathfrak{p}$-primary ideal for every positive integer n.

$I^* = I$ であれば、 $I = I^{n+1} : I^n$ ，$n > 0$，であるから $\mathrm{Ann}_R(I^n/I^{n+1}) = I$．従って $\mathrm{Ass}_R(R/I) \subseteq \mathrm{Ass}_R(R/I^n)$ である。よって，次を得る。

Corollary 9

If $I^* = I$ and $G_R(I)$ is a torsion free R/I-module, then $\mathrm{Ass}_R(R/I) = \mathrm{Ass}_R(R/I^n)$ for all non-negative integer n.

Remark

$A_I = B_I$ となるための条件はいくつか上げることが出来るが，それらは [4]，[5] にすでに，本質的，に出ているので，ここでは述べないが，次の結果はオリジナルである．

A_I が seminormal であれば $A_I = B_I$。

しかし $A_I = B_I$ であっても，A_I は必ずしも seminormal ではない。

Example

k を体，x を変数，$R = k[x^2, x^3]$ として，
$I = x^2R$ とする。
このとき，Rees 環 A_I は seminormal ではないが $(I^n)^* = I^n$，従って，$A_I = B_I$．

REFERENCES

[1] D.L.Costa, Seminormality and projective modules, Lecture notes in Math., Vol. 924, 400-412, Springer-Verlag, New York, 1982.

[2] H. Matsumura, "Commutative Algebra", W.A.Benjamin, New York, 1970.

[3] S. McAdam, "Asymptotic prime divisors", Lecture notes in Math., Vol. 1023, Springer-Verleg, New York, 1983.

[4] A. Mirbagheri and L.J. Ratliff, Jr., On the relevant transform and the relevant component of an ideal, J. Algebra 111(1987), 507-519.

[5] L.J. Ratlif, Jr. and D.E. Rush, Two notes on reductions of ideals, Indiana Univ. Math. J. 27(1978), 929-934.

[6] L. Robbiano and G. Valla, Primary powers of a prime ideal, Pacific J. Math. 63(1976), 491-498.

On the canonical filtration of higher dimensional purely ellptic singularity of special type.(*)

Masataka TOMARI (泊 昌孝 筑波大 数学系)

Let (A,m) be a normal d-dimensional local domain and (W,w) be the associated singularity as $W = \mathrm{Spec}(A)$ and $w = V(m)$. In the studies of minimal model problem of algebraic varities, the finite generatedness of the canonical ring is an essential and important problem ([R1,2][KMM]). On the other hand, in [TW1] a general theory of the filtration $F = \{ F^k \}_{k \in \mathbb{Z}}$ on A whose Rees ring is finitely generated A-algebra was developed. Let $X = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{k \geq 0} F^k T^k) \longrightarrow W$ be the filtered blowing-up with respect to F. We had studied the Cohen-Macaulay property , the canonical modules, and criterions for X to has only rational singlarities [TW1]. The purpose of this paper is to study the (R_2)-condition of X and criterion for X to have only terminal singularities. By using these, we will study the canonical filtration of purely elliptic singularities.

We assume $G = \bigoplus_{k \geq 0} F^k / F^{k+1}$ is an integral domain. Let $\bar{G}$ be the integral closure of G in the quotient field of G. Further we shall assume $\bar{G} / G$ has finite length (cf. Lemma(5.2) [TW1]). Here let us represent the normal graded domain G by Demazure's method as follows ([D],[W2],[W3]) ; $\bar{G} = R(E,D)$; $E = \mathrm{Proj}(\bar{G})$, and ample $\mathbb{Q}$-Cartier $\mathbb{Q}$-Weil divisor $D \in \mathrm{Div}(E) \otimes \mathbb{Q}$. Let us study the singular locus of X at a closed point x of E.

*) This is a preliminary version.

Lemma I. Assume W satisfies the (R_2)-condition and $\bar{G} / G$ has a finite length. We shall represent $\bar{G}$ as $\bar{G} = R(E,D)$. Let a closed point $x \varepsilon E \subset X$ be as above. Then the following two conditions are equivalent each other.

(1) $O_{X',x}$ satisfies the (R_2)-condition.

(2) The Demazure divisor D is integral Weil divisor on E at x.

Now we shall study arbitrary complex analytic singularity (V,p). The classification of 3-dimensional terminal singularities was first proposed and studied by M. Reid[R1,R2]. Further Danilov, D. Morrison - G. Steeven had classified cyclic quotient case, and S. Mori had given the important explicit normal forms for general cases [MS, M2]. At last J. Kollar - N.I. Shepherd-Barron had comleted the classifcation (Theorem (6.4), and Theorem (6.5) [KSB],). Recently J. Stevens[St] had given several good sufficient conditions for the singularity to be canonical (or terminal). By using his results and basic works due to M. Reid, we obtain the following.

Lemma II. Let (V,p) be a normal d-dimensional complex analytic singularity which satisfies the (S_3)-condition and the (R_2)-condition. Suppose there is a divisorial ideal J of $O_{V,p}$ which satisfies the following four conditions :

(i) $O_{V,p} / J$ is a normal (d-1)-dimensional Gorenstein rational singularity.

(ii) J defines a torsion element of the divisor class group $cl(O_{V,p})$. Let us denote the torsion order of $cl(J)$ by r.

(iii) the reflexive hull $(J^{\alpha})^{**}$ of J^{α} (denoted by $J^{[\alpha]}$) satisfies the (S_3)-condition for $\alpha = 0,1, \ldots , r-1$.

(iv) V is a terminal singularity at points in the complement of the support of $O_{V,p} / J$.

Then

(1) $cl(J) = cl(K_{V,p})$ in $Cl(O_{V,p})$, and

(2) (V,p) is a terminal singularity.

The second assertion follows from Stevens' arguments if we obtain the first. So the contribution of this paper belongs mainly to the first assertion. As a corollary we obtain the following.

Theorem III. Let (A,m) be a d-dimensional normal singularity where $\mathrm{Spec}A - V(m)$ has only terminal singularities. Let $\{ F^k \}_{k \in \mathbb{Z}}$ be a filtration (1.1) on A such that G is an integral domain. Suppose $\overline{G}/G$ is of finite length where $\overline{G}$ is the normalization. Let us describe $\overline{G}$ by Demazure's rule as $\overline{G} = R(E,D)$. Let $\psi : X = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{k \geq 0} F^k T^k) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$, $\psi^{-1}(m) = E = \mathrm{Proj}(G)$ be the filtered blowing-up of $\mathrm{Spec}(A)$. Let x be a closed point of E. Suppose the following two conditions holds:

(1) D is an integral Weil divisor on E at P.

(2) (E,P) is a rational Gorenstein singularity.

Then (X,P) is a terminal singularity. Here the index of the singularity (X,P) equals the torsion order of the divisor class $cl(D)$ in the group $Cl(O_{E,P})$.

One of our application of our theorems is the following.

Theorem IV. Let (A,m) be a normal d-dimensional isolated singularity such that the canonical sheaf ω_W is trivial. Then the following two conditions are equivalent each other.

(1) (A,m) is a purely elliptic singularity of $(0,d-1)$-type

and the canonical ring of (A,m) is finitely generated. (cf. Definition VI-1).

(2) There is a filtration $\{ F^k \}_{k\in\mathbb{Z}}$ on (A,m) which satisfies the following conditions:

(2)-0. $\mathfrak{R} = \bigoplus_{k\geq 0} F^k T^k \subset A[T]$ is finitely generated over A and satisfies the conditions of (1.1).

(2)-1. $G = \bigoplus_{k\geq 0} F^k/F^{k+1}$ is a normal domain.

In a represention $G = R(E,D)$ as Demazure's construction, we have

(2)-2. $E = \mathrm{Proj}(G)$ has only rational singularity,

(2)-3. D is an ample integral Weil divisor, and

(2)-4. $\omega_E \cong O_E$.

Under these equivalent two conditions, we have the relations $H^q_m(A) \cong H^q_{G_+}(G) \cong H^{q-1}(E,O_E)$ for $2 \leq q \leq d-1$.

Definition IV-1. Let $\varphi : V^{\sim} \longrightarrow W$ be a resolution of singularity W. Then $\bigoplus_{k\geq 0} \varphi_*(\omega_{V^{\sim}}^{\otimes k})$ is an A-algebra and is independent of a choice of resolution φ ([R1]). We call $\bigoplus_{k\geq 0} \varphi_*(\omega_{V^{\sim}}^{\otimes k})$ the canonical ring of (A,m).

In the case $\omega_A \cong A$, we have the relation $\bigoplus_{k\geq 0} \omega_W^{[k]}.T^k \cong A[T]$ and $\mathfrak{R} = \bigoplus_{k\geq 0} \psi_*(\omega_X^{[k]}).T^k$ is a subalgebra of $A[T]$. From this identification, we obtain a filtration $F = \{ F^k \}_{k\geq 0}$ on A as $F^k \cong \psi_*(\omega_X^{[k]})$ for $k \geq 0$. We call F the canonical filtration on A.

If $\bigoplus_{k\geq 0} \varphi_*(\omega_{V^{\sim}}^{\otimes k})$ is an A-algebra of finite type, then there is a partial resolution $\psi : X \longrightarrow W$ by $X = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{k\geq 0} \varphi_*(\omega_{V^{\sim}}^{\otimes k}))$ where X has only canonical singularities and ω_X is relative $\mathbb{Q}$-ψ-ample. Hence we call ψ the canonical resolution of V. (see [R1,2],[I2],[KMM] for further related definitions and remarks).

In the case $\dim A = 2$, the existence of the canonical resolution had been shown by J. Lipman, J. Wahl, and H. Laufer. In the case $\dim A = 3$, the existence of canonical resulution has recently been proved as a corollary of Minimal Model Theory (S. Mori, V. Shokrov., M. Reid., Y. Kawamata .,[K1] [M2], [KMM]). Here we want to note several references cited in [KMM]. In the case $\dim A \geq 4$, there is no definite result on this subject. In the present paper, we will see the existence of canonical resolution for some special purely elliptic singularities in Theorems VI, VIII, and IX.

Definition IV-2. A normal isolated singularity (W,w) is a purely elliptic singularity if $\delta_m(W,w) = 1$ for any integer $m \geq 1$ [W5]. Here $\delta_m(W,w)$ is the m-th. L^2-plurigenus of (W,w) which can be computed as $\delta_m(W,w) = \dim \left(\omega_W^{[m]} / \varphi_*(\omega_X^{[m]}((m-1)A_{red})) \right)$ via a good resolution $\varphi : (X,A) \longrightarrow (W,w)$ [W5].

In the case that the canonical module of (W,w) is $\mathbb{Q}$-Cartier, S. Ishii had introduced the Hodge structure type of purely elliptic singularity [I1,I2]. When (W,w) is a d-dimensional purely elliptic singularity with $\omega_W \cong O_W$, we call (W,w) is of $(0,i)$ type if $H^{d-1}(E,O_E)$ is the $(0,i)$-th component of $H^{d-1}(E,\mathbb{C})$ in the sense of Deligne's canonical mixed Hodge structure for a good resolution $(X^{\sim},E) \longrightarrow (W,w)$ [I1].

In the case $d=2$, purely elliptic Gorestein singularity of $(0,d-1)$ equals the simple elliptic singularity [S]. In the case $d= 3$, the purely elliptic Gorenstein singularity of $(0,d-1)$type is called simple K3-singularity [I1,I2,IW,Y].

Remark V. In the situation of Theorem IV, here we assume the equivalent two conditions hold. Then the remaining singularities of the canonical resolution of Spec $A = W$ are all terminal. Further the canonical resolution is given as the filtered blowing up $X = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{k\geq 0} F^k) \longrightarrow W$. The index of each terminal singularity of X is computed by the rule of Lemma II .

In 1987, S. Ishii had shown that the exceptional locus E of a minimal partial resolution satisfies the conditions of Theorem IV if the minimal resolution $\psi : (X,E) \longrightarrow (V,p)$ exists. Here a partial resolution $\psi : (X,E) \longrightarrow (V,p)$ is minimal if X has only terminal singularities and ω_X is relatively numerical effective with respect to ψ. In our studies of the present paper, her insights are essential as seen in the proof of Lemma (3.3).

By using Theorm(3.8) [W4], we obtain a graded version.

Theorem VI. $G = \bigoplus_{k\geq 0} G_k$; normal d-dimensional graded ring finitely generated over $\mathbb{C} = G_0$. Then the following four conditions are equivalent each other.

(1) G has an isolated singularity and $K_G = G$. Here K_G is the canonical module of G in the sense of Goto-Watanabe [GW].

(2) $G = R(E,D)$; Demazure's description as follows : $E = \mathrm{Proj}(G)$ with $D \in \mathrm{Div}(E)\otimes\mathbb{Q}$ ample $\mathbb{Q}$-Cartier divisor

E : normal Gorenstein with $\omega_E \cong O_E$.

E has only cyclic quotient singularity

D : ample $\mathbb{Q}$-Cartier integral Weil divisor such that $\mathrm{Cl}((O_{E,p})\hat{\ }) = \mathbb{Z}.\mathrm{cl}(D)$ at each point p of E.

(3) The canonical module of G is trivial at G_+ and $(\mathrm{Spec}(G), V(G_+))$ is a purely elliptic isolated singularity of $(0,d-1)$-type.

(4) The canonical module of G is trivial at G_+ and $(\mathrm{Spec}(G), V(G_+))$ is a purely elliptic isolated singularity.

Remark VII. In particular the canonical ring of $\mathrm{Spec}(G)$ is isomorphic to $G^{\natural} = \bigoplus_{k\geq 0} G|_k$ where $G|_k = \bigoplus_{\ell\geq 0} G_\ell$ by Theorem IV. and is finitely generated.

Now let (W,w) be a d-dimensional Gorenstein purely elliptic singularity of $(0,d-1)$. Here we will study the sufficient conditions for certain filtration to be the canonical filtration of the purely elliptic singularity as in Theorem IV.

Theorem VIII. Let (A,m) be a normal d-dimensional Gorenstein isolated purely elliptic singularity of $(0,d-1)$-type. Let $F = \{ F^k \}_{k\in\mathbb{Z}}$ be a filtration (1.1) on A which satisfies the following two conditions :

(i) $G = \bigoplus_{k\geq 0} F^k/F^{k+1}$: Gorenstein ring with $a(G) \geq 0$. Here $a(G)$ is an invariant of the graded ring G as $a(G) = \max \{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid [H^d_{G_+}(G)]_\alpha \neq 0 \}$ by Goto-Watanabe[GW] (see also [TW1] for a role of this integer in the studies of filtered rings).

(ii) There is an integer N such that $G_k \neq 0$ for $k \geq N$.

Then G is a normal Gorenstein domain with $a(G) = 0$ and $\mathrm{Proj}(G)$ has only rational singularities. (Hence F is the canonical resolution of (W,w) by Theorem IV.). In particular $\mathrm{Spec}(A) = W$ has the canonical resolution (i.e., of finiteley generated type).

Example. (A,m) : hypersurface d-dimensional singularity written as follows : $A = \mathbb{C}\{x_0, x_1, \ldots, x_d\}/(f)$, $f \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$. Let us put the weights on regular parameter system $x_0, \dots, x_d$ as $\deg(x_i) = q_i \in \mathbb{N}$ ($i \geq 0$) with $\mathrm{g.c.d.}(q_0, q_1, \dots, q_d) = 1$. Now we introduce the filtration F on A by the monomial degrees as follows ; $F^k = \{ x^J \mid \deg x^J = \sum_{i=0}^{d} q_i j_i \geq k \}.A$.

We shall call such a filtration as " a monomial filtration " in this paper. Let us take the weighted Taylor expansion of f as $f = \sum_{i \geq \rho} f_i$ where f_i is weighted homogeneous of degree i with respect to the given weight and we assume $f_\rho \neq 0$. Then G is written as $G = \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_d]/(f_\rho)$ and hence $a(G) = \rho - \sum_{i=0}^{d} q_i$. Now we will study the criterion for the monomial filtration to satisfy the second condition of Theorem VIII.

Proposition IX. (A,m) : d-dimensional hypersurface purely elliptic singularity of $(0,d-1)$ type. Let F be a monomial filtration on A introduced as in Example with certain weight. Suppose the condition $a(G) \geq 0$ is satisfied. Then there is an integer N such that $G_k \neq 0$ for $k \geq N$.

As a corollary of Theorems IV and VIII, the filtration F in the assertion is the canonical fitration of (A,m).

In general, we have no proof for the existence of the monomial canonical filtration for the hypersurface purely elliptic d-dimensional singylarity of $(0,d-1)$-type in the case $d \geq 3$. As an evidence for existence of the monomial canonical filtration, we shall remark the following. If the defining equation f is nondegenerate with respect to the Newton polyhedron $\Gamma_+(f)$ of $A = \mathbb{C}\{\underline{x}\}/(f)$, then we can find a monomial filtration as in Assertion IX by using [W6].

In Summer of 1987, the members of our Seminor were trying to study " Simple K3-Singularity " as three-dimensional analogus of K. Saito's simple elliptic singularity. Of course one can find such attempts in several articles ., e.g., [R1],[W5], [I1] ... etc. In that time our interests were in a deep understanding of the " minimal resolution " of higher dimensional singularities in the relation with MINIMAL MODEL PROBLEM. Then our colleagues had contributed in several own way. I heratily thank to K.-i. Watanabe , S. Ishii. T. Yonemura and Kimio Watanabe for several interesting discussion on this topics.

§ 1. Codimension of the singular locus after filtered blowing-up (Proof of Lemma I).

(1.1) We shall recall basic terminologies which are used in this note (see [TW1] for more general one).

Let A be a Noetherian local ring with the maximal ideal m, which is essentially of finite type over an algebraically closed field k. A filtration on A is a decreasing sequence $\{ F^n \}_{n \in \mathbb{Z}}$ of A satisfying the following conditions :

(i) $F^n \neq (0)$ for every $n \in \mathbb{Z}$, $F^n = A$ for $n \leq 0$ and $\bigcap_{n \geq 0} F^n = (0)$.

(ii) $F^i F^j \subset F^{i+j}$ for every $i,j \in \mathbb{Z}$.

We define two " Rees algebras " for this filtration :

$$\mathfrak{R} = \bigoplus_{n \geq 0} F^n T^n \subset A[T] \text{ and}$$

$$\mathfrak{R}' = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F^n T^n \subset A[T,T^{-1}],$$ where the symbol T denotes an indeterminate. We put $G = \bigoplus_{n \geq 0} (F^n/F^{n+1}).T^n$. Here we assume that $\mathfrak{R}$ is finitely generated over $A = \mathfrak{R}_0$. This condition induces the

relations $F^{nN} = (F^N)^n$ for $n \geq 0$ with some integer N. Further we assume F^N is an m-primary ideal.

We denote $W = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Proj}(\mathfrak{R})$, $E = \mathrm{Proj}(G)$, and $O_X(n) = (\mathfrak{R}(n))^{\sim}$ are as in E.G.A.ChapterII.§§2,3,8.

Further we assume

(1.1.1) For a natural number α, if the relation $G^{(\alpha)} \cong G$ holds , then $\alpha = 1$.

