第12回

可換環論シンポジウム報告集

1990年10月30日～11月2日

於　京都府立ゼミナールハウス

序

この報告集は、1990年10月30日から11月2日まで、京都府立ゼミナールハウス（京都府北桑田郡京北町）で行われた「第12回可換環論シンポジウム」の講演者から提出された原稿を、そのまま複写作製したものです。
今回も、70名以上の参加者があり、更に、宮西正宜先生、鈴木敏先生、佐久間元敬先生には特別講演をしていただき、充実した集会であったと思います。
このシンポジウムを開催するにあたり、旅費を大阪大学・宮西正宜先生の科学研究費、本報告集の出版費用を名古屋大学・北岡良之先生の科学研究費から援助いただきました。また、京都府立ゼミナールハウスの方々には、シンポジウム開催中大変お世話になりました。ここに改めて感謝し、お礼申し上げます。

1991年1月
西村純一
吉野雄二
宮崎充弘

目次

イデアルの associated graded ring と Rees環のGorenstein性について

広島大学理学部　大石　彰
(Akira Ooishi)

(0) 序.　(R, m, k)をd次元Cohen－Macaulay局所環、IをRのm－準素イデアルとして

$$G(I)=\oplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1},$$
$$R(I)=\oplus_{n\geq 0} I^n,$$

とおき、これらの次数付き環がいつGorenstein環になるか、という問題を考えます。このような古くからある問題にまだ何かやるべきことが残っているのかと思われるかも知れませんが、非常に簡単な場合についても多くのことが分かっていなかったことを後の例で示します。又、この問題については、後藤四郎氏、下田保博氏、池田信氏などのエキスパートがおられるのですが、この講演の一つの目的は、この問題に私が以前から研究しているヒルベルト関数、特にヒルベルト係数の理論が有効であることを示すことです。後の便宜上R－加群Mに対しても

$$G(I, M)=\oplus_{n\geq 0} I^nM/I^{n+1}M,\quad G(m, M)=G(M)$$

とおきます。先ず、$G(I)$、$R(I)$のCohen－Macaulay性及びGorenstein性について分かっている重要な結果を復習します。Cohen－Macaulay性についてはかなり良く分かっています：

(1) Valabrega－Valla (1978)：　kが無限体、JがIの極小還元のとき、$G(I)$がCohen－Macaulay環であるためには、任意の自然数$n\geq 1$に対して、$J\cap I^{n+1}=JI^n$が成り立つことが必要かつ十分な条件である。

(2) Trung－池田 (1989)：　$d\geq 1$のとき、$R(I)$がCohen－Macaulay環であるためには、$G(I)$がCohen－Macaulay環で$a(G(I))<0$であることが必要かつ十分な条件である。

(3) $G(I)$がCohen－Macaulay環ならば、任意の自然数$n\geq 1$に対して、$G(I^n)$もCohen－Macaulay環である。又、$R(I)$がCohen－Macaulay環ならば、任意の自然数$n\geq 1$に対して、$R(I^n)$もCohen－Macaulay環である。

次に、$R(I)$のGorenstein性ついて知られている基本的な定理は：

（4）池田（1986）： $d \geq 2$ のとき、$R(I)$ がGorenstein環であるためには、$G(I)$ がGorenstein環で $a(G(I)) = -2$ であることが必要かつ十分な条件である。

従って、$R(I)$ のGorenstein性を判定するという問題は $G(I)$ がGorenstein環であることを判定することに帰着します。

例. Rが正則局所環，$d \geq 2$ とすると、$G(m) \cong k[X_1, \cdots, X_d]$ なので、$G(m)$ はGorenstein環かつ $a(G(I)) = -d$。従って、$R(m)$ がGorenstein環であるのは $d = 2$ の場合に限る。そこで次の問題を考えます：「自然数 $r \geq 1$ に対して、$G(m^r)$，$R(m^r)$ がGorenstein環になるのはいつか？」（これらの環は全てCohen−Macaulay環です。）この問題について答えている文献を私は知りません。［答えを先に言うと次のようになります： $G(m^r)$ がGorenstein環となるのは $d \equiv 1 \pmod{r}$ のときに限る。又、$R(m^r)$ がGorenstein環となるのは $r = d - 1$ のときに限る。更に、Rが一般のCohen−Macaulay局所環のとき、$R(m^{d-1})$ がGorenstein環であるためには、Rが正則局所環であることが必要かつ十分な条件な条件である。］

そこで一般のm－準素イデアルIに対しても同様に次の問題を考えます：

（I）$G(I)$ がGorenstein環であることを確かめる“良い判定法”を求めよ。

（II）自然数 $r \geq 1$ に対して、$G(I^r)$ がGorenstein環になるのはいつか？任意の自然数 $r \geq 1$ に対して $G(I^r)$ がGorenstein環になるようなイデアルIは何か？

（III）自然数 $r \geq 1$ に対して、$R(I^r)$ がGorenstein環になるのはいつか？又、そのようなrは与えられたイデアルIに対して高々1つしか存在しないか？

以下の各節で、これらの問題に対する解答を与えます。

（I）$G(I)$ のGorenstein性判定法. 最初に、与えられたイデアルIに対して $G(I)$ がいつGorenstein環になるかを判定する条件について考えます。Aが一般のネーター局所環のとき、AがGorenstein環であることを判定する方法として、次の条件が知られています：

（1）Aの入射次元 $id(A) < \infty$；

（2）AはCohen−Macaulay環で $r(A) = 1$；

（3）AはCohen−Macaulay環で $K_A \cong A$。

しかし、これらの判定法はいずれも今のＧ（Ｉ）がＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環であることを確かめるという問題には有効でありません。そこで、我々の問題に適切なＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ性の判定法が必要になります。これについて直ちに想起されるのはＳｔａｎｌｅｙによる次の結果です：

Ｓｔａｎｌｅｙ（１９７８）： $A=\oplus_{n\geq 0}A_n=k[A_1]$ を体ｋ上のｄ次元Ｃｏｈｅｎ－Ｍａｃａｕｌａｙ斉次次数付き環として、そのヒルベルト級数を

$$F(A, t)=\Sigma_{n\geq 0}(\dim_k A_n)t^n$$
$$=a_0+a_1t+\cdots+a_st^s/(1-t)^d,\ a_i\in\mathbb{Z},\ a_s\neq 0、$$

とおく。ＡがＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環ならば、Ａは（ヒルベルト級数の意味で）“対称的”である、即ち、等式 $a_i=a_{s-i}$, $0\leq i\leq s$ が成り立つ。更に、Ａが整域ならばこの逆の主張も正しい。

これは非常に有用なＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ性判定法ですが、残念ながら我々の問題には役立ちません。Ｇ（Ｉ）が整域になることは極めて稀な上、ＲがＧｏｒｅｎ－ｓｔｅｉｎ局所環のとき、Ｇ（Ｉ）がＣｏｈｅｎ－Ｍａｃａｕｌａｙ整域でさえあればＧ（Ｉ）はＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環になってしまいます（Ｈｅｒｚｏｇ－Ｓｉｍｉｓ－Ｖａｓｃｏｎｃｅｌｏｓ）。所が幸運なことに、渡辺純三氏により次の事実が発見されました：

渡辺純三（１９８９）： ＲがＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ局所環のとき、Ｇ（ｍ）がＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環であるためには、Ｇ（ｍ）がＣｏｈｅｎ－Ｍａｃａｕｌａｙ環かつ対称的であることが、必要かつ十分である。

［渡辺さんは、これをＲがアルチン局所環のときに限って述べています。しかし、一般次元の場合はそれから直ちに従います。ついでながら、今年の夏の名古屋でのシンポジウムにおいて（私の聞き違えでなければ）Ｉａｒｒｏｂｉｎｏも独立に同じ結果を得ていたと述べていました。］

当然期待されることですが、渡辺さんの結果は任意のｍ－準素イデアルに一般化されます：

定理１. ＲがＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ局所環のとき、Ｇ（Ｉ）がＧｏｒｅｎ－ｓｔｅｉｎ環であるためには、Ｇ（Ｉ）がＣｏｈｅｎ－Ｍａｃａｕｌａｙ環かつ対称的であることが、必要かつ十分である。

この命題の証明は、上で述べたように、Ｒがアルチン局所環のときに帰着され、更にＲがＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環でないときに次のように一般化されます：

<u>定理</u>１′．　Ｒがアルチン局所環とし、$E=E_R(k)$とおく。$I^s\neq 0$かつ$I^{s+1}=0$と仮定すると以下の条件は全て同値である：

（１）$G(I, E)$が入射的$G(I)$－加群である（同じことだが、$G(I)$の標準加群$K_{G(I)}$が$G(I, E)(s)$に同型である）；

（２）$\ell(I^iE/I^{i+1}E)=\ell(I^{s-i}/I^{s-i+1})$，$0\leqq i\leqq s$；

（３）$\mathrm{ann}(I^i)=I^{s-i+1}$，$0\leqq i\leqq s$；

（４）$(I^{i+1}:I)=I^i$，$0\leqq i\leqq s$。

<u>証明</u>．　（１）⇒（２）：次の同型から明白：

$$G(I, E)\cong K_{G(I)}(-s)$$
$$\cong \underline{\mathrm{Hom}}_{R/I}(G(I), E_{R/I}(k))(-s).$$

（２）⇒（３）：　条件を書き換えると

$$\ell(\mathrm{ann}(I^{i+1}))-\ell(\mathrm{ann}(I^i))$$
$$=\ell(I^{s-i})-\ell(I^{s-i+1}),\ 0\leqq i\leqq s。$$

従って、$\ell(\mathrm{ann}(I^i))-\ell(I^{s-i+1})$

$$=\ell(\mathrm{ann}(I^{i+1}))-\ell(I^{s-i})$$
$$=\cdots=\ell(\mathrm{ann}(I^{s+1}))-\ell(R)=0。$$

包含関係$I^{s-i+1}\subset\mathrm{ann}(I^i)$が成り立っているので等式$\mathrm{ann}(I^i)=I^{s-i+1}$が成り立つ。

（３）⇒（４）：　$(I^{i+1}:I)=(\mathrm{ann}(I^{s-i}):I)$
$$=\mathrm{ann}(I^{s-i+1})=I^i。$$

（４）⇒（１）：　ＲがＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環のとき、$\mathrm{Soc}(G(I))=\oplus_{0\leqq n\leqq s}S_i/I^{i+1}$とおくと、$i<s$のとき、$S_i=I^i\cap(I^{i+1}:m)\cap(I^{i+2}:I)=I^{i+1}$、$S_s=\mathrm{ann}(m)\cong k$。よって、$\mathrm{Soc}(G(I))\cong k$となり、$G(I)$はＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環である。一般のとき、$S=R\times E$、$J=I\times E$とおくと、ＳはＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環、$J^{s+1}\neq 0$かつ$J^{s+2}=0$で条件より、$\mathrm{ann}(J^i)=I^{s-i+2}$，$0\leqq i\leqq s+1$が成り立つ。よって$G(J)\cong G(I)\times G(I, E)(-1)$がＧｏｒｅｎ－ｓｔｅｉｎ環になるので$G(I, E)$が入射的$G(I)$－加群である。

<u>系</u>（［４］）．　Ｋが標準Ｒ－加群のとき、$G(I, K)$が標準$G(I)$－加群であるためには、$G(I)$，$G(I, K)$がＣｏｈｅｎ－Ｍａｃａｕｌａｙで等式

$$F(G(I, K), t)=(-1)^d t^a F(G(I), t^{-1})$$

が成り立つことが必要かつ十分な条件である。但し、ここで$a=a(G(I))=\deg F(G(I), t)$。［言い換えれば

$(1-t)^d F(G(I), t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_s t^s$,　$a_s \neq 0$,
とすると
$(1-t)^d F(G(I, K), t) = a_s + a_{s-1} t + \cdots + a_0 t^s$)
が成り立つ。]

定義（Stanley）.　$A = \oplus_{n \geqq 0} A_n = k[A_1]$ を体k上のd次元Cohen−Macaulay斉次次数付き環として、
$(1-t)^d F(A, t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_s t^s$, $a_s \neq 0$
とおく。Aがlevel環であるとは、等式 $r(A) = a_s$ が成り立つときを言う。これは、K_A が同一次数（$= -a(A)$）の斉次元で生成されるという条件とも同値である。

系.　Kが標準R−加群のとき、G（K）が標準G（R）−加群であるためには、G（R）がlevel環でG（K）がCohen−MacaulayG（R）−加群であることが必要かつ十分である。

（II）$G(I^r)$ のGorenstein性.　ここでは与えられた自然数rに対して、次数付き環 $G(I^r)$ がいつGorenstein環になるか、という問題を考えます。まず、以下で必要となる二つの概念を思い出します：

定義.　（1）kが無限体のとき、Iのある極小還元Jについて関係式 $JI^n = I^{n+1}$ が成り立つような最小の整数 $n \geqq 0$ を $\delta(I)$ と書き、Iの還元指数と言う。
（2）整数 $e_i(I) = e_i$, $0 \leqq i \leqq d$ を次の等式を満たすものとして定める：

$$\ell(R/I^{n+1}) = e_0 \binom{n+d}{d} - e_1 \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d,$$

但し、$n \gg 0$。

定理2.　（1）$G(I^r)$ がGorenstein環ならば、合同式

$$2e_1(I) \equiv e(I)(d-1) \pmod{e(I)r}$$

が成り立つ。
（2）G（I）がGorenstein環と仮定するとき、$G(I^r)$ がGorenstein環であるためには、合同式　$\delta(I) \equiv d-1 \pmod{r}$ が成り立つことが必要かつ十分である。

補題.　$G(I)$がGorenstein環（一般に対称的）ならば、

$$\delta(I)=2e_1(I)/e(I)。$$

証明.　$\delta(I)=s$, $e(I)=e$, $e_1(I)=e_1$として

$$(1-t)^d F(G(I),\ t)=a_0+a_1t+\cdots+a_st^s$$

とすると、$e=a_0+a_1+\cdots+a_s$、$e_1=a_1+2a_2+\cdots+sa_s$なので、条件より　$2e_1=(a_1+2a_2+\cdots+sa_s)+(sa_0+(s-1)a_1+\cdots+a_{s-1})=s(a_0+a_1+\cdots+a_s)=se$。

補題.　任意の自然数rに対して

$$e_1(I^r)=r^{d-1}\{e_1(I)+e(I)(d-1)(r-1)/2\}。$$

定理２の証明.　$e(I)=e$, $e_1(I)=e_1$とおく。

（1）$G(I^r)$がGorenstein環ならば、補題により

$$\begin{aligned}\delta(I^r)&=2e_1(I^r)/e(I^r)\\&=2r^{d-1}\{e_1+e(d-1)(r-1)/2\}/er^d\\&=2e_1+e(d-1)(r-1)/er。\end{aligned}$$

