第11回
可換環論シンポジウム報告集

1989年11月8日～11日

於　厚生年金センター・サンピア岐阜

序

この報告集は、１９８９年１１月８日から１１日までの４日間、厚生年金センター・サンピア岐阜（岐阜市西荘）で行われました「第１１回可換環論シンポジウム」の講演者から提出された原稿をそのまま複写する方式によって作成したものです。

今回は例年にもまして多数の方々にご参加いただきました。また、この三月に京都大学を定年退官される永田雅宜先生にもご講演をいただき、とても充実したシンポジウムであったと思います。

このシンポジウムを開催するにあたっては、旅費・会場費などを大阪大学・宮西正宜先生の科研費から、また、本報告集の出版費用を京都大学・土方弘明先生の科研費よりご援助いただきました。ここにあらためてお礼申し上げます。

１９９０年1月
吉野雄二
山内紀夫

目次

Quasi Gorenstein homogeneous Buchsbaum rings with multiplicity 4

Shin Ikeda (岐阜教育大学)

The purpose of this note is to classify the homogeneous Buchsbaum ring R over an algebraically closed field k such that $e(R) = 4$ and $K_R = R(n)$ for some intger n. If R is Cohen-Macaulay then R is either a hypersurface or a complete intersction of type $(2,2)$. If R is not Cohen-Macaulay then R is unique up to isomorphism, i.e. R is isomorphic to $k[X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4]/I$, where $ch(k) = 2$ and I is an ideal generated by $X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3$, Y_1^2, Y_2^2, Y_3^2, Y_4^2, Y_1Y_4, Y_2Y_4, Y_3Y_4, $Y_1Y_2 + X_3Y_4$, $Y_2Y_3 + X_1Y_4$, $Y_1Y_3 + X_2Y_4$. For the proof we need to classify the homogeneous Buchsbaum rings R such that $e(R) = 3$ and R satissfies (S_2).

In order to complete the classification we collect several facts which we use later.

In what follows a homogeneous ring means a commutative Noetherian graded ring R such that $R_0 = k$, a field, and $R = k[R_1]$.

Proposition 1. Let R be a homogeneous domain over an algebraically closed field. Then $v(R) \leqq \dim R + e(R) - 1$.

See [A] for a proof.

As a corollary of this result we have:

Corollary 2. Let R be a homogeneous domain over an algebraically closed field with $e(R) = 2$. Then R is a hypersurface.

For a reduced homogeneous ring over an algebraically closed field we have:

Lemma 3. Let R be a equidimensional homogeneous ring over an algebraically closed field with $e(R) = 2$. Then we have either
(1) R is Cohen-Macaulay or
(2) R has two associated primes p_1 , p_2 such that $ht(p_1 + p_2) \geqq 2$.

Proposision 4. If a homogeneous ring with multiplicity 2 satisfies (S_2) then it is a Cohen-Macaulay ring.

THis follows from [Hu].

We refer the reader to $[G_1]$,$[G_2]$ and $[G_3]$ for the properties of Buchsbaum rings which we use in this note.

The following result plays a crucial role in the sequel.

Theorem 5. Let R be a homogeneous Buchsbaum ring over an infinite field k with $e(R) = 3$. Suppose that R is not Cohen-Macaulay and R satisfies (S_2) . Then R is isomorphic to

$$k[X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3]/(X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3,(Y_1,Y_2,Y_3)^2)$$

as k-algebra.

Using these results we can prove the main result of this note.

Thoerem 6. Let R be a homogeneous ring over an algebraically closed field k with $e(R) = 4$ and $K_R = R(n)$ for some integer n .

Suppose that R is Buchsbaum. If R is not Cohen-Macaulay then R is isomorphic to $k[X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4]/I$, where $ch(k) = 2$ and I is an ideal generated by $X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3$, Y_1^2 , Y_2^2 , Y_3^3 , Y_4^2 , Y_1Y_4 , Y_2Y_4 , Y_3Y_4 , $Y_1Y_2 + X_3Y_4$, $Y_2Y_3 + X_1Y_4$, $Y_1Y_3 + X_2Y_4$.

Proof. It is not hard to see that $\dim R = 3$ and R is a Buchsbaum ring of maximal embedding dimension. Let x_1,x_2,x_3 be a system parameters of degree 1 and let $S = k[x_1,x_2,x_3]$. Then S is a polynomial ring and R is finite over S and $\mathrm{rank}_S R = e(R) = 4$. Here we claim that R has only one associated prime. To see this we need a lemma.

Lemma 7. Let R be the same as in Theorem 6. Then we have:

(1) There is no ideal I such that $ht(I) = 0$ and $e(R) = 2$ and R/I is Cohen-Macaulay.

(2) There is no radical ideal I such that $ht(I) = 0$ and $e(R/I) = 3$.

(3) If I is an ideal such that $e(R/I) = \dim R = 3$ and R/I is unmixed then R/I is isomorphic to the ring in Theorem 5.

Proof. (1): Suppose that there is an ideal I such that $ht(I) = 0$, $e(R/I) = 2$ and R/I is Cohen-Macaulay. From the exact sequence

$$0 \to I \to R \to R/I \to 0$$

we see that $\mathrm{rank}_S(I) = 2$ and there is an exact sequence

$$0 \to K_{R/I} \to K_R \to K_I \to 0 ,$$

where $K_I = \mathrm{Hom}_S(I,S(-3))$. Since $K_R = R(-2)$ and since $H_M^2(R) = k(1)$,where M is the maximal homogeneous ideal of R , we see that

I is isomorphic to the second syzygy $Z(1)$ of $k(1)$ as S-module and K_I is isomorphic to $Z(-1)$. The identity of $K_R = R(-2)$ is mapped to an element of degree 2 but there is no non-zero element of degree 2 in $Z(-1)$. This gives a contradiction.

(2): Suppose that there is such an ideal I. From the exact sequence $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ we have $\mathrm{rank}_S(I) = 1$ and I is a reflexive S-module and I is a free S-module. Hence I is isomorphic to $R/p(-n)$ for some prime ideal p with $e(R/p) = 1$. Suppose that $n \geqq 2$. From the exact sequence

$$0 \to K_{R/I} \to R(-2) \underset{\phi}{\to} R/p(n-3) \to \mathrm{Ext}_S{}^1(R/I, S(-3)) \to k(-1)$$

we see that $\mathrm{Ext}_S{}^1(R/I, S(-3))$ contains a two dimensional submodule. On the other hand, by letting $E = \mathrm{Hom}_R(K_{R/I}, K_{R/I})$, we have an exact sequence $0 \to R/I \to E \to C \to 0$ such that $\dim C \leqq 1$ and E is a reflexive S-module. Hence we see that $\dim \mathrm{Ext}_S(R/I, S) \leqq 1$. This is a contradiction. Therefore $n = 1$. We see that ϕ is a surjection. Since depth $R/I = 2$ we see that $\mathrm{Ext}_S(R/I, S(-3)) = k(-1)$ and therefore R/I is a Buchsbaum ring which is not Cohen-Macaulay. Hence R/I is isomorphic to the ring in Theorem 5. Up to now we have not used the assumption that I is a radical ideal. So we have proved (2) and (3).

Let us return to the main proof.

By this lemma we see that $e(R/p) = 1$ for any $p \in \mathrm{Ass}(R)$ and there exist at most two associated primes. Suppose that there are two associated primes,say p_1 and p_2 . Since R satisfies (S_2) we see that $ht(p_1 + p_2) = 1$ and by Lemma 3 we see that $R/p_1 \cap p_2$ is Cohen-Macaulay. But this contradicts to Lemma 7. Hence R has only one associated prime. Let p be the unique associated prime of R . Let let $y \in p$ be a homogeneous element such that $(0 : y) = p$ and $\deg y = n$. Then we have an exact sequence

$$0 \to R/p(-n) \to R \to R/yR \to 0 .$$

From this we see that R/yR is equidimensional and $e(R/yR) = 3$. By Lemma 7 we see that R/yR is isomorphic to the ring in Theorem 5 . Since R is of maximal embedding dimension R is defined by 11 homogeneous polynomials of degree 2 [G_1] and we may assume that $R = k[x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,y]$ and $p = (y_1,y_2,y_3,y)$.
From these arguments we have 11 relations

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + ay = 0$$

$$y_1y = y_2y = y_3y = y^2 = 0$$

$$y_iy_j = f_{ij}y \quad (1 \leqq i \leqq j \leqq 3) .$$

We may assume that a , $f_{ij} \in S = k[x_1,x_2,x_3]$. After a change of variables we may assume that $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$ and $f_{ij} \in S$. We have a finite free resolution of R as S-module

$$0 \to S(-2) \xrightarrow{\psi} S \oplus S^4(-1) \xrightarrow{\phi} R \to 0 ,$$

where ϕ is given by $\phi(e_0) = 1$, $\phi(e_i) = y_i$ for $i = 1,2,3$ and $\phi(e_4) = y$ for suitable basis e_1,e_2,e_3,e_4 of $S \oplus S^4(-1)$ with $\deg e_0 = 0$ and $\deg e_i = 1$ for $1 \leqq i \leqq 4$.

ψ may be represented by a matrix $[0, x_1, x_2, x_3, 0]$. Then K_R is identified with $\mathrm{Ker}\psi^*$,where $\psi^* = \mathrm{Hom}(\psi, S(-3))$ and K_R is generated by e_0^* , $x_3e_2^* - x_2e_3^*$, $x_1e_3^* - x_3e_1^*$, $x_2e_1^* - x_1e_2^*$,e_4^* , where e_i^* is the dual base of e_i with $\deg e_0^* = 3$ and $\deg e_i^* = 2$ for $(1 \leqq i \leqq 4)$, as S-module. Since $K_R = R(-2)$ we see that K_R is generated by e_4^* as R-module. Hence we have relations in K_R as R-module

$$e_0^* = g_0e_4^*$$

$$x_3e_2^* - x_2e_3^* = g_1e_4^*$$

$$x_1e_3^* - x_3e_1^* = g_2e_4^*$$

$$x_2e_1^* - x_1e_2^* = g_3e_4^*$$

for some $g_i \in R$ with $\deg g_i = 1$. Then we get $x_1g_1 + x_2g_2 + x_3g_3 = 0$. From this we get

$$g_1 = \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \gamma y_1$$

$$g_2 = -\alpha_{12}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \gamma y_2$$

$$g_3 = \alpha_{13}x_1 - \alpha_{23}x_2 + \gamma y_3 ,$$

for some α_{ij} , $\gamma \in k$. Now we get

$$\begin{aligned} 0 &= (x_3e_2^* - xe_3^*)(y) \\ &= (g_1e_4^*)(y) \\ &= e_4^*((\alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3)y) \\ &= \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 , \end{aligned}$$

which implies $\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$. Similarly we get $\alpha_{23} = 0$. Hence $g_i = \gamma y_i$ for $i = 1,2,3$. In particular, $\gamma \neq 0$. Using the relations $y_iy_j = f_{ij}y$, we have

$$\gamma f_{ii} = 0 ,$$

$$x_3 = \gamma f_{12} = - \gamma f_{12} ,$$

$$x_2 = \gamma f_{13} = - \gamma f_{13} ,$$

$$x_1 = \gamma f_{23} = - \gamma f_{23} .$$

This shows that $ch(k) = 2$ and ,replacing $\gamma^{-1}y$ by y_4 ,we get the required relations. Q.E.D.

REFERENCES

[A] S.S. Abhyanker, Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, Academic Press, New York, 1966.

[G_1] S. Goto, Buchsbaum rings of maximal embedsding dimension, J. of Algebra 76 (1982), 383-333.

[G_2]———, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, J. of Algebra 85 (1983), 490-534.

[G_3]———, Noetherian local rings with Buchsbaum associated graded rings, J. of Algebra 86 (1984), 336-384.

[Hu] C. Huneke, A remark concerning multiplicities., Proc. A.M.S. 85 (1982), 331-332.

[I_1] S. Ikeda, On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings ,Nagoya Math. J. 102 (1986), 135-154.

[I_2]———, Quasi-Gorenstein homogeneous Buchsbaum rings with multiplicity 4, Preprint.

What makes $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, I)$ free?

後藤四郎　（日本大学文理学部）
鈴木直義　（静岡県立大学）

§０. Introduction.

特に断らない限り以下の記号を固定します.

$(R, \mathfrak{m}, k)$: a Noetherian Local ring;

I : an ideal of R, generated minimally by $a_1, \ldots, a_n$ ($n = \mu_R(I)$).

$K_\cdot = K(a_1, \ldots, a_n ; R)$, $H_i(I), Z_i(I), B_i(I)$:Koszul complex, its i^{-th}homology , cycle and boundary module.

我々の target は, $T := \mathrm{Tor}_1^R(R/I, I)$ の R/I-module 構造です. T が R/I-module として free になることの解析を行ないます.

まず我々の結果に関連する最小限の歴史から始めます.

T の freeness への着目は, 次の問にさかのぼります:

$\mathrm{Tor}_1^S(S/J, J)$ が S/J-free であることは, J にどれほどの制限を与えるか？([5]).

一方 Vasconcelos は, 次の結果を得ています:

T が R/I-freeで, $\mathrm{pd}_R I < \infty$ かつ $\mathrm{pd}_{R/I} I/I^2 < \infty$ ならば I は regular sequence で生成される([10]).

次の exact sequence は, I/I^2 の R/I-module としての syzygy を媒介にして T を $H_1(I)$ や I/I^2 と結び付けます. そして我々の主定理の証明の key Lemma の prototype ともいえます:

$$\bigwedge^2 I \longrightarrow T \longrightarrow \delta(I) \longrightarrow 0 \quad : \text{exact},$$

ここで, $\delta(I) = Z_1(I) \cap IK_1(I) / B_1(I)$ で, ideal I の invariant です([6]).

最後に［２］から, 我々の仕事の直接の動機となった結果を引用しておきます.

Theorem 1. $\mathrm{pd}_R I < \infty$ で $\mathrm{ch}(R/\mathfrak{m}) \neq 2$ のとき, つぎの条件は同値である:

(i)　I は regular sequence で生成される;

(ii)　T は R/I-free である.

Theorem 2. $\delta(I) = 0$, $\mathrm{pd}_{R/I} I/I^2 < \infty$ で $\mathrm{ht}(I) > 0$ であるとき, T が R/I-free ならば I は regular sequence で生成される.

Proposition 2 (New Proof). I は $(R, \mathfrak{m})$ の（あるいは, Noetherian R の Jacobson radical に含まれる） ideal であるとき, I がregular sequence で生成されるための必要かつ十分条件は $\delta(I) = 0$ かつ I/I^2 が R/I-free であることである.

§1. Main results and Applications.

これらの結果の本質を支配するものを見いだして，さらに，たとえば $\mathrm{ch}(R/\mathfrak{m})\neq 2$ といった仮定をはずすことが我々の仕事の目標です．　まず主結果とその応用をのべます．

Theorem (1.1). $n\ (=\mu_R(I))\geqq 2$ とすると，つぎの条件は同値である：
(1) T は R/I-free;
(2) I/I^2 と $H_1(I)$ はともに R/I-free.

このとき $T=\overset{2}{\wedge}(I/I^2)\oplus H_1(I)$ なる cannonical な分解が存在して，さらに $\mathrm{rank}_{R/I}T=\beta_2^R(R/I)$ (= the 2_{nd} Betti number of R/I over R) である．

Corollary(1.2). T が R/I-free のとき，$\mathrm{pd}_R I<\infty$ または $\delta(I)=0$ で $n\geqq 2$ ならば I は regular sequence で生成される．

Corollary(1.3). T が R/I-free, $n\geqq 2$ で $\mathrm{rank}_{R/I}T=\binom{n}{2}$ ならば I は regular sequence で生成される．

(1.2)では，$\mathrm{pd}_R I<\infty$ の場合は (1.1) から Vasconcelos の結果に帰着します．$\delta(I)=0$ とは，$Z_1(I)\cap IK_1(I)=B_1(I)$ を意味して，さらに I/I^2 から $Z_1(I)\subset IK_1(I)$ が，したがって $H_1(I)=(0)$ を導きます．(1.3) は，(1.1) の分解で両辺の rank をみると直ちに $H_1(I)=(0)$ が得られます．

つぎは，(1.3) の特別な場合です．
Corollary(1.4). $n=\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ として，$\beta_2(R/\mathfrak{m})=\binom{n}{2}$ ならば R は a regular local ring である．

Theorem(1.5). $d=\dim R\geqq 2$ で T が R/I-free となる parameter ideal I が存在するならば，つぎのいずれかの場合に R は C.-M. となる：
(1) depth $R\geqq d-1$;
(2) $\mathfrak{m}H^0_{\mathfrak{m}}(R)=(0)$ で $\bar{R}=R/H^0_{\mathfrak{m}}(R)$ が Buchsbaum ring である．

証明． (1) の場合：$r:=\mathrm{rank}_{R/I}H_1(I)$, $\mathcal{L}_R()$ で R-module の長さを表す．

$$e_I(R)=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\mathcal{L}_R(H_i(I))=\mathcal{L}_R(R/I)-\mathcal{L}_R(H_1(I))$$
$$=\mathcal{L}_R(R/I)\cdot(1-r).$$

もちろん，$e_I(R)>0$ だから $r=0$ を得る．

(2) の場合：$H_1(I)\neq 0$ と仮定する．I/I^2 free より，$Z_1(I)\subset IK_1(I)$. Buchsbaum ring の s.o.p. は d-sequence だから $\delta(I)=0$. したがって，$\mathfrak{m}H_1(I)=(0)$. $H_1(I)$ は R/I-free だから $\mathfrak{m}\subset I$, つまり R は regular となり仮定に反する．

(1.5) の証明より次が分かります．
Propositoin (1.6). $\dim R\geqq 2$ で，d-sequence をなすような s.o.p. で生成される I で，I/I^2 が R/I-free となるものがあれば，R は C.-M. である．

さらに，つぎの２つも直ちに得られます．

Corollary (1.7). dim R = ３ で normal であるか，あるいは dim R = ２ で quasi-Buchsbaum であるとき，T が R/I-free となる parameter ideal I があれば，R は C.-M. である．

Proposition (1.8). R が generalized C.-M. で I が sub-s.o.p. $a_1,\dots,a_n$, $2 \leqq n <$ dim R で生成されているとき，T が R/I-free ならば $a_1,\dots,a_n$ は regular sequence である．

ここまでは，常に n = $\mu_R(I) \geqq 2$ の場合を扱ってきたが，n = 1 の場合はつぎのことがいえます．

Proposition (1.9). ht$(I)>0$ で I が単項生成で I/I^2 が R/I-free であるとき， T が R/I-free ならば I は regular element で生成される．

ここで，I/I^2 が R/I-free であるという条件は必要です．実際，

Example (1.10). R が Buchsbaum で depth R = 0, dim R > 0, I = (a) で a$\in \mathfrak{m}$, dim $R/(a)$ = d-1 とする． すると， $\delta(I)=(0)$ で T = (0)．しかも，I/I^2 も $H_1(I)$ も R/I-free ではない．

§２． Theorem (1.1) の証明．

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[r] & K_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[ddddd, dotted, bend right=40, "\psi'"'] & K_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, equal] & I \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 & : \text{Koszul Complex} \\
 {} \arrow[r] & F_3 \arrow[r, "\partial_3"] & F_2 \arrow[r, "\partial_2"] & F_1 \arrow[r, "\partial_1"] & I \arrow[r] & 0 & :\text{F. flat resolution} \\
 & & Z:=\partial_2^{-1}(IF_1) \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[d, equal] & IF_1=I\otimes F_1 \arrow[u, hook] \arrow[d, "1\otimes\partial_1"] & & & \\
 & & Z \arrow[r, "\rho"] \arrow[ddr] & I\otimes I \arrow[r, "\mu"] & I & & \\
 & & & a\otimes b \arrow[r, mapsto] & ab & & \\
 & & & T=Z/(Z_2(F)+IF_2) \arrow[uu, bend left] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

上の図で　$Z \xrightarrow{\rho} I\otimes I \xrightarrow{\mu} I$ は exact であり，$\ker\rho = Z_2(F)+IF_2$ である． $\mathrm{Im}\,(\psi) \subset Z$ だから，ψ' : $K_2 \xrightarrow{\psi} Z \twoheadrightarrow T$ なる写像をえる．

定理の証明の **key** は，次の Lemma です．

Lemma (2.1). I/I^2 が R/I-free で rank が $n=\mu_R(I)$ ならば，次の exact sequence がある：

$$0 \longrightarrow \overset{2}{\wedge}(I/I^2) \longrightarrow T \longrightarrow H_1(I) \longrightarrow 0.$$

証明. $T = Z/(Z_2(F)+IF_2) = F_2/(Z_2(F)+IF_2) \cong Z_1(F)/IZ_1(F)$. また，$\mathrm{Im}(\psi') \cong B_1(I)/IZ_1(F)$. かくて，

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\psi') \longrightarrow T \longrightarrow H_1(I) \longrightarrow 0 \text{ :exact}$$

を得ます．さらに，$\ker(\psi') = IK_2$ だから，所期の sequence が得られます．

Theorem (1.1) の証明. （２）⇒（１） は，（２．１）より直ちに得られます．
（１）⇒（２）：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T \arrow[r] & I\otimes I \arrow[r, "\mu"] & I \\
& & a\otimes b-b\otimes a \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & \\
& \overset{2}{\wedge} I \arrow[uu, dotted, "\eta"] \arrow[uur, "\xi"'] & \ni\ a\overset{2}{\wedge} b \arrow[u, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

$k := R/m$, $V := k\otimes I$ とおき，上の diagram に一斉に $\otimes k$ を施して

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T\otimes_R k \arrow[r] & (I\otimes I)\otimes_R k & = & V\otimes V & \ni\ v_1\otimes v_2 - v_2\otimes v_1 \\
& \overset{2}{\wedge} I\otimes_R k \arrow[u, "\eta\otimes_R k"] \arrow[ur, "\xi\otimes_R k"] & = & \overset{2}{\wedge} V \arrow[ur, "\xi_V"] & \ni & v_1\wedge v_2 \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$(\overset{2}{\wedge} I)\otimes_R k = \overset{2}{\wedge} V$, $(I\otimes I)\otimes_R k = V\otimes V$ なる同一視をすると ξ_V は injective だから $\xi\otimes_R k$ も， 従って，$\eta\otimes_R k$ もinjection となります．即ち $\{\eta(a_i\wedge a_j)\ ;\ 1\leqq i<j \leqq n\}$ は T の minimal basis の一部であることが分かります． つまり $\mathrm{Im}(\eta)$ は T の R/I-free summand であり，$\eta\otimes_R R/I$ は free R/I-module への surjection で generators の数を見て同型となります．

かくて $\overset{2}{\wedge}(I/I^2)$ が R/I-free で，ゆえに I/I^2 も R/I-free となりました．これで，（２．１）を援用できます． $\mathrm{Im}(\psi') = \mathrm{Im}(\eta)$ に注意すると $\mathrm{Im}(\psi')$ も T の R/I-free summand となります． したがって，$H_1(I)$ も T の R/I-free summand になります．

rank に関しては，I の minimal R-free resolution $F.$ を

$$\longrightarrow F_3 \xrightarrow{\partial_3} F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1'} I \longrightarrow 0$$

として，$F. \otimes_R (R/I)$ をみます．I/I^2 free に注意すると

$$0 \xrightarrow{\overline{\partial}_3} F_2/IF_2 \xrightarrow{0} F_1/IF_1 \xrightarrow{\cong} I/I^2 \longrightarrow 0$$

つまり，

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\overline{\partial}_3) \longrightarrow F_2/IF_2 \longrightarrow T \longrightarrow 0 \quad : \quad \text{exact}$$

で minimality より 所期の等式を得ます．

上の証明から次が分かります．

Corollary (2.2). $\mu_R(I) \geqq 2$ で $F.$ を R/I の minimal free resolution とする：

$$\longrightarrow F_3 \xrightarrow{\partial_3} F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0.$$

すると，次は同値：

① $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, I)$ は R/I-free;

② i=2, 3 に対して， $\partial_i(F_i) = Z_i(F.) \subset IF_{i-1}$.

最後に，例を挙げて終わります．

Example (2.3). S は a commutative ring, $X_1, \ldots, X_n, Y$ を regular sequence, $(n \geqq 1)$ として $\mathfrak{a} := (Y) \cap (X_1{}^2, \ldots, X_n{}^2)$，さらに，$a_1 := X_1 \bmod \mathfrak{a} \in R = S/\mathfrak{a}$ で $I := (a_1, \ldots, a_n)$ としますと，I/I^2 も $H_1(I)$ も free R/I-module で rank n. 従って，$\mathrm{Tor}_1^R(R/I, I)$ は R/I-free で rank は $\binom{n}{2} + n$． しかし，I は zero-divisors のみからなっている．

REFERENCES

[1] Auslander, M. and Buchsbaum, D. A. , *Codimension and multiplicity*, Annals of Math., 68(1958), 625-657.

[2] Barja, J. and Rodicio, A. G., *Syzygetic ideals, regular sequences, and a question of Simis*, J. Algebra. 121, 310-314(1989).

[3] Gulliksen, T.H. and Levin, G., *Homology of local rings* , Queens's papers in Pure and applied Math., Kingston, Ontario, 1969.

[4] Schenzel, P. , Trung, N.V. and Cuong, N. T., *Verallgemeinertte Cohen-Macaulay-Moduln*, Math. Nachr. 85(1978), 57-73.

[5] Simis, A. *Koszul homology and its syzygy-theoretic part*, J. Algebra 55(1978), 28-42.

[6] Simis, A. and Vasconcelos, W.V., *The syzygies of the conomal module*. Amer. J. Math. 103(1981), 203-224.

[7] Stückrad, J. and Vogel, W., *Buchsbaum rings and applications*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1987.
[8] Suzuki, N., *On a basic theorem for quasi-Buchabaum modules*, Bull. of Dept. of Gen. Ed. of Shizuoka College of Pharmacy, 11(1982), 33-40.
[9] Vasconcelos, W.V., *On the homology of I/I^2*, Comm. Algebra 6(1978), 1801-1809

[10] Vasconcelos, W.V., *Ideals generated by R-sequences*, J. Algebra 6(1967), 309-316.

[1989/12/17]

Monomial ideals の minimal free resolution について

小山陽一（金沢工大）

k を任意標数の体，S を k 上の n 変数多項式環 $k[x_1, \cdots, x_n]$ とする。

<u>定義</u>　$x_1, \cdots, x_n$ の monomials $f_1, \cdots, f_r$ に対して

$$K_0 = S$$
$$K_1 = \bigoplus_{i=1}^{r} e_i S$$
$$K_\lambda = \bigwedge^{\lambda} K_1$$

とおき、$K_\lambda \xrightarrow{d} K_{\lambda-1}$ を

$$d e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\lambda} = \sum_{j=1}^{\lambda} (-1)^{j+1} \frac{\mathrm{lcm}(f_{i_1}, \cdots, f_{i_\lambda})}{\mathrm{lcm}(f_{i_1}, \cdots, \hat{f}_{i_j}, \cdots, f_{i_\lambda})} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \cdots \wedge e_{i_\lambda}$$

で定まる S-準同型とすると、$(K_\cdot, d)$ は S 上の複体となる。これを <u>shifted Koszul complex</u> と呼ぶ。

この複体に対し、次の定理が成立する。

<u>定理 1</u>　$I = (f_1, \cdots, f_r)$ を S の ideal とするとき、

$$0 \to K_r \xrightarrow{d} K_{r-1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} K_0 \to S/I \to 0$$

は exact sequence となる。

<u>定義</u>　$P = \bigcup_{\lambda=0}^{r} P_\lambda$ を poset として

(i)　$a \in P$ に対し S の元 $|a|$ を対応させる

(ii)　$(a, b) \in P_\lambda \times P_{\lambda-1}$ に対し、k の元 α を対応させて　$a < b\ (\alpha)$ と表わす（ただし、a, b が比較不能のときは $\alpha = 0$ とする）

このような poset を <u>weighted poset</u> という。

shifted Koszul complex $(K_\cdot, d)$ に対して

$$P_\lambda = \{ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\lambda} \}, \quad P = \bigcup_{\lambda=0}^{r} P_\lambda$$

$$|e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\lambda}| = \mathrm{lcm}(f_{i_1}, \cdots, f_{i_\lambda}) \in S$$

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\lambda} < e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \cdots \wedge e_{i_\lambda} \quad ((-1)^{j+1})$$

とおくことにより weighted poset が作れる。

逆に weighted poset $P = \bigcup P_\lambda$ に対し

$$M_\lambda = \bigoplus_{a \in P_\lambda} aS$$

$$\partial a = \sum_{\substack{b \in L_{\lambda-1} \\ a < b\,(\alpha)}} \alpha \cdot \frac{|a|}{|b|} \cdot b$$

とおくことにより、S-modules の列 $(M_\cdot, \partial)$ が構成できる。

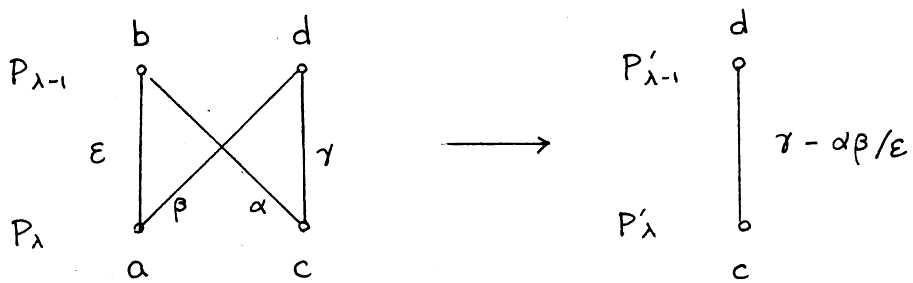
<u>定理２</u>　weighted poset P に対応する列 $(M_\cdot,\partial)$ が exact sequence であり、$(a,b)\in P_\lambda\times P_{\lambda-1}$ について

$$a<b\ (\varepsilon),\quad \varepsilon\neq 0,\quad |a|=|b|$$

となっているとする。このとき $P'=P-\{a,b\}$ とおき、$(c,d)\in P'_\lambda\times P'_{\lambda-1}$ が P において

$$c<b\ (\alpha),\quad a<d\ (\beta),\quad c<d\ (\gamma)$$

ならば $c<d\ (\gamma-\alpha\beta/\varepsilon)$ と weight を付けかえた poset P' に対応する列 $(M'_\cdot,\partial')$ も exact sequence となる。

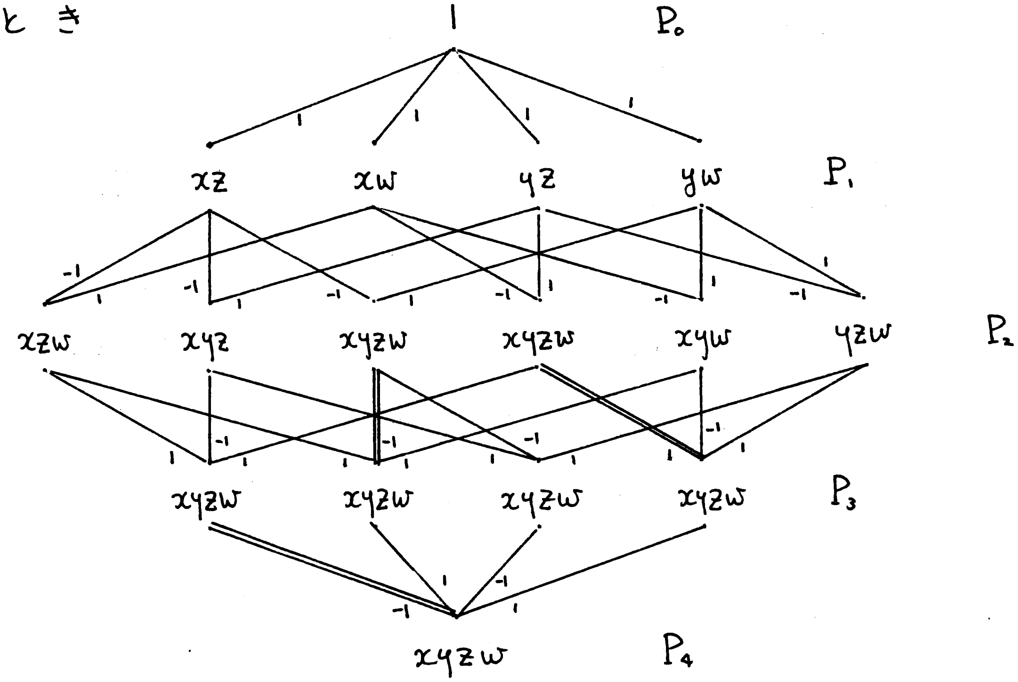


<u>系</u>　shifted Koszul complex に対応する poset P から始めて、定理２の操作をくりかえし行なうことにより、S/I の minimal free resolution が構成できる。

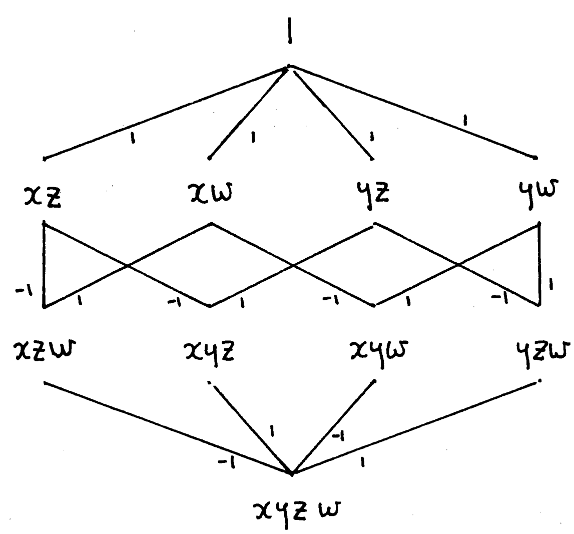
例　$S = k[x, y, z, w]$

$$f_1 = xz, \quad f_2 = xw, \quad f_3 = yz, \quad f_4 = yw$$

のとき



の ‖ について定理2の操作を行なうと



が得られる。この poset に対応する列が

$S/(f_1, f_2, f_3, f_4)$ の minimal free resolution となる。ただし、図では poset の元にその値を，順序には weight を付けて示している。

<u>定理1の証明</u>　r についての帰納法で証明する。$r=1$ のときは自明。

任意の r 個の monomials から作った shifted Koszul complex が exact であると仮定して．$\{f, f_1, \cdots, f_r\}$ から作られる shifted Koszul complex $(\tilde{K}_\bullet, \tilde{d})$ が exact となることを示す。$\{f_1, \cdots, f_r\}$ よりできる complex を $(K_\cdot, d)$ とすると

$$\tilde{K}_{\lambda+1} = K_{\lambda+1} \oplus e \wedge K_\lambda$$

であり，$(\varphi, e\wedge\psi) \in \tilde{K}_{\lambda+1}$ に対し

$$\tilde{d}(\varphi, e\wedge\psi) = (d\varphi + d'\psi, e\wedge d''\psi) = 0 \qquad (*)$$

と仮定する。ここで、d', d'' は $\tilde{d}$ から自然に定まる S-準同型とする。

Step 1.　$\exists\, \Phi \in K_{\lambda+1}$ s.t. $d''\Phi = \psi$

$\bar{f}_i = \mathrm{lcm}\{f, f_i\}$ とおくと．$\{\bar{f}_1, \cdots, \bar{f}_r\}$ で作られる shifted Koszul complex $(\bar{K}_\cdot, \bar{d})$ は exact である（帰納法の仮定）。

$$\varphi = \sum e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\lambda} \ u_{i_1 \cdots i_\lambda}$$

に対し

$$\overline{\varphi} = \sum \overline{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \overline{e}_{i_\lambda} \ u_{i_1 \cdots i_\lambda}$$

とおくと

$$\overline{d}\ \overline{\varphi} = -\overline{d''\varphi} = 0$$

となるので $\overline{d}\,\overline{\Phi} = \overline{\varphi}$ となる $\overline{\Phi} \in \overline{K}_{\lambda+1}$ が存在する。$(K_\cdot, d'')$ と $(\overline{K}_\cdot, \overline{d})$ は同型であるから $\overline{\Phi}$ に対応する $\Phi \in K_{\lambda+1}$ が存在して

$$\overline{d''\Phi} = -\overline{d}\ \overline{\Phi} = -\overline{\varphi}$$

$$\therefore \quad d''(-\Phi) = \varphi$$

となるので、$-\Phi$ を新たに Φ とおけばよい。

Step 2 $\quad \exists\, \Phi \in K_{\lambda+2}$ s.t. $d\Phi = \varphi - d'\Phi$

$(\tilde{K}_\cdot, \tilde{d})$ は complex であるから

$$\tilde{d}\tilde{d}(0, e \wedge \Phi) = \tilde{d}(d'\Phi, e \wedge d''\Phi)$$

$$= (dd'\Phi + d'\varphi, d''\varphi) = 0$$

$$\therefore \quad dd'\Phi + d'\varphi = 0$$

したがって、(*) を用いると

$$d(\varphi - d'\Phi) = d\varphi + d'\varphi = 0$$

となるので $(K_\cdot, d)$ の exactness より

$$\exists\, \Phi \in K_{\lambda+2} \quad \text{s.t.} \quad d\Phi = \varphi - d'\Phi$$

以上のことから

$$\hat{\tilde{d}}(\Phi, e\wedge\Psi) = (d\Phi + d'\Psi, e\wedge d''\Psi)$$
$$= (\varphi, e\wedge\psi)$$

となり $(\tilde{K}_\cdot, \hat{\tilde{d}})$ が exact になる。（実際には $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_0$ における exactness の証明が必要であるが、簡単なので略） ▨

終りに、定理1は Taylor の作った complex に一致していること（証明はこちらの方が簡明だと思いますが）、定理2は Gröbnor base を用いてより一般に証明されていることを教えていただきました。関連の論文を送って下さった後藤氏，河本氏に感謝します。

On the structure of Noetherian symbolic Rees algebras.

後藤四郎（日大文理）
西田康二（千葉大大学院）

1. Introduction.

$(A, \mathfrak{m})$ は Noether normal local domain とし I は A の ideal で $\mathrm{ht}\, I = 1$ とする。$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$I^{(n)} = \begin{cases} \bigcap_{\mathfrak{p} \in H_1(A)} I^n A_{\mathfrak{p}} & (n \geqq 1) \\ A & (n \leqq 0) \end{cases}$$

と定め（ $H_1(A) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathrm{ht}\, \mathfrak{p} = 1 \}$ ），

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_s(I) := \sum_{n \geqq 0} I^{(n)} t^n \subset A[t]$$

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}'_s(I) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} I^{(n)} t^n \subset A[t, t^{-1}]$$

（t は変数）

とおく。本稿の目的は $\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}'$ の C-M 性及び Gorenstein 性を調べることにある。特に Gorenstein 性を調べるために，$\mathcal{R}$，$\mathcal{R}'$ 及び A の canonical classes の間の関係を明らかにすることを主題としている。

以下では次の様な記号を用いる。

(1) Krull 環 R とその ideal $\mathfrak{a}$ に対して $[\mathfrak{a}]$ は $Cl(A)$ での $\mathfrak{a}$ の class を表わし，$|[\mathfrak{a}]|$ は $[\mathfrak{a}]$ の位数を意味する。

(2) 環 R に対して $H_1(R) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1 \}$.

(3) 環 R が canonical module を持つとき，それを K_R で表わす。

この節の最後に，$\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}'$ の Noether 性については次の結果があることを述べておく。

$\boxed{\text{Theorem (1.1)}}$ ([2, Lemma (2.3), Theorem (3.8)])

(1) $\mathcal{R}$: Noether $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}'$: Noether

(2) $|[I]| < \infty$ ならば $\mathcal{R}$ は Noether である。さらに A が quasi-unmixed で $A/I^{(n)}$ が C-M for ${}^\forall n \gg 0$ ならば逆も成り立つ。

$\boxed{\text{Corollary (1.2)}}$ $\dim A = 2$ のとき，$\mathcal{R}$ が Noether になるための必要十分条件は $|[I]| < \infty$ であることである。

2. C-M 性.

$|[I]| < \infty$ という仮定の下では，R と R' の C-M 性を次の様に特徴付けられる。

$\boxed{\text{Theorem (2.1)}}$ $k = |[I]| < \infty$ とすると次は同値である。

(1) R : C-M

(2) R' : C-M

(3) $I^{(n)}$: MCM A-module for $0 \leqq n \leqq k-1$.

(4) $I^{(n)}$: MCM A-module for ${}^\forall n \in \mathbb{Z}$

証明。 仮定より $I^{(k)} = aA$ $(a \in A)$ と書ける。${}^\forall n \geqq 0$ に対して $n = pk + q$ $(0 \leqq p,\ 0 \leqq q < k)$ と表わすと $I^{(n)} = a^p I^{(q)}$ となる。よって $I^{(n)} \cong I^{(q)}$ なので (4) $\Leftrightarrow$ (5) を得る。さらに，

$$R/at^k \cdot R \cong A \oplus I^{(1)} \oplus \cdots \oplus I^{(k-1)}$$

$$R'/(u, at^k)R' \cong A/I^{(1)} \oplus I^{(1)}/I^{(2)} \oplus \cdots \oplus I^{(k-1)}/I^{(k)}$$

である $(u = t^{-1})$。 at^k は R - NZD (resp. R'/uR' - NZD) なので R (resp. R') が C-M であることと，$R/at^k \cdot R$ (resp. $R'/(u, at^k)R'$) が C-M であることは同値である。

(1) $\Leftrightarrow$ (3) A の任意の sop が $R/at^k \cdot R$ の homogeneous sop になるから。

(2) $\Rightarrow$ (3) $R'_u = A[t, t^{-1}]$ が C-M なので A は C-M で $\dim A/I^{(1)} = d-1$ となる。一方 $R'/(u, at^k)R'$ が C-M なので，$\operatorname{depth}_A I^{(n)}/I^{(n+1)} = d-1$ for $0 \leqq {}^\forall n \leqq k-1$ である。これより $I^{(1)}, I^{(2)}, \cdots, I^{(k-1)}$ は MCM A-module であることを順次得る。

(4) $\Rightarrow$ (2) 条件 (4) より $\operatorname{depth}_A I^{(n)}/I^{(n+1)} = d-1$ for ${}^\forall n \in \mathbb{Z}$ を得る。よって $A/I^{(1)}$ は C-M で各 $I^{(n)}/I^{(n+1)}$ は MCM $A/I^{(1)}$-module だから $R'/(u, at^k)R'$ は C-M である。//

$\dim A = 2$ ならば $I^{(n)}$ は常に MCM A-module なので，(1.2) を用いて次の様な結果を得る。

$\boxed{\text{Corollary (2.2)}}$ $\dim A = 2$ のとき，ひとたび R が Noether になれば R も R' も C-M である。

勿論 [I] の位数が無限のときでも symbolic Rees algebra が C-M になることはある。例えば，

$A = K[[X, Y, Z, W]]/(XY - ZW)$ （K は体）

$I = (x, z)$

とすると $G^{\cdot}(I)$ は整域だから $I^{(n)} = I^n$ for $\forall n \geqq 0$ である。よって $\mathcal{R}_s(I) = \mathcal{R}(I)$ となり、これは C-M である。今のところ $[I]$ の位数が無限のときの C-M 性の一般論は全くない状況で、今後の問題である。

3. Symbolic Rees algebra on canonical class.

$\boxed{\text{Lemma (3.1)}}$ 次が成り立つ。

(1) $\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}'$ は Krull 環である。

(2) $P \in H_1(\mathcal{R}) \Rightarrow \mathrm{ht}(P \cap A) \leqq 1$

$P \in H_1(\mathcal{R}') \Rightarrow \mathrm{ht}(P \cap A) \leqq 1$

(3) $P \in H_1(\mathcal{R})$ かつ $P \cap A \neq 0$ ならば $(P \cap A)\mathcal{R}_P = P\mathcal{R}_P$.

(4) $P \in H_1(\mathcal{R})$, $Q \in H_1(\mathcal{R})$ で $P \cap A = Q \cap A \neq 0$ ならば $P = Q$.

証明。(1) $\mathfrak{F} = \{ \mathfrak{p} \in H_1(A) \mid I \subset \mathfrak{p} \}$ とすると $\#\mathfrak{F} < \infty$ で、$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $I^{(n)} = (\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{F}} I^n A_{\mathfrak{p}}) \cap A$ となるから、

(#) $\mathcal{R} = (\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{F}} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}) \cap A[t]$, $\mathcal{R}' = (\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{F}} \mathcal{R}'_{\mathfrak{p}}) \cap A[t, t^{-1}]$

である。さらに $\mathfrak{p} \in \mathfrak{F}$ ならば $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{R}(IA_{\mathfrak{p}}) \cong A_{\mathfrak{p}}[t]$ と

$R'_{\mathfrak{p}} = R'(IA_{\mathfrak{p}}) \cong A_{\mathfrak{p}}[t, t^{-1}]$ は regular であるから，R と R' は Krull 環である。

(2) $P \in H_1(R)$ のときに示す。(#) より次の2つの場合がある。

① ${}^{\exists}Q \in H_1(R)$ s.t. $Q \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \phi$, $R_P = R_Q$

② ${}^{\exists}Q \in H_1(A[t, t^{-1}])$ s.t. $R_P = A[t]_Q$.

① のときは $Q \cap A = \mathfrak{p}$ なので $ht(Q \cap A) = 1$. ② のときも $P \cap A = Q \cap A$ なので $ht(P \cap A) \leqq 1$ は明らか。

(3) $\mathfrak{p} = P \cap A$ とおくと $\mathfrak{p} \in H_1(A)$ である。$R_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ 上の多項環なので $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec} R_{\mathfrak{p}}$. 一方 $0 \neq \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \subset PR_{\mathfrak{p}} \in H_1(R_{\mathfrak{p}})$ より $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = PR_{\mathfrak{p}}$. $\therefore \mathfrak{p}R_P = PR_P$.

(4) (3) より従う。 //

(3.1) より自然な inclusion $A \hookrightarrow R$ と $A \hookrightarrow R'$ は PDE 条件 ([1, CHAPTER VII, §1.10, Proposition 14]) を満たすので $j : Cl(A) \to Cl(R)$ と $j' : Cl(A) \to Cl(R')$ が自然に定まる。これらの射について次が成り立つ。

$\boxed{\text{Proposition (3.2)}}$ (c.f. [5, Proposition 2.6])

(1) j は isomorphism.

(2) j' は splitting monomorphism.

証明。 (1) $T = A \setminus \{0\}$ とすると R_T は A の商体上の多項式環になるので $Cl(R_T) = 0$. $\therefore Cl(R) = \langle [P] \mid P \in H_1(R),\ P \cap A \neq 0 \rangle$. ところが $P \in H_1(R)$ で $P \cap A \neq 0$ なら (3.1) より $\mathfrak{p} := P \cap A \in H_1(A)$ で $j([\mathfrak{p}]) = [P]$ となる。よって j は全射である。次に $\mathfrak{a}$ は A の divisolial ideal で $[\mathfrak{a}] \in \operatorname{Ker} j$ とする。すると R の商体元 f で $\mathfrak{a} R_P = f R_P$ for $\forall P \in H_1(R)$ となるものがある。一方 $\mathfrak{p} \in H_1(A)$ ならば $R_{\mathfrak{p}}$ は A 上 flat なので $\mathfrak{a} R_{\mathfrak{p}}$ も $R_{\mathfrak{p}}$ の divisolial ideal であるから, $\mathfrak{a} R_{\mathfrak{p}} = f R_{\mathfrak{p}}$. 従って $f \in A$ で $\mathfrak{a} A_{\mathfrak{p}} = f A_{\mathfrak{p}}$. $\therefore [\mathfrak{a}] = 0$.

(2) $u = t^{-1}$ とする。inclusion $R' \hookrightarrow R'_u$ から homomorphism $i : Cl(R') \to Cl(R'_u)$ が induce される。$R'_u = A[t, t^{-1}]$ なので $Cl(A)$ と $Cl(R'_u)$ を同一視すると $i \circ j'$ は identity map になる。 //

次が本稿の主結果である。

$\boxed{\text{Theorem (3.3)}}$ (c.f. [9, Theorem (c)]) A は正則局所環の像で R は Noether とする。すると K_A, K_R 及び $K_{R'}$ が存在し, 次が成り立つ。

(1) $[K_R] = [I] + [K_A]$.

(2) $[K_{R'}] = [K_A]$.

ここで (1) (resp. (2)) では $[I]$ と $[K_A]$ は j (resp. j') を通して $Cl(R)$ (resp. $Cl(R')$) の元とみている。

証明。(2) を示す。((1) も同様の手法で示せる。)

$I^{(n)} = I^n$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$ のときの証明。

$A[X_1, \cdots, X_n, Y] \to R'$ ($X_i \mapsto a_i t$, $Y \mapsto u = t^{-1}$) の Kernel を J とすると $\det J/J^2 = [K_{R'}] - [K_A R']$ となる (det については [1, Chapter VII, §4.7] を参照)。実際, 仮定より正則局所環 S と epimorphism $S \to A$ があり, これから自然に induce される $S[X_1, \cdots, X_n, Y] \to A[X_1, \cdots, X_n, Y]$ と $S[X_1, \cdots, X_n, Y] \to R'$ の Kernel をそれぞれ J_1, J_2 とすると R'-加群の complex

$$0 \to J_1/J_1^2 \otimes R' \to J_2/J_2^2 \to J/J^2 \to 0$$

で $\forall p \in H_1(R')$ で局所化すると split exact になるものを得る。よって $\det J/J^2 = -\det J_2/J_2^2 + \det(J_1/J_1^2 \otimes R') = [K_{R'}] - [K_A R']$ ([4, Lemma])。後は次を示せば

十分である。

Claim. $\det J/J^2 = 0$.