Let x be a point of E. Then there is an element $f \in F^m - F^{m+1}$ such that $x \in D_+(f^*) = \mathrm{Spec}((\mathfrak{R}_{f^*})_0) \subset X$, where $f^* = f\,T^m \in \mathfrak{R}_m$. Here $D_+(f^*) \cap E = D_+(\bar{f}) = \mathrm{Spec}((G_{\bar{f}})_0)$ for $\bar{f} = f \bmod F^{m+1}$ as an element of G_m. Then $u = T^{-1}$ is a non-zero divisor on $\mathfrak{R}_{f^*}$ and $\mathfrak{R}'_{f^*}/T^{-1}\mathfrak{R}'_{f^*} \cong G_{\bar{f}}$. Here we have the relations $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} O_X(k)|_{D_+(f^*)} \cong \mathfrak{R}'_{f^*}$,and $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} O_E(k)T^k|_{D_+(\bar{f})} \cong G_{\bar{f}}$. Let P (resp. $\bar{P}$) be the homogenous prime ideal of $\mathfrak{R}$ (resp. G) associated to x. At the point $x = V(P)$, we recall the following :

Lemma (1.2)((5.9.1)[TW1]). Let the situation be as in the above. Then , the integers

$N(X,x) = \min \{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha > 0$ and $O_X(\alpha)_x \cong (\mathfrak{R}_{(P)})_\alpha$ contains a unit of $\mathfrak{R}_{(P)}$ },

$N(E,x) = \min \{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha > 0$ and $O_E(\alpha)_x \cong (G_{(\bar{P})})_\alpha$ contains a unit of $G_{(P)}$ },

$N(P) = \mathrm{G.C.D.}\{ n \in \mathbb{Z} \mid n > 0$ and $(\mathfrak{R}/P)_n \neq 0 \}$, and

$N(\bar{P}) = \mathrm{G.C.D.}\{ n \in \mathbb{Z} \mid n > 0$ and $(G/\bar{P})_n \neq 0 \}$

are the same. Here $\mathfrak{R}_{(P)}$ (resp. $G_{(\bar{P})}$) denotes the localization by all the homogeneous elements of $\mathfrak{R}$ (resp. G) not contained in P (resp. $\bar{P}$).

Now we prove Lemma I. Here G is an integral domain and

$\bar{G}/G$ has finite length, where $\bar{G}$ be the integral closure of G in the quotient field of G (see Lemma (5.2) of [TW1]). We represent $\bar{G}$ by Demazure's construction [D]: $\bar{G} = R(E,D)$ with ample $\mathbb{Q}$-Weil divisor D on E.

(1.3) Proof of (2) $\longrightarrow$(1). We keep the notation as above. Let y be a closed point of $E \subset X$ and x a scheme point of X which contains y and $\dim O_{X,x}$ be two. If x does not belong to E, then $x \in X-E \cong \mathrm{Spec}(A)-V(m)$ and $O_{X,x}$ is regular by the (R_2)-condition of $\mathrm{Spec}(A)$. Now suppose x is contained in E. Then $\dim O_{E,x} = 1$ and $O_{E,x}$ is regular by the normailty of E.

By the assumption the Demazure divisor D is an integral divisor at x. Since $\mathrm{Cl}(O_{E,x}) = 0$, D is an Cartier divisor at x. Hence $1 = N(P)$. By Lemma (1.2) $(\mathfrak{R}_{(P)})_1$ contains a unit t of $\mathfrak{R}_{(P)}$. Hence $(\mathfrak{R}_{(P)})_s = t^s(\mathfrak{R}_{(P)})_0$ for any integer s and $\mathfrak{R}_{(P)} \cong (\mathfrak{R}_{(P)})_0 \otimes k[t,t^{-1}]$. Further we have the relations

$$\mathfrak{R}_{(P)} \,/\, T^{-1}\mathfrak{R}_{(P)} \cong G_{(\bar{P})} \cong \Big(G_{(P)}\Big)_0 \otimes k[\bar{t},(\bar{t})^{-1}],$$

where $\bar{t} \in \Big(G_{(P)}\Big)_1$ corresponds to $t \in \Big(\mathfrak{R}_{(P)}\Big)_1$. Hence $tT^{-1} \in (\mathfrak{R}_{(P)})_0$ and $(\mathfrak{R}_{(P)})_0 \,/\, tT^{-1}(\mathfrak{R}_{(P)})_0 \cong (G_{(\bar{P})})_0$ is a regular local ring. Hence $(\mathfrak{R}_{(P)})_0$ is a regular local ring (cf. Claim (5.11.1) [TW1]).

(1.4) Proof of (1) $\longrightarrow$ (2). Here $\mathfrak{R}$ is a normal domain (cf. § 1, §2, and § 5 of [TW1]). We have the following exact sequence

$$0 \longrightarrow O_X(m+1) \longrightarrow O_X(m) \longrightarrow O_E(m) \longrightarrow 0$$

for any integer m. Here $O_E(m) \cong O_E(m.D).T^m$ and $O_X(m) \cong O_X(-m.E).T^m$. Let $\iota : X_{reg} \longrightarrow X$ be the canonical immersion of the regular locus. We have the relations $O_X(-k.E)|_{X_{reg}} = \iota^{-1}O_X(-k.E) = (\iota^{-1}O_X(-E))^{\otimes k}$. Further $O_E(mD) \cong O_E(m) \cong$

$O_X(m)/O_X(m+1) = O_X(-m.E)/O_X(-(m+1).E) =$

$\iota_*(\iota^{-1}O_X(-m.E))/\iota_*(\iota^{-1}O_X(-(m+1).E)) \xrightarrow{\alpha}$

$\iota_*(\iota^{-1}\{ O_X(-m.E)/O_X(-(m+1).E) \}) = \iota_*\{ O_{X_{reg}}(-m.E)/O_{X_{reg}}(-(m+1).E) \}$

$= \iota_*(\{ O_{X_{reg}}(-E)/O_{X_{reg}}(-2E) \}^{\otimes k}) = \iota_*(\iota^{-1}O_E(m.[D]))$.

Now look at the point x in X. Since the codimension of $E-(X_{reg} \cap E)$ with respect to E is not less than two, we have the relation $\iota_*(\iota^{-1}O_E(m.[D])) \cong O_E(m.[D])$ at x. Moreover the morphism $O_E(m.D) \longrightarrow O_E(m.[D])$ induced from the above relations is isomorphic over $E-(X_{reg} \cap E)$ and is isomorphic at x. Therefore the relation $m.D = m.[D]$ holds at x for any integer m. Hence D is integral at x.

§. 2. A criterion for singularity to be terminal (Proof of Lemma II).

(2.1) Our singularities on X appear as the zero-th part of $\mathbb{Z}$-graded ring and are cyclic quotients of some known singularities ([F1],[TW1]). Our purpose is to investigate such a cyclic cover associated to the divisor class of the Demazure divisor in the divisor class group $Cl(O_{E,P})$ and to prove Lemma II.

We shall review the following results due to J. Stevens [St]:

Theorem (2.2) (Theorem 2, J. Stevens [St]). Let $f : (X,P) \longrightarrow (S,o) \subset (\mathbb{C},o)$ be a flat deformation of a canonical singularity X_0 of index one. If $X_t = \{ f^{-1}(t) \}$ has only terminal singularities for $t \neq 0$, then (X,P) is terminal.

Remark (2.3). If we assume the condition " $X - X_0$ has only terminal singularities " instead of the condition " X_t , $t \neq 0$, has only terminal singularities ", we can conclude that (X,P) is terminal by same arguments of J. Stevens.

Theorem (2.4) (Theorem 5, J. Stevens [St]). Let (X,P) be a normal d-dimensional singularity with $\mathbb{Q}$-Cartier canonical divisor K_X of index r. Suppose there is a normal Weil divisor D of (X,P) such that $cl(D) = -cl(K_X)$ in $Cl(O_{X,P})$ and that D has only rational singularity. Then (X,P) is a canonical singularity.

(2.5) Proof of Lemma II (1). Denote the support of $O_{V,P}/J$ by E. By the assumption, E has a normal Gorenstein rational singularity, and we can write $J^{[\alpha]}$ as $J^{[\alpha]} = O_{V,P}(-k.E)$ for any integer k. Let us set R as $R = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} O_{V,P}(-k.E).T^k \subset K(O_{V,P})[T,T^{-1}]$. Then we can easily see

(2.5.1). $\min \{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha > 0$ and R_α contains a unit of $R \}$ = the torsion order of $cl(E)$ in $Cl(O_{V,P})$.

Further we see the following

Lemma (2.5.2). (1) $J^{[k]}/J^{[k+1]}$ is a divisorial O_E-module. (2) If we write $J/J^{[2]}$ as $J/J^{[2]} = O_E(D)$ by an integral Weil divisor D on (E,P), then we have the relation $J^{[k]}/J^{[k+1]} = O_E(k.D)$ for any integer k. (2) The torsion degree of $cl(D)$ in $Cl(O_{E,P})$ equals the integer r.

Proof. (1) Since $J^{[k]}$ satisfies the (S_3)-condition for any integer k, $J^{[k]}/J^{[k+1]}$ clearly satisfies the (S_2)-condition as $O_E = O_{V,P}/J$ -module. Here $J^{[k]}/J^{[k+1]}$ is of rank one on O_E. Hence the assertion of (1) follows. (2) Let $\iota : V_{reg} \longrightarrow V$ be the canonical immersion of the regular locus. Here the codimension of $E-(V_{reg} \cap E)$ with respect to E is not less than two. Since both $J^{[k]}/J^{[k+1]}$ and $O_E(k.D)$ satisfy the (S_2)-condition as O_E-module and are isomorphic over $E \cap V_{reg}$, $O_E(k.D) \cong J^{[k]}/J^{[k+1]}$ holds for any integer k as same as in (1.5). (3) Here R is H-local in the sense of Goto-Watanabe (§ 1 of [GW]). Hence we can show the equality $\min \{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha > 0$ and R_α contains a unit of $R \}$ = $\min \{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha > 0$ and $J^{[\alpha]}/J^{[\alpha+1]}$ contains a unit of $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (J^{[k]}/J^{[k+1]})$ $\}$ as same as in (5.9.1) of [TW1]. Our assertion follows from (2.5.1). Q.E.D.

Take a homogeneous unit $f.T^r \in J^{[r]}.T^r$ of R with $f.O_{V,P} = J^{[r]}$. We put $B = (\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} J^{[k]}.T^k)/(1-f.T^r)$, and $C = (\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \{J^{[k]}/J^{[k+1]}\}.T^k)/(1-\bar{f}.T^r)$ where $\bar{f} \in J^{[r]}/J^{[r+1]} \cong \bar{f}.O_E$ corresponds to f. We have $B/T^{-1}B \cong C$. Here B and C are local rings and $T^{-1} = f.T^{r-1}$ is a nonzero divisor of B.

Lemma (2.5.3). C is a Gorenstein rational singularity.

Proof. Since $\omega_C = \mathrm{Hom}_{O_E}(O_C, \omega_E)$ and $\omega_E \cong O_E$, we obtain $\omega_C \cong O_C$. The cyclic cover $\mathrm{Spec}(C) \longrightarrow E$ is etale in codimension one. By Proposition (1.7) of M. Reid [R1], C is a canonical singularity. Hence C is a rational singularity ([E],[F1]) and, in particular, has the Cohen-Macaulay property. Since $\omega_C \cong O_C$, C is Gorenstein. Q.E.D.

We shall complete the proof of (1) of Theorem II. Since B is local and $C = B/T^{-1}B$ is Gorenstein with nonzero divisor T^{-1}, B is a Gorenstein local ring. The cyclic cover $\rho : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow V$ which is etale in codimension one and further is etale over V -

E. Associated to this cover we have the exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}.cl(J) \longrightarrow Cl(O_{V,P}) \xrightarrow{\rho^*} Cl(B),$$

where $\rho^*(cl(I)) = cl(Hom_{O_{V,P}}(B,I)) \in Cl(B)$ for $cl(I) \in Cl(O_{V,P})$ with a divisorial $O_{V,P}$-ideal I (see Appendix of J. M. Wahl [W1], or [TW2]). We have the relation $0 = cl(K_B) = \rho^*(cl(K_V))$ in $Cl(B)$. Hence there is an integer α of $\{ 0,1, \ldots ,r-1 \}$ such that $cl(J^{[\alpha]}) = cl(K_V)$ in $Cl(O_{V,P})$. This induces the relation $cl(J^{[\alpha]}) = cl(K_V)$ in $Cl(O_{V,P})$. Therefore we obtain the relations $O_{E,P} \cong \omega_{E,P} = O_{E,P}(K_V+E) = J^{[\alpha-1]}/J^{[\alpha]} \cong O_{E,P}((\alpha-1).D)$ as divisorial $O_{E,P}$-modules. Here the torsion order of $cl(D)$ equals r by (2) of Lemma (2.5.2). Hence $\alpha = 1$, i.e., $cl(J) = cl(K_{V,P})$ in $Cl(O_{V,P})$.

(2.6) Proof of Lemma II (2). By (2.4) (V,P) is a canonical singularity and ρ is the canonical covering of (V,P). To show that (V,P) is a terminal singularity, we shall study the flat deformation $\tau : Spec(B) \longrightarrow Spec(\mathbb{C}\{T^{-1}\})$ induced from the canonical inclusion $\mathbb{C}\{T^{-1}\} \longrightarrow B$. Then $\tau^{-1}(o) \cong Spec(C)$ is a Gorenstein rational singularity. Further $Spec(B) - \tau^{-1}(o) = Spec(B)-V(T^{-1})$ has only terminal singularities, for $\rho|_{Spec(B)-V(T^{-1})} : Spec(B)-V(T^{-1}) \longrightarrow V-E$ is etale. Hence by (2.2) and (2.3), B is terminal. Since we already had shown that (V,P) is canonical, we can conclude that (V,P) is terminal by (II) of Proposition (3.1) of M. Reid [R2].

§ 3. We shall prove Theorems IV and VIII.

(3.1) Proof of Theorem IV, (2) $\longrightarrow$ (1). Let $F = \{ F^k \}_{k\geq 0}$ be a filtration on $O_{W,w}$ as in the statement. Let us describe

G by Demazure's method as follows : $G = R(E,D)$, $E = \mathrm{Proj}(G)$, $D \in \mathrm{Div}(E)\otimes\mathbb{Q}$. By the assumption, D is an integral Weil divisor on E and $O_E \cong \omega_E$. Let $\psi : X = \mathrm{Proj}(\mathfrak{R}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) = W$ be the filtered blowing-up with respect to F, where $\mathfrak{R} = \bigoplus_{k\geq 0} F^k T^k \subset A[T]$ as in (1.1). By Theorem III X has only terminal singulariries. Since $\omega_W \cong O_W$ and E is irreducible, there is an integer m such that $\omega_X \cong O_X(-m.E) \cong O_X(m)$. By the exact sequences

$0 \longrightarrow \omega_X \longrightarrow \omega_X(E) \longrightarrow \omega_E \longrightarrow 0$, and

$0 \longrightarrow O_X(m) \longrightarrow O_X((m-1)E) \longrightarrow O_E((m-1)) \longrightarrow 0$, we obtain

the relations $O_E \cong \omega_E \cong O_E((m-1)) = O_E((m-1).D)$. Since D is an ample integral Weil divisor on E, $m = 1$. Hence ω_X is relative ψ ample and ψ is the canonical resolution of (W,w) by Definition VI-I in Introduction.

In the rest of this paragraph (3.1), we shall prove that (W,w) is a purely elliptic singularity of $(0,d-1)$-type by Ishii's criterion [I1]. Let $\varphi : X^{\sim} \longrightarrow W$ be a good resolution of (W,w) such that $X^{\sim}$ dominates X, say $\tau : X^{\sim} \longrightarrow X$. Let $\varphi^{-1}(w) = \bigcup_{j=1}^{m} E_j$ be the decomposition of the exceptional divisor for φ into the irreducible components and E_1 be the strict tansformation of E by τ. In our situation $E_2, \ldots, E_m$ are blown down to X by τ and the image $\tau(E_2 \cup \ldots \cup E_m)$ is contained in a closed subvariety of E. Since $\omega_X \cong O_X(-E)$, we can write the canonical divisor $K_{X^{\sim}}$ of $X^{\sim}$ as $K_{X^{\sim}} = \sum_{j=2}^{m} a_j.E_j - E_1$ with $a_j \in \mathbb{Z}$, $j = 2, \ldots, m$. We have $R^{d-1}\psi_*(O_{X^{\sim}}) \cong R^{d-1}\psi_*(O_X) \cong R^{d-1}\psi_*(O_E)$, since X has only rational singularities and $R^{d-1}\psi_*(O_X(-E)) = R^{d-1}\psi_*(\omega_X) = 0$ by the Grauert-Riemenschneider vanishing theorem. Since E has only rational singularities, we have the relations $\mathbb{C} \cong H^{d-1}(E,\omega_E) \cong$

$H^{d-1}(E,O_E) \cong H^{d-1}(E_1,O_{E_1})$. Hence $\dim R^{d-1}\psi_*(O_{X^\sim}) = \dim H^{d-1}(E_1,O_{E_1}) = 1$. By Proposition (3.8) [I1] $a_j \geq 0$ for $j = 2, \ldots ,m$. Hence (W,w) is purely elliptic [W5]. Here $H^{d-1}(E_1,O_{E_1})$ is the $(0,d-1)$-part of the Hodge decomposition of $H^{d-1}(E_1,\mathbb{C})$. Hence the type of purelly elliptic singularity (W,w) is $(0,d-1)$ by Definition (4.1) [I1]. Q.E.D.

(3.2) Now we shall show the following Lemma (3.3) as the first step of the implication (1) $\longrightarrow$ (2) of Theorem IV. This was first stated and proved for the three dimensional case by S. Ishii (see §'s 4 and 5 of [I2],[I-W]). We follow her basic idea. In fact (3.3.2) and (3.3.4) can be seen in [I-W]. Further we will refer these arguments in (3.5) for a proof of Theorem VIII.

Lemma (3.3). Let (W,w) be a normal d-dimensional isolated singularity with $\omega_W \cong O_W$ and be purely elliptic of type $(0,d-1)$ in the sense of Definition (4.1) [I1]. Suppose that the canonical algebra $\bigoplus_{k\geq 0} \xi_*((\omega_{W^\sim})^{\otimes k}).T^k \subset K(A)[T]$ is finitely generated over $A = O_{W,w}$ for a resolution $\xi : W^\sim \longrightarrow W$ of (W,w). Let $\psi : X \longrightarrow W$ be the canonical morphism defined by $X = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{k\geq 0} \xi_*((\omega_{W^\sim})^{\otimes k}).T^k)$.

Then we have the following conditions:

(1) X has only terminal singularities.

(2) The canonical sheaf ω_X of X is written as $\omega_X \cong O_X(-E)$ with $E = (\psi^{-1}(w))_{red}$.

(3) E is irreducible. Further E has only Gorenstein rational singularities and satisfies the relation $\omega_E \cong O_E$.

Proof. (3.3.1) Since $\omega_A \cong A$, , we introduce a filtration F

$= \{ F^k \}_{k\geq 0}$ on A as $F^k \cong \psi_*(\omega_X^{[k]})$ for $k \geq 0$ (cf. Def.IV-1 in Introduction). Since $\mathfrak{R}$ is a finitely generated A -algebra, there is a positive integer N such that $F^{mN} = (F^N)^m$ holds for $m \geq 0$. The support of A/F^N equals the non-canonical locus of $W = \mathrm{Spec}(A)$ by (I) of Proposition (1.2) [R1]. We have the natural diagram :

$$\begin{tikzcd} F^{mN}O_X \cong \psi^*(\psi_*(\omega_X^{[mN]})) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \omega_X^{[mN]} \arrow[dl, "\alpha"] \\ O_X \cong \psi^*(\omega_W^{[mN]}) & \end{tikzcd}$$

By (II) of Proposition (1.2) [R1] (see also Theorem 0-3-12 [KMM]) ω_X is ψ-ample and X has only canonical singularities. Hence there is a positive integer M such that β induces the isomorphism $F^{mN}O_X \cong \omega_X^{[mN]}$ for $m \geq M$. Therefore the discrepancy Δ (cf. [R1]) of ω_X and ω_W is introduced by $\Delta = (mN.K_X - \psi^{-1}(mN.K_W))/mN$ and satisfies the relation $O_X(mN.\Delta) \doteq F^{mN}O_X \cong \omega_X^{[mN]}$ for $m \geq 0$. In particular the support of Δ equals E.