故に　$2e_1\equiv -e(d-1)(r-1)\equiv e(d-1)\pmod{er}$。

（2）（⇒）$G(I)$がGorenstein環なので再び補題より

$$e\delta(I)=2e_1\equiv e(d-1)\pmod{er}$$

従って　$\delta(I)\equiv d-1\pmod{r}$。

（⇐）Rは完備であるとしてよい。$A=R[It,\ t^{-1}]$とおくと、仮定により$A/(t^{-1})\cong G(I)$はGorenstein環。従ってAがGorenstein環であり$K_A\cong A(a)$が成り立つ。ここで仮定より

$$a=a(A)=a(G(I))+1\equiv 0\pmod{r}。$$

よって$a=rb$、$B=A^{(r)}$とおくと、BはCohen-Macaulay環かつ

$$K_B\cong(K_A)^{(r)}\cong A(a)^{(r)}\cong A(rb)^{(r)}\cong B(b)$$

故に、$B=R[I^rt,\ t^{-1}]$はGorenstein環である。従って$G(I^r)\cong B/(t^{-1})$もGorenstein環である。［この証明において重要な点は、池田さんによる局所環上の次数付き環の標準加群の理論とGorenstein性の判定法をZ上の次数付き環にまで拡張できることであることを使っている点に注意されたい。］

この定理と$e_1(I)$についての［3］の結果を使うと、$G(I)$のGorenstein性についての幾つかの結果が得られます：

<u>系</u>. （1）IがGorenstein局所環Rのパラメーター・イデアル（例えばRが正則局所環で$I=\mathfrak{m}$）のとき、$G(I^r)$がGorenstein環であるためには、合同式 $d\equiv 1 \pmod{r}$ が成り立つことが必要かつ十分である。

（2）$e(R)=2$のとき、$G(\mathfrak{m}^r)$がGorenstein環であるためには、合同式 $d\equiv 2 \pmod{r}$ が成り立つことが必要かつ十分である。

（3）RがGorenstein局所環かつ$\mathrm{emb}(R)=e(R)+d-2$のとき、$G(\mathfrak{m}^r)$がGorenstein環であるためには、合同式 $d\equiv 3 \pmod{r}$ が成り立つことが必要かつ十分である。

（4）Rが超曲面（言い換えればRがCohen−Macaulay局所環かつ$\mathrm{emb}(R)=d+1$）のとき、$G(\mathfrak{m}^r)$がGorenstein環であるためには、合同式 $d\equiv e(R) \pmod{r}$ が成り立つことが必要かつ十分である。

<u>系</u>. 次の条件は同値である：

（1）任意の自然数$r\geq 1$に対して$G(I^r)$がGorenstein環である。

（2）$G(I)$がGorenstein環かつ $\delta(I)=d-1$。

<u>系</u>. RがGorenstein局所環のとき、任意の自然数$r\geq 1$に対して$G(\mathfrak{m}^r)$がGorenstein環であるための必要かつ十分な条件は次で与えられる：

$d=0$のとき： $e(R)=1$又は2、
$d=1$のとき： Rが離散付値環、
$d=2$のとき： $e(R)=2$、
$d=3$のとき： $\mathrm{emb}(R)=e(R)+1$、
Rが超曲面のとき：$e(R)=d$。

<u>例</u>. （1）$R=k[X_1,\cdots,X_n]/(X_1^{e_1},\cdots,X_n^{e_n})$とすると、$G(\mathfrak{m}^r)$がGorenstein環であるのは、$r>e_1+\cdots+e_n-n$、又は、$e_1+\cdots+e_n\equiv n-1 \pmod{r}$であるときに限る。

（2）$d=1$かつRが離散付値環でないとして$e(R)=e$とおく。このとき、任意の自然数$r\geq e$に対して$G(\mathfrak{m}^r)$はGorenstein環でない。$G(\mathfrak{m}^{e-1})$がGorenstein環であることは、$\mathrm{emb}(R)=2$であることと同値で、更にこのとき、$G(\mathfrak{m}^r)$がGorenstein環であるのは、$e\equiv 1 \pmod{r}$であるときに限る。［実際、このとき$e-1=rs$とすると、$(1-t)F(G(\mathfrak{m}^r),t)$は

$$r(r+1)/2+n^2(t+t^2+\cdots+t^{s-1})+r(r+1)t^s/2$$

に等しく、従って$G(\mathfrak{m}^r)$は対称的である。］

(Ⅲ) $R(I^r)$ のGorenstein性.　この節では、与えられた自然数 r に対して、Rees環 $R(I^r)$ がいつGorenstein環になるかという問題を考えます。以下では $d \geqq 2$ と仮定します。

<u>定理</u>3.　(1) $R(I^r)$ がGorenstein環ならば、

$$r = d - 1 - 2e_1(I)/e(I)$$

が成り立つ。特に、$r \leqq d-1$ である。

(2) $G(I)$ がGorenstein環のと仮定するとき、$R(I^r)$ がGorenstein環であるためには、$r = d - 1 - \delta(I)$ であることが必要かつ十分である。

<u>証明</u>.　$e(I) = e$, $e_1(I) = e_1$ とおく。

(1) $R(I^r)$ がGorenstein環と仮定すると、$G(I^r)$ はGorenstein環で $\delta(I^r) = d-2$ が成り立つ。従って

$$\begin{aligned}(d-2)er^d &= e(I^r)\delta(I^r) = 2e_1(I^r)\\ &= r^{d-1}\{2e_1 + e(d-1)(r-1)\}。\end{aligned}$$

故に $r = d - 1 - 2e_1/e$ が成り立つ。

(2) (⇒) $G(I)$ がGorenstein環のとき $2e_1/e = \delta(I)$ であることと (1) より明白。

(⇐) 仮定と定理2より $G(I^r)$ はGorenstein環である。一方

$$a(G(I^r)) = [a(G(I))/r] = [-r-1/r] = -2$$

となることが分かる。従って $R(I^r)$ はGorenstein環である。

次の命題は局所化により、定理3から直ちに従います：

<u>系</u>.　S が（局所環とは限らない）Cohen－Macaulay環、J が S のイデアルで $ht(J) \geqq 2$ とする。

(1) 任意の自然数 $r \geqq ht(J)$ に対して $R(I^r)$ はGorenstein環でない。

(2) ある自然数 r に対して $R(I^r)$ がGorenstein環ならば、r と異なる任意の自然数 n に対して $R(I^n)$ もGorenstein環でない。

定理3と $e_1(I)$ についての［3］の結果を使うと、次の結果が得られます：

<u>系</u>.　(1) $R(I^{d-1})$ がGorenstein環であるためには、R がGorenstein環で I がパラメーター・イデアルであることが必要かつ十分で

ある。特に、$R(m^{d-1})$ がＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環であることと、Ｒが正則局所環であることは同値である。

（２）$d \geq 3$ とすると、$R(m^{d-2})$ がＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環であることと、$e(R)=2$ であることは同値である。

（３）$d \geq 4$ とすると、$R(m^{d-3})$ がＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環であることと、ＲがＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環で $\mathrm{emb}(R)=e(R)+d-2$ であることは同値である。

（４）$e(R)=e$ とおくと、任意の自然数 $r<d-e$ に対して、$R(m^{r})$ はＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環でない。更に、$d>e$ とするとき、$R(m^{d-e})$ がＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環であるためには、Ｒが超曲面であることが必要かつ十分である。

最後に、以上の話題に関係した一つの問題とそれに対する予想を述べて終ります：

問題. $R(I^{r})$ がＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環になるような自然数 $r \geq 1$ が存在するための必要かつ十分な条件は何か？

予想. $R(I^{r})$ がある自然数 $r \geq 1$ に対してＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環であるためには、$G(I)$ がＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環かつ $\delta(I) \leq d-2$ であることが必要かつ十分である。［定理３により上の条件は十分条件である。従って、上の予想はある自然数 $r \geq 1$ に対して $R(I^{r})$ がＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環ならば、$G(I)$ がＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ環であることを主張している。今までの結果から、これは一般の m－準素イデアル I については $d=2, 3$ で正しく、又、$I=m$ のときは, $d=2, 3, \cdots, 6$ で正しいことが分かる。］

以上の内容について詳しく知りたい方は、［５］を参照して下さい。

付記. この仕事は筆者がケルン大学のＭａｎｆｒｅｄ　Ｈｅｒｒｍａｎｎ教授に招かれてドイツ連邦共和国（当時は西ドイツ）に滞在している間になされました。この機会を与えられたＨｅｒｒｍａｎｎ教授、ならびにケルン大学のセミナーでこの問題を一緒に議論したＪüｒｇｅｎ　Ｒｉｂｂｅ博士、バルセロナ大学のＳａｎｔｉａｇｏ　Ｚａｒｚｕｅｌａ教授にこの場を借りて、感謝の意を表したいと思います。又、ここで述べた結果のうち、定理３の系の一部については、最初筆者により予想され、Ｈｅｒｒｍａｎｎ教授・Ｒｉｂｂｅ博士によっても別の方法で得られていることを付け加えておきます。

References

[1] J.Herzog, A.Simis and W.V.Vasconcelos, On the canonical module of the Rees algebra and the associated graded ring of an ideal, J. Algebra 105 (1987),285-302.

[2] S.Ikeda, On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings, Nagoya Math. J. 102 (1986),135 -154.

[3] A.Ooishi, Δ-genera and sectional genera of commutative rings, Hiroshima Math. J. 17 (1987),361-372.

[4] A.Ooishi, On the associated graded module of canonical modules, to appear in J. Algebra.

[5] A.Ooishi, On the Gorenstein property of the associated graded ring and the Rees algebra of an ideal, in preparation.

[6] J.Watanabe, The Dilworth number of Artin Gorenstein rings, Adv. in Math. 76 (1989),194-199.

(November 1990)

ON THE LIFTING PROBLEM FOR COMPLETE INTERSECTION HOMOGENEOUS IDEALS IN POLYNOMIAL RINGS

広島大学　理学部　　張間　忠人

0. 序文

kを体，$S=k[x_1,\cdots,x_n]$，$R=k[x_0,\cdots,x_n]$とする．［1，定義 1.7］において，次の "lifting 問題" が述べられている:

Sの斉次イデアルJに対し，次の条件をみたすRの斉次イデアルIは存在するか？

(i) Iは radical ideal，

(ii) x_0は non zero-divisor mod I，

(iii) $R/(I,x_0)\cong S/J$ as graded k-algebras．

上のようなIが存在するとき，Jを liftable であるといい，IをJの lifting という．

問題の背景や今までに知られている結果については，アブストラクトを見てください([1],[2],[6],[7],[8])．

ここでは，次の定理の証明をします．

定理．kを無限体とする．このとき，Sの完全交叉斉次イデアルは liftable である．

1．準備

$J \subset S$，$I \subset R$ をイデアル，$f \in S$，$g \in R$，$c \in k$ とする．次の記号を準備する．

$$f^* = x_0^{\deg f} f(x_1/x_0, \cdots, x_n/x_0) \text{ if } f \neq 0, \quad 0^* = 0,$$

$$J^* = \{ f^* \mid f \in J \} R,$$

$$g(c, x) = g(c, x_1, \cdots, x_n),$$

$$I(c, x) = \{ g(c, x) \mid g \in I \},$$

$$\ell(f) = \text{the homogeneous component of } f \text{ with the highest degree},$$

$I(c, x)$ は S のイデアルである．次の補題はよく知られている．

補題 1.1（[9, Ch VII, §5]）．(1) $f, h \in S$ とする．このとき，$(fh)^* = f^* h^*$，$x_0^{\deg f + \deg h}(f + h)^* = x_0^{\deg(f+h)}(x_0^{\deg h} f^* + x_0^{\deg f} h^*)$．

(2) $g \in R$ とする．$g = x_0^s g(1, x)^*$，$s := \max\{ \ell \mid x_0^\ell \mid g \}$．

(3) $I \subset S$ radical ideal とすると，$I^* \subset R$ も radical ideal である．

$f_1, \cdots, f_m \in S$ とする．$J = (f_1, \cdots, f_m)$，$A = S/J$ とおく．Aの素イデアル $\mathfrak{z}$ に対し，

$$M(J, \mathfrak{z}) = \mathrm{matrix}\left[\partial f_i / \partial x_j\,(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)\right]_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n},$$

但し，$\bar{x}_i$ は x_i の $A/\mathfrak{z}$ における image とする．このとき，次の命題はよく知られている．

命題 1.2（[4, Ch VI, Theorem 1.15]）．k を完全体とする．このとき，Aの素イデアル $\mathfrak{z}$ に対し，次の条件は同値である．

(1) $A_{\mathfrak{z}}$ は regular local ring である．

(2) $\mathrm{rank}\, M(J, \mathfrak{z}) = n - \dim A$．

ゆえに，$\{f_1, \cdots, f_m\}$ が regular - sequence のとき，上の２つの条件はまた次の条件と同値である．

(3) 行列 $[\partial f_i / \partial x_j]_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n}$ の maximal minor μ で，$\mu \notin \mathfrak{z}$ となるものが存在する．

2．定理の証明

いくつかの補題を準備する．

補題 2.1．$f_1, \cdots, f_m \in S$，$J = (f_1, \cdots, f_m)$ とする．このとき，次の条件は同値である．

(1) $J^* = (f_1^*, \cdots, f_m^*)$.

(2) x_0 は non zero-divisor mod $(f_1^*, \cdots, f_m^*)$ である.

証明. (1) ⇒ (2): $g \in R$ 斉次元で $x_0 g \in (f_1^*, \cdots, f_m^*) = J^*$ とする。補題 1.1 から, $g = x_0^s g(1,x)^*$ とかける. $x_0 g \in J^*$ と $f_i^*(1,x) = f_i$ より, $(x_0 g)(1,x) \in (f_1, \cdots, f_m) = J$. さらに, $(x_0 g)(1,x) = (x_0^{s+1} g(1,x)^*)(1,x) = g(1,x)$ なので, $g(1,x) \in J$, $g(1,x)^* \in J^*$ である. ゆえに, $g = x_0^s g(1,x)^* \in J^* = (f_1^*, \cdots, f_m^*)$.

(2) ⇒ (1): $J^* \supset (f_1^*, \cdots, f_m^*)$ は明らかである. J の任意の元 h に対し, $h^* \in (f_1^*, \cdots, f_m^*)$ を示せばよい. $h = h_1 f_1 + \cdots + h_m f_m$, $h_i \in S$ $(1 \leq i \leq m)$ とかく. 補題 1.1 から, $x_0^s h^* = x_0^t h_1^* f_1^* + \cdots + x_0^u h_m^* f_m^*$ (s, t, u : non-negative integers) とかける. ゆえに, $x_0^s h^* \in (f_1^*, \cdots, f_m^*)$. x_0 は non zero-divisor であるから, $h^* \in (f_1^*, \cdots, f_m^*)$.

補題 2.2 ([6, 補題 3.1]). $f_1, \cdots, f_m \in S$ であり, $\{l(f_1), \cdots, l(f_m)\}$: regular sequence とする. このとき, $\{f_1, \cdots, f_m\}$ は regular sequence である.

補題 2.3. $J \subset S$ を homogeneous regular seq. $\{f_1, \cdots, f_m\}$ で生成されるイデアル, $g_1, \cdots, g_m \in R$ 斉次元で, $g_i(0,x) = f_i$ とする. このとき, イデアル $I = (g_1, \cdots, g_m)$ に対し, 次が成立する.

(1) $R/(I, x_0) \cong S/J$ as graded k-algebras.

(2) x_0 は non zero-divisor mod I である.

(3) k を完全体とし, $h_i := g_i(1,x)$ $(1 \leq i \leq m)$ とおく. もし, 行列 $[\partial h_i / \partial x_j]_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}$ の maximal minor μ で $\mathrm{ht}((\mu, h_1, \cdots, h_m)) \geq m+1$ となるものが存在すれば, I は radical ideal である (ここで, $\mathrm{ht}(S) = \infty$).