証明。 $B = A[X_1, \cdots, X_n, Y]$, $M = J/J^2$ とし

$$g_i = a_n X_i - a_i X_n \quad \text{for } 1 \leqq i \leqq n-1,$$

$$g_n = X_n Y - a_n$$

とする。さらに L は M の R'-部分加群で $g_1 \bmod J^2, \cdots, g_{n-1} \bmod J^2$ で生成されるものとし $T = M/L$ とおくと

$$\det M = -\sum_{P \in H_1(R')} \ell(T_P)\,[P]$$

である。ここで $^\forall P \in H_1(R')$ について

$$\ell(T_P) = (n-1)\, v_P(a_n)$$

となることを示せば Claim を得る。これは $\mathfrak{p} = P \cap A$ として, $IA_\mathfrak{p} = a_n A_\mathfrak{p}$ のときと $IA_\mathfrak{p} = a_{n-1} A_\mathfrak{p}$ のときに示せば十分である。

$IA_\mathfrak{p} = a_n A_\mathfrak{p}$ のとき。 $\alpha_i \in A_\mathfrak{p}$ で $a_i = \alpha_i a_n$ for $1 \leqq {}^\forall i \leqq n-1$ となるものがある。そこで

$$h_i = X_i - \alpha_i X_n \quad \text{for } 1 \leqq i \leqq n-1,$$

$$h_n = X_n Y - a_n$$

とおくと, $JB_\mathfrak{p} = (h_1, \cdots, h_{n-1})B_\mathfrak{p}$ で $h_1, \cdots, h_{n-1}$ は $B_\mathfrak{p}$ 上の正則列をなすから, M_P は R'_P-free で, $h_1, \cdots,$

h_{n-1} の M_p での像は R'_p 上の free basis となる。一方,

$$(g_1,\cdots,g_{n-1},g_n)=(h_1,\cdots,h_{n-1},h_n)\begin{pmatrix} a_n & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

なので, $\ell(T_p)=(n-1)v_p(a_n)$ である。

$IA_{\mathfrak{g}}=a_{n-1}A_{\mathfrak{g}}$ のとき。このときは $\alpha_i\in A_{\mathfrak{g}}$ で $a_i=\alpha_i a_{n-1}$ for $1\leqq i\leqq n$ となるものがある。そこで

$$h_i=X_i-\alpha_i X_{n-1}\quad\text{for } 1\leqq i\leqq n-2,$$

$$h_{n-1}=X_n-\alpha_n X_{n-1},$$

$$h_n=X_{n-1}Y-a_{n-1}$$

とおくと,

$$(g_1,\cdots,g_{n-2},g_{n-1},g_n)=(h_1,\cdots,h_{n-2},h_{n-1},h_n)\begin{pmatrix} a_n & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ 0 & & a_n & & \\ -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & Y \\ & 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となる。よって $IA_{\mathfrak{g}}=a_nA_{\mathfrak{g}}$ のときと同様の議論で $\ell(T_p)=(n-1)v_p(a_n)$ を得る。

以下で一般の場合に (3.3) の (2) を示す。

R は Noether なので, $k>0$ で $I^{(kn)}=(I^{(k)})^n$ for $\forall n\geqq 0$ なるものがとれる。$S:=\sum_{n\in\mathbb{Z}}I^{(kn)}t^{kn}$ とすると先

の場合の結果から $[K_S]=[K_A S]$ である。

$\therefore\ K_S \cong (K_A S)^{**}$ $\left((\ )^* = \mathrm{Hom}_S(\ ,S)\right)$ as S-modules.

$S \hookrightarrow R'$ を通して R' は S 上 module-finite なので

$$K_{R'} \cong \underline{\mathrm{Hom}}_S(R', (K_A S)^{**}) \quad \text{as } S\text{-modules}$$

となる。次に $0 \leqq i \leqq k-1$ に対して $S_i = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I^{(kn-i)} t^{kn}$

とおく。すると $R' = \sum_{i=0}^{k-1} S_i t^{-i} \cong \bigoplus_{i=0}^{k-1} S_i(i)$ となるから,

$$\begin{aligned} K_{R'} &\cong \underline{\mathrm{Hom}}_S\left(\bigoplus_{i=0}^{k-1} S_i(i), (K_A S)^{**}\right) \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^{k-1} \underline{\mathrm{Hom}}_S\left(S_i, (K_A S)^{**}\right)(-i) \\ &\cong L := \sum_{i=0}^{k-1} \left[\left[S:\left[S: K_A S\right]\right]: S_i\right] t^i . \end{aligned}$$

ここで $L \supset K_A R'$ に注意せよ。さら $^\forall P \in H_1(R')$ をとり

$\mathfrak{p} = P \cap A$ とすると (3.1) より ht $\mathfrak{p} \leqq 1$. $\therefore\ ^\exists a, {}^\exists b \in A$;

$IA_{\mathfrak{p}} = aA_{\mathfrak{p}}$, $(K_A)_{\mathfrak{p}} = bA_{\mathfrak{p}}$. すると $(S_i)_{\mathfrak{p}} = a^{-i} S_{\mathfrak{p}}$,

$K_A S_{\mathfrak{p}} = bS_{\mathfrak{p}}$, $S_{\mathfrak{p}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{kn} A_{\mathfrak{p}} t^{kn}$ となり,

$$L_{\mathfrak{p}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{k-1} a^{kn+i} b A_{\mathfrak{p}} t^{kn+i} = (K_A R')_{\mathfrak{p}}$$

である。 $\therefore\ L_P = (K_A R')_P$ $\therefore\ [L] = [K_A R'] = j'([K_A])$. //

Gorenstein であれば

$$R : \text{Gorenstein} \iff \tilde{I} : \text{単項} \quad (\tilde{I} \text{ は } I \text{ の divisorial 化})$$

$\boxed{\text{Proposition (4.5)}}$ $|[I]| < \infty$ とすると,

$$\exists n ; R^{(n)} : \text{Gorenstein} \iff [K_A] \in \langle [I] \rangle$$

$\boxed{\text{Proposition (4.6)}}$ $k = |[K_A]| < \infty$ のとき, $I = K_A^{(k-1)}$ とすると R は Gorenstein である。

$\boxed{\text{Example (4.7)}}$ ε を 1 の原始 3 乗根とし

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & \\ & \varepsilon \end{pmatrix} \right\rangle \subset GL(2, \mathbb{C})$$

とする。このとき $A := \mathbb{C}[[X, Y]]^G$ とすると $Cl(A) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ となる。A は Gorenstein 環ではないので $|[K_A]| = 3$ である。従って (4.3) より $R_s(K_A)$ は Gorenstein ではないが, (4.6) より $R_s(K_A^{(2)})$ は Gorenstein である。ちなみに $K_A \cong (X^3, X^2Y)A$, $K_A^{(2)} \cong (X^3, X^2Y, XY^2)A$ である。

4. Gorenstein 性.

この節では A は正則局所環の像であると仮定し，(3.3) から得られる symbolic Rees algebra の Gorenstein 性についての結果（証明はいずれも容易）を述べる。

$\boxed{\text{Theorem (4.1)}}$ 次が成り立つ。

(1) R : Gorenstein $\Leftrightarrow$ R : C-M かつ $I^* \cong K_A$

(2) R' : Gorenstein $\Leftrightarrow$ R' : C-M かつ A : Gorenstein.

[以下では $\dim A = 2$ と仮定する。]

$\boxed{\text{Proposition (4.2)}}$ 次が成り立つ。

(1) R : Gorenstein $\Leftrightarrow$ $|[I]| < \infty$ かつ $I^* \cong K_A$.

(2) R' : Gorenstein $\Leftrightarrow$ $|[I]| < \infty$ かつ A : Gorenstein.

$\boxed{\text{Proposition (4.3)}}$ $k = |[K_A]| < \infty$ のとき $I = K_A$ とすると，

R : Gorenstein $\Leftrightarrow$ $k \leqq 2$.

$\boxed{\text{Proposition (4.4)}}$ $|[I]| < \infty$ とする。もし A 自身が

References

[1] Bourbaki, N., Algèbre commutative, Hermann

[2] Goto, S., Herrmann, M., Nishida, K. and Villamayor, O., On the structure of Noetherian symbolic Rees algebras, Preprint.

[3] Herzog, J. and Kunz, E., Der Kanonische Modul eines Cohen-Macaulay rings, LNM 238, Springer (1971)

[4] Herzog, J. and Vasconcelos, W., On the divisor class group of Rees algebras, J. Alg. 93 (1985), 182 - 188

[5] Simis, A. and Trung, N. V., The divisor class group of ordinary and symbolic blow-ups, Math. Z. 198 (1988), 479 - 491

Canonical加群のassociated graded加群について

広大理　　大石　彰

0. <u>序</u>　(R, m, k)をd次元ネーター局所環とする．有限生成R−加群Kは次の同値条件を満たすとき<u>canonical</u> R−<u>加群</u>であると言う：

(1) Rは Cohen−Macaulay環で$K \otimes \hat{R} \cong \mathrm{Hom}_R(H_m^d(R), E_R(k))$.

(2) Kは階数1の Gorenstein加群，即ち$id_R(K) = depth_R(K)$かつ$End_R(K) \cong R$.

(3) RのKによる自明拡大環$R \ltimes K$が Gorenstein.

（普通 canonical R−加群は(1)のRが Cohen−Macaulay という条件を除いたもので定義される．） canonical加群は種々の双対性定理により可換環論，代数幾何，特異点の理論等に有用な道具を提供するが，canonical加群自身については良く分かっているとは言えない．そこで我々は canonical加群の構造，特に

そのassociated graded加群について調べる．次の2つの問題を考えよう：

(1) canonical加群Kのassociated graded加群 $G(K)=\bigoplus_{n\geq 0} m^nK/m^{n+1}K$ はいつCohen-Macaulay加群又はcanonical加群になるか？

(2) KのHilbert-Samuel関数について何が言えるか？

我々は先ず$G(K)$がcanonical $G(R)$-加群になるための一つの必要十分条件を与える．次にHilbert-Samuel関数，極小還元を用いてKの数値的不変量（種数，還元指数）を定義し，それらにより$G(K)$がCohen-Macaulay加群又はcanonical加群になるための条件を調べる．

1. canonical加群のassociated graded加群．

$A=\bigoplus_{n\geq 0} A_n=k[A_1]$が体$k$上の$d$次元Cohen-Macaulay斉次次数付環として$P=A_+$とおく．有限生成次数付A-加群$K=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} K_n$は$K_P$がcanonical A_P-加群であるときcanonical graded

A-<u>加群</u>であると言う．$K_A := \underline{\mathrm{Hom}}_k(H^d_{\mathfrak{m}}(A), k)$ は canonical graded A-加群であり，任意の canonical graded A-加群はある $K_A(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ に同型である．有限生成次数付 A-加群 $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ に対して $F(M,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dim_k(M_n)t^n$ とおく．

<u>補題</u>1.　　$F(K_A, t) = (-1)^d F(A, t^{-1})$.

$(1-t)^d F(A,t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$, $a_m \neq 0$ として $a_m = r(A)$（A の Cohen-Macaulay 型）が成り立つとき A が <u>level 環</u>であると言う．有限生成次数付 A-加群 M が r 次の元で生成されているとき，M は<u>次数 r で斉次</u>であると言う．

<u>補題</u>2（日比）．次は同値：

(1) A が level 環．

(2) K_A が次数 $-a(A)$ で斉次，但し $a(A) = \deg F(A,t)$.

(3) $A \ltimes K_A(-a(A)-1)$ が（Gorenstein）斉次次数付環．

補題3. Mが有限生成 R-加群のとき，$G(M)$が canonical $G(R)$-加群であるためには，Mが canonical R-加群で $G(M)$が Gorenstein $G(R)$-加群であることが必要十分である.

補題4 (渡辺純三). Rが Gorenstein局所環のとき，$G(R)$が Gorenstein であるためには，$G(R)$が Cohen-Macaulay環で 等式 $F(G(R),t)=(-1)^d t^a F(G(R),t^{-1})$，$a=a(G(R))$が成り立つことが必要十分である.

定理5. canonical R-加群 K について次は同値：

(1) $G(K)$が canonical $G(R)$-加群.

(2) 任意の(又はある) Gorenstein R-加群 Mに対して $G(M)$が Gorenstein $G(R)$-加群.

(3) $G(R)$, $G(K)$が Cohen-Macaulayで等式 $F(G(K),t)=(-1)^d t^a F(G(R),t^{-1})$が成り立つ，但し $a=a(G(R))$.

更に，これらの条件が満たされるとき，

$G(R)$は level 環で $r(G(R)) = r(R)$ が成り立つ.

証明. (1)$\Rightarrow$(2)：任意の Gorenstein R－加群 $M \cong K^r$ に対して，仮定より $G(K)$ が Gorenstein $G(R)$－加群なので，$G(M) \cong G(K)^r$ が Gorenstein $G(R)$－加群である.

(2)$\Rightarrow$(1)：ある Gorenstein R－加群 $M \cong K^r$ に対して $G(M) \cong G(K)^r$ が Gorenstein $G(R)$－加群とすると $G(K)$ が Gorenstein $G(R)$－加群である．よって補題3より $G(K)$ は canonical $G(R)$－加群である.

(1)$\Rightarrow$(3)：$G(R)$, $G(K)$ が Cohen-Macaulay であることはよい．仮定より $G(K) \cong K_{G(R)}(-a)$, $a = a(G(R))$ なので補題1より $F(G(K), t) = t^a F(K_{G(R)}, t) = t^a (-1)^d F(G(R), t^{-1})$.

(3)$\Rightarrow$(1)：$G(R \ltimes K) \cong G(R) \ltimes G(K)(-1)$ が Gorenstein 環であることを示せばよい．$G(R)$, $G(K)$ が Cohen-Macaulay であることより $G(R \ltimes K)$は Cohen-Macaulay 環である．一方仮定より $a(G(K)) = \deg F(G(K), t) = \deg F(G(R), t) = a(G(R))$ より $a(G(R \ltimes K)) = a(G(R)) + 1$ で

$$
\begin{aligned}
F(G(R \ltimes K), t) &= F(G(R), t) + tF(G(K), t) \\
&= (-1)^d t^a F(G(K), t^{-1}) + (-1)^d t^{a+1} F(G(R), t^{-1}) \\
&= (-1)^d t^{a+1} \{ F(G(R), t^{-1}) + t^{-1} F(G(K), t^{-1}) \} \\
&= (-1)^d t^{a+1} F(G(R \ltimes K), t^{-1}).
\end{aligned}
$$

よって 補題4により $G(R \ltimes K)$ は Gorenstein環である.

最後に，もし $G(K)$ が canonical $G(R)$-加群とすると補題2より $G(R)$ は level環で $r(G(R)) = \mu(G(K)) = \mu(K) = r(R)$ が成り立つ.

例6. (1) $emb(R) = e(R) + \dim(R) - 1$ とすると $G(K)$ は canonical $G(R)$-加群である. 実際, $S := R \ltimes K$ は Gorenstein局所環で $emb(S) = e(S) + \dim(S) - 2$ なので Sally により $G(S) \cong G(R) \ltimes G(K)(-1)$ が Gorenstein環，従って $G(K)$ が canonical $G(R)$-加群である.

(2) $emb(R) = e(R) + \dim(R) - 2$ で R が Gorenstein でないとすると $G(K)$は canonical $G(R)$-加群でない. 実際，もし $G(K)$が canonical $G(R)$-加群ならば $G(R)$が Cohen-Macaulayであることから

$(1-t)^d F(G(R),t) = 1 + (emb(R) - dim(R))t + t^2$ となり $G(R)$ が level 環であることから $r(R)=1$, 即ち R は Gorenstein 環 である.

2. 種数と還元指数. 簡単のため k は無限体とする. canonical R-加群 K に対して 整数 $e_i(K) = e_i$ $(0 \leqslant i \leqslant d)$ を

$$\ell(K/m^{n+1}K) = e_0\binom{n+d}{d} - e_1\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d, \ n \gg 0$$

で定義する. $e_0(K) = e(K) = e(R)$ は容易に分る.

$$g_s(K) = e_1(K) - e(K) + \mu(K) = e_1(K) - e(R) + r(R),$$

$$g_\Delta(K) = e(K) + (d-1)\mu(K) - \ell(mK/m^2K)$$

とおき, それぞれ K の 切断種数, Δ-種数 と言う. I を m の極小還元とすると $g_\Delta(K) = \ell(m^2K/ImK)$ である. 次に K の還元指数 $\delta(K)$ を

$$\delta(K) = \min\left\{ n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{あるパラメーターイデアル } I \\ \text{について } Im^nK = m^{n+1}K \end{array} \right\}$$

で定義する. $\delta(R)$ も同様に定義する.

命題7. (1) $g_s(K)$, $g_\Delta(K)$ は共に非負整数である.

特に $e_1(K) \geqslant 0$.

(2) $e_1(K)=0 \iff \delta(K)=0 \iff R$ が正則局所環.

(3) $e_1(K) \leqslant 1 \iff g_s(K)=0 \iff g_\Delta(K)=0$ $\iff \delta(K) \leqslant 1 \iff emb(R)=e(R)+\dim(R)-1$ $\iff R$ は正則局所環 又は $r(R)=e(R)-1$.

(4) $e_1(K)=2$ とはならない.

(5) $e_1(K)=3 \iff g_s(K)=1$ かつ $r(R)=e(R)-2$.

定理 8. $\delta(R)=2$ のとき $G(K)$ が Cohen-Macaulay であるためには $g_\Delta(K)=1$ であることが必要十分である. 更に, このとき次の条件は同値である:

(1) $G(K)$ が canonical $G(R)$-加群.

(2) $G(R)$ が level 環.

(3) $emb(R)=e(R)+\dim(R)-1-r(R)$.

証明. $G(K)$ が Cohen-Macaulay とすると $\operatorname{reg} G(K)=\operatorname{reg} G(R)=2$ より $(1-t)^d F(G(K),t)=r(R)+\left(\ell(mK/m^2K)-d\,r(R)\right)t+t^2$ となり $g_\Delta(K)=1$

が分る．逆に $g_\Delta(K)=1$ として I を $\mathfrak{m}$ の極小還元とすると

$$1=g_\Delta(K)=\ell(\mathfrak{m}^2K/I\mathfrak{m}K)\geqslant \ell(\mathfrak{m}^2K\cap IK/I\mathfrak{m}K).$$

もし $\mathfrak{m}^2K\cap IK\neq I\mathfrak{m}K$ なら $\mathfrak{m}^2K\cap IK=\mathfrak{m}^2K$ より $\mathfrak{m}^2K\subset IK$ 従って $\mathfrak{m}^2\subset I$ となり $\mathfrak{m}^2=\mathfrak{m}^2\cap I=I\mathfrak{m}$．よって $\delta(K)\leqslant\delta(R)\leqslant 1$ となり矛盾．故に $\mathfrak{m}^2K\cap IK=I\mathfrak{m}K$．仮定より $I\mathfrak{m}^3K=\mathfrak{m}^3K$ と取れるから，任意の整数 n に対して $IK\cap\mathfrak{m}^{n+1}K=I\mathfrak{m}^nK$．よって $G(K)$ は Cohen-Macaulay である．最後の同値性は

$$(1-t)^dF(G(R),t)=1+(v-d)t+(e+d-v-1)t^2,$$
$$(1-t)^dF(G(K),t)=r+(e-r-1)t+t^2,$$

（但し $v=\mathrm{emb}(R)$，$e=e(R)$，$r=r(R)$）なることと定理5から従う．

3．一次元の場合．　以下 $\dim(R)=1$，xR を $\mathfrak{m}$ の極小還元として $g(K)=e_1(K)$ とおく．

命題9．(1)任意の整数 $n\geqslant\delta(K)$ に対して
$\ell(K/\mathfrak{m}^nK)=e(K)n-g(K)=\ell(R:\mathfrak{m}^n/R)$,

$g(K)=\ell(R/x^nR:m^n)$, $g_s(K)=\ell(R:x^{n-1}m/R:m^n)$ かつ $g_\Delta(K)=\ell(R:xm/R:m^2)$.

(2) $g_s(K)\geqslant g_\Delta(K)$ かつ $g_s(K)=g_\Delta(K)\Longleftrightarrow \delta(K)\leqslant 2$.

(3) $g_s(K)=1\Longleftrightarrow \delta(K)=2$ かつ $G(K)$ が Cohen-Macaulay.

<u>命題</u>10. $g(K)\leqslant 3$ ならば $G(K)$ は Cohen-Macaulay. 更に $g(K)=3$ のとき, $G(K)$ が canonical $G(R)$-加群 $\Longleftrightarrow$ R が3次平面曲線の特異点 (即ち, $\mathrm{emb}(R)=2$ かつ $e(R)=3$).

<u>命題</u>11. $C:=R:\overline{R}=m^2$, $r(R)=e(R)-\mathrm{emb}(R)$ とすると $G(K)$ は canonical $G(R)$-加群である.

証明. $C=m^2\Longleftrightarrow \delta(R)=2$, $\ell(R/C)=2e(R)$ かつ m の全ての巾が整閉. 従って $g_s(R)=g_\Delta(R)$ より $r(R)=e(R)-\mathrm{emb}(R)=g(R)-e(R)+1$ かつ $\ell(R:m^2/R)=\ell(R:C/R)=\ell(\overline{R}/R)=g(R)=e(R)+r(R)-1$. 故に $g_\Delta(K)=1$. よって定理8により $G(K)$ は canonical $G(R)$-加群である.

<u>例</u>12. (1) $R = k[[t^e, t^{e+1}, \cdots, t^{2e-r-1}]]$, $1 \leqslant r \leqslant (e-1)/2$ (例えば $R = k[[t^5, t^6, t^7]]$) とすると R は命題 11 の条件を満たすので $G(K)$ は canonical $G(R)$-加群である.

(2) $R = k[[t^4, t^5, t^{11}]]$ とすると $G(K)$ は Cohen-Macaulay だが canonical $G(R)$-加群ではない.

以上の内容について詳しく知りたい方は次を参照して下さい:

大石, *On the associated graded modules of canonical modules* (準備中).

(December 1989)

Construction of Vector Bundles and Reflexive Sheaves

Hidetoshi MAEDA

Department of Mathematics, Waseda University

§0. Introduction.

Let X be a smooth algebraic variety defined over a (not necessarily algebraically closed) field k. Let E be a vector bundle on X of rank r-1 ($r \geqq 2$). Given a vector bundle F of rank r on X and an injection $\sigma:E \to F$, we can consider the closed subscheme $D(\sigma) = \{x \in X \mid \text{rank } \sigma(x) < r-1\}$ of X. In §1, we discuss the relation between vector bundles and these closed subschemes associated with them. Our result is summarized as follows:

THEOREM(1.7). Fix a vector bundle E as above and a line bundle L on X, and set M = detE. Let $\mathcal{F}$ be the set of pairs (F,σ_F), where F is a vector bundle on X of rank r with detF = L, and $\sigma_F:E \to F$ is an injection with $D(\sigma_F)$ of pure codimension 2. Let $\mathcal{G}$ be the set of pairs (Y,τ_Y), where Y is a Cohen-Macaulay closed subscheme of X of pure codimension 2, and τ_Y: $E^{\vee} \to \omega_Y(-K_X+M-L)$ is a surjection. Then there exists a map f: $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ which is surjective in case $h^2(E(M-L)) = 0$. (See (1.5), (1.6) and (1.7) for the precise statements.)

This theorem includes a result of Vogelaar[V] as a special case in which the following conditions are satisfied:

(1) X is a projective variety over an algebraically closed field,

(2) $E = \mathcal{O}_X^{\oplus r-1}$,

(3) Y is a locally complete intersection.

So our result is a generalization of that of Vogelaar's. We note that the above theorem also provides a way for constructing vector bundles. As an application, in §2, we will construct an indecomposable vector bundle of rank 3 on $\mathbb{P}^3$ which can never be obtained by Vogelaar's method.

In §3, we describe a method for constructing reflexive sheaves from line bundles and closed subschemes of codimension 2. The precise statement of our result is as follows:

THEOREM(3.2). Let X be a locally factorial Gorenstein projective variety of dimension $n \geq 3$ defined over a (not necessarily algebraically closed) field k and L a line bundle on X. Let Y be a closed subscheme of X of codimension 2 and $\mathcal{I}_Y$ the ideal defining Y. Assume that for any ideal $\mathcal{I}_{Y'} \supsetneqq \mathcal{I}_Y$, $h^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L)) > h^{n-1}(\mathcal{I}_{Y'}(K_X+L))$. Then $H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))$ induces the exact sequence

$$0 \to H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L)) \otimes \mathcal{O}_X \to F \to \mathcal{I}_Y(L) \to 0$$

with F reflexive.

From this theorem we can show the following: Let X be a smooth projective variety of dimension $n \geq 3$ over an algebraically closed field. Given a line bundle L on X with $h^2(\mathcal{O}_X(-L)) = 0$, and a codimension two closed subvariety Y of X with $h^{n-2}(\mathcal{O}_Y(K_X+L)) > 0$, we can construct a reflexive sheaf F on X with $c_1(F) = L$ and $c_2(F) = Y$. (See (3.3)).

Basically we use the standard notation from algebraic geometry. The dualizing sheaf of a Cohen-Macaulay scheme X of pure dimension is denoted by ω_X. We denote by K_X the canonical bundle of a Gorenstein variety X. The words "vector bundles" and "locally free sheaves" are used interchangeably. The tensor products of line bundles are denoted additively. Thus, for example, if E is a coherent sheaf and if L and M are two line bundles, E(L+M) means $E\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$, where $\mathcal{L}$ and $\mathcal{M}$ are invertible sheaves corresponding to L and M, respectively.

§1. The connection between vector bundles and closed subschemes of pure codimension 2.

(1.1) Throughout this section, X will stand for a smooth algebraic variety defined over a (not necessarily algebraically closed) field k. A *vector bundle* on X will mean a locally free sheaf on X of finite rank. Our aim is to explain the connection between vector bundles on X and closed subschemes of X of pure codimension 2. This generalizes the well-known connection by Vogelaar. This also provides a method for constructing vector bundles.

(1.2) Let E and F be two vector bundles on X of rank r-1 and r ($r\geq 2$), respectively. Given an injection $\sigma:E\to F$, set $Z := \{x\in X \mid \operatorname{rank}\sigma(x) < r-1\}$. If Z has pure codimension 2, then the cokernel G of σ is a torsion free sheaf of rank 1. Therefore there exists a line bundle N on X of which G is a subsheaf , such that $\operatorname{codim}_X(\operatorname{Supp}N/G)\geq 2$. This implies that $\mathcal{I} := G(-N)$ is a sheaf of ideals in $\mathcal{O}_X$. The closed subscheme of X defined by $\mathcal{I}$ is called the *dependency locus* of σ, and is denoted by $D(\sigma)$. Then $D(\sigma) = Z$ as sets. Note $N = \det F-\det E$.

Before showing the relation between vector bundles and closed subschemes of pure codimension 2, we quote two algebraic results as needed.

(1.3) LEMMA. Let A be a regular local ring of dimension s and B a quotient of A of dimension s-t. Then B is Cohen-Macaulay if and only if $\mathrm{Ext}_A^q(B,A) = 0$ for all $q > t$.

For a proof, we refer to [AK], Corollary 3.5.22.

(1.4) LEMMA. Let A be a Cohen-Macaulay local ring of dimension s and B a quotient of A of dimension s-t. Then $\mathrm{Ext}_A^q(B,A) = 0$ for all $q < t$.

For a proof, we refer to [AK], Lemma 4.5.1.

(1.5) Let L be a line bundle on X and E a vector bundle on X of rank r-1 ($r \geq 2$) with $\det E = M$. In the rest of this section we are always in the following situation:

$\mathcal{F}$: the set of pairs (F,σ_F), where F is a vector bundle on X of rank r with $\det F = L$, and $\sigma_F : E \to F$ is an injection whose dependency locus $D(\sigma_F)$ has pure codimension 2,

$\mathcal{G}$: the set of pairs (Y,τ_Y), where Y is a Cohen-Macaulay closed subscheme of X of pure codimension 2, and $\tau_Y : E^\vee \to \omega_Y(-K_X+M-L)$ is a surjection.

(1.6) Given $(F,\sigma_F) \in \mathcal{F}$, put $Y := D(\sigma_F)$. Then we obtain from (1.2) an exact sequence

$$0 \to E \xrightarrow{\sigma_F} F \to \mathcal{I}_Y(L-M) \to 0. \qquad (1.6.1)$$

On the other hand, taking the long exact sequence of *Ext* induced by the short exact sequence

$$0 \to \mathcal{I}_Y(L-M) \to \mathcal{O}_X(L-M) \to \mathcal{O}_Y(L-M) \to 0 \qquad (1.6.2)$$

and using (1.4), we have

$$\mathcal{H}om(\mathcal{I}_Y(L-M), \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X(M-L)$$

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Y(L-M), \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y(L-M), \mathcal{O}_X) = \omega_Y(-K_X+M-L),$$

where $\omega_Y = \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y, K_X)$. Thus the exact sequence of $\mathcal{E}xt$ applied to (1.6.1) gives

$$0 \to \mathcal{O}_X(M-L) \to F^\vee \to E^\vee \to \omega_Y(-K_X+M-L) \to 0.$$

We denote by τ_Y the last surjection and set $f(F,\sigma_F) = (Y,\tau_Y)$.

(1.7) THEOREM. (A) The correspondence $f:(F,\sigma_F) \mapsto (Y,\tau_Y)$ is a map from $\mathcal{F}$ into $\mathcal{G}$.

(B) Assume $h^2(E(M-L)) = 0$. Then f is surjective. Furthermore, if $h^1(E(M-L)) = 0$, then f is bijective.

Proof. (A) It is sufficient to prove that Y is Cohen-Macaulay. The long exact sequences of $\mathcal{E}xt$ derived from (1.6.1) and (1.6.2) yield $\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_Y(L-M), \mathcal{O}_X) = 0$ for all $q > 2$. Our desired result thus follows from (1.3).

(B) We take $(Y,\tau_Y) \in \mathcal{G}$ and investigate $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Y(L-M), E)$. Combining the spectral sequence

$$E_2^{pq} = H^p(\mathcal{E}xt^q(\mathcal{I}_Y(L-M), E)) \Rightarrow E^{p+q} = \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathcal{I}_Y(L-M), E)$$

relating local and global Ext with the discussion in (1.6), we have the exact sequence

$$\begin{aligned}
0 \to E_2^{10} &= H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{I}_Y(L-M), E)) \cong H^1(E(M-L)) \\
\to E^1 &= \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Y(L-M), E) \\
\to E_2^{01} &= H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Y(L-M), E)) \cong H^0(\omega_Y(-K_X+M-L)\otimes E) \\
\to E_2^{20} &= H^2(\mathcal{H}om(\mathcal{I}_Y(L-M), E)) \cong H^2(E(M-L)).
\end{aligned}$$

The morphism τ_Y can be interpreted as giving an element

$\tau\in H^0(\omega_Y(-K_X+M-L)\otimes E)$. Assume $h^2(E(M-L)) = 0$. Then we can lift τ to an element $\xi\in Ext^1(\mathcal{I}_Y(L-M),E)$, so it determines an extension

$$0 \to E \to F \to \mathcal{I}_Y(L-M) \to 0. \tag{1.7.1}$$

We denote by σ_F the first injection. Applying (1.3) to the long exact sequence of *Ext* derived from $0 \to \mathcal{I}_Y(L-M) \to \mathcal{O}_X(L-M)$ $\mathcal{O}_Y(L-M) \to 0$ gives $\mathcal{E}xt^q(\mathcal{I}_Y(L-M),\mathcal{O}_X) = 0$ for all $q\geq 2$. We combine this with (1.7.1) to find $\mathcal{E}xt^q(F,\mathcal{O}_X) = 0$ for all $q\geq 2$. Applying the functor $\mathcal{H}om(\cdot,\mathcal{O}_X)$ to the sequence (1.7.1) yields an exact sequence

$$0 \to \mathcal{O}_X(M-L) \to F^\vee \to E^\vee \to \omega_Y(-K_X+M-L) \to \mathcal{E}xt^1(F,\mathcal{O}_X) \to 0,$$

in which the connecting morphism $E^\vee \to \omega_Y(-K_X+M-L)$ is τ_Y. Since τ_Y is surjective, $\mathcal{E}xt^1(F,\mathcal{O}_X) = 0$. Thus $(F,\sigma_F)\in\mathcal{F}$ and $f(F,\sigma_F) = (Y,\tau_Y)$, which implies that f is surjective. Furthermore, if $h^1(E(M-L)) = 0$, then f is clealy bijective.

Q.E.D.

§2. Example.

(2.1) In this section, we will construct an indecomposable vector bundle of rank 3 on $\mathbb{P}^3$. We note here that this bundle cannot be obtained by Vogelaar's method. In fact, we use a curve in $\mathbb{P}^3$ which is *not* a locally complete intersection.

(2.2) Throughout this section, the ground field k is assumed to be algebraically closed. Let C be a complete algebraic curve with $h^1(\mathcal{O}_C) = g$ and $\mathcal{F}$ a torsion free sheaf of rank 1 on C. Put

$$\deg\mathcal{F} := \chi(\mathcal{F})-\chi(\mathcal{O}_C),$$

$\Delta(F) := 1+\deg F-h^0(F) = g-h^1(F)$.

Then we have the following result due to Fujita.

PROPOSITION (Fujita). If $\deg F \geqq 2\Delta(F) \geqq 0$, then F is generated by its global sections.

For a proof we refer to [F], Proposition 1.6.

(2.3) The dualizing sheaf ω_C on C is torsion free of rank 1 and $\deg\omega_C = 2\Delta(\omega_C) = 2g-2$. Thus ω_C is generated by its global sections for $g\geqq 1$ by (2.2).

(2.4) Let X be a smooth quasi-projective algebraic variety and Y a closed subvariety of X of codimension i. Let $A^i(X)$ be the group of cycles of codimension i on X modulo rational equivalence. We also denote by Y the class of Y in $A^i(X)$ by abuse of notation. Grothendieck([G], p.151, (16)) proved the

FORMULA. $c_j(\mathcal{O}_Y) = 0 \ (0 < j < i)$,

$c_i(\mathcal{O}_Y) = (-1)^{i-1}(i-1)!Y$.

For $i = 2$, $c_2(\mathcal{O}_Y) = -Y$.

(2.5) THEOREM. Let X be a 3-dimensional smooth projective variety with $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ and C a curve in X with $g\geqq 1$. Let t be the number of global sections generating ω_C. Then there exists a vector bundle F on X of rank t+1 with $c_1(F) = c_1(X)$ and $c_2(F) = C$.

Proof. Take $L = -K_X$ and $E = \mathcal{O}_X^{\oplus t}$, and apply (1.7) and

(2.4). Q.E.D.

(2.6) We shall apply (2.5) to the simplest case $X = \mathbb{P}^3 := P$. Let F and C be as in (2.5). Since the Chow ring is isomorphic to $\mathbb{Z}[h]/h^4$, we may consider the Chern classes $c_1(F)$, $c_2(F)$, $c_3(F)$ as integers. So $c_1(F) = 4$ and $c_2(F) = \deg C := d$.

(2.7) In order to calculate $c_3(F)$, we need the

Riemann-Roch THEOREM. Let F be a coherent sheaf of rank r on $\mathbb{P}^3$, with Chern classes c_1, c_2, c_3. Then

$$\chi(F) = r+\binom{c_1+3}{3}-2c_2+\frac{1}{2}(c_3-c_1c_2)-1.$$

For a proof, we refer to [H2], Theorem 2.3.

(2.8) Now we go back to the situation (2.6). The exact sequence $0 \to \mathcal{O}_P^{\oplus t} \to F \to \mathcal{I}_C(4) \to 0$ gives rise to $c_i(F) = c_i(\mathcal{I}_C(4))$, hence by (2.7)

$$\chi(\mathcal{I}_C(4)) = \frac{1}{2}c_3(F)-4d+\binom{7}{3}.$$

On the other hand, by the exact sequence $0 \to \mathcal{I}_C(4) \to \mathcal{O}_P(4) \to \mathcal{O}_C(4) \to 0$, we see that

$$\chi(\mathcal{I}_C(4)) = \chi(\mathcal{O}_P(4))-\chi(\mathcal{O}_C(4)) = g-1-4d+\binom{7}{3}.$$

So $c_3(F) = 2g-2 = \deg\omega_C$.

(2.9) In the rest of this section we assume char $k \neq 2, 3$. Let s,t be the homogeneous coordinates on $\mathbb{P}^1$ and w,x,y,z on $\mathbb{P}^3$. Consider the rational curve C of degree 6 in $\mathbb{P}^3$ which is the image of the map $f:\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ defined by $f(s:t) = (w:x:y:z) := (st^2(s+t)^3:s^2t^3(s+t):s^3t(s+t)^2:(s-t)^6)$. We set

$$M(s,t) := \begin{bmatrix} \partial w/\partial s & \partial w/\partial t \\ \partial x/\partial s & \partial x/\partial t \\ \partial y/\partial s & \partial y/\partial t \\ \partial z/\partial s & \partial z/\partial t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(s+t)^2(4s+t) & st(s+t)^2(2s+5t) \\ st^3(3s+2t) & s^2t^2(3s+4t) \\ s^2t(s+t)(5s+3t) & s^3(s+t)(s+3t) \\ 6(s-t)^5 & -6(s-t)^5 \end{bmatrix}.$$

An easy calculation shows that the rank of $M(s,t)$ is 2 for any $(s:t)\in\mathbb{P}^1$. Let p be the point $(0:0:0:1)$. Then $f^{-1}(p)$ consists of three distinct points $(0:1)$, $(1:0)$, $(1:-1)$. Put $V := \mathbb{P}^1-\{(0:1), (1:0), (1:-1)\}$ and assume $(s:t)\in V$. Since $t \neq 0$, we can set $t = 1$, and use s as an affine parameter. Then we have

$$\begin{aligned} f(s:1) &= (s(s+1)^3 : s^2(s+1) : s^3(s+1)^2 : (s-1)^6) \\ &= \left\{\frac{(s+1)^2}{s} : 1 : s(s+1) : \frac{(s-1)^6}{s^2(s+1)}\right\}. \end{aligned}$$

From this it is easy to see that f is injective on V. Thus, in sum, C has exactly one singular point p.

Let U be the open set $\{z \neq 0\}$. Then p is the origin in U. We use $M(s,t)$ to see that the tangent directions in U at $(0:1)$, $(1:0)$ and $(1:-1)$ are $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ and $(0,-1,0)$, respectively. Therefore C is *not* a locally complete intersection and blowing up C at p desingularizes C in one step. Of course the multiplicity of p on C is 3. Let $\delta_p = \text{length}(\tilde{\mathcal{O}}_p/\mathcal{O}_p)$, where $\tilde{\mathcal{O}}_p$ is the integral closure of $\mathcal{O}_p$. Then the arithmetic genus g of C is equal to δ_p.

(2.10) In order to calculate δ_p, we quote the following

LEMMA. Let C be a complete algebraic curve with only one singular point p. Assume that blowing up C at p desingularizes C in one step. Let ρ be the multiplicity of p on C. Then $\rho-1 \leq \delta_p \leq \rho(\rho-1)/2$. Furthermore $\delta_p = \rho(\rho-1)/2$ if and only if length $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 2$, where $\mathfrak{m}$ is the maximal ideal of

$\mathcal{O}_p$.

For a proof, see for example [K].

(2.11) We now return to our case (2.9). Applying (2.10) yields $g = \delta_p = 2$, so by (2.3), ω_C is generated by two global sections. Combining this with (2.5), (2.6) and (2.8), we obtain a 3-bundle F on $\mathbb{P}^3$ with $c_0(F) = 1$, $c_1(F) = 4$, $c_2(F) = 6$ and $c_3(F) = 2$. Since the polynomial X^3+4X^2+6X+2 is irreducible by Eisenstein's criterion, F is indecomposable.

§3. Construction of reflexive sheaves.

(3.1) The aim of this section is to describe a way to construct reflexive sheaves from line bundles and closed subschemes of codimension 2.

(3.2) THEOREM. Let X be a locally factorial Gorenstein projective variety of dimension $n \geqq 3$ defined over a (not necessarily algebraically closed) field k and L a line bundle on X. Let Y be a closed subscheme of X of codimension 2 and I_Y the ideal defining Y. Assume that for any ideal $I_{Y'} \supsetneqq I_Y$, $h^{n-1}(I_Y(K_X+L)) > h^{n-1}(I_{Y'}(K_X+L))$. Then $H^{n-1}(I_Y(K_X+L))$ induces the exact sequence

$$0 \to H^{n-1}(I_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X \to F \to I_Y(L) \to 0$$

with F reflexive.

Proof. By Serre duality we have an isomorphism

$$\varphi: \mathrm{Ext}^1(I_Y(L), H^{n-1}(I_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H^{n-1}(I_Y(K_X+L)), H^{n-1}(I_Y(K_X+L))).$$

Let $\varphi(\xi) = \mathrm{id}$. Then ξ defines a global extension

$$0 \to H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X \to F \to \mathcal{I}_Y(L) \to 0 \qquad (\xi)$$

over X. We show that F is reflexive. Since F is torsion free, the natural map $\mu:F \to F^{\vee\vee}$ is injective. We consider the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \arrow[r] \arrow[d, hook, "\mu"] & \mathcal{I}_Y(L) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\nu"] & 0 & (\xi) \\
0 \arrow[r] & H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X \arrow[r] & F^{\vee\vee} \arrow[r] & S \arrow[r] & 0 & (\xi')
\end{tikzcd}$$

where ξ' is an element of $\mathrm{Ext}^1(S,H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X)$ given by the second extension. We note that $\nu^*:\mathrm{Ext}^1(S,H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Y(L),H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X)$ satisfies $\nu^*(\xi') = \xi$. We claim that S is torsion free of rank 1. Suppose to the contrary that $S_{Tor} \neq 0$. Let $\xi'' = i^*(\xi')$, where $i:S_{Tor} \to S$ is the inclusion map. Then we have the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, hook] & S_{Tor} \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & 0 & (\xi'') \\
0 \arrow[r] & H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X \arrow[r] & F^{\vee\vee} \arrow[r] & S \arrow[r] & 0 & (\xi').
\end{tikzcd}$$

On the other hand, since $\mathrm{Supp}(S_{Tor}) \subset Y$, $\mathrm{Ext}^1(S_{Tor}, H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X) \cong H^{n-1}(S_{Tor}\otimes K_X)^{\vee}\otimes H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L)) = 0$. Hence ${F^{\vee\vee}}_{Tor} \neq 0$, which is a contradiction. Since X is locally factorial and $\det F = \det(F^{\vee\vee})$, we can write $S = \mathcal{I}_{Y'}(L)$ for some closed subscheme Y' of codimension≥ 2. The Serre duality theorem says that

$$\psi:\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{Y'}(L),H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))\otimes\mathcal{O}_X)$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(H^{n-1}(\mathcal{I}_{Y'}(K_X+L)),H^{n-1}(\mathcal{I}_Y(K_X+L))).$$

Let $\eta = \psi(\xi')$. Then, by the functoriality of Serre duality, we obtain the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(I_Y(K_X+L)) & \overset{id}{\to} & H^{n-1}(I_Y(K_X+L)) \\ & f\searrow \quad \nearrow\eta & \\ & H^{n-1}(I_{Y'}(K_X+L)) & \end{array}$$

where f is the natural map induced by $\nu\otimes K_X$. So $h^{n-1}(I_Y(K_X+L)) \leq h^{n-1}(I_{Y'}(K_X+L))$. Combining this with the hypothesis gives $I_Y = I_{Y'}$. Therefore μ is an isomorphism and F is reflexive.

Q.E.D.

(3.3) COROLLARY. Let X be a smooth projective variety of dimension $n\geq 3$ defined over an algebraically closed field k and L a line bundle on X such that $h^2(O_X(-L)) = 0$. Let Y be a closed subvariety of X of codimension 2. Assume $h^{n-2}(O_Y(K_X+L)) > 0$. Then there exists a reflexive sheaf F of rank r on X with $c_1(F) = L$ and $c_2(F) = Y$, where $r = h^{n-1}(I_Y(K_X+L))+1$.

Proof. Given any ideal $I_{Y'} \supsetneq I_Y$, we have the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I_Y(K_X+L) & \to & O_X(K_X+L) & \to & O_Y(K_X+L) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \to & I_{Y'}(K_X+L) & \to & O_X(K_X+L) & \to & O_{Y'}(K_X+L) & \to & 0. \end{array}$$

Since $h^{n-1}(O_Y(K_X+L)) = h^{n-1}(O_{Y'}(K_X+L)) = h^{n-2}(O_{Y'}(K_X+L)) = 0$, $h^{n-1}(I_Y(K_X+L)) > h^{n-1}(O_X(K_X+L)) = h^{n-1}(I_{Y'}(K_X+L))$; the assertion now follows from (3.2).

Q.E.D.

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to express my sincere thanks to Professors H. Kaji and M. Tomari: Kaji communicated a curve in (2.9) to me; Tomari told me Kirby's result[K].

REFERENCES

[AK] A. Altman and S. Kleiman, Introduction to Grothendieck duality theory, Lecture Notes in Math. 146. Springer 1970.

[F] T. Fujita, Defining equations for certain types of polarized varieties, in Complex Analysis and Algebraic Geometry (Baily and Shioda eds.), pp. 165-173, Iwanami, Tokyo, 1977.

[G] A. Grothendieck, La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. math. France, 86(1958), 137-154.

[H1] R. Hartshorne, Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$, Math. Ann. 238(1978), 229-280.

[H2] R. Hartshorne, Stable reflexive sheaves, Math. Ann. 254(1980), 121-176.

[K] D. Kirby, The reduction number of a one-dimensional local ring, J. London Math. Soc. 10(1975), 471-481.

[OSS] C. Okonek, M. Schneider and H. Spindler, Vector bundles on complex projective spaces, Progress in Math. 3, Birkhäuser 1980.

[V] J. A. Vogelaar, Constructing vector bundles from codimension-two subvarieties, Thesis, Leiden 1978.

MULTIPLICITY OF FILTERED RINGS II *

筑波大学　数学系　　泊　昌孝　(MASATAKA TOMARI)

§1 Introduction

(1.1)　特異点解消より projective variety の特異点 (V,p) の環論的不変量を決定すること、具体的には、特異点解消とその例外集合、及び例外集合の埋め込み (conormal class など) により決定したい。例えば、 resolution を blowing-up 全般、と考察範囲を広げますと、それを行う filtration と その tangent cone (associated graded ring) より元の variety を統制しようということになります。統制可能となる良い tangent cone とはなにか？

昨年の可換環論シンポジウムでの講演で、ある特殊な特異点 (purely elliptic singularity と呼ばれるものに属する。) を、特異点解消の minimal model (minimal resolution) の例外集合より定まる filtration によって、filtered ring の言葉で特徴付けるお話をいたしました。以下で、特に multiplicity についての考察よりわかった事を報告します。

本稿は、[T4] の続編であり、特に Theorem (1.4) の応用 として、simple K3 特異点にかんする Theorem (2.3) を与えることをめざす。 実際の講演では、simple K3 singularity についての話題はほんのすこし触れただけでした。[T4] もご覧下さい。まずは、講演で述べた事柄を復習します。

(1.2)　状況は、特殊な特異点 を離れて一般の filtered ring のうちで次のようなものとします。

(A, m) : d−dimensional Noether local ring over a field k,

$F = \{F^k\}_{k\geq 0}$: a filtration of ideals as follows ;

($F^0 = A \supset F^1 = m$, $F^k \supset F^{k+1}$, $F^k.F^j \subset F^{k+j}$,

$R = \oplus_{l\geq 0} F^l.T^l \subset A[T]$ is a finitely generated A−algebra, where T is an indeterminate.

There is an integer $N > 0$ with $(F^N)^m = F^{Nm}$ for $m \geq 0$.

(*) This is a preliminary version. The title has been changed from "Multiplicity of normal graded rings " to the present one.

F^N : m−primary)

仮定により $G_+ = \oplus_{l\geq 1} F^l/F^{l+1}$ は G の homogeneous maximal ideal となる。

問題 (1.2.1) (A, m) の multiplicity $e(m, A)$ と $gr_F A = G = \oplus_{k\geq 0} F^k/F^{k+1}$ の multiplicity $e(G_+, G)$ の比較せよ。

（期待： G が「良い」環ならば、両者は近いだろう。）

まず、次の事は良く知られているであろう。

FACT (1.3). 上の状況にて $l(A/m^{l+1}) \leq l(G/(G_+)^{l+1})$ *for* $l \geq 0$ 特に $e(m, A) \leq e(G_+, G)$ かつ *embdim* $A \leq$ *embdim* G である。

しかし [T4] の Examples (1.4) (1.5) に見られるように、G が normal Gorenstein に成るぐらいでは、$e(m, A)$ と $e(G_+, G)$ は、異なるのである。次の結果は、$e(m, A)$ を G に関する data で下から評価するものである。

THEOREM (1.4). *Let the situation be as in (1.2). Further we assume that A is analytically unramified and that k is an infinite field. Let a system of elements $x_1, \ldots, x_s \in G_+$ be a minimal homogeneous generator system of G_+ with $deg x_1 \leq deg x_2 \leq \ldots \leq deg x_s$ with $s \geq d = \dim A = \dim G$. Then we have the following*

(1)

$$\left(\prod_{i=1}^{d} deg x_i\right) \lim_{\lambda\to 1}(1-\lambda)^d P(G,\lambda)$$
$$\leq_{(i)} e(m, A)$$
$$\leq e(G_+, G) \leq_{(ii)} (deg x_s)^d \lim_{\lambda\to 1}(1-\lambda)^d P(G,\lambda).$$

where $P(G,\lambda) = \sum_{k\geq 0} l(G_k)\lambda^k \in \mathbb{Z}[[\lambda]]$.

(2) If the equality holds in (i), then $e(m, A) = e(G_+, G)$ and there is a parameter system $y_1, \ldots, y_d$ of A whose initial form gives a homogeneous parameter system $in(y_1), \ldots, in(y_d)$ of G such that $\deg in(y_i) = deg x_i$ for $i = 1, \ldots, d$.

(3) If the equality holds in (ii) and G is normal with G.C.D.$(deg X_1, \ldots, deg x_s) = 1$, then $e(m, A) = e(G_+, G)$ and G is a homogeneous ring. That is $deg x_i = 1$ holds for $i = 1, \ldots, s$.

一般的に、我々は次の事に注意しましょう。

Remark (1.5) (1) Let $R = R(E, D)$ be a normal d-dimensional graded ring with Demazure's description .

$$D^{d-1} = \lim_{\lambda \to 1} (1-\lambda)^d P(R, \lambda)$$

where $P(R, \lambda) = \sum_{k \geq 0} l(R_k)\lambda^k \in \mathbb{Z}[[\lambda]]$, with $d = \dim R$.