(3.3.2) Let $\varphi : X \longrightarrow W$ be a good resolution of (W,w) such that $X^\sim$ birationally dominates X as in (3.1). Let $\varphi^{-1}(w) = \bigcup_{j=1}^{m} E_j$ be the decomposition of the exceptional divisor for φ into the irreducible components. Since (W,w) is purely elliptic of $(0,d-1)$-type, there exists E_1 where the relation $K_{X^\sim} = \sum_{j=2}^{m} a_j.E_j - E_1$ with $a_j \geq 0$ for $j = 2, \ldots ,m$ holds. For a proof of this essential fact, we refer to the arguments for the proof of irreducubility of the divisor which belongs to the set " E(d-1,d-1) " in page 549 of [I1]. Further we have the relation $\omega_X^{[m]} \cong \tau_*((\omega_{X^\sim})^{\otimes m})$ for $m \geq 0$, because X has only canonical singularities. Since τ is a birational morphism of normal varieties, the codimension of the critical locus in X, i.e., the image of the exceptional locus of τ, is not less than two in X. Hence by the relation $O_X(N.\Delta) = \tau_*(O_{X^\sim}(N.\sum_{j=2}^{m} a_jE_j - N.E_1))$, we obtain the following conditions:

(3.3.2.1) the codimension of $\tau(\bigcup_{j=2}^{m} E_j)$ in X is not less than two,

(3.3.2.2) $-\Delta$ is reduced and equals $E = \psi^{-1}(w)_{red}$, i.e., $\omega_X \cong O_X(-E)$, and

(3.3.2.3) $E = \tau(E_1)$ and $\tau : E_1 \longrightarrow E$ is a proper modification.

(3.3.3) Now we shall compute the discrepancy Δ_τ of $\omega_{X^\sim}$ and ω_X. Here Δ_τ is written as $\Delta_\tau = \{ N.K_{X^\sim} - \tau^{-1}(N.K_X) \}/N \in Div(X^\sim)\otimes\mathbb{Q}$. We shall write as $\tau^*(\omega_X^{[N]}) \cong \tau^*(O_X(-N.E)) = O_{X^\sim}(-\sum_{j=2}^{m} b_jE_j - N.E_1)$ where $b_j \geq 1$ for $j = 2, \ldots ,m$. Hence we obtain the relation $\Delta_\tau = \sum_{j=2}^{m} \{(N.a_j + b_j)/N\}.E_j$. Therefore X has only terminal singularities.

(3.3.4) We shall show that E is a normal Gorenstein scheme with the relation $\omega_E \cong O_E$. The proof is exactly same as in the arguments of the proof of (1) $\longrightarrow$ (2) Theorem 17 [IW]. So we only check the key points which are needed in there.

Since X has only terminal singularities, X satisfies the (R_2)-condition [R1,2]. Since the essential divisor of any good resolution of (W,w) is reduced and irreducible, we can show that E ($\subset X$) satisfies the (R_1)-condition as same as in Proposition (4.7) [I2]. Further we have the relation $O_X(-E) \cong \omega_X$. Since X is a Cohen-Macaulay scheme[F1],[E], ω_X is a Cohen-Macaulay

$\mathcal{O}_X$-module. Hence E has the Cohen-Macaulay property. In particular, E is a normal scheme. Further we obtain the relations $\omega_E \cong \mathcal{O}_E(K_X+E) \cong \mathcal{O}_E$. Therefore E is a normal Gorenstein scheme.

(3.3.5) We shall show that E has only rational singularities. By the exact sequence

$$0 \longrightarrow \omega_{X^\sim} \longrightarrow \omega_{X^\sim}(E_1) \longrightarrow \omega_{E_1} \longrightarrow 0$$

and the Grauert-Riemenschneider vanishing theorem $R^1\tau_*(\omega_{X^\sim}) = 0$, we obtain the following exact sequence :

$$0 \longrightarrow \tau_*(\omega_{X^\sim}) \longrightarrow \tau_*(\omega_{X^\sim}(E_1)) \longrightarrow \tau_*(\omega_{E_1}) \longrightarrow 0 .$$

Here we have the relations (3.3.2) :

(1) $\tau_*(\omega_{X^\sim}) = \omega_X$, and

(2) $\tau_*(\omega_{X^\sim}(E_1)) \cong \tau_*(\mathcal{O}_{X^\sim}(\sum_{j=2}^{m} a_j E_j)) \supset \mathcal{O}_X$.

In (2), these coincide on $X - \tau(\bigcup_{j=2}^{m} E_j)$. Since $\mathcal{O}_X$ satisfies the (S_2)-condition, we obtain the equality $\tau_*(\mathcal{O}_{X^\sim}(\sum_{j=2}^{m} a_j E_j)) = \mathcal{O}_X$ over X by (3.3.2.1). Hence $\tau_*(\omega_{E_1})$ satisfies the (S_2)-condition as $\mathcal{O}_E$-module and equals ω_E. By G. Kempf's arguments (pp.50-51 [KKMS]), E has only rational singularities.

This completes the proof of Lemma (3.3).

(3.4) As a continuation of the arguments of Lemma (3.3), we shall prove that F (3.3.1) satisfies the desired conditions of Theorem IV in the following four claims.

(3.4.1). $\mathcal{O}_X(-kE)$ is Cohen-Macaulay as $\mathcal{O}_X$-module for $k \in \mathbb{Z}$.

Proof. We have $\omega_X^{[k]} \cong \mathcal{O}_X(-kE)$ on X. Let $p \in E \subset X$

be a closed point of E and the integer r be the index of the canonical singularity (X,p). Then the canonical cover $\bigoplus_{k=0}^{r-1} \omega_{X,p}^{[k]}$ is rational [F1],[E]. Hence each finite direct summand $\omega_{X,p}^{[k]}$ is a Cohen-Macaulay $O_{X,p}$-module. Q.E.D.

(3.4.2). (1) $O_X(-kE)/O_X(-(k+1)E)$ is a divisorial O_E-module.
(2) If we write $O_X(-E)/O_X(-2E)$ as $O_X(-E)/O_X(-2E) = O_E(D)$ by an integral Weil divisor D on E, then we have the relation $O_X(-kE)/O_X(-(k+1)E) = O_E(kD)$ for any integer k.

Proof. Since X has only terminal singularities, X satisfies the (R_2)-condition ([R1,R2]). By noting (3.4.1), the proof follows as same as in (2.5.3) and (1.5).

(3.4.3). Let D be as in (3.4.2). Then we obtain the relation $F^k/F^{k+1} \cong H^0(E,O_E(kD))$ for $k \geq 0$. Here D is an ample $\mathbb{Q}$-Cartier divisor on E. Hence $G = \bigoplus_{k\geq 0} F^k/F^{k+1}$ is a normal domain and represented as $G \cong R(E,D)$ as Demazure's method.

Proof. Since X has only terminal singularities, we obtain $R^i\psi_*(O_X(-kE)) = 0$ for $k \geq 1$ and $i \geq 1$ by the relation $K_X = -E$ (Theorem(1.2.5) and Remark (1.2.6) [KMM]). By the relation $F^k = \psi_*(O_X(-kE))$ for $k \geq 0$, we have $F^{k+1}/F^k \cong \psi_*(O_X(-kE)/O_X(-(k+1)E)) \cong H^0(E,O_E(kD))$ for $k \geq 0$. Let N be the integer introduced in (3.3.1). Then $O_X(-NE) = F^NO_X$ is an invertible O_X-module. We have $O_E \otimes O_X(-NE) \cong O_E(ND)$, since the both satisfy (S_2)-condition and coincide on the regular locus of X. Hence ND is a Cartier divisor on E. Further the ampleness of ND follows from the ψ-ampleness of $O_X(-NE)$.

(3.4.4). $K_G \cong G$ and $H^q_m(A) \cong H^q_{G_+}(G) \cong H^{q-1}(E, O_E)$ for $q = 2, \ldots, d-1$.

Proof. We have the relation $H^i_{G_+}(G) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^{i-1}(E, O_E(kD))$ for $i = 2, \ldots, d-1$ [W2],[GW]. Since D is an ample divisor on E and the relation $\omega_E \cong O_E$ holds, the Kawamata-Vieghweg vanishing theorem (Theorem(1.2.5)[KMM]) implies $(*)$ $H^i(E, O_E(kD)) = 0$ for $i \geq 1$ and $k \geq 1$. By duality $(**)$ $H^i(E, O_E(kD)) = 0$ for $i \leq d-2$ and $k \leq -1$. For $k = 0$, let us consider the following exact sequence $R^q\psi_*(O_X) \longrightarrow R^q\psi_*(O_E) \longrightarrow R^{q+1}\psi_*(O_X(-E)) \cong R^{q+1}\psi_*(\omega_X)$. By the Grauert-Riemenschneider vanishing, we have $R^{q+1}\psi_*(\omega_X) = 0$ for $q \geq 0$. Since (W, w) is an isolated singularity, we have $H^{q+1}_m(O_W) \cong R^q\psi_*(O_X)$ for $q = 1, \ldots, d-2$. Since D is an integral Weil divisor, the canonical module K_G of $G = R(E, D)$ is written as $K_G = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^0(E, \omega_E(kD))T^k$ by [W2]. Since $\omega_E \cong O_E$ and $(**)$, we obtain $K_G \cong G$.

This completes the proof of Theorem VI.

(3.5) Proof of Theorem VIII. Let $E \subset X = \mathrm{Proj}(\mathfrak{R}) \xrightarrow{\psi} W$ φ and τ be as same as in (3.3.2). There exists an irreducible component E_1 of $\varphi^{-1}(w)$ where the relation $K_{\tilde{X}} = \sum_{j=2}^{m} a_j . E_j - E_1$ with $a_j \geq 0$ for $j = 2, \ldots, m$ holds.

(3.5.1) Since $G = \bigoplus_{k \geq 0} F^k/F^{k+1}$ is a Gorenstein ring, we have $p_g(W, w) \geq \sum_{k \geq 0}^{a(G)} \dim_{\mathbb{C}}(G_k)$ (Theorem (4.2) [TW1]). Here $p_g(W, w) = 1$ and $a(G) \geq 0$ by the assumption. Hence the equality holds in the above inequality. By Theorem (4.9) of [TW1] X is normal and has only rational singularities. Further

$\omega_X \cong O_X(a(G)+1) = \mathfrak{R}(a(G)+1)^{\sim}$

by (1) of Theorem (3.5) [TW1]. We have the exact sequence

$0 \longrightarrow O_X(n+1) \longrightarrow O_X(n) \longrightarrow O_E(n) \longrightarrow 0$

for $n \in \mathbb{Z}$ (cf. §.1 and §.5 [TW1]). For $n \geq 1$, $O_X(n)$ is a divisorial O_X-ideal sheaf of O_X such that the support of $O_X/O_X(n)$ equals the support of $E = \mathrm{Proj}(G)$. We have the relations $O_X(1) \cong O_X(-E) \supset \omega_X = \tau_*(\omega_{X^{\sim}}) \cong \tau_*(O_{X^{\sim}}(\sum_{j=2}^{m} a_j E_j - E_1))$ with $a_j \geq 0$ for $j \geq 2$, since X has only rational singularities. These imply the conditions : $\tau(E_1) = E$, $\omega_X \cong O_X(-\tau(E_1))$, and $E = \mathrm{Proj}(G)$ is a reduced variety. Since $O_X(n)$ is a divisorial O_X-module, we can write it as $O_X(n) \cong O_X(-s(n).E)$ with $s(n) \in \mathbb{Z}$. Now $O_X(n)$ is $\mathbb{Q}$-invertible O_X-module for $n \in \mathbb{Z}$. Hence ω_X is a ψ-ample $\mathbb{Q}$-invertible O_X-module sheaf.

As same as in (3.3.3), (3.3.4), and (3.3.5), we can prove the following assertions :

(3.5.2) X has only terminal singularities.

(3.5.3) E has only Gorenstein rational singularities and satisfies the relation $\omega_E \cong O_E$.

(3.5.4) To prove the assertion $a(G) = 0$, we shall show the relation $O_X(n) \cong O_X(-nE)$, i.e., $s(n) = n$ for $n \in \mathbb{Z}$. Since E is a normal variety and $O_X(n)$ is a divisorial O_X-module, we have the relations: $s(k) \leq k$ for $k \geq 1$, $s(k+1) \geq s(k)$, and $\lim_{k \to \infty} s(k) = \infty$. Let N be a positive integer where the relation $F^{mN} = (F^N)^m$ holds for $m \geq 0$. Then $O_X(N) = \mathfrak{R}(N)^{\sim}$ is an invertible O_X-module and the relation $O_X(mN+n) \cong O_X(mN) \otimes O_X(n)$ holds for any integers m and n (see §.1 [TW1]). That is to say, for such integer N, we obtain the relation

$m.s(N) + n = s(m.N + n)$ for m and $n \in \mathbb{Z}$.

Since G and $A = O_{W,w}$ are Cohen-Macaulay rings, $\mathfrak{R}' = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} F^k.T^k$ is also a Cohen-Macaulay ring (Proposition (1.6) [TW1]). Hence $\mathfrak{R} = \bigoplus_{k\geq 0} F^k.T^k$ satisfies the (S_2)condition and we have the relation $F^k = \psi_*(O_X(k))$ for $k \geq 0$ (Proposition (1.6) [TW1]).

By (3.5.2), (3.5.3), and the ampleness of $\omega_X = O_X(-E)$, the Kawamata vanishing theorem (Theorem (1.2.5) [KMM]) implies the condition $R^1\psi_*(O_X(-\alpha.E)) = 0$ for $\alpha \geq 1$. Hence $F^{k+1}/F^k \cong \psi_*\left(\frac{O_X(-s(k).E)}{O_X(-s(k+1).E)}\right)$ for $k \geq 0$. We obtain the relation

$$G_{k + m.N} = \psi_*\left(\frac{O_X(-s(k + m.N).E)}{O_X(-s(k + 1 + m.N).E)}\right) = \psi_*\left(\frac{O_X(-s(k).E - m.s(N).E)}{O_X(-s(k+1).E - m.s(N).E)}\right)$$

for any integers m and n. By the assumption, there is an integer M such that $G_k \neq 0$ for $k \geq M$. Therefore $s(k+1) \neq s(k)$ for every integer k. This implies the relation $s(k+1) = k+1$ for every integer k.

(3.5.5) By (3.5.4) , we obtain the relations $G \cong \bigoplus_{k\geq 0} \psi_*(O_E(n)) \cong \bigoplus_{k\geq 0} \psi_*\left(O_X(-nE)/O_X(-(n+1)E) \right)$. Now we can find an ample $\mathbb{Q}$-Cartier integral Weil divisor D on E which satisisfies the conditions $O_E(n) \cong O_E(n.D)$ for $n \in \mathbb{Z}$ by the same arguments of (3.4.2) and (3.4.3).

References.

[D] M. Demazure., Anneaux gradues normaux, in Seminaire Demazure-Giraud-Teissier, Singularites des surfaces. Ecole Polytechnique 1979.

[E] R. Elkik., Ratinalite des singurites canoniques, Invent. Math. , 64 (1981)

[F1] H. Flenner., Quasihomogene rationale Singularitaten. Archiv. fur Math., 36 (1981), 35-44.

[GW] S. Goto., K.-i. Watanabe., On graded rings, I. J. Math. Soc. Japan., 30 (1978) 179-213.

[I1] S. Ishii., On isolated Gorenstein singularities, Math.Ann.270 (1985), 541-554.

[I2] ________., Isolated $\mathbb{Q}$-Gorenstein singularities of dimension three. Adv. Studies in pure Math.8.,(1986) " Complex Analytic Singularities " 165-198. Kinokuniya-North-Holland.

[IW] S. Ishii., Kimio Watanabe., On simple K3-singularities (in Japanese). Note appeared in the proceedings of the conference of Algebraic Geometry at Tokyo Metropolitan Univ. 1988. pp. 20-31.

[K1] Y. Kawamata., Crepant blowing-ups of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces. Ann. of Math. 127 (1988),93-163.

[KMM] Y. Kawamata., K. Matsuda., K. Matsuki., Introduction to the minimal model problem. Adv. Studies in Pure Math. 10, (1987) " Algebraic Geometry, Sendai,1985" 283-360. Kinokuniya-North-Holland.

[KKMS] G. Kempf.,F.Knudesen.,D.Mumford.,B.Saint-Donat., Toroidal embeddings I. Lecture Note in Math.,339. (1973) Springer.

[KSB] J. Kollar., N.I. Shepherd-Barron., Threefolds and deformations of surface singularities. Invent. Math. 1988.

[M1] S. Mori., On three dimensional terminal singularities., Nagoya Math. J. 98 (1985) 43-66.

[M2] ________., Flip conjecture and the existence of minimal models for 3-folds. Journal of A.M.S. 1 (1988).

[MS] D. Morrison., G. Stevens., Terminal quotient singularities in dimensions three and four. Proc. AMS 90. (1984), 15-20.

[R1] M. Reid., Canonical 3-folds. Journees de geometrie algebrique d'Anges 1979, " Algebraic geometry " edited by A.Beauville, Sijthhoff and Noordhoff, (1980), 273-310.

[R2] ________., Minimal models of canonical 3-folds Adv. Studies in Pure Math., 1 (1983) " Algebraic Varieties and Analytic Varieties " 131-180. Kinokuniya-North-Holland.

[S1] K. Saito., Einfach elliptic Singularitaten. Invent. Math. 23, (1974), 289-325.

[St] J. Stevens., On canonical singularities as total spaces of deformations. preprint.

[TW1] M. Tomari., K.-i.Watanabe., Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with " star-shaped " resolution. Submitted

[TW2] _____.,_____., On cyclic cover of normal graded rings. in preparation.

[W1] J.M. Wahl., Equations defining rational singularities. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 10. (1977) 231-264.

[W2] K.-i. Watanabe , Some remarks concerning Demazure's constracution of normal graded rings. Nagoya Math. J. 83 (1981) 203-211.

[W3] _____, Rational singularities with k^*-action. In Commutative algebra. Proc. Trento Conf. edited by S. Greco and G. Valla. Lecture Notes in Pure and applied Math. No.84. (1983) 339-351 Marcel Dekker.

[W4] _____., On normal graded rings (divisor class group, regularity) (in Japanese). Kokyuroku RIMS.Kyoto University 621 (1987) 136-149.

[W5] Kimio Watanabe., On plurigenera of normal isolated singularities I. Math. Ann. 250 (1980) 65-94.

[W6] _____., On plurigenera of normal isolated singularities II. Advanced Studies in Pure Math. 8. 1986. Complex Analytic Singularities pp. 671-685.

[Y] T. Yonemura., On hypersurface simple K3-singularities. in preparation.