証明. (1) 自然な ring homo. $\varphi : R \longrightarrow S/J$ $(\ker\varphi = (x_0, J))$ とする. $g_i(0,x) = f_i$ なので, $(x_0, J) = (x_0, I)$. ゆえに, $R/(x_0, I) \cong S/J$ as graded k-algebras.

(2) $\{x_0, f_1, \cdots, f_m\}$ は regular seq. であり, $g_i(0,x) = f_i$ なので, $\{x_0, g_1, \cdots, g_m\}$ は regular seq. である. ゆえに, $\{g_1, \cdots, g_m, x_0\}$ は regular seq. となり, とくに, x_0 は non zero-divisor である.

(3) $g_i(0,x) = f_i$, $g_i(1,x) = h_i$ なので, $\ell(h_i) = f_i$. 補題 2.2 より, $\{h_1, \cdots, h_m\}$ は regular seq. であるから, とくに, $A = S/(h_1, \cdots, h_m)$ は Cohen-Macaulay である. さらに, $\mathrm{ht}((\mu, h_1, \cdots, h_m)) \geq m+1$ なので, すべての $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(A)$ に対し, $\mu \notin \mathfrak{q}$. 従って, 命題 1.2. から, すべての $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(A)$ に対し, $A_{\mathfrak{q}}$ は regular である.

ゆえに，Aは reduced ，そして $(h_1, \cdots, h_m)$ は radical ideal である．補題1.1から $(h_1^*, \cdots, h_m^*)$ は radical ideal であり，$h_i^* = g_i$ なので，$(h_1, \cdots, h_m)^* = (h_1^*, \cdots, h_m^*) = I$ は radical ideal である．

$m \leq n$ とする．$f_1, \cdots, f_m \in S$ に対し，

$$\mu(f_1, \cdots, f_m) := \det \left[\partial f_i / \partial x_j \right]_{1 \leq i, j \leq m}$$

とおく．

補題2.4. $f_1, \cdots, f_m \in S$ に対し，kの元 $a_1, \cdots, a_m$ で $\mu(f_1 + a_1 x_1, \cdots, f_m + a_m x_m) \neq 0$ となるものが存在する．

証明. mに関する帰納法で示す．$m = 1$ のときは明らかである．$m > 1$ とする．帰納法の仮定から kの元 $a_1, \cdots, a_{m-1}$ で，$\mu(f_1 + a_1 x_1, \cdots, f_{m-1} + a_{m-1} x_{m-1}) \neq 0$ となるものが存在する．もし，$\mu(f_1 + a_1 x_1, \cdots, f_{m-1} + a_{m-1} x_{m-1}, f_m) \neq 0$ のとき，$a_m = 0$ とする．そうでないときは，a_mを0でないkの元とする．m列の余因子展開を考えると，$\mu(f_1 + a_1 x_1, \cdots, f_m + a_m x_m) = \mu(f_1 + a_1 x_1, \cdots, f_{m-1} + a_{m-1} x_{m-1}, f_m) + (-1)^{m-1} a_m \mu(f_1 + a_1 x_1, \cdots, f_{m-1} + a_{m-1} x_{m-1}) \neq 0$ ．

補題2.5. Aを無限体kを含むネーター環，$f_1, \cdots, f_m \in A$とする．このとき，kの元$b_1, \cdots, b_m$で$\mathrm{ht}((f_1+b_1, \cdots, f_m+b_m)) \geqq m$となるものが存在する．

証明. mに関する帰納法で示す．$m=1$とする．$\# k = \infty$, $\# \mathrm{Min}(A) < \infty$, $\# \{c \in k \mid f+c \in \mathfrak{z}\} \leqq 1$ for every $\mathfrak{z} \in \mathrm{Min}(A)$であるから，$k$の元$b$で$f+b \notin \mathfrak{z}$ for all $\mathfrak{z} \in \mathrm{Min}(A)$ i.e. $\mathrm{ht}((f+b)) \geqq 1$となるものがとれる．$m>1$とする．帰納法の仮定により，$k$の元$b_1, \cdots, b_{m-1}$で$\mathrm{ht}((f_1+b_1, \cdots, f_{m-1}+b_{m-1})) \geqq m-1$となるものがとれる．$B := A/(f_1+b_1, \cdots, f_{m-1}+b_{m-1})$とおく．$\# k = \infty$, $\# \mathrm{Min}(B) < \infty$, $\# \{c \in k \mid f_m + c \in \mathfrak{z}\} \leqq 1$ for every $\mathfrak{z} \in \mathrm{Min}(B)$なので，$k$の元$b_m$で，$f_m + b_m \notin \mathfrak{z}$ for all $\mathfrak{z} \in \mathrm{Min}(B)$となるものがとれる．ゆえに，$\mathrm{ht}(f_1+b_1, \cdots, f_m+b_m) \geqq m$である．

定理の証明. $J \subset S$をhomogeneous regular seq. $\{f_1, \cdots, f_m\}$で生成されるイデアルとする．$\deg f_i \geqq 2$ $(1 \leqq i \leqq m)$と仮定して証明してよい．補題2.4.から，kの元$a_1, \cdots, a_m$で，$\mu = \mu(f_1+a_1x_1, \cdots, f_m+a_mx_m) \neq 0$となるものがとれる．$\bar{k}$を$k$の代数的閉包とする．$\bar{S} = \bar{k}[x_1, \cdots, x_n]$, $\bar{R} = \bar{k}[x_0, \cdots, x_n]$

とする．補題2.5.を $\bar{S}/u\bar{S}$ に対し適用すると，kの元 $b_1,\cdots,b_m$ で，$\mathrm{ht}((u,h_1,\cdots,h_m)\bar{S}) \geqq m+1$ となるものがとれる．但し，$h_i = f_i + a_i x_i + b_i$ $(1\leqq i\leqq m)$ である．$g_i = h_i^*$，$I=(g_1,\cdots,g_m)R$ とおく．$g_i(0,x)=f_i$ なので，$R/(x_0,I)\cong S/J$，x_0 は non zero-divisor である．一方，$h_i = g_i(1,x)$ なので，補題2.3から，$I\bar{R}$ は radical ideal である．ゆえに，I は radical ideal である．

例．kを代数的閉体，$S=k[x_1,x_2,x_3]$，$J=(x_1^2+x_2x_3,\ x_2^2+x_1x_3,\ x_3^2+x_1x_2)$ とする．Jは complete intersection homogeneous ideal であり，定理の証明から，Jの lifting は $(x_1^2+x_2x_3,\ x_2^2+x_1x_3,\ x_3^2+x_1x_2+ax_0^2)$ で与えられる．但し，aは0でないkの元である．

3．1つの応用

命題．kを代数的閉体とする．$\mathbb{P}_k^{r-1}$ の complete intersection closed subscheme Z に対し，$\mathbb{P}_k^{n-1}\times\mathbb{A}_k^1$ の closed subscheme W と $\mathbb{A}_k^1$ の open scheme U で次の条件をみたすものが存在する：

(i) projection $\pi : W \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ から導かれる morphism $\pi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ は flat である.

(ii) U のある1点 P に対し, $\pi^{-1}(P) \cong Z$.

(iii) U の点 $Q \neq P$ に対し, $\pi^{-1}(Q)$ は reduced である.

証明. Z を定義する S の complete intersection homogeneous ideal を $J = (f_1, \cdots, f_m)$, 但し f_i : homogeneous, $\mathrm{ht}(J) = m$, とする. S の $\deg \ell = 1$ である homogeneous 元 ℓ で $\{ f_1, \cdots, f_m, \ell \}$ は regular seq. となるものがとれる. 定理の証明から, k の有限集合 T と R の斉次元 $g_1, \cdots, g_m$ で 任意の $c \in k \setminus T$ に対し, ideal $(g_1, \cdots, g_m, x_0 - c\ell)$ が $(f_1, \cdots, f_m, \ell)$ の lifting となるようなものが存在する. ideal $(g_1(t\ell, x), \cdots, g_m(t\ell, x)) \subset k[t][x_1, \cdots, x_n]$ で定義される $\mathbb{P}^{n-1}_k \times \mathbb{A}^1_k$ の closed subscheme を W とする. $U := \{ (t-c) \mid c \in k \setminus T \} \cup (t) \subset \mathbb{A}^1_k$ open subscheme とする. $P = (t-c) \in U$ に対し, fibre $\pi^{-1}(P)$ の homogeneous coordinate ring は $S/(g_1(c\ell, x), \cdots, g_m(c\ell, x)) \cong R/(g_1, \cdots, g_m, x_0 - c\ell)$ であり, reduced である. また, $\pi^{-1}((t)) \cong Z$. ゆえに, U 上の π の fibres の Hilbert polynomial は一定であるから, [3, Ch III, §9, Theorem 2.2] により morphism $\pi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ は flat である. これで命題は示された.

参考文献

[1] A. V. Geramita, D. Gregory and L. G. Roberts, Monomial ideals and points in projective space, J. Pure Appl. Algebra, 40 (1986), 33-62.

[2] R. Hartshorne, Connectedness of the Hilbert scheme, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 29 (1966), 261-304.

[3] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer, 1977.

[4] E. Kunz, Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Birkhäuser, 1985.

[5] H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[6] L. G. Roberts and M. Roitman, On the Hilbert function of reduced and of integral algebra, J. Pure Appl. Algebra, 56 (1989), 85-104.

[7] L. G. Roberts, On the lifting problem over an algebraically closed field, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. XI, No. 1 (1989), 35-38.

[8] M. Roitman, On the lifting problem for homogeneous ideal in polynomial rings, J. Pure Appl. Algebra, 51 (1988), 205-215.

[9] O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra Vol II, Springer, 1975.

準素イデアルの分類と極小拡大環について

岡山理科大　吉田憲一

(Ken-ichi Yoshida)

準素イデアルというのは通り一篇の，すべて同じ顔をしているものなのでしょうか？　それとも少しづつ異なる顔をしているものなのでしょうか？

前半ではこの問題に対して，後者の主張が正しい事を述べたいと思います。

後半では，極小拡大環を持つための必要十分条件を与えます。後半の序文は後で書く事として，まずは準素イデアルの分類という事を考えましょう。

R をネーター整域，$\mathfrak{P}$ を素イデアルとして，$\mathfrak{P}$-準素イデアルを扱うわけですが，準素イデアルは局所化して考えてもかまわないので，始めに $(R, \mathfrak{m})$ を local domain そして，$\mathfrak{m}$-準素イデアルだけを考える事にしましょう。ここでは，イデアルは integral ideal のみとして，fractional ideal は扱いません。

Definition

$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとするとき、

$\Delta_{\mathfrak{q}} \overset{def}{=} \{ \mathfrak{q}' \mid \mathfrak{q}'$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルで、R-加群として、$\mathfrak{q} \cong \mathfrak{q}' \}$

ここで、R-加群として、$\mathfrak{q} \cong \mathfrak{q}'$ とは、K を R の商体とすれば、K の元 α があって、$\mathfrak{q}' = \alpha\mathfrak{q}$ となる事であるから、$\Delta_{\mathfrak{q}} \ni \mathfrak{q}'$ とは、K の元 α があって、$\mathfrak{q}' = \alpha\mathfrak{q}$ で、$\mathfrak{q}'$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルとなるものの集合を考えている事になります。

まずはじめに次の結果がわかります。

Proposition 1

depth $R > 1$ であれば、常に $\Delta_{\mathfrak{q}} = \{\mathfrak{q}\}$.

Proof

$\mathfrak{q}' \in \Delta_{\mathfrak{q}}$ とすれば、K の元 α があって、$\mathfrak{q}' = \alpha\mathfrak{q}$.

depth $R > 1$ であるから、$a, b \in \mathfrak{q}$ で、a, b は regular sequence となるものがある。

従って、$a\alpha,\ b\alpha \in \mathfrak{q}' \subset R$.

よって $\alpha \in R$ となるので、$\mathfrak{q}' = \alpha\mathfrak{q} \subset \alpha R$.

$\alpha R \subsetneqq R$ と仮定する。αR は R の principal ideal 故 $ht\, \alpha R = 1$。しかし、$ht\, \mathfrak{q}' \geq depth\, R > 1$。これは矛盾故 $R = \alpha R$,（α は R の unit）. それ故 $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$ //

従って，$depth\ R > 1$ であれば，m-準素イデアルの同型類はこれ唯一人という事になる。後で，しかし，この様な場合にも，Rees 環を使う事によって分類論が展開される事をますが，ここでは，

$$depth\ R = 1$$

として，$\dim R > 1$ の場合を考えよう。

更に条件として，R の integral closure $\overline{R}$ は有限 R－加群，そして，R は $\overline{R}$ の中で strictly closed とする，すなわち，

$$R = \{ x \in \overline{R} \mid x \otimes 1 = 1 \otimes x \text{ in } \overline{R} \otimes_R \overline{R} \}.$$

話しを進めるために若干の準備をする。ただし，紙面の都合上証明は省略するが，後日論文として出版されるので関心のある人はそちらを見て下さい。

Lemma 2

T を環，S を T の部分環として，今，S の元 a が T の中で可逆であるものとする。a^{-1} が S 上整であれば，実は $a^{-1} \in S$，つもり S の中でも可逆。

これを使うと次が簡単にわかります。

Lemma 3

T を semilocal ring，S を T の部分環。$U(T)$，$U(S)$ で T, S の可逆元全体の集合とする。今，$U(T) = U(S)$ とすれば，$S = T$。

$\mathfrak{q}$ を m-準素イデアルとするとき，

$$R : \mathfrak{q} = \{ \alpha \in K \mid \alpha \mathfrak{q} \subseteq R \}$$

は，R が strictly closed である事から，$\bar{R}$ と R の中間環になる事がわかっています。そこで，

Proposition 4

$\Delta_{\mathfrak{q}} = \{ \mathfrak{q} \}$ である必要十分条件は $R(\mathfrak{q}) = R : \mathfrak{q}$，ここで，$R(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} : \mathfrak{q}$，これも $\bar{R}$ と R の中間環です。

実は，$\Delta_{\mathfrak{q}}$ の構造としては次が与えられます。そのために次の事は述べておかねばならないでしょう。

$\mathfrak{q}' \in \Delta_{\mathfrak{q}}$ とすれば，K の元 α で $\mathfrak{q}' = \alpha\mathfrak{q}$ でしたが，ここで K の元 β で，$\mathfrak{q}' = \beta\mathfrak{q}$ かもしれません。しかし，$\alpha\mathfrak{q} = \beta\mathfrak{q}$ ならば $\alpha\beta^{-1} \in U(R(\mathfrak{q}))$ 従って

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \Delta_{\mathfrak{q}} & \longrightarrow & K/U(R(\mathfrak{q})) \\ & \Psi & & \Psi \\ & \mathfrak{q}' & \longmapsto & \overline{\alpha} \end{array}$$

が与えられます。この写像 φ によって

Theorem 5

$$\Delta_{\mathfrak{q}} \cong U(R : \mathfrak{q})/U(R(\mathfrak{q}))$$

これらの応用として，*principal ideal* aR の *embedded primary component* として与えられる m-準素イデアルについて，次が与えられます。