(2) For a graded complete intersection

$$R = k[x_1, \dots, x_{d+s}]/(f_1, \dots, f_s),$$

where $f_1, \dots, f_s$ is a homogeneous regular sequence of $k[x_1, \dots, x_{d+s}]$, we have

$$P(R, \lambda) = \frac{(1-\lambda^{degf_1}). \dots .(1-\lambda^{degf_s})}{(1-\lambda^{degx_1}). \dots .(1-\lambda^{degx_{d+s}})}.$$

Hence

$$\lim_{\lambda \to 1} (1-\lambda)^d P(R, \lambda) = \frac{(degf_1). \dots .(degf_s)}{(degx_1). \dots .(degx_{d+s})}.$$

我々は以下の節で有理数

$$\left(\prod_{i=1}^{d} degx_i \right) \lim_{\lambda \to 1} (1-\lambda)^d P(G, \lambda)$$

について論じるが、まずこの数は環 G のどの様な性質で決定されるのであろうか。

Lemma (1.6). *Let a system of homogeneous elements $x_1, \dots, x_s$ of G be a minimal generator of the homogeneous maximal ideal G_+ as same as in Theorem (1.4). If G is a normal domain over an algebraically closed field $k = G_0$, then any couple x_i and x_j with $i \neq j$ are algebraically independent over k.*

Proof. やさしいので省略。

G が normal ならば、最初の三つの次数 $degx_1$, $degx_2$, $degx_3$ は $P(G, \lambda)$ によって決定される。特に $dimG \leq 3$ なる normal domain G については $\left(\prod_{i=1}^{d} degx_i\right) \lim_{\lambda \to 1}(1-\lambda)^d P(G, \lambda)$ は、$P(G, \lambda)$ にて決まる。

§2 Simple K3 特異点の canonical filtration

(2.1) simple K3 singularity と呼ばれる複素解析的 3 次元特異点がある。これは、いわゆる 2 次元 simple elliptic singularity の高次元化なのであるが、正確に定義を述べる

には 「環論的でない」 準備が必要になる ([IW] を参照して下さい)。言葉の上では "*Gorenstein purely elliptic singularity of type (0,2)*" と言うことになる。「 purely elliptic 」は 特異点の多重種数によって，「 type (0.2) 」は例外集合 の Mixed Hodge Structure による Hodge type である。

このような特異点のうち最も典型的な例としては、擬斉次多項式で定義される

$$x^4+y^4+z^4+w^4=0 \quad wt(x)=wt(y)=wt(z)=wt(w)=\frac{1}{4}$$
$$x^2+y^3+z^7+w^{42}=0 \quad wt(x)=\frac{1}{2}, wt(y)=\frac{1}{3}, wt(z)=\frac{1}{7} wt(w)=\frac{1}{42}$$

weight の総和が 1 になる孤立特異点がある。このほか、擬斉次ではないが、

$$x^4+y^4+z^4+w^4+\lambda x^2y^2z^2w^2=0 \quad \lambda\neq 0$$
$$x^2+y^3+z^7+w^{42}+\lambda yz^5w^{40}=0 \quad \lambda\neq 0$$

も simple K3 singularities である。逆に、我々はここで 全ての hypersurface simple K3 singularity $\{f=0\}$ が適当な座標の元で

$f=g+h$ gは *weight* の総和が 1 になる擬斉次多項式 (孤立特異点とは限らぬ)
h は上記の g の *weight* で見た高次の項

と表されるかということを問題にする。

(2.2) 我々は、重複度が 2 の場合に上記の問いに答える。

(W,w) を simple K3 singularity $\phi:\tilde{X}\longrightarrow W$ を resolution of singularity 。Minimal model 理論により $\oplus_{k\geq 0}\phi_*\left(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes k}\right)$ は $\mathcal{O}_W-algebra$ として有限生成である。

$$X=Proj(\oplus_{k\geq 0}\phi_*\left(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes k}\right))\xrightarrow{\psi} W$$

は canonical singularity のみを有する partial resolution となるが、これは

$$F^k\cong\psi_*\left(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes k}\right)\hookrightarrow\psi_*\left(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes k}\right)^{**}=\left(\omega_{\tilde{X}}^{[k]}\right)\cong A$$

となる ideal の filtration をひきおこす。これを canonical filtration ということにする。 そしてこの $F=\{F^k\}_{k\geq 0}$ に、我々の Theorem (1.4) を適用してみよう。$\oplus_{k\geq 0}F^k/F^{k+1}=G$ は normal になり、Demazure の表示を用いると、$\psi^{-1}(w)=E$

なる　rational double points のみを有する K3 surface 上　$O_E(D) \cong O_X(1)/O_X(2)$ によって定まる Weil divisor による

$$R = R(E, D) = \oplus_{k \geq 0} H^0(E, O_E(kD))T^k$$

と表示されるものである（ [IW] [T3][T3'] を参照　）。$R_+ = (x_1, \ldots, x_s)$ with $degx_1 \leq \ldots \leq degx_s$
$G.C.D.(degx_1, \ldots, degx_s) = 1$ として、

THEOREM (2.3). *(W, w) を simple K3 singularity of $e(m, A) = 2$ であって　$F = \{F^k\}_{k \geq 0}$ を canonical filtration on W とすると等号　$e(R_+, R) = e(m, A) = 2$　が成立する。*

(2.4) (2.1) で述べた問いに関する状況説明をする。（　$e(R_+, R) = 2$ を満たすような、(E, D) の data と言う内容については、M. Reid , A. N. Fletcher , 米村 らによって既に得られている物に付けくわえることはない。）　R は Gorenstein normal domain であることにより $e(R_+, R) \leq 3$　ならば、R は hypersurface である。R を $R = \mathbb{C}[x, y, z, w]/g$ と言う具合いに　weighted homogeneous polynomial で表してやると、$Spec(R) - V(R_+)$ は　3 次元 rational singularity を持つのみであることがわかっている。g の Newton 境界 $\Gamma(g) \subset \mathbb{R}^4$　について　$dim\Gamma(g) = 3$ かつ　点 $(1,1,1,1)$　が　$\Gamma(g)$ の相対内部に含まれることがわかる (§5 of [T3]) 。　$x, y, z, w \in R$ を　initial form として実現する　$m \subset A = O_{W,w}$ の元をそれぞれ　$X, Y, Z, W \in m$ とすると $(X, Y, Z, W) = m$ である。これは　$A^\wedge = \mathbb{C}\{X, Y, Z, W\}/f$ という表示を用いると、X, Y, Z, W の　monomial filtration が実は　$F = \{F^k\}_{k \geq 0}$ (の　$A^\wedge$ への induce するもの　)　そのものである。$in_F f = g$ であることになる。$\{g = 0\} = W$ は　not rational singularity であるが、このような analytic な座標系　(X, Y, Z, W) の存在性を M. Reid 先生は　[R1] のなかで予想されている。それを、非常に特殊な場合であるが、この note では証明した事になる。(　実際 Reid 先生の予想と simple K3 singularity の canonical filtration の関係については　[T3][T3'] 等を参照。)

Theorem (1.4) を用いて　(2.3) を証明するには次の事を示せばよい。

THEOREM (2.5). *E を K3 surface with rational double points とし　D を　ample $\mathbb{Q}-$Cartier integral Weil divisor 、$R = R(E, D)$, $R_+ = (x_1, \ldots, x_s)$ $degx_1 \leq \ldots \leq degx_s$ とする。その時*

$$degx_1.degx_2.degx_3.D^2 \geq 2.$$

となる。

§3 Proof of Theorem (2.5) (outline).

(3.1) 証明の本質は、特異点を有する代数曲面についての Riemann-Roch formula の使用である。

singularity を持つ曲面上の Riemann-Roch formula 特にその特異点からの具体的な効果については、J. Giraud[Giraud], 及び M. Reid [R2] の仕事があり、特に Reid 氏の記述は示唆に富んでいる。 少し復習すると、

E を projective surface with at worst rational double points としそして D を Weil divisor on E とする。D は $\mathbb{Q}$−Cartier だから、the intersection numbers $D^2, K_E D \in \mathbb{Q}$ が定義される。

THEOREM (SEE THEOREM (9.1)[R2]). *There is a formula*

$$\chi(E, O_E(D)) = \chi(O_E) + \frac{1}{2}(D^2 - DK_E) + \sum_Q c_Q(D)$$

where $c_Q(D) = c_Q(O_E(D)) \in \mathbb{Q}$ is a contribution due to the singularity of $O_E(D)$ at Q , depending only on the local analytic type of $Q \in E$ and D ; the sum takes place over the singularities of D (the points $Q \in E$ at which D is not Cartier).

(II) If $P \in E$ and D is a cyclic quotient singularity of type $_i\left(\frac{1}{r}(1,-1)\right)$ then

$$c_P(D) = -\frac{i(r-i)}{2r}.$$

(III) For every rational double singularity $Q \in E$ and Weil divisor D on E, there exists a basket of points of $\{P_\alpha \in E_\alpha$ and $D_\alpha\}$ of type $_{i_\alpha}\left(\frac{1}{r_\alpha}(1,-1)\right)$ and with i_α coprime to r_α, such that

$$c_Q(D) = \sum_\alpha c_{P_\alpha}(D_\alpha) = -\sum_\alpha \frac{i_\alpha(r_\alpha - i_\alpha)}{2r_\alpha}.$$

このように rational double points のみを特異点にもつ場合、the Riemann-Roch formula の立場では、singularities は rational singularity of type $A_{r_\alpha - 1}$ であるとしてよ

い。また、D の定める $Cl(A_{r_\alpha-1}) \cong \mathbb{Z}/r_\alpha.\mathbb{Z}$ に於ける polarization $i_\alpha \in \{1, \dots, r_\alpha - 1\}$ は，その対称性により、$2i_\alpha \leq r_\alpha$ であると仮定して良い。

(3.2) E と D を (2.5) のようにする。(3.1) のように basket of singularities を

$$\{A_{r_\alpha-1}, cl(D_\alpha) = i_\alpha,\ (2i_\alpha \leq r_\alpha)\ ; \alpha = 1, \dots, N\}$$

とする 。$b_m = dim H^0(E, O_E(mD))$ と表すと、Kawamata's vanishing theorem に気をつけて

$$b_m = \frac{m^2 D^2}{2} + 2 + c_Q(mD) \quad \text{for} m \geq 1$$

を得る。$m = 1, 2$ の場合により、

$$D^2 = 2(b_1 - 2) + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{i_\alpha(r_\alpha - i_\alpha)}{r_\alpha} \tag{3.2.1}$$

$$b_2 = 4b_1 - 6 + \sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha \tag{3.2.2}$$

が得られる。

(3.3) *Proof* in the case $b_1 \geq 3$.

この場合 $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ であるが、(3.2.1) により $D^2 \geq 2$ が成立する。

(3.4) *Proof* in the case $b_1 = 2$.

この場合 $q_1 = q_2 = 1$ かつ $q_3 \geq 2$ である。$H^0(E, O_E(D)) = \mathbb{C}x_1 + \mathbb{C}x_2$ とすると x_1 と x_2 は $R = R(E, D)$ にて $\mathbb{C}$ 上 代数的に独立である (1.6)。ゆえに

$$b_m = m + 1 \quad \text{for} \quad m \leq q_3 - 1$$
$$b_{q_3} = \frac{{q_3}^2 D^2}{2} + 2 + c_Q(q_3 D) \geq q_3 + 2$$

をえる。ゆえに

$$q_1 q_2 q_3 D^2 = q_3 D^2 \geq 2 - \frac{1}{q_3} c_Q(q_3 D) \quad \geq 2$$

である。

(3.5) In the case $b_1 \leq 1$.

$b_1 = 1$ $b_2 \geq 3$ の場合と $b_1 = 0$ $b_2 \geq 3$ の場合を除いて 我々は $q_1 q_2 q_3 D^2 \leq 2$ となる可能性がある場合を分類した後、実際に個々の場合毎に、主張を確かめた。

$b_1 = 1$ としよう。　$q_1 = 1$ かつ　$q_2 \geq 2,\ q_3 \geq 2$ である。(3.2.1),(3.2.2) により

$$D^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha - 2 - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{{i_\alpha}^2}{r_\alpha}$$
$$= b_2 - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{{i_\alpha}^2}{r_\alpha}$$

である。

$b_2 \geq 3$ ならば $q_2 = q_3 = 2$ であり

$$b_2 = \frac{4D^2}{2} + 2 + c_Q(2D) \geq 3$$

より $q_1q_2q_3D^2 \geq 2$ である。

$b_2 = 2$ ならば　$q_2 = 2$　$q_3 \geq 3$ であり　$\sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha = 4$

$$D^2 = 2 - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{{i_\alpha}^2}{r_\alpha}$$

この場合　$q_1q_2q_3D^2 \leq 2$ となる可能性があるのは

$$0 < D^2 \leq \frac{1}{3}\ \text{かつ}\ \sum_{\alpha=1}^{N} r_\alpha \leq 19,\ \text{かつ}\ \sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha = 4$$

である。明らかに、これは有限集合である。

$b_2 = 1$ ならば　$q_2 \geq 3$　$q_3 \geq 3$ であり　$\sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha = 3$

$$D^2 = 1 - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{{i_\alpha}^2}{r_\alpha}$$

この場合　$q_1q_2q_3D^2 \leq 2$ となる可能性があるのは

$$0 < D^2 \leq \frac{2}{9},\ \text{かつ}\ \sum_{\alpha=1}^{N} r_\alpha \leq 19,\ \text{かつ}\ \sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha = 3$$

である。明らかに、これも有限集合である。

$b_1 = 0$ としよう。　$q_1 \geq 2$ かつ　$q_2 \geq 2,\ q_3 \geq 2$ である。(3.2.1),(3.2.2) により

$$D^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha - 4 - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{{i_\alpha}^2}{r_\alpha}$$
$$b_2 = \sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha - 6$$

である。

$b_2 \geq 3$ ならば $q_1 = q_2 = q_3 = 2$ であり

$$b_2 = \frac{4D^2}{2} + 2 + c_Q(2D) \geq 3$$

より $q_1 q_2 q_3 D^2 \geq 4$ である。

$b_2 = 2$ ならば　$q_1 = q_2 = 2$　$q_3 \geq 3$ でありこの場合　　$q_1 q_2 q_3 D^2 \leq 2$ となる可能性があるのは

$$0 < D^2 = 4 - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{{i_\alpha}^2}{r_\alpha} \leq \frac{1}{6}, \text{かつ} \sum_{\alpha=1}^{N} r_\alpha \leq 19, \text{かつ} \sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha = 8$$

である。明らかに、これは有限集合である。

$b_2 = 1$ ならば　$q_1 = 1$　$q_2 \geq 3$　$q_3 \geq 3$ でありこの場合　　$q_1 q_2 q_3 D^2 \leq 2$ となる可能性があるのは

$$0 < D^2 = 3 - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{{i_\alpha}^2}{r_\alpha} \leq \frac{1}{9}, \text{かつ} \sum_{\alpha=1}^{N} r_\alpha \leq 19, \text{かつ} \sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha = 7$$

である。明らかに、これも有限集合である。

$b_2 = 0$ ならば　$q_1 \geq 3$　$q_2 \geq 3$　$q_3 \geq 3$ でありこの場合　　$q_1 q_2 q_3 D^2 \leq 2$ となる可能性があるのは

$$0 < D^2 = 2 - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{{i_\alpha}^2}{r_\alpha} \leq \frac{2}{27}, \text{かつ} \sum_{\alpha=1}^{N} r_\alpha \leq 19, \text{かつ} \sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha = 6$$

である。明らかに、これも有限集合である。

これらの分類の詳細は省略する。(I'm sorry.)

§4 "star-shaped " 2-dimensional singularity についての multiplicity

(4.1) Theorem (1.4) の応用ではないが、filtered ring の重要な例である "star-shaped " resolution を有する 2 次元正規特異点に関する結果を述べて置きたい　(　証明は省略する、[T5] を参照　)。(W, w) を [TW1] の　Chapter II で論じられているような normal two-dimensional singularity with "star-shaped " minimal good resolution $(\tilde{X}, A) \to (W, w)$　としよう ([TW1'] も参照)。$F = \{F^k\}_{k\geq 0}$ を　その　central curve より定まる　$A = O_{W,w}$ の filtration とする。　$G = \sum_{k\geq 0} F^k/F^{k+1}$ は孤立特異点をもつ integral domain となるのであった。G の normalization を　$R = R(E, D)$ と Pinkham-Demazure の記法で表す。

Theorem (4.2). 上記の状況で$\nu : (C, E) \to (Spec(R(E, D)), p)$ を *filtered blowing-up by the grading of* R によって得られる *the canonical partial resolution. Suppose* $m_R.O_C$ *is divisorial. Then :*

(1) The multiplicity of $(W, w) \geq$ *The multiplicity of* (R, m_R).

(2) If $G = R$, *then the equality holds.*

Remark (4.3). We can replace the major assumption "$m_R.O_C$ is dvisorial " by "$\mu^{-1}(m_R) = O_{\tilde{C}}(L_{-\alpha})$ holds for some integer α " in Theorem 1.

[T1][T2] などの結果を用いると次が得られる。

Theorem (4.4). *Let the situation be as in (6.2) of [TW1] and in (4.1). Suppose* (W, w) *is Gorenstein with* $p_a = 1$. *Then the multiplicity of* (W, w) *equals the multiplicity of* (R, m_R). *Moreover the Hilbert-Samuel functions of the both singularities are same, where Hilbert-Samuel function of* (A, m) *is defined by* $H(k) = \dim m^k/m^{k+1}$ *for* $k \geq 0$.

Acknowledgements. この仕事をするのにあたって、全体にわたって渡辺敬一先生より数え切れない貴重な助言を賜りました。深く感謝の意を表したいと思います。 また、§2,3 の考察を行うにあたって、A.N.Fletcher 氏, 米村崇氏 の 多くの例及び議論は研究を行う際の evidence となりました。また 同時期に行われていた 渡辺公夫氏の Riemann-Roch を用いた仕事も参考になりました。彼らにも感謝をします。

References

[D] Demazure, M.: Anneaux gradués normaux, in Seminaire Demazure-Giraud-Teissier, Singularites des surfaces. Ecole Polytechnique (1979) in "Introduction a la théorie des singularités II; Méthodes algébriques et géométriques " edited by Le D.T. (1988), 35-68 , Travaux En Cours vol. 37 , Hermann , Paris

[Fletcher] A. R. Fletcher., Plurigenera of 3-folds and weighted hypersurfaces ,Thesis 1988 Aug.,

[Giraud] Giraud, J.: Improvement of Grauert-Riemenschneider's Theorem for a normal surface, Ann. Inst. Fourier , Grenoble, 324 (1982), 13-23.

[IW] Ishii, S., Watanabe, Kimio : On simple K3-singularities (in Japanese). Note appeared in the proceedings of the conference of Algebraic Geometry at Tokyo Metropolitan Univ. 1988. pp. 20-31.

[L1] Laufer, H. B., On minimally elliptic singularities. Amer. J. Math., 99. (1977), 1257-1295

[L2] Laufer, H. B. : Tangent cones for deformations of two-dimensional quasi-homogeneous singularities. preprint 1986.

[Matsumura] Matsumura, H.: Commutative ring theory, Cambridge studies in advanced mathematics 8 (1980 published in Japan translation by M. Reid and published in 1986).

[R1] Reid, M.: Canonical 3-folds. Journees de geometrie algebrique *d'Anges* 1979, "Algebraic geometry " edited by A.Beauville, Sijthhoff and Noordhoff, 273-310 (1980).

[R2] —., Young person's guid to canonical singularities, Proc. Symposia in Pure Maths. 46 (1987) Vol. 1, 345-414. AMS.

[Rees] Rees, D.: Lectures on the asymptotic theory of ideals , London Mathematical Society Lecture Note Series 113, Cambridge Univ. Press

[S1] Saito, K.: Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. Invent. Math. 14, 123-142 (1971).

[T1] Tomari, M., A p_g−formula and elliptic singularities. Publ. Res. Inst. Math. Scien. Kyoto Univ., 21 (1985) 297-354.

[T2] —., Maximal-ideal-adic filtration on $R^1\psi_*O_V$ for normal two-dimensional singularities. Advanced Studies in Pure Math., 8 (1986) "Complex Analytic Singularities, Tsukuba-Kyoto, 1984" 633-647. Kinokuniya-North-Holland.

[T3] —., : On the canonical filtration of higher dimensional purely elliptic singularity of special type. 第１０回可換環論シンポジウム報告集.93-118.

[T3'] —., : The canonical filtration of higher dimensional purely elliptic singularity of a special type. preprint 1989. [T3] の本論文

[T4] —., : Multiplicity of filtered rings. 京都大学数理解析研究所考究録 「 Frobenius 写像の可換環論への応用；１９８９年９月 」

[T5] —., : Multiplicity of Gorenstein "star-shaped " singularity with $p_a = 1$. preprint.

[TW1] Tomari, M., Watanabe, K.-i.: Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with " star-shaped " resolution. to appear in Publ.RIMS.Kyoto Univ.,25-5 (1989).

[TW1'] —,—.,: " star-shaped " resolution をもつ　２次元正規孤立特異点について．京都大学数理解析研究所考究録　No. 595　「　複素解析的特異点と可換環；１９８５年１２月　」．

[Wagreich] Wagreich, Ph., Elliptic singularities of surfaces. Amer. J. Math., 92. (1970), 419-454.

[W敬 1] Watanabe, K.-i.: Some remarks concerning Demazure's constracution of normal graded rings. Nagoya Math. J. 83, 203-211 (1981).

[W敬 2] —: Rational singularities with k^*-action. In Commutative algebra. Proc. Trento Conf. edited by S. Greco and G. Valla. Lecture Notes in Pure and applied Math. No.84. (1983) 339-351 Marcel Dekker.

[W敬 3] —: Filtered Rings と Filtered Blowing-up について　第３回可換環論シンポジウム（１９８１）報告集　37-48.

[Y] Yonemura, T.: On hypersurface simple K3-singularities. in preprint 1989.

星形化可能錐体の双対性

東北大学理学部　石田正典

序文

2次元カスプ特異点は、その非特異化の例外因子がいくつかの非特異有理曲線の輪となることで定義される。土橋 [T] によりその高次元化がトーラス埋め込みの理論を用いてなされており、通常土橋カスプ特異点と呼ばれている。

土橋カスプ特異点は数論的に与えられるもの [SO, 3.1] の外、3次元では土橋により色々な例が与えられている。4次元以上でも非常に沢山あるものと思われるが、まだよくわかっていない。ここでは星形化可能な単純凸多面体を用いて4次元土橋カスプ特異点が構成できることを示し、その具体例についての不変量の計算結果と自然に定義される双対特異点の不変量との双対性について述べる。但し、この不変量は特異点又は局所環の不変量というより、非特異化により得られたトーリック因子の組み合わせ論的不変量というべきものである。

1　星形化可能錐体

r を2以上の整数とし V を r 次元のベクトル空間とする。V の部分集合 π が V の有限部分集合 $\{u_1, \cdots, u_s\}$ により $\pi = \mathbf{R}_0 u_1 + \cdots + \mathbf{R}_0 u_s$ となりかつ $\pi \cap (-\pi) = \{0\}$ であるとき強凸多角錐体という。但し $\mathbf{R}_0$ は0以上の実数全体である。また V の線形部分空間 $\pi + (-\pi)$ を $H(\pi)$ と書く。錐体 π の次元 $\dim \pi$ は $H(\pi)$ の次元とする。特に $\mathbf{0} = \{0\}$ は0次元強凸多角錐体である。

V の双対空間を V^* とし $\langle\ ,\ \rangle : V^* \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ を自然な双1次写像とする。強凸多角錐体 π の部分集合 σ に対し $\langle x, a\rangle \geq 0$ がすべての π の元 a について成り立ちかつ $\sigma = \{a \in \pi\ ;\ \langle x, a\rangle = 0\}$ となる V^* の元 x

が存在するとき σ を π の面 (face) といい $\sigma \prec \pi$ と書く。π の面はまた強凸多角錐体となる。π の面全体を $F(\pi)$ と書く。

V の強凸多角錐体 π に対し、その双対錐体 $\pi^\vee \subset V^*$ を

$$\pi^\vee := \{x \in V^* \,;\, \text{すべての } a \in \pi \text{に対し} \langle x,\ a\rangle \geq 0\ \}$$

と定義する。$\pi^\vee$ は V^* の有限個の元で生成された多角錐体であり、それが強凸つまり $\pi^\vee \cap (-\pi^\vee) = \{0\}$ となるのは π が最大次元となるときである [Oda, Thm.A.1,(2)]。π の面 σ に対し $V[\sigma] := V/H(\sigma)$ とおき π の $V[\sigma]$ への像を $\pi[\sigma]$ と書く。また $V^*[\sigma] := \sigma^\perp = \{x \in V^* \,;\, \text{すべての } a \in \sigma \text{に対し} \langle x, a\rangle = 0\}$ とおく。そのとき $V^*[\sigma]$ と $V[\sigma]$ は互いに双対なベクトル空間で $\pi^\vee \cap \sigma^\perp \subset V^*[\sigma]$ は $\pi[\sigma]$ の双対錐体となる。

π を V の強凸多角錐体とする。π の面のうち余次元が 1 のものを特に側面 (facet) と呼ぶことにする。π の側面全体の集合を $Fc(\pi)$ と書く。側面 σ と別の側面 τ が隣接しているとは、交わり $\sigma \cap \tau$ が π の中で余次元 2 であることとする。

π の次元が最大次元の r とする。$Fc(\pi)$ の各元 σ に対し、σ に隣接する π の側面全体を $Ad(\sigma;\pi)$ または単に $Ad(\sigma)$ と書く。また側面 σ に対して V の超平面 $H(\sigma)$ で定まる閉半空間のうち π を含む方を $H^+(\sigma;\pi)$ または単に $H^+(\sigma)$ とし、他方を $H^-(\sigma;\pi)$ 又は $H^-(\sigma)$ とする。明らかに π は $\bigcap_{\sigma\in Fc(\pi)} H^+(\sigma)$ に等しい。

π の 1 次元の面を辺 (edge) と呼び π の辺全体を $ed(\pi)$ と書くことにする。辺 γ が他の辺 η に隣接しているとは $\gamma + \eta$ が π の 2 次元の面であることとする。γ に隣接する π の辺全体を $ad(\gamma;\pi)$ または $ad(\gamma)$ と書くことにする。

補題 1.1. V の強凸多角錐体 π に対し次の等式を得る。

$$\bigcap_{\sigma\in Fc(\pi)} H(\sigma) = \{0\}\ .$$

証明　V を $H(\pi)$ で置き換えることにより π は最大次元であるとしてよい。そのとき $\pi^\vee$ はまた最大次元の強凸多角錐体である。$x \in V$ を左辺の零でない元とする。そのとき [Oda, Prop.A.6] により V^* の超平面 $(x = 0)$ は $\pi^\vee$ のすべての辺を含む。強凸多角錐体はその辺によって生成されるので $\pi^\vee \subset (x = 0)$ となるが、これは $\pi^\vee$ が最大次元であることに矛盾する。　証明終わり

各 $\sigma \in Fc(\pi)$ に対し

$$\bigcap_{\tau \in Ad(\sigma)} H(\tau)$$

を $L(\sigma;\pi)$ または単に $L(\sigma)$ と書く。

定義 1.2. 最大次元の強凸多角錐体 π が次の条件を満たすとき前星形化可能と呼ぶ。

(1) π の各辺 γ に対し γ を含む π の側面が丁度 $r-1$ 個存在する。

(2) π の各側面 σ に対し $L(\sigma;\pi)$ は直線である。

上の定義の (1) は各 $\gamma \in ed(\pi)$ に対して$\pi[\gamma] \subset V[\gamma]$ は単体的錐体であることを示す。特に、前星形化可能錐体の相異なる 2 つの側面がある辺を共有すればそれらは互いに隣接していることがわかる。

$\dim \pi = r = 3$ の場合 $\sigma \in Fc(\pi)$ はいつも丁度 2 つの側面に隣接していることから π は必ず前星形化可能である。

補題 1.3. σ を前星形化可能錐体 π の側面とする。そのとき V は $H(\sigma)$ と $L(\sigma)$ の直和である。

証明　σ の各側面 ρ に対し π の側面 τ が一意的に存在して $\sigma \cap \tau = \rho$ となる。従って

$$L(\sigma) \cap H(\sigma) = \bigcap_{\tau \in Ad(\sigma)} H(\tau) \cap H(\sigma) = \bigcap_{\rho \in Fc(\sigma)} H(\rho)$$

となり、これは補題 1.1 より $\{0\}$ に等しい。$\dim L(\sigma) = 1$ かつ $\dim H(\sigma) = r-1$ であるから補題を得る。　証明終わり

σ を前星形化可能錐体 π の側面とするとき、$L^+(\sigma;\pi)$ 又は単に $L^+(\sigma)$ で 1 次元強凸錐体 $L(\sigma) \cap H^+(\sigma)$ を $L^-(\sigma;\pi)$ 又は単に $L^-(\sigma)$ で 1 次元強凸錐体 $L(\sigma) \cap H^-(\sigma)$ を表すものとする。

r次元の単体的錐体 π は明らかに前星形化可能である。この場合は $L^+(\sigma)$ は σ と交わらない唯 1 つの π の辺である。

補題 1.4. 前星形化可能錐体 π が単体的でなければ、すべての π の側面σ に対し $L(\sigma) \cap \pi = \{0\}$ となる。

証明　$\gamma := L(\sigma) \cap \pi$ が 1 次元錐体となったとする。

$$L(\sigma) \cap \pi = \bigcap_{\tau \in Ad(\sigma)} (H(\tau) \cap \pi) = \bigcap_{\tau \in Ad(\sigma)} \tau$$

であるから γ は π の辺である。定義 1.2,(1) より γ を含む π の側面は丁度 $r-1$ 個ある。従って $^{\#}Ad(\sigma;\pi) = {}^{\#}Fc(\sigma) \leq r-1$ であるが、σ が $(r-1)$ 次元錐体であることからσ は単体的錐体となる。このことから π は単体的錐体

$$\gamma + \sigma = (\bigcap_{\tau \in Ad(\sigma)} H^+(\tau)) \cap H^+(\sigma) \ .$$

となり仮定に矛盾する。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証明終わり

命題 1.5. π を V の単体的でない前星形化可能錐体とする。u を $\gamma = \mathbf{R}_0 u$ が π の辺となるような π の元とする。このとき次を満たすような V の基底 $\{u_1, \cdots, u_r\}$ が存在する。

(1) 各 $1 \leq i \leq r-1$ に対し$\gamma \subset \sigma$ かつ $L^+(\sigma) = \mathbf{R}u_i$ を満たす π の側面 σ が存在する。

(2) 各 $1 \leq i \leq r-1$ に対し $\mathbf{R}_0(u+u_i)$ は π の辺である。

(3) $u_r = u$ である。

しかも、この基底は $\{u_1, \cdots, u_{r-1}\}$ の置換を除き一意的である。

証明　$\{\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}\}$ を γ を含むπ の側面全体の集合とする。各 $1 \leq i \leq r-1$ に対し $\eta_i = \cap_{j \neq i} \sigma_j$ と置く。このとき $\{\eta_1, \cdots, \eta_{r-1}\}$ は γ を含む π の 2 次元の面全体に等しい。$H(\eta_i) = \cap_{j \neq i} H(\sigma_j)$ であり、また $j \neq i$ に対して$\sigma_j \in Ad(\sigma_i)$ であることから $L(\sigma_i) \subset H(\eta_i)$ がすべての i に対して成り立つ。補題 1.4 より $L(\sigma_i) \cap \eta_i = \{0\}$ となる。η_i は γ を辺として含む 2 次元錐体であり u は$\gamma \setminus \{0\}$ に含まれることから、交わり $(u + L^+(\sigma_i)) \cap \eta_i$ は零でない有限の長さを持った線分である。従って $\mathbf{R}_0(u+u_i)$ が η_i のもう 1 つの辺となるような唯 1 つの $u_i \in L^+(\sigma_i) \setminus \{0\}$ が存在する。前星形化可能錐体の定義より $\pi[\gamma]$ は $r-1$ 次元の単体的錐体であり $ed(\pi[\gamma]) = \{\eta_1[\gamma], \cdots, \eta_{r-1}[\gamma]\}$ となる。$V[\gamma]$ は商空間 $V/\mathbf{R}u$ であり、任意の $1 \leq i \leq r-1$ に対し u_i の $V[\sigma]$ への像は $\eta_i[\gamma] \setminus \{0\}$　に含まれるので $\{u_1, \cdots, u_r = u\}$ は V の基底である。

集合 $\{u_1, \cdots, u_{r-1}\}$ が一意的であるのは明らかで、その順序は u を含む側面の集合 $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}\}$ のそれに従う。　　　　　　　証明終わり

単体的でない前星形化可能錐体 π と $\mathbf{R}_0 u_r$ が π の辺となるような元 u_r の組 (π, u_r) に対して、上の命題に現れた V の基底 $\{u_1, \cdots, u_r\}$ を (π, u_r) から定義された V の自然な基底という。

補題 1.6. $\{u_1, \cdots, u_r\}$ を V の (π, u_r) から定義された自然な基底とし $\{w_1, \cdots, w_r\}$ をそれに双対な V^* の基底とする。そのとき π は

$$\rho := \{v \in V \ ; 0 \leq \langle w_i, v\rangle \leq \langle w_r, v\rangle, i = 1, \cdots, r-1\}$$

に含まれる。さらに ρ の任意の側面 μ に対して交わり $\mu \cap \pi$ はπ の側面である。

証明　$\gamma := R_0 u_r$ と置く。この γ に対して側面の集合 $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}\}$ と 2 次元面の集合 $\{\eta_1, \cdots, \eta_{r-1}\}$ を命題 1.5 の証明と同様に定義する。$\gamma = \cap_{i=1}^{r-1}\sigma_i$ でありかつ $1 \leq i,\ j \leq r-1$ を満たす相異なる i, j に対して $u_r + u_i \in \eta_i \subset \sigma_j$ であることから $i \neq j$ であるすべての $1 \leq i \leq r$ 及び $1 \leq j \leq r-1$ に対して $u_i \in H(\sigma_j)$ となる。従って $i = 1, \cdots, r-1$ について $H^+(\sigma_i) = (w_i \geq 0)$ となる。各 $1 \leq i \leq r-1$ に対して $\gamma_i := \mathbf{R}_0(u_r + u_i)$ と置く。γ_i は η_i の面であるから π の側面のうち $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}\} \setminus \{\sigma_i\}$ に属するものはすべて γ_i を含む。よって γ_i を含むこれら以外の π の側面が唯 1 つ存在する。各 i に対してそれを σ'_i と書くことにする。すべての $j \neq i$ に対して $\sigma'_i \in Ad(\sigma_j)$ であるからすべての $j \neq i$ について $L(\sigma_j)$ は超平面 $H(\sigma'_i)$ に含まれる。従って $j \neq i$ に対する u_j 及び $u_r + u_i$ は $H(\sigma'_i)$ の元である。これは $H(\sigma'_i)$ が超平面 $(w_r - w_i = 0)$ に等しいことを示す。$\langle w_r - w_i, u_r\rangle = 1$ であるから $H^+(\sigma'_i) = (w_r - w_i \geq 0)$ となる。従って

$$\pi \subset \bigcap_{i=1}^{r-1} (H^+(\sigma_i) \cap H^+(\sigma'_i)) = \bigcap_{i=1}^{r-1} (0 \leq w_i \leq w_r)$$

を得る。

最後の部分は

$$\{\rho \cap (w_i = 0) \ ; i = 1, \cdots, r-1\} \cup \{\rho \cap (w_r - w_i = 0) \ ; i = 1, \cdots, r-1\}$$

が ρ の側面全体であることによる。　証明終わり

定義 1.7. 強凸多角錐体 π が超立方体的とは V^* の基底 $\{w_1, \cdots, w_r\}$ で

$$\pi = \{a \in V \ ; 0 \leq \langle w_i, a\rangle \leq \langle w_r, a\rangle, i = 1, \cdots, r-1\}$$

となるものが存在することとする。

容易にわかるように超立方体的錐体は前星形化可能である。

補題 1.6 により単体的でない前星形化可能錐体 π は少なくとも $2(r-1)$ 個の側面を持ち、丁度 $2(r-1)$ 個となるのは超立方体的錐体の場合に限る。

定義 1.8. 単体的でも超立方体的でもない前星形化可能錐体を星形化可能錐体と呼ぶ。

注意 1.9. (1) r が 1 又は 2 であれば V の強凸多角錐体は単体的である。従って、星形化可能錐体について議論するときは暗黙的に $r \geq 3$ の場合を考えていることになる。

(2) この定義は V の線形構造のみに依存するので星形化可能錐体の線形自己同型による像はまた星形化可能となる。

この節ではこれ以降 π を V の星形化可能錐体とする。

まず V の超平面 K を $\pi \cap K$ が有界で $\pi = \mathbf{R}_0(\pi \cap K)$ となるようにとる。明らかに K は V の原点を通らない。このとき $K = (x_0 = 1)$ を満たす双対空間の元 x_0 は $\mathrm{int}\,\pi^\vee$ に含まれる。アフィン空間 K に付随したベクトル空間を $V(K)$ と書くことにする。$V(K)$ は自然に超平面 $(x_0 = 0)$ と同一視される。$V(K)$ の双対空間 $V(K)^*$ は商ベクトル空間 $V^*/\mathbf{R}x_0$ と同じと考えられる。

一般に V の部分集合 S に対して交わり $S \cap K$ を S_K と書くことにする。そのとき π_K は K の最大次元の凸多面体であり $\{\sigma_K\,;\sigma \in F(\pi)\}$ がその面全体の集合となる。

トーリック多様体の理論での扇の定義 [Oda, Chap.1] から錐体の有理性の条件を除くことにより次の実扇の定義が得られる。

定義 1.10. 有限次元実ベクトル空間の強凸多角錐体からなる集合 Δ が次の条件を満たす時これを実扇と呼ぶ。

(1) $\sigma \prec \tau \in \Delta$ であれば $\sigma \in \Delta$ となる。

(2) $\sigma, \tau \in \Delta$ であれば$\sigma \cap \tau$ は σ と τ との共通の面となる。

和集合 $\cup_{\sigma \in \Delta}\sigma$ を $|\Delta|$ と書きΔ の台と呼ぶ。実扇 Δ の 1 次元錐体 γ, γ' が隣接しているとは$\gamma + \gamma'$ が Δ の 2 次元錐体であることとする。実扇 Δ の空でない部分集合 Ψ が条件 (1) を満たすとき Δ を部分実扇と呼ぶ。

P を K 内の凸多面体とする。P の各面 Q に対し Q の相対内部から任意の一点 x をとり

$$\alpha(Q) := (P - x)^\vee \subset V(K)^*$$

と置く。そのとき $\Delta(P)=\{\alpha(Q)\,;\,Q\prec P,\ Q\neq\emptyset\}$ は有限個の錐体からなる実扇で台は $V(K)^*$ となる ([Oda, A.3] 参照) 。凸多面体 $\pi_K\subset K$ は定義 1.2,(1) により単純であるから$\Delta(\pi_K)$ は単体的錐体からなる。また、任意の $\sigma\in F(\pi)\setminus\{\mathbf{0}\}$ に対して $\dim\alpha(\sigma_K)=r-\dim\sigma$ となる。特に $\{\alpha(\sigma_K)\,;\,\sigma\in Fc(\pi)\}$ は $\Delta(\pi_K)$ の 1 次元錐体全体に等しい。$\sigma,\tau\in Fc(\pi)$ について面 $\alpha(\sigma_K)$ と $\alpha(\tau_K)$ が互いに隣接するのは σ と τ とがそうなるときである。

実扇 Δ とそれに含まれる錐体 δ に対して

$$\mathrm{Star}(\delta,\Delta):=\{\alpha\in\Delta\,;\,\delta\subset\alpha\}$$

と置く。これは $\delta=\mathbf{0}$ でない限り実扇ではない。$\mathrm{Star}(\delta,\Delta)$ の錐体とその面からなる Δ の部分実扇を$\overline{\mathrm{Star}}(\delta,\Delta)$ と書く。Q が K の凸多面体 P の面であれば $\mathrm{Star}(\alpha(Q),\Delta(P))$ は $\{(P-x)^\vee\,;\,x\in Q\}$ に等しく $\overline{\mathrm{Star}}(\alpha(Q),\Delta(P))$ は Q の十分小さい近傍 $U\subset P$ について $\{(P-x)^\vee\,;\,x\in U\}$ に等しい。

σ を星形化可能錐体 π の側面とする。直線 $L(\sigma)$ は閉半直線 $L^+(\sigma)$ と $L^-(\sigma)$ の原点だけで重なる和であるから超平面 K について次の 3 つの場合が考えられる。

(I) $L^-(\sigma)$ が K と交わる。

(II) $L(\sigma)$ は K と交わらない。

(III) $L^+(\sigma)$ が K と交わる。

これらについてそれぞれ σ_K の型が (I), (II) あるいは (III) であるという。(I) または (III) 型のとき $L(\sigma)$ と K の交点を p_σ とする。

$Fc(\pi)$ の各元 τ に対し V の閉半空間 $H^+(\tau)$ の制限 $H^+(\tau)_K$ は K の閉半空間である。$\pi=\cap_{\tau\in Fc(\pi)}H^+(\tau)$ であるから$\pi_K=\cap_{\tau\in Fc(\pi)}H^+(\tau)_K$ となる。π の側面 σ に対して

$$E(\sigma)=\bigcap_{\tau\in Ad(\sigma)}H^+(\tau)_K\ .$$

と置く。そのとき $E(\sigma)\cap H^+(\sigma)_K$ は側面 σ_K のある近傍でπ_K に等しい。

(II) 型の場合任意の $Ad(\sigma)$ の元 τ について K の部分アフィン空間 $H(\tau)_K$ は直線 $L(\sigma)$ に平行である。従って $E(\sigma)$ は σ_K を切断として持つ管状体である。その他の場合 $L(\sigma)$ の定義より $\cap_{\tau\in Ad(\sigma)}H(\tau)_K$ は一点 $\{p_\sigma\}$ に等しい。よって $E(\sigma)-p_\sigma$ は $V(K)$ の最大次元の強多角錐体である。点 p_σ は (I) 型のとき $H^-(\sigma)_K$ にあり、(III) 型のときは $H^+(\sigma)_K$ にある。

ある σ_K の近傍で π_K は $E(\sigma)\cap H^+(\sigma)_K$ に等しいことから

$$\overline{\mathrm{Star}}(\alpha(\sigma_K);\Delta(\pi_K))=\{(\pi_K-x)^\vee\,;\,x\in E(\sigma)\cap H^+(\sigma)_K\}$$

となるので次のことが成り立つ。

命題 1.11. 実扇 $\overline{\mathrm{Star}}(\alpha(\sigma_K);\Delta(\pi_K))$ の台はσ が (I) 型の場合強凸多角錐体 $(E(\sigma)-p_\sigma)^\vee$ であり、(II) 型の場合閉半空間 $L^+(\sigma)^\vee\subset V(K)^*$ で (III) 型の場合強凸多角錐体 $(E(\sigma)-p_\sigma)^\vee$ の補集合の閉包に等しい。

$\Delta(\pi_K)$ は単体的錐体からなるので $|\overline{\mathrm{Star}}(\alpha(\sigma_K),\Delta(\pi_K))|$ の $V(K)^*$ での境界は $\Delta(\pi_K)$ の $(r-2)$ 次元錐体でその各辺が 1 次元錐体$\alpha(\sigma_K)$ に隣接しているようなものの和に等しい。従って次の 3 つの系を得る。

系 1.12. π_K の側面 σ_K が (I) 型であるための必要かつ十分な条件は $\Delta(\pi_K)$ の中の $\alpha(\sigma_K)$ に隣接するような 1 次元錐体全部の和の凸包が $\alpha(\sigma_K)\setminus\{0\}$ を内部に含む強凸多角錐体であることである。

系 1.13. π_K の側面 σ_K が (II) 型であるための必要かつ十分な条件は次の条件を満たす $V(K)$ の零でない元 y が存在することである。

(1) 超平面 $(y=0)\subset V(K)^*$ は $\Delta(\pi_K)$ のある部分実扇の台に等しい。

(2) $\alpha(\sigma_K)$ は $(y=0)$ には含まれずに $(y\geq 0)$ には含まれる唯 1 つの $\Delta(\pi_K)$ の 1 次元錐体である。

系 1.14. π_K の側面 σ_K が (III) 型であるための必要かつ十分な条件は $V(K)$ の零でない元 y があって $\alpha(\sigma_K)$ が $(y\geq 0)$ に含まれない唯 1 つの $\Delta(\pi_K)$ の 1 次元錐体となることである。

これらの系を用いて次の重要な補題が証明される。

補題 1.15. π を V の星形化可能錐体とする。そのとき $\pi^\vee$ の内部の元 x_0 で超平面 $K:=(x_0=1)$ について π_K のすべての側面が (I) 型となるものが存在する。

証明　π の 1 つの辺 γ と $\gamma\setminus\{0\}$ の元 u をとる。$\{u_1,\cdots,u_r\}$ を組 (π,u) に対して定義された V の基底とし $\{w_1,\cdots,w_r\}$ をそれに双対な V^* の基底とする。側面 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{r-1}$ と$\sigma'_1,\cdots,\sigma'_{r-1}$ を各 $i=1,\cdots,r-1$ について$\sigma_i:=\pi\cap(w_i=0)$ 及び$\sigma'_i:=\pi\cap(w_r-w_i=0)$ で定義する。H を

$(w_r = 1)$ で定義された V の超平面とすると $V(H) = \mathbf{R}u_1 + \cdots + \mathbf{R}u_{r-1}$ 及び $V(H)^* = V^*/\mathbf{R}w_r$ となる。各 $i = 1, \cdots, r-1$ に対して w_i の $V(H)^*$ への像を $\bar{w}_i$ と書くことにする。

側面$\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}, \sigma'_1, \cdots, \sigma'_{r-1}$ に対応した実扇 $\Delta(\pi \cap H)$ の 1 次元錐体は同じ順番で

$$\mathbf{R}_0\bar{w}_1, \cdots, \mathbf{R}_0\bar{w}_{r-1}, \mathbf{R}_0(-\bar{w}_1), \cdots, \mathbf{R}_0(-\bar{w}_{r-1})$$

となる。$V(H)^*$ の原点を通る任意の超平面による閉半空間はこれらの内半分は含むので補題 1.14 により (III) 型の $\pi \cap H$ の側面は存在しない。τ を $\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}, \sigma'_1, \cdots, \sigma'_{r-1}$ 以外の側面とする。そのとき $V(H)^*$ の同様の閉半空間に対してある i があって $\mathbf{R}_0\bar{w}_i \setminus \{0\}$ または $\mathbf{R}_0(-\bar{w}_i) \setminus \{0\}$ がその内部にに含まれることから τ については 補題 1.13 の条件は満たされないことがわかる。従って $\tau \cap H$ は (I) 型となる。

各 $1 \leq i \leq r-1$ に対して $L(\sigma_i) = \mathbf{R}u_i \subset V(H)$ であることから側面 $(\sigma_i)_H$ は (II) 型となる。補題 1.13 での $(\sigma_i)_K$ に対応する超平面 $(y = 0)$ は$\sum_{j \neq i} \mathbf{R}\bar{w}_j$ に等しい。

$\sigma'_i \cap H$ が (II) 型であると仮定する。$\mathbf{R}_0(-\bar{w}_i)$ は $\mathbf{R}_0\bar{w}_i$ に隣接していないので $|\overline{\mathrm{Star}}(\mathbf{R}_0(-\bar{w}_i), \Delta(\pi \cap H))|$ は $|\overline{\mathrm{Star}}(\mathbf{R}_0\bar{w}_i, \Delta(\pi \cap H))|$ とその内部では交わっていない。従って $\sigma'_i \cap H$ に対応する超平面 $(y = 0)$ も $\sum_{j \neq i} \mathbf{R}\bar{w}_j$ に等しい。このことから、すべての $j \neq i$ に対して $\mathbf{R}_0\bar{w}_i$ 及び $\mathbf{R}_0(-\bar{w}_i)$ は $\mathbf{R}_0(-\bar{w}_j)$ に隣接している。従って、各 $j \neq i$ について $(\sigma'_j \cap H)$ は補題 1.12 の条件を満たし得ないので (II) 型である。結局すべての $1 \leq j \leq r-1$ に対して $\mathbf{R}_0\bar{w}_j$ と $\mathbf{R}_0(-\bar{w}_j)$ 以外の 1 次元錐体は超平面 $\sum_{k \neq j} \mathbf{R}\bar{w}_k$ に含まれる。これにより 1 次元錐体が前述の $2r-2$ 個しか無いことになり $Fc(\pi) = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}, \sigma'_1, \cdots, \sigma'_{r-1}\}$ となる。これは π が超立方体的でないことに矛盾する。よって $\sigma'_1 \cap H, \cdots, \sigma'_{r-1} \cap H$ が (I) 型であることがわかる。

x_0 を $\mathrm{int}\, \pi^\vee$ の点とし $K := (x_0 = 1)$ と置く。$u \in \gamma \setminus \{0\} \subset \pi \setminus \{0\}$ であるから $\langle x_0, u \rangle > 0$ となる。従って x_0 は超平面 $(u = 0) = \mathbf{R}_0w_1 + \cdots + \mathbf{R}_0w_{r-1}$ に含まれない。ここで $i = 1, \cdots, r-1$ に対して w_i の $V(K)^* := V^*/\mathbf{R}x_0$ への像を同じ記号 $\bar{w}_i$ で書き $V(K)^*$ と $V(H)^*$ をこの記号が両立するように同一視する。このとき、各 $x_0 \in \mathrm{int}\, \pi^\vee$ に対して $\Delta(\pi_K)$ を $V(H)^*$ の実扇と見なせる。ここで x_0 を動せば $\Delta(\pi_K)$ は連続的に変形する。従って、x_0 が w_rの十分近くであれば$\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}$ 以外の側面 σ について π_K の側面 σ_K はまた (I) 型である。

十分小さい $\epsilon \geq 0$ について $x_0 := w_r - \epsilon(w_1 + \cdots + w_{r-1})$ とおき、$x_0 \in \operatorname{int} \pi^\vee$ でありかつ上の σ_K がいつも (I) 型であるようにする。このとき各 $j = 1, \cdots, r-1$ に対して $\alpha((\sigma'_j)_K) = \mathbf{R}_0(\epsilon(\bar{w}_1 + \cdots + \bar{w}_{r-1}) - \bar{w}_j)$ でありまた $\alpha((\sigma_j)_K) = \mathbf{R}_0\bar{w}_j$ となる。容易にわかるように整数 $1 \leq i \leq r-1$ に対して、すべての $j \neq i$ についての $\alpha((\sigma_j)_K)$ と$\alpha((\sigma'_j)_K)$ との和の閉包は $\mathbf{R}_0\bar{w}_i$ を含む強凸多角錐体となる。従って、補題 1.12 によりすべての i について $(\sigma_i)_K$ は (I) 型となる。 証明終わり

この補題により得られた凸多面体 π_K は普通の意味で星形化することが出来る。これがこの錐体を星形化可能と名付けた理由である。

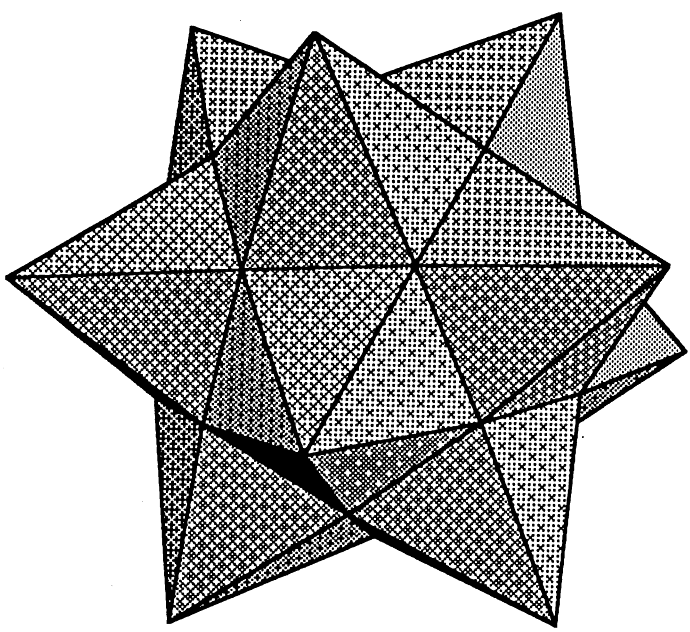


図 1: 正 12 面体の星形化

2 星形化可能錐体の双対性

星形化可能錐体の概念の双対として反星形化可能錐体を次のように定義する。

定義 2.1. 最大次元の強凸多角錐体 π は次の条件を満たす時、反前星形化可能と呼ぶ。

(1) π のすべての側面は単体的である。

(2) π の各辺 γ に対して、すべての $\eta \in ad(\gamma)$ を含むような V の超平面 $P(\gamma)$ が存在する。

反前星形化可能錐体 π の辺 γ に対して、$P(\gamma)$ で区切られた閉半空間のうち γ を含まない方を $P^{-}(\gamma)$ と書くことにする。