環の有限生成性に関する一定理とその応用

小野田信春（福井大・教育）

序　本稿の目的は2つあり、1つは環の有限生成性について成り立つひとつの定理を証明することであり、もう1つは、それを不変部分環の有限性の問題へ応用することである。なお、いずれの場合も、より一般的な形で扱うことができるが、本稿では簡単のため、基礎となる環が体のときのみを考えることにする。

1. 有限性定理

本節の目的は次の定理の証明にある。

定理 1.1. 体 k を含む整閉整域 R が k 上有限生成であるための必要十分条件は、R に次の2条件を満たす非零要素 a が存在することである。

(1) $R[\frac{1}{a}]$, R/aR は共に k 上有限生成；

(2) $\dim R/\mathfrak{g} = \dim R - 1$ が $^{\forall}\mathfrak{g} \in \mathrm{Min}_R(R/aR)$ に対し成立。

（但し、$\mathrm{Min}_R(R/aR)$ は $\mathrm{Ass}_R(R/aR)$ の minimal element の集合を表す）

証明　必要性は明らかゆえ十分性を示せばよい。そこで (1), (2) を満たす $0 \neq a \in R$ が存在したとする。いくつかの step に分けて考えることにする：

Claim 1. $\mathrm{Ass}_R(R/aR)$ は有限集合である。

∵ $\overline{R} = R/aR$ とおくと、$\mathrm{Ass}_R(R/aR)$ と $\mathrm{Ass}_{\overline{R}}(\overline{R})$ の間には1対1対応が存在する。条件 (1) より $\mathrm{Ass}_{\overline{R}}(\overline{R})$ は有限集合ゆえ、従って結論を得る。なお、結果として、$\mathrm{Min}_R(R/aR)$ も有限集合となることに注意しておいて欲しい。

Claim 2. $P \in \mathrm{Spec}\, R \Rightarrow \dim R/P = \dim R - ht(P)$

☺ 2つの場合に分けて証明する。

(イ) $a \notin P$ のとき： $P[\frac{1}{a}]$ $(:= P\cdot R[\frac{1}{a}]) \in \mathrm{Spec}\, R[\frac{1}{a}]$ ゆえ条件(1)より

$$\dim R/P \geqq \dim R[\tfrac{1}{a}]/P[\tfrac{1}{a}] = \dim R[\tfrac{1}{a}] - ht(P[\tfrac{1}{a}])$$

ここで、 $R \subset R[\frac{1}{a}]$ かつ $R[\frac{1}{a}]$ は k 上有限生成ゆえ

$$\dim R = tr.deg_k R = tr.deg_k R[\tfrac{1}{a}] = \dim R[\tfrac{1}{a}]$$

が成立する(cf. [4])。従って、 $ht(P) \geqq ht(P[\frac{1}{a}])$ より、

$$\dim R[\tfrac{1}{a}] - ht(P[\tfrac{1}{a}]) \geqq \dim R - ht(P)$$

よって、 $\dim R/P \geqq \dim R - ht(P)$ を得る。逆の不等号は一般的に成立するので、この場合には結論が示せた。

(ロ) $a \in P$ のとき： このときは、 $\exists\, \mathfrak{q} \in \mathrm{Min}_R(R/aR)$ s.t. $\mathfrak{q} \subseteq P$ となることに注意すれば、条件(2)より($R/\mathfrak{q}$ が k 上有限生成ゆえ)

$$\dim R/P = \dim (R/\mathfrak{q})/(P/\mathfrak{q}) = \dim R/\mathfrak{q} - ht(P/\mathfrak{q})$$
$$\geqq (\dim R - 1) - (ht(P) - 1) = \dim R - ht(P)$$

よって、(イ)と同様の理由から結論を得る。なお、結果として

$$ht(P/\mathfrak{q}) = ht(P) - 1 \qquad ({}^\forall \mathfrak{q} \in \mathrm{Min}_R(R/aR) \text{ with } \mathfrak{q} \subseteq P)$$

の成立も同時に示せたことに注意しておいて欲しい。

Claim 3. $P \in \mathrm{Spec}\, R \Rightarrow \dim \widehat{R_P} \geqq \dim R_P$ ($\widehat{R_P}$ は R_P の完備化)

☺ $a \notin P$ ならば $R_P = R[\frac{1}{a}]_{P[\frac{1}{a}]}$ ゆえ $\dim \widehat{R_P} = \dim R_P$ がこの場合は成立している。そこで $a \in P$ のときを考える。

$$R_P^* := aR_P\text{-adic completion of } R_P$$

とおくと、 $R_P^*/aR_P^* \cong R_P/aR_P$ ゆえ条件(1)より、 R_P^* は noether 環であることがわかる。従って、 $\widehat{R_P}$ が R_P^* の PR_P^*-adic completion と一致することより、 $\dim \widehat{R_P} = \dim R_P^*$ を得る。ここで、再び、 $R_P^*/aR_P^* \cong R_P/aR_P$ かつ a が R_P^* の regular element であることに注意すれば、

$$\dim R_P^* \geqq \dim R_P^*/aR_P^* + 1 = \dim R_P/aR_P + 1$$

そこで、次の Claim が示せれば、容易に結論を得る。

Claim 4. $P \in \mathrm{Spec}\, R$, $a \in P \Rightarrow \dim R_P/aR_P = \dim R_P - 1$

☺ Claim 2. (ロ)の証明(の最後のコメント)を見よ。

Claim 5. $P \in \operatorname{Spec} R \Rightarrow R_P$ は k 上の局所域 (locality)

∵ $a \notin P$ ならば $R_P = R[\frac{1}{a}]_{P[\frac{1}{a}]}$ ゆえ結論は明らか。そこで $a \in P$ と仮定する。Claim 1 より $\operatorname{Min}_R(R/aR)$ は有限集合ゆえ、それを

$$\operatorname{Min}_R(R/aR) = \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \cdots, \mathfrak{g}_n\}$$

とする。条件 (1) より ${}^{\forall} R/\mathfrak{g}_i$ は k-affine domain となることに注意する。また、R/aR は noether 環ゆえ $P/aR \in \operatorname{Spec} R/aR$ は有限生成イデアル、従って、$P \in \operatorname{Spec} R$ も有限生成であることにも注意して欲しい。更に、R が整閉であることも併わせると、これらのことから、次のような条件を全て満たす部分環 $B \subseteq R$ の存在が容易に示せる:

(i) B は normal, finitely generated over k, birational to R ;

(ii) $B[\frac{1}{a}] = R[\frac{1}{a}]$, $B/(aR \cap B) = R/aR$;

(iii) $\mathfrak{p} R = P$, where $\mathfrak{p} = P \cap B$.

条件 (ii) より $B/\mathfrak{p} = R/P$ となる。よって、$\dim B/\mathfrak{p} = \dim R/P$ となるが、ここで Claim 3 と、B が f.g. over k ということより

$$\dim B - \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \dim R - \operatorname{ht}(P)$$

となり、$\dim B = \operatorname{tr.deg}_k B = \operatorname{tr.deg}_k R = \dim R$ を併わせることより、$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \operatorname{ht}(P)$, 即ち、$\dim B_{\mathfrak{p}} = \dim R_P$ を得る。また、$\mathfrak{p} R_P = P R_P$ かつ $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}} = R_P/PR_P$ より、自然準同型

$$f : \widehat{B_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow \widehat{R_P} \qquad (\wedge \text{ は完備化を表わす})$$

が存在して、それは全射である。ここで、Claim 3 より

$$\dim \widehat{R_P} \geq \dim R_P = \dim B_{\mathfrak{p}} = \dim \widehat{B_{\mathfrak{p}}}$$

となり、更に、$B_{\mathfrak{p}}$ が体 k 上の整規局所域ゆえ解析的規約、つまり、$\widehat{B_{\mathfrak{p}}}$ は整域であることに注意して欲しい。従って、上の自然準同型 f は単射でなければならず、結局 f は同型写像であることがわかった。以上の準備のもとで $B_{\mathfrak{p}} = R_P$ を示すことにより結論の正しいことを証明しよう。${}^{\forall} x \in R_P$ を $x = \beta/\alpha$ ($\alpha, \beta \in B_{\mathfrak{p}}$) と表わすとき、

$$\beta \in \alpha R_P \cap B_{\mathfrak{p}} \subseteq \alpha \widehat{R_P} \cap B_{\mathfrak{p}} = \alpha \widehat{B_{\mathfrak{p}}} \cap B_{\mathfrak{p}} = \alpha B_{\mathfrak{p}}$$

従って、$x = \beta/\alpha \in B_{\mathfrak{p}}$ となり $B_{\mathfrak{p}} = R_P$ が示せた。

Claim 5 の成立が示せたので、[Theorem 1.6 in [4]] より、R が

k上有限生成であることがわかり、定理1.1の証明は完了した ∎

2. 不変部分環への応用

この節では次の設定を常に仮定する。即ち、kは体でAはk上有限生成な環、Gは群でAにk-algebra automorphismとして作用しているものとする。ここでは、不変元のなす環 $R=A^G$ の有限性について考えてみたい。そのために、次の定義を行う。

<u>定義</u> 2.1. GのAへの作用が WR-property を満たすとは、次の条件(WR)が成立することをいう：

(WR) $\mathfrak{a}$がAのG-stable ideal ならば $(A/\mathfrak{a})^G$ は $A^G/(\mathfrak{a}\cap A^G)$ 上に整である。

Gが geometrically reductive な群でGのAへの作用が rational なときや、或いは一般に、GのAへの作用が SR-property をもつときは、条件(WR)が成立することに注意して欲しい（定義も含めて、詳細に関しては[1]、[2]参照のこと）。さて、本節で証明したいことは次の定理である。

<u>定理</u> 2.1. k, A, G, Rは上の通りとする。このとき、GのAへの作用が WR-property をもつならば、$R=A^G$ はk上有限生成である。

この定理は前節の定理さえ用いれば、[2]の方針をそのまま受け入れることにより簡単に示せる。以下、便宜上、完全な証明を与えることにするが、多くは[2]に依るものであることを改めてお断りしておく。（記号は上の意味で用いるものと約束する）

<u>Lemma</u> 2.2. $h\in A^G$ で $\mathfrak{a}=0:hA$ とおくとき、次の2条件

(1) $A^G/(hA\cap A^G)$, $A^G/(\mathfrak{a}\cap A^G)$ は共にk上有限生成

(2) $(A/\mathfrak{a})^G$ は $A^G/(\mathfrak{a}\cap A^G)$ 上整

を満たすものが存在するなら A^G は k 上有限生成である。

証明　仮定より $\exists$ k-affine ring $B \subseteq A^G$ s.t.
$$B/(hA \cap B) = A^G/(hA \cap A^G) \quad , \quad B/(\mathfrak{a} \cap B) = A^G/(\mathfrak{a} \cap A^G)$$
いま. $b_1, \cdots, b_t \in A$ を
$$(A/\mathfrak{a})^G = \sum_{i=1}^{t} (A^G/\mathfrak{a} \cap A^G)\, \overline{b_i} = \sum_{i=1}^{t} (B/\mathfrak{a} \cap B)\, \overline{b_i}$$

となるように選ぶとき、次を示せばよい.

Claim　$A^G = B[hb_1, \cdots, hb_t]$

$\because$ $\overline{b_i} \in (A/\mathfrak{a})^G$ ゆえ $\overline{b_i}^\sigma = \overline{b_i}$ $(\forall \sigma \in G)$

$\therefore$ $b_i^\sigma - b_i \in \mathfrak{a}$ $(\forall \sigma \in G)$

$\therefore$ $h(b_i^\sigma - b_i) = 0$ $\quad\therefore$ $hb_i^\sigma = hb_i$ $\quad\therefore$ $hb_i \in A^G$

よって. $A^G \supseteq B[hb_1, \cdots, hb_t]$ を得る。逆に $\forall f \in A^G$ に対し.

$\exists$ $b \in B$ s.t. $f - b \in hA \cap A^G$

そこで $f - b = hr$ $(r \in A)$ と表わすとき.

$(f-b) = (f-b)^\sigma = hr^\sigma = hr$ $(\forall \sigma \in G)$

$\therefore$ $r^\sigma - r \in 0 : hA = \mathfrak{a}$ $\quad\therefore$ $\overline{r} \in (A/\mathfrak{a})^G$

$\therefore$ $\overline{r} = \sum_{i=1}^{t} \overline{c_i}\, \overline{b_i}$ $(\exists$ $c_i \in B)$

ここで $r' = \sum_{i=1}^{t} c_i b_i$ とおくと. $r - r' \in \mathfrak{a}$

$\therefore$ $hr = hr'$ $\quad\therefore$ $f - b = hr' \in B[hb_1, \cdots, hb_t]$ ∎

Lemma 2.3.　次の条件条が成立していると仮定する.

(1) A は reduced かつ A^G は noetherian ;

(2) $0 \neq h \in A^G$ ならば h は A の regular element.

このとき. 次の条件を満たす k-affine ring B が存在する.

(イ) $A \subseteq B \subseteq Q(A)$;

(ロ) $A^G \subseteq B^G \subseteq Q(A^G)$ かつ B^G は normal で A^G-加群として有限生成である。

証明　条件(2)より A^G は整域であり、更に $Q(A^G) \subseteq Q(A)$ となる。$\bar{A}$ を $Q(A)$ での A の整閉包とすると $\bar{A}$ は finite A-module. 従って、$B = A[\bar{A} \cap Q(A^G)]$ とおけば B も再び finite A-module となり、故に、

$$0 \neq {}^{\exists} h \in A^G \quad s.t. \quad hB \subseteq A$$

となる。このとき、$B^G = \bar{A} \cap Q(A^G)$ は明らかゆえ、B^G は normal. 更に ${}^{\forall} a \in B^G$ に対し、$ha \in A \cap Q(A^G) = A^G$ となり、A^G が noether 環ゆえ B^G は finite A^G-module である ∎

Lemma 2.4.　次の2条件が成立しているものとする。

(1) A^G は noetherian ;

(2) $0 \neq h \in A^G$ ならば h は A の regular element.

このとき任意の $\mathfrak{g} \in \operatorname{Spec} A^G$, $ht(\mathfrak{g}) = 1$ に対し、次が成り立つ。

$$\dim A^G/\mathfrak{g} = \dim A^G - 1$$

証明　仮定より A^G は整域かつ $aA \cap A^G = aA^G$ が ${}^{\forall} a \in A^G$ に対して成り立つ。このことから、${}^{\forall} \mathfrak{g} \in \operatorname{Spec} A^G$, $ht(\mathfrak{g}) = 1$ に対し、${}^{\exists} P \in \operatorname{Spec} A$ s.t. $ht(P) = 1$ かつ $P \cap A^G = \mathfrak{g}$ となることがわかる。このとき、A の minimal prime ideal P_0 で $P_0 \subseteq P$ となるものを選べば $P_0 \cap A^G = (0)$. そこで $\tilde{A} = A/P_0$, $\tilde{P} = P/P_0$ とおくと、$A^G \subset \tilde{A}$ かつ $\tilde{P} \cap A^G = \mathfrak{g}$ となる。$\tilde{A}$ が k 上のアフィン整域であることより、

$$tr.deg_k\, A^G/\mathfrak{g} = tr.deg_k\, A^G - ht(\mathfrak{g})$$

が成り立つことがわかる（[3]参照）。ここで、

$$\dim A^G/\mathfrak{g} = tr.deg_k\, A^G/\mathfrak{g}, \quad \dim A^G = tr.deg_k\, A^G$$

および $ht(\mathfrak{g}) = 1$ に注意すれば、結論の正しいことが証明できた ∎

以上の準備のもとで定理2.1の証明に移るが、その前に条件(WR)は次の条件(WR′)と同値なことに注意しておいて欲しい。

(WR′) $f : A \longrightarrow B$ が surjective G-homomorphism ならば B^G は $f(A^G)$ 上に整である。

従って、$\mathfrak{a}$ が A の G-stable ideal のとき、G の A への作用が WR-property をもつならば、G の $A/\mathfrak{a}$ への作用も再び WR-property をもつことがわかる。

<u>定理2.1の証明</u>　背理法で行う。そこで反例 A が存在したとする。このとき、上の注意と noetherian induction とより、この A に対し、次が成立していると仮定してよい。

$0 \neq \mathfrak{a}$ が G-stable ideal $\Rightarrow (A/\mathfrak{a})^G$ は k 上有限生成

このとき、G の作用は WR-property をもつから $(A/\mathfrak{a})^G$ は $A^G/(\mathfrak{a} \cap A^G)$ 上整であることより、同時に次が成立していることになる。

$0 \neq \mathfrak{a}$ が G-stable ideal $\Rightarrow A^G/(\mathfrak{a} \cap A^G)$ は k 上有限生成

そこで、場合を2つに分けて考える。

(イ) $0 \neq {}^{\exists}h \in A^G$ s.t. h は A^G の zero divisor となるとき：
このときは $\mathfrak{a} = 0 : hA$ とおくと、$\mathfrak{a}$ は non-zero G-stable ideal.
また hA も non-zero G-stable ideal 従って、

$A^G/(\mathfrak{a} \cap A^G)$、$A^G/(hA \cap A^G)$ は共に k 上有限生成

となり、Lemma 2.2 が使えて、A^G は k 上有限生成。

(ロ) $0 \neq {}^{\forall}h \in A^G$ に対し、h は A の regular element であるとき：
まず、A は reduced としてよい。実際 A が reduced でなければ $\mathfrak{a} = nil(A)$ とおけば $\mathfrak{a}$ は non-zero G-stable ideal. よって、$A^G = A^G/(\mathfrak{a} \cap A^G)$ は k 上有限生成となる。そこで A は reduced

とする。このとき、$0 \neq {}^{\forall} a \in A^G$ に対し、$aA \cap A^G = aA^G$ となり、従って、A^G/aA^G は k 上有限生成となる。このことから、

(i) A^G は noether 環

(ii) 任意の non-zero ideal I に対し、A^G/I は k 上有限生成

となることがわかる。さて、Lemma 2.3 より（Lemma 2.3 の条件 (イ), (ロ) を満たす k-affine 環 B が存在するが、この B に対し、B^G が k 上有限生成となることを示そう。そのためには $R = B^G$ と考えて定理 1.1 が使えることをみればよい。まず $A^G \subseteq B^G \subseteq Q(A^G)$ ゆえ、$0 \neq {}^{\exists} a \in A^G$ s.t. $B^G[\frac{1}{a}]$ は k 上有限生成、となることがわかる。このとき $aB^G \cap A^G$ は A^G の non-zero ideal ゆえ、$A^G/(aB^G \cap A^G)$ は k 上有限生成、かつ B^G/aB^G は $A^G/(aB^G \cap A^G)$ 上有限加群ゆえ、B^G/aB^G も k 上有限生成であることが示せた。このことと、Lemma 2.4 とを併わせることにより定理 1.1 が適用でき、B^G は k 上有限生成である。ところが、一方、B^G は finite A^G-module ゆえ、A^G も k 上有限生成となり、矛盾を生じる ∎

最後に次のことを注意して本稿を終える。定理 2.1 は k が体でなくても、excellent ring あるいは、もう少し一般的に、次の条件 (C) を満たす pseudo-geometric ring ならば正しい。

(C) k 上の normal locality は analytically irreducible

この場合でも証明の基本的な方針は上と同じだが、定理 1.1 に対応する定理を準備する必要があり、少し複雑になる。

参　考　文　献

[1] M. Nagata, Invariants of a group in an affine ring, J. Math. Kyoto Univ. 3 (1964), 369-377.

[2] M. Nagata, Invariants of a group under a semi-reductive action, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 171-176.

[3] N. Onoda, A remark on spots, Kobe J. Math. 5 (1988), 103-108.

[4] N. Onoda and K. Yoshida, On noetherian subrings of an affine domain, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 377-384.

Regular local ring の Galois extension II

広島大・理　伊藤史朗

記号．以下

k: 標数0の代数的閉体

$R := k[[X_1, \cdots, X_n]]$　n 変数の形式的巾級数環

$K = Q(R)$

L: K の finite Galois extension

$G = Gal(L/K)$

S: R の L 内での integral closure

とする。さらに

G は abel

と仮定しておく。

$\hat{G}$: G の (irreducible) characters 全体

とする。

さて，各 $\chi \in \hat{G}$ に対し $S_\chi = \{x \in S \mid \sigma x = \chi(\sigma) x \ \forall \sigma \in G\}$ とおくと各 S_χ は rank 1 の free R-module で $S = \sum S_\chi$ となる。そこで各 $\chi \in \hat{G}$ に対し S_χ の base $s(\chi)$ を一つ固定しておく。$S_\chi S_{\chi'} \subseteq S_{\chi\chi'}$ であるから $s(\chi)s(\chi') = g(\chi,\chi')s(\chi\chi')$，$g(\chi,\chi') \in R$ とかける。

P を S の高さ1の素イデアルとする。このとき

$H(P) = P$ の inertia group

とおくと，$H(P)^\wedge$ の元 φ と PS_P の生成元 u で $\sigma u = \varphi(\sigma) u$，$\forall \sigma \in H(P)$，となるものが存在する。$H(P)^\wedge = \langle \varphi \rangle$ となるので，各 $\chi \in \hat{G}$ に対し $\chi|_{H(P)} = \varphi^r$，$0 \leq r < |H(P)|$ となる整数 r が定まる。このとき r を $\mathrm{ord}_P(\chi)$ とかき，P での χ の order と呼ぶことにする。この χ を P での basic character と呼ぶことにする。

このとき次の定理が成立することまでを昨年のシンポジウム報告集に書いておいた。今回報告するのはその続きである。

定理1　$g(\chi_1,\chi_2)$ が invertible
$\Leftrightarrow$ (その点で S が R 上分岐しているような) S の高さ1の素イデアル $\mathfrak{p}$ において $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\chi_1)+\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\chi_2) < |H(P)|$

今回はこの定理の応用として，G が cyclic group のとき，S の emb. dimension，Cohen-Macaulay type がどのように計算されるかを説明する。

以後　G は cyclic とする．
$n=|G|$
$M = R$ の maximal ideal
$N = S$ の maximal ideal
$n \geqq 2$
ξ : 1の原始 n 乗根
$\chi \in \hat{G}$ に対し $O(\chi)=\{g(\chi_1,\chi_2) \mid \chi_1\chi_2=\chi,\ \chi_i \neq 1\}$ で生成される R のイデアル とする。

まず上の定理の系として

系1. $g(\chi,\chi^{-1})$ が invertible $\Leftrightarrow$ (その点で S が R 上分岐しているような) S の高さ1の素イデアル P において $\chi|_{H(P)}=1$

系2. $\xi(\chi)$ が S/MS の socle の元 $\Leftrightarrow$ $\forall \chi'(\neq 1) \in \hat{G}$ に対し (その点で S が R 上分岐しているような) 高さ1の素イデアル P が存在して，$\mathrm{ord}_P(\chi)+\mathrm{ord}_P(\chi') \geqq |H(P)|$

命題1. P を S の高さ1の素イデアルとする。$\chi(\neq 1) \in \hat{G}$ とする。
もし $g(\chi,\chi^{-1}) \in \mathfrak{z}=P\cap R$ $\Rightarrow$ $g(\chi,\chi^{-1})R_{\mathfrak{z}}=\mathfrak{z}R_{\mathfrak{z}}$.