Proposition 6

$\mathfrak{q}$ を *principal ideal* aR の *embedded primary component* で，$\alpha \in U(R(\mathfrak{q}))$ とすれば，

(1) $\alpha\mathfrak{q}$ は $(a\alpha)R$ の embedded primary component

(2) $a \in \alpha\mathfrak{q} \iff \alpha \in U(R)$，従って $\alpha\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$

(3) $\alpha \notin U(R)$ ならば，$\alpha\mathfrak{q} + aR$ は aR の primary component ではない。

(4) $\alpha \notin U(R)$ で $a \in \alpha\mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}$ ならば矛盾。

最後に，

Theorem 7

$\mathfrak{q}$ が integrally closed な m-準素イデアルであれば，$\Delta_{\mathfrak{q}} = \{\mathfrak{q}\}$。

$1 <$ depth $R <$ dim R の場合，t を変数として，Rees 環 $A = R[It]$ を考える。ここで，

$$I = (a_1, \cdots, a_d)R$$

$d =$ depth R，$a_1, \cdots, a_d$ は (m の) regular sequence，を考える。

この時，m−準素イデアル $\mathfrak{q}$ としては I を含むもののみを考えねばならないが，準素イデアルの分類として，$\mathfrak{q}A$ を考えれば，depth one で与えられたものと類似の理論が構成されるが，この話しはまだ未完成なので，この次の可換環論シンポジュームまでに完成させ

たいと願っています。

次に極小拡大環の話しをいたします。

Definition

R を integral domain として，体でないものとする，T を R の拡大環で T と R の中間環で，R, T 以外のものが存在しないとする。このとき，T は R の極小拡大環と言いましょう。

極小拡大環を持つ環の特徴付けを行なってみようというわけですが，まず極小拡大環という性質は局所的なものであること，すなわち局所化して考えてよいという次の補題が重要な役目を果たします。

Lemma 8

$R \subsetneq T$ を integral domains の拡大で，T は R の極小拡大環であるとすれば，$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ で，$R_{\mathfrak{p}} \neq T_{\mathfrak{p}}$ であれば，$T_{\mathfrak{p}}$ は $R_{\mathfrak{p}}$ の極小拡大環である。

Proof

$\mathfrak{p}$ を R の素イデアルで $R_{\mathfrak{p}} \neq T_{\mathfrak{p}}$ となるものとする。$R \neq T$ なので、この様な素イデアルは存在する。今、B を $T_{\mathfrak{p}}$ と $R_{\mathfrak{p}}$ との中間環で、$R_{\mathfrak{p}}$, $T_{\mathfrak{p}}$ とは異なるものとし、$A = B \cap T$ とおく。

この時、$B = A_{\mathfrak{p}}$ である。

実際、$x \in B$ とすれば、$s \in R \setminus \mathfrak{p}$ で

$sx \in T$ 故 $sx \in A$ $\therefore$ $B = A_{\mathfrak{p}}$.

仮定によって $A = R$ 又は $A = T$ なのだから

$B = R_{\mathfrak{p}}$ 又は $B = T_{\mathfrak{p}}$ となり矛盾 //

K を R の商体とする。R の極小拡大環 T が存在するとすれば、T は K と R の中間環である事を、補題の形で述べておこう。

Lemma 9

R を local domain で体ではないものとする。T を R を含む integral domain で、K に含まれないものとすれば、T は R の極小拡大環ではない。

Proof

α を T の元で，K に入らぬものとする。この時，R と $R[\alpha]$ の中に proper intermediate ring が存在する事が言えればよい。

α が超越的であれば，$R \subsetneqq R[\alpha^2] \subsetneqq R[\alpha]$ なので主張は正しい。

そこで α が R 上代数的とする。R の適当な元を α にかければ，初めから α は R 上 integral としてよい。

a を $\mathfrak{m}$ の零でない元とする。この時，$R[\alpha] \neq R[a\alpha]$ を示す。$R[\alpha] = R[a\alpha]$ とすれば，

$$R[\alpha] = R + \mathfrak{m} R[\alpha]$$

従って，中山の補題から $R = R[\alpha]$ となり矛盾．よって，$R \subsetneqq R[a\alpha] \subsetneqq R[\alpha]$ //

R を integral domain として，T を R の極小拡大環とすれば，Lemma 8 から，ある素イデアル $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ で $T_{\mathfrak{p}}$ は $R_{\mathfrak{p}}$ の極小拡大環，従って Lemma 9 から $T_{\mathfrak{p}} \subseteq K$，よって $T \subseteq K$ を得る。

極小拡大環を持つものとしては，1次元の整域がある，すなわち

Theorem 10

R を1次元ネーター的整域とすれば，R は極小拡大環を持つ。

R が integrally closed でない場合：

α を R 上整で，Rに入らないものとする。この時，更に $R :_R \alpha$ は R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ であるとしてよい。従って conductor ideal $\mathfrak{c}(R[\alpha]/R) = \mathfrak{m}$．そこで，$R[\alpha]/R$ は有限次元 $R/\mathfrak{m}$-vector space となり，$R[\alpha]$ と R の間に極小拡大環が存在する。

R が integrally closed である場合：

R が local ring ならば R は discrete valuation ring で，K が極小拡大環．

R が local ring でないとすれば，$\mathfrak{m}$ を一つの極大イデアルとして，$A = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}}} R_{\mathfrak{p}}$ は極小拡大環となる。

次元が2以上の環であっても，極小拡大環を持つものもあるが，それは depth one で maximal ideal m を持つものに限られる，すなわち次であるが，証明は省略させていただきます。　この結果によって，たとえばアファイン環などですと，極小拡大環を持つものは，1次元整域か，又は depth one かつ maximal ideal なるものを持つものに限られます。

Theorem 11

R をネーター的整域で，次元は2以上のものとする。今，R の integrally closure $\overline{R}$ が有限 R－加群であるか又は R と $\overline{R}$ の間に going－down が成り立つものとする。　この時，R が極小拡大環を持つための必要十分条件は，R は depth one の maximal ideal を持つ。

depth one の maximal ideal を持つという事は，一体どういう環であろうか，ここでは背理的に述べておこう。

このために少し notation を与えておきます。

Definition

$$D^{(1)} = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} = 1 \}$$
$$D^{(2)} = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} = 2 \}$$

一般的には

$$R = \bigcap_{\mathfrak{p} \in D^{(1)}} R_{\mathfrak{p}}$$

である事が知られていますが，

Proposition 12

R をネーター的整域とする，この時次は同値

(1) R の maximal ideal はすべて depth $\geqq 2$

(2) $R = \bigcap_{\mathfrak{p} \in D^{(2)}} R_{\mathfrak{p}}$

Proof

(2) を仮定する。 R の maximal ideal $\mathfrak{m}$ で，

$\operatorname{depth} R_{\mathfrak{m}} = 1$ となるものが存在するとする。

この時，$\alpha \in K$ で $\mathfrak{m} = R :_R \alpha$ となるものが存在する。 $\mathfrak{p} \in D^{(2)}$ で $\mathfrak{m} \supseteqq \mathfrak{p}$ とすれば $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}$

なので，$\exists\, a \in \mathfrak{m}$，$a \notin \mathfrak{p}$ 故 $\alpha \in R_{\mathfrak{p}}$，

$\mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{p}$ とすれば，$\mathfrak{m}$ は maximal ideal なので $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ であるが，$\operatorname{depth} R_{\mathfrak{m}} = 1$，$\operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} = 2$

なので，これはあり得ない。

従って $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{q}$ であるから，$\alpha \in R_{\mathfrak{q}}$

$\therefore\ \alpha \in R$ となり矛盾。

(1) を仮定する。$\mathfrak{p} \in D^{(1)}$ とする。仮定により，$\mathfrak{p}$ は R の maximal ideal ではない。従って，[K. Theorem 128] によって，ある $\mathfrak{q} \in D^{(2)}$ があって $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{q}$ である。先にも述べたが，一般的には

$$R = \bigcap_{\mathfrak{q} \in D^{(1)}} R_{\mathfrak{q}}$$

が成り立つわけで，ここで $R_{\mathfrak{p}} \subseteqq R_{\mathfrak{q}}$ だから

$$R = \bigcap_{\mathfrak{p} \in D^{(2)}} R_{\mathfrak{p}} \qquad //$$

肝心の Theorem 11 の証明を省略したが，この結果も後日論文として印刷されるのでそれを見ていただくものとして，最後にこの定理の証明で重要な働きをする次の結果を述べておこう。

Lemma 13

R をネーター的整域で，R-sequence a, b を持つとする。この時，次が成り立つ。

(1) $R[\frac{b}{a}]$ は R の極小拡大環にはなれない。

(2) $R[\frac{b}{a}]$ は $R[\frac{1}{a}]$ の中に strictly に含まれる。

Proof

a, b を含む maximal ideal で局所化して考えればよいので、R は local ring としてよい。

$R \subsetneqq R[\frac{b^2}{a}] \subsetneqq R[\frac{b}{a}]$ となる事を示そう。

a, b は regular sequence なので、$\frac{b^2}{a} \in R$ とすれば、$b^2 \in aR$ となり、これはおかしい。

だから $R \subsetneqq R[\frac{b^2}{a}]$ である。

$R[\frac{b^2}{a}] = R[\frac{b}{a}]$ とする。

従って

$$\frac{b}{a} = c_0 + c_1\left(\frac{b^2}{a}\right) + \cdots\cdots + c_n\left(\frac{b^2}{a}\right)^n \quad (n \geqq 1)$$

$c_0, c_1, \cdots, c_n \in R$, という関係式が存在する。

よって、

$$a^{n-1}b = c_0a^n + c_1a^{n-1}b^2 + \cdots\cdots + c_nb^{2n}.$$

だから $c_0a^n \in bR$ なので $c_0 = bd$ となる, $d \in R$.

よって, $a^{n-1}(1-ad) \in bR$.

$n = 1$ の時, $1 \in (a, b)R$ となり矛盾.

$n \geqq 2$ の時, $1-ad$ は R の unit 故 $a^{n-1} \in bR$

となり，a, b が regular sequence である事に反する。

(2) は同様にして示せる。

以上の事から，極小拡大環を有する理由は，1次元の場合は，重なっているのだが，discrete valuation ring が極小拡大環を持つために起こるのと integral extension が，実質的にはアルティン的であるから。

2次元以上では，integral extension からしか出て来ないが，アルティン的な整拡大のある場合に限られ，アルティン的な整拡大を得るためには，depth one で maximal ideal となるものが存在する事と同値という事である。

以上が極小拡大環の実体である。

FIREST REFERENCES

1. R.M.Fossum, The divisor class group of a Krull domain, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin, Springer 1973(Band 74).
2. M.Kanemitsu and K.Yoshida, Conductor ideals and embedded primary components of principal ideals, kobe J. Math., 5(1988) 193-208.
3. M.Kanemitsu and K.Yoshida, On embedded primary components, Osaka J. Math., 26(1989) 665-670.
4. Y.Koyama,T.Sugatani and K.Yoshida, Some remarks on divisorial and seminormal overring, Comm. in Algebra, 13(1985) 795-810.
5. J.Lipman, Stable ideals and Arf rings, Amer. J. Math., 93(1971) 649-685.
6. M.Nagata,The theory of commutative rings, 1974 Kinokuniya(In Japanease).

SECOND REFERENCE

1. I.Kaplansky, Commutative rings, The university of Chicago Press, Chicago, 1974.
2. H.Matsumura, Commutative algebra, W.A.Benjamin, New york, 1970.
3. K.Yoshida, On birational-integral extension of rings and prime ideals of depth one, Japan. J. Math., 8(1982), 49-70.

The Gorenstein property of symbolic Rees algebras
for space monomial curves

後藤四郎　　下田保博　　西田康二
(明大理工)　(北里大教養)　(千葉大自然科学)

1 序

以下では $A = k[[X,Y,Z]]$ は体 k 上の形式的巾級数環とし、G.C.D.$(n_1,n_2,n_3) = 1$ なる自然数 n_1,n_2,n_3 に対して $p = p(n_1,n_2,n_3)$ は space monomial curve : $X = T^{n_1}, Y = T^{n_2}, Z = T^{n_3}$ を定義する A の素イデアルとする。本稿では symbolic Rees algebra $R_S(p) = \sum_{n\geq 0} p^{(n)}t^n \subset A[t]$ (t は変数) の環論的性質に関連して、次の様な問題

1. 部分環 $A[pt, p^{(2)}t^2]$ の Cohen-Macaulay 性。
2. $R_S(p) = A[pt, p^{(2)}t^2]$ となる条件は何か。
3. $R_S(p) = A[pt, p^{(2)}t^2, p^{(3)}t^3]$ となる条件は何か。

について述べる。

これらの問題のうち、1. と 2. については既に Herzog と Ulrich[4] によって取り扱われており、p が self-linked (即ち $(f,g) : p = p$ なる $f,g \in p$ が存在する) ならば部分環 $A[pt, p^{(2)}t^2]$ は常に Gorenstein 環であることが示され、さらに $R_S(p) = A[pt, p^{(2)}t^2]$ となるための必要十分条件があたえられている (系 3.7) 。そこで本稿では、まず 1. について p が self-linked でない場合に考察し、次に 2. については Herzog と Ulrich の結果に対して別の視点から見た証明を与えることを試み、さらにその手法を用いて、$R_S(p)$ が 3 次までで生成されるための条件と、その際の $R_S(p)$ の Cohen-Macaulay 性を調べることを目的とする。

2 $R = A[pt, p^{(2)}t^2]$ の Cohen-Macaulay 性

良く知られている様に、$p = p(n_1,n_2,n_3)$ は complete intersection でなければ、次の様な行列

$$M = \begin{pmatrix} X^{\alpha} & Y^{\beta'} & Z^{\gamma'} \\ Y^{\beta} & Z^{\gamma} & X^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

の maximal minors で生成される。但し、$\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma'$ は正整数である。このとき行と列を適当に入れ替え、さらに変数 X,Y,Z をとりかえることにより、M は次の二つの場合

Type 1 $\alpha \le \alpha', \beta \le \beta', \gamma \le \gamma'$

Type 2 $\alpha > \alpha', \beta < \beta', \gamma < \gamma'$

のどちらかであるとして良いことが分る。実は p が self-linked であることと M が Type 1 であることは同値で p が self-linked でないためには M が Type 2 であることが必要十分である (cf.[4]) 。

この記号の下で、p が self-linked でない場合の部分環 $A[pt, p^{(2)}t^2]$ の Cohen-Macaulay 性は次の様に述べられる。

定理 2.1 ([3,Theorm3.1]) M が Type 2 で $(\alpha - 2\alpha')(\beta' - 2\beta)(\gamma' - 2\gamma) \ge 0$ ならば $R = A[pt, p^{(2)}t^2]$ は Cohen-Macaulay で $r(R) = 3$ である。