定義 2.2. 強凸多角錐体 π に対して

$$\pi = \mathbf{R}_0(u_r + u_1) + \mathbf{R}_0(u_r - u_1) + \cdots + \mathbf{R}_0(u_r + u_{r-1}) + \mathbf{R}_0(u_r - u_{r-1})$$

を満たす V の基底 $\{u_1, \cdots, u_r\}$ が存在するとき π を正軸体的という。

定義 2.3. 反前星形化可能錐体が単体的でも正軸体的でもないときに反星形化可能という。

補題 2.4. π を V の最大次元の強凸多角錐体とする。このとき π が星形化可能であることと、双対錐体 $\pi^{\vee} \subset V^*$ が反星形化可能であることは同値である。

証明　γ を π の辺とする。そのとき $\pi^{\vee} \cap \gamma^{\perp}$ は $\pi^{\vee}$ の側面である。この対応は $ed(\pi)$ から $Fc(\pi^{\vee})$ への全単射である。$\pi^{\vee} \cap \gamma^{\perp} \subset V^*[\gamma]$ は $\pi[\gamma] \subset V[\gamma]$ の双対錐体であるから π に対する定義 1.2,(1) と $\pi^{\vee}$ に対する定義 2.1,(1) は同値である。

σ を π の側面とする。[Oda, Prop.A.6] によれば π の側面 τ が σ に隣接することと $\pi^{\vee}$ の辺 $\pi^{\vee} \cap \tau^{\perp}$ が$\pi^{\vee} \cap \sigma^{\perp}$ に隣接することとは同値である。

$$\Big(\bigcap_{\tau \in Ad(\sigma)} H(\tau)\Big)^{\perp} = \sum_{\tau \in Ad(\sigma)} \tau^{\perp} = \sum_{\gamma \in ad(\pi^{\vee} \cap \sigma^{\perp})} H(\gamma)$$

であるから $L(\sigma; \pi)$ が直線になるのは $ad(\pi^{\vee} \cap \sigma^{\perp})$ に含まれる辺の和が V^* の超平面に含まれるときである。

従って π が前星形化可能となるのは $\pi^{\vee}$ が反前星形化可能であることが必要かつ十分な条件となる。π が超立方体的であることは $\pi^{\vee}$ が正軸体的であることと同値であるので補題は証明された。　　　　証明終わり

V の星形化可能錐体 π に対して

$$\pi^{\sim} := \sum_{\sigma \in Fc(\pi)} L^{-}(\sigma)$$

と置く。また π の面 ρ に対して $Fc(\pi|\rho) := \{\sigma \in Fc(\pi) \, ; \, \rho \prec \sigma\}$ と定義する。定義 1.2,(1) により $\rho \neq \{0\}$ であれば${}^{\#}Fc(\pi|\rho) = r - \dim \rho$ となる。さらに

$$\rho^{\sim\pi} := \sum_{\sigma \in Fc(\pi|\rho)} L^{-}(\sigma) \ .$$

と置く。

一方、反星形化可能錐体 π に対して

$$\pi^{\square} := \bigcap_{\gamma \in ed(\pi)} P^{-}(\gamma)$$

と置く。

命題 2.5. π を V の星形化可能錐体とする。そのとき $\pi^{\sim}$ は反星形化可能錐体である。各 $\rho \in F(\pi)$ に対して $\rho^{\sim\pi}$ は $(r - \dim\ \rho)$ 次元の $\pi^{\sim}$ の面で、この対応は $F(\pi)$ と $F(\pi^{\sim})$ の全単射を与える。さらに $\pi \setminus \{0\}$ は $\pi^{\sim}$ の内部に含まれ $(\pi^{\sim})^{\square} = \pi$ が成り立つ。

証明　補題 1.15 を用いて元 $x_0 \in \mathrm{int}\, \pi^{\vee}$ を $K := (x_0 = 1)$ で決まる凸多面体 π_K のすべての側面が (I) 型となるように選ぶ。そのとき $\pi^{\sim}$ は強凸多角錐体

$$\sum_{\sigma \in Fc(\pi)} \mathbf{R}_0 p_\sigma$$

に等しい。ここで p_σ は $L^{-}(\sigma)$ と K の交点である。従って $\pi^{\sim}_K := \pi^{\sim} \cap K$ は $\{p_\sigma \, ; \, \sigma \in Fc(\pi)\}$ の凸包である。

E を π_K の辺とし l_E を E を含む直線とする。E の 2 つの端点を p, p' とすると π_K の側面 σ_K, σ'_K で $\sigma_K \cap E = \{p\}$ 及び $\sigma'_K \cap E = \{p'\}$ となるものが存在する。そのとき 2 点 p_σ と $p_{\sigma'}$ は直線 l_E 上にあり、線分 $\overline{p_\sigma p_{\sigma'}}$ は E をその内部に含む。つまり、すべての π_K の辺 E について E の l_E でのある近傍が$\pi^{\sim}_K$ に含まれることになる。従って π_K のすべての頂点が凸多面体 $\pi^{\sim}_K$ の内部に含まれるので$\pi \setminus \{0\}$ は $\pi^{\sim}$ の内部に含まれる。

次に、対応 $\rho \mapsto \rho^{\sim\pi}$ の全単射性を示す。$\gamma \in ed(\pi)$ に対して q を γ と K の交点とする。そのとき $\{p_\sigma - q \, ; \, \sigma \in Fc(\pi|\gamma)\}$ は $(r-1)$ 次

元の単体的錐体 $-\mathbf{R}_0(\pi_K - q)$ を生成し$\tau \in Fc(\pi) \setminus Fc(\pi|\gamma)$ に対して $p_\tau - q \in \mathbf{R}_0(\pi_K - q)$ となる。従って $\{p_\sigma\,;\,\sigma \in Fc(\pi|\gamma)\}$ の凸包は $(r-2)$ 次元単体で $\pi_K^\sim$ の側面となる。この側面を Q_γ と書く。Q を Q_γ に隣接する $\pi_K^\sim$ の側面とする。そのとき $Q_\gamma \cap Q$ はある π の γ を含む 2 次元面 η について $\{p_\sigma\,;\,\sigma \in Fc(\pi|\eta)\}$ の凸包に等しい。従って η のもう 1 つの辺 γ' について $Q = Q_{\gamma'}$ となる。

これより $\{Q_\gamma\,;\,\gamma \in ed(\pi)\}$ に属する側面に隣接する側面はまたこれに属し、結局これが$\pi_K^\sim$ の側面全体の集合であることがわかる。$\gamma^{\sim\pi} \cap K = Q_\gamma$ であるから $\pi^\sim$ のすべての側面は単体的となる。$\pi^\sim$ の側面の形がわかったので全射性はもはや明らかである。

強凸多角錐体 $\pi^\sim$ が反星形化可能であることは $\{p_\tau\,;\,\tau \in Ad(\sigma)\}$ が p_σ に隣接する $\pi_K^\sim$ 頂点の集合であり、また超平面 $H(\sigma)_K$ に含まれていることからわかる。このことからまた $(\pi^\sim)^\square = \pi$ も成り立つ。　証明終わり

補題 2.6. π を V の星形化可能錐体とする。そのとき

$$(\pi^\sim)^\vee = (\pi^\vee)^\square$$

が成り立つ。

証明　定義により $(\pi^\sim)^\vee = \bigcap_{\sigma \in Fc(\pi)} L^-(\sigma)^\vee$ である。

一方 $ed(\pi^\vee) = \{\pi^\vee \cap \tau^\perp\,;\,\tau \in Fc(\pi)\}$ であるから $L(\sigma)^\perp$ は $\pi^\vee \cap \tau^\perp$ に隣接するすべての $\pi^\vee$ の辺を含む。従って、すべての $\sigma \in Fc(\pi)$ について定義 2.1 の $P(\pi^\vee \cap \sigma^\perp)$ は $L^-(\sigma)^\perp$ に等しい。ゆえに $(\pi^\vee)^\square$ もまた $\bigcap_{\sigma \in Fc(\pi)} L^-(\sigma)^\vee$ に等しい。　証明終わり

反星形化可能錐体 π の面 ρ に対して

$$\rho^{\square\pi} := \pi^\square \cap \Big(\bigcap_{\gamma \in ed(\rho)} P(\gamma) \Big)$$

と置く。明らかに $\rho^{\square\pi}$ は $\pi^\square$ の面である。

つぎの命題は補題 2.4 と補題 2.6 を用いて命題 2.5 を双対化することにより得られる。

命題 2.7. π を反星形化可能錐体とする。そのとき $\pi^\square$ は星形化可能錐体である。写像 $\rho \mapsto \rho^{\square\pi}$ により $F(\pi)$ と $F(\pi^\square)$ は 1 対 1 に対応する。$\pi^\square \setminus \{0\}$ の各点は π の内部にある。さらに $(\pi^\square)^\sim = \pi$ となる。

V の星形化可能錐体 π に対して$\pi^\sharp := (\pi^\sim)^\vee \subset V^*$ と置きπ の鋭双対と呼ぶ。これは補題 2.4 と命題 2.5 より星形化可能錐体である。また命題 2.5 と補題 2.6 により $(\pi^\sharp)^\sharp = \pi$ となる。実際 $(\pi^\sharp)^\sharp = (((\pi^\sim)^\vee)^\vee)^\square = (\pi^\sim)^\square = \pi$ となる。

π を V の中の星形化可能錐体とする。各 $\rho \in F(\pi)$ に対して

$$\rho^{\sharp\pi} := \pi^\sharp \cap (\rho^{\sim\pi})^\perp$$

と置く。$\rho^{\sim\pi}$ は $\pi^\sim$ の面であるから$\rho^{\sharp\pi}$ は $\pi^\sharp$ の面である。

次の定理は命題 2.5 と [Oda, Prop.A.6] から得られる。

定理 2.8. π を星形化可能錐体とする。そのとき、対応 $\rho \mapsto \rho^{\sharp\pi}$ は $F(\pi)$ と $F(\pi^\sharp)$ との全単射を与える。この全単射は順序を保存する。つまり、各 $\sigma, \tau \in F(\pi)$ に対して$\sigma^{\sharp\pi} \prec \tau^{\sharp\pi}$ となるのは $\sigma \prec \tau$ となるときである。

3 星形化可能錐体の結合

この節では与えられた星形化可能錐体をもとにして新しい星形化可能錐体を作る 1 つの方法を与える。

定義 3.1. V の 2 つの星形化可能錐体 π と ρ が共通の側面 σ を持ち次の条件を満たすときそれらは結合可能という。

(1) $L^+(\sigma;\pi) \cup L^+(\sigma;\rho)$ は V の直線である。

(2) もし $\tau \in Ad(\sigma;\pi)$ と$\mu \in Ad(\sigma;\rho)$ が$\tau \cap \sigma = \mu \cap \sigma$ を満たせば $L(\tau;\pi)$ は $L(\mu;\rho)$ に等しい。

このとき $\pi \cup \rho$ を星形化可能錐体 π とρ の側面 σ に沿っての結合という。

補題 3.2. $\dim V \geq 4$ の場合、星形化可能錐体の結合可能性は上の条件 (1) だけで十分である。

証明　τ と μ を定義 3.1,(2) の中の通りとする。そのとき $\eta := \tau \cap \mu$ は σ の側面である。$\dim \eta \geq 2$ であるから η の 2 つの異なる辺 γ, γ' をとることが出来る。$\sigma[\gamma]$ と $\sigma[\gamma']$ は単体的錐体であるから σ の η に含まれない 2 次元面α と α' で $\gamma \prec \alpha$ 及び $\gamma' \prec \alpha'$ となるものが存在する。このとき $L(\tau;\pi)$ と $L(\mu;\rho)$ はいずれも直線 $H(\alpha) \cap H(\alpha')$ に等しくなる。　　　証明終わり

π と ρ が σ に沿って結合可能であれば $H^+(\sigma;\pi)\cap H^+(\sigma;\rho)=H(\sigma)$ であるから σ は $\pi\cap\rho$ に等しい。

星形化可能錐体 π の側面 σ に対して

$$Fc(\pi)_\sigma := Fc(\pi)\setminus(Ad(\sigma)\cup\{\sigma\})$$

と置く。前星形化可能錐体の定義により $\tau\in Fc(\pi)_\sigma$ に対して $\tau\cap\sigma=\{0\}$ となる。

$Fc(\pi)$ が $Fc(\pi)_\sigma, Ad(\sigma;\pi)$ と $\{\sigma\}$ の互いに交わらない和であることは明らかである。

命題 3.3. 星形化可能錐体 π と ρ は側面 σ に沿って結合可能とする。そのとき、和集合 $\pi\cup\rho$ は星形化可能錐体であり、その側面は次のように分類される。

(1) $Fc(\pi)_\sigma$ の各元 τ は $\pi\cup\rho$ の側面である。

(2) $Fc(\rho)_\sigma$ の各元 τ は $\pi\cup\rho$ の側面である。

(3) もし $\tau\in Ad(\sigma;\pi)$ と $\mu\in Ad(\sigma;\rho)$ が $\tau\cap\sigma=\mu\cap\sigma$ を満たせば $\tau\cup\mu$ は $\pi\cup\rho$ の側面である。

さらに、(1) の場合 $L^+(\tau;\pi\cup\rho)=L^+(\tau;\pi)$ が (2) の場合 $L^+(\tau;\pi\cup\rho)=L^+(\tau;\rho)$ が (3) の場合 $L^+(\tau\cup\mu;\pi\cup\rho)=L^+(\tau;\pi)=L^+(\mu;\rho)$ がそれぞれ成り立つ。

証明　$\omega:=\pi\cup\rho$ と置く。τ 及び μ を (3) にある通りとする。そのとき $H(\tau)=H(\tau\cap\sigma)+L(\sigma)$ かつ $H(\mu)=H(\mu\cap\sigma)+L(\sigma)$ であるから $H(\tau)=H(\mu)$ であり σ を含む半空間を見れば $H^+(\tau)=H^+(\mu)$ となる。各 $\tau\in Ad(\sigma;\pi)$ に対して $\tau\cap\sigma=\mu\cap\sigma$ を満たす $\mu\in Ad(\sigma;\rho)$ が常に存在することに注意すれば ω は錐体

$$D:=\bigcap_{\tau\in Ad(\sigma;\pi)} H^+(\tau)$$

に含まれることがわかる。この錐体は σ の近傍で原点を除き ω に等しい。$D=\sigma+L(\sigma)$ であるから $D\cap(-D)=L(\sigma)$ となる。π と ρ はそれぞれ $\bigcap_{\tau\in Fc(\pi)}H^+(\tau)$ と $\bigcap_{\mu\in Fc(\rho)}H^+(\mu)$ に等しいので

$$\omega=D\cap(\bigcap_{\tau\in Fc(\pi)_\sigma} H^+(\tau))\cap(\bigcap_{\mu\in Fc(\rho)_\sigma} H^+(\mu))$$

となる。ω の側面の分類はこの記述から明らかである。D が含む直線は $L(\sigma)$ に平行なものに限られるが ω は補題 1.4 により $L(\sigma)$ を含まないので強凸である。

後半の主張の (1) と (2) は原点を除けば ω はτ の近傍で π 又は ρ と等しいので明らかである。また (3) については $H^+(\tau) = H^+(\mu)$ であるから $L^+(\tau;\pi) = L^+(\mu;\rho)$ は定義 3.1 により満たされる。ω の前星形化可能性はこれで明らかであり、π や ρ より側面が少なくないことから星形化可能となる。　　　　　　　　　　　　　　　　証明終わり

容易にわかるように

$$\pi^{\sim} \cap H^+(\sigma;\pi) = \sum_{\tau \in Fc(\pi)\setminus\{\sigma\}} L^-(\tau) \subset \rho^{\sim}$$

かつ

$$\rho^{\sim} \cap H^+(\sigma;\rho) = \sum_{\mu \in Fc(\rho)\setminus\{\sigma\}} L^-(\mu) \subset \pi^{\sim}$$

であるから命題 3.3 より次の補題が得られる。

補題 3.4. 星形化可能錐体 π と ρ が側面 σ に沿って結合可能とすると $(\pi \cup \rho)^{\sim} = \pi^{\sim} \cap \rho^{\sim}$ が成り立つ。

σ を星形化可能錐体 π の側面とする。零でない実数 t に対して $V = H(\sigma) \oplus L(\sigma)$ の線形自己同型 $E_t(\sigma;\pi)$ をその $H(\sigma)$ への制限が恒等写像で $L(\sigma)$ への制限が t 倍の写像となるように定義する。そのとき $\pi' = E_t(\sigma;\pi)(\pi)$ は 注意 1.9 により星形化可能となる。$t > 0$ であれば明らかに $L^+(\sigma;\pi') = L^+(\sigma;\pi)$ となり $t < 0$ であれば $L^+(\sigma;\pi') = L^-(\sigma;\pi)$ となる。一方、各 $\tau \in Ad(\sigma)$ に対して $L(\tau;\pi)$ は $H(\sigma)$ に含まれているので $E_t(\sigma;\pi)$ では不変である。従って $t < 0$ であれば π と π' は σ に沿って結合可能である

結合可能性は第 2 節で定義した鋭双対の定義とも次のように両立する。

定理 3.5. V の星形化可能錐体 π と ρ が共通の側面σ に沿って結合可能であるとする。そのとき $\sigma^{\sharp\pi} = \sigma^{\sharp\rho}$ であって鋭双対錐体 $\pi^\sharp$ と $\rho^\sharp$ は $\sigma^{\sharp\pi}$ に沿って結合可能となる。

さらに $(\pi \cup \rho)^\sharp = \pi^\sharp \cup \rho^\sharp$ が成り立つ。

証明　$\sigma^{\sim\pi} = L^-(\sigma;\pi)$ かつ$\sigma^{\sim\rho} = L^-(\sigma;\rho)$ であるから$\sigma^{\sim\pi} \cup \sigma^{\sim\rho}$ は直線である。よって $\pi^\sharp \cap \rho^\sharp$ は$\sigma^{\sharp\pi} = \pi^\sharp \cap (\sigma^{\sim\pi})^\perp$ ともまた$\sigma^{\sharp\rho} = \rho^\sharp \cap (\sigma^{\sim\rho})^\perp$ とも等しい。$L(\sigma^{\sharp\pi};\pi^\sharp) = \pi^\vee \cap \sigma^\perp$ かつ $L(\sigma^{\sharp\rho};\rho^\sharp) = \rho^\vee \cap \sigma^\perp$ であるから、定義 3.1 の (1) は $\pi^\sharp$ と $\rho^\sharp$ に対して成り立つ。(2) の方は側面$\tau \in Fc(\pi)$

及び $\mu \in Fc(\rho)$ に対して $L(\tau^{\sharp\pi}) = H(\tau)^{\perp}$ かつ $L(\mu^{\sharp\rho}) = H(\mu)^{\perp}$ であるから正しい。

最後の主張は補題 3.4 の等式の両辺の双対錐体を考えることにより得られる。 証明終わり

定義 3.6. $E_{-1}(\sigma;\pi)$ を特に $R_{\sigma/\pi}$ と書く。これは V の位数 2 の自己同型となる。結合 $\pi \cup R_{\sigma/\pi}(\pi)$ を π の σ に沿った 2 倍化と呼ぶ。

星形化可能錐体 $\pi_0 = \pi$ から始めて星形化可能錐体の列 $\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_n$ を各 π_{i+1} が π_i のある側面 σ_i に沿った π_i の 2 倍化となるように作る。π_i の側面 τ について $\tau \cap \pi_0$ がπ_0 の側面となるとき τ を π_0 に根を持つ側面と言う。もしすべての σ_i が π_0 に根を持てばπ_n の側面で π_0 に根を持つものの数はπ_0 の側面の数から n を引いたものとなる。従って $n = {}^{\#}Fc(\pi_0)$ であれば π_n はπ_0 に根を持った側面を持たないことになる。この場合 $\pi_0 \setminus \{0\}$ は π_n の内部に含まれる。再び π_n から始めて同じ 2 倍化を続けて星形化可能錐体の列$\pi_n, \pi_{n+1}, \cdots, \pi_{n'}$ を作り$\pi_{n'}$ が π_n に根を持つ側面を持たないように出来る。この操作を無限に続けることにより 2 倍化の無限列 $\{\pi_i\}$ が得られる。

$$C(\pi) := (\bigcup_{i=0}^{\infty} \pi_i) \setminus \{0\}$$

と置く。作り方から $C(\pi)$ は V の開錐体である。補題 3.4 よりいつも $\pi_i \subset \pi_i^{\sim} \subset \pi^{\sim}$ であるから $C(\pi) \subset \pi^{\sim}$ となる。したがって $C(\pi)$ は V の直線を含まない。

$\Gamma(\pi)$ を $\{R_{\sigma/\pi}\,;\sigma \in Fc(\pi)\}$ で生成された $\mathrm{Aut}(V) \simeq \mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$ の部分群とする。

次の定理は上の構成法から明らかである ([Vin, Thm.2] 参照) 。

定理 3.7. π を星形化可能錐体とする。そのとき $C(\pi)$ は

$$(\bigcup_{u \in \Gamma(\pi)} u(\pi)) \setminus \{0\}$$

に等しい。特に $C(\pi)$ は無限列 $\{\pi_i\}$ の取り方によらない。開錐体 $C(\pi)$ は V の直線を含まない。群 $\Gamma(\pi)$ は $C(\pi)$ に固有離散的に作用している。

4　整及び半整星形化可能錐体

N を階数 r の自由 $\mathbf{Z}$ 加群とする。これ以降は $V = N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ である場合、つまり V が格子 $N \simeq \mathbf{Z}^r$ を持つ場合を考える。従って V を $N_{\mathbf{R}}$ とも書くことにする。N の自己同型群 $\mathrm{Aut}(N) \simeq \mathrm{GL}(r, \mathbf{Z})$ は自然に $\mathrm{Aut}(N_{\mathbf{R}})$ の部分群と考えられる。

この節では星形化可能 錐体 π に対して定義した$\Gamma(\pi)$ が $\mathrm{Aut}(N)$ の部分群となるための条件を調べる。

定義 4.1. $N_{\mathbf{R}}$ の星形化可能錐体 π が任意 π の側面σ に対して $N = H(\sigma)_{\mathbf{Z}} + L(\sigma)_{\mathbf{Z}}$ を満たすとき整星形化可能であるという。ここで $H(\sigma)_{\mathbf{Z}} = H(\sigma) \cap N$ かつ $L(\sigma)_{\mathbf{Z}} = L(\sigma) \cap N$ である。また、すべての側面 σ について指数 $|N : H(\sigma)_{\mathbf{Z}} + L(\sigma)_{\mathbf{Z}}|$ が 1 か又は 2 であるとき半整星形化可能であるという。

注意 4.2. 半整星形化可能錐体は有理的、つまりある N の有限部分集合 $\{u_1, \cdots, u_s\}$ について$\pi = \mathbf{R}_0 u_1 + \cdots + \mathbf{R}_0 u_s$ となる。

定理 4.3. π を $N_{\mathbf{R}}$ の星形化可能錐体とする。そのとき $\Gamma(\pi)$ が $\mathrm{Aut}(N)$ の部分群となるための必要十分条件は π が半整星形化可能であることである。

証明　$p_2 : V = H(\sigma) \oplus L(\sigma) \longrightarrow L(\sigma)$ を第 2 成分への射影とする。そのとき $R_{\sigma/\pi} = 1_V - 2p_2$ となる。従って $R_{\sigma/\pi} \in \mathrm{Aut}(N)$ であるのは $2p_2(N) \subset L(\sigma)_{\mathbf{Z}}$ のときである。$N/(H(\sigma)_{\mathbf{Z}} + L(\sigma)_{\mathbf{Z}}) \simeq p_2(N)/L(\sigma)_{\mathbf{Z}}$ であるから主張は正しい。　証明終わり

系 4.4. π を整星形化可能錐体とする。$N \subset N' \subset (1/2)N$ を満たす任意の $N_{\mathbf{R}}$ の格子 N' に対しても π は半整星形化可能である。

証明　σ を π の側面とする。$H(\sigma)$ は超平面なので $N'/(H(\sigma) \cap N')$ は巡回群である。$N'/(H(\sigma) \cap N' + L(\sigma) \cap N')$ は $N'/(H(\sigma)_{\mathbf{Z}} + L(\sigma)_{\mathbf{Z}}) \subset (1/2)N/N$ の商加群であるから位数は 1 又は 2 である。　証明終わり

命題 4.5. σ を整星形化可能錐体 π の側面とする。そのとき

$$E_2(\sigma;\pi)(\pi), E_{-2}(\sigma;\pi)(\pi), E_{1/2}(\sigma;\pi)(\pi), E_{-1/2}(\sigma;\pi)(\pi)$$

は半整星形化可能錐体である。

証明

$$E_t(\sigma;\pi)^{-1}N = H(\sigma)_{\mathbf{Z}} \oplus \frac{1}{t}L(\sigma)_{\mathbf{Z}} = 2(\frac{1}{2}H(\sigma)_{\mathbf{Z}} \oplus \frac{1}{2t}L(\sigma)_{\mathbf{Z}})$$

であるから π は $t = 2, -2, 1/2, -1/2$ に対する $E_t(\sigma;\pi)^{-1}N$ について半整星形化可能であることが系 4.4 からわかる。これは命題と同値である。　　　　証明終わり

次の命題は命題 3.2 から明らかである。

命題 4.6. 結合可能な π と ρ とが共に整星形化可能あるいは共に半整星形化可能であれば結合 $\pi\cup\rho$ も同様である。特に整または半整星形化可能錐体の 2 倍化は、それぞれ整あるいは半整星形化可能となる。

注意 4.7. 上の命題により、整星形化可能錐体 π に対して結合 $\pi\cup E_t(\sigma;\pi)(\pi)$ は $t=-2$ 及び $-1/2$ について半整星形化可能となる。さらにこの命題を繰り返し使うことにより無限に沢山の半整星形化可能錐体を 1 つの整星形化可能錐体から構成することが出来る。例えば 2 倍化を何度も行なうことにより原点以外で互いに交わらない沢山の側面をを持つ整星形化可能錐体π' を作ることが出来る。$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n,\tau_1,\cdots,\tau_m\}$ をそのような π' の側面の集合とする。そのとき

$$\pi' \cup (\cup_{i=1}^n E_{-2}(\sigma_i;\pi')(\pi')) \cup (\cup_{j=1}^m E_{-1/2}(\tau_j;\pi')(\pi'))$$

は半整星形化可能錐体である。

土橋のカスプ特異点 [T] は $N_{\mathbf{R}}$ の開錐体 C と $\mathrm{Aut}(N)$ の部分群 Γ の組 (C,Γ) で次の条件を満たすものから構成される。

(1) C は Γ 不変で Γ は C に自由かつ固有不連続に作用する。

(2) 多様体 $D := C/\mathbf{R}_+$ について商空間 D/Γ はコンパクトである。

命題 4.8. π を半整星形化可能錐体とする。そのとき、有限指数の部分群 $\Gamma\subset\Gamma(\pi)$ が存在して Γ の開錐体 $C(\pi)$ への作用は自由となる。従って、組 $(C(\pi),\Gamma)$ は土橋カスプ特異点を与える。

証明　$\pi\setminus\{0\}$ は $\Gamma(\pi)$ の $C(\pi)$ への作用の基本領域であるから Γ の有限指数の正規部分群で $\pi\setminus\{0\}$ に固定点を持たないものを見付ければ良い。$\pi\setminus\{0\}$ の各点 x に対して x の安定群は x を内部に含む π の面 σ だけに依存する。しかも、その安定群の位数は $2^{r-\dim\sigma}$ に等しい。特に $\Gamma(\pi)$ の

有限個の元しか $\pi\setminus\{0\}$ に固定点を持たない。$\Gamma(\pi)\subset \mathrm{Aut}(N)\simeq \mathrm{GL}(r,\mathbf{Z})$ の有限指数の正規部分群全部の交わりは $\{1_N\}$ であるから求める正規部分群 Γ は存在する。　証明終わり

土橋カスプ特異点の重要な不変量として佐武による算術種数 χ_∞ [S] や尾形のゼータ零値 $Z(0)$ [Og] がある。半整星形化可能錐体 π に対して π のχ_∞ 及び $Z(0)$ を組 $(C(\pi),\Gamma)$ によって決まるカスプ特異点のそれらを指数 $|\Gamma(\pi):\Gamma|$ で割ったものとして定義する。ここで Γ は上の命題で得られた $\Gamma(\pi)$ の有限指数の部分群である。

星形化可能錐体 π の側面 σ に対して $H(\sigma^{\sharp\pi})=L(\sigma)^{\perp}$ かつ $L(\sigma^{\sharp\pi})=H(\sigma)^{\perp}$ であるから次の命題は定義から明らかである。

命題 4.9. π を整または半整星形化可能錐体とすると鋭双対 $\pi^{\sharp}$ もまたそれぞれ整あるいは半整星形化可能である。

定理 4.10. π を V の半整星形化可能錐体とする。そのとき開錐体 $C(\pi^{\sharp})$ は $C(\pi)$ の双対錐体の内部に等しく $\Gamma(\pi^{\sharp})$ は $\Gamma(\pi)$ の転置 ${}^t\Gamma(\pi)$ に等しい。

証明　$\Gamma\subset\Gamma(\pi)$ を命題 4.8 の様にとる。$\pi_0=\pi$ とし $\{\pi_i\}$ を 3 節で与えた星形化可能錐体の無限列とする。そのとき補題 3.4 より $\{\pi_i^{\sim}\}$ は反星形化可能錐体の包含関係についての減少列となる。

$$C' := \mathrm{int}\bigcap_{i=1}^{\infty}\pi_i^{\sim}$$

と置く。すると、すべての i に対して $\pi_i\subset\pi_i^{\sim}$ であるから $C(\pi)\subset C'$ である。定理 3.4 により $\{\pi_i^{\sharp}\}$ は $\pi^{\sharp}$ から始めた 2 倍化の列であり、従って $C(\pi^{\sharp})$ は $\bigcup_{i=1}^{\infty}\pi_i^{\sharp}\setminus\{0\}$ に等しい。よって C' は $C(\pi^{\sharp})$ の双対錐体の内部に等しい。[T, Lemma 1.6] により組 (C',Γ) もまた土橋カスプ特異点を与える。$D:=C(\pi)/\mathbf{R}_+$ 及び $D':=C'/\mathbf{R}_+$ に対して D/Γ は D'/Γ の開かつコンパクトな部分多様体となるので $C'=C(\pi)$ であり定理を得る。　証明終わり

5　整星形化可能錐体の例

この節では $r=3$ 及び 4 の場合について整星形化可能錐体の例をいくつか与える。

3 次元強凸多角錐体 π は $g:={}^{\#}Fc(\pi)$ について g角錐と呼ばれる。これはある平面による切断が凸 g角形となることを意味する。

命題 5.1. $r=3$ の場合最大次元の強凸多角錐体はいつも前星形化可能である。それが星形化可能となるための必要かつ十分な条件は上で与えた g が 5 以上となることである。

証明　3 次元の場合前星形化可能となることは定義 1.2 の直後に述べた。それが単体的又は超立方体的となるのは g が 3 または 4 となるときである。　証明終わり

自由 $\mathbf{Z}$ 加群 F の元 x は $F/\mathbf{Z}x$ に捩れがないとき原始的であるといわれる。N の双対 $\mathbf{Z}$ 加群 M の零でない元 x について $N_{\mathbf{R}}$ の超平面 $(x=1)$ が N と交わりを持つのは x が原始的であるときである。ある原始的な $x\in M$ について $K=(x=1)$ となるとき K を $N_{\mathbf{R}}$ の原始的な超平面であるという。

$N_{\mathbf{R}}$ の強凸多角錐体 π はある原始的な超平面 K に対して凸多面体 π_K のすべての頂点が $N\cap K$ に含まれるときゴーレンスタイン的という。任意の体 k に対して、可換半群環 $k[M\cap\pi^{\vee}]$ がゴーレンスタイン環であるのは π がゴーレンスタイン的であるときである [I1, Thm.7.5]。

K を格子 $K_{\mathbf{Z}}$ を持つアフィン空間とする。$V(K)$ 及び $N(K)$ で付随するベクトル空間とその上の格子を表す。格子 N を持つ 3 次元ベクトル空間 V で K を原始的な超平面として含み $K_{\mathbf{Z}}=N\cap K$ となるものは同型を除き一意的に定まる。K の凸多角形 P は錐体 $\mathbf{R}_0P$ が整星形化可能であるとき同じく整星形化可能という。

ここですべての頂点が格子点であるような K の凸 g角型 P を考え P が整星形化可能となるための条件を求めよう。

命題 5.1 により $g\geq 5$ と仮定する。

$\{v_1,\cdots,v_g\}$ を P の頂点集合で各 $i=1,\cdots,g$ について $E_i:=\overline{v_{i-1}v_i}$ が P の辺であるとする。但し $v_0:=v_g$ とする。各 i に対して $z_i:=v_i-v_{i-1}\in N(K)$ と置き $z_i=c_in_i$ となる正の整数 c_i と $N(K)$ の原始的な元 n_i をとる。そのとき

$$\Psi(P):=\{\mathbf{0}\}\cup\{\mathbf{R}_0n_1,\cdots,\mathbf{R}_0n_g\}\cup\{\mathbf{R}_0n_0+\mathbf{R}_0n_1,\cdots,\mathbf{R}_0n_{g-1}+\mathbf{R}_0n_g\}$$

は $V(K)$ の完全扇である。ここで $n_0:=n_g$ である。

また各 $1\leq i\leq g$ に対して a_i を $n_{i-1}+n_{i+1}+a_in_i=0$ を満たす整数とする。

定理 5.2. この凸 g角型 P が整星形化可能となるための必要かつ十分な条件は$\Psi(P)$ が非特異扇でありかつ任意の i に対して a_i が上で定めた c_i の倍数となることである。

証明　各 $1 \leq i \leq g$ に対して線分 E_i を含む K の直線を L_i とする。

E_i が第1節で定義した意味で (I) 型の場合 p_i を L_{i-1} と L_{i+1} との交点とする。$L(\mathbf{R}_0 E_i) = \mathbf{R}p_i$ であるから N が $H(\mathbf{R}_0 E_i)_{\mathbf{Z}} + L(\mathbf{R}_0 E_i)_{\mathbf{Z}}$ に等しいのは $N(K) \subset \mathbf{R}(v_i - v_{i-1}) \cap N(K) + \mathbf{Z}(v_i - p_i)$ となるときである。これはある正の整数 k_i が存在して $\{n_i, k_i(v_i - p_i)\}$ が $N(K)$ の基底となることと同値である。

v_i, p_i は共に直線 L_{i+1} 上にあるので $v_i - p_i$ は n_{i+1} のある実数倍である。P が整星形化可能であると仮定する。そのとき、上の条件は満たされしかも n_{i+1} は原始的であるから $n_{i+1} = k_i(v_i - p_i)$ となる。よって $\mathbf{R}_0 n_i + \mathbf{R}_0 n_{i+1}$ は非特異錐体である。容易にわかるように $n_{i-1} = k_i c_i n_i - n_{i+1}$ となり $a_i = -k_i c_i$ であるから E_i に関して必要性がいえる。逆に、もし $\{n_i, n_{i+1}\}$ が $N(K)$ の基底であり $c_i | a_i$ であれば条件は $k_i = -a_i / c_i$ に対して成り立つので E_i に関して十分性もいえる。

(III) 型の場合は k_i を負の整数とすれば同様である。

E_i が (II) 型の場合は $a_i = 0$ である。$L(\mathbf{R}_0 E_i) = \mathbf{R}(v_{i+1} - v_i)$ であるから N が $H(\mathbf{R}_0 E_i)_{\mathbf{Z}} + L(\mathbf{R}_0 E_i)_{\mathbf{Z}}$ に等しいのは $\mathbf{R}_0(v_i - v_{i-1}) + \mathbf{R}_0(v_{i+1} - v_i)$ が非特異錐体のときである。　　　　証明終わり

K の中の凸多角形で上の定理の条件を満たすものを分類することは困難そうである。しかしそのような凸多角形が沢山あることは次の例からわかる。

例 5.3. Φ は $V(K)$ の非特異完全扇ですべての $\sigma \in \Phi$ に対して $-\sigma \in \Phi$ であるとする。$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{2t}\}$ を Φ の1次元錐体を順に並べたものとし、従って各 $i = 1, \cdots, 2t$ について $\gamma_{i-1} + \gamma_i$ は Φ の2次元錐体であるとする。但しここで $\gamma_0 = \gamma_{2t}$ である。$t \geq 3$ と仮定する。各 i に対して n_i を $\gamma_i \cap V_{\mathbf{Z}}$ の原始的な元とし S_i を線分 $\overline{\mathrm{O}n_i}$ とする。ここで O は $V(K)$ の原点である。$i = 1, \cdots, t$ に対して明らかに $n_{i+t} = -n_i$ である。各 $i = 1, \cdots, t$ に対して a_i を $n_{i-1} + n_{i+1} + a_i n_i$ を満たす整数とし $c_i \geq 1$ を a_i の約数とする。そのとき凸 $2t$ 角形 $P := c_1 S_1 + \cdots + c_t S_t$ は $\Psi(P) = \Phi$ となり定理 5.2 の条件を満たす。

例 5.4. $N = \mathbf{Z}^3$ とすると

$$\{(1,0,1), (1,1,1), (0,1,1), (-1,0,1), (-1,-1,1), (0,-1,1)\}$$

で生成される錐体は整星形化可能である。これは例 5.3 の最も簡単な場合である。

例 5.5. $N = \mathbf{Z}^4$ とすると

$$\left\{\begin{array}{llll}
(2,1,6,3), & (2,1,3,2), & (1,0,1,1), & (1,0,0,1) \\
(1,2,6,3), & (1,2,3,2), & (1,1,1,1), & (1,1,0,1) \\
(-1,1,6,3), & (-1,1,3,2), & (0,1,1,1), & (0,1,0,1) \\
(-2,-1,6,3), & (-2,-1,3,2), & (-1,0,1,1), & (-1,0,0,1) \\
(-1,-2,6,3), & (-1,-2,3,2), & (-1,-1,1,1), & (-1,-1,0,1) \\
(1,-1,6,3), & (1,-1,3,2), & (0,-1,1,1), & (0,-1,0,1)
\end{array}\right\}$$

で生成された錐体は 4 次元の整星形化可能である。この錐体は 14 個の側面を持つ。これの鋭双対星形化可能錐体は

$$\left\{\begin{array}{llll}
(1,0,-1,3), & (2,0,-1,4), & (2,2,-1,6), & (1,1,0,3) \\
(0,1,-1,3), & (0,2,-1,4), & (4,-2,-1,6), & (2,-1,0,3) \\
(-1,1,-1,3), & (-2,2,-1,4), & (2,-4,-1,6), & (1,-2,0,3) \\
(-1,0,-1,3), & (-2,0,-1,4), & (-2,-2,-1,6), & (-1,-1,0,3) \\
(0,-1,-1,3), & (0,-2,-1,4), & (-4,2,-1,6), & (-2,1,0,3) \\
(1,-1,-1,3), & (2,-2,-1,4), & (-2,4,-1,6), & (-1,2,0,3)
\end{array}\right\}$$

で生成される。

注意 5.6. 注意 4.7 で述べたように例 5.5 で与えられた整星形化可能錐体から 4 次元半整星形化可能錐体を沢山作ることが出来る。しかしこれ以外の方法で作られた 4 次元の半整星形化可能錐体があるかどうかは不明である。また 5 次元以上で半整星形化可能錐体が存在するかどうかもわかっていない。

例 5.5 で与えた星形化可能錐体とそれから系 4.4 により格子を取りかえて出来た半整星形化可能錐体について佐武の χ_∞ と尾形の $Z(0)$ の計算を行なった。

$$e_0 = (1/2,0,0,0),\ e_1 = (0,1/2,0,0),\ e_2 = (0,0,1/2,0),\ e_3 = (0,0,0,1/2)$$

とし、例 5.5 における元の格子 $N = \mathbf{Z}^4$ に表 1 の第 1 列の各項にある元を付け加えて得られる格子を考えると系 4.4 によりこの錐体は新しい格子についても 半整星形化可能である。実際には $N \subset N' \subset (1/2)N$ を満たす N' は 66 通りあるが錐体の対称性により同値なものを除いて表の 28 通りに還元される。

これらの計算を実行するため対応するカスプ特異点の非特異化を与えるこの錐体の非特異分割を実際に行なう必要があった。χ_∞ の方は [SO, (3.2.4)] にある公式により特異点の例外因子の交点数の計算により求めることが出来る。カスプ特異点のゼータ関数の零での価 $Z(0)$ はベルヌイ多項式の帰納極限として計算出来る [Og], [I2] 。どちらの場合も計算機を用いた。結果は表1の通りである。表の右側は鋭双対錐体と双対格子に関する不変量である。

注意 5.7. 佐武と尾形は [SO, (C3)] においてヒルベルトモジュラー多様体に関するヒルツェブルフの予想の変形として χ_∞ がその双対カスプ特異点の $Z(0)$ に等しいことを $\mathbf{Q}$ 階数 1 の自己双対な均質開錐体から得られるカスプ特異点について予想している。定理 4.10 により鋭双対錐体は双対カスプ特異点を与えるので、表1によりこの関係がこの場合にも成り立っていることがわかる。これにより佐武と尾形の予想は一般の土橋カスプ特異点に対しても成り立っていることが考えられる。

ここでは次のように限定した形で予想をしておく。

予想 5.8. π を 4 次元の半整星形化可能錐体とする。そのとき

$$\chi_\infty(\pi) = Z(0)(\pi^\sharp)$$

が成り立つ。

証明を与えるスペースは無いが次のこともいえる。

定理 5.9. 結合可能な π と ρ とが共に半整星形化可能であれば

$$\chi_\infty(\pi \cup \rho) = \chi_\infty(\pi) + \chi_\infty(\rho)$$

及び

$$Z(0)(\pi \cup \rho) = Z(0)(\pi) + Z(0)(\rho)$$

が成立する。

この定理より例 5.5 を元にして注意 4.7 の方法で作った半整星形化可能錐体では予想の反例は作れないことがわかる。

	元の錐体		鋭双対	
N を拡大させる元	$Z(0)$	χ_∞	$Z(0)$	χ_∞
元の格子	$1/12$	$1/6$	$1/6$	$1/12$
e_0	$1/6$	$1/12$	$1/12$	$1/6$
e_0+e_2	$19/96$	$1/12$	$1/12$	$19/96$
e_0+e_3	$1/24$	$1/12$	$1/12$	$1/24$
$e_0+e_2+e_3$	$-5/96$	$7/12$	$7/12$	$-5/96$
e_2	$-5/96$	$-5/12$	$-5/12$	$-5/96$
e_2+e_3	$19/96$	$1/12$	$1/12$	$19/96$
e_3	$1/24$	$1/3$	$1/3$	$1/24$
e_0, e_1	$1/3$	$1/24$	$1/24$	$1/3$
e_0+e_2, e_1	$19/48$	$1/24$	$1/24$	$19/48$
e_0+e_3, e_1	$1/12$	$1/24$	$1/24$	$1/12$
$e_0+e_2+e_3, e_1$	$-5/48$	$13/24$	$13/24$	$-5/48$
e_0+e_3, e_1+e_2	$1/48$	$7/24$	$7/24$	$1/48$
$e_0+e_2+e_3, e_1+e_2$	$1/48$	$7/24$	$7/24$	$1/48$
e_0, e_2	$7/48$	$-5/24$	$-5/24$	$7/48$
e_0+e_3, e_2	$-11/48$	$1/24$	$1/24$	$-11/48$
e_0, e_2+e_3	$7/48$	$7/24$	$7/24$	$7/48$
e_0+e_3, e_2+e_3	$13/48$	$1/24$	$1/24$	$13/48$
e_0, e_3	$1/12$	$1/6$	$1/6$	$1/12$
e_0+e_2, e_3	$1/48$	$5/12$	$5/12$	$1/48$
e_2, e_3	$1/48$	$-1/12$	$-1/12$	$1/48$
e_0, e_1, e_2	$13/24$	$-5/48$	$-5/48$	$13/24$
e_0+e_3, e_1, e_2	$-5/24$	$7/48$	$7/48$	$-5/24$
e_0, e_1, e_2+e_3	$1/24$	$19/48$	$19/48$	$1/24$
e_0+e_3, e_1, e_2+e_3	$7/24$	$7/48$	$7/48$	$7/24$
e_0, e_1, e_3	$1/6$	$1/12$	$1/12$	$1/6$
e_0+e_2, e_1, e_3	$1/24$	$1/3$	$1/3$	$1/24$
e_0, e_2, e_3	$1/24$	$1/12$	$1/12$	$1/24$

表 1: 例 5.5 についての χ_∞ と $Z(0)$

参考文献

[I1] M.-N. Ishida, Torus embeddings and dualizing complexes, Tohoku Math. J. **32**(1980), 111-146.

[I2] M.-N. Ishida, T-complexes and Ogata's zeta zero values, in Automorphic forms and Geometry of arithmetic varieties (Y. Namikawa and K. Hashimoto eds.), Adv. Studies in Pure Math. **15**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1989, 351-364.

[M] W. Müller, Manifolds with Cusps of Rank One, Lecture Notes in Math. 1244, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1987.

[Oda] T. Oda, Convex bodies and Algebraic geometry, An introduction to the theory of Toric varieties, Ergebnisse der Math.(3) **15**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1988.

[Og] S. Ogata, Special values of zeta functions associated to cusp singularities, Tohoku Math. J. **37**(1985), 367-384.

[Vin] È.B. Vinberg, Discrete linear groups generated by reflections, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **35**(1971), 1083-1119.

[S] I. Satake, On numerical invariants of arithmetic varieties of $\mathbf{Q}$-rank one, Automorphic Forms of Several Variables, Taniguchi Symposium, Katata, 1983 (I. Satake and Y. Morita, eds.), Progress in Math. 46, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1984. 353-369.

[SO] I. Satake and S. Ogata, Zeta functiona associated to cones and their special values, in Automorphic forms and Geometry of arithmetic varieties (Y. Namikawa and K. Hashimoto eds.), Adv. Studies in Pure Math. **15**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1989.

[T] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. **35**(1983), 607-639.