本題にもどる。 $L=K(z)$, $z^n=f\in K$ となる z をとる。
また $\sigma\in G$ を $\sigma z=\zeta z$ となるものとする。この σ は G を生成している。
$\hat{G}$ の元 ψ を $\psi(\sigma)=\zeta$ で定める。ψ は当然 $\hat{G}$ を生成している。

$f\in R$ として一般性を失わない。さらに

$$f=af_1^{e_1}\cdots f_r^{e_r} \quad a\in R^*$$

と素因数分解したとき、各 $e_i<n$ としてよい。

$$d_i=GCD(n,e_i)$$

とおき、整数 v_i を

$$0\leq v_i<n/d_i, \quad v_ie_i\equiv d_i \pmod n$$

となるように選ぶ。

$\mathfrak{g}$ を R の高さ1の素イデアルでどの f_iR とも異なるとすると $S_\mathfrak{g}=R_\mathfrak{g}[z]$ で $S_\mathfrak{g}$ は $R_\mathfrak{g}$ 上不分岐である。そこで H_i を f_iR 上の $\mathfrak{P}$ の素イデアルでの inertia group, $V_i=R[z]_{f_iR}$ とおく。V_i は一次元 local ring でその極大イデアルは z と f_i で生成され、$z^n=\alpha f_i^{e_i}$ $(\alpha\in V_i^*)$ なる関係式がある。又 $\sigma\alpha=\alpha$ である。

補題1. V を一次元 noeth. local ring, M を V の maximal ideal で $M=(x_0,x_1)$, $x_1^{n_0}=ax_0^{n_1}$ $(a\in V^*)$ とする。$d=GCD(n_0,n_1)$, ζ' を1の原始 n_0-乗根とする。さらに V の automorphism σ で $\sigma a=a$, $\sigma x_0=x_0$, $\sigma x_1=\zeta' x_1$ となるものが存在したとする。このとき、W を V の integral closure とおくと

1) W の Jacobson radical の generator t で $\sigma t=\zeta'^{v}t$, ここで v は $vn_1\equiv d \pmod{n_0}$ なる整数、となるものが存在する。

2) W の maximal ideal での (normal) valuation による x_0 の order は n_0/d.

この補題により H_i の order は n/d_i. 従って H は σ^{d_i} で生成される。又, f_iR 上の $\mathfrak{P}$ の素イデアルでの basic character は $\psi^{v_i}|_{H_i}$ であることがわかる。

また，$1 \leq i < r$, $0 \leq l \leq n$ なる整数 i, l に対して

$$0 < w_{i,l} < n/d_i$$

$$l \cdot e_i/d_i \equiv w_{i,l} \pmod{n/d_i}$$

となる整数 $w_{i,l}$ を選ぶ。(従って $w_{i,l}$ は $f_i R$ 上の S の素イデアルでの φ^l の order である。)

ところで $N = M + \sum_{x \neq 1} S_x$ であるから

$$\dim N/N^2 = \dim M/M^2 + O(1) + \#\{x \neq 1 \mid O(x) \neq R\}$$

及び

$$S \text{ の Cohen-Macaulay type} = \#\{x \neq 1 \mid g(x, x') \in M \text{ for all } x' \neq 1\}$$

であることは簡単にわかる。従って定理1の系1, 2 及び命題1より

命題2. φ^l について次が成立する。

(1) 次の二つの条件は同値である。

(E1) $\{g(x, x') \mid xx' = \varphi^l\} (= O(\varphi^l))$ は R を生成する。

(E2) $\exists l_1, l_2$ s.t. (a) $0 < l_1, l_2 < n$

(b) $l_1 + l_2 \equiv l \pmod{n}$

(c) $w_{il_1} + w_{il_2} < n/d_i \quad \forall i$

(2) 次の二つの条件は同値である。

(S1) $\varsigma(\varphi^l)$ の S/MS への image は S/MS の socle の元

(S2) $0 < l' < n$ なる任意の l' に対して

$$1 \leq i \leq r, \quad w_{il} + w_{il'} \geq n/d_i$$

となる i が存在する。

(3) $g(\varphi^l, \varphi^{-l}) = a \prod_{w_{i,l} \neq 0} f_i \qquad (a \in R^*)$.

要するに　$w_{i,l}$ の表がわかれば（これは定義方程式 $z^n=f$, $f\in R$ がわかっているときには作成できる。），S の emb. dimension と Cohen-Macaulay type はその表から計算できるのである。

講演のとき示した例 $z^5=f_1^2 f_2^3$ （f_1, f_2 は既約）では：
$n=5$, $e_1=2$, $e_2=3$ であるから
$$d_1=d_2=1$$
$$e_1/d_2=2,\quad e_2/d_2=3,\quad n/d_1=n/d_2=5$$
で，$w_{i,l}$ の表は

$i \backslash l$	0	1	2	3	4
(f_1R)	0	2	4	1	3
(f_2R)	0	3	1	4	2

従って $O(t^l)\neq R \Leftrightarrow l\neq 0 \Leftrightarrow S(t^l)$ in S/MS は socle 元
$O(1)\subseteq M^2$.

以上より emb. dim $S = h+4$, type $S=4$ となる。

参考文献

S. ITOH　Cyclic Galois extensions of regular local rings (preprint)

ON THE RADICAL IDEALS OF SEMINORMAL RING

佐藤淳郎　岡山理科大学大学院

菅谷　孝　富山大学理学部

R を Noether 整域とする。R が normal であるための必要十分条件としては有名な Serre Criterion ,

1) 任意の高さ 1 の素イデアルに対して R_p は regular

2) 勝手な非零単項イデアルの prime divisor は height one

が成り立つこととして知られている。即ち、正規性は高さ 1 の素イデアルで判定可能な性質であるといえる。一方、R が seminormal という条件がある。seminormal については詳しくは述べませんが、

[Hamman Criterion]

R が seminormal $\Longleftrightarrow$ R の全商環を K としたとき、任意の $\alpha \in K$ に対して、$\alpha^2, \alpha^3 \in R \Longrightarrow \alpha \in R$

ということが知られている。本稿では seminormal の判定条件として Serre Criterion に類似の結果、即ち、seminormality もまた、ある意味で高さ 1 の素イデアルだけで判定できると言うことを述べたいと思います。

まず初めに、radical ideal の変形として boldly radical を導入する

<u>DEFINITION</u> R を全商環 K をもつ環、I を R のイデアルとする。
その時、

(1) I : boldly radical $\Longleftrightarrow$ $\alpha \in K$ で、ある $N(\alpha) > 0$ が存在して 全ての $n \geq N(\alpha)$ に対して $\alpha^n \in I \Longrightarrow \alpha \in I$ である。

(2) I : strongly radical $\Longleftrightarrow$ $\alpha \in K$ で $\alpha^n \in I$ なる $n > 0$ が存在すればいつでも $\alpha \in I$ である。

(3) R : rooty ring $\Longleftrightarrow$ すべての radical ideal は strongly radical である。

<u>REMARKS 1</u>

(1) R を環としその全商環を K とする。R の ideal I に対して

I : boldly radical $\Longleftrightarrow$ I : (2, 3) - closed

i.e.

任意の $\alpha \in K$ に対して、

$\alpha^2, \alpha^3 \in I \Longrightarrow \alpha \in I$

が成り立つ。

(2) もし J が radical ideal I を含む boldly radical ideal であれば I もまた boldly radical ideal となる。これより 環 R について次は同値である。

(i) R のすべての radical ideal は、boldly radical ideal である。
(ii) R のすべての prime ideal は、boldly radical ideal である。
(iii) R のすべての maximal ideal は、boldly radical ideal である。

(3) もし J が radical ideal I を含む strongly radical ideal であれば I もまた strongly radical ideal となる。これより 環 R について、

R : rooty ring $\Longleftrightarrow$ すべての素イデアルは、 strongly radical ideal である

$\Longleftrightarrow$ すべての極大イデアルは、strongly radical ideal である

次に boldly radical を用いることで、seminormality の特徴付けを与える。

<u>THEOREM 1</u> R を環とする。この時、

R : seminormal $\Longleftrightarrow$ 任意の R の素イデアルは、boldly radical ideal である。

<u>PROOF</u> ($\Longrightarrow$) 任意の R の素イデアル p, $\alpha \in K$ に対して、ある $N(\alpha)>0$ が存在して、全ての $n \geqq N(\alpha)$ に対して $\alpha^n \in p$ と仮定する。今、$N(\alpha)\geqq 2$ とすると、$N(\alpha)$ として、

$$\alpha^{N(\alpha)} \not\in p, \quad \alpha^{N(\alpha)-1} \in p$$

なるものが選べる。この時、

$$\alpha^{2(N(\alpha)-1)}, \alpha^{3(N(\alpha)-1)} \in p \subset R$$

故、仮定より、R は seminormal なので、$\alpha^{N(\alpha)-1} \in R$ となる。

よって、$\alpha^{N(\alpha)-1} \in p$ となる。 以上により、$N(\alpha)=1$ でなければならない。 即ち、$\alpha \in p$ である。

($\Longleftarrow$) $\alpha \in K$ に対して、$\alpha^2, \alpha^3 \in R$ と仮定する。もし、α^2 が R の unit であれば、$\alpha = \alpha^3/\alpha^2 \in R$ かつ、$\alpha^2 \neq 0$ なので、この場合は確かに成り立つ。よって α^2 は R の unit でないとしてよい。その時、α^2 を含む R の素イデアル p が存在する。

今、$P \in \mathrm{Spec}(R[\alpha])$, $P \cap R = p$ なる P をとると、

$$\alpha^3 \in P \cap R = p$$

故、$\alpha^2, \alpha^3 \in p$ となる。ところが p は boldly radical ideal 故、これは $\alpha \in p$ を意味する。よって、R は seminormal である。

(Q.E.D)

ここでもし R が Noetherian domain であれば、Krull の altitude theorem によって上の証明のなかで p として高さ1の素イデアルをとれるので次の Serre Criterion に類似の定理を得ることができる。

<u>THEOREM 2</u> R を Noetherian domain とする。この時、

R : seminormal $\Longleftrightarrow$ R の全ての高さ1の素イデアルは boldly radical ideal である。

次に問題となるのは、どんなイデアルが一体 boldly radical ideal に成りえるのか？ ということである。この問題については以下の定理により boldly radical ideal の構造を完全に決定することができる。即ち、

<u>TEOREM 3</u> R を Noetherian domain, A をその seminormalization とし更に A は finite R-module であるとする。この時、R の ideal I に対して、

I :boldly radical ideal $\Longleftrightarrow$ I : A の ideal であって かつ radical ideal である

もっと正確に言うと、

I を R の boldly radical ideal, p_i $(1 \leq i \leq n)$ を I の prime divisors とする。この時、p_i 上にのっている A の prime ideals は、unique であることが知られているのでそれらを P_i $(1 \leq i \leq n)$ とする。

その時、

$$I = P_1 \cap \cdots \cap P_n$$

とかけるということである。

次に、 root closed の概念を導入する。

<u>DEFINITION</u> Rを環、Kを R の 全商環とする。

R : root closed ring $\Leftrightarrow$ $\alpha \in K$ で $\alpha^n \in R$ なる $n > 0$ が存在すればいつでも $\alpha \in R$ である。

ここで、 root closed ring, rooty ring, seminormal ring に対しては次の関係が一般に成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} & \text{root closed ring} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \text{rooty ring} & \Longrightarrow & \text{seminormal ring} \end{array}$$

ここで問題となるのは、これらの implications のそれぞれの逆が成り立つのか? ということである。まず最初に ① についてですが、これが一般には成立しないという例を吉田先生により教えて頂きました。

<u>EXAMPLE</u> (YOSIDA) k を標数が2でない体とし、k[x] を k 上の1変数多項式環とする。$S = \{ f(x) \in k[x] \mid f(0)f(1) \neq 0 \}$ とおくと S は k[x] の積閉集合となる。

$A = S^{-1} k[x]$,

$R = \{ f(x) \in A \mid f(0) = f(1) \}$

とおくと R は極大イデアル $M = \{ f(x) \in R \mid f(0) = f(1) = 0 \}$ を持つ1次元の局所整域である。この時 M は R の strongly radical ideal である。よって REMARK により R は rooty ring である。しかしこの時、R は root closed ring ではない。事実、 $x - ½ \not\in R$ であるが、$(x - ½)^2 \in R$ である。

では、どのような状況のもとで ① の逆が成り立つのかということですがこれについてはつぎの部分的解答を小野田先生により教えて頂きました。

<u>PROPOSITION</u> (ONODA) R が局所環でないか、または (R, M) が局所環で depth $R > 1$ であれば ① の逆は成り立つ。

次に、② の逆について考えたいと思う。ところがこれも以下の例によって一般には成立しないことが解る。

<u>EXAMPLE</u> k を標数が2でない体とし、k[x] を k 上の1変数多項式環とする。この時、 $A = \{ f(x) \in k[x] \mid f(0) = f(1) \}$ とおくと、A は seminornmal ring である。ところが、 A は rooty ring ではない。
実際、

$$I = \{ f(x) \in A \mid f(½) = 0 \}$$

とおくと I は A の素イデアルである。 この時、 $g(x) = x - ½$ とおくと $g(x)^2 \in I$ であるが、しかし、 $g(x) \not\in I$ である。これより A は rooty ring ではない。

次に、 boldly radical ideal は一体どれくらいあるのか？ という問題について考えたいと思う。そのまえに次のことに注意しておく。

REMARK 2　R を finite seminormalization A をもつ Noetherian domain とする。その時、THEOREM 3 は、R の勝手な boldly radical ideal I は、A の radical ideal であることを言っている。特に、I は conductor ideal $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(A/R)$ に含まれる。

ここで boldly radical ideal が (0) しかない環の例を与える。

EXAMPLE　$A = k[x]$, $R = k[x^2, x^3]$ とおく。その時、conductor ideal は、$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(A/R) = x^2A$ となる。明らかに、(0) は boldly radical ideal である。ここでもし、I が R の非零な boldly radical ideal であるとすると、THEOREM 3 と REMARK 2 により、

$$I = \prod_{i=1}^{n} f_i(x)A,$$ ここで、$f_i(x)$ は互いに異なる規約多項式

である

かつ

$$I \subseteq x^2A$$

となる。よって、$f_1(x) = x$ としてよい。ところがこの時、

$$\prod_{i=2}^{n} f_i(x)A \subseteq xA$$

となるがこれは矛盾である。

次に、局所化と boldly radical ideal との関係について考えてみる。これについてはつぎのことが成り立つ。

PROPOSITION　R を環、p を R の素イデアルとする。この時、

$$p : \text{boldly radical of } R \Longrightarrow pR_p : \text{boldly radical ideal of } R_p$$

が成り立つ。

ここで、この PROPOSITION の逆が成り立つのか？ ということであるがそれは次の例により否定的であることが解る。

<u>EXAMPLE</u> $A = k[x]$, $R = k[x^2, x^3]$ とする。この時、$P = (x-1)A$, $p = P \cap R$ とおく。この時、REMARK 2 によると p は、boldly radical ideal ではない。ところが $A_p = R_p$ は正規環なので pR_p は boldly radical ideal と成る。

最後に boldly radical ideal の prime divisor は必ずしも boldly radical ideal とはならない例を述べてこの小論を終りにしたいと思う。

<u>EXAMPLE</u> $A = k[x, y]$ を体 k 上の2変数多項式環とし $M_1 = (x, y)A$, $M_2 = (x, y-1)A$ とする。更に、$R_1 = k + M_1{}^2$, $R_2 = k + M_2{}^2$ と置いて A の部分環 $R = R_1 \cap R_2$ を考える。ここで、$P_1 \subseteq M_1{}^2$, $P_2 \subseteq M_2{}^2$ なる A の二つの素イデアル P_1、P_2 をとる。そして、

$$I = P_1 \cap P_2, \quad p_1 = P_1 \cap R_2, \quad p_2 = P_2 \cap R_1$$

とする。この時、明らかに I は R の boldly radical ideal となる。今、$I = p_1 \cap p_2$ はイデアル I の R における準素分解を与える。ここで p_1 は必ずしも R の boldly radical ideal には成りえない。というのも例えば $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - y^3$ をとって $P_1 = f(x,y)A$ とおく。この時、$f(x,y)^2 \in p_1$ であるが、$f(x,y) \notin p_1$ なので p_1 は boldly radical idealではない。

REFERENCES

1. D.D. Anderson and D.F. Anderson, Multipicatively closed subset of fields, Houston J. Math., 13 (1987), 1-11.
2. J. Brewer and D. Costa, Seminormality and projective modules over polynomial rings, J. Algebra, 58 (1979), 208-216.
3. J. Brewer, D. Costa and K. McCrimmon, Seminormality and root closure in polynomial ring and algebraic curves, J. Algebra, 58 (1979), 217-226.
4. R. Gilmer and R. Heitmann, On Pic(R[X]) for R seminormal, J. Pure App Algebra, 16 (1980), 251-257.
5. H. Matsumura, Commutative Algebra, W.A. Benjamin, New York, 1970.
6. D.E. Rush, Seminormality, J. Algebra, 67 (1980), 377-384.
7. R.Swan, On seminormality, J. Algebra, 67 (1980), 210-229.
8. C. Traverso, Seminormality and Picard group, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa, 24 (1970), 585-595.
9. K. Yoshida, On birational-integral extension of rings and prime ideals of depth one, Japan. J. Math, 8 (1982), 49-70.

Frobenius 写像の作用について

渡辺敬一（東海大・理・情報数理）

Hochster と Huneke によって導入された、イデアルの "tight closure" の概念は、イデアルの整閉包の研究，標数0で特異点の解消を経由して定義されていた，有理特異点の概念の，特異点の解消を経由しない、標数 $p>0$ での Frobenius 写像を用いた定義（現在のところ，「有理特異点の類似概念の」）等々，広汎な応用が期待される。標数 $p>0$ の体を含む局所環 $(R, \mathfrak{m})$ を考えるとき，$R/\mathfrak{m}$ の injective envelope $E_R(R/\mathfrak{m})$ への Frobenius 写像の作用が問題になり，この作用が良くわかると，後述する R が F-regular であるか否かの判定が即ちに可能になる。

本稿の主目的は，$E_R(R/\mathfrak{m})$ を canonical module K_R の local cohomology group $H^d_\mathfrak{m}(K_R)$ $(d = \dim R)$ として捉えたときに，この加群に対する Frobenius 写像をできるだけ見易い形で表し，それを F-regular であるかどうかの判定，2次元の F-regular ring の分類等に応用しようとするものである。

§1. 定義と基本的性質

しばらくの間、環（Noetherian，単位元1をもつ）は標数 $p>0$ の体を含むとする。環 R の Frobenius 写像を $F: R \longrightarrow R = {}^F R$, $(F(x) = x^p)$ で表す．M が R-module のとき，$F: M = M \otimes_R R \longrightarrow {}^F M = M \otimes_R {}^F R$ を，$F(x \otimes 1) = x \otimes 1$ で表わす．（従って，$F(ax) = a^p \cdot x$）．$F^e: R \to R$, $M \to M$ の値域を ${}^e R$, ${}^e M$ 等と表わす事もある；$F^e: R \to {}^e R$, $F^e: M \to {}^e M$.