ここでこの定理の仮定を満たす例を挙げておく。

例 2.2 M が Type 2 で $\alpha' = \beta = \gamma = 1$ ならば $R = A[pt, p^{(2)}t^2]$ は Cohen-Macaulay で $r(R) = 3$ である。例えば $p = p(n^2, n^2+1, n^2+n+1)(n \ge 3)$ とすると p は

$$M = \begin{pmatrix} X^n & Y^n & Z^{n-1} \\ Y & Z & X \end{pmatrix}$$

の maximal minors で生成されるので、この条件をみたす。

実は $A[pt, p^{(2)}t^2]$ が Cohen-Macaulay にならない場合もある。その様な例を一つだけ挙げると、

例 2.3 $p = p(13, 14, 17)$ とすると、p は

$$M = \begin{pmatrix} X^3 & Y^3 & Z^3 \\ Y & Z & X^2 \end{pmatrix}$$

の maximal minors で生成され、$A[pt, p^{(2)}t^2]$ は Cohen-Macaulay でない。

3 $R_S(p) = A[pt, p^{(2)}t^2]$ となる条件。

まず $p^{(2)}$ を正確に記述することが必要なのであるが、次の結果は Huneke や shenzel 等にもよって指摘され (cf.[6],[8]) 、良く知られたものである。

命題 3.1 Mが Type 1 ならば $d_2 \in p^{(2)}$で $p^{(2)} = (d_2) + p^2$かつ

$$d_2 \equiv \begin{cases} Z^{\gamma+2\gamma'} mod(X) & \alpha < \alpha' \text{のとき} \\ Z^{\gamma+2\gamma'} mod(Y) & \beta < \beta' \text{のとき} \\ X^{\alpha+2\alpha'} Y^{\beta'-\beta} mod(Z) & \gamma < \gamma' \text{のとき} \end{cases}$$

となるものが存在する。従って特に$\mu_A(p^{(2)}/p^2) \leq 1$ である。

注意もし$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$ ならば p は素イデアルにならないので、Mが Type 1 ならば$\alpha < \alpha'$又は$\beta < \beta'$又は$\gamma < \gamma'$である。

命題 3.1 よりつぎの様にして $p^{(2)}$の生成元の個数についての情報を得ることができる。例えば$\beta < \beta'$ならば、$(Y) + p^{(2)} = (Y) + (Z^{\gamma+2\gamma'}, X^{\alpha} Z^{2\gamma+\gamma'}, X^{2\alpha} Z^{2\gamma}, X^{2\alpha+\alpha'} Z^{\gamma}, X^{2\alpha+2\alpha'})$ となり、$\gamma + 2\gamma' \geq 2\gamma + \gamma' > 2\gamma > \gamma > 0$ かつ $0 < \alpha < 2\alpha < 2\alpha + \alpha' < 2\alpha + 2\alpha'$ であることに注意する。もし$\gamma = \gamma'$ならば$\gamma + 2\gamma' = 2\gamma + \gamma'$だから $X^{\alpha} Z^{2\gamma+\gamma'}$は $Z^{\gamma+2\gamma'}$で生成されるが、それ以外の場合は、どれも $(Y) + p^{(2)}/(Y)$ の生成元として必要なものである。従って

$$\begin{aligned} \mu_A(p^{(2)}) &= \mu_A((Y) + p^{(2)}/(Y)) \\ &= \begin{cases} 4 & \beta < \beta', \gamma = \gamma' \text{のとき} \\ 5 & \beta < \beta', \gamma < \gamma' \text{のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。他の場合も同様に調べ次の結果を得る。

系 3.2 Mが Type 1 ならば

$$\mu_A(p^{(2)}) = \begin{cases} 4 & \beta = \beta' \text{ 又は } \gamma = \gamma' \text{のとき} \\ 5 & \beta < \beta' \text{ かつ } \gamma < \gamma' \text{のとき} \end{cases}$$

以下しばらく一般的な状況で考えたいので、単に (A, m) は 3 次元の正則局所環とし p は A の素イデアルで $dimA/p = 1$ なるものと仮定する。Huneke による $R_S(p)$ の Noether 性の判定法は、次の条件

(*) 正整数 k, l及び $f \in p^{(k)}, g \in p^{(l)}, x \in m \backslash p$ が存在し

$$l_A(A/(f, g, x)) = kl \cdot l_A(A/(x) + p)$$

となる。

を用いて下記の様に述べられる。

定理 3.3 ([5,Theorem 3.1]) 条件 (*) が成り立てば $R_S(p)$ は Noether 環である。さらに A/m が無限体ならば逆も正しい。

さらに後藤による $R_S(p)$ の Gorenstein 性の判定法は

定理 3.4 ([1,Theorem(1.1)]) 条件 (*) の下で次は同値である。

(1) $R_S(p)$ は Gorenstein 環である。

(2) $A/(f,g)+p^{(n)}$ は $1 \leq n \leq k+l-2$ の範囲で Cohen-Macaulay である。

このとき $A/(f)+p^{(n)}, A/(g)+p^{(n)}, A/(f,g)+p^{(n)}$ は任意の $n \geq 1$ に対して Cohen-Macaulay になり、$R_S(p) = A[\{p^{(n)}t^n\}_{1 \leq n \leq k+l-2}, ft^k, gt^l]$ となる。

である。2 次までで生成される symbolic Rees algebra $R_S(p)$ の特徴付けは、上記の判定法を用いて次の様に与えられる。

補題 3.5 ([3,Theorem(4.1)])

(1) $R_S(p) = A[pt, p^{(2)}t^2]$

(2) $f, g \in p^{(2)}$及び $x \in m \backslash p$ が存在し、$l_A(A/(f,g,x)) = 4 \cdot l_A(A/(x)+p)$ となる。

このとき $R_S(p)$ は Gorenstein 環である。

命題 3.1 の中で述べた様に、p が space monomial curve を定義する素イデアルの場合には$\mu_A(p^{(2)}/p^2) \leq 1$ であったが (Type 2 のときもこれは成り立つ)、この条件を加えると、補題 3.5 はさらに精密化できる。

定理 3.6 ([3,Theorem(4.2)]) A/m は無限体とすると次は同値である。

(1) $R_S(p) = A[pt, p^{(2)}t^2]$ かつ$\mu_A(p^{(2)}/p^2) \leq 1$.

(2) $f \in p, g \in p^{(2)}$及び $x \in m \backslash p$ が存在し $l_A(A/(f,g,x)) = 2 \cdot l_A(A/(x)+p)$ となる。

(3) $p^{(2)} = fp + (g)$ となる $f \in p, g \in p^{(2)}$が存在する。

(4) $(f,g) : p = p$ となる $f \in p, g \in p^{(2)}$が存在する。

このとき $R_S(p)$ は Gorenstein 環である。

従って $R_S(p)$ が 2 次までで生成されていれば (4) より p は self-linked でなければなら

ず、さらに (3) より $p^{(2)}$の生成元の個数は高々4 つである。こうして p と Mを 2 節の様なものとすると、系 3.2 と定理 3.6 より次を得る。

系 3.7 (Herzog-Ulrich) 次は同値である。

(1) $R_S(p) = A[pt, p^{(2)}t^2]$.

(2) Mは Type 1 で (i)$\beta = \beta'$又は (ii)$\alpha = \alpha', \gamma = \gamma'$である。

このとき $R_S(p)$ は Gprenstein 環である。

4 $R_S(p) = A[pt, p^{(2)}t^2, p^{(3)}t^3]$ となる条件。

p は $A = k[[X, Y, Z]]$ の素イデアルで次の様な行列

$$M = \begin{pmatrix} X^{\alpha} & Y^{\beta'} & Z^{\gamma'} \\ Y^{\beta} & Z^{\gamma} & X^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

の maximal minors で生成されるものとする。このとき 3 次までで生成される $R_S(p)$ を特徴付けるために、まず $p^{(3)}$を (かなり複雑になるが) 正確に調べることから始める。

補題 4.1 Mが Type 1 とすると次がなりたつ。

(1) $2\alpha < \alpha'$ 又は $2\gamma < \gamma'$ならば、$p^{(3)} = (d_3) + pp^{(2)}$なる d_3で次を満たす様なものが存在する。

$$d_3 \equiv \begin{cases} Z^{\gamma+3\gamma'} mod(X) & \text{if } 2\alpha < \alpha', 2\beta \leq \beta' \\ Y^{2\beta-\beta'} Z^{\gamma+3\gamma'} mod(X) & \text{if } 2\alpha < \alpha', 2\beta \geq \beta' \\ -X^{2\alpha+3\alpha'} Y^{\beta'-2\beta} mod(Z) & \text{if } 2\beta \leq \beta', 2\gamma < \gamma' \\ -X^{2\alpha+3\alpha'} mod(Z) & \text{if } 2\beta \geq \beta', 2\gamma < \gamma' \end{cases}$$

(2) $2\alpha \geq \alpha'$かつ $2\gamma \geq \gamma'$ならば $p^{(3)} = (d_3, d_3') + pp^{(2)}$なる d_3, d_3'で次を満たす様なものが存在する。

- $2\beta < \beta'$のとき

$$d_3 \equiv X^{2\alpha-\alpha'} Z^{\gamma+3\gamma'} mod(Y) \quad , \quad d_3' \equiv Z^{3\gamma+2\gamma'} mod(Y).$$

- $2\alpha > \alpha' > \alpha, 2\beta \geq \beta'$のとき

$$d_3 \equiv -Y^{4\beta+2\beta'} Z^{2\gamma'-2\gamma} mod(X) \quad , \quad d_3' \equiv Y^{2\beta-\beta'} Z^{3\gamma+2\gamma'} mod(X).$$

- $2\beta > \beta' > \beta$のとき

$$d_3 \equiv -X^{4\alpha+2\alpha'} mod(Y) \quad , \quad d_3' \equiv -X^{2\alpha+3\alpha'} Z^{2\gamma-\gamma'} mod(Y).$$

- $2\gamma > \gamma' > \gamma, 2\beta \geq \beta'$のとき

$$d_3 \equiv -X^{4\alpha+2\alpha'} mod(Z) \quad , \qquad d_3' \equiv -X^{2\alpha'-\alpha} Y^{3\beta+2\beta'} mod(Z).$$

- $2\alpha = \alpha', 2\beta = \beta'$のとき

$$d_3 \equiv -X^{2\alpha+3\alpha'} mod(Z) \quad , \qquad d_3' \in pp^{(2)}.$$

- $\alpha = \alpha', 2\beta = \beta', 2\gamma = \gamma'$のとき

$$d_3 \in pp^{(2)} \quad , \qquad d_3' \equiv Z^{7\gamma} - X^{5\alpha} mod(Y).$$

次にMが Type 2 の場合を考えたいのであるが、まず最初に$\alpha = 2\alpha', 2\beta = \beta', 2\gamma = \gamma'$となることはあり得ないことを注意しておく ([3,Lemma(2.1)])。したがってMの列を適当に入れ替えることによって、次のいずれかを仮定してよい。

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & 2\alpha' < \alpha \;, & 2\beta < \beta' \;, & 2\gamma < \gamma'. \\ \text{(ii)} & 2\alpha' < \alpha \;, & 2\beta < \beta' \;, & 2\gamma \geq \gamma'. \\ \text{(iii)} & 2\alpha' < \alpha \;' & 2\beta \geq \beta' \;, & 2\gamma \geq \gamma'. \\ \text{(iv)} & 2\alpha' > \alpha \;, & 2\beta \geq \beta' \;, & 2\gamma \geq \gamma'. \end{array}$$

補題 4.2 Mが Type 2 とすると次が成り立つ。

(1) ch $k \neq 2$ ならば $p^{(3)} = (d_3, d_3', d_3'') + pp^{(2)}$ なる $p^{(3)}$の元 d_3, d_3', d_3''で次を満たすものがある。

- Mが (i) の場合。

$$d_3 \equiv 2Y^{\beta+2\beta'} Z^{2\gamma'-\gamma} mod(X) \qquad d_3' \equiv -Y^{2\beta+3\beta'} Z^{\gamma'-2\gamma} mod(X)$$
$$d_3'' \equiv Y^{\beta+3\beta'} Z^{\gamma'-\gamma}.$$

- Mが (ii) の場合。

$$d_3 \equiv 2Y^{\beta+2\beta'} Z^{\gamma+\gamma'} mod(X) \qquad d_3' \equiv -Y^{2\beta+3\beta'} mod(X)$$
$$d_3'' \equiv Y^{\beta+3\beta'} Z^{\gamma'-\gamma} mod(X).$$

- Mが (iii) の場合。

$$d_3 \equiv 2Y^{3\beta+\beta'} Z^{\gamma+\gamma'} mod(X) \qquad d_3' \equiv -Y^{2\beta+3\beta'} mod(X)$$
$$d_3'' \equiv Y^{3\beta+2\beta'} Z^{\gamma'-\gamma} mod(X).$$

• Mが (iv) の場合。

$$d_3 \equiv 2Y^{3\beta+\beta'}Z^{\gamma+\gamma'}mod(X) \qquad d_3' \equiv -Y^{\beta}Z^{3\gamma+2\gamma'}mod(X)$$
$$d_3'' \equiv -Y^{2\beta-\beta'}Z^{2\gamma+3\gamma'}mod(X).$$

(2) ch $k=2$ ならば $p^{(3)}=(e_3)+pp^{(2)}$ なる $e_3 \in p^{(3)}$で次を満たす様なものが存在する。

$$e_3 \equiv \begin{cases} Y^{\beta+3\beta'}Z^{\gamma'-2\gamma}mod(X) & M\text{が (i) の場合} \\ Y^{\beta+3\beta'}mod(X) & M\text{が (ii) の場合} \\ Y^{3\beta+2\beta'}mod(X) & M\text{が (iii) の場合} \\ Y^{2\beta-\beta'}Z^{3\gamma+2\gamma'}mod(X) & M\text{が (iv) の場合} \end{cases}$$

系 4.3 (1) Mが Type 1 ならば

$$\mu_A(p^{(3)}/pp^{(2)}) \begin{cases} \leq & 1 \quad 2\alpha < \alpha'\text{又は } 2\gamma < \gamma'\text{のとき} \\ \leq & 2 \quad 2\alpha \geq \alpha' \text{ かつ } 2\beta \geq \beta'\text{のとき} \end{cases}$$

(2) Mが Type 2 ならば$\mu_A(p^{(3)}/pp^{(2)}) \leq 3$.

もし $R_S(p)=A[pt,p^{(2)}t^2,p^{(3)}t^3]$ ならば下記の二つの等式

$$l_A(A/p^{(4)}) = l_A(A/pp(3)+[p^{(2)}]^2)$$
$$l_A(A/p^{(5)}) = l_A(A/pp^{(4)}+p^{(2)}p^{(3)})$$

が成立する。一方で補題 4.1 と補題 4.2 を用いて、ここに現れる長さを精密に計算すれば、次の結果の (1) ⇒ (2) が導かれる。(逆向きは、定理 3.4 を用いれば容易。)

定理 4.4 ([3,Theorem(6.1)]) Mが Type 1 ならば次は同値である。

(1) $R_S(p)=A[pt,p^{(2)}t^2,p^{(3)}t^3]$

(2) Mは次のどれかを満たす。

i. $2\alpha \leq \alpha', 2\beta = \beta'$.
ii. $2\beta = \beta', 2\gamma \leq \gamma'$.
iii. $2\alpha = \alpha', 2\beta \leq \beta', \gamma = \gamma'$.
iv. $2\alpha \geq \alpha', 2\beta \geq \beta', \gamma = \gamma'$.
v. $\beta = \beta'$.
vi. $\alpha = \alpha', \gamma = \gamma'$.