ヨーロッパでの研究集会の報告

西村純一（京大 理）

0. 序。

この春から夏にかけヨーロッパに滞在し、三つの研究集会に出席しましたので、報告します。

第一節では、各研究集会の雰囲気、概略を述べます。第二節で、印象に残った講演の中からいくつか結果を紹介します。第三節は、各研究集会のプログラム等、参考資料をまとめたものです。

どの研究集会も、後述します様に興味深い講演が多く、非常に有意義でした。これらの研究集会は今後も数年に一度開かれる予定だそうですので、機会があれば是非参加して下さい。

1. 研究集会の概略。

a) COCOA II 。

COCOA II は、5月29日から6月3日までイタリアのジェノバ（大学数学教室）に於て開催されました。正式の集会名は、Meeting on Computer and Commutative Algebra です。参加者は、イタリア国外から約50名、国内から約40名で、専門分野は多種多様でした。講演は、コンピューター代数学とでも呼ぶのでしょうか、代数学それぞれの分野に於ける理論とコンピューターを用いた実践との話題を扱ったものがほとんどでした。具体的には、代数方程式系の解を求めるアルゴリズム、イデアル論（Gröbner 基底に関する解説、理論、応用プログラム–Macaulay や CoCoA–、Nullstellensatz 、等)、組合せ論、代数幾何学（Castelnuovo's regularity 、等）に関するもので、その様子は第三節のプログラムを参照して下さい。（この集会では、Coffee Break のことを Cocoa Break と呼びます。）しかし、講演以上に興味深かったのは、**Macaulay** 、**CoCoA** 、等のデモンストレーションでした。これらのソフトは、能力の限界があるにせよ、多項式環の（斉次）イデアルの syzygy 、free resolution 、depth 、共通イデアル、イデアル商、Hilbert 多項式（函数）を "計算 "します。第三節に **CoCoA** の概説（のコピー）を載せておきます。

b) Algebraic Geometry, Commutative Algebra, Ring Theory　Bucharest, 1989 。

「Algebraic Geometry, Commutative Algebra, Ring Theory　Bucharest, 1989」は、7月3日から8日までルーマニアのブカレスト（大学数学教室）に於て開催され、参加者はルーマニア国外から約50名、国内から約80名でした。代数幾何学、可換代数学、環論の三つの分科会が同時に行われ、残念なことにプログラムの都合上、他の分科会

の講演を聞くことが出来ませんでした。可換代数学分科会では、Urlich 、Bruns をはじめ水準以上の講演が大多数でした。詳しくは第二節での結果の紹介、第三節のプログラムを参照して下さい。

c) Kommutative Algebra und algebraische Geometrie 。

「Kommutative Algebra und algebraische Geometrie 」は、8 月 6 日から 12 日まで西ドイツのオーベルヴォルファッハ（数学研究所）に於て開催され、可換代数学、代数幾何学を専攻する約 45 名（西ドイツ国外から約 25 名、国内から約 20 名）が参加しました。さすがと感心されられる講演がいくつかありましたし、第一線で活躍中の研究者との一週間の共同生活も刺激的でした。不十分な内容で申し訳ありませんが、第二節での結果の紹介、第三節のプログラムをも参考にして下さい。

2. 講演の要約（結果の紹介）。

2.1 Gröbner 基底。

Traverso 、Weispfenning 、Buchberger 、Winkler 、Gianni 等は Gröbner 基底とアルゴリズムの速さ、複雑さに関する理論的、及び実践的（= ソフトの計算速度）話題について、また、Sturmfels は Knuth-Robinson-Schensted 対応について、Billera は単体的復体上の高々 k 次の C^r 級（ piecewise ）多項式函数からなるベクトル空間の次元の計算への Gröbner 基底の応用とスーパーコンピューターを用いた計算（速度）について講演しました。

2.2 Castelnuovo's regularity 。

この項は、Nagel の話を主に、Giusti 、Fröberg の講演内容を加えています。

K が代数閉体で、$S = K[X_0, \dots, X_n]$ 、$A = S/\mathbf{a} = \oplus_{i \geq 0} A_i$、$P = \oplus_{i>0} A_i$ である時、次数付き有限生成 A-加群 M に対し、$e(M) = \sup\{t \in \mathbf{Z} \mid M_t \neq (0)\}$ と表し、M の regularity $\mathrm{reg}(M)$ を次のように定義します。

定義。 $\mathrm{reg}(M) = \sup\{i + e(H^i_P(M)), i \in \mathbf{Z}\} = \sup\{e(\mathrm{Tor}^S_i(K, M)) - i, i \in \mathbf{Z}\}$

この時、次の Eisenbud（1984）による予想が知られています。

予想。 X が P^n で非退化、既約、且つ被約な代数多様体であれば

$$\mathrm{reg}(X) \leq \deg X - \mathrm{codim}(X) + 1$$

既に知られている結果は、

a) X が曲線の場合、予想は正しい（1983）。

b)　X が非特異曲面で K の標数が 0 の場合、予想は正しい（1987）。

c)　K の標数が 0 の場合、ほとんど全ての P^5 内の三次元多様体について、予想は正しい（1988）。

更に、次の定理が示されます。

定理（Stückrat-Vogel）。　X が P^n の代数多様体で $\dim X = d$ であれば、

a)　任意の $c \geq \deg X$ について

$$\mathrm{reg}(X) \leq c + \sum_{i=1}^{d} \sharp\{t \in \mathbf{Z} \mid t \geq c - i, H_P^i(S/I(X))_t \neq 0\}$$

b)　更に、X が P^n で非退化、既約、且つ被約であれば、任意の $c > \frac{\deg X - 1}{\mathrm{codim} X}$ である整数に対し、上の不等式が成立する。

定理。　X が P^n の被約代数多様体で $\dim X = d$ であれば、

a)　任意の $c \geq \deg X$ について

$$\mathrm{reg}(X) \leq c + \sum_{i=1}^{d-1} \sharp\{t \in \mathbf{Z} \mid t \geq c - i, H_P^i(S/I(X))_t \neq 0\}$$

b)　更に、X が P^n で非退化、既約、且つ被約であれば、任意の $c > \deg X - \mathrm{codim} X$ に対し、同じ不等式が成立する。

c)　また、X が P^n で非退化、非特異であれば、任意の $c > \deg X - \mathrm{codim} X$ に対し、

$$\mathrm{reg}(X) \leq c + \sum_{i=1}^{d-2} \sharp\{t \in \mathbf{Z} \mid t \geq c - i, H_P^i(S/I(X))_t \neq 0\}$$

定理（Sjügen）。　$\dim A \leq 1$ で D がイデアル a の生成系の次数の上限であれば、

$$\mathrm{reg}(A) \leq (n+1)D - n$$

最後に

予想。　A が被約であれば $\mathrm{reg}(A) \leq \mathrm{mult}(A) - n + \dim A$

2.3　Bruns の結果。

R が可換環、X が不定元 x_{ij} を成分に持つ $m \times n$ 行列、$S = R[X] (= R[x_{ij}])$ である時、$I_t = I_t(X)$ で X の t-次小行列式全体が生成する S のイデアルを表します。また $R(I_t) = \oplus_{i=0}^{\infty} I_t^i$、$Gr_{I_t}(S) = \oplus_{i=0}^{\infty} I_t^i / I_t^{i+1}$ で、それぞれ S の I_t による Rees 環、次数環を表します。この時、以下の定理が示されます。

定理（cf. De Concini-Eisenbud-Processi）。 R が整域で、$\min\{t!,(m-t)!,(n-t)!\}$ が R の可逆元であれば

$$I_t^s=\bigcap_{j=1}^{t} I_j^{((t-j+1)s)}$$

系。 R が体で、定理の条件を満たせば I_t^s は整閉。従って、$R(I_t)$ は正規。

定理。 R が一般の整域であれば、$\overline{I_t^s}=\bigcap_{j=1}^t I_j^{((t-j+1)s)}$。

定理。 R が整域で $\min\{t!,(m-t)!,(n-t)!\}$ が R の可逆元（$1<t<\min\{m,n\}$）である時

a) $I_tR(I_t)$ は divisorial イデアル。
b) $I_tR(I_t)$ は丁度 t 個の極小素因子 $P_1,\ldots,P_t$ を持ち、$P_i\cap S=I_i$。
c) $I_tR(I_t)=\bigcap_{i=1}^t P_i^{(t-i+1)}$。

定理。 R が標数 0 の体であれば、$R(I_t)$、$Gr_{I_t}(S)$ は Cohen-Maculay 環。

注意。 R が標数 2 の体、X が 4×4 行列である時、$\mathrm{depth}R(I_2)=1$。

定義。 J が可換環 A のイデアルである時

$$\mathrm{ara}(J)=\min\{k\mid\sqrt{J}=\sqrt{(f_1,\ldots,f_k)}\}$$

定理。 $\mathrm{ara}(I_t)=mn-t^2+1$。

系。 R が代数閉体であれば、S/I_t が集合論的完交環である必要十分条件は、$t=1$ または $m=n=t$ 即ち S/I_t が完交環。

2.4 Urlich の結果。

R が可換環、X が不定元 x_{ij} を成分に持つ $(2t+1)\times(2t+1)$ 交代行列、$S=R[X](=R[x_{ij}])$ である時、$Pf_{2t}=Pf_{2t}(X)$ で X の $2t$-Pfaffian 全体が生成する S のイデアルを表します。この時

定理。 a) Pf_{2t}^i の（標数に依らない）有限自由分解 D^i が構成できる。
b) $\mathrm{depth}S/Pf_{2t}^i=\dim S-1-2\min\{n,[\frac{i+1}{2}]\}$。

定理。 A が正則局所環の準同型像で 標数 0 の体を含み、licci（= 完交環の linkage class の元）であり、$\dim A\geq 5$ または $\dim A\geq 4$ 且つ A が Gorenstein 環であれば、A は parafactorial。

系。 A が正則局所環の準同型像で 標数 0 の体を含み、licci であり (UFD_4) を満たす（即ち、A の高さ 4 以下の素イデアル $\mathfrak{p}$ による局所化 $A_{\mathfrak{p}}$ が素元分解環）か、A が

(UFD$_3$) を満たし、且つ A が Gorenstein 環であれば、A は素元分解環。

2.5 Rotthaus の結果。

定理。 Approximation Property を持つ局所環は Excellent Hensel である。

注意。 既に、Artin, Popescu, Rotthaus 等により、

定理。 Excellent Hensel 局所環は Approximation Property を持つ。

ことが証明されていますので、結局、

定理。 局所環 A が Approximation Property を持つための必要十分条件は、A が Excellent Hensel であること。

Meeting on
Computer and Commutative Algebra
COCOA II

Department of Mathematics   University of Genoa
May 29 - June 3, 1989

SPONSORED by
Ministero della Pubblica Istruzione
Consiglio Nazionale delle Ricerche
Università di Genova
Comune di Genova
Cassa di Risparmio di Genova e Imperia
C.O.L. ITALIA 90 Ditta V.E.L.I.E.R. (wines, cocoa Bensdorp,...)
Bubble Viaggi (Travel Agency)

Organizing Committee:
D. Arezzo, A. Giovini, T. Mora, G. Niesi, L. Robbiano, G. Valla

Monday May 29

09.00 - 10.00	Registration	
10.15 - 10.30	Opening Remarks	
10.30 - 11.20	C. Traverso (Pisa)	A new critical pair completion algorithm for standard and Gröbner bases
11.30 - 12.20	V. Weispfenning (Passau)	Comprehensive Gröbner bases
14.30 - 15.20	M. Giusti (Palaiseau)	On the Castelnuovo regularity for curves
15.30 - 16.20	W. Vasconcelos (Rutgers)	The equations of commuting pairs of matrices
16.20 - 16.50	Cocoa Break	
16.50 - 17.40	B. Sturmfels (Linz)	Gröbner bases of determinantal ideals
17.50 - 18.40	T. Recio (Santander)	Towards a catalogue of shapes for plane real algebraic closed connected curves with double points

Tuesday May 30

09.15 - 10.05	B. Buchberger (Linz)	Gröbner bases and determinant polynomials
10.05 - 10.30	Cocoa Break	
10.30 - 11.20	L.J. Billera (Rutgers)	Gröbner bases methods for multivariate splines
11.30 - 12.20	A. Giovini - G. Niesi (Genova)	CoCoA System Presentation
14.30 - 16.30	Presentation of Software Systems	
18.00	Drink at the City Hall	

Wednesday May 31

09.15 - 10.05	D. Lazard (Paris)	Solving algebraic systems
10.05 - 10.30	Cocoa Break	
10.30 - 11.20	J. Heintz (Buenos Aires)	The complexity of the membership problem for polynomial ideals
11.30 - 12.20	A. Galligo (Nice)	What property of local cohomology is used in the proof of the sharp effective Nullstellensatz?

Afternoon	Trip to Riviera di Ponente
Evening	Social Dinner (Ristorante Claudio, Bergeggi)

Thursday June 1

09.15 - 10.05	B. Trager (Yorktown)	Good reduction of curves and applications
10.05 - 10.30	Cocoa Break	
10.30 - 11.20	F. Winkler (Linz)	A p-adic approach to the computatiion of Gröbner bases
11.30 - 12.20	M. Sweedler (Cornell)	Bases for subalgebras
14.30 - 15.20	H.M. Möller (Hagen)	On solving systems of algebraic equations by decomposition
15.20 - 16.00	Cocoa Break	
16.00 - 18.30	Demos	

Friday June 2

09.15 - 10.05	M.F. Roy (Rennes)	Effective real algebra and geometric applications
10.05 - 10.30	Cocoa Break	
10.30 - 11.20	J.J. Risler (Paris)	Connected components of real algebraic and semi-algebraic sets
11.30 - 12.20	W. Lassner (Leipzig)	Ordering problems and symbol representation in envelopping algebras
14.30 - 15.20	G. Carra'Ferro (Catania)	Minimal Hilbert polynomial in algebraic geometry and differential algebra
15.30 - 16.20	P. Gianni (Pisa)	Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering
16.20 - 16.50	Cocoa Break	
16.50 - 17.40	M. Stillman (Cornell)	Finding the image of a polynomial map corresponding to a line bundle
17.50 - 18.40	D. Bayer (Harvard)	How to culculate multiplicities

Saturday June 3

Crazy Weekend : An informal microprogram in Commutative Algebra

NATIONAL INSTITUTE
FOR SCIENTIFIC
AND TECHNICAL CREATION
DEPARTMENT
OF MATHEMATICS

UNIVERSITY
OF BUCHAREST
FACULTY
OF MATHEMATICS

ROMANIAN SOCIETY OF MATHEMATICAL SCIENCES

ALGEBRA AND ALGEBRAIC GEOMETRY

Bucharest July 3 – 8, 1989

ORGANIZING COMMITTEE

T. Albu, L. Bădescu, C. Bănică, S. Basarab, A. Buium,
A. Constantinescu, P. Ionescu, C. Năstăsescu, H. Pop,
D. Popescu, N. Radu

Secretary of committee : A. Zaharia

Collaborators : N. Buruiană, M. Cipu, C. Ionescu, M. Tibăr

CONFERENCES

Algebraic Geometry : Amphitheatre "S. Haret"

Commutative Algebra : Room 1

Ring Theory : Room 3

Communications in other fields of Algebra (usually in Romanian language): Room 12

GENERAL INFORMATIONS

The programme is a preliminary version.

All sessions will take place at the Faculty of Mathematics of the University of Bucharest, 14, Academiei Street.

Wednesday, July 5 : Excursion

Thursday, July 6, 18.00 : Official dinner.

COMMUTATIVE ALGEBRA
(Room 1)

MONDAY, July 3

09.30 - 10.15	J. Nishimura (Kyoto)	Some examples of noetherian rings.
10.30 - 11.15	J. Backelin (Stockholm)	Invariants rings ; Veronese subrings and Golod-Lange attachedness.
11.45 - 12.30	R. Achilles (Halle)	On isolated intersection in complete analytic geometry.
16.30 - 17.15	U. Nagel (Halle)	Castelnuovo's Regularity and Hilbert functions.
17.30 - 18.00	T. Ogoma (Kochi)	A note on the syzygy problem.

TUESDAY, July 4

09.30 - 10.15	J. Herzog (Essen)	The Grothendieck group of a quotient singularity defined by a finite abelian group.
10.30 - 11.15	W. Bruns(Osnabrück)	Algebras defined by power of determinantal ideals.
11.45 - 12.30	B. Urlich (Michigan)	Resolution of maximal Pfaffian ideals.
16.30 - 17.15	J. Strooker (Utrecht)	
17.30 - 18.00	A. Naoum (Bagdad)	On the ring of homomorphisms of finitely generated modules.
18.00 - 18.15	M. Cipu (Bucharest)	Reduction ideals for maximal Buchsbaum modules.

THURSDAY, July 6

09.30 - 10.15	C. Ionescu (Bucharest)	Finiteness of the integral closure of a noetherian ring.
10.30 - 11.15	R. Fröberg (Stokholm)	Castelnuovo bounds for 1-dim. graded algebras.
11.45 - 12.30	H.B. Foxby (Kobenhavn)	Fibres of homomorphisms of local rings.
16.30 - 17.15	H. Matsumura (Nagoya)	Report on the work of Hashimoto-Kurano on determinantal ideals.

FRIDAY, July 7

09.30 - 10.15	J. Herzog (Essen)	A homological approach to symbolic powers.
10.30 - 11.15	M. Roczen (Berlin) - D. Popescu (Bucharest)	On the Brauer-Thrall conjecture.
11.45 - 12.30	H. Lindel (Münster)	On cancellation properties of projective modules.
16.30 - 17.15	W. Spangher (Trieste)	Some remarks on a classical theorem of M. Kneser.
17.30 - 18.15	Discussions :	Open questions in commutative algebra.

SATURDAY, July 8

09.30 - 10.15	S. Basarab (Bucharest)	Morgan-Shalen compactification over local rings.
10.30 - 11.00	L. Panaitopol - D. Stefănescu (Bucharest)	Applications of the Newton polygon.

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Lorenzenhof
D-7620 Oberwolfach-Walke
Phone: (0)7834/979-0

Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

August 6 (arrival day) – August 12, 1989 (departure day)

Chairman: E. Kunz, Regensburg
H.-J. Nastold, Münster
L. Szpiro, Paris

Monday August 7

09.30 - 10.30 Sh. Abhyankar (West Lafayette)
Fundamental groups of algebraic varieties
10.45 - 11.35 R.Y. Sharp (Sheffield)
Generalized Hugh complex
11.45 - 12.30 F. Ischebeck (Münster)

15.30 - 16.15 C. Rotthaus (East Lansing)
Rings with approximation property
16.30 - 17.15 B. Urlich (East Lansing)

17.30 - 18.15

Tuesday August 8

09.00 - 10.00 D. Eisenbud (Waltham)
Double structures on P^1 (ribbons)
10.15 - 11.15 E.G. Evans (Urbana)
Betti numbers of modules of finite length
11.30 - 12.30 R.-O. Buchweitz (Scarborough, Ontario)

15.30 - 16.15 I. Vainsencher (Recife)
The Hilbert scheme component of elliptic quantic curves
16.30 - 17.15

17.25 - 18.15 P. Roberts (Salt Lake City)

Wednesday August 9

09.00 - 10.15 S. Kleiman (Cambridge)
Difference and double points
10.30 - 11.15 M. Brodmann (Zürich)
Kohomologietheorie projectiver Varietäten
11.30 - 12.15 W. Bruns (Vechta)

Thursday August 10

09.00 - 09.50 H. Lindel (Münster)
On a question of Suslin concerning stably free modules
10.00 - 10.30 Lütkebohmert (Münster)

10.45 - 11.30 J. Nishimura (Kyoto)
Some examples of noetherian rings
11.45 - 12.30 R. Waldi (Regensburg)
The Grothendieck group of a quotient singularity defined by a finite group

15.30 - 16.20 K. Nishida (Köln)
The finite generation of symbolic Rees algebras
16.30 - 17.00 G. Horrocks (Newcastle)

17.15 - 17.45 W. Vasconcelos (Rutgers)
Commuting varieties of Lie algebras
17.55 - 18.35 J. Herzog (Essen)
Linear maximal Cohen-Macaulay modules

Friday August 11

09.00 - 09.45 L. Avramov (Sofia)
Homomorphisms locally of finite flat dimension
10.00 - 10.45 H.B. Foxby (Kobenhavn)
Bass series of local ring homomorphisms of finite flat dimension
11.00 - 11.35 J.R. Strooker (Utrecht)

11.45 - 12.30 D. Ferrand (Rennes)

15.30 - 16.15 J.F. Boutot (Strasbourg)
p-adic uniformization of Shimura varieties
16.30 - 17.15 G. Lyubeznik (Chicago)
The topology of algebraic varieties of small codimension in projective space

CoCoA

A Macintosh System for Computing in Commutative Algebra

System Design and Implementation by
Alessandro Giovini & Gianfranco Niesi
Department of Mathematics, University of Genova, Italy

CoCoA is a small special-purpose system for COmputing in COmmutative Algebra, which runs on any Macintosh with at least 512K of RAM.

CoCoA has been designed for offering the maximum ease of use and flexibility to the mathematician with little or no knowledge of computers.

CoCoA is capable of performing both simple and sophisticated operations on various data connected with *multivariate polynomial rings* (data can be *polynomials, ideals, modules* and *matrices of polynomials*); polynomials may have coefficients either in the field Q of rational numbers or in the residue ring Z_p.

Every operation is performed within a "current ring" (which by default is Q[t, x, y, z]); the user can easily change this ring by just pulling down a menu and editing some values.

The advanced user has also the possibility of changing the values of some special parameters (which affect the way in which some specialized algorithms work). The default values supplied by the system however suffice in most cases for an optimum use of the system.

The user can open up to 8 standard text–editing Macintosh windows in which data can be entered in a very simple format. Several kinds of computations can be performed on the entered data and the results can be stored for later use. If the user modifies the ring, then the already entered or computed data can be easily transferred to the new ring (when that makes sense).

The system is capable of performing *basic* operations, as for example the following ones:

- sums, products, powers, derivatives, gcd, lcm of polynomials,
- sums, products, powers of ideals,
- sums of modules,
- sums, products, powers, determinants of matrices,
- operations between heterogeneous values, like the product and the division between an ideal and a polynomial, etc.

Besides these, more advanced operations like the following ones are available:

- intersection and division of ideals;
- syzygies of ideals or of modules;
- resultant of two polynomials;
- elimination of variables from an ideal;
- Poincarè series and Hilbert function of an ideal;
- Gröbner basis of ideals and modules;
- Standard basis of ideals.

The syntax for the expressions that the system can evaluate has been chosen to be as close as possible to the usual mathematical notation; the system displays the exponents as superscripts and the indexes as subscripts, taking advantage of the graphics capabilities of the Macintosh; for example, to eliminate the indeterminate t from the ideal generated by the three polynomials $t^{31} + t^6 - x$, $t^8 - y$ and $t^{10} - z$ one has simply to evaluate the following expression (whose result is a value of type ideal):

Elim(t, Ideal($t^{31} + t^6 - x, t^8 - y, t^{10} - z$)).

The core of the system is an implementation of Buchberger's algorithm for computing the Gröbner basis of an ideal; the algorithm has been optimized in several senses and it is used as a 'building block' for some of the operations that the system is capable of doing; for most uses the user can however completely ignore the theory of Gröbner bases and even their existence: the system will do all the necessary 'Gröbner stuff' in the background. However, for an optimum use of the system (and of some system parameters) some knowledge of the theory may be useful.

The system is *freely* distributed to anyone who requests it by sending a blank diskette at the address below.

Alessandro Giovini or Gianfranco Niesi,
Department of Mathematics, University of Genova,
viale Leon Battista Alberti 4, 16132, Genova – ITALY.

Questions and suggestions can be also sent to the following electronic mail address:

cocoa@igecuniv.bitnet

The system is continuously evolving; known users will be kept up to date about new releases via EMail.

Certain ascending chain of local rings

By

Masayoshi NAGATA

In this article, we mean by a ring a commutative ring with identity, and by a local ring a noetherian ring with only one maximal ideal. A quasi-local ring is a ring with only one maximal ideal. When we say that (A, m) is a (quasi-)local ring, we understand that A is a (quasi-)local ring with maximal ideal m.

Assume that an ascending chain of local ring (A_i, m_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ is given. Then one sees easily that the union B of all A_i is a quasi-local ring with maximal ideal $M = \cup m_i$. Surely, there are many examples of such chains so that B is not noetherian.

The purpose of this article is to discuss sufficeient conditions for B to be noetherian.

The writer is conjecturing as follows:

Conjecture. Assume that the ascending chain of local rings (A_i, m_i) satisfies the following conditions:

(1) $m_i A_{i+1} = m_{i+1}$ for all $i = 1, 2, \ldots$, and

(2) each A_{i+1} is flat over A_i $(i = 1, 2, \ldots)$,

then the union B is noetherian.

At the moment, the writer is not able to prove this conjecture, and is proving the following theorem.[1]

1) Motivation of this study was originated by an oral quesition raised by Professor Kashiwara of R.I.M.S. asking the theorem under a stronger condition that each A_i is regular.

Theorem. Under the circumstances of the conjecture, assume furthermore that:

(3) Each A_i is Cohen-Macaulay,

then the union B is noetherian.

1. Some well known results.

The following lemmata are well known.[2]

Lemma 1. If a module M is flat over a ring R and if $I_1, \ldots I_s$ are ideals of R, then the following equalities hold:

(1) $(I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_s)M = I_1M \cap I_2M \cap \ldots \cap I_sM$,

(2) $(I_1 : aR)M = I_1M : aM$ for any $a \in R$.

Furthermore, the module M/I_1M is flat over R/I_1.

Lemma 2. Assume that local ring (A, m) contains another local ring (B, n). If $nA = m$ and if Krull-dim A = Krull-dim B, then the multiplicity $\mu(A)$ of A is not greater than the multiplicity $\mu(B)$ of B. If furthermore, A is flat over B, then $\mu(A) = \mu(B)$

Lemma 3. Let $Q_1 \cap \ldots \cap Q_t$ be a shortest primary decomposition of zero in a local ring A, and assume that Krull-dim A/Q_i = Krull-dim A if and only if $i \leq u$ $(\leq t)$. Then

$$\sum_{i \leq n} \text{length } A_{\sqrt{Q_i}} \leq \mu(A).$$

Lemm 4. A ring R is noetherian if every prime ideal of R is finitely generated.

---

2) See, for inst., Nagata, Local Rings, John Wiley 1962 (repr. ed., Kreager)

Lemma 5. Assume that A is a Cohen-Macaulay local ring. Then for any prime ideal P of height zero, it holds that

$$\text{Krull-dim } A/P = \text{Krull-dim } A.$$

As an immediate consequence of Lemma 2 and Lemma 3 above, we have

Proposition. Under the circumstances of the conjecture, we see that:

(1) Krull-dim $A_{i+1} \leq$ Krull-dim A_i for each $i = 1, 2, \ldots$,

(2) letting p_i be the set of prime ideals P of A_i such that Krull-dim A_i/P = Krull-dim A_1, each p_i is a finite set and

$$\sum_{P \in p_i} \text{length } (A_1)_P \leq \mu(A_i).$$

Lemma 6. If a local ring A donimates a local ring B and if A is flat over B, then A is faithfully flat over B.

Lemma 7. If ring R contains a ring B and is faithfully flat over B then, for any ideal I of B, it holds $IR \cap B = I$.

2. Proof of the theorem.

Let P be a prime ideal of the union B, and it suffices to show that P is finitely generated (Lemma 4). Set $P_i = P \cap A_i$ for each i. Then the sequence of Krull-dim A_i/P_i is non-increasing. Thus, there is a number N such that Krull-dim A_N/P_N = Krull-dim A_i/P_i for all $i > N$. Then observing the chain of A_i with $i \geq N$, we may assume that $N = 1$. If height $P_1 = h$ is not zero, then we take h elements $a_1, \ldots, a_h$ of P_1 so that height$(\sum_{j=1}^{h} a_j A_1) = h$. Then, considering the chain of $A_i/(\sum_{j=1}^{h} a_i A_i)$, we may assume that $h = 0$.

Consider height zero prime ideals in A_i. Then, by Lemma 5 and Proposition, we can choose another sarting A_i, and we may assume that

(*) Each A_i has exactly m prime ideals of height zero, say $P_{i1}, \dots, P_{im}$ and (i) $P_{i+1,i} \cap A_i = P_{ij}$ and (ii) length $(A_{i+1})_{P_{i+1,j}}$ = length $(A_i)_{P_{ij}}$ for all i, j; $P_i = P_{i1}$.

There is an element a of A_1 so that $P_{11} = 0 : aA_1$. Then, $0 : aA_i$ is a primary ideal belonging to P_{i1} (Lemma 1). Then, considering its length in $(A_i)_{P_{i1}}$, we see that $P_{i1} = 0 : aA_i$ for all i (Lemmata 6,7). Thus P must be generated by $0 : aA_1$. This proves that P is finitely generated, and we complete the proof.

Addendum: After the symposium, the author was told by Shiro Goto that the conjecture has been proved in Grothendieck's EGA Chap. 0_{III} Lemma 10.3.1.3.

Syzygies and Gorenstein rings

星野光男　筑波大数学

§1. 序

本稿を通じて、A は両側 Noether 環を表すものとする。また、$(\ )^* = \mathrm{Hom}_A(-, A)$ とし、$E(\ )$ は入射包絡を表す。

有限生成左 A-加群の category を $\mathrm{mod}A$ とし、各 $n \geq 0$ に対して $\mathrm{mod}A$ の full subcategory $\mathrm{syz}^n A$ を次の様に定義する: $\mathrm{syz}^0 A = \mathrm{mod}A$、$n > 0$ については、$0 \to M \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0$, P_i はすべて射影的，なる完全列が $\mathrm{mod}A$ の中に存在する様な $M \in \mathrm{mod}A$ の全体として $\mathrm{syz}^n A$ を定義する。また、reflexive な $M \in \mathrm{mod}A$ の全体を $\mathrm{ref}A$ とする．右 A-加群については、左 A^{op}-加群とみて、同様に定義するものとする．

1.1. 次の2つの問題について考察する。

<u>問題</u>1。 ref A が拡大で閉じるのは何時か。

<u>問題</u>2。 すべての $n \geq 0$ に対して $\mathrm{syz}^n A$ が拡大で閉じるのは何時か。

ここに、full subcategory $\mathcal{C} \subset \mathrm{mod}\, A$ が拡大について閉じているとは、$\mathrm{mod}\, A$ の任意の完全列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ に対して、M_1、$M_3 \in \mathcal{C}$ なら $M_2 \in \mathcal{C}$ が成立することである。

1.2. 上の問題1は次の予想と関係する。

<u>中山予想</u>. 極小入射分解 $0 \to {}_AA \to E_0 \to E_1 \to \cdots$ において、すべての E_i が平坦ならば、A は QF（即ち、${}_AA$ は入射的）であろう。

注意1. 政池 [8、Thm 2] と星野 [4] により、$i = 0$、1 に対して E_i が平坦なら A は Artin になる。従って、上の予想は局所環に対しては正しい。

注意2. Aが体k上有限次元の多元環で、すべての$i \geq 1$に対して$\mathrm{Ext}_A^i(DA, A) = 0$, $D = \mathrm{Hom}_k(-, k)$, のとき、太刀川[10]によれば、$\mathrm{End}_A(A \oplus DA)$は上の予想の条件をみたす。

問題1は次の事実に基づく。

<u>命題</u>. Aが体k上有限次元の局所多元環で、$i = 1, 2$に対して$\mathrm{Ext}_A^i(DA, A) = 0$のとき、$A$がQFであるためには$\mathrm{ref}\,A$が拡大で閉じることが必要充分。

1.3. 森田[9]に従い、$E({}_AA)$が平坦のときAをQF-3と呼ぶことにする。Aが可換のとき、QF-3であるとは、全商環がGorensteinのことである。QF-3の"高次元"への拡張、即ち、Gorensteinの非可換への拡張を考える。1つの試みとして、岩永[7]は$\mathrm{inj\,dim}_A A = \mathrm{inj\,dim}\, A_A < \infty$なる環について考察したが、$\mathrm{inj\,dim}_A A = \mathrm{inj\,dim}\, A_A \leq 1$の場合を除いては、そ

の様な環は必ずしも"良い"性質を持たない。例えば、$\mathrm{inj\,dim}_A A = \mathrm{inj\,dim}\, A_A = 2$ であって $\mathrm{syz}^1 A$ が拡大で閉じないものが存在する。他方、可換Gorenstein環に対して、問題2は肯定的である。

§2. 主な結果

筆者の論文[5, 6]の主な結果を紹介する。左または右A-加群Mに対し、$0 \leq {}^\forall i < n$ に対して $\mathrm{Ext}_A^i(M, A) = 0$ の時 $\mathrm{grade}\, M \geq n$、$1 \leq {}^\forall i < n$ に対して $\mathrm{Ext}_A^i(M, A) = 0$ の時 reduced grade $M \geq n$ と定義する。$\mathrm{grade}\, M \geq 0$, reduced grade $M \geq 1$ は常に成立することに注意されたい。

2.1 ([5, Prop 2.1])。次は同値

(1) $\mathrm{syz}^1 A$ が拡大で閉じる。

(2) ${}^\forall N \in \mathrm{mod}\, A^{op}$ に対して、$\mathrm{grade}\, \mathrm{Ext}_A^1(N, A) \geq 1$。

2.2 ([5, Thm 2.3])。次は同値

(1) $\mathrm{syz}^1 A$, $\mathrm{ref}\, A$ が拡大で閉じる。

(2) $i = 1, 2$、$^\forall N \in \mathrm{mod}\, A^{op}$ に対して, $\mathrm{grade}\, \mathrm{Ext}_A^i(N, A) \geq i$.

2.3([5, Prop 1.5, 1.6])。 極小入射分解 $0 \to A_A \to E_0 \to E_1 \to \cdots$ に対して、次が成立

(1) $\mathrm{weak\,dim}\, E_0 \leq 1$ (例えば $\mathrm{inj\,dim}_A A \leq 1$ の時) なる $\mathrm{syz}^1 A$ は拡大で閉じる.

(2) $i = 0, 1$ に対して $\mathrm{weak\,dim}\, E_i \leq 2$ (例えば $\mathrm{inj\,dim}_A A \leq 2$ の時) なる $\mathrm{ref}\, A$ は拡大で閉じる.

2.4([6, Thm 2.1])。 $^\forall n \geq 2$ に対して次は同値

(1) $2 \leq {^\forall i} \leq n$, $^\forall M \in \mathrm{syz}^i A$ に対して、M は reflexive で reduced grade $M^* \geq i - 1$。

(2) $2 \leq {^\forall i} \leq n$, $^\forall M \in \mathrm{mod}\, A$ に対して, $\mathrm{grade}\, \mathrm{Ext}_A^i(M, A) \geq i - 1$.

2.5([6, Cor 2.2])。 $^\forall M \in \mathrm{mod}\, A$ に対して, $\mathrm{grade}\, \mathrm{Ext}_A^2(M, A) \geq 1$ のとき、次は同値

(1) $^\forall n \geq 2$, $^\forall M \in \mathrm{mod}\, A$ に対して、$\mathrm{grade}\, \mathrm{Ext}_A^n(M, A) \geq n - 1$.

(2) $^{\forall}N \in \mathrm{mod}\, A^{op}$ に対して, reduced grade $N^{**} \geq$ reduced grade N.

2.6 ([6, Thm 2.4])。 $n \geq 1$ とする。極小入射分解 $0 \to A_A \to E_0 \to E_1 \to \cdots$ において、$0 \leq {}^{\forall}i < n$ に対して weak dim $E_i \leq i+1$ なら, $\mathrm{syz}^n A$ は拡大で閉じる。

2.7 ([6, Thm 2.5])。 $n \geq 1$ とする。 $1 \leq {}^{\forall}i \leq n$ に対して $\mathrm{syz}^i A$ が拡大で閉じるなら、$^{\forall}M \in \mathrm{mod}\, A$ に対して grade $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, A) \geq n$。

§3. 可換の場合

本節を通じて、A は可換とする。§2 の結果の特別な場として以下の結果を得る。

3.1 ([6, Prop 3.1])。次は同値

(1) A は Gorenstein.

(2) $^{\forall}n \geq 1$ に対して, $\mathrm{syz}^n A$ は拡大で閉じる。

(3) $\forall n \geq 2$, $\forall M \in \mathrm{syz}^n A$ に対して，M は reflexive で reduced grade $M^* \geq n-1$。

(4) A の全商環は Gorenstein で，$\forall M \in \mathrm{mod}\, A$ に対して reduced grade $M^{**} \geq$ reduced grade M.

注意。(1) ⇔ (3) は Bass [3, Thm 8.2]，Auslander-Bridger [1, Cor 4.22] で示されている。

3.2 ([6, Prop 3.2])。A を d 次元の局所環とする。$0 \leq \forall i \leq d+1$ に対して $\mathrm{syz}^i A$ が拡大で閉じるなら，A は Gorenstein。

3.3 ([6, Prop 3.3])。A を d 次元の局所環とする。$0 \leq \forall i \leq d$ に対して $\mathrm{syz}^i A$ が拡大で閉じるなら，A は Cohen-Macaulay ですべての極大 Cohen-Macaulay 加群は $\mathrm{syz}^d A$ に属す．

3.4 ([5, Prop 3.1])。次は同値

(1) A は QF-3.

(2) $\mathrm{syz}^1 A$ が拡大で閉じる。

(3)　A の全商環は Gorenstein。

3.5 ([5, Prop 3.2])。 A を 2 次元の局所環で QF-3 とする。ref$A$ が拡大で閉じるなら A は Cohen-Macaulay ですべての極大 Cohen-Macaulay 加群は reflexive。

3.6 ([6, Prop 3.4])。 次は同値

(1)　A は QF.

(2)　$(\ )^{**}$: mod $A \to$ mod A は左完全.

(3)　A は Artin で $\mathrm{syz}^1 A$ が拡大で閉じる。

注意. (1) ⇒ (2) ⇒ (3) には可換性を必要としない。また、A が局所環なら (3) ⇒ (1) にも可換性は不要.

§4. 例

4.1. ref$A$ が拡大で閉じない例を与える。従って、Bass [2, Lemma 3.2] は証明だけでなく主

張そのものが誤りである。

<u>例</u>1（渡辺敬一）。$k[\![X, Y]\!]$ を体 k 上の2変数形式巾級数環，$A = k[\![X^4, X^3Y, XY^3, Y^4]\!]$ をその部分環とする。A は2次元の局所整域であり，また $\operatorname{depth} A = 1$ である。従って，(3.5) により $\operatorname{ref} A$ は拡大で閉じないことがわかる。

しかしながら，1次元以下の可換局所環 A で $\operatorname{ref} A$ が拡大で閉じない例を筆者は知らない。特に，A が Artin で QF でない時，$\operatorname{ref} A$ が自由でない加群を含むかどうか不明。

4.2. $\operatorname{inj} \dim_A A \leq 1$ なら，(2.6) により，すべての $n \geq 1$ に対して $\operatorname{syz}^n A$ は拡大で閉じる。ところが，$\operatorname{inj} \dim_A A = \operatorname{inj} \dim A_A = 2$ で $\operatorname{syz}^1 A$ が拡大で閉じない例がある。この事実を§3の結果と比べると，$\operatorname{inj} \dim_A A = \operatorname{inj} \dim A_A < \infty$ という性質は（非可換の場合）“良い”性質ではない様に思われる。

例 2 ([5])。 k を体として，

$$A_0 = \begin{bmatrix} k & & & 0 \\ & k & & \\ & & k & \\ 0 & & & k \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \subset V \otimes_{A_0} V,$$

$$A = A_0 \oplus V \oplus (V \otimes_{A_0} V / R)$$

とおく。即ち，A は半単純環 A_0 上の両側加群 V のテンソル多元環を R が成生する両側イデアルで割ったものである。このとき，inj $\dim_A A = \operatorname{inj} \dim A_A = 2$ である。他方，

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J = V \oplus (V \otimes_{A_0} V / R)$$

とおけば、$\mathrm{Ext}^1_A(e_2A/e_2J, A)^* \cong e_1A/e_1J$ となり、(2, 1) より $\mathrm{syz}^1 A$ は拡大で閉じない。この例では、mod A に直既約なものは同型を除いて11個しか存在しないから、直接調べることも易しい。

注意。例2の A は次の "bounden quiver" で与えられる：

$$1 \underset{\delta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \quad \text{with} \quad \alpha\delta = \delta\alpha = \beta\gamma = 0 .$$

A_0, V, R の定義と比較して一般の "bounden quiver algebra" の構成法を類推されたい。

文献

1. M. Auslander and M. Bridger, Stable module theory, Mem. Amer. Math. Soc. 94 (1969).

2. H. Bass, Injective dimension in Noetherian rings, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 18-29.

3. H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z. 82 (1963), 8-28.

4. M. Hoshino, On dominant dimension of Noetherian rings, Osaka J. Math. 26 (1989), 275-280.

5. M. Hoshino, Extension closed reflexive modules, Arch. Math. (to appear).

6. M. Hoshino, Syzygies and Gorenstein rings, Arch. Math. (to appear).

7. Y. Iwanaga, On rings with finite self-injective dimension, Comm. Algebra 7 (1979), 393-414.

8. K. Masaike, Semi-primary QF-3 quotient rings, Comm. Algebra 11 (1983), 377-389.

9. K. Morita, Noetherian QF-3 rings and two-sided quasi-Frobenius maximal quotient rings, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 837-840.

10. H. Tachikawa, Quasi-Frobenius rings and generalizations, LNM 351 (1973).

正標数の多項式環の正規部分環についてII

富山大学　教育学部　浅沼照雄

§0、序、本稿の目的は次の定理の証明の概略を与えることである。

0.1、定理、kを標数$p\geq 3$の無限体，$S\subset A$をk-affine Dedekind domainの拡大でその商体の拡大$Q(A)/Q(S)$がp次の純非分離拡大とする。すると$\varphi, \psi\in Q(A)$が存在して $A=S[\varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p+1)/2}]$と表わせる。又このとき$\Omega_S(A)\cong(\varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p+1)/2})=A$のidealである。ここで$\Omega_S(A)$は$A$のdifferential A-moduleを表わす。

この定理は昨年のシンポジウムの報告集[1]の中の主要定理1の拡張である。この定理と関連した多項式環の話題については[1]を参照してください。

§1、準備、この§1では定理0.1の証明に必要ないくつかのLemmaを証明ぬきで示す。以下環は標数$p>0$の体kを含むネター環を意味する。

$S \subsetneq A \subsetneq R$を環の列とする。これは次のexact sequence

$$\Omega_S(A) \otimes_A R \xrightarrow{\rho_{R/A}} \Omega_S(R) \longrightarrow \Omega_A(R) \longrightarrow 0$$

をinduceする。

$$\rho_{R/A} : \text{surjective} \Leftrightarrow R/A : 不分岐$$

であるからとくに $R^{p^e} \subset S$ ならば

$$\rho_{R/A} : \text{surjective} \Leftrightarrow R = A$$

がなりたつ。このことを用いて次のLemma 1.1が示される。

R-module Mのrankを $\overset{r}{\wedge} M \neq 0$, $\overset{r+1}{\wedge} M = 0$ なる整数 r で定義しておく。ここで $\overset{r}{\wedge}$ は r 回の外積である。

1.1. Lemma、 $A^{p^e} \subset S \subset A$: integral domainの列で次をみたすものとする。

(i) A/S : finite extension,

(ii) $\Omega_S(A)$: projective A-module。

このとき $f_1, \cdots, f_n \in A$ に対して $A = S[f_1, \cdots, f_n]$ なるための必要十分条件は

$$\overset{r}{\wedge}(\Omega_S(B) \otimes_B A) \xrightarrow{\overset{r}{\wedge} \rho_{A/B}} \overset{r}{\wedge} \Omega_S(A)$$

がsurjective。ここで $B = S[f_1, \cdots, f_n]$, $r = \text{rank}\, \Omega_S(A)$ である。

次の Corollary はこの Lemma の直接の結果である。

1.2. Corollary. $k[x_1, \ldots, x_r]$ を k 上 r 変数の多項式環とする。このとき

$$k[x_1^{p^e}, \ldots, x_r^{p^e}, f_1, \ldots, f_n] = k[x_1, \ldots, x_r] \iff$$

$(\partial f_i / \partial x_j)$ の $r \times r$-minor で generate された $k[x_1, \ldots, x_r]$ の ideal が unit ideal.

$S \subset R$ に対して $\mathrm{Der}_S(R)$ は derivation R-module を表わす。ゆえ $\mathrm{Der}_S(R) = \Omega_S(R)^* =$ 双対加群. 次の Lemma 1.3 も Lemma 1.1 から出る。

1.3. Lemma. Integral domain の列 $R^{p^e} \subset S \subset A \subset R$ が次の条件をみたしているとする。

(i) R/S : finite extension

(ii) A, R がともに normal 又は R/A が flat.

すると $J = \mathrm{Det}(D_j f_i) \neq 0$ なる任意の $D_1, \ldots, D_r \in \mathrm{Der}_S(R)$ 及び $f_1, \ldots, f_r \in A$ の組み合わせについて $A \subset S[J^{-p^e}, f_1, \ldots, f_r]$ がなりたつ。ここで $r = \mathrm{rank}\, \Omega_S(A)$ である。

次の Lemma 1.4 は基本的である。

1.4. Lemma. $S \subset R$ は integral domain の拡大で $f_1, \cdots, f_n \in R$, $D_1, \cdots, D_m \in Der_S(R)$ が存在して行列

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_m \end{pmatrix} (f_1 \cdots f_n) = (D_i f_j) \text{ の rank は } 1$$

かつ mn 個の R の元 $\{D_i f_j\}$ で generate された R の ideal は unit とする。$x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n$ は $n+m$ 個の variable, M を $1 \times n$-行列 $(x_1, \cdots, x_m)(D_i f_j)$ の n 個の要素で generate された $Rx_1 + \cdots + Rx_m$ ($\subset R[x_1, \cdots, x_m]$) の R-submodule, N を $m \times 1$-行列 $(D_i f_j)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ の m 個の要素で generate された $Ry_1 + \cdots + Ry_n$ ($\subset R[y_1, \cdots, y_n]$) の R-submodule とする。$D = x_1 D_1 + \cdots + x_m D_m$, $f = y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n$ とおく。すると $f \in R[x, y] := R[x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n]$, $D \in Der_{S[x,y]}(R[x, y])$ と見なせる。以上の条件のもとで次の (i) 〜 (iii) がなりたつ。

(i) M (resp. N) は rank 1 の projective R-module で free R-module $R^m = Rx_1 + \cdots + Rx_m$ (resp. $R^n = Ry_1 + \cdots + Ry_n$) の direct summand.

(ii) R-同型写像

$$\begin{array}{ccc} \alpha : R^m \otimes R^n & \longrightarrow & \sum R x_i y_j \ (\subset R[x, y]) \\ \Psi & & \Psi \\ x_i \otimes y_j & \longrightarrow & x_i y_j \end{array}$$

は R-同型 $M \otimes N \longrightarrow RD(f)$ をひきおこす。つまり

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha'"] & R^m \otimes R^n \arrow[d, "\alpha"] \\ RD(f) \arrow[r, hook] & \sum R x_i y_j \end{tikzcd}$$

が可換なる R-同型 α' が存在する。

(iii) M (resp. N) で generate された $R[x, y]$ の ideal を $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{q}$) で表わすと $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ は height 1 の prime ideal で $R[x, y]D(f) = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ となる。

1.5. Lemma. Lemma 1.4 の条件のもとでさらに $R^{p^e} \subset S$ かつ S は normal とする。すると $D_\ell f_j / D_i f_j \notin Q(S)$ (resp. $D_i f_\ell / D_i f_j \notin Q(S)$) なる $D_i f_j$ 及び ℓ が存在するための必要十分条件は $\mathfrak{p} R[x, y]_\mathfrak{p} \neq \mathfrak{s} R[x, y]_\mathfrak{p}$ for $\mathfrak{s} = \mathfrak{p} \cap S[x, y]$ (resp. $\mathfrak{q} R[x, y]_\mathfrak{q} = \mathfrak{t} R[x, y]_\mathfrak{t}$ for $\mathfrak{t} = \mathfrak{q} \cap S[x, y]$) である。

上の条件をみたす $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ を relatively ramified ということにする。Lemma 1.5 の条件を用いて次の Corollary 1.6 が示される。

1.6. Corollary. Lemma 1.4 の条件のもとでさらに $R^{p^e} \subset S$ かつ S は normal とする。すると $f_1, \dots, f_n, D_1, \dots, D_m$ を必要ならとりかえたりふやしたりしてうまくとると $\mathfrak{p}$ が relatively ramified となる。$p \geq 3$ なるときは同時に $\mathfrak{q}$ も relatively ramified となるようにできる。

上の Lemma で $p=2$ のときは $\mathfrak{q}$ を relatively ramified にできない例がある。次の Lemma 1.7 は Lemma 1.8 で用いる。

1.7. Lemma. $R^{p^e} \subset S \subset R$ を normal domain の列で $p \geq 3$ とする。このとき $\varphi^2\psi \in R$ なる任意の元 $\varphi \in Q(R)$, $\psi \in R$ について次の (i), (ii) がなりたつ。

(i) $\varphi\psi^{(p^e+1)/2} \in R \cap S[\varphi^{-p^e}, \varphi^2\psi]$,

(ii) $f = \varphi^2\psi$, $g = \varphi\psi^{(p^e+1)/2}$, $A = S[f, g]$ とおくと A は S-module として p^e 個の元

$$\{1, f, \dots, f^{(p^e-1)/2}, g, fg, \dots, f^{(p^e-3)/2}g\}$$

で generate される。とくに $[Q(S[f]) : Q(S)] = p^e$ ならば A は rank p^e の free S-module となる。

1.8. Lemma. $R^p \subset S \subset A \subset R$ は Dedekind domain の列で

次をみたすとする。

(i) R/S : finite extension,

(ii) $f\in A$, $D\in \mathrm{Der}_S(R)$ が存在して $RD(f)=\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ をみたす。ここで $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ は互いに素な R の prime ideal で relatively ramified である。i.e., $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\neq \mathfrak{p}'R_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}=\mathfrak{q}'R_{\mathfrak{q}}$ where $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}\cap S$, $\mathfrak{q}'=\mathfrak{q}\cap S$。

すると $\varphi, \psi\in Q(R)$ が存在して $A=S[\varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p+1)/2}]$ をみたす。

Lemma 1.8 の証明のアウトラインを述べる。まず R の任意の prime ideal $\mathfrak{m}$ の $\mathfrak{m}$-adic valuation を $v_{\mathfrak{m}}$ とかき

$\mu_{\mathfrak{m}}(f)=\mathrm{Max}\{v_{\mathfrak{m}}(f-a)\mid a\in S_{\mathfrak{m}\cap S}\}$ と定義する。$\mathfrak{m}$ が $\mathfrak{p}$ 又 $\mathfrak{q}$ ならば次のことがなりたつ。

(a) $\mu_{\mathfrak{m}}(f)\leq 2$

(b) $\mu_{\mathfrak{m}}(f)\leq 1 \Rightarrow A_{\mathfrak{m}\cap S}=S_{\mathfrak{m}\cap S}[f]$

(c) $\mu_{\mathfrak{m}}(f)=2$ ならば $\varphi, \psi\in R_{\mathfrak{m}}$ が存在して $v_{\mathfrak{m}}(\varphi)=1$, $v_{\mathfrak{m}}(\psi)=0$, $f-a=\varphi^2\psi$ $(a\in S)$

$$A_{\mathfrak{m}\cap S}=S_{\mathfrak{m}\cap S}[\varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p+1)/2}]$$

をみたす。

$\mathfrak{m}\neq\mathfrak{p}$ かつ $\mathfrak{m}\neq\mathfrak{q}$ ならば Lemma 1.3 より

$A \subset S[D(f)^{-p}, f]$ であるから $A_{\mathfrak{m}\cap S} = S_{\mathfrak{m}\cap S}[f]$ がなりたつ。ゆえ $\mathfrak{p}$ も $\mathfrak{q}$ も (a) の case の場合 $A_{\mathfrak{n}} = S_{\mathfrak{n}}[f]$ がすべての S の prime ideal $\mathfrak{n}$ についてなりたつから $A = \cap A_{\mathfrak{n}} = \cap(S_{\mathfrak{n}}[f]) = (\cap S_{\mathfrak{n}})[f] = S[f]$ で Lemma 1.8 がこの場合は示された。次に $\mathfrak{p}$ 又は $\mathfrak{q}$ が (c) の場合 φ と ψ をうまく選べば

$$A_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}[\varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p+1)/2}]$$

$$A_{\mathfrak{q}} = S_{\mathfrak{q}}[\varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p+1)/2}]$$

となる。一方 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$ なる任意の R の prime ideal $\mathfrak{m}$ に対して前に述べたように $A_{\mathfrak{m}\cap S} = S_{\mathfrak{m}\cap S}[f] = S_{\mathfrak{m}\cap S}[f-a] = S_{\mathfrak{m}\cap S}[\varphi^2\psi]$。ここで ψ をとくに R からとることができるから Lemma 1.7 より $\varphi\psi^{(p+1)/2} \in A_{\mathfrak{m}\cap S}$ ゆえ $A = \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}\cap S} \cap A_{\mathfrak{p}} \cap A_{\mathfrak{q}} = S[\varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p+1)/2}]$ となる。

§2、P-Galois extension 及び定理の証明

2.1、定義、環の拡大 $S \subset A \subset R$ が次の条件 (i)〜(iv) をみたすとき $S \subset A \subset R$ を P^e-Galois extension とよぶ。

(i) $R^{p^e} \subset S$,

(ii) A/S, R/A : finite flat,

(iii) $\Omega_S(R)$, $\Omega_A(R)$: projective R-module,

$\Omega_S(A)$: projective A-module,

(iv) $\rho_{R/A} : \Omega_S(A)\otimes_A R \to \Omega_S(R)$ は injective.