また，$R^\circ = R - \bigcup \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$ は R の minimal prime$\}$ とおく．

定義 (1.1) (i) $I \subset R$ がイデアルのとき，I の tight closure I^* を，

$$x \in I^* \Longleftrightarrow \exists c \in R^\circ,\ \forall q = p^e,\ c \cdot x^q \in I^{[q]}$$

但し，$I = (a_1, \ldots, a_n)$ のとき，$I^{[q]} = (a_1^q, \ldots, a_n^q)$（即ち，$F^e(R/I) = R/I^{[q]}$）.

(ii) $N \subset M$ が R-submodule のとき，N の tight closure N^* を，

$$x \in N^* \Leftrightarrow \exists c \in R^\circ,\ \forall q = p^e,\ c \cdot F^e(x) \in \mathrm{Im}(N \otimes_R {}^e R \to M \otimes_R {}^e R = F^e(M))$$

tensor は右 exact だから，M/N の中での $(0)^* \cong N^*/N$ である．

R が reduced のとき，$F : R \to {}^F R$ を，$R \hookrightarrow R^{1/p}$ と同一視すると便利な事が多い．特に，R が整域，商体 K のとき，

$$\begin{array}{ccc} R & \hookrightarrow & {}^e R = R^{1/q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \hookrightarrow & {}^e K = K^{1/q} \end{array}$$

という図式で理解した方が便利な場合がある．

<u>定義</u>(1. 2). (i) 任意のイデアル $I \subset R$ について，$I^* = I$ のとき，R を (<u>weakly</u>) <u>F-regular</u> という．

(ii) (R, m) : local, $\dim R = d$ のとき，任意のパラメーター系 $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ について，$(\underline{x})^* = (\underline{x})$ のとき，R を <u>F-rational</u> という．

"F-regular" という性質は，localization で保たれると予想されるが，まだ証明されていない．従って，[HH 2,3] では，"R のすべての localization が weakly F-regular であるとき，F-regular" という定義を採用しているが，本稿では，"weakly" という形容詞を故意に忘れて，単に以下では "<u>F-regular</u>" という事にする．

F-regular, tight closure の性質の代表的なものとして，次のものがあげられる．(詳しくは，[HH , 2~4]，入手困難なときは [W 4] 参照)．

<u>定理</u>(1. 3). (1) regular ring は F-regular.

(2) F-regular $\Rightarrow$ normal ((2′) F-rational $\Rightarrow$ normal).

(3) S が F-regular，R が S の pure subring のとき (特に，R が S の R-module としての直和因子のとき)，R も F-regular.

(4) I が R のイデアルで，n 個の元で生成されるとき，$\overline{I^n} \subset I^*$.

(5) $A \subset R$, A は regular local，R は f.g. torsion-free A-module のとき，R が F-rational $\Rightarrow$ R は Cohen - Macaulay.

加群の tight closure を考えるとき，"approximately Gorenstein" という性質が重要である．

([Ho])
定義 (1.4) $(R,\mathfrak{m})$: Noeth. local ring が approximately Gorenstein
$\Leftrightarrow \forall N>0$, $\exists I \subset \mathfrak{m}^N$, I は $\mathfrak{m}$-primary irreducible ideal.
この概念を用いると次が示せる.

Lemma (1.5). 次の条件は同値 ($(R,\mathfrak{m})$: Noeth. local とする).

(i) R は F-regular

(ii) 任意の R-mod. M に対し, M に於て, $(0)^* = (0)$.

(ii′) 〃 M と $N \subset M$ に対し, $N^* = N$.

(iii) $E_R(R/\mathfrak{m})$ ($R/\mathfrak{m}$ に injective envelope) に於て, $(0)^* = (0)$.

(証明) (ii) $\Leftrightarrow$ (ii′) は (1.1) の注意参照., (ii) $\Rightarrow$ (iii) は自明.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $I \subset R$ をイデアルとし, $J = I^* \supsetneqq I$ と仮定しよう.
すると, Matlis duality より, $[0:J]_E \subsetneqq [0:I]_E$ ゆえに,
$J\cdot[0:I]_E \neq (0)$ 従って E の socle ($[0:\mathfrak{m}]_E$) の生成元 $z \in J\cdot[0:I]_E$.
従って, $z = a\cdot\varphi$ ($a \in J$, $\varphi \in [0:I]$) と書ける.
$c \in R^0$, $\forall q = p^e$, $c\cdot a^q \in I^{[q]}$ とすると, $\forall e>0$,
$c\cdot F^e(z) = c\cdot F^e(a\varphi) = c\cdot a^q\cdot F^e(\varphi)$. $c\cdot a^q \in I^{[q]}$, $\varphi \in [0:I]_E$ より,
$c\cdot F^e(z) = 0$ ゆえに, $0 \neq z \in (0)^*$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) (ここで"approximately Gorenstein"を使う).
M を有限生成として良い事はすぐわかる. $0 \neq x \in (0)^*$ (Mに於て) とする.
N を $x \notin N$ なる極大な M の submod. とすると, N の極大性より,
$y = x \bmod N$ とおくとき, $\mathrm{Ann}_R(y) = R/\mathfrak{m}$. かつ,
$R\cdot y \cong R/\mathfrak{m} \hookrightarrow M/N$ は essentially extension である. 従って,
$E_R(M/N) = E_R(R/\mathfrak{m})$. $\mathrm{Ann}_R(M/N) \supset I$ なる irred. ideal をとると,
$M/N \hookrightarrow [0:I]_E \cong R/I$. M/N に於て, $0 \neq y \in (0)^*$ だから,
R/I に於ても $(0)^* \neq (0)$. 即ち, $I^* \supsetneqq I$. で, R は F-reg. でない.

(注) 幸い, "approximately Gorenstein" という性質は, ある意味で, かなり弱い性質で, 例えば, R が excellent, reduced ならば approx. Gorenstein である. ([Ho] 参照.).

以下すっと, R は approximately Gorenstein であると仮定しよう.

§2. $E_R(R/\mathfrak{m})$ への Frobenius 写像の作用.

(1.5) によって, R が F-regular であるために, $E_R(R/\mathfrak{m})$ に於て, $(0)^* = (0)$ である事が必要十分となったのだが, $E_R(R/\mathfrak{m})$ もその上への Frobenius 写像の作用も良くわからない. それを解析しようというのが, 本節(そして本稿の)目的である.

この節では $(R, \mathfrak{m})$ は normal local ring, $\dim R = d$, R は canonical module K_R をもつとする. R の商体を Q とすると, K_R は divisorial R-module だから, $K_R \subset Q$ と思う事ができる. 良く知られているように,

$$E_R(R/\mathfrak{m}) \cong H^d_\mathfrak{m}(K_R)$$

であるから,

$$F^e : H^d_\mathfrak{m}(K_R) \longrightarrow H^d_\mathfrak{m}(K_R) \otimes_R {}^e R$$

を解析したい.

<u>Lemma</u> (2.1). $(R, \mathfrak{m}) \hookrightarrow (S, \mathfrak{n})$: finite, M が f.g. R-mod. のとき,

$$H^d_\mathfrak{n}(M \otimes_R S) = H^d_\mathfrak{m}(M) \otimes_R S. \qquad (d = \dim R = \dim S).$$

(証明) R の parameter 系 $(x_1, \cdots, x_d)$ をとると, S の parameter 系でもある. R の Čech complex

$$C^{\cdot} = [\, 0 \to \underset{C^0}{\underset{\parallel}{R}} \to \underset{C^1}{\underset{\parallel}{\bigoplus_{i=1}^{d} R_{x_i}}} \longrightarrow \underset{C^2}{\underset{\parallel}{\bigoplus_{i<j} R_{x_i x_j}}} \to \cdots \cdots \xrightarrow{\delta_d} \underset{C^d}{\underset{\parallel}{R_{x_1 \cdots x_d}}} \to 0 \,]$$

を考えると, $H^d_\mathfrak{m}(M) = H^d(C^{\cdot} \otimes_R M) = \mathrm{Coker}(\delta_d \otimes 1_M)$.

$\otimes_R M$ は右 exact より,

$\mathrm{Coker}(\delta \otimes 1_M) \cong \mathrm{Coker}(\delta) \otimes 1_M$, 即ち, $H^d_\mathfrak{m}(M) \cong H^d_\mathfrak{m}(R) \otimes_R M$.

一方, $H^d_\mathfrak{n}(M \otimes_R S) = H^d((C^{\cdot} \otimes_R S) \otimes_S (M \otimes_R S)) \cong H^d(C^{\cdot} \otimes_R S \otimes_R M)$

$\cong H^d(C^{\cdot} \otimes_R M) \otimes_R S \cong H^d_\mathfrak{m}(M) \otimes_R S$.

[この事実は良く知られていた事なのかも知れない]

D を R の divisor とする. $D = \sum n_\mathfrak{p} \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ は R の ht.1 prime) のとき,

$$\mathcal{O}(D) = \{ f \in Q \mid \mathrm{div}_R(f) + D \geqq 0 \} = \{ f \in Q \mid \forall \mathfrak{p},\ v_\mathfrak{p}(f) \geqq -n_\mathfrak{p} \}$$

とおく. $D=\mathfrak{g}$ のとき, $\mathcal{O}(D)=\mathfrak{g}^{-1}$, $\mathcal{O}(-D)=\mathfrak{g}$.
divisorial ideal $I=\mathcal{O}(D)$ に対して, $I^{(n)}=\mathcal{O}(nD)$ と定義する.
$I^{(n)}\cong(I\otimes_R I\otimes_R\cdots\otimes_R I)^{**}$ (n回 tensor の double dual) である.

<u>Lemma</u> (2.2). $I=\mathcal{O}(D)$, $q=p^e$ のとき, canonical map

$$\alpha: I\otimes_R R^{1/q}\longrightarrow (I^{(q)})^{1/q}\subset Q^{1/q}.$$
$$a\otimes x^{1/q}\longmapsto a\cdot x^{1/q}$$

は codimension 1 で同型. 即ち, $\mathrm{supp}(\mathrm{Ker}(\alpha))$, $\mathrm{supp}(\mathrm{Coker}(\alpha))$ の次元は $d-2$ 以下.

(証明). I が単項, $I=fR$ のとき, 左辺 $=f\cdot R^{1/q}=(f^qR)^{1/q}=$ 右辺.
高さ1の prime ideal $\mathfrak{g}\subset R$ に対し, $I_{\mathfrak{g}}$ は単項だから, $\alpha\otimes_R R_{\mathfrak{g}}$ は同型 //

<u>定理</u> (2.3). $H^d_m(K_R)\otimes_R R^{1/q}\cong H^d_m((K_R^{(q)})^{1/q})$.
但し, $K_R^{(q)}$ は $K_R=\mathcal{O}(D)$ とするとき, $K_R^{(q)}=\mathcal{O}(qD)$ の意味である.
(D のとり方は principal divisor の自由度がある.)
(証明). (2.1) より, $H^d_m(K_R)\otimes_R R^{1/q}\cong H^d_m(K_R\otimes_R R^{1/q})$.
(2.2) の $\alpha: K_R\otimes_R R^{1/q}\longrightarrow (K_R^{(q)})^{1/q}$ に $H^d_m(\cdot)$ を作用させると,

$$H^d_m(K_R\otimes_R R^{1/q})\cong H^d_m((K_R^{(q)})^{1/q}) \quad //$$

$E_R(R/m)\cong H^d_m(K_R)$ に於て socle の generator を z とすると,
$E_R(R/m)$ に於て, $(0)^*=(0)\iff z\notin(0)^*$ であるので, z (socle) を特定する事が非常に重要である.

(2.4)
$R=\bigoplus_{n\geq 0}R_n$ が normal graded ring のとき, ($R_0=k$ は体, R は k 上有限生成とする), $X=\mathrm{Proj}(R)$ とおくと, X 上の ある 有理係数 divisor $D\in\mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ に対し,

$$R=R(X,D)=\bigoplus_{n\geq 0}H^0(X,\mathcal{O}_X(nD)).T^n\subset k(X)[T].$$

と書ける ($k(X)$ は X の函数体)。 X の canonical divisor を K_X とすると,

$$K_R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}H^0(X,\mathcal{O}_X(K_X+D'+nD)).T^n\subset k(X)[T,T^{-1}]$$

と表わせる. (但し, $D=\sum\frac{p_V}{q_V}\cdot V$ のとき, $D'=\sum\frac{q_V-1}{q_V}\cdot V$).

このとき，
$$K_R^{(q)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(q(K_X+D')+nD)).T^n \subset k(X)[T,T^{-1}]$$
と書ける。（[D]，[W 1] 参照）．また，
$$H^d_{\mathfrak{m}}(K_R) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X((K_X+D')+nD)).T^n,$$
$$H^d_{\mathfrak{m}}(K_R^{(q)}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(q(K_X+D')+nD)).T^n$$
と表わせ（$\mathfrak{m} = R_+ = \bigoplus_{n>0} R_n$，$d = \dim R = \dim X + 1$），
$H^d_{\mathfrak{m}}(K_R)$ の socle は，$H^d_{\mathfrak{m}}(K_R)$ の degree 0 の部分
$$H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(K_X+D')) = H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(K_X))(\cong H^0(X,\mathcal{O}_X) \cong k)$$
で与えられる。従って，（Frobenius 写像は次数 n の部分を次数 nq に移すから）socle の行先は，
$$H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(q(K_X+D')))$$
である。こうすると，graded ring の F-regular，F-pure の判定が非常に容易になる。但し，

<u>定義</u> (2.5)．R が F-pure $\Leftrightarrow$ $^\forall M$: R-module，$F: M = M\otimes_R R \to M\otimes_R {}^F R$ が単射．

$(R, \mathfrak{m})$: local のとき，
$$R \text{ が F-pure} \Leftrightarrow E_R(R/\mathfrak{m}) \longrightarrow E_R(R/\mathfrak{m})\otimes_R {}^F R \text{ が単射}$$
が知られている（[HR] 参照．）．

勿論，F-regular $\Rightarrow$ F-pure が成立する（approximately Gorenstein の仮定の下に．）

$R = R(X, D)$ のときは，

<u>系</u> (2.6)．(i) $R = R(X,D)$ が F-pure $\Leftrightarrow$ $F^e: H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(K_X+D')) \to H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(q(K_X+D')))$ が単射

(ii) $R = R(X,D)$ が F-regular $\Leftrightarrow$ $0 \neq {}^\forall f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))$，$\exists q = p^e$，
$f\cdot F^e(z) \neq 0$ in $H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(q(K_X+D')+nD))$．
（但し，$0 \neq z \in H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(K_X+D'))$．）

$\Rightarrow$ $^\forall n > 0$，$\exists q$，$-q(K_X+D') \geqq nD$．

（特に，D は ample だから，$-(K_X+D')$ が ample に近い性質をもつ．）

この判定法により，代数閉体 k 上有限生成な normal 2次元 graded ring で F-pure, F-regular であるものの分類が完全にできる。

定理 (2.7) $R = R(X, D)$, $\dim R = 2$, $k = H^0(X, \mathcal{O}_X)$: 代数閉体のとき，

(1) もし R が F-regular ならば, $X = \mathbb{P}^1$, $\deg D' < 2$.

このような D' は容易に分類され，

(a) $D' = \frac{n-1}{n} P_1 + \frac{m-1}{m} P_2$. (このとき, R は任意の標数で F-regular).

(b) $D' = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2 + \frac{n-1}{n} P_3$, このとき、R が F-regular $\Leftrightarrow p > 2$.

(c) $D' = \frac{1}{2} P_1 + \frac{2}{3} P_2 + \frac{2}{3} P_3$

$D' = \frac{1}{2} P_1 + \frac{2}{3} P_2 + \frac{3}{4} P_3$

このとき, R が F-regular $\Leftrightarrow p > 3$.

(d) $D' = \frac{1}{2} P_1 + \frac{2}{3} P_2 + \frac{4}{5} P_3$, このとき R が F-regular $\Leftrightarrow p > 5$.

以上で尽される。(P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の相異る点). なお，上記の (b), (c), (d) で除外された標数 p に対しては, R は F-pure でもない。

(2) R が F-pure であり，かつ F-regular でないとき，下記の (i) 又は (ii).

(i) X : elliptic curve かつ $D' = 0$. このとき $R(X, D)$ が F-pure $\Leftrightarrow$ $F: H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ が injective.

(ii) $X = \mathbb{P}^1$ かつ $\deg D' = 2$. このような D' は下記の4種類である.

(e) $D' = \frac{2}{3}(P_1 + P_2 + P_3)$. このとき R が F-pure $\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 3$.

(f) $D' = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{4}(P_2 + P_3)$. 〃 $\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 4$

(g) $D' = \frac{1}{2} P_1 + \frac{2}{3} P_2 + \frac{5}{6} P_3$. 〃 $\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 3$.

(h) $D' = \frac{1}{2}((\infty) + (0) + (-1) + (\lambda))$ ($\lambda \in k$, $\lambda \neq 0, -1$).

このとき R が F-pure $\Leftrightarrow$ $p > 2$ かつ $p = 2n+1$ とかくとき, $((x+1)(x-\lambda))^n$ の x^n の係数が 0 でない.

(注) 上記に於て, (2)(i) の特異点は Gorenstein, それ以外はすべて rational singularity で, $\mathrm{cl}(K_R) \in \mathrm{Cl}(R)$ は torsion である ($\mathrm{Cl}(R)$ は有限だから). その位数を r とすると, $K_R^{(r)} \cong R$ を用いて,

$S = \bigoplus_{i=0}^{r-1} K_R^{(i)}$ は R-algebra の構造をもつ. この S を R の canonical cover といい, S は Gorenstein になる。上記の R の canonical cover をとると，それぞれ, (1)(a) は A_l 型, (b) は D_l 型 ($l = n+2$), (c) は E_6, E_7 型 (d) は E_8 型の

rational double point ([L] 参照.), (2)(ii) は (2)(i) の形の ring が得られる。なお、F-pure ring の分類に関しては、[MS], [S], [W2], [W3] 参照。なお [W2] の (2.5) は誤りで、右側の条件は F-pure の必要条件であるが十分条件ではない。ここに謹しんで5年前の誤りを訂正させて頂きたい。

2次元の F-regular ring の分類に関しては次が有効である.

<u>Lemma</u> (2.8) $(R, m) \hookrightarrow (S, n)$ は normal local ring の finite extension で、codim 1 で <u>étale</u> とする。このとき、もし R が F-regular なら S も F-regular.

(証明) $A \to B$ が finite étale のとき、$B \otimes_A {}^F A \xrightarrow{\sim} {}^F B$ だから、canonical map

$$S \otimes_R {}^F R \longrightarrow {}^F S$$

は ht 1 の prime で localize したとき同型。従って、

$$K_S \otimes_R {}^F R \cong K_S \otimes_S (S \otimes_R {}^F R) \longrightarrow K_S \otimes_S {}^F S$$

も codim. 1 で同型. 従って Kernel, coker の次元は2次元下っている.