このとき $R_S(p)$ は Gorenstein 環である。

定理 4.5 ([3,Theorem(6.12)]) M が Type 2 ならば次は同値である。

(1) $R_S(p) = A[pt, p^{(2)}t^2, p^{(3)}t^3]$

(2) ch $k = 2$ で M は次のどれかを満たす。

i. $2\alpha' \leq \alpha, 2\beta \geq \beta', 2\gamma = \gamma'$.
ii. $2\alpha' \geq \alpha, 2\beta = \beta', 2\gamma \leq \gamma'$.
iii. $2\alpha' = \alpha, 2\beta \leq \beta', 2\gamma \geq \gamma'$.

このとき $R_S(p)$ は Gorenstein 環ではない。

参考文献

[1] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y. *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[2] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y. *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space monomial curves*, Preprint.

[3] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y. *Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves*, Preprint.

[4] Herzog, J. and Ulrich, B. *Self-linked curve singularities*, Preprint.

[5] Huneke, C. *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J., 34 (1978), 293-318.

[6] Huneke, C. *The primary components of and integral closure of ideals in 3-dimensional regular local rings*, Math. Ann., 275 (1986), 617-635.

[7] Morimoto, M. and Goto, S. *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves*, Preprint.

[8] Schenzel, P. *Examples of Noetherian symbolic blow-up rings* , Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 33 (1988), 4, 375-383

Non-Cohen-Macauly Symbolic Rees Algebras for space monomial curves

森元真由美（東京女子大）

1. 序

$A = k[[X, Y, Z]]$ および $B = k[[T]]$ は体 k 上の形式的巾級数環とし，最大公約数が 1 であるような自然数 n_1, n_2, n_3 に対して k-代数の射 $\varphi : A \longrightarrow B$ を $\varphi(X) = T^{n_1}$，$\varphi(Y) = T^{n_2}$，$\varphi(Z) = T^{n_3}$ によって定め、$\mathrm{Ker}\varphi$ を

$$P = P(n_1, n_2, n_3)$$

と表すことにします。本稿の目的は、A の素イデアル P の symbolic Rees 代数

$$R_s(P) := \sum_{n \geq 0} P^{(n)} t^n \subset A[t]$$

（但し t は A 上の不定元）

の環論的性質のうち、とくに、Cohen-Macauly 性を論ずることにあります。

すでに、後藤-西田-下田氏の講演でも述べられている様に、環 $R_s(P)$ の Noether 性については

C.Huneke [4] の強力な判定法があり、後藤－西田－下田氏は、これを手がかりに、$R_s(P)$ が Gorenstein となるための必要十分条件を求められたのち、多様な $P=P(n_1,n_2,n_3)$ に対して $R_s(P)$ が実際に Gorenstein となることを示されました (cf. [1])。私には、彼等の研究の背景に次のような自然な予想 (=作業仮説)

予想： space monomial curves $P=P(n_1,n_2,n_3)$ に対しては、symbolic Rees algebra $R_s(P)$ は、一度 Noether になりさえすれば必ず Gorenstein となるであろう。

が、かくされている様に思えるのですが、この予想は、本稿で以下に述べます様に反例があり、残念ながら一般には正しくありません。

ここで本稿の主結果を述べておきますと、

Theorem (1.1) p を素数とし、$n=p^e$ $(e\geq 1)$ とおくとき、基礎体 k の標数が p であれば $R_s(P)$ は、次の ideal P に対しては Noether ではあるが Cohen-Macaulay ではない。

(1) $P=P(n^2+2n+2,\ n^2+2n+1,\ n^2+n+1)$.

(2) $P=P(n^2,\ n^2+1,\ n^2+n+1)$, $n\geq 3$.

となります。

この定理(1.1)の(1)でとくに $n=p=2$ ととりますと、$P=P(10,9,7)$ となります。この例はすでに W. Vasconcelos [7] によって(計算機を用いて)解析されており、彼は上記の論文中で $R_s(P)$ は Gorenstein であると結論づけていますが、もちろんこれは正しくありません。興味深いことに、第4節で述べますように、ch $k \neq 2$ の時は Vasconcelos の主張は正しい。すなわち、環 $R_s(P)$ の Gorenstein 性は基礎体の標数によることになります。

2. 判定法

ここでは A は3次元の正則局所環とし、A の極大イデアルを m とします。$P \in \operatorname{Spec} A$ を $\dim A/P = 1$ととり、$R_s(P) = \sum_{n \geq 0} P^{(n)} t^n \subset A[t]$ とおきます。目的は、C. Huneke による Noether 性の判定法と、後藤－西田－下田氏による Gorenstein 性の判定法を述べることにあります。

次の条件

(H) 等式 $\ell_A(A/(x,f,g)) = k \cdot \ell \cdot \ell_A(A/(x)+P)$

を満たすような、$f \in P^{(k)}$, $g \in P^{(l)}$（但し、$k>0$, $l>0$）と $X \in m \setminus P$ とが存在する。

を考えます。Hunekeの判定法とは、この条件(H)が$R_s(P)$のNoether性を決めるというもので、次の様に述べることができます：

Proposition (2.1)　([4, Theorem (3.1)])

条件(H)が満たされれば、環$R_s(P)$はNoetherである。もしもAの剰余体A/mが無限であれば逆も正しい。

後藤－西田－下田の判定法は、このHunekeの条件(H)内のf, gの言葉で記述されるものです。

Theorem (2.2)　([1, Theorem (1.1)])

条件(H)が満たされていると仮定し、f, gは条件(H)内のものとする。この時、次の2つの主張は同値である。

(1) $R_s(P)$はGorensteinである。

(2) 局所環 $A/(f,g)+P^{(n)}$ は $1\leq n\leq k+l-2$ の範囲で Cohen-Macaulay である。

この時、すべての $n\geqq 1$ に対して環 $A/(f)+P^{(n)}$, $A/(g)+P^{(n)}$, $A/(f,g)+P^{(n)}$ はいずれも Cohen-Macaulay となっている。

論文[1]内で、後藤-西田-下田氏はこの(2.2)を用いて様々な $P=P(n_1,n_2,n_3)$ (たとえば $n_1\leqq 4$ のもの)に対して、$Rs(P)$ が Gorenstein となることを証明されていますので、興味のある方はご参照下さい。通常、$A/(f,g)+P^{(n)}$ の Cohen-Macaulay 性の判定には、$P^{(n)}$ を具体的に知ることが必要であり、そのため、たとえ $1\leq n\leq k+l-2$ の範囲であっても、大変な手間がかかるもののようです。第4節の例で、そのことをいくらかお解り頂けるかと思います。

3. Theorem (1,1) の証明

定理(1,1)の証明は、(1)のようなイデアルについても、(2)のようなイデアルについても、殆ど同じですので、ここでは(1)についてのみ証明をすることにします。

まず、イデアル $P=P(n^2+2n+2,\ n^2+2n+1,\ n^2+n+1)$ は次の行列

$$\begin{pmatrix} X^n & Y^n & Z^{n+1} \\ Y & Z & X \end{pmatrix}$$

の2次の小行列式で生成されていることに注目します。

lemma (3.1) $\quad P = I_2\begin{pmatrix} X^n & Y^n & Z^{n+1} \\ Y & Z & X \end{pmatrix}$

証明、 $a=Z^{n+2}-XY^n$, $b=X^{n+1}-YZ^{n+1}$, $c=Y^{n+1}-X^nZ$ とし、$I=(a,b,c)A$ とおく。もちろん、$I\subseteq P$ である。

一方で、$(X)+I=(X)+(Z^{n+2},YZ^{n+1},Y^{n+1})$ であるから、組成列の長さ $\ell_A(A/(X)+I)$ を容易に求めることができ、

$$\begin{aligned}\ell_A\left(A/(X)+I\right) &= n^2+2n+2 \\ &= \ell_A\left(A/(X)+P\right)\end{aligned}$$

となる。従って、$(X)+I=(X)+P$。

故に、
$$\begin{aligned}P &= I+(X)\cap P \\ &= I+xP\end{aligned}$$

となり、中山の補題により $P=I$ を得る。//

さて以下では、a,b,c は (3、1) の証明中のものとすると、

$$\begin{cases} aX^n + bY^n + cZ^{n+1} = 0 & \cdots\cdots (1) \\ aY + bZ + cX = 0 & \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

であるから、$\mathrm{ch}\,k = p$ で $n = p^e$ $(e \geq 1)$ であることを使って (2) よりさらに

$$a^nY^n + b^nZ^n + c^nX^n = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

が得られる。従って等式 (1) と (3) とより $-a^nbY^n$ の2つの表現：

$$\begin{aligned} -a^nbY^n &= a^n(aX^n + cZ^{n+1}) \\ &= b(b^nZ^n + c^nX^n) \end{aligned}$$

が導かれ，これを整理することによって等式

$$X^n(a^{n+1} - bc^n) = Z^n(b^{n+1} - a^ncZ)$$

が得られる。故に、適当な $g \in A$ をとって

$$X^ng = b^{n+1} - a^ncZ$$

と表すことができることが解る。もちろん、$g \in P^{(n+1)}$ であって、

$$\begin{aligned} X^ng &\equiv b^{n+1} \\ &\equiv (X^{n+1})^{n+1} \\ &\equiv X^{n^2+2n+1} \qquad \bmod (Z) \end{aligned}$$

であるから、$g \equiv X^{n^2+n+1} \quad \bmod (Z)$ を得る。

Proposition (3.2)　$R_s(P)$ は Noether である。

証明、$f=c$ ととれば、$f \equiv Y^{n+1} \bmod (z)$ であるから、$(z, f, g) = (z, X^{n^2+n+1}, Y^{n+1})$ である。従って

$$
\begin{aligned}
l_A\left(A/(z,f,g)\right) &= (n+1)\cdot(n^2+n+1) \\
&= 1\cdot(n+1)\cdot l_A\left(A/(z)+P\right)
\end{aligned}
$$

となり、Huneke の条件 (H) が満たされるので、(2.1) により $R_s(P)$ は Noether 環である。//

さて、$R_s(P)$ は Cohen-Macaulay でないことを確かめる。もし、$R_s(P)$ が Cohen-Macaulay であれば、Simis-Trung [6] によって、$R_s(P)$ は必ず Gorenstein となることが知られているので、(2,2) により環 $A/(c)+P^{(n)}$ は（とくに $n=2$ に対しても）Cohen-Macaulay の筈である。従って、次を示せば十分である：

Proposition (3.3)　局所環 $A/(c)+P^{(2)}$ は、Cohen-Macaulay ではない。

証明、パラメーター z についての $A/(c)+P^{(2)}$ の重複

度を、$e_{zA}\left(A/(c)+P^{(2)}\right)$ と書くことにし、

$$\ell_A\left(A/(z)+(c)+P^{(2)}\right) > e_{zA}\left(A/(c)+P^{(2)}\right)$$

を確かめることにする。ここで $\sqrt{(c)+P^{(2)}}=P$ であるから、重複度の加法公式により、

$$e_{zA}\left(A/(c)+P^{(2)}\right)=\ell_A\left(A/(z)+P\right)\cdot\ell_{A_P}\left(A_P/cA_P+P^2A_P\right)$$

となることがまず解る。$\ell_A\left(A/(z)+(c)+P^{(2)}\right)$ と $\ell_{A_P}\left(A_P/cA_P+P^2A_P\right)$ とを計算する為には、イデアル $P^{(2)}$ を具体的に知る必要がある。以下の議論は、すでにHuneke[4]によって知られていることではあるが、読者の便宜を期してもう一度ここでくり返しておくことにする。先の等式(1)と(2)から $-abY^n$ の2つの表現：

$$\begin{aligned}-abY^n &= a(aX^n+cZ^{n+1})\\ &= bY^{n+1}(bZ+cX)\end{aligned}$$

をつくり、等式 $X(a^2X^{n-1}-bcY^{n-1})=Z(b^2Y^{n-1}-acZ^{n+1})$ を導けば、$d_2\in A$ によって

$$Xd_2=b^2Y^{n-1}-acZ^{n+1}$$

となる。もちろん、$d_2\in P^{(2)}$ であって、

$$d_2\equiv X^{n+2}Y^{n-1}\mod (z)$$

である。

Claim (3.4) $\quad P^{(2)} = P^2 + (d_2)$

実際、$I = P^2 + (d_2)$ とおくと、$I \subseteq P^{(2)}$ であって、

$$
\begin{aligned}
(Z) + I &= (Z) + (X^{n+1}, XY^n, Y^{n+1})^2 + (X^{n+2}Y^{n-1}) \\
&= (Z) + (X^{2n+2}, X^{2n+1}Y^{n-1}, X^{n+2}Y^n, X^{n+1}Y^{n+1}, \\
&\qquad X^2Y^{2n}, XY^{2n+1}, Y^{2n+2})
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
l_A\left(A/(Z)+I\right) &= 3(n^2+n+1) \\
&= l_{A_P}\left(A_P/P^2A_P\right) \cdot l_A\left(A/(Z)+P\right) \\
&= e_{ZA}\left(A/P^{(2)}\right) \\
&= l_A\left(A/(Z)+P^{(2)}\right)
\end{aligned}
$$

従って、$(Z)+I = (Z)+P^{(2)}$ であるから、中山の補題により $I = P^{(2)}$ が得られる。

さて、このClaimとその証明とにより、

$$(Z)+(C)+P^{(2)} = (Z)+(X^{2n+2}, X^{2n+1}Y^{n-1}, X^{n+2}Y^n, Y^{n+1})$$

が解るので、

$$l_A\left(A/(Z)+(C)+P^{(2)}\right) = 2n^2+3n+1$$

を得る。一方で、$(Z)+P^{(2)}$ の生成元の形を見ることにより、$C \notin (Z)+P^{(2)}$ が容易に確かめられるから、もちろん $C \notin P^{(2)}$ ；即ち

$$l_{A_P}\left(A_P/CA_P + P^2A_P\right) = 2$$

故に、

$$e_{ZA}\left(A/(c)+P^{(2)}\right)=l_A\left(A/(Z)+P\right)\cdot l_{A_P}\left(A_P/cA_P+P^2A_P\right)$$
$$=2(n^2+n+1)$$

となって、 $l_A\left(A/(Z)+(c)+P^{(2)}\right)-e_{ZA}\left(A/(c)+P^{(2)}\right)=n-1>0$ がわかり、Proposition (3.3) の (従って Theorem (1.1) の) 証明が完了します。//

4. $P=P(10,9,7)$ について。

序文で述べました様に、定理 (1,1) の (1) のイデアルで、$n=p=2$ にとった例が $P=P(10,9,7)$ です。この例は、W. Vasconcelos もすでに解析してあるのですが、$R_s(P)$ の Gorenstein 性 (即ち、この場合は Cohen-Macaulay 性) が、体 k の標数に依る例として、興味深いものですから、残りのページをこの例の解析にあてさせて頂きます。

Theorem (4.1) イデアル $P=P(10,9,7)$ に対して、$R_s(P)$ は必ず Noether 環である。もし、$\mathrm{ch}\,k\neq 2$ ならば、$R_s(P)$ は Gorenstein となる。