上の条件(iii), (iv)より

$$0 \to \Omega_S(A)\otimes_A R \xrightarrow{\rho_{R/A}} \Omega_S(R) \longrightarrow \Omega_A(R) \longrightarrow 0$$

は分解する exact sequence ゆえ

$$\Omega_S(R) = \Omega_S(A)\otimes_A R \oplus \Omega_A(R)$$

なる自然な分解が存在する。

2.2. 命題. kを標数$p\geq 3$なる無限体, $S\subset A\subset R$を k-affine Dedekind domain の p-Galois extension で $\mathrm{rank}\,\Omega_S(A)=1$とする。すると $\varphi, \psi\in Q(R)$が存在して $A = S[\varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p+1)/2}]$をみたす。又このとき

$$\Omega_S(A) \cong (\varphi^2\psi, \varphi\psi^{(p+1)/2})$$ がなりたつ。

証明の概略. kはSで algebraically closed としておく。$\Omega_S(A)$は rank 1 の projective A-module であるから Aのある ideal $\mathfrak{a}$とA-同型. ゆえ $\Omega_S(A)=\mathfrak{a}$としてよい。

Dedekind 環の性質より $^\exists c \in Q(A)$ s.t. $\mathfrak{a} + c\mathfrak{a} = A$.
そこで $^\exists D_1, {}^\exists D_2 \in Der_S(A)$ s.t. $AD_1(A) = \mathfrak{a}$, $AD_2(A) = c\mathfrak{a}$
とできる。ゆえに $A = S[f_1, \dots, f_n]$ とおくと $\sum AD_i f_j = A$
$(i = 1, 2,\ j = 1, \dots, n)$ がなりたつ。一方 $(D_1, D_2) : A \to A^2$
は S-derivation であるから $^\exists h \in Hom(\Omega_S(A), A^2)$
s.t. $(D_1, D_2) = h \circ d_{A/S}$。ここで $d_{A/S} : A \to \Omega_S(A)$ は
universal derivation を表わす。M を (D_1, D_2) の image
で generate された A^2 の A-submodule とすると M は
$\Omega_S(A)$ の h による image になるので $h(\Omega_S(A)) = M$ と
なる。さらに M は torsion free で $rank\, M \leq 1$。$M \neq 0$
より $rank\, M = 1$. このことから $M \cong \Omega_S(A) = \mathfrak{a}$
がなりたつ。ゆえ $(D_i f_j) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} (f_1, \dots, f_n)$ の rank は 1。
仮定より $\Omega_S(R) = \Omega_S(A) \otimes_A R \oplus \Omega_A(R)$ ゆえに
$Der_S(R) = Der_S(A) \otimes_A R \oplus Der_A(R)$。つまり $Der_S A$ の
任意の元は $Der_S(R)$ に拡張できる。ゆえこの拡張
で $D_1, D_2 \in Der_S(R)$ としてよい。ゆえに $D_1, D_2 \in Der_S R$,
$f_1, \dots, f_n \in A \subset R$ は Lemma 1.3 の条件をみたす。
Corollary 1.6 より $D_1, \dots, D_m \in Der_S(R)$ をうまくとって
$D = x_1 D_1 + \dots + x_m D_m$, $f = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n$ とおいたとき
$(D(f)) = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ で $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ は Corollary 1.6 をみたす $R[x, y]$ の

prime ideal である。ここで $k(x,y)=k(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)$ とおくと $k(x,y)/k$ は f. flat ゆえに

$$\begin{array}{ccccc} S\otimes_k k(x,y) & \subset & A\otimes_k k(x,y) & \subset & R\otimes_k k(x,y) \\ \| & & \| & & \| \\ S' & & A' & & R' \end{array}$$

は P-Galois extension。又 S', A', R' は再び Dedekind 環になっていることに注意する。$\mathfrak{p}\cap k(x,y)=\mathfrak{q}\cap k(x,y)=(0)$ を示す。π を $\mathfrak{p}R'_{\mathfrak{p}}=\pi R'_{\mathfrak{p}}$ なるパラメータとすると 1.5 及び 1.6 より $\pi=x_1+x_2D_2f_1/D_1f_1+\cdots+x_mD_mf_1/D_1f_1$ で $D_2f_1/D_1f_1\notin K$ としてよい。ここで $\mathfrak{p}\cap k(x,y)\neq(0)$ とすると $L=Q(R)$, $K=Q(S)$ とおいて $\mathfrak{p}L[x,y]\cap k(x,y)\neq(0)$ ゆえ $\pi L[x,y]\cap k(x,y)\neq(0)$ がなりたつ。ゆえに $\pi F(x,y)=G(x,y)$ なる $F\in L[x,y]$, $G\in k(x,y)$ が存在する。F, G とも斉次の多項式としてよい。

$a_2,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n\in k$ に対して L-homomorphism $\sigma: L[x,y]\longrightarrow L[x_1,x_2]$ を $\sigma(x_1)=x_1$, $\sigma(x_i)=a_ix_2$ $\sigma(y_j)=b_jx_2$ $(i\geq 2)$ で def すると k が無限体より a_i, b_j を $\sigma(\pi)=x_1+\alpha x_2$ $(\alpha\in L\setminus K)$, $\sigma(F)\neq 0$, $\sigma(G)\neq 0$ なるようにとることができる。α は k 上 transcendental である。一方 $\sigma(G)$ は k の algebraic closure $\bar{k}$ で一次の積 $\sigma(G)=r(x_1+c_1x_2)\cdots(x_1+c_tx_2)$ $(r, c_i\in\bar{k})$

に分解される。これは $\sigma(\pi)\sigma(\bar{\pi})=\sigma(G)$ に矛盾する。

$\mathfrak{q}\cap k(x,y)=(0)$ の場合も同様に示される。さて

$\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}R'$, $\mathfrak{q}'=\mathfrak{q}R'$ とおくと $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ は R' の prime

ideal で $D\in \mathrm{Der}_S(R')$, $R'D(f)=\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ となる。

$\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ は relatively ramified ゆえ Lemma 1.8 の条件を

みたすから $\Phi\in Q(R')$, $\Psi\in Q(R')$ が存在して

$$A'=S'[\Phi^2\Psi,\ \Phi\Psi^{(p+1)/2}]$$ とできる。ゆえに

$T\in k[x,y]\setminus(0)$ をえらんで

$$A[x,y][T^{-1}]=S[x,y][\Phi^2\Psi,\ \Phi\Psi^{(p+1)/2}][T^{-1}]$$

とできる。k は無限体であるから代入写像 $a_i, e_i\in k$,

$\theta: x_i\to a_i$, $y_j\to e_j$ を $\theta(\Phi)$, $\theta(\Psi)$, $\theta(T^{-1})$ がそれぞれ well defined なるように定義できる。ここで

$\theta(\Phi)=\varphi$, $\theta(\Psi)=\psi$ とおけば

$$A=\theta(A[x,y,T^{-1}])=S[\varphi^2\psi,\ \varphi\psi^{(p+1)/2}]$$

を得る。また $\Omega_S(A)=(\varphi,\psi^{(p-1)/2})(\varphi d_{A/S}\psi+2\psi d_{A/S}\varphi)$

$$\cong(\varphi^2\psi,\ \varphi\psi^{(p+1)/2})\qquad \text{q.e.d.}$$

命題2.2において $A=R$ ならば P-Galois extension の仮定を $A^p\subset S$ でおきかえることができる。これは次の Lemma 2.3 による。

2.3. Lemma. $A^p \subset S \subset A$ を k-affine Dedekind domain の拡大とする。すると $S \subset A \subset R = A$ は P-Galois extension である。

定理0.1は命題2.2とLemma 2.3の直接の結果である。定理0.1の証明には k が無限体という仮定をここでは本質的に用いている。この"無限"という仮定がはぶけるかどうかは不明である。

参考文献

[1]、浅沼、正標数の多項式環の正規部分環について，第10回可換環論シンポジウム報告集
[2]、浅沼、Purely inseparable extensions of Dedekind domains, preprint.

Set-theoretic generation of ideals

神藏　正

R を noether 環とする。

R のイデアル I は $\forall m \in \mathrm{Max}(R) \cap V(I)$ で局所化した時 I_m が I の height と同じ長さの R_m-regular sequence で生成される時 *locally complete intersection* (lci) という。

また $R \ni f_1, \cdots, f_r$ が $\sqrt{(f_1, \cdots, f_r)} = \sqrt{I}$ となる時、$f_1, \cdots, f_r$ は I を set-theoretic に生成するといい，特に $r = \mathrm{ht}\, I$ とできる時，I を set-theoretic complete intersection (stci) という。

lci と stci の関係について M.P Murthy は次の問題を提出している。

<u>問題</u>　$R = k[X_1, \cdots, X_n]$ (k は体) のイデアル I が lci ならば stci か？

$\mathrm{ht}\, I = 1,\ n-1,\ n$ の時 この問題は肯定的であることが知られている。

特に ht $I = n-1$ の場合を示すために Boratyński は次の定理を証明している。

<u>定理</u> (Boratyński)

$R = k[x_1, \cdots, x_n]$ のイデアル I は I/I^2 が free R/I-module ならば stci である

さらに Mandal-Roy は上の定理を一般化して次の定理を証明している。

<u>定理</u> (Mandal-Roy)

$R = A[x]$ (A は noether 環) の lci イデアル I が monic polynomial を含み I/I^2 が free R/I-module ならば stci である。

いずれにしても lci イデアル I に対してその radical を変えずに conormal module が free になるようにイデアルをとりなおすことができれば I は stci になる。

次の定理は、それができる1つの十分条件を与える。

<u>定理</u>

noether 環 R とその lci イデアル I が次の条件 (*) をみたす時、lci イデアル J が存在して、

$\sqrt{J}=\sqrt{I}$, J/J^2 は free R/J-module とできる.

(*) $\dim R/I < \mathrm{ht}\, I$, $\mu_R(I/I^2) \leq \mathrm{ht}\, I + 1$.

(証明) $r = \mathrm{ht}\, I$ とおく　I は l.c.i イデアル だから I/I^2 は rank r の projective R/I-module である。　そこで,

$\omega = \mathrm{Hom}_{R/I}(\wedge^r(I/I^2), R/I)$ とおくと これは rank 1 の projective R/I-module である。

ここで 条件 $\dim R/I < r$ だから splitting off theorem を使うと I/I^2 は ω を direct summand にもつので surjective R-linear map $I/I^2 \to \omega$ が存在する。

そこで その kernel を J/I^2 とおくと standard argument によって J は R の l.c.i イデアルで $\sqrt{J}=\sqrt{I}$, $\wedge^r(J/J^2) \cong R/J$ となることがわかる。

また 条件 $\mu_R(I/I^2) \leq r+1$ より surjective map $(R/I)^{r+1} \to I/I^2$ が存在するので その kernel を K とおけば I/I^2 は rank r の projective module だから, K は rank 1 の projective module で $(R/I)^{r+1} \cong K \oplus I/I^2$,

この両辺に $\wedge^{r+1}$ を作用させると $R/I \cong K \otimes \wedge^r(I/I^2)$

したがって $K \cong \mathrm{Hom}_{R/I}(\wedge^r(I/I^2), R/I) = \omega$ となる。

この同型と J/I^2 の定義によって 次の同型

$(R/I)^{r+1} \cong J/I^2 \oplus \omega \oplus \omega$ が得られる。

一方，自然な short exact sequence

$$0 \to I^2/IJ \to J/IJ \to J/I^2 \to 0$$

をみると J/I^2 は定義より rank $r-1$ の projective R/I-module で，また J/IJ は $J/IJ \cong J/J^2 \otimes_{R/J} R/I$ によって rank r の projective R/I-module だから I^2/IJ は rank 1 の projective R/I-module である。

自然な surjection $I/J \otimes_{R/I} I/J \to I^2/IJ$ があるが，J/I^2 の定義より $\omega \cong I/J$ であるから $I/J \otimes I/J$ はやはり rank 1 の projective module なので $\omega \otimes \omega \cong I^2/IJ$ が得られる。　そこで次の diagramm を考える

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \omega \oplus \omega \arrow[r] \arrow[d] & (R/I)^{r+1} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & J/I^2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \omega \otimes \omega \arrow[r] \arrow[d] & J/IJ \arrow[r] \arrow[d, dashed] & J/I^2 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

この diagramm と中山の補題により

$$r+1 \geqq \mu_{R/I}(J/IJ) = \mu_{R/J}(J/J^2)\ 。$$

そこで次の short exact sequence を考える。

$$0 \to K' \to (R/J)^{r+1} \to J/J^2 \to 0 \quad (\text{exact})$$

すると　$K' \cong \mathrm{Hom}_{R/J}(\wedge^r(J/J^2), R/J) \cong R/J$

したがって　$(R/J)^{r+1} \cong J/J^2 \oplus R/J$ であるが

ふたたび条件 $\dim R/I < r$ を用いると $r = \operatorname{rank} J/J^2$, $\dim R/I = \dim R/J$ より. $\dim R/J < \operatorname{rank} J/J^2$ となり. Bass' cancellation theorem を用いて $(R/J)^r = J/J^2$ が得られる。 ∎

系 (1) $R = A[X]$ の lci ideal I が monic polynomial を含み条件 (*) をみたせば I は stci である。

(2) $R = k[X_1, \cdots, X_n]$ の lci イデアル I は, ht I を r とする時 (**) $2r > n$, $\mu_R(I) \leqq r+1$ をみたせば stci である。

例 $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ の lci ideal I で ht $I = r$, $\mu_R(I) = r+1$, I/I^2 は free module ではないものが存在する.

まず $A = k[x_1, x_2, x_3]$ のイデアル I_0 で ht $I_0 = 2$ $\mu_A(I_0) = 3$, A/I_0 は正則となる I_0 の存在が知られている そこで $R = A[x_4, \cdots, x_n]$ とみて $I = I_0R + x_4R + \cdots + x_{r+1}R$ とおけば

$R/I \cong A/I_c [X_{r+2}, \cdots, X_n]$ だから これは正則で 故に $I = I^r$ となることは明らか。そして次の同型がある。

$$I/I^2 \cong (I_c/I_c^2 \oplus \underbrace{A/I_c \oplus \cdots \oplus A/I_c}_{(r-2)\text{コ}}) \otimes R/I$$

したがって もし I/I^2 が free ならば $I_c/I_c^2 \oplus A/I_c \oplus \cdots \oplus A/I_c$ も、やはり free A/I_c-module となり $\wedge^r$ を作用させると $\wedge^2 (I_c/I_c^2) \cong A/I_c$。したがって $\mathrm{Ext}_A^1 (I_c, A)$ は cyclic となり Serre の補題によって $\mu_A (I_c) \leqq 2$ となるが、これは矛盾である。

そこで $r < \mu_R (I/I^2) \leqq \mu_R (I) \leqq r+1$ より、I が求める性質をもつことがわかる。

REFERENCES

1. M.Boratyński, *A Note on Set-Theoretic Complete Intersection Ideals*, J.Algebra **54** (1978), 1–5.
2. T.Kanzo, *Set-theoretic generation of locally complete intersection ideals*, preprint.
3. E.Kunz, "Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometory," Birkhäuser, Boston, 1985.
4. S.Mandal and A.Roy, *Generating ideals in polynomial rings*, Math.Z. **195** (1987), 315–320.
5. N.Mohan Kumar, *On Two Conjectures About Polynomial Rings*, Invent.Math **46** (1978), 225–236.
6. M.P.Murthy, *Generators for Certain Ideals in Regular Ring of Dimension Three*, Comment.Math.Helv. **47** (1972), 179–184.
7. M.P.Murthy, *Complete Intersections*, Queen's Papers in Pure and Appl.Math. **42** (1975).
8. S.Tachibana and T.Kanzo, *Locally Complete Intersection Ideals in Polynomial Rings*, Proc.of The Inst. of Natural Sciences **24** (1988), 121–126.

Characterization of Graded Toric ASL Posets and Classification of Homogeneous Toric ASL Domains of rank 2

Atsushi NOMA   Waseda University

Abstract. A graded toric ASL (algebra with straightening laws) is a semigroup ring which is a graded ASL on a poset consisting of the system of generators of the semigroup. The purpose of this paper is to characterize the posets (partially ordered sets) of graded toric ASL's towards development of a general theory of graded toric ASL's. As an application of the characterization the homogeneous toric ASL's of dimension 3 over a field are classified. This classification extends the work of T. Hibi.

Introduction. An algebra with straightening laws on a partially ordered set Π is an algebra admitting a presentation with generators indexed by Π and relations having particularly nice properties. A graded toric ASL is a semigroup ring which is a graded ASL on a poset consisting of the system of generators of the semigroup.

Graded toric ASL's are used to give examples for certain posets to be posets of homogeneous Gorenstein ASL's of rank 3 by K-i. Watanabe (Wa). Also graded toric ASL's on posets of rank 2 are classified in homogeneous Gorenstein case by T. Hibi (Hi).

The purpose of this paper is to characterize posets of graded toric ASL's towards development of a theory of graded toric ASL's (No) and classification of homogeneous toric ASL's. As an application of the characterization we classify the homogeneous toric ASL's of rank 2.

In our toric case the posets are naturally represented by finite ordered graphs embedded in affine spaces although the posets are usually represented by Hasse diagrams. This is essential to this paper.

In Section 1 we define graded toric ASL. In Section 2 we characterize graded toric ASL posets. In Section 3 we examine combinatorial aspects of the graded toric ASL posets. In Section 4 we give a correspondence between graded toric ASL's and finite posets embedded in affine spaces with certain conditions given in the section 2. This correspondence reduces classification of homogeneous ASL's to classification of the posets embedded in affine spaces. Finally, in the section 5, the homogeneous toric ASL of rank 2 are classified. This classification extends the work of T. Hibi (Hi).

By the same way as in the case of rank 2, we can classify the homogeneous toric ASL posets of rank 3. These results will be given elsewhere.

The author is grateful to Professor Kei-ichi Watanabe for valuable suggestions during the preparation of this paper.

§ 1. Definition of Graded Algebra with Straightening Laws and Graded Toric ASL

First we introduce a definition of graded algebra with straightening laws.

Definition. Let S be an algebra over a commutative ring k and $\Pi \subset S$ a finite subset with a partial order $\leq$, called *poset* for short. A product of the form $\xi_1 \cdots \xi_m$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\xi_i \in \Pi$ such that $\xi_1 \leq \cdots \leq \xi_m$ is called a *standard monomial*. S is a *graded algebra with straightening laws* (a *graded ASL*, for short), if the following conditions hold:

(H_0) $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ is a graded k-algebra such that $S_0 = k$, Π consists of homogeneous elements of positive degree and generates S as a k-algebra.

(H_1) The standard monomials are linearly independent over k.

(H_2) For all incomparable $\xi, \nu \in \Pi$, the product $\xi\nu$ has a representation

(*) $\xi\nu = \sum a_\mu \mu$, $a_\mu \in k$, μ standard monomial,

satisfying the following condition: every μ contains a factor $\zeta \in \Pi$ such that $\zeta < \xi, \zeta < \nu$ (it is of course allowed that $\xi\nu = 0$, the sum $\sum a_\mu \mu$ being empty).

When $\Pi \subset S_1$ we call that S is *homogeneous*. When the right hand sides of relations (*) are 0, we call S is *discrete*.

We define some terminology on an abstract poset Π.

Definition. A *chain* of Π is a totally ordered subset. The *length* of a chain is the cardinality of the chain minus one. The *rank* of the poset Π is the maximal length of chains in Π. The *height* of an element $\xi \in \Pi$ is the maximal length of chains descending from ξ in Π. When all maximal chains in Π have the same length, we call that the poset Π is *pure*. We denote by $K(\Pi)$ the abstract simplicial complex consisting of chains of Π and by $|K(\Pi)|$ the geometric realization of $K(\Pi)$.

We summarize some fundamental facts about a graded ASL $(S; \Pi)$. For the proofs of facts below and further discussion of this notion the reader is referred to (BrVe) and (DEP). Note that our graded ASL is called a *graded ordinal Hodge algebra* in (DEP).

(1.1). When every element of Π is not a zero-divisor the poset Π has a unique minimal element.

(1.2). A unique minimal element in Π is a non-zero-divisor.

(1.3). $\dim S = \dim k + \mathrm{rk}\,\Pi + 1$.

Now we define graded toric ASL.

Definition. Let A be the Laurent polynomial ring with r-indeterminantes $x_1, \cdots, x_r$ over a commutative ring k. By a usual *Laurent monomial* we shall always mean a term of the form $x_1^{h_1} \cdots x_r^{h_r}$, where $h_1, \cdots, h_r$ are integers. Also by a *Laurent polynomial* we mean a linear combination of usual Laurent monomials. We denote by $\mathcal{M}(r)$ the set of Laurent monomials in A and by $\mathcal{M}^+(r)$ the set of Laurent monomials of positive degree in A. Let $\Pi \subset \mathcal{M}^+(r)$ be a finite poset. Then we set $S = k[\Pi] \subset A$ and call it a *graded toric ring with ordered generators*. When a suitable change of degree of S makes the graded toric ring homogeneous, we call S is *homogeneous*. A graded toric ring with ordered generators (S, Π) is called a *graded toric ASL* if S is a graded ASL over k on Π. By definition the commutative ring k might as well be taken to be a field or the ring of integers.

Under the map log, $\mathcal{M}(r)$ is mapped isomorphically onto the group $\mathbb{Z}^r$ as Abelian groups:

$$\begin{array}{lccc} \log: & \mathcal{M}(r) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^r \subset \mathbb{R}^r \\ & x_1^{h_1} \cdots x_r^{h_r} & \longmapsto & \sum_{i=1}^{r} h_i \log(x_i) \end{array}$$

where $\log x_i$ is the symbol representing $(0, \ldots, 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, \ldots, 0)$. We denote by exp the inverse map of log.

Throughout this paper we assume that $\log(\Pi)$ generates $\mathbb{Z}^r$ as an Abelian group and that $\dim S = r + \dim k$, which are guaranteed by the following lemma:

Lemma 1.4. *Let (S, Π) be an $(n+\dim k)$-dimensional graded toric ring with ordered generators over k with $\dim k < +\infty$. Then the vector subspace V of $\mathbb{R}^r$ spanned by $\log(\Pi)$ has dimension n. Moreover, S is* *homogeneous if and only if there exists an (n-1)-dimensional affine subspace* P^{n-1} *containing* $\log(\Pi)$ *and not containing* O.

Proof. The proof is left to the reader.

§ 2. Characterization of Graded Toric ASL Posets

In this section we shall give conditions for a graded (resp. homogeneous) toric ring with orderd generators (S, Π) to be a graded (resp. homogeneous) ASL in terms of configuration of $\log(\Pi)$.

Proposition 2.1. *For a graded toric ring with ordered generators* (S, Π) *the following conditions are equivalent:*

(a) (S, Π) *satisfies the condition* (H_1).

(b) The finite poset $\log(\Pi) \subset \mathbb{R}^r$ *satisfies the following condition:*

(H_1') *For any two distinct chains* $\log(\lambda_1) < \cdots < \log(\lambda_t)$ *and* $\log(\mu_1) < \cdots < \log(\mu_s)$ $(t \geq 1, s \geq 1)$ *in* $\log(\Pi)$, *we have*

$$\mathrm{rel\ int}(\textstyle\sum_{i=1}^{t}\mathbb{R}_{\geq 0}\log(\lambda_i)) \cap \mathrm{rel\ int}(\textstyle\sum_{j=1}^{s}\mathbb{R}_{\geq 0}\log(\mu_j)) = \phi,$$

where $\mathrm{rel\ int}(\cdot)$ *denotes its relative interior.*

Moreover if S *is homogeneous the condition* (H_1') *is equivalent to the following:*

(H_1'') *For any two distinct chains* $\log(\lambda_1) < \cdots < \log(\lambda_t)$ *and* $\log(\mu_1) < \cdots < \log(\mu_s)$ $(t \geq 1, s \geq 1)$ *in* $\log(\Pi)$, *we have*

$$\mathrm{rel\ int}(|\log(\lambda_1), \cdots, \log(\lambda_t)|) \cap \mathrm{rel\ int}(|\log(\mu_1), \cdots, \log(\mu_s)|) = \phi$$

where $|\log(\lambda_1), \cdots, \log(\lambda_t)|$ *denotes the convex hull of the* $\log(\lambda_i)$.

Proof. Since Π consists of usual Laurent monomials in A, which are linearly independent over k, (a) is equivalent to the following:

(c) The forgetful map from the standard monomials to the usual Laurent monomials is injective.

For any chain $\lambda_1 < \cdots < \lambda_t$, $\log(\lambda_i)$ $(i=1, \cdots t)$ are linearly independent over $\mathbb{R}$ under either of (H_1) and (H_1'). Hence equivalence between (c) and (b) results from the following lemma, which concludes the proof of (2.1).

Lemma 2.2. *For any two chains in* Π, $\lambda_1 < \cdots < \lambda_t$ *and* $\mu_1 < \cdots < \mu_s$ $(t \geq 1, s \geq 1)$, *whose logs are linearly independent over* $\mathbb{R}$ *respectively, the following conditions are equivalent:*

(1) There exist positive integers $l_i (i=1, \cdots, t)$ *and* $m_j (j=1, \cdots, s)$ *such that* $\lambda_1^{l_1} \cdots \lambda_t^{l_t} = \mu_1^{m_1} \cdots \mu_s^{m_s}$ *in* S.

(2) $U := \text{rel int}(\sum_{i=1}^{t} \mathbb{R}_{\geq 0} \log(\lambda_i)) \cap \text{rel int}(\sum_{j=1}^{s} \mathbb{R}_{\geq 0} \log(\mu_j))$ *is not empty.*

Proof. Trivial.

Proposition 2.3. *For a graded toric ring with ordered generators* (S, Π) *satisfying* (H_1'), *the following conditions are equivalent:*

(a) (S, Π) *satisfies* (H_2).

(b) The finite poset $\log(\Pi)$ *satisfies the following:*

(H_2') *For any incomparable* $\log(\mu)$, $\log(\nu)$ *in* $\log(\Pi)$ *there exist* $\log(\xi_1) \leq \ldots \leq \log(\xi_m)$ *in* Π *such that* $\log(\mu) > \log(\xi_1)$, $\log(\nu) > \log(\xi_1)$, *and* $\log(\mu) + \log(\nu) = \sum_{i=1}^{m} \log(\xi_i)$.

Moreover if S *is homogeneous,* (H_2') *is equivalent to the following:*

(H_2'') *For any incomparable* $\log(\nu)$, $\log(\mu)$ *in* $\log(\Pi)$, *there exist* $\log(\xi_1) \leq \log(\xi_2)$ *in* $\log(\Pi)$ *such that* $\log(\xi_1) \leq \log(\nu)$, $\log(\xi_1) \leq \log(\mu)$, *and* $\frac{1}{2}\log(\nu) + \frac{1}{2}\log(\mu) = \frac{1}{2}\log(\xi_1) + \frac{1}{2}\log(\xi_2)$ *in* P^{r-1}.

Proof. Trivial.

§ 3. Combinatorial Aspects of Graded Toric ASL Posets

Let (S, Π) be a graded toric ASL of dimension $r + \dim k$. In this section we examine further into the combinatorics on $\log(\Pi) \subset \mathbb{R}^r$.

We adopt the following notation, to be held throughout this paper. Let α be a unique element of Π of ht 0 (1.1). Let $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_m\}$ be the simplices consisting of maximal chains in $\log(\Pi)$ and $K(\log(\Pi))$ be the set of simplices whose vertices consist of elements of chains in $\log(\Pi)$ (2.1). Set $Q = \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_m$. We denote by $\tilde{\tau}$ the cone joining to O to all points of $\tau \in K(\log(\Pi))$. The cones $\tilde{\tau}$ are simplicial strongly convex cones by (2.1), where a *strongly* convex cone is a convex cone without positive dimensional linear subspace. Set $\tilde{Q} = \tilde{\sigma}_1 \cup \cdots \cup \tilde{\sigma}_m$. We denote by $\Sigma(K(\log(\Pi)))$ the system of the cones $\tilde{\tau}$, $\tau \in K(\log(\Pi))$. Setting $c = \text{l.c.m.}(\{\deg\beta\}_{\beta\in\Pi})$, we denote by H^{r-1} the affine $(r-1)$-plane spanned affinely by $\{(c/\deg\beta)\log(\beta)\}_{\beta\in\Pi}$. Let φ be the projection from O to H^{r-1} which maps Q homeomorphically onto its image. Of course we have $H^{r-1} = P^{r-1}$ and $\varphi(Q) = Q$ in case S is homogeneous.

Lemma 3.0. *The composition of the forgetful map in (c) of the proof of (2.1) and the map* log *induces two bijections:*

$$\{\text{ the standard monomials }\}/\sim \longrightarrow Q \cap \mathbb{Q}^r$$

$$\begin{array}{l} \xi^{\sim} = \xi_1^{h_1} \cdots \xi_t^{h_t} \sim \\ \xi_1 < \cdots < \xi_t,\ \xi_i \in \Pi \end{array} \longmapsto \Sigma_{j=1}^{t} \frac{h_j}{(\Sigma_i h_i)} \log(\xi_j)$$

$$\{\text{ the standard monomials }\}/\sim \longrightarrow \varphi(Q) \cap \mathbb{Q}^r$$

$$\xi_1^{h_1} \cdots \xi_t^{h_t} \sim \longmapsto \Sigma_{j=1}^{t} \frac{h_j}{(\Sigma_i h_i)} \frac{c}{(\deg \xi_j)} \log(\xi_j)$$

where, for standard monomials ξ *and* ξ, $\xi \sim \xi$ *implies that* $\xi^n = \xi^h$ *for some positive integers* n *and* h.

Proof. Trivial.

Lemma 3.1. $\varphi(Q)$ *is a convex polytope. Moreover* $\tilde{Q}$ *is a strongly convex cone in* $\mathbb{R}^r$.

Proof. This follows from (3.0) and (H_2').

Lemma 3.2. *For any simplices* $\tau_1, \tau_2 \in K(\log(\Pi))$ *such that* $\tau_1 \cap \tau_2 \neq \phi$, $\tau_1 \cap \tau_2$ *is a face of* τ_1 *and* τ_2. *Therefore* $K(\log(\Pi))$ *is a simplicial complex with* $|K(\log(\Pi))|=Q$.

Proof. The proof is left to the reader.

Proposition 3.3. *For a simplex* σ_i *whose vertices consist of a maximal chain in* $\log(\Pi)$, *we have* $\dim \sigma_i = r-1$. *Hence a poset of a graded toric ASL is pure.*

Proof. If $\dim \sigma_i$ is smaller than $r-1$ then there exists an element $\log(\xi)$ in $\log(\Pi)$ not belonging to the vector space spanned by σ_i, because at least one $(r-1)$-dimensional simplex exists by (1.3). Fix a rational point p of rel $\mathrm{int}(\varphi(\sigma_i))$. Since rational points densely exist on the segment $\overline{p\varphi(\log(\xi))}$, we have a sequence of rational points converging to p on the segment. Take a simplex $\varphi(\sigma_j)$ containing infinitely many points of the sequence. It contains p by the closedness. By (H_1') $\varphi(\sigma_i)$ must be a proper face of $\varphi(\sigma_j)$, which contradicts the maximality of the chain ver σ_i.

Lemma 3.4. *Let* σ_i *be a maximal dimensional simplex of the form* $|\log(\alpha)=\log(\xi_1),\cdots,\log(\xi_r)|$ *and let* L *be the vector subspace of* $\mathbb{R}^r$ *spanned by* $\tau=|\log(\xi_2),\cdots,\log(\xi_r)|$. *Then* $L \cap \tilde{Q}$ *is an* $(r-1)$*-dimensional face of* $\tilde{Q}$.

Proof. In fact if there exists an element of $\log(\Pi)$ on the opposite side of $\log(\alpha)$ with respect to L, using the same argument as in (3.3), we have a maximal dimensional simplex σ_j adjacent to σ_i with τ as common face. This contradicts uniqueness of the element of height zero in (1.1). Hence L is a supporting hyperplane carried by $L\cap\tilde{Q}$.

Lemma 3.5. *Any two maximal dimensional simplices* σ_i *and* σ_j *in* $K(\log(\Pi))$ *are* connected *i.e. there exists a sequence* $\sigma_{i_1}, \cdots, \sigma_{i_t}$ *of maximal dimensional simplices in* $K(\log(\Pi))$ *such that* $\sigma_{i_1} = \sigma_i$, $\sigma_{i_t} = \sigma_j$, *and* σ_{i_k} *is adjacent to* $\sigma_{i_{k+1}}$ *for* $k=1, \cdots, t-1$.

Proof. Since the connectedness is an equivalence relation, the maximal dimensional simplices in $K(\log(\Pi))$ is decomposed into some connected components. Let $\{\sigma_{i_1}, \cdots, \sigma_{i_h}\}$ be a connected component. Set $\tilde{R} = \tilde{\sigma}_{i_1} \cup \cdots \cup \tilde{\sigma}_{i_h}$. By the same argument as in (3.4) we have $\partial\tilde{R} = \partial\tilde{Q}$. Therefore we have $\tilde{R} = \tilde{Q}$.

Lemma 3.6. *Let* F^j *be a j-dimensional face of* $\tilde{Q}$. *Then the subset* $F^j \cap \log(\Pi)$ *of* $\log(\Pi)$ *with the induced order from* $\log(\Pi)$ *satisfies the conditions* (H_1') *and* (H_2'). *Hence* $F^j \cap \log(\Pi)$ *is a poset of a graded toric ASL of rank* $j-1$.

Proof. The proof is left to the reader.

§ 4. Correspondence of Graded Toric ASL's and Posets Satisfying (H_1') and (H_2').

In section 2 we have shown that graded toric ASL posets satisfy the conditions (H_1') and (H_2') and that homogeneous toric ASL posets satisfy the conditions (H_1") and (H_2").

In this section we shall consider the converse. First we adopt the notion of an equivalence of ASL's in the sence of [HW].

Definition. Let (S_1, Π_1) and (S_2, Π_2) be two graded ASL's over a commutative ring k. We say that S_1 and S_2 are *equivalent* as ASL's if there exists an isomorphism $\psi:\Pi_1 \longrightarrow \Pi_2$ of partially ordered sets such that the k-linear map $\tilde{\psi}:S_1 \longrightarrow S_2$ induced from ψ becomes a k-algebra homomorphism.

In accordance with the equivalence of ASL's we define equivalances of posets in $\mathbb{R}^r-\{0\}$ and $\mathbb{R}^{r-1}$.

Definition. Let Γ_1 and Γ_2 be two finite posets in $\mathbb{R}^r-\{0\}$ of rank r-1. We say that Γ_1 is *equivalent* to Γ_2 if there exists an automorphism of the vector space $\mathbb{R}^r$ inducing isomorphism of partially ordered sets from Γ_1 to Γ_2. Also let Θ_1 and Θ_2 be two finite posets in $\mathbb{R}^{r-1}$ of rank r-1. We say that Θ_1 is *equivalent* to Θ_2 if there exists an affine transformation of $\mathbb{R}^{r-1}$ inducing an isomorphism of partially ordered sets from Θ_1 to Θ_2.

Let r be a positive integer and k a commutative ring. Let $\Gamma \subset \mathbb{R}^r-\{0\}$ be a finite poset of rank r-1 generating a strongly convex cone and satisfying (H_1') and (H_2'). Since the group generated by Γ in $\mathbb{R}^r$ is free of rank r, we consider it to be the isomorphic image $\log(\mathcal{M}(r))$. We may assume $\exp:\mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathcal{M}^+(r)$ maps Γ into $\mathcal{M}^+(r)$ by assumption of Γ. Set $\Pi:=\exp(\Gamma)$ with induced order and $S:=k[\Pi]$. Then we have a graded toric ASL (S, Π). From another finite poset Γ' equivalent to Γ we get a graded toric ASL equivalent to the graded toric ASL (S, Π) by the construction and the definition of equivalence. A similar statement holds for finite posets of rank r-1 in $\mathbb{R}^{r-1}$ satisfying (H_1") and (H_2"), homogeneous toric ASL's of rank r-1, and their equivalences.

Theorem 4.1. *Let r be a positive integer and k a commutative ring. The correspondence (S, Π) $\longmapsto \log(\Pi)$ gives a bijective map between the set of equivalence classes of graded toric ASL's of dimension* *dim* k + *r* *and the set of equivalence classes of finite posets in* $\mathbb{R}^r-\{0\}$ *of rank r-1 generating strongly convex cones and satisfying* (H_1') *and* (H_2'). *Its inverse is the map* $\Gamma \longmapsto (\, k[\exp(\Gamma)],\ \exp(\Gamma)\,)$. *The same map also gives a bijection between the set of equivalence classes of homogeneous toric ASL's of dimension dim* k + *r and the set of equivalence classes of finite posets of rank r-1 in* $\mathbb{R}^{r-1}$ *satisfying* (H_1'') *and* (H_2'').

Proof. We have only to show that the map $(\, S, \Pi\,) \longmapsto \log(\Pi)$ is well-defined. By (3. 5) we have reduced to showing that if a maximal dimensional simplex $\sigma_1 = |\log(\xi_1), \cdots, \log(\xi_{r-1}), \log(\mu)|$ is adjacent to a maximal dimensional simplex $\sigma_2 = |\log(\xi_1), \cdots, \log(\xi_{r-1}), \log(\nu)|$ then the position of $\log(\nu)$ is determined only by σ_1 and the straightening relations. In fact since $\sum_{i=1}^{r-1} \log(\xi_i)$ belongs to rel $\mathrm{int}(\tilde{\sigma}_1 \cup \tilde{\sigma}_2)$, we have $\log(\mu) + \log(\nu) + h\cdot\sum_{i=1}^{r-1} \log(\xi_i) \in \tilde{\sigma}_1 \cup \tilde{\sigma}_2$ for a sufficiently large integer h. Hence we have

$$\log(\mu) + \log(\nu) + h\cdot\sum_{i=1}^{r-1}\log(\xi_i) = \sum_{i=1}^{r-1} n_i \log(\xi_i) + n_r \log(\mu) \quad \cdots (a)$$

or $$\log(\mu) + \log(\nu) + h\cdot\sum_{i=1}^{r-1}\log(\xi_i) = \sum_{i=1}^{r-1} m_i \log(\xi_i) + m_r \log(\nu) \quad \cdots (b)$$

for non-negative integers n_i and m_i. Note that, in the case (b), m_r is not equal to 1 by the linealy independence of $\{\log(\xi_1), \cdots, \log(\xi_{r-1}), \log(\mu)\}$. This completes the proof of well-definedness of the map $(\, S, \Pi\,) \longmapsto \log(\Pi)$.

§ 5 Classification of Toric ASLs of rank 2

In this **section** we classify the homogeneous toric ASL's of rank 2 up to equivalence defined in § 4. To classify them, by (4. 1), we have only to classify the posets of rank 2 in $\mathbb{R}^2$ satisfying (H_1'') and (H_2'') up to affine transformation. We call them *homogeneous toric ASL posets* of rank 2.

First we show the following lemmas.

Lemma 5.1. *Let* (S, Π) *be a homogeneous toric ASL of rank* $r-1$. *Let* $\log(\mu)$, $\log(\nu)$, *and* $\log(\xi)$ *be distinct three elements of* $\log(\Pi)$ *lying on a line in* $\mathbb{R}^{r-1}(\simeq P^{r-1})$ *in this order. Then* $\log(\mu)$ *and* $\log(\xi)$ *are mutually incomparable,* $\log(\nu)<\log(\mu)$, $\log(\nu)<\log(\xi)$, *and the mid-point of the segment* $\overline{\log(\mu)\log(\xi)}$ *coincides with* $\log(\nu)$.

Proof. By assumption there exist positive integers t and s such that $t\cdot\log(\mu)+s\cdot\log(\xi) = (t+s)\cdot\log(\nu)$. Since the left hand side is standard, by $(H_1")$ and (4.1b) in [BrVe], $\log(\mu)$ and $\log(\xi)$ are mutually incomparable, $\log(\nu)<\log(\mu)$, and $\log(\nu)<\log(\xi)$. If we have $t\neq s$ the staightening relation of $\log(\mu)+\log(\xi)$ contradicts $(H_1")$. Hence we have $t=s$.

Corollary 5.2. *A homogeneous toric ASL poset of rank 1 in* $\mathbb{R}^1$ *are equivalent to one of the followings:*

0———1 1———0———1

where i *denotes elements of* $\log(\Pi)$ *of height* i *and the symbol* a———b *denotes that* a *is comparable to* b *and that no element lies strictly between* a *and* b.

Lemma 5.3. *Let* (S, Π) *be a homogeneous toric ASL of rank* $r-1$. *Let* $\log(\mu)$, $\log(\alpha)$, *and* $\log(\zeta)$ *be non-collinear elements of* $\log(\Pi)$ *of height 1, 0, and 1 respectively such that* $\log(\mu)+\log(\zeta)$ *is staightened by* $\log(\alpha)+\log(\nu)$ *for some* $\log(\nu)\in\log(\Pi)$. *Then* $\log(\nu)$ *is comparable to* $\log(\mu)$ *and* $\log(\nu)$ *is also comparable to* $\log(\zeta)$.

Proof. Staightforward.

Lemma 5.4. *Let* Γ *be a homogeneous toric ASL poset of rank* $r-1$ *in* $\mathbb{R}^{r-1}$.

Let p *and* q *be mutually incomparable elements of* Γ. *Then any affine hyperplane passing through the mid-point between* p *and* q *intersects the subset of elements smaller than* p *and* q *or separates the subset into two non-empty subsets lying on mutually opposite sides with respect to the hyperplane.*

Proof. This follows from $(H_2")$.

Now we classify homogeneous toric ASL posets of rank 2.

Theorem 5.5. *Up to equivalence as ASL's, there exist eighteen distinct homogeneous toric ASL's of dimension 3 over a field* k. *They correspond to the homogeneous toric ASL posets of rank 2 as follows:*

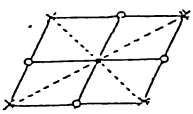


Fig.1

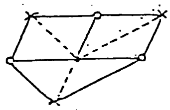


Fig.2

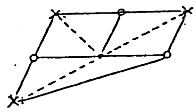


Fig.3

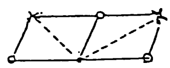


Fig.4

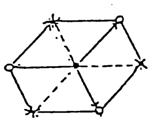


Fig.5

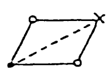


Fig.6

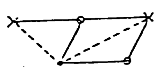


Fig.7

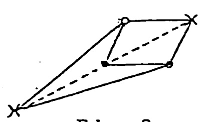


Fig.8

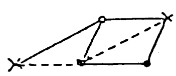


Fig.9

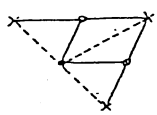


Fig.10

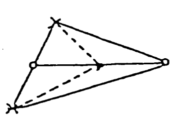


Fig.11

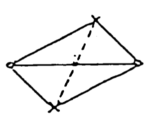


Fig.12

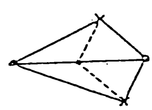


Fig.13

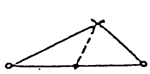


Fig.14

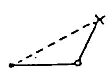


Fig.15

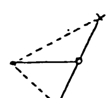


Fig.16

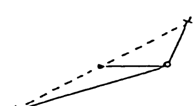


Fig.17

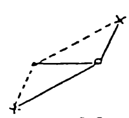
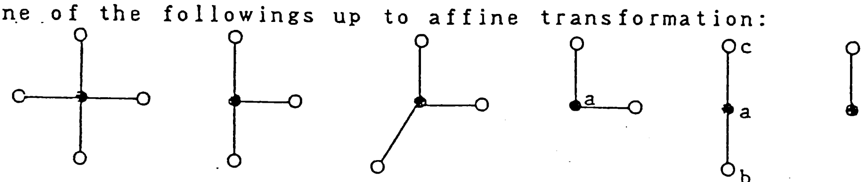


Fig.18

ht ● = 0
ht ○ = 1
ht × = 2

Proof. Let Γ be a homogeneous toric ASL poset of rank 2 in $\mathbb{R}^2$. By (5.3) and (3.1), Γ has less than three elements of ht 1 on the same side with respect to any line passing through the element of ht 0. Therefore the configuration of the elements of ht 0 and ht 1 in Γ is one of the followings up to affine transformation:

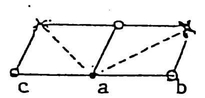


IV $\quad$ III_2 $\quad$ III_1 $\quad$ II_2 $\quad$ II_1 $\quad$ I

The *type* of Γ is the type of the configuration of the elements of ht 0 and ht 1 in Γ. Note that type III_1 may have infinitely many non-isomorphic classes.

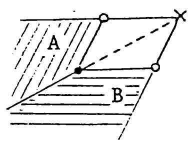
IV: If Γ is type IV, by (5.3), Γ necessarily has four elements of ht 2. Hence the element $\log(\alpha)$ of ht 0 is surrounded by facets not containing $\log(\alpha)$ (3.4). Hence Γ is equivalent to the homogeneous toric ASL poset in Fig. 1.

III_2: If Γ is type III_2, by (5.3), Γ necessarily containds the poset as a subposet:



If Γ has other elements of ht 2 than the elements in the figure above then they are under the line cab by (3.4). It follows from (5.4) that there is only one element of ht 2 in this area. This implies that the element of ht 2 in this area is comparable to the elements b and c. Hence the element of ht 0 is surrounded by facets not containing $\log(\alpha)$ (3.4). By the same way as in (4.1) the position of the element of ht 2 is completely determined (up to affine transformation) by the straightening relations in (H_2) between this element and other elements of ht 2. Therefore if Γ is type III_2 then

Γ is equivalent to one of the homogeneous toric ASL posets in Fig. 2, 3, and 4.
III_1: If Γ is type III_1, by the same way as in IV, Γ is equivalent to the homogeneous toric ASL poset in Fig. 5. As a result we find out that the configuration of the elements of ht 0 and 1 is unique up to affine transformation.
II_2: If Γ is type II_2, Γ contains the following poset as a subposet:



If Γ contains other elements of ht 2 than the elements in the figure above, then they are in the area A and B (including boundary). By (5.4) there is at most one element of ht 2 in each area. Moreover if each area contains an element of ht 2 then they and the element a are collinear. Therefore if Γ is type II_2, by (H_2"), Γ is equivalent to one of the homogeneous toric ASL posets in Fig. 6, 7, 8, 9, and 10.
II_1: If Γ is type II_1, by (H_1"), no element of ht 2 lies on the line cab. It follows from (5.3) and (5.4) that there is at most one element of ht 2 on each side of the line cab, and that the elements of ht 2 are comparable to b and c. Therefore, by the straightening relations in (H_2"), Γ is equivalent to one of the homogeneous toric ASL posets in Fig. 11, 12, 13, and 14.
I: If Γ is type I, by a similar argument as in II_1, Γ is equivalent to one of the homogeneous toric ASL posets in Fig. 15, 16, 17, and 18.

Remark 5.6. T. Hibi (Hi) classifies (up to equivalence) 3-dimensional Gorenstein homogeneous toric ASL's over a field k and the homogeneous toric ASL's which are subrings of $k[x, y, z]^{(3)}$. Note that our homogeneous toric ASL posets is called *toroidal posets* in (Hi). By (5.5) we find out that his classification covers the homogeneous toric ASL's. But he drops the poset in Fig. 16.

Remark 5.7. By the same way, we can classify homogeneous toric ASL's toric ASL's of rank 3. These results will be given elsewhere.

Reference

[BrVe] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal Rings*, Lecture Notes in Math. **1327**, Springer 1988.

[DEP] C. De Concini, D. Eisenbud and C. Procesi, *Hodge algebras*, Astérisque **91**, 1982.

[Ei] D. Eisenbud, Introduction to algebra with straightening laws, in *Ring Theory and Algebra III*, Dekker, 1980, 243-268.

[Hi] T. Hibi, Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains III, *Hiroshima Math. J.* **18** (1988), 299-308.

[Ho] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, *Ann. of Math.* **96** (1972), 318-337.

[HW] T. Hibi and K.-i. Watanabe, Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domain I, *Hiroshima Math. J.* **15** (1985), 27-54.

[No] A. Noma, Toric ASL Domains, in preperation.

[St] R. P. Stanley, Hilbert functinos of graded algebras, *Advance in Math.* **28** (1978), 57-83.

[Wa] K.-i. Watanabe, Study of four-dimensional Gorenstein ASL domains I (Integral posets arising from triangulations of a 2-sphere), in *Commutative Algebras and Combinatorics*, Advanced Studies in Pure Math. 11, Kinokuniya Company Ltd., Tokyo, 1987.

長さ $l_R(I^*/I)$ の評価について — II

東京都立大　中村幸男

1. 序文

Rを可換なNoether環で，標数p（p：素数）をもつものとし，$F^e; R \ni x \longmapsto x^{p^e} \in R$ をFrobenius射とする，qは $q=p^e$ の形の自然数を動くものとし，RのイデアルIに対して $I^{[q]} := F^e(I)\cdot R = (a^q \mid a \in I)R$ とかくことにする。また，$R^\circ := R - \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)} \mathfrak{p}$ とおく。

このときRのイデアルIのtight closure，I^*，は次のように定義される；$R \ni x$ に対し，$x \in I^* \iff {}^\exists c \in R^\circ$ such that $cx^q \in I^{[q]}$ for all $q \gg 0$.

I^* はIを含むイデアルであってとくに $I = I^*$ のときIはtightly closedであるという。またNoether環Rのすべてのイデアルがtightly closedのとき，Rはweakly F-regularであるといい，Noether環Rのすべての局所化がweakly F-regularであるときRはF-regularであるという。

局所環 R が F-rational であるとは，任意のパラメーターイデアルが tightly closed であることをいう。局所環 R が Gorenstein のときには，weakly F-regular と F-rational は同値であることが知られている。

[HH-2 ; Proposition 5.1]

ここで次の問題を考えてみたい。

極大イデアル $\mathfrak{m}$ をもつ局所環 R が与えられたとき，$\mathfrak{m}$－準素イデアル I に対して定まる，関数 $l_R(I^*/I)$ はどのような振る舞いをするか，また，I をパラメーターイデアルに限った場合ではどうか。

そこで，次の定義を与えておく。

定義(1.1). 極大イデアル $\mathfrak{m}$ をもつ局所環 R に対して

$$t(R) := \sup\{\, l_R(I^*/I) \mid I \text{ は } R \text{ の } \mathfrak{m}\text{－準素イデアル} \,\}$$

$$i(R) := \sup\{\, l_R(\overline{I}/I) \mid I \text{ は } R \text{ の } \mathfrak{m}\text{－準素イデアル} \,\}$$

$$s(R) := \sup\{\, l_R(I^*/I) \mid I \text{ は } R \text{ のパラメーターイデアル} \,\}$$

と定める．（但し，$\overline{I}$ は I の整閉包を表わす）

上の記号によれば，我々の問題は $t(R)$，及び $s(R)$ の

値をいかに評価するかということになるが，環の次元が1のとき次の結果を得た。

定理(1.2) Rは極大イデアル $\mathfrak{m}$ をもつ1次元 Noether 局所環で正標数の体を含むものと仮定し，$N=\sqrt{(0)}$

$S=R/N$ とおき，Sの正規化を $\overline{S}$ で表わすことにする．このとき，等式

$$t(R) = i(R) = \ell_S(\overline{S}/S) + \ell_R(N)$$

が成立する。

(1.2)の証明については([中村])を参照．

局所環の次元が2以上の場合は $i(R)=\infty$ ([中村])であることがわかるので，$\dim R \geqq 2$ のとき，$i(R)$ は $t(R)$ の有限性に何も寄与しない．実さい，[HH; proposition 4.16] によると，Rが weakly F-regular であることと $t(R)=0$ とは同値であって，$\dim R \geqq 2$ なら，この場合にも $i(R)=\infty$ となっている。

また $\dim R \geqq 2$ で $0<t(R)<\infty$ となる局所環の例としては，$R=k[X_1,\cdots,X_n]/(X_1)\cap(X_2,\cdots,X_n)$ について $t(R)=1$ がある。([中村])

本稿では、今年9月に京都大学数理解析研究所で述べた内容の続きとして、特に $s(R)$ の値、及び有限性について議論していきたいと思う。

まず、第2節では、いくつかの例をみることにする。

第3節では、少し $s(R)$ の話題とは離れて、F-rational 環の局所化について述べるが、これは第4節に続く準備でもあり、また F-rational という性質が "local property" であるということを示したものでもある。

第4節では、$s(R)$ の有限性についての特徴付けを環が Gorenstein である場合に限って、議論したい。そして $s(R)$ の有限性が R の "test ideal の大きさ" 及び "non-F-regular locus" に深くかかわっていることを述べる。

最後になりましたが、この研究の遂行にあたり、後藤四郎先生と渡辺敬一先生から多大の助言を頂きましたことを記し、感謝の言葉にかえさせて頂きます。

2、諸例

まず、Buchsbaum 環の例からみてみよう。

例(2.1). k を正標数の体, $S=k[[X,Y]]$ を 2変数の巾級数環とし, $R=k+(X^2,XY,Y^2)S$ とおく,
このとき、 $t(R)=\infty$ であるが, $s(R)=4$ となる.