$d = \dim R = \dim S$ として、$H^d_m(\cdot)$ を作用させると、

$$\begin{array}{ccc} H^d_m(K_S \otimes_R {}^F R) & \xrightarrow{\sim} & H^d_m(K_S \otimes_S {}^F S) \\ \wr\wr \ (2.1) & & \wr\wr \ (2.1) \\ H^d_m(K_S) \otimes_R {}^F R & & H^d_m(K_S) \otimes_S {}^F S \end{array}$$

従って、

$$F : H^d_m(K_S) \longrightarrow H^d_m(K_S) \otimes_S {}^F S \quad と,$$

$$F : H^d_m(K_S) \longrightarrow H^d_m(K_S) \otimes_R {}^F R$$

は同一視できる。R は F-regular であるから、$0 \neq \xi \in H^d_m(K_S)$ に対して、$\bigcap_{e>0} \mathrm{Ann}_R(F^e(\xi)) = (0)$, 従って, $\bigcap_{e>0} \mathrm{Ann}_S(F^e(\xi)) = 0$ がいえて、S も F-regular になる。

I が R の divisorial ideal で、$cl(I) \in Cl(R)$ が torsion, 位数 r のとき、$I^{(r)} \cong R$ により、"finite covering" として R-algebra

$$S = \bigoplus_{i=0}^{r-1} I^{(i)}$$

が構成できる。$(p, r) = 1$ のとき $R \hookrightarrow S$ は étale in codim.

1 であるから、

系 (2.9). I が R の divisorial ideal, $cl(I) \in Cl(R)$ の位数が r とする。$(p, r) = 1$ で R が F-regular のとき, I は Cohen-Macaulay R-module.

(証明) 上記の S は F-regular, 従って Cohen-Macaulay.

(R, m) が 2次元 F-regular ring とする。$\left.\begin{matrix}\text{F-rational}\\ \text{F-regular}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ rational sing. は 2次元のときはわかっている ([HH]) から, Cl(R) は有限である。また, もし R が Gorenstein なら, "rational double point" となり, 分類が良く知られている。([L] 参照)。もし $cl(K_R)$ の位数が p と互いに素なら, R の canonical cover は F-regular かつ Gorenstein で rational singularity となる。(canonical cover については [TW], [R], [Wall] 参照). 従って "標数 0" では

R が F-regular ⟺ R は "quotient singularity"
(regular ring に対する有限群の不変部分環と "analytic" に同型)

だが, 各標数については完全にわかっているとは言えない.

[追記] tight closure, F-regular ring の定義は勿論 Hochster と Huneke によるもので, 彼らの結果は三部に亘る (各々 100頁を越しそうな) 膨大な論文として発表されるらしい。現在筆者の手元にあるのは, ([HH, 1~3] である。)

REFERENCES

[D] M. Demazure, Anneaux gradues normaux, preprint, Ecole Polytechnique (1979).

[FW] R. Fedder and K.-i. Watanabe, A characterization of F-regularity in terms of F-purity, to appear in Proc. of the program in comm. alg. at MSRI, Berkeley (1987), Springer Verlag.

[Ho] M. Hochster, Cyclic purity versus purity in excellent Noetherian rings, Trans. A.M.S. 231 (1977), 463-488.

[HH 1] M. Hochster and C. Huneke, Tightly closed ideals, Bull. A.M.S., **18** (1988), 45-48.

[HH 2] ________, Tight closure, Proc. of program in comm. alg. MSRI, Berkeley, 1987.

[HH 3] ________, Tight closure, invariant theory, and the Briancon-Skoda theorem, I, preprint (166 pp).

[HH 4] ________, II, III, in preparation.

[HR] M. Hochstr and J. L. Roberts, The purity of the Frobenius and local cohomology, Adv. in Math. **21** (1976), 117-172.

[L] J. Lipman, Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization, Publ. I.H.E.S. **36** (1969), 195-280.

[MS] V.S. Mehta and V. Srinivas, Normal F-pure surface singularities, preprint.

[R] M. Reid, Canonical 3-folds, Proc. Alg. Geom. Angers 1979, Sijthoff and Nordhoff, 273-310.

[S] V. Srinivas, Normal surface singularities of F-pure type, preprint.

[TW] M. Tomari and K.-i. Watanabe, On cyclic covers of normal graded rings, preprint.

[Wahl] J.M. Wahl, Appendix to "Equations defining rational singularities", Ann. Sc. E.N.S. **10** (1977), 231-264.

[W 1] K.-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, Nagoya Math. J. **83** (1981), 203-211.

[W 2] 渡辺敬一, F-pure型のringとrational sing.との関係について, 第5回可換環論Symp.報告集. 188-207.

[W 3] K.-i. Watanabe, Study of F-purity in dimension 2 Alg. Geom. and Comm. Alg. in Honor of M. Nagata (1987), 791-800.

[W 4] 渡辺敬一, Idealのtight closureとその応用, 代数分科会Symposium報告集, (1988, 静岡県立大学), 93-111.

極大な準係数体について

谷本 洋・宮崎大学教育学部

係数体の概念を一般化したものとして，松村先生が［2］において準係数体を定義されている。

<u>定義</u>　$(A, \mathfrak{m}, K)$：局所環，K'：A の部分体とする。K が K' 上 0-etale（すなわち，分離的かつ $\Omega_{K/K'} = 0$）のとき，K' を A の準係数体という。

［2, Theorem 3］と Zorn の補題により，体を含む局所環には極大な準係数体が存在することが分かる。

さて，［1］に次の定理がある。

<u>定理</u>（cf.［1. Theorem 10］）　$(R, \mathfrak{m}, K)$ は等標数の完備局所環とする。このとき，K が $\mathbb{Q}$ 上代数的，又は K が標数 $p>0$ の完全体の時に限り，R は唯一つの係数体をもつ。

では，極大な準係数体が唯一つしかないような局所環は，どのような環だろうか。この問題について，次の答えを得ました。

<u>定理 1</u>　$(A, \mathfrak{m}, K)$ は体を含むネーター局所環であり，$\mathfrak{m} \neq 0$ をみたすとする。このとき，

A が唯一つの極大な準係数体をもつ

$$\Leftrightarrow \Omega_K = 0$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{すなわち，} \mathrm{ch}\,K = 0 \text{ のとき } K \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 上代数的} \\ \qquad\qquad\;\; \mathrm{ch}\,K = p > 0 \text{ のとき，} K \text{ は完全体}\end{array}\right)$$

証明. (⇒) 手法は殆んど [2] と同様である。すなわち，A に含まれる素体を F とし，$\Omega_K \neq 0$ と仮定する。F 上 K の微分基底を ξ_1, ξ_2, …… とし，各 ξ_i に対し A におけるその原像 x_i を1つずつえらぶ。すると，[2, Theorem 1] より $x_1, x_2, \cdots\cdots$ は F 上代数的独立であり，

$$\begin{cases} L = F(\{x_1, x_2, \cdots\cdots\}) \subset A \\ K \text{ は } L \text{ 上 } 0\text{-etale} \end{cases}$$

従って，L を含む極大な準係数体 E が存在する。一方，$\mathfrak{m} \ni y \neq 0$ に対し，上と同様にして，

$$\begin{cases} L' = F(\{x_1 + y, x_2 + y, \cdots\cdots\}) \subset A \\ K \text{ は } L' \text{ 上 } 0\text{-etale} \end{cases}$$

従って，L' を含む極大な準係数体 E' が存在する。$E \neq E'$ は明らか。

(⇐) 標数が 0 か否かに分けて示す。

<u>標数が 0 のとき</u>

<u>補題 2</u> $(A, \mathfrak{m}, K)$ は局所環であり，k は標数が 0 の A の部分体とする。さらに，l_1, l_2 は k を含む A の部分体であるとする。このとき，$a \in l_1$, $b \in l_2$ がともに k 上代数的で，

$$\begin{cases} (1)\ a \equiv b \pmod{\mathfrak{m}} \\ (2)\ a \text{ の } k \text{ 上の最小多項式} = b \text{ の } k \text{ 上の最小多項式} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow a = b$$

これを利用して，次を得る。

<u>命題 3</u> $(A, \mathfrak{m}, K)$ は標数が 0 の体を含む局所環であるとする。このとき，K が $\mathbb{Q}$ 上代数的

⇒ A は唯一つの極大な準係数体をもつ。

証明. A が2つの極大な準係数体 k, l を持ったとする。さて，

$$A \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} \ : \text{忠実平坦} \quad (\overline{\mathbb{Q}} \text{ は } \mathbb{Q} \text{ の代数的閉包})$$

$A\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}$ ： A上整

従って，$\exists M\in \mathrm{Spec}(A\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}})$ s.t. $M\cap A=\mathfrak{m}$ 。 $B=(A\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}})_M$ とおくと，$A\longrightarrow B$ は忠実平坦な局所環の射。よって，$A\hookrightarrow B$。さて，$\overline{\mathbb{Q}}\subset B$ ゆえに，補題2より $\overline{\mathbb{Q}}\supset k, l$。よって，$k[l]$ は体。$k[l]$ は，k, l を含む A の準係数体となるから，極大性より，$k=l$ ▮

標数が $p>0$ のとき

定理4 Aは，標数が $p>0$ の体を含むネーター環であるとする。このとき，$\bigcap_n A^{p^n}$ は，Spec A の連結成分の個数だけの完全体の直積に同型である。

証明. $\exists k\in\mathbb{N}$ s.t. $A^{p^k}\cong A/\sqrt{0}$ 。よって，

$$\mathrm{Spec}\,A：\text{連結},\quad A：\text{被約}$$

としてよい。 $L=\bigcap_n A^{p^n}$ とおく。

まず，「$L-\{0\}$ の任意の元は，A の可逆元である」ことを示す。

$L-\{0\}\ni{}^{\exists}a$ が A の可逆元ではないとする。いま，

$$\exists t_1, t_2, \cdots\cdots\in A \quad \text{s.t.}\quad a=t_1^p=t_2^{p^2}=\cdots\cdots$$

A は被約ゆえ，$t_i=t_{i+1}^p$ $(\forall i)$。よって，

$$aA\subseteq t_1A\subseteq t_2A\subseteq\cdots\cdots$$

A はネーター環ゆえに，$\exists i$ s.t. $t_iA=t_{i+1}A$

$$\therefore\ \exists b\in A \quad \text{s.t.}\quad t_{i+1}^p b=t_{i+1}$$

$$\therefore\ t_{i+1}(t_{i+1}^{p-1}b-1)=0$$

$$\therefore\ \begin{cases} V((t_{i+1}))\cup V((t_{i+1}^{p-1}b-1))=\mathrm{Spec}\,A \\ V((t_{i+1}))\cap V((t_{i+1}^{p-1}b-1))=\phi \end{cases}$$

Spec A は連結であり，しかも t_{i+1} は可逆元ではないから，

$$V((t_{i+1}))=\mathrm{Spec}\,A$$

$$\therefore\ t_{i+1}=0$$

$$\therefore\ a=0$$

これは矛盾。

次に，「L は体である」ことを示す。

$L-\{0\}\ni{}^\forall x$ に対し，$^\exists y\in A$ s.t. $xy=1$。一方，$^\forall n\in\mathbb{N}$ に対し，$^\exists z\in A$ s.t. $x=z^{p^n}$。

$$\therefore\ y=\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{z}\right)^{p^n}\in A^{p^n}$$

$$\therefore\ y\in L$$

よって，L は体。

最後に，「$L=L^p$」を示す。

$^\forall a\in L$，$^\forall i\geq 0$ に対し，$^\exists c_i\in A$ s.t. $a=c_i^{p^{i+1}}$。

$$\therefore\ (c_0-c_i^{p^i})^p=0$$

A は被約ゆえに，$c_0=c_i^{p^i}$

$$\therefore\ c_0\in L$$

しかも，$a=c_0^p$ ∎

<u>系5</u>　A は，標数が $p>0$ の体を含むネーター環であり，$\mathrm{Spec}\,A$ は連結であるとする。このとき，$\bigcap_n A^{p^n}$ は A に含まれる唯一つの極大な完全体である。特に，標数が p の体を含むネーター局所環は，この条件を満たす。

<u>注意</u>　上の定理4は，ネーター環でなくても，被約かつ単項イデアルについての極大条件を満たしさえすればよいが，一般の条件の下では成立しない。

例．F：標数 $p>0$ の素体，X：変数のとき，

$$A=F[X, X^{p^{-1}}, X^{p^{-2}}, \cdots\cdots]$$

とすれば，$\bigcap_n A^{p^n}=A$。

<u>命題6</u>　$(A,\mathfrak{m},K)$ は標数が $p>0$ の体を含むネーター局所環とし，K は完全体であるとする。このとき，A は唯一つの極大な準係数体をもつ。

証明．A の任意の準係数体を k とすると，K は完全体ゆえに k も完全体。

$$\therefore\ k\subseteq\bigcap_n A^{p^n}=L$$

さて，系5よりLは完全体。Kは完全体であったから，LはAの準係数体。よって，Lは，Aの唯一つの極大な準係数体である。■

以上より，定理1の証明は終わった。

さて，Aが体を含む局所環であるとき，Zornの補題により，Aには極大な部分体が存在する。そこで，極大な部分体についても上と同じ問題を考えてみる。すると，次の結果を得る。

定理7　$(A, \mathfrak{m}, K)$は体を含むネーター局所環であり，$\mathfrak{m} \neq 0$であるとする。このとき，

Aは唯一つの極大な部分体をもつ

$\Leftrightarrow$ Kは素体上代数的

証明．(⇒) 定理1と同様。

(⇐)・標数が0のとき，命題3と同様。

・標数が$p>0$のとき。Aの極大な部分体をℓとすると，Kは素体上代数的ゆえ，ℓは完全体。

$$\therefore\ \ell \subseteq \bigcap_n A^{p^n}$$

よって，系5より結論が従う。■

注意　$(A, \mathfrak{m}, K)$は体を含むネーター局所環とし，Aは唯一つの極大な部分体kを持つとする。このとき，kはAの極大な準係数体である。

さて，定理1，定理7を眺めて次の命題を得る。

命題8　$(A, \mathfrak{m}, K)$は標数$p>0$の体を含むネーター局所環とし，$\mathfrak{m} \neq 0$，Kは完全体とする。さらに，Aに含まれる素体をFとしたとき，$\mathrm{tr.deg}_F K > 0$とする。このとき，

(1) Aは2個以上の極大な部分体をもつ。

(2) 高々1個以外の極大な部分体ℓは，すべて次の性質をもつ。

(i) $[K : \ell] = \infty$, かつ

(ii) K は ℓ 上非分離的。

証明. (1) 定理7.

(2) A の極大な部分体 k について, $[K : k] < \infty$, 又は K は k 上分離的ならば, K が完全体であることより, k も完全体で, k は極大な準係数体である。よって, 定理1より k は唯一つに決まる。∎

従って, 例えば任意の素数を p とし, 標数 p の素体上, 超越的な完全体 K と変数 X をとれば, ネーター局所環 $(K[X]_{(X)}, (X), K)$ (又は, $(K[\![X]\!], (X), K)$) は極大な部分体 K 以外に, たくさんの極大な部分体をもち, しかも, それらすべての上に K は非分離的となっていることが分かる。

参考文献

[1] I. S. Cohen, On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. AMS 59 (1946), 54-106.

[2] H. Matsumura, Quasi-coefficient rings of a local ring, Nagoya J. 68 (1977), 123-130.

Buchsbaum環とSegre Product

宮崎 誓（早大理工）

本稿は2つの graded module の Segre product が Buchsbaum module になるための条件について述べるものである。

まず，本稿で用いる notation を整理しよう。

$R = \bigoplus_{d\geq 0} R_d$ ， $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ を体 k 上の graded ring とし，それぞれ R_1, S_1 で k 上有限生成とする。また，$M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d$, $N = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} N_d$ をそれぞれ有限生成 graded R-module, 有限生成 graded S-module とし， $\dim M = m \geq 2$ ， $\dim N = n \geq 2$ とする。

次に，$R\# S \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{d\geq 0}(R_d \otimes_k S_d)$ と定義すると，$T = R\# S$ もまた，k上の graded ring になり，これを R と S の Segre product という。$R = k[x_1,\cdots,x_r]$ ， $S = k[y_1,\cdots,y_s]$ （$x_i \in R_1$, $y_j \in S_1$）と書き， $z_{ij} = x_i \otimes y_j$ とおくと， $T = k[\{z_{ij}\}_{1\leq i\leq r,\, 1\leq i\leq s}]$ とも書ける。同様に， $M\# N \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}(M_d \otimes_k N_d)$ とすれば，$M\# N$ は graded T-module となり，これを M と N の Segre product という。

このとき，

$$(M\# N)^{\sim} = p_1^{*}\tilde{M} \otimes p_2^{*}\tilde{N}$$

が成立している。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}\,T = \mathrm{Proj}\,R \times \mathrm{Proj}\,S \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & \mathrm{Proj}\,S \\
\mathrm{Proj}\,R &
\end{tikzcd}$$

ここで，次の問題を設定する.

Question

M を Cohen-Macaulay graded R-module，N を Buchsbaum graded S-module で，$\operatorname{depth} N \geq 2$ とする。

このとき，$M \# N$ が Buchsbaum となるための必要十分条件は，次の①～③が総て満たされることである。

① $\mathfrak{m}_{R\#S}(M \# H^n_{\mathfrak{m}_S}(N)) = 0$ and $\mathfrak{m}_{R\#S}(H^m_{\mathfrak{m}_R}(M) \# N) = 0$

言い換えると，

$a(N) \leq \min\{d \mid M_d \neq 0\}$ and $a(M) \leq \min\{d \mid N_d \neq 0\}$

② 各 $d \in \mathbb{Z}$，$l\,(<n)$ に対して，

$H^m_{\mathfrak{m}_R}(M)_{d+l} = 0$ or $H^l_{\mathfrak{m}_S}(N)_d = 0$

③ 各 $d \in \mathbb{Z}$，$l\,(<n)$ に対して，

$M_d = 0$ or $H^l_{\mathfrak{m}_S}(N)_{d+n-l+1} = 0$

今のところ次の事まで証明された。

Theorem ([2])

Question の仮定の下で，$M \# N$ が Buchsbaum ならば，①および②が成立する。逆に①～③が成立すれば，$M \# N$ は Buchsbaum となる。

Corollary ([2])

M, N を共に Cohen-Macaulay と仮定する。

このとき，$M \# N$ が Buchsbaum となるための必要十分条件は，

$a(N) \leq \min\{d \mid M_d \neq 0\}$ かつ $a(M) \leq \min\{d \mid N_d \neq 0\}$

が成立することである。

さて，本稿では，Theorem の ①〜③ が成立すれば，$M \# N$ が Buchsbaum であることの証明の概略を述べる。また，$M \# N$ が Buchsbaum ならば，① が成り立つことは明らかで，② が成り立つことは易しくはないが，ここでは省略しよう。

また，Theorem は k が無限体の場合に帰着できるから，今後そのように仮定し，$x_1, \cdots, x_r \in R$ の元のうち任意の m 個の元が M の s.o.p. となるようにする。また，N についても同様にする。

さて，$I^\bullet = (I^i)$ を M の graded R-module としての minimal injective resolution とする。そして，各 i に対して，$I^i = {}'I^i \oplus {}''I^i$ （ただし，$\mathrm{Ass}_R {}'I^i = \{\mathfrak{m}_R\}$, $\mathfrak{m}_R \notin \mathrm{Ass}_R {}''I^i$）と分解し，${}'I^\bullet = ({}'I^i)$，${}''I^\bullet = ({}''I^i)$ とする。同様に，N の graded minimal injective resolution を $E^\bullet$ とし，${}'E^\bullet$ および ${}''E^\bullet$ を同じように定義する。

そこで，$\overline{I}^\bullet = (0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} {}''I^\bullet[-1])$ とおく。ここで，$\overline{I}^0 = M$，$\overline{I}^i = {}''I^{i-1}$ $(i \geq 1)$ であり，ε は natural map である。このとき，$\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \simeq \overline{I}^\bullet$ in $D^+_h(R)$ となる。とくに，$H^i_{\mathfrak{m}}(M) = H^i(\overline{I}^\bullet)$ である。

それから，double complex $C^{\bullet\bullet} = \mathrm{Hom}_R(K_\bullet, \overline{I}^\bullet)$ を考えよう。ここで，$K_\bullet$ は Koszul complex $K_\bullet((x_1, \cdots, x_r); R)$ とする。$C^{\bullet\bullet}$ に対して，filtration $F_t(C^{\bullet\bullet}) = \sum_{p \geq t} C^{p,q}$ を考えて，この filtered double complex $C^{\bullet\bullet}$ に対する spectral sequence を $\{E_r^{p,q}\}$ とする。このとき，

$$E_1^{p,q} = H^q_{\mathfrak{m}}(M) \otimes_R \Lambda^p\left(\bigoplus_{t=1}^{r} R e_t^*\right)$$

ここで，$\langle e_1^*, \cdots, e_r^* \rangle$ は，$K_1((x_1, \cdots, x_r); R)$ の dual basis である。

Definition

graded R-module M と, 整数 $r(\geq 0)$ について, 任意の j 個の元 $(0 \leq j < r)$ $x_{i_1}, \cdots, x_{i_j}$ に対して, $M/(x_{i_1}, \cdots, x_{i_j})M$ が quasi-Buchsbaum となるとき, M を graded r-Buchsbaum module と呼ぶ.