以下、P＝P(10,9,7)とし、ch k ≠ 2と仮定します。

さて、天下りに

$$d_2 = X^5 Y + Y^5 Z^2 - 3 X^2 Y^2 Z^3 + X Z^7$$

$$d_3 = 2 X^5 Y^3 - X^7 Z + Y^7 Z^2 - 5 X^2 Y^4 Z^3 + X^4 Y Z^4 + 3 X Y^2 Z^7 - Z^{11}$$

$$d_3' = -(X^7 Y) + Y^8 Z - 3 X^2 Y^5 Z^2 + 5 X^4 Y^2 Z^3 - X Y^3 Z^6 - 2 X^3 Z^7 + Y Z^{10}$$

$$d_3'' = X^8 + X Y^7 Z - X^3 Y^4 Z^2 - 3 X^5 Y Z^3 - 2 Y^5 Z^5 + 5 X^2 Y^2 Z^6 - X Z^{10}$$

$$d_4 = -X^{10} + 2 X Y^{10} - 5 X^3 Y^7 Z + 3 X^5 Y^4 Z^2 + 4 X^7 Y Z^3 - 3 Y^8 Z^4 + 9 X^2 Y^5 Z^5 - 12 X^4 Y^2 Z^6 + X Y^3 Z^9 + 3 X^3 Z^{10} - Y Z^{13}$$

$$d_5 = 3 X^9 Y^4 + 2 Y^{14} - 2 X^{11} Y Z - 9 X^2 Y^{11} Z + 19 X^4 Y^8 Z^2 - 29 X^6 Y^5 Z^3 + 12 X^8 Y^2 Z^4 - 4 X Y^9 Z^5 + 13 X^3 Y^6 Z^6 + 6 X^5 Y^3 Z^7 - 5 X^7 Z^8 + 3 Y^7 Z^9 - 16 X^2 Y^4 Z^{10} + 3 X^4 Y Z^{11} + 5 X Y^2 Z^{14} - Z^{18}$$

$$d_5' = -(X^{12} Y) - 2 X^3 Y^{11} + 5 X^5 Y^8 Z - 6 X^7 Y^5 Z^2 + 8 X^9 Y^2 Z^3 + Y^{12} Z^3 + 2 X^4 Y^6 Z^5 - 10 X^6 Y^3 Z^6 - 3 X^8 Z^7 - 6 X Y^7 Z^8 + 10 X^3 Y^4 Z^9 + 6 X^5 Y Z^{10} + 3 Y^5 Z^{12} - 8 X^2 Y^2 Z^{13} + X Z^{17}$$

$$d_7 = -2 X^{16} Y^2 - 12 X^7 Y^{12} + 36 X^9 Y^9 Z + 4 Y^{19} Z$$

$- 44 X^{11} Y^{6} Z^{2} - 30 X^{2} Y^{16} Z^{2} + 36 X^{13} Y^{3} Z^{3}$

$+ 112 X^{4} Y^{13} Z^{3} - 2 X^{15} Z^{4} - 190 X^{6} Y^{10} Z^{4}$

$+ 172 X^{8} Y^{7} Z^{5} - 102 X^{10} Y^{4} Z^{6} - 2 X Y^{14} Z^{6}$

$- 8 X^{12} Y Z^{7} - 32 X^{3} Y^{11} Z^{7} + 58 X^{5} Y^{8} Z^{8} - 32 X^{7} Y^{5} Z^{9}$

$+ 78 X^{9} Y^{2} Z^{10} + 4 Y^{12} Z^{10} + 24 X^{2} Y^{9} Z^{11}$

$- 26 X^{4} Y^{6} Z^{12} - 56 X^{6} Y^{3} Z^{13} - 16 X^{8} Z^{14} - 28 X Y^{7} Z^{15}$

$+ 50 X^{3} Y^{4} Z^{16} + 20 X^{5} Y Z^{17} + 8 Y^{5} Z^{19} - 22 X^{2} Y^{2} Z^{20}$

$+ 2 X Z^{24}$

とおきます。この時、直接計算を実行して、次を確かめることができる。

lemma(4.2) $X d_2 = Y b^2 - Z^2 ac$,

$X d_3 = b^2 c - a d_2$,

$X d_3' = -b d_2 - Z a c^2$

$X d_3'' = b^3 + Z a^2 c$

$X d_4 = -b d_3'' + 2 a^2 c^2$

$Z d_5 = a^2 d_3 + 2 c^2 d_3'$

$Z d_5' = d_2 d_3 - 2 a^2 d_3''$

$Z d_7 = 2 c^4 d_3 + 3 a^2 d_5' + d_2 d_5$

である。従って、$d_2 \in P^{(2)}$, $d_3, d_3', d_3'' \in P^{(3)}$, $d_4 \in P^{(4)}$ $d_5, d_5' \in P^{(5)}$, $d_7 \in P^{(7)}$ となっている。

この計算は、$d_2, d_3, \cdots\cdots, d_7$ を $\bmod(z)$ で知るだけでも十分です。

Proposition (4.3) $\quad P^{(2)} = (d_2) + P^2$

$$P^{(3)} = (d_3, d_3', d_3'') + P^3$$

$$P^{(4)} = [P^{(2)}]^2 + (d_3, d_3', d_3'')P + (d_4)$$

$$P^{(5)} = P\cdot(P^{(2)})^2 + d_4 P + (d_3, d_3', d_3'')\cdot P^{(2)} + (d_5, d_5')$$

$$P^{(6)} = (d_5, d_5')P + (P^{(2)})^3 + d_4 P^{(2)} + (d_3, d_3', d_3'')\cdot P^{(3)}$$

$$P^{(7)} = P\cdot P^{(6)} + (d_5, d_5')P^{(2)} + d_4 P^{(3)} + (d_3, d_3', d_3'')P^{(4)} + P^{(3)}(P^{(2)})^2 + (d_7)$$

証明. 重複度の加法公式より $l_A(A/(z)+P^{(n)}) = \frac{7}{2}n(n+1)$ である。今、(4.2)内の等式で、右辺のイデアルを I_n とおけば、$l_A(A/(z)+I_n) = \frac{7}{2}n(n+1)$ となっていることを、$n=2,3,4,5,6,7$ の順番にたしかめることができる(詳しくは、読者に残す。)。

従って、$(x)+P^{(n)} = (x)+I_n$ となり、中山の補題により $P^{(n)} = I_n$ が得られる。//

Proposition (4.4) $\quad R_s(P)$ は Noether である。

証明、 $f = d_4$, $g = d_5$ とすると、

$$(z, f, g) = (z, X^{10} - 2XY^{10}, 3X^9Y^4 + 2Y^{14})$$

である。もちろん、$X^{10} - 2XY^{10} = X(X^9 - 2Y^{10})$, $3X^9Y^4 + 2Y^{14} = Y^4(3X^9 + 2Y^{10})$ であり、一方で ch $k \neq 2$ の仮定より $(X^9 - 2Y^{10}, 3X^9 + 2Y^{10}) = (X^9, Y^{10})$ 。

従って、

$$\begin{aligned} l_A(A/(z, f, g)) &= 4 + 10 + 36 + 90 \\ &= 140 \\ &= 4 \times 5 \times l_A(A/(z) + P) \end{aligned}$$

を得る。故に、(2,1) より $R_s(P)$ は Noether である。//

さて、いよいよ $R_s(P)$ が Gorenstein であることを check します。$f = d_4$, $g = d_5$ ですから、実に、$n = 5, 6, 7$ に対して局所環 $A/(f, g) + P^{(n)}$ が Cohen-Macaulay であることを示せば十分です (cf. (2.2))。

$$e_{zA}(A/(f, g) + P^{(n)}) = 7 \cdot l_{A_P}(A_P/(f, g)A_P + P^n A_P)$$

であって、f, g は A_P 内でそれぞれ次数が 4 と 5 のいわゆる super regular sequence をなしている (cf. [1]) ことより、長さ $l_{A_P}(A_P/(f, g)A_P + P^n A_P)$ が計算可能となり、容易に等式：

$$e_{zA}(A/(f, g) + P^{(n)}) = \begin{cases} 98 & (n = 5), \\ 119 & (n = 6), \\ 133 & (n = 7) \end{cases}$$

が得られます。従って $l_A(A/(z)+(t,g)+P^{(n)})$ がこれらの値を越えないことのみをcheckすれば、等式

$l_A(A/(z)+(t,g)+P^{(n)})=e_{zA}(A/(t,g)+P^{(n)})$ が成立し、従って $A/(t,g)+P^{(n)}$ が Cohen-Macaulay 環であることが解るのですが、ここで $n=5,6,7$ に対しては、(4.3)によってイデアル $(z)+(t,g)+P^{(n)}$ は、(生成元が)具体的にわかっているのですから、これは単純計算つまり routine work として実行できます。お手数ですが、これは読者に残すことにします。

Remark (4.5) $P=P(9,10,11)$ については、例えば、$\mathrm{ch}\,k\neq 2,3,7$ の時は $R_s(P)$ が Noether かどうかさえ知られていないようです。$\mathrm{ch}\,k=2,3,7$ に対し、環 $R_s(P)$ は Noether ではあるが Cohen-Macaulay でないことは、checkできます。

この研究は、明治大学の後藤四郎先生と、東京女子大学の山島成穂先生の指導のもとで書かれた、修士論文の一部です。両先生に、深く感謝いたします。

Reference

[1] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space monomial curves, to appear in J. Math Soc. Japan.

[2] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., The Gorensteinness of the symbolic blow-ups for certain space monomial curves, in preprint.

[3] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves, in preprint.

[4] Huneke, C., Hilbert functions and symbolic powers, Michigan Math, J., 34 (1987), 293-318

[5] Morimoto, M. and Goto, S, Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves, in preprint.

[6] Simis, A. and Trung, N. V., The divisor class group of ordinary and symbolic blow-ups, Math. Z., 198 (1988), 479-491

[7] Vasconcelos, W. V., Symmetric algebras and factoriality, Mathematical Sciences Reserch Institute Publication, 15 (1989), 467-496.

Noether normalizations for local rings of algebraic varieties

蔵野 和彦

東京都立大学 理学部

問題 K を体、(A, m) を K 上 essentially of finite type の local domain とする。このとき、A の regular subring D で、inclusion $D \hookrightarrow A$ が finite 射となる様なものが存在するか?

これを満たす D を A の Noether の正規化という。

よく知られている様に、体上有限生成な整域や、完備局所整域は、Noether の正規化を持つ (例えば、[3])。上の問題は正しいとしてもたいした応用は無いのだが、問題自身が誰にでもわかるような簡単な形をしており、興味を持った。

結局、完全な解答は得られなかった。ここでは、$\dim A = 1$ の場合には、Noether の正規化が存在すること、$\dim A \geq 2$ の場合の Noether の正規化を持つための条件、そして、いくつかの例をあげる。

次の section に入る前にいくつかの注意をしておく。

注意 1

- 体 K 上 essentially of finite type の局所整域 (A, m) に対して Noether の正規化の存在を示すためには、
  - A/m は K 上の代数拡大体の場合に示せば十分。つまり、A は K 上の affine domain の極大イデアルに関する局所化としてよい。
  - A は hypersurface の局所環である場合に示せば十分。
- また、Noether の正規化 D が存在すれば、$\dim A = \dim D$ で、D は正則局所環となる。

1 $\dim A = 1$ の場合

この section では、$\dim A = 1$ の場合に Noether の正規化が存在することを証明する。

定理 2 R を体 K 上の 1 次元の affine domain で、m をその極大イデアル、$A = R_m$ とする。このとき、A は Noether の正規化を持つ。

証明 X を K 上の 1 次元の projective variety 、x をその closed point で、$\mathcal{O}_{x,X} = A$ とする。$\tilde{X}$ を X の normalization, $\pi : \tilde{X} \to X$ を射影とする。このとき、$\tilde{X}$ は、K 上 1 次元の regular な projective variety である。$\pi^{-1}(x) = \{y_1, \cdots, y_l\}$ とする。

このとき、$\mathcal{O}_{x,X} \hookrightarrow \cap_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{y_i,\tilde{X}}$ は normalization であり、finite 射である。$B = \cap_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{y_i,\tilde{X}}$ とおく。B は semi-local Dedekind 環であり P. I. D. となる。B の極大イデアルを $m_1, \ldots, m_l$ とし、$B_{m_i} = \mathcal{O}_{y_i,\tilde{X}}$ とする。このとき、

Claim $K(\tilde{X})^*$ の元 t が存在して、($\tilde{X}$ での) t の零点はちょうど $\{y_1, \ldots, y_l\}$ となる。

K が無限体の場合は簡単にできるし (例えば、[1] の Chapter 4)、有限体の場合もほぼ同様なので、証明は省略する。

$\mathcal{M}_{y_i,\tilde{X}}$ を $\mathcal{O}_{y_i,\tilde{X}}$ の極大イデアルとする。このとき、全ての i に対して、$t \in \mathcal{M}_{y_i,\tilde{X}}$ であるから、$t \in B$ であり、$K[t] \subseteq B$ となる。ここで、t の選び方により、$K[t]$ は、K 上の一変数多項式環と同型である。また、B の極大イデアル全てが t を含むことより、$K[t]_{(t)} \subseteq B$ となる。このとき、

Claim $K[t]_{(t)} \hookrightarrow B$ は finite。

上の Claim を証明する。$K[t]_{(t)}$ の B の中での integral closure を C とおく。このとき、C は、semi-local Dedekind 環であり、B と birational である。$B \neq C$ と仮定すると、$K(\tilde{X})$ の K 上の discrete valuation ring D で、$D \supseteq C$ かつ $D \not\supseteq B$ なるものが存在する。

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Spec}(Q(D)) & \longrightarrow & \tilde{X} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Spec}(D) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(K)
\end{array}
$$

ここで、$Q(D)$ は D の商体とする。$\tilde{X} \to \mathrm{Spec}(K)$ が proper 射であるので、射

$\mathrm{Spec}(D) \to \tilde{X}$ が存在して、上の図式は可換になる。$\mathrm{Spec}(D)$ の closed point の像を $y' \in \tilde{X}$ とする。このとき、y' は closed point であり、$D = \mathcal{O}_{y',\tilde{X}}$ で、$t \in \mathcal{M}_{y',\tilde{X}}$ となる。t の選び方より、$y' = y_i$ となる i が存在する。これは、$D \not\supseteq B$ に反する。

定理 1 の証明に戻る。B は P. I. D. であるから、各 i に対して、B の素元 t_i が存在して、$m_i = (t_i)$ とできる。このとき、normalization に対応する conductor ideal は、

$$\mathcal{C}_{B/\mathcal{O}_{x,X}} = (t_1^{a_1} \cdots t_l^{a_l})$$

と書けるはずである (各 i に対して $a_i > 0$)。各 i に対して $t \in m_i$ であるから、十分大きい n に対して、$t^n \in \mathcal{C}_{B/\mathcal{O}_{x,X}} \subseteq \mathcal{M}_{x,X}$ となる。このとき、可換な図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{x,X} \arrow[r] & B \\
K[t^n]_{(t^n)} \arrow[u] \arrow[r] & K[t]_{(t)} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

において、$K[t^n]_{(t^n)} \to K[t]_{(t)}$ と $K[t]_{(t)} \to B$ は共に finite 射であるから、合成射 $K[t^n]_{(t^n)} \to B$ は finite であり、$K[t^n]_{(t^n)} \to \mathcal{O}_{x,X}$ は Noether の正規化となる。 **証明終**