証明) R の正規化 S は正則環で, R の極大イデアル $\mathfrak{m}=(X^2,XY,Y^2)S$ が conductor になっていることに注意すれば, R のイデアル I に対して

$$I^*=IS$$

であることが確かめられる。

一方, S は有限生成な Cohen-Macaulay R-加群であるから R は 2次元の Buchsbaum 環で

$$I(R)=l_R(S/R)=2$$

であることがわかる。 [SV ; Introduction Example 3]

ここで I を R のパラメーターイデアルとすれば

$$l_R(R/I)=e_I(R)+I(R)=e_I(R)+l_R(S/R)$$

一方, $$e_I(R)=e_I(S)=e_{IS}(S)=l_S(S/IS)$$

であることから

$$
\begin{aligned}
& \ell_R(I^*/I) \\
= {} & \ell_R(S/R) + \ell_R(R/I) - \ell_S(S/IS) \\
= {} & \ell_R(S/R) + \{ e_I(R) + \ell_R(S/R) \} - e_I(R) \\
= {} & 2 \cdot \ell_R(S/R) \\
= {} & 4
\end{aligned}
$$

— Fig. —

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
IS \arrow[r] \arrow[d, equal] & S \arrow[d] \\
I^* \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[dl] \\
I &
\end{tikzcd}
$$

次に $t(R)$ については，自然数 $n \geqq 2$ に対して

$$I_n = (X, Y)^n S$$

と定めると，I_n は R の m-準素イデアルで，$I_n^* = I_n S$

であることから，

$$\ell_R((I_n)^*/I_n) = \ell_R(I_nS/I_n) = n+1$$

これは $t(R) = \infty$ を意味する。

上の例から、$t(R)$ よりはむしろ $s(R)$ についての考察のほうが興味深く思えてくる。さらに $s(R)$ の有限性について次のようなこともいえる。

<u>命題 (2.2)</u> R は正標数の体を含む局所環で，$\dim R \geqq 2$, $\operatorname{depth} R \geqq 2$ であると仮定する。このとき，$s(R) < \infty$ なら R は normal である.

証明） $\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルで，$\ell = s(R)$ とすると，任意のパラメーターイデアル I に対して $\mathfrak{m}^{\ell} I^{*} \subset I$．

このことより，R－正則な元 $a \in R$ に対し $\overline{(a)} = (a)$ であることを示そう。

実際，$\{a = a_1, a_2, \cdots, a_d\}$ を R のパラメーター系とすれば自然数 n に対し，

$$\mathfrak{m}^{\ell}(a_1)^{*} \subset \mathfrak{m}^{\ell}(a_1, a_2^n, \cdots, a_d^n)^{*} \subset (a_1, a_2^n, \cdots, a_d^n)$$

故に
$$\mathfrak{m}^{\ell}(a)^{*} \subset (a)$$

また，$\operatorname{depth} R/aR \geqq 1$ より，$b \in \mathfrak{m}$ を R/aR－正則元ととれば，

$$b^{\ell} \cdot (a)^{*} \subset (a)$$

故に，
$$\overline{(a)} = (a)^{*} = (a) \qquad \text{[HH-1; Corollary 5.8]}$$

を得る。

このことより，R は被約であり，全商環の中で整閉であることが確かめられる。 故に R は normal．

<u>例 (2.3)</u>． k を正標数の体，$k[X, Y, Z]$ を 3 変数多項式環として $R = k[X, Y, Z]/XYZ$ に対しては $s(R) = \infty$ である。

これは，(2.2) より直ちに得られる．

3. F-rational 環の局所化について,

次の補題から始めよう。

<u>補題(3.1).</u> Rは正標数の体を含むNoether環で Rの元の列, $f_1, \cdots, f_r$ は正則列であるとする。このとき, $[(f_1, \cdots, f_{r-1})R]^* R_{f_r} = [(f_1, \cdots, f_{r-1})R_{f_r}]^*$ である。

証明) $I = (f_1, \cdots, f_{r-1})R$, $f = f_r$ とおいて

$$(IR_f)^* \subset I^* R_f$$

を示せばよい。

$R \ni x$ を $x/1 \in (IR_f)^*$ ととれば, $c \in R$ があって, $c/1 \in (R_f)^\circ$ で, $cx^q/1 \in I^{[q]}R_f$ for all $q \gg 0$

ここで $c \in R^\circ$ ととれる。

また自然数 ν により $f^\nu c x^q \in I^{[q]} = (f_1^q, \cdots, f_{r-1}^q)R$ で, $f_1^q, \cdots, f_{r-1}^q, f^\nu$ は R-正則列であるから

$$cx^q \in I^{[q]} \qquad \text{for all } q \gg 0$$

故に $\qquad x \in I^*$

を得る。

補題 (3.2). Rは正標数の体を含むNoether環，
Iは Rのイデアルで，$\mathrm{Ass}_R(R/I) \subset \mathrm{Max}(R)$ をみたすものとする。
このとき，
$$I^* R_{\mathfrak{p}} = (I R_{\mathfrak{p}})^* \quad \text{for all } \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$$
である。

証明) $\mathrm{Ass}_R(R/I) = \{\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_r\}$，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$ として，
$$I^* R_{\mathfrak{m}} = (I R_{\mathfrak{m}})^*$$
を示せばよい。 なお，$r=1$ のとき，すなわち I が $\mathfrak{m}$-準素イデアルのときには既に証明されている。
[HH-1 ; Proposition 4.14]

Iの準素分解を $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ 但し各 $\mathfrak{q}_i$ は $\mathfrak{m}_i$-準素イデアル とすれば，各 $\mathfrak{q}_i$ は互いに素なので，
$$I = \mathfrak{q}_1 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{q}_r$$
とイデアルの積にかけ，F^eは環準同型であるから
$$I^{[q]} = \mathfrak{q}_1^{[q]} \cdots \mathfrak{q}_r^{[q]}$$
を得るが，このことより
$$I^* = \mathfrak{q}_1^* \cdots \mathfrak{q}_r^*$$
であることが確められる.
この両辺を $\mathfrak{m}$ で局所化すれば，

$$I^*R_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{q}^*R_{\mathfrak{m}}$$ 但し $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}$ とおいた。

また、$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルだから、$\mathfrak{q}^*R_{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{q}R_{\mathfrak{m}})^*$.

従がって、

$$I^*R_{\mathfrak{m}} \subset (IR_{\mathfrak{m}})^* \subset (\mathfrak{q}R_{\mathfrak{m}})^* = \mathfrak{q}^*R_{\mathfrak{m}} = I^*R_{\mathfrak{m}}$$

を得る。

<u>命題(3.3).</u> R は正標数の体を含む d 次元 Cohen-Macaulay 局所環で、$f_1, \cdots, f_d$ を R のパラメーター系とする。このとき、

$$(f_1, \cdots, f_{d-1})^*R_{\mathfrak{p}} = [(f_1, \cdots, f_{d-1})R_{\mathfrak{p}}]^*$$

for all $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} R$

証明) $I = (f_1, \cdots, f_{d-1})R$, $f = f_d$ とおく

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I)$ に対して $I^*R_{\mathfrak{p}} = (IR_{\mathfrak{p}})^*$ を示せばよい.

また、このとき、$\mathrm{Ass}_{R_f}(R_f/IR_f) \subset \mathrm{Max}(R_f)$

であるから、

(3.2) より $(IR_f)^*R_{\mathfrak{p}} = (IR_{\mathfrak{p}})^*$

(3.1) より $I^*R_f = (IR_f)^*$

故に $I^*R_{\mathfrak{p}} = (IR_{\mathfrak{p}})^*$

を得る。

__定理 (3.4).__ R を正標数の体をもつ，F-rational，Cohen-Macaulay 局所環とする。
このとき $R_{\mathfrak{p}}$ も F-rational for all $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

証明） $d = \dim R \geqq 2$ で，$\dim R/\mathfrak{p} = 1$ のとき $R_{\mathfrak{p}}$ が F-rational であることを示せばよい。

$f_1, \cdots, f_d$ を R のパラメーター系で，$f_1, \cdots, f_{d-1} \in \mathfrak{p}$ となるものとし，$I = (f_1, \cdots, f_{d-1})R$ とおく，[FW ; Proposion 2.2] によれば，$(IR_{\mathfrak{p}})^* = IR_{\mathfrak{p}}$ を示せば十分である.

一方，R が F-rational ということから，$I = I^*$ であることが確められる.

よって，(3.3) より $I^*R_{\mathfrak{p}} = (IR_{\mathfrak{p}})^*$ であったから

$$(IR_{\mathfrak{p}})^* = I^*R_{\mathfrak{p}} = IR_{\mathfrak{p}}$$

を得る. （証明終）

なお，(3.4) の Cohen Macaulay という仮定については，R が正則環上 torsion free な有限生成加群であるとき，F-rational ならば，Cohen-Macaulay であることが知られている。 [HH-1 ; Theorem 4.9]

4. $s(R)$ の有限性について,

はじめに，いくつかの定義を述べておく。

定義(4.1) 環 R を Frobenius 射 F^e を通して R-加群とみたものを ${}^eR$ で表わすことにする。R-加群 M とその R-部分加群 N に対し N の tight closure N^* を次のように定義する; $x \in M$ に対して，$x \in N^* \iff {}^\exists c \in R^\circ$ such that $c \otimes x \in \mathrm{Im}({}^eR \otimes_R N \to {}^eR \otimes_R M) \subset {}^eR \otimes M$ for all $e \gg 0$

定義(4.2). $c \in R^\circ$ が test element であるとは，すべての R のイデアル I と R の元 $x \in I^*$ とに対して $cx^q \in I^{[q]}$ for all $q > 0$ が成立することをいう。test element で生成されたイデアルを test ideal という.

本節では次の定理を証明する。

定理(4.3). R は正標数の体を含む Gorenstein 局所環で，極大イデアルを $\mathfrak{m}$, R の test ideal を $\mathfrak{a}$ とする。このとき 次の (1), (2) は同値で,

(1) ならば (3) が成立する。

(1) $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアル.

(2) $s(R) < \infty$

(3) $R_{\mathfrak{p}}$ は weakly F-regular for all $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R - \{\mathfrak{m}\}$

なお、(2) ⇒ (1) の証明は、渡辺敬一先生によって示された。
(3) ⇒ (1) については環 R が Gorenstein 整域で、${}^1R$ が R 上有限生成加群の場合は証明されている。

[HH-3 ; Theorem 3.4]

また、(3) の成立より直ちに、

(3)′ ; $R_{\mathfrak{p}}$ は F-regular for all $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R - \{\mathfrak{m}\}$

を得る.

証明) (1) ⇒ (2) ; $d = \dim R$ として $I = (a_1, \cdots, a_d)R$ を R のパラメーターイデアルとすれば、

$$R/I \subset E = \varinjlim_n R/(a_1^n, \cdots, a_d^n) \quad (E \text{ は } R/\mathfrak{m} \text{ の inj. hull})$$

であり、$\mathfrak{a}$ が test ideal なので $\mathfrak{a} \cdot I^*/I = 0$ を得る

故に、$I^*/I \subset [0 \underset{E}{:} \mathfrak{a}] \cong \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, E)$

これより、$l_R(I^*/I) \leqq l_R(R/\mathfrak{a})$

が従がう。

(2) ⇒ (1)；　Rのパラメーターイデアル Qに対し，$Q^*/Q = (0)^*_E \cap R/Q$
なので，$l = s(R)$ とすれば，$m^l(Q^*/Q) = (0)$ であるから
任意の $x \in (0)^*_E$ に対し $m^l \cdot x = (0)$
従がって $m^l \cdot (0)^*_E = (0)$ を得る。

一方，Rの任意のイデアル I に対して，

$$I^* \cdot [0 :_E I] \subset (0)^*_E$$

であることが確かめられる。

従がって，$m^l I^* \cdot [0 :_E I] = (0)$

故に $m^l I^* \subset 0 :_R [0 :_E I] = I$

これは test ideal が m^l を含むことを意味する。

(1) ⇒ (3)；

R が Gorenstein なので，$R_\mathfrak{p}$ が F-rational を示せばよい．
また，(3.4) より $\dim R/\mathfrak{p} = 1$ のときを示せばよい．
(1) の仮定より，$\exists g \in \mathfrak{a} - \mathfrak{p}$.
$f_1, \cdots, f_{d-1} \in \mathfrak{p}$ を Rのパラメーター系の一部とすれば，

$$g \cdot (f_1, \cdots, f_{d-1})^* \subset (f_1, \cdots, f_{d-1})$$

であり，両辺を $\mathfrak{p}$ で局所化して．

$$(f_1, \cdots, f_{d-1})^* R_\mathfrak{p} = (f_1, \cdots, f_{d-1}) R_\mathfrak{p}$$

(3.3) より $[(f_1, \cdots, f_{d-1}) R_\mathfrak{p}]^* = (f_1, \cdots, f_{d-1}) R_\mathfrak{p}$.

これは $R_\mathfrak{p}$ が F-rational であることを意味する．（証明終）

参考文献

[HH-1] : M. Hochster and C. Huneke , Tight closure, invariant theory and the Briançon-Skoda theorem I , preprint.

[HH-2] : ________. Tight closure , Proc. of program in comm. alg. MSRI , Berkeley (1987)

[HH-3] : ________, Tight closure and strong F-regularity, to appear, Mémoire de Societé Math. de France , V. dedicaté á P. Samuel.

[FW] : R. Fedder and K.-i. Watanabe , A characterization of F-regularity in terms of F-purity , "Comm. Alg.", Proc. Microprogram , Berkeley , 1987 , 227-245 , Springer, 1989

[中村] : Y. Nakamura , 長さ $l_R(I^*/I)$ の評価について, 数理解析研究所講究録, Frobenius写像の可換環論への応用, 1989. 9.18. ~ 9.22.

[SV] : J. Stückrad and W. Vogel , Buchsbaum rings and Applications , springer-Verlag

Regular ring 上の monoidal transform について

下田保博

序

(R, m)をd次元 regular local ringとする。(以後略してRLRと表すことにする。)

定義1 (R, m), (S, n)を2つのRLR's とする。SとRが双有理的でかつSがRを支配するとき(つまり$n \cap R = m$をみたすとき) $S > R$とあらわす。

定義2 $\{x_1, \ldots, x_d\}$をRのregular s. o. pとする。$S = R[x_2/x_1, \ldots, x_d/x_1]_Q$でQは素イデアルかつ$Q \cap R = m$となるとき、SをRの quardratic transform と呼ぶ。

このとき、つぎのことが知られている。

定理A([1]). R, Sを2-dim RLR's で$R \subseteq S \subseteq Q(R)$とする。このとき、Sはquardratic transform の有限列から得られる。

3次元以上のときは、上の定理は成立しないが(参照[3])次のことは知られている。

定理B([2]) $R < S$で$\dim S = \dim R$とする。このとき、RとSの間にあるRLR's の列の長さは有限である。

さらにその論文の中で次のような問いが与えられている。

問題　$R<S$ を d-dim RLR's とする。このとき
$n=n(S,R)>0$ が存在して「RとSの間のRLR'sの列の長さは n をこえない」をみたすか？

この問題に関してはたとえば
（1）　x, y がRの regular sub s.o.p で $S=R[y/x]_N$ のとき
（2）　a. b はR－列で $a\in m^2$, $b\notin m^2$ かつ (a,b) は素イデアルで $S=R[b/a]_N$ のとき、
を考えると、いづれもSとRの間にRLRは存在しないことが知られている。（参照［3］，［4］）。こうしたSを simple ext. とよぶことにする。
この報告集では次の形のSについて上の問題を考えてみることにしたい。
a, b はR－列で $S'=R[b/a]$ とし、Nは S' の極大イデアルで $\mathrm{ht}\,N=d$ のものとする。$S=S'_N$ とし、regular になるものとしておく。まず、Sが regular になるための条件は次の形で与えられる。

命題C（［3］）　$S=R[b/a]_N$ が regular である⇔
次のどれかが成り立つ
（1）　a, b はRの regular s.o.p で、Nは任意
（2）　$a\in m^2$, $b\notin m^2$, Nは任意
（3）　$a\notin m^2$, $b\in m^2$, $N\neq(m, b/a)$
（4）　$a\notin m^2$, $b\notin m^2$, $c=a+ub\in m^2$　$(u\in U(R))$ で、$N\neq(m, b/a+u^{-1})$.

（1）は前に述べたように、simple ext. であり、（4）の $R[b/a]_N$ は $R[c/a]_N$ と同じなので、（3）の形に常に直せる。よってここでは（2），（3）について調べることにしたい。主結果は次のようになる。

定理　命題Cでの（2），（3），（4）でのSに対しては、RとSの間の regular local ringはすべて $R[e/f]_{(m, e/f)}$ の形になる。（e，fについては本文の定理2．5と2．6を参照されたい。）従ってRLR'sの列の長さはRとSのみによってきまる。

I．2次元の場合

まず（2）のa，bに対してはある $x \in m$ が存在して次が成立する。

①$m=(x, b)$　②自然数 $k \geqq 2$ と $t \in m$ が存在して $a=x^k+tb$ と表される。

（3）のa，bに関しては、（（4）のa，cについても同じことであるが、）ある $y \in m$ が存在して

①$m=(a, y)$　②自然数 $m \geqq 2$ と $s \in m$ があって $b=sa+y^m$ と表せることに注意しておく。このとき

定理1．1（1）　$a \in m^2$，$b \notin m^2$ のとき、RとS$_1$ $=R[b/a]_N$ の間のRLR'sは $R[b/x^i]_{(m, b/xi)}$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ のみ。

（2）　$a \notin m^2$，$b \in m^2$ のとき、RとS$_2$ $=R[b/a]_N$ $(N \neq (m, b/a))$ の間のRLR'sは $R[a/y^i]_{(m, a/yi)}$ $(1 \leqq i \leqq m-1)$ のみ

この定理の証明には、以下の補題を用いる。まず

補題1．2　Rを2－dim RLRとし、$m=(x, y)$ とおく。このとき、$T>R$ となる任意の2－dim RLRに対して、x/y or $y/x \in T$.

この補題は定理Aから容易に導かれる。この補題を用いると次が得られる。

補題1．3　(1)　$m=(x,\ b)$で$a=x^k+tb$　$(t\in m)$とする。このとき$R<T<S_1=R[b/a]_N$なるRLR'sの列を考えると常に$R[b/x]_{(m,\ b/x)}<T$となる。

(2)　$m=(a,\ y)$で$b=sa+y^m$　$(s\in m)$とするとき$R<T<S_2=R[b/a]_N$となるRLR'sの列に対して
$R[a/y]_{(m,\ a/y)}<T$が成り立つ。

この補題により定理はk（またはm）の帰納法で証明することができる。

II　一般次元の場合

煩雑を避けるために、$a\in m^2$，$b\notin m^2$の場合のみ、述べることにする。$d\geqq 3$以上では、定理Aが使えないので、2次元にreduceする方法を見つけることにすれば、Iの定理1．1を用いることができる。そのための手段として、次の補題を用意する。

補題2．1　a，bをR－列とする。$\mathrm{Ass}(R/(a,\ b))$
$=\{P_1,\ ....,\ P_r\}$に対してRの元の列$p_1,\ ....,\ p_r$が
存在して

① $P_i=(b,\ p_i)R$
② $\overline{p}_i$は$\overline{R}=R/bR$で素元
③ p_iはRの素元
④ $a=up_1^{n_1}...p_r^{n_r}+tb$　$(t\in m,\ u\in U(R),$
$n_1,\ ....,\ n_r>0)$

今　$S=R[b/a]_N$とおく。そのとき

補題2．2　任意の$\mathrm{Ass}R/(a,\ b)$の元Pにたいして$Q\in$
$\mathrm{Spec}(S)$が存在して$Q\cap R=P$かつ$\dim S_Q=2$が成り立つ。

keyになる補題は次のものである。

補題2.3　$\mathrm{Ass}R/(a,b)=\{P_1,\ldots,P_r\}$について

$$R=R_{P_1}\cap\ldots R_{P_r}\cap R[b/a]_N$$

が成り立つ。

$S=R[b/a]_N$に対して$R<T<S$となるRLRを考えて$Q_i'=Q_i\cap T$とおく。このとき

系2.4　(1)　任意のiについて$T_{Q_i'}=R_{P_i}$ならば、$T=R$である。
(2)　任意のiについて$T_{Q_i'}=S_{Q_i}$ならば、$T=S$

さて主結果は次のようになる。

定理　2.5　$a=up_1^{n_1}\ldots p_r^{n_r}+tb$とし、$n=\Sigma n_i$とおく。$\alpha_k$を$p_1,\ldots,p_r$のmonomialで$\deg\alpha_k=k$ $(1\leqq k\leqq n-1)$のものとする。このとき、$S=R[b/a]_N$とRの間のregular local ringは
$R[b/\alpha_k]_{(m,b/\alpha_k)}$のみである。

以下で定理の概略を述べることにする。

任意の$\mathrm{Ass}R/(a,b)$の元　P_i　(=Pとおく。)に対して$Q_i=Q$, $Q_i'=Q'$としておく。

① $P_P=(a,b)R_P$

② $P_P\neq(a,b)R_P$, $t\in P$

③ $P_P\neq(a,b)R_P$, $t\notin P$

の場合に、それぞれ$T_P<T_Q'<S_Q$を考える。$\dim R_P=\dim T_Q'=\dim S_Q=2$となるので、2次元の場合から①, ②, ③のいづれに対しても

$T_Q'=R_P$　or　$T_Q'=S_Q$　or　$T_Q'\ni b/p_i^{j_i}$ $(1\leqq j_i$

$\leqq n_i - 1$）が成立することがわかる。

このとき $P_1, ..., P_r$ の番号を次のように付け替える。

$$1 \leqq i \leqq i_0 \text{ で } TQ_i' = RP_i$$
$$i_0 + 1 \leqq i \leqq i_1 \text{ で } TQ_i' \ni b/p_i^{j_i n}$$
$$i_1 + 1 \leqq i \leqq r \text{ で } TQ_i' = SQ_i$$

系2．4より $i_0 \neq r$, $i_1 \neq 0$ が成り立つことに注意しておく。このとき、

$$c = p_{i_0+1}^{j_{i_0}+1} ... p_{i_1}^{j_{i_1}} p_{i_1+1}^{n_{i_1}+1} ... p_r^{n_r}$$

とおくと、$b/c \in T$ が主張できる。そうすれば、

$R' = R[b/c]_{(m, b/c)}$ とおくことにより $R' < T < S =$

$R'[(b/c)/(a/c)]_{N'}$ となる。

$$a/c = u p_1^{n_1} ... p_{i_0}^{n_{i_0}} p_{i_0+1}^{k_{i_0}+1} p_{i_1}^{k_{i_1}} + tb/c$$

より $n = \Sigma n_i$ の帰納法で定理の結果が証明される。

（3）　については結果だけを述べて置くことにする。

定理2．6　$a \notin m^2$, $b \in m^2$, $N \neq (m, b/a)$ とし、

$$b = sa + u p_1^{n_1} ... p_r^{n_r} \quad (s \in m)$$

と表したとき、RとSの間のRLRは $R[a/\beta_k]_{(m, a/\beta k)}$ のみである。ここで、β_k は $p_1, ..., p_r$ のmonomialで $\deg \beta_k = k$ $(1 \leqq k \leqq \Sigma n_i - 1)$ とする。

References

1　S. Abhyanker, On the valuations centered in a local domain, Amer J. Math. 78 (1956) 321-348.

2　B. Johnston, A finiteness condition on regular local overrings of a local domain, T. A. M. S. 299

(1987) 513−524.
3 J. Sally, Regular overrings of regular local rings, T. A. M. S. 171 (1972) 291−300.
4 D. Shannon, Monoidal transforms of regular local rings, Amer. J. Math. Soc. 95 (1973) 294−320.

イデアルの生成元の個数

衛藤　和文
（早大・理工）

Aをネーター環、IをAのイデアルとし、μで最小生成元の個数を表そう。このとき、一般に、$\mu(I)=\mu(I/I^2)$ または、$\mu(I)=\mu(I/I^2)+1$ で、そのどちらの場合もそのようなAとIの例が知られている。そこで、$R=A[T]$, $J=IR+TR$ とするとき、$\mu(J)=\mu(I)+1$ の成立と、$\mu(I)=\mu(I/I^2)$ の関係について、これから論じる。一見、$\mu(J)=\mu(I)+1$ は、一般に成り立ちそうであるが、実際、反例があり、しかも、この報告においても、それが成り立つための条件さえわかっていない。もし、体k上の多項式環の任意のイデアルについて、$\mu(J)=\mu(I)+1$ が成り立てば、（Theorem 1）より、*Murthy's Question*（体上の多項式環の任意のイデアルについて、$\mu(I)=\mu(I/I^2)$）の全面解決を意味するので、このような場合でも、$\mu(J)=\mu(I)+1$ の判定は、かなり難しいことがわかる。

以下、記号を次のように定める。

A：ネーター環
I：Aのイデアル
$R=A[T]$
$J=IR+TR$

（Theorem 1）
$\mu(J)=\mu(I)+1$ ならば、$\mu(I)=\mu(I/I^2)$。

（証明）
$\mu(I/I^2)=r$とし、$I=(a_1,\cdots,a_r)+I^2$ とする。
$\exists e\in I$, $I=(e,a_1,\cdots,a_r)$, $e\equiv e^2 \mod (a_1,\cdots,a_r)$ となる（[3]）。このとき、
$J=(e,a_1,\cdots,a_r,T)=(e+(1-e)T,a_1,\cdots,a_r)$.

$$\therefore\ \mu(J)\leqq\mu(I/I^2)+1$$
$$\therefore\ \mu(I)+1\leqq\mu(I/I^2)+1$$
$$\therefore\ \mu(I)\leqq\mu(I/I^2)\quad \text{より。}$$

(Ｅｘａｍｐｌｅ　１．１)
Ｉが、complete intersection (ｉ．ｅ．$\mu(I)=$ ｈｔ　Ｉ)のとき、
$\mu(J)=\mu(I)+1$。
(Ｅｘａｍｐｌｅ　１．２)
$\mu(I)=1$　のとき、
$\mu(J)=\mu(I)=1 \Leftrightarrow I$ が idempotent で生成されている。
(証明)(Ｔｈｅｏｒｅｍ　２．１)と同様に、
$\mu(I/I^2)=1 \Rightarrow \mu(J/J^2)=2$
ゆえに、$\mu(J)=\mu(I)=1 \Leftrightarrow \mu(I/I^2)=0$　より。
(Ｅｘａｍｐｌｅ　１．３)
$A=\mathbb{R}[X, Y]/(X^2+Y^2-1)$，$\mathbb{R}$：実数体，$I=(x-1, y)$，
ただし、ｘ，ｙは、Ｘ，ＹのＡでの像、とする。このとき、$\mu(I)=2$，
$\mu(J)=2$である。
(Ｅｘａｍｐｌｅ　１．４)(ｃｆ．[２])
一般に、ＡがＵＦＤのとき、$\mu(I)=2$　ならば、$\mu(J)=3$　である(Ｃｏｒ．２．５)．しかし、$\mu(I)=3$　でも、$\mu(J)=4$　とは限らない。例として、$A=\mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2+Y^2+Z^2-1)$，$I=(x-1, y, z)$とすると、このとき、$\mu(I)=3$，$\mu(I/I^2)=2$　より、$\mu(J)=3$　である。

以下、$\mu(J/J^2)=\mu(I/I^2)+1$　－(＊)　の成立について論じる。これが一般に成り立つかどうかはわからないが、$\mu(J)=\mu(I)+1$　と違って、それが成り立つ場合が多く知られている。もし、(＊)が成り立つと、" $\mu(I)=\mu(I/I^2)$　ならば、$\mu(J)=\mu(I)+1$ " がいえ、これは、(Ｔｈ．１)の逆で、ゆえにその２つの条件は同値であることがわかる。さらに(＊)より、$\mu(J)=\mu(J/J^2)$　がわかり、これは、「多項式環のｍｏｎｉｃを含むイデアルについて、$\mu(I)=\mu(I/I^2)$　が成り立つか。」という問題の特別な場合の解答になっている。
(Ｔｈｅｏｒｅｍ　２．１)
$\mu(I/I^2)=r$　のとき、もし、任意のｒａｎｋ　ｒ－１のｓｔａｂｌｙ ｆｒｅｅ　Ａ／Ｉ－加群がｆｒｅｅならば、$\mu(J/J^2)=r+1$。

証明に入る前に、Ｃｏｒｏｌｌａｒｙをあげる。

（Cor．2．3）

Aが局所環のとき、$\mu(J/J^2)=\mu(I/I^2)+1$．

さらに、$\mu(J)=\mu(I)+1$．

また、rank1 stably free 加群はfreeより、

（Cor．2．4）

$\mu(I/I^2)=2$ ならば、$\mu(J/J^2)=3$．

（Cor．2．5）

A：UFDのとき、$\mu(I)=2$ ならば、$\mu(J)=3$．

（証明）（Cor．2．4）より、$\mu(I)=\mu(I/I^2)$ を示せば十分．

しかし、A：UFDより、ht $I\geqq 2$としてよいので、

$2=\mathrm{ht}\ I\leqq\mu(I/I^2)\leqq\mu(I)=2$ より．

また、Bass's Cancellation より、

（Cor．2．6）

$\mu(I/I^2)\geqq\dim A/I+2$ のとき、$\mu(J/J^2)=\mu(I/I^2)+1$

（Th．2．1の証明）

$\mu(J/J^2)=\mu(I/I^2)=r$ と仮定すると、全射 $f:(A/I)^r\to J/J^2$ をえる。$J/J^2=I/I^2\oplus A/I$ より、fを$g:(A/I)^r\to I/I^2$と $h:(A/I)^r\to A/I$ とに分解する。このとき、Ker h は、仮定より、freeになり、ゆえに、$(A/I)^r$上の同型τが存在し、$h\tau=p$ となる。ただし、pは$(A/I)^r$からA／Iへの射影。$e_1,\cdots,e_r$を$(A/I)^r$の基底とする。$I=(g(e_1),\cdots,g(e_r))+I^2$ より、$a_i=g\tau(e_i)$とすると、$I=(a_1,\cdots,a_r)+I^2$ となる。すなわち、$J/J^2=\mathrm{Im}\ f\tau=(a_1+T,a_2,\cdots,a_r)+J^2$．だが、mod $T+a_1$としたとき、J/J^2はI／I^2になるので、上式は、$\mu(I/I^2)=r$に反する。ゆえに、$\mu(J/J^2)=r+1$．証明終．

最後に特別な場合として、体k上の多項式環について考える。まず、次の定理が成り立つ。$A=k[X_1,\cdots,X_n]$ とするとき、

（Theorem 3．1）（Mohan Kumar）

$\mu(I/I^2)\geqq\dim A/I+2$ ならば、$\mu(I)=\mu(I/I^2)$．

そこで、（Cor．2．6）より、

(Cor. 3. 2)

$\mu(I/I^2) \geqq \dim A/I+2$ ならば、$\mu(J)=\mu(I)+1$.

ゆえに、特別な場合として次の結果を得る。

(Ⅰ) $n=3$のとき、$\mu(J)=\mu(I)+1$.

(証明) $I\neq 0$としてよいので、$\dim A/I \leqq 2$. ゆえに、$\mu(I/I^2)\geqq 4$ のときは(Cor. 3. 2)より。$\mu(I/I^2)\leqq 2$ のときは、[1]より。残るのは$\mu(I/I^2)=3$、$\mathrm{ht}\ I=1$のときのみ。このとき、A:UFDより、$I=fI'$となるIの元 fと、$\mathrm{ht}\ I'\geqq 2$なるイデアルが存在する。このとき、$J'=I'R+TR$とすると、$\mu(J')=\mu(I')+1$, $\mu(J)\geqq\mu(J')$, $\mu(I)=\mu(I')$より、$\mu(J)=\mu(I)+1$.

(Ⅱ) $n=4$, $k=\bar{k}$のとき、$\mu(J/J^2)=\mu(I/I^2)+1$.

(証明) $k=\bar{k}$より、*Suslin's Cancellation* と、(Cor. 2. 6)から、$\mu(I/I^2)\geqq \dim A/I+1$ のとき、$\mu(J/J^2)=\mu(I/I^2)+1$. ゆえに、(Ⅰ)と同様に、$\mathrm{ht}\ I=1$, $\mu(I/I^2)=3$の場合が残る。I', J'を同じように定義すると、[1]より、$\mu(I')=3$から、$\mu(I'/I'^2)=3$をえる。以下は、(Ⅰ)と同様に示される。

参考文献

[1] M.Boratyński, A note on the set-theoretic complete intersection ideals, J.Alg.54(1978)1-5.

[2] A.Geramita and C.Weibel, Ideals with trivial conormal bundle, Can.J.Math.32,1980,210-218.

[3] E.Kunz, Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Birkhäuser, 1985.

[4] N.Mohan Kumar, Complete Intersections, J.Math.Kyoto 17,533-538(1977).

[5] N.Mohan Kumar, On two conjectures about polynomial rings, Invent.math.46(1978)225-236.

2変数多項式環におけるp－基底

木村哲三 (東京理科大学工学部 II 部),

新妻弘 (日本工業大学).

定理. k を標数 p の完全体とする. $A = k[x_1, x_2]$ と $B = k[y_1, y_2]$ を 2 変数多項式環で $A \supset B \supset A^p$ かつ $[k(x_1, x_2) : k(y_1, y_2)] = p$ なるものとする. このとき, つぎが成り立つ.

(1) A は B 上に p-基底をもつ.

(2) B は A^p 上に p-基底をもつ.

k が代数的閉体という仮定の元に R. Ganong [2] はこの定理よりより精密な結果を得ている. しかしながら彼の証明は, 彼自身の平面代数曲線の理論と Hamburger-Noether expansion の概念に深く依存している. 我々はこの定理を, p-基底が局所的には存在することの応用としてより代数的に証明する.

定義 (S. Yuan [8]). $A \supset B$ を標数 p の環とする. A と B がつぎの条件を満足するとき, A は B のガロア拡大という.

(1) A は 有限生成 B-加群.

(2) $A \supset B \supset A^p$.

(3) A は 局所的に B 上に p-基底をもつ. いいかえると A の任意の素イデアル Q について $q = Q \cap B$ とおくと A_Q は B_q 上に p-基底をもつ.

定理 (S. Yuan [8]). $A \supset B \supset C$ を標数 p の環とする. A は B のガロア拡大でかつ A は C のガロア拡大とすれば, つぎが成り立つ.

(1) B は C のガロア拡大である.

(2) $Der_C(B)$ の元は $Der_C(A)$ の元に一意的に拡張される.

(3) $Der_C(A) = A \cdot Der_C(B) \oplus Der_B(A)$.

定理 (松村, Theorem 27.3, [7]). A を標数 p の環, $D \in Der(A), x \in A, Dx = 1, D^p = 0$ とする. $A_0 = \{a \in A \mid Da = 0\}$ とおけば, A は A_0 上に $\{x\}$ なる p-基底をもつ.

定理 (K-N,[3]). R と R' を正則局所環で $R \supset R' \supset R^p$ なるものとする．このとき R が R'-加群として有限生成であれば，R は R' 上に p-基底をもつ．

Lemma 1. A と B は定理と同じものとすると，A は B 上ガロアでありかつ A^p 上でもガロアとなり 従って，B は A^p 上ガロアとなる．さらに，つぎが成り立つ．

(1) $Der_B(A)$ は 階数 1 の 自由 A-加群である．

(2) $Der_{A^p}(B)$ は 階数 1 の 自由 B-加群である．

（証明）A の任意の素イデアル Q に対して $q = B \cap Q$ とおけば $A_Q \supset B_q \supset (A_Q)^p$ となり，これらは正則局所環である．A_Q は有限生成 B_q-加群であるから，定理 (K-N) より A_Q は B_q 上に p-基底をもち その個数は 1 である．ゆえに，A は B 上ガロア拡大である．

つぎに，$\Omega_{B_q}(A_Q) = \Omega_B(A) \otimes_A A_Q$ よりつぎを得る，

$$
\begin{aligned}
Der_B(A) \otimes_A A_Q &= Hom_A(\Omega_B(A), A) \otimes_A A_Q \\
&= Hom_{A_Q}(\Omega_B(A) \otimes_A A_Q, A_Q) \\
&= Der_{B_q}(A_Q).
\end{aligned}
$$

これより，$Der_B(A) \otimes_A A_Q$ は階数 1 の自由 A_Q-加群である．従って，$Der_B(A)$ は階数 1 の射影的 A-加群 となる (Theorem 2 of §5, Chap.II,[1])．一方，A は多項式環だから Serre's conjecture (T.Y.Lam [6]) によって $Der_B(A)$ は階数 1 の自由 A-加群 となる．

(2) も同様にできる．

LEMMA 2. k を標数 p の完全体とし，$F, G, \alpha_1, \alpha_2 \in A = k[x_1, x_2]$ とする．このとき，

$$
\partial F/\partial x_1 = \alpha_1 G^p, \partial F/\partial x_2 = \alpha_2 G^p \Longrightarrow F = \alpha G^p + \gamma^p \quad (\alpha, \gamma \in k[x_1, x_2]).
$$

(証明) α_1 は x_1^{mp-1} の項をもたないから $\partial F/\partial x_1 = \alpha_1 G^p$ より

$$
F = \alpha_3 G^p + \beta, \quad (\alpha_3 \in x_1 A,\ \beta \in A^p[x_2]).
$$

つぎに，これを x_2 で偏微分すると

$$\partial F/\partial x_2 = G^p(\partial\alpha_3/\partial x_2) + \partial\beta/\partial x_2.$$

一方, $\partial F/\partial x_2 = \alpha_2 G^p$ だから,

$$\beta = G^p\delta + \gamma^p, \quad (\delta \in x_2A, \gamma \in A).$$

これをもとの式に代入して $\alpha = \alpha_3 + \delta$ とおけば

$$F = \alpha G^p + \gamma^p, \quad (\alpha, \gamma \in A).$$

となって求める式が得られる.

定理の証明.

(2) を証明すれば十分である.

B の任意の素イデアルを Q とし $q = Q \cap A^p$ とおく. B は A^p 上有限生成であって B_Q は $(A^p)_q$ 上に p-基底をもつから B は 自由 A^p-加群である. したがって, B は A^p のガロア拡大である. 同様に, A は B のガロア拡大でありまた A は A^p のガロア拡大でもある. 定理 (S.Yuan [8]) より

$$Der_{A^p}(A) = A \cdot Der_{A^p}(B) \oplus Der_B(A).$$

ここで, Lemma 1 より $Der_{A^p}(B)$ はランク 1 の自由 B-加群であり $Der_B(A)$ はランク 1 の自由 A-加群である.

そこで,

$$Der_{A^p}(B) = Bd_1,\ d_1 \in Der_{A^p}(B)$$

$$Der_B(A) = Ad_2,\ d_2 \in Der_B(A)$$

とおけば,

$$Der_{A^p}(A) = Ad_1 \oplus Ad_2.$$

一方 $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2 \in Der_{A^p}(A)$ だから,

$$\partial/\partial x_1 = \alpha_1 d_1 + \beta_1 d_2, \quad (\alpha_1, \beta_1 \in A),$$

$$\partial/\partial x_2 = \alpha_2 d_1 + \beta_2 d_2, \quad (\alpha_2, \beta_2 \in A),$$

と表すことができる.

F を $B - A^p$ の元で x_1, x_2 についての次数が最小の多項式とする.

F に $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2$ を施すと

$$\partial F/\partial x_1 = \alpha_1 d_1 F, \quad (\alpha_1 \in A, d_1 F \in B),$$

$$\partial F/\partial x_2 = \alpha_2 d_1 F, \quad (\alpha_2 \in A, d_1 F \in B).$$

(a) F の選び方より, $d_1 F \in A^p$ であること.

$F \notin A^p = k[x_1^p, x_2^p]$ より $\partial F/\partial x_1 \neq 0$ または$\partial F/\partial x_2 \neq 0$. そこで $\partial F/\partial x_1 \neq 0$ とすると, 等式 $\partial F/\partial x_1 = \alpha_1 d_1 F$ より $deg(F) > deg(\partial F/\partial x_1) \geq deg(d_1 F)$ を得る.

すると, $d_1 F \in B$ だから F の選び方より $d_1 F \in A^p$ でなければならない.

Lemma 2 より

$$F = \alpha d_1 F + \gamma^p, \quad (\alpha, \gamma \in A = k[x_1, x_2]).$$

ここで α は定数項, すなわち $A^p = k[x_1^p, x_2^p]$ の元をもたないとしてよい.

(b) 上の式より $\alpha \in \Phi(B)$ で B は整閉であるから $\alpha \in B$ となる. ただし, $\Phi(B)$ は B の商体を表すものとする.

(c) $d_1 F \in k^*$ であること, ただし $k^* = k - 0$ である.

もし $d_1 F = 0$ とすると $F = \gamma^p \in A^p$ で矛盾. つぎに $d_1 F \notin k^*$ と仮定すると, α には A^p の項はないから等式 $F = \alpha d_1 F + \gamma^p$ より $deg(F) \geq deg(F - \gamma^p) > deg(\alpha)$. これは, やはり F の選び方に矛盾する.

(d) $d_1^p = 0$ であること.

$d_1 F \in k^*$ だから $F \notin \Phi(A^p)$. ゆえに

$$\Phi(B) = \Phi(A^p)(F) = \Phi(A^p)[F].$$

これより $d_1^p = 0$ が得られる.

以上によって,

$d_1(F/d_1F)=1$ かつ $d_1^p=0$ だから, 松村 ([7]) の定理より F/d_1F は B の $Kerd_1=\{x \mid x\in B, d_1x=0\}$ 上の p-基底となる. ところが B は A^p 上のガロア拡大であるから $Kerd_1=A^p$. 従って F/d_1F は A^p 上 B の p-基底となり, そして F も B の A^p 上の p-基底になる.

系. 定理と同じ記号を使う.

(1) A/B の p-基底の一つを F_1 とすると, 任意の p-基底はすべて $cF_1+\gamma_1$, $c\in k^*, \gamma_1\in B$ なる形で与えられる.

(2) B/A^p の p-基底の一つを F_2 とすると, 任意の p-基底はすべて $cF_2+\gamma_2^p$, $c\in k^*, \gamma_2\in A$ なる形で与えられる.

(証明) (2) を証明すれば (1) も同様にできる. F_2 を p-基底とすると, $\Omega_{A^p}(B)=Bd_1F_2=Bd_1G$.

故に, ある B の元 b_1,b_2 が存在して,

$d_1F_2=b_1d_1G, d_1G=b_2d_1F_2, \quad b_1,b_2\in B$

と書ける.

すると, $(1-b_1b_2)d_1F_2=0$ で $\Omega_{A^p}(B)$ は自由 B-加群だから, $b_1b_2=1$. そして B は多項式環だから, $b_1,b_2\in k^*$ でなければならない. 故に, $d_1(G-b_2F_2)=0$.

$G-b_2F_2\in kerd_1=A^p$.

$G=b_2F_2+\gamma_2^p, \gamma_2\in A$.

注意 1. この原稿は [4] として発表されている.

注意 2. E.Kunz (p.243,[5]) にあるように定理の 3 変数以上への拡張は still missing である.

REFERENCES

[1] N.Bourbaki, Algèbre commutative, Chap.1,2, Hermann, Paris, 1961.

[2] R.Ganong, Plane Frobenius sandwiches, Proc. Amer. Math. Soc., 84(1982), 474-478.

[3] T.Kimura and H.Niitsuma, On Kunz's conjecture, J.Math. Soc. Japan,

34(1982), 371-378.

[4] T.Kimura and H.Niitsuma, A note on p-basis of a polynomial ring in two variables, SUT J. Math., 25(1989), 33-38.

[5] E.Kunz, Kähler differentials, Vieweg & Sohn Verlg., Braunschweig, 1986.

[6] T.Y.Lam, Serre's Conjecture, Lecture Notes in Mathematics Vol.635 Springer-Verlag, 1978.

[7] H.Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge University Press, 1986.

[8] S.Yuan, Inseparable Galois theory of exponent one, Trans. Amer. Math. Soc., 149(1970), 163-170.

Complete rewriting system と Algebra の ホモロジー

小林 美治（徳大 総合）

項書換えシステムは計算機科学の関連で最近盛んに研究されている。 それは代数の古典的な問題に対しても、具体的な計算手段を与える一つの強力な道具と考えられて来ている。可換環の Gröbner 基底の理論はその一つである。この報告では、一般に非可換環の完備書換えシステムによる表現があれば、その環の加群の自由分解が構成できることを述べる。

Σ は alphabet と呼ばれる有限集合で、Σ^* は Σ で生成される自由モノイドを表す。 K は単位元をもつ可換環で $K\langle\Sigma\rangle = K\Sigma^*$ を Σ で生成される K 上の自由代数とする。 $\Sigma^* \times K\langle\Sigma\rangle$ の部分集合 R を我々は書換えシステム (rewriting system) といい、その元 (u, v) を rule といい $u \to v$ と表す。 多項式 $f \in K\langle\Sigma\rangle$ の項 cw_1uw_2 ($c\,(\neq 0) \in K$, $w_1, w_2 \in \Sigma^*$) に rule $u \to v$ を適用し、その項を cw_1vw_2 で置き換えて得られる多項式が g のとき、 f は R の rule で書き換えられ g になるといい、$f \underset{R}{\to} g$ と書く。 $R\langle\Sigma\rangle$ 上の関係 $\underset{R}{\to}$ の reflexive transitive closure を $\overset{*}{\underset{R}{\to}}$ と表す。 R が noetherian であるとは、無限鎖 $f_1 \underset{R}{\to} f_2 \underset{R}{\to} \cdots$ が存在しないときをいう。 R が confluent であるとは、$f \overset{*}{\underset{R}{\to}} g$, $f \overset{*}{\underset{R}{\to}} h$ なら f' が存在して $g \overset{*}{\underset{R}{\to}} f'$, $h \overset{*}{\underset{R}{\to}} f'$ となるときをいう。 noetherian かつ confluent なシステムを完備 (complete) と呼ぶ。 $f \in K\langle\Sigma\rangle$ が R-irreducible であるとは、$f \underset{R}{\to} h$ なる h が存在しないときをいう。 $I = I_R$ を $\{u - v \mid u \to v$

ε R } で生成される $K\langle\Sigma\rangle$ の ideal とする。

定理 1． R が $K\langle\Sigma\rangle$ の完備書換えシステムならば、
(1) 任意の $f \in K\langle\Sigma\rangle$ に対し、$f \overset{*}{\underset{R}{\to}} \hat{f}$ なる唯一の irreducible な $\hat{f} \in K\langle\Sigma\rangle$ が存在する。($\hat{f}$ を f の canonical form という。)
(2) $\hat{f} = \hat{g}$ iff $f \equiv g \bmod I$, 特に、$\hat{f} = 0$ iff $f \in I$.
(3) R-irreducible 多項式の全体は剰余環 $A = K\langle\Sigma\rangle/I$ の K-linear base をなす。

剰余環 $A = K\langle\Sigma\rangle/I$ を完備書換えシステム R で表示される algebra という。上定理より、有限完備書換えシステムで表示される algebra の語の問題は可解である。書換えシステムの完備性を判定するための基本的な定理は次である。

定理 2． R が完備書換えシステムであるための必要十分条件は、
(1) R は noetherian である。
(2) $x \underset{R}{\to} f$, $x \underset{R}{\to} g$ なる任意の $x \in \Sigma^*$ と $f, g \in K\langle\Sigma\rangle$ に対し $h \in K\langle\Sigma\rangle$ が存在し $f \overset{*}{\underset{R}{\to}} h$, $g \overset{*}{\underset{R}{\to}} h$ となる。

今後、R は完備書換えシステムとして、さらに $\Sigma^* \times K\langle\Sigma\rangle$ のもう一つの部分集合 S を考える。多項式 f の項 cuw ($c \in K$) を S の rule で cvw に置き換えて g が得られるとき、$f \underset{S}{\to} g$ と書く。このように S の rule を f の項の左因子にのみ適用するとき、 S を右書換えシステム (right rewriting system) と呼ぶ。 $\to = \underset{R}{\to} \cup \underset{S}{\to}$ とおき、$\overset{*}{\to}$ を $\to$ の reflexive transitive closure とする。関係 $\to$ が完備のとき、S は R 上完備であるという。 $J = J_S$ を $\{u - v \mid u \to v \in S\}$ で生成される $A = K\langle\Sigma\rangle/I$ の右 ideal とし、$B = A/J$ とおく。B は

巡回右 A-加群である。

以下、S は次の条件を満たす R 上完備な右書換えシステムとする。

(1) V は R-reduced、すなわち、任意の S の rule $u \to v$ に対し、u, v は R-irreducible.

(2) V は prefix-free、すなわち、どの V の元も V の他の元の prefix (左因子) にならない。

語 $x \in \Sigma^*$ が minimal R-word とは、x 自身は R-reducible であるが、x の真の左因子は R-irreducible のときをいう。

R-irreducible な語の列 $v = (v^1, v^2, \ldots, v^n)$ で $v^1 \in V$ かつ $v^i v^{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ は minimal R-word であるものを (V を始点とする) n-chain と呼ぶ。$V^{(n)}$ を n-chain 全体の集合とし、特に $V^{(0)} = \{1\}$, $V^{(1)} = V$ とする。

定理 3. R が完備書換えシステム、S が R 上完備な右書換えシステムならば、上の記法のもとで、右 A-加群 B の自由分解

$$\to V^{(n)} \xrightarrow{\delta_n} V^{(n-1)} \to \ldots \to VA \xrightarrow{\delta_1} A \xrightarrow{\delta_0} B \to 0,$$

が effective に構成できる。ここで、$V^{(n)}A$ は $V^{(n)}$ で生成される自由右 A-加群である。

この定理の応用として、

定理 4. K を体とする。Σ を始点とする chain の最大の長さが r ならば、

$\mathrm{gl.dim}\, A \leqslant r.$

例 1. $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_r\}$ 上の(可換)多項式環 $K[\Sigma]$ は完備書換えシステム $R = \{ a_i a_j \to a_j a_i \mid 1 \leqslant i < j \leqslant r \}$ で表示される。$S = \{ s_i \to 0 \mid i = 1, \ldots, r \}$ を右書換えシステムとして、定理3で構

成される分解は Koszul Complex である。

例 2． $\Sigma = \{a,b,c\}$, $R = \{ab \to b,\ ac \to b,\ bc \to b\}$, $S = \{a \to 1,\ b \to 1,\ c \to 1\}$ とする。このとき、$V = \{a,b,c\}$, $V^{(2)} = \{(a,b),\ (a,c),\ (b,c)\}$, $V^{(3)} = \{(a,b,c)\}$, $V^{(4)} = \emptyset$ である。定理3で構成される分解は、

$$0 \to V^{(3)}A \xrightarrow{\delta_3} V^{(2)}A \xrightarrow{\delta_2} VA \xrightarrow{\delta_1} A \xrightarrow{\varepsilon} K \to 0$$

で δ_i は次で与えられる。

$\delta_1(a) = a-1$, $\delta_1(b) = b-1$, $\delta_1(c) = c-1$,

$\delta_2 = a\otimes b$, $\delta_2(a,c) = a\otimes c - b\otimes 1 + c\otimes 1$,

$\delta_2(b,c) = b\otimes c - b\otimes 1 + c\otimes 1$,

$\delta_3(a,b,c) = (a,b)\otimes(c-1)$.