Remark

(a) M が 1-Buchsbaum とは, M が quasi-Buchsbaum のことである。

(b) M が m-Buchsbaum とは, M が Buchsbaum のことである。

Lemma 1 ([2])

M を graded $(r-1)$-Buchsbaum R-module とし, 前に定めた spectral sequence $\{E_r^{p,q}\}$ を考える。

このとき, 次の ①〜③ は同値である。

① M は r-Buchsbaum である。

② 各 $s(\leq r)$, $q(<m)$ に対して,

$$d_s^{p,q} : E_s^{p,q} \longrightarrow E_s^{p+s,\, q-s+1} \quad (\text{for each } p)$$

は zero map である。

③ 各 $s(\leq r)$, $q(<m)$ に対して,

$$d_s^{0,q} : E_s^{0,q} \longrightarrow E_s^{s,\, q-s+1}$$

は zero map である。

次に, $J^{\bullet} = (0 \longrightarrow M \# N \longrightarrow \bigoplus_{i+j=q-1} {}''I^{i} \# {}''E^{j})$ とおく。すると, $J^{\bullet} \simeq \mathbb{R}\Gamma_{m_T}(M \# N)$ in $D_h^{+}(T)$ となる。前と同じように, $C^{\bullet\bullet} = \mathrm{Hom}_T(K_{\bullet}(\{z_{ij}\}; T), J^{\bullet})$ とその spectral sequence を $\{E_r^{p,q}\}$ とする。spectral sequence のつくり方は少し違うのであるが, これに対しても, $M \# N$ が $(r-1)$-Buchsbaum という仮定の下で,

$M \# N$ が r-Buchsbaum になることと，Lemma 1 での
② または ③ とはやはり同値になる。

さて，ここで，M を Cohen-Macaulay，N を Buchsbaum で depth $N \geqq 2$ としよう。

すると，

$$H^q_{m_T}(M \# N) \simeq \bigoplus_{i+j=q-1} H^i(''I^\bullet) \# H^j(''E^\bullet)$$

$$\simeq \begin{cases} (M \# H^q_{m_S}(N)) \oplus (H^m_{m_R}(M) \# H^{q-m+1}_{m_S}(N)) & (q \neq m) \\ (M \# H^m_{m_S}(N)) \oplus (H^m_{m_R}(M) \# N) & (q = m) \end{cases}$$

となる。

$M \# N$ が $(r-1)$-Buchsbaum $(r \geqq 2)$ と仮定しよう。

すると，$E_r^{p,q} = H^q_{m_T}(M \# N) \otimes_T (\wedge^p \bigoplus_{t,u} Te^*_{t,u})$ $(q < m+n-1)$
となる。そこで，$H^{p,(i,j)} = (H^i(''I^\bullet) \# H^j(''E^\bullet)) \otimes_T (\wedge^p \bigoplus_{t,u} Te^*_{t,u})$
($(i,j) \neq (0,0)$ のとき)，$H^{p,(0,0)} = 0$ とおけば，
$E_r^{p,q} = H^{p,(0,q-1)} \oplus H^{p,(m-1,q-m)}$ for $q < m+n-1$
となる。

Lemma 2 ([2])

上の仮定の下で，次の spectral sequence によって定まる maps d_r's は総て zero maps である。

(a) $d_r : H^{p,(0,q-1)} \longrightarrow H^{p+r,(0,q-r)}$ $(r < q < n)$

(b) $d_r : H^{p,(0,q-1)} \longrightarrow H^{p+r,(m-1,q-m-r+1)}$ $(q < m+n-1)$

(c) $d_r : H^{p,(m-1,q-m)} \longrightarrow H^{p+r,(0,q-r)}$ $(q < m+n-1)$

(d) $d_r : H^{p,(m-1,q-m)} \longrightarrow H^{p+r,(m-1,q-m-r+1)}$ $(m+r \leq q < m+n-1)$

詳しい証明を省いたが，以上の Lemma 1, 2 により，Theorem の"逆に"の部分が容易に示される。

References

[1] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978).

[2] C. Miyazaki, Graded Buchsbaum Algebras and Segre Products, Tokyo J. Math. (to appear)

[3] P. Schenzel, Dualisierende Komplexe in der lokalen Algebra und Buchsbaum-Ringe, Lecture Note in Math. 907, Springer-Verlag (1980).

[4] J. Stückrad and W. Vogel, On Segré product and applications, J. Algebra, 54 (1978).

[5] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications, Springer-Verlag (1986).

Relations on Pfaffians

都立大 理　蔵野和彦

1 Introduction

kを体、nを自然数、$S = k[x_{ij}]_{1\le i<j\le n}$は$k$上の$n(n-1)/2$変数の多項式環であり、さらに、各変数の次数を1として$S = \oplus_{i\ge 0} S_i$は次数環の構造を持つとする。$x_{ji} = -x_{ij}, x_{ii} = 0$とおくことにより$X = (x_{ij})$は$S$上の$n\times n$交代行列となる。

$1 \le p_1 < \cdots < p_{2l} \le n$なる自然数の列に対して$Y$を$X$の submatrix で、第$p_1$行、...、第$p_{2l}$行、第$p_1$列、...、第$p_{2l}$列から成るものとする。このとき$Y$は交代行列であり

$$\det(Y) = \{\frac{1}{2^l \cdot l!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{2l}} (\mathrm{sgn}\sigma) x_{p_{\sigma(1)}p_{\sigma(2)}}\cdots x_{p_{\sigma(2l-1)}p_{\sigma(2l)}}\}^2$$

となることがわかる。（ここで、$\mathcal{S}_{2l}$は$2l$次対称群、$\mathrm{sgn}\sigma$はσの符号を表わすものとする。）上の括弧の中のl次斉次式を $2l$-order pfaffian といい、Xの $2l$-order pfaffian 全体により生成される斉次 ideal を$Pf_{2l}(X)$と書く。

$Pf_{2l}(X)$の形の ideal は、古くから研究対象となっており、例えばある多項式環のシンプレクティク群の作用による不変式環は、$S/Pf_{2l}(X)$の形となることが知られている ([10]) 。さらに、$S/Pf_{2l}(X)$は、Gorenstein 環であり ([4]) 、$\mathrm{grade}(Pf_{2l}(X), S) = (n-2l+1)(n-2l+2)/2$となることがわかっている ([3]) 。また代数幾何学では、$S/Pf_4(X)$は、n次k-vector space の 2-quotient spaces を parametrize する Grassmann 多様体の斉次座標環として知られている。

Xは、$m = \binom{n}{2l}$ 個の相異なる $2l$-order pfaffian を持っていて、それらは、係数体k 上一次独立となることがわかる。このことより、次のような次数

を保つ完全列が、存在する。

$$S(-l)^m \xrightarrow{\partial_1} S \longrightarrow S/Pf_{2l}(X) \longrightarrow 0$$

ここで、∂_1、は $S(-l)^m$ の free basis を X の $2l$-order pfaffian に写すものとする。∂_1は、homogeneous より $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ は次のように斉次成分に分解される。

$$\mathrm{Ker}(\partial_1) = \bigoplus_{a>0} \mathrm{Ker}(\partial_1)_{l+a}$$

$\mathrm{Ker}(\partial_1)_{l+a}$を、$2l$-order pfaffian の次数 a の relation ということにする。（$2l$-order pfaffian の一次独立性より $\mathrm{Ker}(\partial_1)_l = 0$ となる。）

kの標数が 0 であれば、$\mathrm{Ker}(\partial_1)$ は、1 次の relation で生成される ([4]) 。また標数に関係なく $l = 1$ (Koszul 複体) 、$n = 2l$ (Koszul 複体) 、$n = 2l + 1$ (Buchsbaum-Eisenbud 複体 [2]) 、$n = 2l + 2$ (Pragacz 複体 [8]) の場合も $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ は、1 次の relation で生成されることが知られている。

以下、どの様な場合に $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ が、1 次の relation で生成されるかを調べる。

2 Main Theorem

[9] より、全ての素体で $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ が 1 次の relation で生成されれば、体だけではなく任意の係数環上でそのことが成立する。

次のことが成立する。

定理 1 ([6]) kが有理数体を含むとき、$\mathrm{ch}(k) = \infty$ と考えることにする。このとき次が成立する。

1. $\mathrm{Ker}(\partial_1) = \sum_{a=1}^{l} S \cdot \mathrm{Ker}(\partial_1)_{l+a}$ (つまり $2l$-order pfaffian の relation は、高々l次の relation らで生成される。)
2. $2 \cdot \mathrm{ch}(k) > n - 2l$であれば、$\mathrm{Ker}(\partial_1) = S \cdot \mathrm{Ker}(\partial_1)_{l+1}$となる。(つまり、このときは $2l$-order pfaffian の relation は、1 次の relation らで生成される。)

上のことを証明するためには、GL(E) の多項式表現としての Sym$(\wedge^2 E)$ の構造を、調べねばならない (plethysm formula) 。しかし、定理1の (1) は、次の補題を使っても直ちに証明することができる。

補題2 $f_1, \ldots, f_m$を、Xの $2l$-order pfaffian 全体とする。Sの単項式全体に、うまく順序を導入することにより、$f_1, \ldots, f_m$は、$Pf_{2l}(X)$ の Gröbner 基底となる。

補題の証明の概略 交代行列

$$X = \begin{pmatrix} 0 & & x_{1\,n-1} & x_{1\,n} \\ & \ddots & & x_{2\,n} \\ -x_{n-1\,1} & & \ddots & \\ -x_{n\,1} & -x_{n\,2} & & 0 \end{pmatrix}$$

の $t = n(n-1)/2$ 個の変数に対して $y_1 = x_{1\,2}, y_2 = x_{2\,3}, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1\,n}$, $y_n = x_{1\,3}, \ldots, y_{2n-3} = x_{n-2\,n}, y_{2n-4} = x_{1\,4}, \ldots, y_t = x_{1\,n}$ とおき、次のように単項式全体に順序を導入する。

$$y_1^{\alpha_1} \cdots y_t^{\alpha_t} < y_1^{\beta_1} \cdots y_t^{\beta_t} \iff \begin{cases} \sum_{a=1}^{t} \alpha_a < \sum_{a=1}^{t} \beta_a \\ \text{または} \\ \sum_{a=1}^{t} \alpha_a = \sum_{a=1}^{t} \beta_a \text{かつ} \\ \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \succ (\beta_1, \ldots, \beta_t) \end{cases}$$

(ここで、$\succ$は、辞書式順序とする。) このとき、Xの第p_1行、...、第p_{2l}行、第p_1列、...、第p_{2l}列から成る $2l$-order pfaffian

$$\frac{1}{2^l \cdot l!} \sum_{\sigma \in S_{2l}} (\mathrm{sgn}\sigma) x_{p_{\sigma(1)} p_{\sigma(2)}} \cdots x_{p_{\sigma(2l-1)} p_{\sigma(2l)}}$$

の highest term は、$\pm x_{p_1 p_{2l}} \cdot x_{p_2 p_{2l-1}} \cdots x_{p_l p_{l+1}}$ となる。pletysm formula([6]) と Knuth 対応 ([5]) を使うことにより、$f_1, \ldots, f_m$が、$Pf_{2l}(X)$ の Gröbner 基底であることを証明することができる。 **証明終**

上の補題と Gröbner 基底に関する一般論 ([1]) を用いることにより、$2l$-order pfaffian の relation が、高々l次の relation により生成されることがわかる。

以上の議論で定理1の (1) が、示された。定理2の (2) の証明は、省略する。

上の定理から、$l=1$ または $n-2l \leq 3$ であれば、任意の体、従って任意の係数環上で、$2l$-order pfaffian の relation は、1 次の relation によって、生成されることがわかるのである。

3 Counter Example

次の定理2より、一般には pfaffian の relation は、1 次の relation だけでは、生成されないことがわかる。

定理2 $\mathrm{ch}(k)=2, n=8, l=2$ としたとき、$\mathrm{Ker}(\partial_1) \neq S \cdot \mathrm{Ker}(\partial_1)_{l+1}$ が成立する。(a_1を Xの左上の 4×4 交代行列の pfaffian 、a_2を右下の 4×4 交代行列の pfaffian とする。このとき、a_1と a_2に関する Koszul relation は、1 次の relation では生成されない 2 次の relation となるのである。)

証明の概略 kを標数2の体、Eを8次元の k-vector space で $e_1,\ldots,e_8$をその基底、$S=\mathrm{Sym}(\wedge^2 E)$ とする。8×8 交代行列 $(e_i \wedge e_j)$ の 4-order pfaffian 全体により生成される ideal を、Pf_4とかく。このとき Pf_4は、Sの ideal であるだけでなく、$\mathrm{GL}(E)$-部分加群となる。$e_i \wedge e_j$をそれぞれ次数1として、$S=\oplus_i S_i$ は、次数環の構造を持つ。($S_i=\mathrm{Sym}^i(\wedge^2 E)$ は、$\mathrm{GL}(E)$ の $2i$ 次の多項式表現だが、これを i 次斉次成分とみる。) 斉次極大 ideal $\oplus_{i>0}S_i$を $\mathcal{M}$ と書く。Pf_4の S上の極小自由分解を、

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i\geq 3} S(-i)^{\beta_i} \longrightarrow S(-2)^{70} \longrightarrow Pf_4 \longrightarrow 0$$

とする。(Pf_4の生成元の次数は、2 、$\binom{8}{4}=70$ は Pf_4の極小生成系の元の数である。) 上の完全列の、$S(-i)^{\beta_i}$は、pfaffian の $i-2$ 次の relation となる。また、

$$\beta_i = \dim(\underline{\mathrm{Tor}}_2^S(S/Pf_4, S/\mathcal{M}))_i$$

が成立する。

このことより、$\beta_4 = \dim_k(\underline{\mathrm{Tor}}_1^S(Pf_4, S/\mathcal{M}))_4$ となる。$\beta_4 \neq 0$ となることを、証明すればよい。$S/\mathcal{M}$ の S 上の極小自由分解、すなわち $e_i \wedge e_j$, $(1 \leq i < j \leq 8)$ に関する Koszul 複体を、$\mathbf{K}.$ とおく。このとき、

$$(\underline{\mathrm{Tor}}_1^S(Pf_4, S/\mathcal{M}))_4 = (\underline{\mathrm{H}}_1(\mathbf{K}. \otimes_S Pf_4))_4 = \mathrm{H}_1((\mathbf{K}. \otimes_S Pf_4)_4)$$

となることより、

$$\begin{aligned}&(\mathbf{K}. \otimes_S Pf_4)_4 \\ = \ &\left(0 \longrightarrow \wedge^2(\wedge^2 E) \otimes_k (Pf_4)_2 \xrightarrow{\varphi} \wedge^2 E \otimes_k (Pf_4)_3 \xrightarrow{\phi} (Pf_4)_4 \longrightarrow 0\right)\end{aligned}$$

において、$\mathrm{Ker}(\phi)/\mathrm{Im}(\varphi) \neq 0$ であればよい。

上の複体のそれぞれの加群は、$\mathrm{GL}(E)$ の8次の多項式表現であり、φ, ϕ は、$\mathrm{GL}(E)$–加群の射である。Eの基底$e_1, \ldots, e_8$に対して、$(\mathbf{K}. \otimes_S Pf_4)_4$ の直和因子で、$e_1, \ldots, e_8$がそれぞれ一回づつ出てくる部分を、

$$\begin{aligned}&((\mathbf{K}. \otimes_S Pf_4)_4)^* \\ = \ &\left(0 \longrightarrow (\wedge^2(\wedge^2 E) \otimes_k (Pf_4)_2)^* \xrightarrow{\varphi^*} (\wedge^2 \otimes_k (Pf_4)_3)^* \xrightarrow{\phi^*} ((Pf_4)_4)^* \longrightarrow 0\right)\end{aligned}$$

と表わす。(この複体の各加群は、もはや$\mathrm{GL}(E)$–加群の構造を、持たない。しかし、基底 $e_1, \ldots, e_8$に関する置換として8次対称群の作用を受ける。)このとき、pletysm formula([6]) により、

- $\dim_k(\wedge^2(\wedge^2 E) \otimes_k (Pf_4)_2)^* = 210$
- $\dim_k(\wedge^2 E) \otimes_k (Pf_4)_3)^* = 280$
- $\dim_k((Pf_4)_4)^* = 91$

となることが、わかる。さらに、ϕ^*は全射であることより、

$$\dim_k(\mathrm{Ker}(\varphi^*)) = 21 + \dim_k(\mathrm{H}_1((\mathbf{K}. \otimes_S Pf_4)_4)^*))$$

となる。すなわち、$\dim_k(\mathrm{Ker}(\varphi^*)) \geq 22$ を証明することができれば、$\mathrm{H}_1((\mathbf{K}. \otimes_S Pf_4)_4)^*) \neq 0$ 、さらに、$\mathrm{H}_1(\mathbf{K}. \otimes_S Pf_4)_4) \neq 0$ となることがわかる。$(\mathbf{K}. \otimes_S Pf_4)_4)^*$が、8次対称群 $\mathcal{S}_8$の作用を受けるということをうまく使うことにより、$\mathrm{Ker}(\varphi^*)$ の次元が 22 であるということを証明することができる。 **証明終**

定理2から、直ちに次のことがわかる。

系3 generic な交代行列の pfaffian により生成される ideal は、有理整数環 **Z** 上の極小自由分解を、一般には持たない。

つまり、S/Pf_{2l}の形の環は、係数体の標数に依らずにASLとなり、さらに ideal Pf_{2l}の極小生成元が、Gröbner 基底となるほど美しい性質を持つ環であるにもかかわらず、pfaffian の relation は、標数によってかなり変わってしまうのである。

参考文献

[1] B. BUCHBERGER. Gröner bases: An algorithmic method in polynomial ideal theory, *D. Reidel Publ. Comp.* (1985), Chapter 6.

[2] D. A. BUCHSBAUM & D. EISENBUD. Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimensin 3, *Amer. J. Math.* **99** (1977), 447-485.

[3] T. JÓZEFIAK & P. PRAGACZ. Ideals generated by Pfaffians, *J. of Alg.* **61** (1979), 189-198.

[4] T. JÓZEFIAK, P. PRAGACZ & J. WEYMAN. Resolutions of determinantal varieties and tensor complexes associated with symmetric and antisymmetric matrices, *Asterisque* **87-88**, 109-189.

[5] D. E. KNUTH. Permutations, matrices, and generalized Young tableaux, *Pacific J. Math.* **34** (1970), 709-727.

[6] K. KURANO. Relations on Pfaffians I, in preparation.

[7] K. KURANO. Relations on Pfaffians II, prepint.

[8] P. PRAGACZ. Characteristic free resolution of $(n-2)$–order pfaffians of $n \times n$ antisymmetric matrix, *J. Alg.* **78** (1982), 386-396.

[9] P. ROBERTS. "Homological invariants of modules over commutative rings", Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal 1980.

[10] H. WEYL. "The classical groups", Princeton univ. Press. Princeton, New Lerzy 1946.