これから $\mathrm{Tor}_3^A(K,\ K) = K$ が判るので、K が体のときは定理4より $\mathrm{gl.dim}\ A = 3$ となる。

この報告の詳細は次を見られたい。

Y. Kobayashi, Complete rewriting systems and homology of monoid algebras, to appear in J. Pure Appl. Algebra.

On a conjecture of Geramita-Weibel concerning the conormal bundle of ideals

岡山理科大学大学院応用数学科

佐藤淳郎

A を可換ネーター環、M を有限生成 R -加群とした時 $\nu(M)$ で M の最小生成系の個数を表わすことにします。M が A のイデアル I の場合には I の最小生成系の個数と I の conormal module I/I^2 の最小生成系の個数の間に次の不等式が成り立つことが知られています。

$$\mathrm{ht}(I) \leqq \nu(I/I^2) \leqq \nu(I) \leqq \nu(I/I^2) + 1$$

そこで我々は

『等式 $\nu(I) = \nu(I/I^2)$ がいつ成立するのか？』

ということに興味があります。さて、論文[2] において Geramita-Weibel は次の予想を提出しました。

Conjecture.(Geramita-Weibel) A を単位元1を持つ可換ネーター環、J を A のイデアルとする。この時、J を含む全ての A の素イデアル p に対して

$$\nu(J/J^2) > \mathrm{ht}(p) + \dim(A/p)$$

が成り立てば $\nu(J) = \nu(J/J^2)$ である。

ここでは、$\nu(J)=\nu(J/J^2)$ が成り立つイデアルはどのような条件を満たすかということを考えます。
後半では、この問題を考える上でのアイデアが Lyubeznik が提出した予想にも適用出来るので Lyubeznik の予想を紹介することをこめて述べたいと思います。

尚、Geramita-Weibel の予想についてはシンポジウムの後で早稲田の衛藤君との共同研究において進展がありましたのでそれを書き足させて頂きたいと思います。
この報告集では、

$R = A[T]$; A 上の1変数多項式環

J; A のイデアル

$I = (J, T)$ とします。

初めに、次の命題は衛藤君の結果です。

<u>命題1</u>. $\nu(I)=\nu(J)+1 \Longrightarrow \nu(J)=\nu(J/J^2)$

<u>命題2</u>. $\nu(J/J^2)=r$ とする。もし全ての階数 $r-1$ の安定的自由 A/J-加群が自由 A/J-加群であれば $\nu(I/I^2)=r+1$ が成り立つ。

次の重要な結果がこの系として得られます。

<u>系3</u>. もし $\nu(J/J^2)\geqq \dim(A/J)+2$ であれば $\nu(I/I^2)=\nu(J/J^2)+1$ が成り立つ。

更に、特殊な環に対しては次のことが成り立ちます。

系4．A; 代数的閉体上のアファイン代数 または有限体の代数拡大上のアファイン代数の時、$\nu(J/J^2) \geq \dim(A/J)+1$ であれば $\nu(I/I^2) = \nu(J/J^2)+1$ が成り立つ。

証明． この証明のために次の定義を思い出します。

定義．A ; 環，d を非負整数とします。このとき、

A ; d - Hermite $\Longleftrightarrow$ すべての階数 $\geq$ d の安定的自由 A -加群は自由 A -加群である。

更に、このような整数 d のうちで最小のものを A の Hermite dimension と呼んで H-dim(A) で表わすことにします。

このときは、次の事実が知られています。

(Suslin) A が代数的閉体上のアファイン代数の時、$\text{H-dim}(A) \leq \dim(A)-1$ である。

(Vaserstein) A が有限体の代数拡大上のアファイン代数の時、$\text{H-dim}(A) \leq \dim(A)-1$ である。

従って、命題2の仮定が満たされるので $\nu(I/I^2) = \nu(J/J^2)+1$.

■

今 J を Geramita-Weibelの予想の仮定を満たす、整域 A のイデアルとします。この時、$\mathrm{ht}(J) \geq 1$ と仮定

できるので $p \supseteq J$, $\dim(A/J) = \dim(A/p)$ なる素イデアル p をとっておけば

$$\begin{aligned} \nu(J/J^2) &> ht(p) + \dim(A/p) \\ &\geqq ht(J) + \dim(A/J) \\ &\geqq 1 + \dim(A/J) \end{aligned}$$

より

$$\nu(J/J^2) \geqq 2 + \dim(A/J)$$

と成るので系3より $\nu(I/I^2) = \nu(J/J^2) + 1$ が成り立ちます。また、同様にして A が系4のなかのいずれかであれば任意の A のイデアル J に対して $\nu(I/I^2) = \nu(J/J^2) + 1$ が成り立つことが解ります。

以上をまとめておきますと、A が

$$A\ ;\ \begin{cases} \text{(i) 整域} \\ \text{(ii) 代数的閉体上のアファイン代数} \\ \text{(iii) 有限体の代数拡大上のアファイン代数} \end{cases}$$

のいずれかで J が Geramita - Weibelの予想の仮定を満たす時、

$$\nu(I) = \nu(J) + 1 \iff \nu(J) = \nu(J/J^2)$$

でなければならないことが解ります。

話を進めるために場合分けを行ないます。

<u>CASE.1</u> $\nu(I) = \nu(J) + 1$

この場合は命題1より Geramita - Weibelの仮定なしに

$\nu(J) = \nu(J/J^2)$　が成り立つことが解ります。

<u>CASE.2</u>　$\nu(I) = \nu(J)$

(1)　$ht(J) \geqq 1$

この場合は、上の注意によって

$$\nu(I) = \nu(J) + 1 \iff \nu(J) = \nu(J/J^2)$$

を得ますがこの場合は　$\nu(I) = \nu(J)$　なので起こり得ません。

(2)　$ht(J) = 0.$

i)　$\nu(I/I^2) = \nu(J/J^2) + 1.$

この場合は

$$\begin{aligned} 1 + \nu(J/J^2) &\geqq \nu(J) \\ &= \nu(I) \\ &\geqq \nu(I/I^2) \\ &= \nu(J/J^2) + 1. \end{aligned}$$

より　$\nu(J) = \nu(J/J^2) + 1$　を得るのでこの場合も起こりえません。

ii)　$\nu(I/I^2) = \nu(J/J^2)$

もしこの時、$\nu(J/J^2) \geqq 2 + \dim(A/J)$　と仮定すると系３より　$\nu(I/I^2) = \nu(J/J^2) + 1$　となるのでこれは矛盾となります。よって、

$\nu(J/J^2) \leqq \dim(A/J) + 1$　でなければなりません。

ところが今、Geramita-Weibel の予想の仮定によって $p \supseteq J$, $\dim(A/J) = \dim(A/p)$ なる素イデアル p をとっておけば

$$\begin{aligned}\nu(J/J^2) &> ht(p) + \dim(A/p)\\ &\geqq ht(J) + \dim(A/J)\\ &= \dim(A/J)\end{aligned}$$

なのでこれより $\nu(J/J^2) \geqq 1 + \dim(A/J)$ となります。したがって、$\nu(J/J^2) = 1 + \dim(A/J)$ でなければなりません。

以上の考察により、Case2 の場合には以下の条件の下で Geramita-Weibel の予想が正しいかどうかを考えれば良いことが解ります。

(a) $ht(J) = 0$

(b) $\nu(I) = \nu(J)$

(c) $\nu(I/I^2) = \nu(J/J^2)$

(d) $\nu(J/J^2) = 1 + \dim(A/J)$

この場合については現在早稲田の衛藤氏と共同研究をしていて、部分的な解答は得られていますが完全なる解決にはまだ至っていません。

次の予想を考えます。

最初に次の定義から始めたいと思います。

定義５. A を環とし、I を A のイデアルとします。このとき、A のイデアル J が次の条件を満たすとき I の reduction と呼ばれます。即ち、

$$J \subseteq I,\ \text{ある } r>0 \text{ に対して } I^{r+1} = JI^{r}.$$

特に、$J \supsetneq K$ なる I の reduction K が存在しない時、J は I の minimal reduction であると呼ばれます。

論文[6] において Lyubeznik は次の定理を示しました。

定理６. A が無限体上の n 変数多項式環 $A = k[X_1, \ldots, X_n]$, I が A のイデアルであれば I は n 元により生成される reduction を持つ。

又、同様の議論で A が無限体上の n 次元アファイン代数の時、A の勝手なイデアル I は n+1 元により生成される reduction を持つことも示しました。

そこで、Lyubeznik は次の予想を提出しました。

Conjecture(Lyubeznik). A; ネーター環 とし $\dim(A) = n - 1$ とする。任意の A の極大イデアル m に対してその剰余体 A/m は無限体であると仮定する。I を A または A[X] のイデアルとする。このとき、I は n 元により生成される reduction を持つ。

ここでは、次の定理が成り立つ事を示したいと思います。
即ち、

定理７． A:ネーター環　とし $\dim(A) = n-1$ とします。
J を

$$\sqrt{J} = m_1 \cap \cdots \cap m_t \quad \text{for some } m_i \in \mathrm{Max}(A)$$

なる A のイデアルとし $|A/m_i|=\infty$ $(1 \leqq i \leqq t)$ かつ
$\mathrm{ht}(m_i)>0$ for some i と仮定します。但しここで、Max(A)
で A の極大イデアル全体の集合を表わすことにします。
この時、J は n 元により生成される reductionを持つ。

証明のために、少し準備をします。

定義８． (A, m) を局所環とし $|A/m| = \infty$ と仮定します。
又、J を A のイデアルとします。この時、ヒルベルト
関数 $\chi_J(r) = \dim(J^r/mJ^r)$ は十分大きな $r>>0$ に対
して r の多項式に成ることはよく知られています。
その多項式を $P_J(r)$ とします。このとき、
$l(J)$:analytic spread of J $\Longleftrightarrow$ $l(J) = \deg(P_J(r)) + 1$
と定義します。

analytic spread に関して次の結果が知られています。

定理９． (Burch) (A, m): local ring とし $|A/m| = \infty$
と仮定します。更に、J を A のイデアルとします。
このとき、 $l(J) \leqq \dim(A)$ が成り立つ。

定理１０．(Northcott-Rees) J; reduction of I とし $x_1,\ldots,x_r$ を J の極小基底とします。この時、J が I の minimal reduction であれば $r = l(I)$ である。

そこで注意として

注意．(A, m) を局所環とし $|A/m| = \infty$ と仮定します。更に、I を A の m- 準素イデアルとします。このとき、Northcott-Reesにより I の reduction J が存在する事が知られています。よって、再び先の２つの結果によって $\nu(J) = l(I) \leqq \dim(A)$ と成る事に注意します。

準備の最後としてイデアルの生成元の個数に関して次の２つの結果が知られています。

定理１１．($R, m_1, \ldots, m_r$)を半局所環とし M を有限生成 R -加群とします。また、

$$u = \max_{1<i<r} \{ \nu(M_{m_i}) \}$$

とします。このとき、M は u 元で生成される。

定理１２．(S.Mandal) A を単位元１を持つ可換ネーター環、R = A[X]を A 上の１変数多項式環とし I を R のイデアルとする。今、I はモニック多項式を含み かつ $\nu(I/I^2) \geqq \dim(R/I) + 2$ を満たすと仮定する。この時、$\nu(I) = \nu(I/I^2)$ が成り立つ。

以上の準備のもとで定理の証明をします。

定理７の証明． $R = A[T]$, $I = JR + TR$ と置きます。このとき、明らかに I が n 元により生成される reduction を持つことを示せば十分です。そこで、

$$M_i = m_i R + TR \quad (1 \leqq i \leqq t)$$

と置きますと $M_i \in \mathrm{Max}(R)$ $(1 \leqq i \leqq t)$ かつ

$$\sqrt{I} = M_1 \cap \cdots \cap M_t$$

となっていることは明らかです。ここで、

$$R_{M_i}/M_i R_{M_i} \cong R/M_i \cong A/m_i \quad \text{for all } i \ (1 \leqq i \leqq t)$$

に注意しますと先の注意により I_{M_i} は n 元により生成される reductions $(K_i)_{M_i}$ を持つことが解ります。

そこで、

$$(I_{M_i})^{r_i+1} = (K_i)_{M_i} (I_{M_i})^{r_i} \quad \text{for some } r_i > 0$$

と書いておきます。この時、両辺に I の適当な巾を掛ける事により $r_i = r$ $(1 \leqq i \leqq t)$ としてよい事が解ります。そこで、

$$K = \bigcap_{i=1}^{t} \{ (K_i)_{M_i} \cap R \}$$

とおくと $(K_i)_{M_i}$ は $M_i R_{M_i}$ - 準素イデアルなので $(K_i)_{M_i} \cap R$ は M_i - 準素イデアルとなっています。

このとき、

$$K_{M_i} = (K_i)_{M_i} \quad \text{for all } i \ (1 \leqq i \leqq t)$$

と成っていることに注意します。これより、

$$(I_{M_i})^{r+1} = K_{M_i} (I_{M_i})^r \quad \text{for all } i \ (1 \leqq i \leqq t)$$

を得ます。ところが今、 I, K の素因子は M_i のみですからこれより

$$I^{r+1} = K I^r$$

となります。以上により先ず I は reduction K を持つ事が解ります。次にこの K が n 元で生成されることを示します。そこで、

$$S = R \setminus M_1 \cup \cdots \cup M_t$$

を R の積閉集合とします。この時、R_S は極大イデアル $\{ M_i R_S \} (1 \leqq i \leqq t)$ を持つ半局所環となります。

$$(I_S)_{M_i R_S} \cong I_{M_i} \quad \text{for all } i \ (1 \leqq i \leqq t)$$

なので $(I_S)_{M_i R_S}$ は n 元で生成された reduction $(K_i)_{M_i R_S}$ を持つ事が解ります。よって、定理11より

$$\begin{aligned} \nu(K_S) &\leqq \mathrm{Max}\{\nu(((K_i)_S)_{M_i R_S}))\} \\ &= \mathrm{Max}\{\nu((K_i)_{M_i})\} \\ &\leqq n \end{aligned}$$

を得ます。そこで、$f_1, \dots, f_n$ を K_S の生成系とします。このとき、$f_1, \dots, f_n \in K$ と仮定してよい。ここで、

$$K_S = (f_1, \dots, f_n) R_S$$

なので

$$K[1/s] = (f_1, \dots, f_n) R[1/s]$$

となる元 $s \in S$ が存在します。又、K は I の reduction なので $\sqrt{I} = \sqrt{K}$ 故これより $(s) + K = (1)$ を得ます。したがって、

$$K = (f_1, \dots, f_n) R + K^2$$

となる事が解ります。故に、K/K^2 は n 元 $f_1 (\mathrm{mod} K^2), \dots, f_n (\mathrm{mod} K^2)$, で生成される事が解ります。ところで今かりに、$\nu(K/K^2) \leqq 1$ と仮定してみますと

$$\begin{aligned} \nu(K_{M_i}) &= \nu(K_{M_i}/K_M{}^2) \\ &\leqq \nu(K/K^2) \\ &\leqq 1 \end{aligned}$$

より K_{M_i} $(1 \leqq i \leqq t)$ は R_{M_i} の単項イデアルとなる

事が解ります。ところが今、I はモニック多項式 X を含み、かつ $\sqrt{I} = \sqrt{K}$ なので $X \in I \subseteq \sqrt{I} = \sqrt{K}$ より $X^l \in K$ なる $l > 0$ が存在することが解ります。よって、K もまたモニック多項式を含むことが解ります。故に、K_{M_i} もまたモニック多項式を含むので

$$1 \leqq \mathrm{grade}(K_{M_i}) \leqq \mathrm{ht}(K_{M_i})$$

となります。結局これより、$\mathrm{ht}(K_{M_i}) = 1 \ (1 \leqq i \leqq t)$ を得ます。ところが、Kの作り方より K_{M_i} は $M_iR_{M_i}$ -準素イデアルなのでこれは

$$\begin{aligned}\mathrm{ht}(M_i) &= \mathrm{ht}(M_iR_{M_i})\\ &= \mathrm{ht}(K_{M_i})\\ &= 1\end{aligned}$$

を意味します。よって、$M_i = m_iR + TR \ (1 \leqq i \leqq t)$ なのでこれより $\mathrm{ht}(m_i) = 0 \ (1 \leqq i \leqq t)$ を得ますがこれは仮定 $\mathrm{ht}(m_i) > 0$ for some i に矛盾します。以上によって、$\nu(K/K^2) \geqq 2$ を得ます。ところが、今 $\dim(R/K) = 0$ なのでこれより

$$\begin{aligned}\nu(K/K^2) &\geqq 2\\ &= \dim(R/K) + 2\end{aligned}$$

なる不等式を得ます。さらに、Kはさきに示したようにモニック多項式を含むので Mandal の定理12によって $\nu(K) = \nu(K/K^2)$ を得ます。以上によって、K が n 元により生成されることが解ります。

■

参考文献.

[1] L.Burch, Codimension and analytic spred, Proc. Cambridge Philos.Soc.72 (1972), 369 - 372.

[2] A.V.Geramita and C.A.Weibel: Ideals with trivial conormal bundle, Can.J.Math. 32 (1980), 210 - 218.

[3] E.Kunz: Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Birkhauzer, 1985.

[4] S.Mandal: On efficient generation of ideals, Invent.Math. 75 (1984), 59 - 67.

[5] S.Mandal-A.Roy, Generating ideals in polynomial rings, Math.Z.195 (1987), 315 - 320.

[6] G.Lyubeznik, A property of ideals in polynomial rings,Proc.Amer.Math.Soc.98 (1986), 399 - 400.

[7] D.G.Northcott and Rees, Reductions of ideals in local rings,Proc.Cambridge Philos.Soc.50 (1954), 147 - 158

Principality of ideals of polynomial rings

岡山理科大学理学部　吉田　憲一
愛知教育大学　　　　金光　三男

Introduction. Ohm と Rush は論文[O.R] において次の定理を証明している。

Theorem. R : ring, I を $R[X]$ の ideal とする。この時、

$R[X]/I$: flat $\Leftrightarrow$ I : invertible かつ $c(I)=R$

I が $R[X]$ の invertible ideal であれば flat $R[X]$-module ゆえ 特に R-module として flat である。よって この場合、任意の元 $a, b \in R$ に対して

$$(aR \cap bR)I = aI \cap bI$$

が成り立つ事は よく知られている。

Definition. R : ring ; M ; R-module とする。この時、

M : LCM-stable R-module

$\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in R$ に対して

$$(aR \cap bR)M = aM \cap bM$$

今 $R \subset A$ を環の拡大とする。Richman は論文[R] において A が R の overring (i.e $R \subset A \subset Q(R)$) の時、A が R-module として LCH-stable であれば A は flat R-module となる事を示した。

又、秋葉は論文[A] において R の ideal $\mathfrak{a}$ が LCH-stable であれば $\mathfrak{a}$ は invertible である事を示した。

この論文では I が R-module として LCH-stable であればある条件の下で I 及び $R[X]/I$ が flat R-module となる事を示す。

seminormal については [GH] を参照のこと。ここでは特に次の2点について注意しておく。

i) R : seminormal $\Rightarrow$ $\mathrm{Pic}(R) \cong \mathrm{Pic}(R[X])$

ii) R : seminormal $\Leftrightarrow$ $^{\forall}\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対して $R_{\mathfrak{p}}$; seminormal

以下、次の記号を固定しておく。

$$\mathrm{Dp}_1(R) := \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathrm{depth}(R_{\mathfrak{p}}) = 1 \}$$

$C(I)$; I に入る多項式の係数により生成される R の ideal.

$f(x) \in K[X]$ に対して

$C(f(x))$; $f(x)$ の係数により生成される K の R-submodule

K の R-submodule $\mathfrak{a}$ に対して

$$\mathfrak{a}^{-1} := \{ \alpha \in K \mid \alpha \mathfrak{a} \subseteq R \}$$

Definition.

(1) $g(x) \in R[X]$; super primitive polynomial

$$\Leftrightarrow \quad C(g(x))^{-1} = R$$

(2) I に含まれる多項式の最小次数を d とすると

$$\min(I) = \{ f(x) \in I \mid \deg(f(x)) = d \}$$

Remarks. (1) I を $R[X]$ の ideal とする。$I \otimes_R K$ は $K[X]$ の ideal ゆえ $I \otimes_R K = z(x)K[X]$ となる monic polynomial $z(x) \in K[X]$ が存在する。

$Z(X) = X^d + z_1 X^{d-1} + \cdots + z_d,\ z_i \in K$

と書く。この時 $\deg(Z(X)) = d$ である。

$$L = \{ a \in R \mid aZ(X) \in R[X] \}$$

とする。この時 $L = \bigcap_{i=1}^{d} (R ; z_i)$ である。そこで

$L = \bigcap_{\mathfrak{p} \in D_{h1}(R)} L_{\mathfrak{p}}$ である事を示そう。任意の元

$$u \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in D_{h1}(R)} L_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in D_{h1}(R)} \bigcap_{i=1}^{d} (R_{\mathfrak{p}} : z_i)$$

をとれば、任意の i, $\mathfrak{p} \in D_{h1}(R)$ において $u \in R_{\mathfrak{p}} : z_i \subseteq R_{\mathfrak{p}}$

なので $u \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in D_{h1}(R)} R_{\mathfrak{p}} = R$ である。又 $uz_i \in R_{\mathfrak{p}}$ 故

$uz_i \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in D_{h1}(R)} R_{\mathfrak{p}} = R$. よって $u \in R ; z_i$. 従って

$u \in \bigcap_{i=1}^{d} (R ; z_i) = L$ となる。

(2) $\min(I) = L\,Z(x)$ は明らかであろう。

この時 次の結果が知られている。

<u>Lemma. 1.</u> $f(x) \in R[x]$ とすれば 次は同値.

(1) $f(x)$: super primitive polynomial

(2) $c(f(x)) \not\subseteq \mathfrak{p}$ for all $\mathfrak{p} \in D_{h1}(R)$

Proposition. 2

I を $R[X]$ の ideal とする時 次は同値。

(1) $I = f(x)R[X]$ かつ $I = (I \otimes_R K) \cap R[X]$

(2) $f(x)$ は super primitive polynomial で
$f(x) \in \min(I)$

この報告集では、講演で御話しした事、すべてに対して詳細な証明をつけて書くスペースはないので、後半の内容にしぼって書きます。
従って、表題にそぐわない内容になるかもしれませんが、多項式環のイデアルが単項生成になる為の条件を求める事から得られた結果に相違ないので講演と同一のタイトルの下でこの報告集を書かせて頂きます。
さて、先に述べた Ohm と Rush の結果は環 R が seminormal であればもっと弱い条件の下で成立する事が解ります。即ち、

Theorem.

R : Noetherian seminormal domain

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R[X] \longrightarrow R[\alpha] \longrightarrow 0$$
$$X \longmapsto \alpha$$

を $R[X]$-modules の exact sequence とする。

更に I は 条件

i) $I = (I \otimes_R K) \cap R[X]$

ii) $C(I) = R$

iii) I ; LCM-stable R-module

を満たすとする。この時 $R[\alpha]$ は flat R-module となり I は invertible ideal となる。

(proof) $R[\alpha]$ が flat R-module を示す為には任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ において $R_{\mathfrak{p}}[\alpha]$ が flat $R_{\mathfrak{p}}$-module となる事を示せばよい。この時 条件 (i) (ii) (iii) は localize しても満たされているので $(R, \mathfrak{m})$ は local ring であるとしてよい。

dim(R) に関する帰納法を用いる。

$\dim(R) = 0$ の時は R は体なので $R[\alpha]$ は free R-module となる。従ってもちろん flat R-module なので この場合は成立する。

したがって $\dim(R) > 0$ としてよい。
今，$\operatorname{depth}(R) > 1$ と仮定する。この時，任意の $\mathfrak{q} \in \operatorname{Dp}_1(R)$ をとれば，$\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{m}$ ゆえ

$$\dim(R_{\mathfrak{q}}) < \dim(R)$$

である。よって帰納法の仮定によって $R_{\mathfrak{q}}[\alpha]$ は flat $R_{\mathfrak{q}}$-module である。exact sequence

$$0 \longrightarrow I_{\mathfrak{q}} \longrightarrow R_{\mathfrak{q}}[X] \longrightarrow R_{\mathfrak{q}}[\alpha] \longrightarrow 0$$

において $R_{\mathfrak{q}}[\alpha]$ は flat $R_{\mathfrak{q}}$-module ゆえ
[O.R] によって $I_{\mathfrak{q}}$ は $R_{\mathfrak{q}}[X]$ の invertible ideal である。ところが，$R_{\mathfrak{q}}$ は seminormal ゆえ

$$(0) = \operatorname{Pic}(R_{\mathfrak{q}}) \cong \operatorname{Pic}(R_{\mathfrak{q}}[X])$$

である。ゆえに $I_{\mathfrak{q}} = f(X) R_{\mathfrak{q}}[X]$ となる $f(X) \in I$ が存在する。明らかに $f(X) \in \min(I)$ である。
この時，$I_{\mathfrak{q}} = (I_{\mathfrak{q}} \otimes_{R_{\mathfrak{q}}} K) \cap R_{\mathfrak{q}}[X]$ ゆえ Proposition 2 から $f(X)$ は $R_{\mathfrak{q}}$ 上の super-primitive polynomial である。$\operatorname{depth} R_{\mathfrak{q}} = 1$ なので

Lemma 1 より $c(f(x)) \not\subset \mathfrak{p}$

Claim. $I = \min(I)R[X]$

(proof of claim)

$I \supseteq \min(I)R[X]$ は明らかなる逆を示す。

任意の $g(x) \in I$ をとると $g(x) = Z(x)h(x)$ となる $h(x) \in K[X]$ が存在する。この時、$h(x) \in LR[X]$ を示したい。任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Dh}_1(R)$ において上で示した事により $\min(I) \ni f(x)$, $c(f(x)) \not\subset \mathfrak{p}$ となる $f(x) \in I$ が存在する。$f(x) = aZ(x)$, a は $f(x)$ の leading coefficient.

今、Dedekind-Mertens の定理を $ag(x) = (aZ(x))h(x)$ に適当する事で

$$c(aZ(x))_{\mathfrak{p}}^{m+1}\, c(h(x))_{\mathfrak{p}} = c(aZ(x))_{\mathfrak{p}}^{m}\, c(ag(x))_{\mathfrak{p}}$$

となる positive integer m が存在する。

ところが今、$c(aZ(x))_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$ かつ $a \in L$ なる $h(x) \in LR_{\mathfrak{p}}[X]$ を得る。

以上により

$$h(X) \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Dm}(R)} LR_{\mathfrak{p}}[X] = LR[X] \quad \text{by Remarks (1)}$$

を得る。したがって $I = L\,z(X)R[X]$ となる。
よって Remark (2) より

$$\begin{aligned} I &= L\,z(X)R[X] \\ &= \min(I)R[X] \end{aligned}$$

となる。

▨

今 $c(I) = R$ ゆえ $c(\min(I)) = R$ である。よって
[0, R, Theorem 2.5] より I は invertible ideal となる。
ゆえに $c(I) = R$ より $R[\alpha]$ は flat R-module
となる。

そこで $\operatorname{depth}(R)=1$ の時に $R[\alpha]$ が flat R-module となる事を示せばよい。

今 $\mathfrak{m} = I_\lambda$, $\lambda = \frac{b}{a}$

$= R \cap \frac{b}{a}R$

となる $0 \neq a, b \in R$ が存在する。(cf. [Y])

さてそこで次の exact sequence を考える。

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R[X] \longrightarrow R[\alpha] \longrightarrow 0$$

この exact sequence に $\otimes_R \{R/(R\cap \frac{b}{a}R)\}$ を作用させる事で Tor の long exact sequence

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_R^1(R[X], R/R\cap \tfrac{b}{a}R) \longrightarrow \operatorname{Tor}_R^1(R[\alpha], R/R\cap \tfrac{b}{a}R) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow I \otimes_R \{R/R\cap \tfrac{b}{a}R\} \longrightarrow R[X] \otimes_R \{R/R\cap \tfrac{b}{a}R\}$$

を得る。ここで

$$I \otimes_R \{R/R\cap \tfrac{b}{a}R\} \cong I/(R\cap \tfrac{b}{a}R)I$$

$$R[X] \otimes_R \{R/R\cap \tfrac{b}{a}R\} \cong R[X]/R[X]\cap \tfrac{b}{a}R[X]$$

故 結局

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^1_R(R[\alpha], R/R\cap \tfrac{b}{a}R) \longrightarrow I/(R\cap \tfrac{b}{a}R)I \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\varphi} R[X]/R[X]\cap \tfrac{b}{a}R[X]$$

なる形の exact sequence を得る。

<u>Claim.</u> φ ; injective

(proof of claim). この為には

$$\begin{array}{c} I \cap \big(R[X] \cap \tfrac{b}{a}R[X]\big) = I(R\cap \tfrac{b}{a}R) \\ \| \\ I \cap \tfrac{b}{a}R[X] \end{array}$$

を示せばよい。

($\supseteq$) 明らか

($\subseteq$) 最初, $I \cap \frac{b}{a}R[X] = \frac{b}{a}I$ を示す。

実際、任意の元 $\frac{b}{a}g(x) \in I \cap \frac{b}{a}R[X]$ をとれば

$\frac{b}{a}g(x) \in I$ より

$$\begin{aligned} g(x) &\in \tfrac{a}{b}I \cap R[X] \\ &\subseteq (I\otimes_R K) \cap R[X] \\ &= I \end{aligned}$$

となる事より解る。

したがって LCM-stableness より

$$I \cap \frac{b}{a} I = \left(R \cap \frac{b}{a} R \right) I$$

を得る。以上により φ は injective である。 ▨

したがって，$R \cap \frac{b}{a} R = \mathfrak{m}$ なので

$$\mathrm{Tor}_R^1 \left(R[\alpha], R/\mathfrak{m} \right) = (0)$$

を得る。

今，$R[\alpha]$ の任意の極大 ideal M をとり $M \cap R = \mathfrak{p}$ とする。この時 $R[\alpha]$ が R 上 flat を示す為には $R[\alpha]_M$ が flat $R_\mathfrak{p}$-module である事を示せばよい。そこで，次の2つの場合に分けて考える。

<u>Case. 1</u> $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m}$.

この時，$\dim(R_\mathfrak{p}) < \dim(R)$ 故

帰納法の仮定により $R_\mathfrak{p}[\alpha]$ は flat $R_\mathfrak{p}$-module である。ところが，

$$R[\alpha]_M = R_\mathfrak{p}[\alpha]_{MR_\mathfrak{p}[\alpha]}$$

だから，$R[\alpha]_M$ が flat $R_\mathfrak{p}$-module となる。

以上により この場合は $R[\alpha]$ は flat R-module となる。

<u>Case.2</u> $M \cap R = \mathfrak{m}$.

今, $\mathrm{Tor}_1^R(R[\alpha], R/\mathfrak{m}) = (0)$ に注意する。そこで R-modules の exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0 \quad \cdots (*)$$

に $\otimes_R R[\alpha]$ を作用させると Tor の long exact sequence

$$0 \longrightarrow \underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \mathrm{Tor}_1^R(R[\alpha],\, R/\mathfrak{m}) \\ \| \\ (0)}}{\mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m},\, R[\alpha])} \longrightarrow \mathfrak{m} \otimes_R R[\alpha] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ R[\alpha]}}{R \otimes_R R[\alpha]} \longrightarrow (R/\mathfrak{m}) \otimes_R R[\alpha] \longrightarrow 0$$

を得る。よって これより R-modules の exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \otimes_R R[\alpha] \longrightarrow R[\alpha] \longrightarrow (R/\mathfrak{m}) \otimes_R R[\alpha] \longrightarrow 0$$

を得る。

今 $R[\alpha]_M$ は flat $R[\alpha]$-module なる

上の exact sequence に $\otimes_{R[\alpha]} R[\alpha]_M$ を作用させる事で

exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \otimes_R R[\alpha]_M \longrightarrow R[\alpha]_M \longrightarrow (R/\mathfrak{m}) \otimes_R R[\alpha]_M \longrightarrow 0$$

を得る。一方，(*) に $\otimes_R R[\alpha]_M$ を作用させると exact sequence

$$\cdots \longrightarrow \underset{\overset{\parallel}{(0)}}{\mathrm{Tor}_1^R(R, R[\alpha]_M)} \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, R[\alpha]_M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathfrak{m} \otimes_R R[\alpha]_M \longrightarrow R[\alpha]_M \longrightarrow (R/\mathfrak{m}) \otimes_R R[\alpha]_M \longrightarrow 0$$

を得る。よって．上の 2つの exact sequences から

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, R[\alpha]_M) = (0)$$

を得る。ところが今 $R[\alpha]_M > R$ なる Local criteria of flatness (cf. M. (20.C), Theorem 49) が適用できて $R[\alpha]_M$ は R 上 flat となる。

以上により $R[\alpha]$ は R 上 flat である。

Remark.

この証明の中で我々は次の結果を claim として証明している。

R ; seminormal

任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Dp}_1(R)$ に対して $R_{\mathfrak{p}}[\alpha]$ が flat $R_{\mathfrak{p}}$-module であれば $I = \min(I)R[X]$ である。

Theorem に於て $I = (I \otimes_R K) \cap R[X]$ という条件を必要としたがこれは次の Proposition で示される様に $R[\alpha]$ が flat R-module である為には必要条件である。

Proposition.4

R ; seminormal

$R[X] \supset I$; ideal

とする。この時, $R[\alpha]$ が flat R-module であれば

$$I = (I \otimes_R K) \cap R[X]$$

が成立つ。

(proof) $J = (I \otimes_R K) \cap R[X]$ とおく。

この時 $I \subseteqq J$ である。

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t \ , \sqrt{Q_i} = P_i$$

を I の primary decomposition とする。ここで便利の為 $P_i = P$, $Q = Q_i$ とする。

Case. 1 $\quad P \cap R = (0)$

この時.

$$I_P \supseteq I \otimes_R K \supseteqq J$$

より $\quad Q \supseteqq J$ を得る。

Case. 2 $\quad P \cap R = \mathfrak{p} (\neq (0))$

この時. $R[\alpha]$ は flat R-module 故 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Dp}_1(R)$ に対して $R_\mathfrak{p}[\alpha]$ は flat $R_\mathfrak{p}$-module である。従って Remark により I は $\min(I)$ で生成されているので

$$c(f(x)) \not\subseteq \mathfrak{p}$$

なる $f(x) \in \min(I)$ が存在する。

よって $c(f(x))R_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$ より $f(x)$ は $R_{\mathfrak{p}}$ 上 superprimitive polynomial である。よって Proposition 2 より

$$I_{\mathfrak{p}} = f(x) R_{\mathfrak{p}}[X]$$

かつ

$$\{(I_{\mathfrak{p}}) \otimes_R K\} \cap R_{\mathfrak{p}}[X] = I_{\mathfrak{p}}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} J &= (I \otimes_R K) \cap R[X] \\ &\subseteq \{(I_{\mathfrak{p}}) \otimes_R K\} \cap R[X] \\ &= I_{\mathfrak{p}} . \end{aligned}$$

よって $J \subseteq I_{\mathfrak{p}} \cap R[X] \subseteq Q$ となる。

以上により $I = J$ を得る。

References

[A] T. Akiba, LCM-stableness, Q-stableness and flatness, Kobe J. Math., 2(1985), 67-70.

[GH] R. Gilmer and R. Heitmann, On Pic(R[X]) for R seminormal, J. Pure Appl. Alg., 16(1980), 251-257.

[M] H. Matsumura, Commutative algebra, Benjamin, New York, 1970.

[OR] J. Ohm and D. Rush, The finiteness of I when R[X]/I is flat, Trans., Amer. Math. Soc., 171(1972), 377-408.

[R] F. Richman, Generalized quotient rings, Proc. Amer. Math. Soc., 16(1965), 794-799.

[U] H. Uda, Incomparability in Ring Extensions, Hiroshima Math. J., 9(1979), 451-463.

[V] W. Vasconcelos, Simple flat extensions, J. Alg., 16(1970), 105-107.

[Y] K. Yoshida, On birational-integral extension of rings and prime ideals of depth one, Japan. J., 8(1982), 49-70.

F-rational local ring について

渡辺敬一（東海大・理）

標数 0 の rational singularity の代数化及び標数 $p>0$ への自然な拡張として、Frobenius 写像を用いて定義される F-rational ring (singularity) の概念がある。rational singularity と F-rational ring の概念は"標数 0"では"同値"だと予想されるのだが、本稿ではその予想の根拠と現状について書いて見たい。

§1. Frobenius 写像によって定義される 4つの族

R が標数 $p>0$ の体 k を含む環のとき、Frobenius 写像 $F: R \to R$, $F(a)=a^p$ が定義される。以下に於て $q=p^e$ は必らず p の巾とする。R が reduced のとき、$F^e: R \to R={}^eR$,

$R^q \hookrightarrow R$, $R \hookrightarrow R^{1/q}$ の3つの写像を同一視したい。イデアル $I \subset R$ に対し，$I^{[q]} = F^e(I).R$，即ち，$I = (a_1, \dots, a_n)$ のとき，$I^{[q]} = (a_1^q, \dots, a_n^q)$ とおく。$R/I \otimes_R {}^eR \cong {}^e(R/I^{[q]})$ である。

I の tight closure I^* を，$x \in I^* \Leftrightarrow \exists c \in R^0$, $\forall q \gg 0$, $c \cdot x^q \in I^{[q]} \Leftrightarrow \exists c \in R^0$, $\forall q \gg 0$, $c^{1/q}.x \in I.R^{1/q}$ で定義する。ここで，$R^0 = R \setminus \bigcup_{\text{min. prime}} \mathfrak{p}$.

本当は任意の R-module に対して Frobenius 写像を考えるのだが，ここでは，R が "approximately Gorenstein" ([H] 参照) を仮定してイデアルだけで話をしよう。

<u>定義</u> (1.1) (i) R が (weakly)$^{(*)}$ F-regular $\Leftrightarrow$ $\forall I \subset R$, $I^* = I$.

(ii) R が F-pure $\Leftrightarrow$ $\forall I \subset R$, $F^e : R/I \hookrightarrow R/I^{[q]}$ $\Leftrightarrow [\forall I \subset R,\ x^q \in I^{[q]} \Rightarrow x \in I]$

$(R, \mathfrak{m})$: local ring のとき，

(iii) R が F-rational $\Leftrightarrow$ $\forall (x_1, \dots, x_d) \subset R$ parameter ideal が tightly closed.

(iv) R が F-injective $\Leftrightarrow$ $F^e : H_\mathfrak{m}^q(R) \to H_\mathfrak{m}^q(R) \otimes_R {}^eR$

(*) "weakly" は以下略す事にする。

が injective $(\forall q \geq 0)$.

この4つの相互関係については,

$$\begin{array}{ccccc} \text{F-regular} & \Longrightarrow & \text{F-rational} & \overset{(*)}{\Longrightarrow} & \begin{array}{c}\text{normal}\\ \text{Cohen-Macaulay}\end{array} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \text{F-pure} & \Longrightarrow & \text{F-injective} & & \end{array} \qquad (1.2)$$

が成立し, $H_m^d(R)$ $(d = \dim R)$ が injective R-mod. のとき, F-regular $\Longleftrightarrow$ F-rational (このとき, R は Gorenstein), F-pure $\Longleftrightarrow$ F-injective となる。また, F-rational と F-pure は別種の概念と思え, F-rational $\rightleftarrows$ F-pure のどちらも成立しない。また, F-rational + F-pure $\Rightarrow$ F-regular も成立しない。($^{(*)}$正確な命題は後述)

例. $R = k[xT^a, x^{-1}T^b, (x+1)^{-1}\cdot T^c, T] \subset k(x)[T]$ (x, T は k 上の変数) のとき, 任意の $a, b, c \geq 1$ に対し R は F-rational, $1/a + 1/b + 1/c < 1$ のとき R は F-pure でなく, $1/a + 1/b + 1/c > 1$ で $p > 5$ なら R は F-regular. $(a, b, c) = (2, 3, 6)$ 又は $(3, 3, 3)$ で $p \equiv 1 \pmod 3$ のとき R は F-pure だが F-regular ではない. ([W], [FW] 参照).

(1.2) について補足をしておこう。任意の parameter ideal $(\underline{x})=(x_1,\dots,x_d)$ について，$(\underline{x})^*=(\underline{x})$ であれば，$(x_1,\dots,x_i,x_{i+1}^N,\dots,x_d^N)$ $(N\to\infty)$ を考えて，$(x_1,\dots,x_i)^*=(x_1,\dots,x_i)$ が得られる。

F-rational ⇒ normal は Briançon-Skoda の定理の一般化（[H-H; §5]）より得られる。$A\subset R$ となり，R が A 上 finite torsion-free となる regular local A が存在するとき，R が F-rational ⇒ Cohen-Macaulay は [H-H; §4]。

以下に於て（F-rational ring を考えるから）R は Cohen-Macaulay を仮定すると，

$$H_m^d(R)=\lim_{n\to\infty} R/(x_1^n,\dots,x_d^n),$$

但し，$R/(x_1^n,\dots,x_d^n)\to R/(x_1^{n+m},\dots,x_d^{n+m})$ は

$y \bmod (x_1^n,\dots,x_d^n) \longrightarrow (x_1\cdots x_d)^m\cdot y \bmod (x_1^{n+m},\dots,x_d^{n+m})$，

で、この inductive system は <u>injective</u>. これより F-rational ⇒ F-injective が得られる。

というわけで，"F-injective" が一番弱い性質だが，どうも、この部分が一番標数によって気まぐれな挙動を示すようである。逆にこの性質を仮定すると，議論が簡単になるようだ。

§2. F-rational local ring, rational singularity, Briançon-Skoda の定理.

F-rational, rational singularity, parameter ideal に関する Briançon-Skoda の定理の3つは互いに深く関係し合っているように見える。筆者に現在示せる事は全く不十分な状態なのだが、この3者の関係が最終的にどう落ち着くべきかの問題提起として以下を読んで頂きたい。

normal Cohen-Macaulay local ring (R, m) に関して次の性質を考えよう。

① R は F-rational

② 任意のイデアル $I \subset R$ に対して、$\overline{I^d} \subset I$

($d = \dim R$, 常に $d \geqq 2$ とする.)

②' parameter ideal $I = (x_1, \dots, x_d)$ に対し、$\overline{I^d} \subset I$.

rational singularity を考えるときには、

$f : Y \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$,

f は projective morphism, $E = f^{-1}(m)$ とおくとき、$f|_{Y-E} : Y - E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(R) - \{m\}$, Y は normal であるものを考える必要がある。この仮定の下に、

③ 上のような Y で Y が regular であるものが存在し、

$H^{d-1}(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$.（これを "R は rational singularity" と云って良いだろうか）.

④ 上のような任意の Y に対し，$Y - E \hookrightarrow Y$ がひき起す写像

$$H^{d-1}(Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow H^{d-1}(Y-E, \mathcal{O}_Y) \cong H^d_m(R)$$

は 0-写像.（Lipman の "pseudo-rational" local ring.）

（上記で ② と ②′ は "minimal reduction" の存在する時同値なので，同一視して良いだろう。）

② ⟺ ④ については [L-T] 等に見られるが，復習して見よう.

$f : Y \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ が projective morphism なので，f はあるイデアル $I \subset R$ による blowing-up. $f|_{Y-E} : Y - E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(R) - \{m\}$ より，I は m-primary にとれ，I の minimal reduction $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_d)$ をとると，f は $(\underline{x})$ の normalized blowing-up.（$(\underline{x})$ の blowing-up の normalization）とできる. ゆえに，$Y = \bigcup_{i=1}^{d} V_i$, $V_i = \mathrm{Spec}(\overline{R[\frac{(\underline{x})}{x_i}]})$ とできる. $Y = \bigcup_{i=1}^{d} V_i$ なる affine open covering による $H^*(Y, \mathcal{O}_Y)$ の計算法を思い出せば，

$$\bigoplus_{i=1}^{d} H^0\Big(\bigcap_{j\neq i} V_j, \mathcal{O}_Y\Big) \to H^0\Big(\bigcap_{i=1}^{d} V_i, \mathcal{O}_Y\Big) \to H^{d-1}(Y,\mathcal{O}_Y) \to 0$$

が exact. 一方, $H^0(\bigcap_{i=1}^{d} V_i, \mathcal{O}_Y) = \bigcup_{t\geq 0}\Big\{ \dfrac{f}{(x_1\cdots x_d)^t} \;\Big|\; f \in \overline{(\underline{x})^{dt}} = \overline{(\underline{x}^t)^d} \Big\}$ $\quad ((\underline{x}^t) = (x_1^t, \dots, x_d^t))$.

また, $H^{d-1}(Y, \mathcal{O}_Y) \to H^d_m(R)$ に於て, 上記の元が 0 に写される $\Leftrightarrow$ $f \in (\underline{x}^t)$. より, ②′に於て $I = (x_1^t, \dots, x_d^t)$ とすれば, ②′ $\Leftrightarrow$ ④ を得る。

① $\Rightarrow$ ②′ は [H-H, §5] の Briançon-Skoda の定理により, $\overline{I^d} \subset I^* = I$ (①による).

④ $\Rightarrow$ ③ は標数 0 のとき, Grauert-Riemenschneider vanishing Thm. により, $H^{d-1}_E(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ から,

$$0 \to H^{d-1}(Y, \mathcal{O}_Y) \to H^{d-1}(Y-E, \mathcal{O}_Y)$$

が exact となり成立するが, 標数 $p>0$ で成立するのかどうか筆者にはわからない. (local duality により, $H^{d-1}_E(Y, \mathcal{O}_Y) \cong \mathrm{Hom}_R(H^1(Y, \omega_Y), E_R(R/m))$, ($E_R(R/m)$ は R/m の injective envelope) だが).
($d=2$ のとき, [L2] により, ③ $\Leftrightarrow$ ④).

④ $\Rightarrow$ ① が成立すれば メデタシメデタシと なるが, これは標数 $p>0$ では成立しない. 例えば, $R = k[X, Y, Z]/(X^2+Y^3+Z^5)$ とおくと, R は任意標数で ④ (実は $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$) をみたすが, R は $p = 2, 3, 5$ のとき F-rational でな

い．（実は F-injective でもない）そこで次のような予想をしてみる．

予想．②′かつ F-injective $\Rightarrow$ F-rational ?

現段階では R が graded かつ "isolated non-F-regular locus" をもつとき　しか示せない．それを述べるために，"test element" の概念が必要である．

定義．$c \in R$ が test element $\Longleftrightarrow$ ${}^{\forall} I \subset R$, ${}^{\forall} x \in I^*$,

$$c \cdot x^q \in I^{[q]} \quad (q \gg 0).$$

test elements の生成するイデアルを test ideal という．

定理．$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ normal graded C-M ring, $R_0 = k$ は体とし，次のいずれかの条件をみたすとする．

(a) R の test ideal は m-primary $(m = R_+)$.

(b) ${}^{\forall} f \neq 0 \in R_+$, R_f は strongly F-regular ([HH 2] 参照．regular 又は Gorenstein + F-regular $\Rightarrow$ strongly F-regular.)

このとき R が F-injective かつ②′をみたせば R は F-rational である．

（証明）R は F-injective だから，

$$a(R) := \max\{n \mid (H^d_m(R))_n \neq 0\} \leq 0 .$$

$a(R) < 0$ のとき R は F-rational ([FW]) だから, $a(R) = 0$ として良い。すると, R は F-rational でない ([FW]) ので, R が ②′ をみたさない. 事を云えば良い. $N > 0$ を $R^{(N)} = \bigoplus_{n \geq 0} R_{nN}$ が R_N で生成されるようにとる。パラメーター $(x_1, \dots, x_d) \subset R_N$ をとると, $I = (x_1, \dots, x_d)$ とおいて, $\overline{I} = R|_N := \bigoplus_{n \geq N} R_n$ となる事はすぐわかる。$a(R) = 0$ だから, $\exists\, y \notin I,\ y \in R_{dN}$. ($a(R/I) = a(R) + dN = dN = \max\{n \mid (R/I)_n \neq 0\}$. [GW] 参照.) ゆえに,

$\overline{I}.\, y \subset R|_{(d+1)N} = \overline{I^{d+1}}$. これより, $y \in \overline{I^d}$ が得られる. (valuative criterion). $y \notin I$ より R は ②′ をみたしていない.

§3. いくつかのコメント

・ rational singularity と F-rational ring に対して望まれる結果は次のものであろう.

R が 標数 0 の体 K 上 ess. of finite type の local ring で rational singularity とする. このとき $p \gg 0$ に対して, R の標数 p への reduction は F-rational

か？

この方向に関しては目下 Fedder の2次元 graded case と graded complete intersection で isolated singularity の場合［F］が知られている。

・$f: Y \to \mathrm{Spec}(R)$ という blowing-up を考える事は非常に有用な概念と思うが，可換環論にとって（R の環論的性質を調べるために）Y が regular である事は必要だろうか？ Y がどの程度良い性質をもてば R の性質が Y に（例えば Y の cohomology 群に）反映されるだろうか？

・F-rational ring が rational singularity の「標数 p 版」であるならば，「Boutot の定理」，$R \hookrightarrow S$, $S = R \oplus M$ as R-module, S が F-rational ⇒ R も F-rational？ が成立してほしい（「F-regular」に対しては［HH］）。S が R 上 finite の時は容易だが．

REFERENCES.

[F] R.Fedder, F-purity and Rational Singularity in Graded Complete Intersection Rings, Trans. A.M.S. 301 (1987), 47-62.

[FW] R.Fedder and K.-i.Watanabe, A characterization of F-regularity in terms of F-purity, "Commutative Algebra", Proc. Microprogram Berkeley, 1987, 227-245, Springer, 1989.

[GW] S.Goto and K.-i.Watanabe, On graded rings, I, J.Math.Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.

[H] M.Hochstr, Cyclic purity versus purity in excellent Noetherian rings, Trans.A.M.S. 231 (1977), 463-488.

[HH] M.Hochster and C.Huneke, Tight Closure, Invariant Theory, and the Briançon-Skoda Theorem,I, to appear in J. Amer.M.S.

[HH2] M.Hochster and C.Huneke, Tight closure and strong F-regularity, Mem.Soc.Math.France, to appear.

[L] J.Lipman, Rational singularities..., Publ. I.H.E.S. 36 (1969), 195-279.

[L2] J.Lipman, Desingularizations of two-dimensional schemes, Ann. of Math. 107 (1978), 151-207.

[LT] J.Lipman and B.Teissier, Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals, Michigan Math.J. 28 (1981), 97-116.

[W] 渡辺敬一, Frobenius 写像の作用について, 第10回可換環論 Symposium 報告集. (1988).