今のところ、このような幾何学的な方法でしか、証明できない。

後の例 5 でもわかるのだが、局所環の Noether の正規化はその affine coordinate ring を固定した場合できないことがあり、それがすなわち affine variety ではなく projective variety 上で議論しないといけない理由と考えられる。

2 Noether の正規化を持つための条件

この section では、algebraic variety の closed point での局所環 (A, m) が Noether の正規化を持つための条件について述べる。1 次元の場合の証明でも推察できるのだが、体上 essentially of finite type な局所環の Noether の正規化の存在は、algebraic variety の局所的な性質だけでは議論できず、global に考える必要がある。ページ数の関係で、完全な証明をつけることはできないが、簡単に解説しておく。

定理 3 K を体、X を K 上の n 次元 projective variety 、$x \in X$ をその closed point とする。このとき、次の 3 つは同値である。

(1) $\mathcal{O}_{x,X}$ の s. o. p. $t_1, \cdots, t_n$ が存在して、$K[t_1, \ldots, t_n]_{(t_1,\ldots,t_n)} \hookrightarrow \mathcal{O}_{x,X}$ が finite。

(2) $\mathcal{O}_{x,X}$ の s. o. p. $t_1, \cdots, t_n$ が存在して、

$$[K(X):K(t_1,\ldots,t_n)] = \mathrm{e}_{(t_1,\ldots,t_n)\mathcal{O}_{x,X}}(\mathcal{O}_{x,X})\cdot[\mathcal{O}_{x,X}/\mathcal{M}_{x,X}:K]$$

(一般に、不等号 $\geq$ が成立する。$\mathrm{e}_I(*)$ は、イデアル I に関する重複度とする。)

(3) $X\times\mathbf{A}^n$ の n 次元 closed subvariety V と、V の closed point y が存在して、$p_1(y)=x$, $\mathcal{O}_{x,X}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{y,V}$, $p_2(y)=(0,\ldots,0)\in\mathbf{A}^n$, $p_2^{-1}((0,\ldots,0))\cap V=\{y\}$ が成立する。(ただし、$\mathbf{A}^n$ は n 次元 affine space 、$p_1: X\times\mathbf{A}^n\to X$ は first projection 、$p_2: X\times\mathbf{A}^n\to\mathbf{A}^n$ は second projection とする。)

さらに、$K=\bar{\mathbf{Q}}$ (有理数体の代数的閉包) で、X が K 上の rational surface であるとき、

(4) $\mathcal{O}_{x,X}$ は Noether の正規化を持つ。

も上の (1),(2),(3) と同値である。

注意 4 $\dim X=1$ のときは、上の (1),(2),(3) は成立している。

$\mathcal{O}_{x,X}$ の s. o. p. $t_1,\ldots,t_n$ を一組えらぶことにより、X から $\mathbf{A}^n$ への rational map が定まる。関数体の拡大次数 $[K(X):K(t_1,\ldots,t_n)]$ は、general な点での fibre の点の数と一致する。今、x が K-有理点と仮定すると、$\mathcal{O}_{x,X}/\mathcal{M}_{x,X}=K$ であり、(2) の等式の右辺は、$\mathrm{e}_{(t_1,\ldots,t_n)\mathcal{O}_{x,X}}(\mathcal{O}_{x,X})$ と一致し、これは、x の像に十分近い general な点の fibre で、x の十分近くにあるものの数である。つまり、(2) の等式が成り立てば、$\{x\}$ はその像の fibre と一致することがわかる。この様にして、(1) と (2) の同値性がわかる。

(1) と (3) の同値性も上とほぼ同じ理由である。affine 整域の間の射は、quasi-finite (各点の fibre が finite) であっても finite 射になるとは限らない。affine variety を projective variety の open subvariety と見たとき、下の affine 整域の上の affine 整域の中での integral closure をとると隠れていた点が出てきたりするからである。(Zariski の Main Theorem [4] により、affine 整域の間の射が quasi-finite と仮定すると、上の affine 整域は、下の affine 整域の integral closure の open subscheme となることがわかる。) 故に、もともと affine 環を固定して考えるよりは、projective variety の点とみて議論して、morphism だけでなく、rational map を考えることが、この種の問題を扱うときに重要と思われる。(3) の条件は、X から $\mathbf{A}^n$ への rational map で、x の像が原点であり、原点の fibre が x だけになることを意味している。

上の定理で一番面倒なのが、$K=\bar{\mathbf{Q}}$、X が rational surface の場合に (4) から (1) を証明することである。つまり、Noether の正規化が存在すると仮定したとき、

$K[t_1,t_2]_{(t_1,t_2)}$ の形のきれいな Noether の正規化が存在することを示さなければならない。

Step 1. K 上 essentially of finite type な局所環 (A,m) が Noether の正規化 D を持つとき、適当に取り直して、係数体 K を含む Noether の正規化を作ることができる。(ここで、$K=\bar{\mathbf{Q}}$ が本質的に効いてくる。)

証明 当然 D は、有理数体 $\mathbf{Q}$ を含むので、$L=Q(D)\cap K$ は D を含んでいる (intersection は $Q(A)$ の中で考える)。$Q(D)\cdot K$ を ($Q(A)$ の中での) $Q(D)$ と K の合成体とする。このとき、L は $Q(D)$ の中で代数的に閉じているから、自然な写像 $Q(D)\otimes_L K\to Q(D)\cdot K$ は同型射となる。それ故に、$[K:L]=[Q(D)\cdot K:Q(D)]\leq[Q(A):Q(D)]<\infty$ が成立する。つまり、このとき K は L 上の有限次分離拡大であり、$D\otimes_L K$ は regular ring になる。これらのことから、$D\otimes_L K$ は D と K で生成される $Q(D)\cdot K$ の部分環であることがわかる。故に、$D\subseteq D\otimes_L K\subset A$ であり、すなわち、$D\otimes_L K$ は A の K を含む Noether の正規化となる。

Step 2. K 上 essentially of finite type な局所環 (A,m) が、係数体 K を含む Noether の正規化 (D,n) を持つとき、その D は K 上 essentially of finite type である。($Q(A)$ の (D) 上の Galois closure をとって、その Galois 群での invariant を調べて証明する。ここで使う条件は、$\mathrm{ch}(K)=0$ だけであるが、$\mathrm{ch}(K)=p>0$ のときもこの部分は正しいのかもしれない。)

証明 A は、ある affine domain R の極大 ideal m に関する局所化として、一般性を失わない。

M を $Q(D)$ の $Q(R)$ を含む最小の Galois 拡大とし、G をその拡大の Galois 群 $\mathrm{Gal}(M/Q(D))$ とする。また、C を K 上 $\{\sigma(R)\mid\sigma\in G\}$ で生成される affine domain とする (C は M の部分環であることに注意)。さらに B を C の normalization としたとき、G は B に作用する (つまり、任意の G の元 σ に対して、$\sigma(B)=B$ が成り立つ)。$F=B^G=B\cap Q(D)$ と置いたとき、B は affine domain であるから、F も affine domain となる。また、F の各元は D 上 integral であるから、F は D に含まれる。$p=F\cap n$ と置く。(p は、F の極大 ideal であることは、簡単にわかる。)

以下で、 $F_p=D$ を証明する。

$\{m_1,\ldots,m_s\}$ を、p の上にある B の極大 ideal 全体とする。

最初に、すべての i に対して、$B_{m_i}\cap Q(D)=F_p$ となることを示す。$B_{m_i}\cap Q(D)$ の元 a に対して、$B_{(F\setminus p)}$ の ideal $I_a=\{b\in B_{(F\setminus p)}\mid ab\in B_{(F\setminus p)}\}$ を考える。a

は B_{m_i} に含まれているので、$I_a \not\subset m_i B_{(F\setminus p)}$ である。一方、I_a は G-stable な ideal であることは簡単にわかる。それ故に、I_a は unit ideal であり、すなわち a は、$B_{(F\setminus p)}$ に含まれている。このことより、$B_{m_i} \cap Q(D) = B_{(F\setminus p)} \cap Q(D) = F_p$ となる。

次に、ある i があって $B_{m_i} \cap Q(D) \supseteq D$ となることを示す。$R{\cdot}F$ を A の中での R と F の合成環とする。このとき、$R{\cdot}F \hookrightarrow B$ は finite である。$q = mA \cap R{\cdot}F$ と置く。すると、$A = R_m \subseteq (R{\cdot}F)_q \subseteq A = R_m$ が成立する。故に、$A = (R{\cdot}F)_q$ となる。q は $R{\cdot}F$ の極大 ideal であることは、簡単にわかり、m_i を $m_i \cap (R{\cdot}F) = q$ となる B の極大 ideal とすれば、$B_{m_i} \supseteq A \supseteq D$ が成立する。つまり、$B_{m_i} \cap Q(D) \supseteq D$ である。

これで、$D = F_p$ であることがわかった。

ここで、$\mathrm{ch}(K) = 0$ で、K は代数的閉体、X は rational surface であるから、Zariski-Castelnuovo の定理 [5] より、D は K 上の rational surface の smooth な (closed) point での局所環であるとしてよい。

Step 3. 標数 0 の代数的閉体 K 上の rational surface の smooth な (closed) point の局所環 D は、$K[x,y]_{(x,y)}$ と同型である。

証明　特異点解消定理により、smooth な rational projective variety X と、その closed point x が存在して、$\mathcal{O}_{x,X} = D$ としてよい。$\pi : X \to X'$ を birational morphism で、X' を K 上の rational surface の category での relatively minimal model とする。$\pi(x) = y$ と置く。このとき、$\mathcal{O}_{y,X'}$ は、$K[s,t]_{(s,t)}$ と K-同型であることはよく知られている ([1], [2])。π は、有限回の一点 blow-up に分解できる。それ故に、D 自身が $K[s,t]_{(s,t)}$ と K-同型であることがいえる。

この様にして (4) から (1) が示される。

3 Examples

この section では、細かい計算は省略して、いくつかの例をあげておく。

例 5　$R = \mathbf{C}[x,y]/(f(x,y))$, $f(x,y) = y^3 - (4x+2)y^2 + (4x - x^2)y - (x^4 + 2x^3 + 2x^2)$, $m = (x,y)$ として $A = R_m$ とする。このとき、任意の R の元 h に対して、$\mathbf{C}[h]_{m \cap \mathbf{C}[h]} \hookrightarrow A$ は finite ではない。
($\mathbf{C}$ は複素数体とする。)

A は $\mathbf{C}$ 上 1 次元の essentially of finite type の局所環であるから、定理 1 より、Noether の正規化を持つ。実際、$R = \mathbf{C}[t^2+t^3, t^2+t^4] \subseteq \mathbf{C}[t]$ であり、この環の射を局所化すれば、

$$\mathbf{C}[t^2+t^3, t^2+t^4]_{(t^2+t^3, t^2+t^4)} = \mathbf{C}[t^2, t^3]_{(t^2,t^3)} \subseteq \mathbf{C}[t]_{(t)}$$

であり、$\mathbf{C}[t^2]_{(t^2)} \hookrightarrow \mathbf{C}[t^2, t^3]_{(t^2,t^3)}$ は finite 射となる。この例は、体上 essentially of finite type の局所環を、affine domain の局所化とみてその affine 環を固定したとき、体上有限生成な affine domain の正規化定理をどの様にうまく使っても、局所環の Noether の正規化は作れない例である。

例 6　$K = \bar{\mathbf{Q}}$, $A = K[t^2+t^3, t^6, t^7, t^8]$, $R = K[t^2+t^3, t^6, t^7, t^8]_{(t^2+t^3, t^6, t^7, t^8)}$ とする。このとき、R の任意の Noether の正規化 D に対して、$[Q(R) : Q(D)] \geq 3$ となる。

例 6 で、$e(R) = 2$ である。つまり、例 6 は、どの様な R の Noether の正規化をとっても、その covering の拡大次数は局所環の重複度とは一致しないことを意味している。t^2+t^3 は R またはのその完備化 $\hat{R}$ の極大イデアルの minimal reduction である。このことより、$K[[t^2+t^3]] \hookrightarrow K[[t^2+t^3, t^6, t^7, t^8]] = \hat{R}$ は finite 射であって、

$$[Q(R) : Q(K[[t^2+t^3]])] = \mathrm{rank}_{K[[t^2+t^3]]}\hat{R} = e_{(t^2+t^3)\hat{R}}(\hat{R}) = 2$$

となり、$K[[t^2+t^3]]$ は $\hat{R}$ の Noether の正規化で、その covering の拡大次数は $\hat{R}$ の重複度と一致していることがわかる。

この二つの例が、代数多様体の局所環の Noether の正規化は、affine 整域や完備局所整域のそれとは全く違う問題であることを意味している。

参考文献

[1] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Graduate Text in Math., Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977

[2] M. Nagata, *On rational surfaces I. Irreducible curves of arithmetic genus* 0 *or* 1, Mem. Coll. Sci. Kyoto (A), **32**, 1960, 351-370.

[3] M. Nagata, *Local Rings*, Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., Wiley, New York, 1962.

[4] M. Raynaud, *Anneaux Locaux Hensèliens,* Lect. Note in Math., vol. 169, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.

[5] O. Zariski, *On Castelnuovo's criterion of rationality* $p_a = P_2 = 0$ *of an algebraic surface,* Ill. J. Math., **2**, 1958, 303-315.

環の有限生成性に関する若干の注意

小野田 信春 （福井大・教育）

§1 序

本稿の目的は次の2つの定理を証明することにある：

定理1 Aは excellent semi-local domain，RはAを含む整閉整域でA上平坦かつ各 $\mathfrak{z} \in Spec(A)$ に対し、ファイバー環 $R\otimes_A k(\mathfrak{z})$ は $k(\mathfrak{z})$ 上有限生成とする．このとき、条件

(*) $R\otimes_A k(\mathfrak{z})$ は equidimensional かつその次元は $\mathfrak{z}$ に依らず一定

が成り立てば、RはA上有限生成である．

定理2 Aは excellent semi-local domain，RはAを含む整閉整域とする．このとき、RがA上有限生成であるための必要十分条件は、次の2条件を満たす $0 \neq a \in A$ が存在することである：

(1) $R[a^{-1}]$，R/aR は共にA上有限生成．

(2) $\dim R/P = \dim R - 1$ が任意の $P \in Min_R(R/aR)$ に対して成り立つ．

このうち、定理1は参考文献[1]の結果を少し一般化したものであるが、実は証明の方針は[1]の場合と全く同じであり、その本質的な部分は、

I. 任意の $P \in \mathrm{Spec}\, R$ に対し、R_P は A 上 essentially of finite type である

II. $R[x^{-1}]$ が A 上有限生成となるような $0 \neq x \in R$ が存在する

以上の2点を示す所にある。これらは各々[1]の Lemma 4.1 Lemma 4.2 に対応するものであるが、そこでの証明がこの場合にもそっくり適応できることを注意したい。[1]の証明を注意深く読んで頂けるとわかるが、その際ポイントとなるのは、次の事実である：

III. m が A の極大イデアルのとき、R の mR-adic completion R^* に対し、$\dim R^* \geqq \dim R$ が成立する。

これが言えれば、I, II の証明は[1]と同様である。III の証明も[1]の前半の議論を精密化することで完成できるので、以下、少し詳しくこの部分について解説したい。

なお、記号等は通例のものに従うが、環 R と R のイデアル I に対し、$\mathrm{Min}_R(R/I)$ は I の極小素イデアルの集合を表わしまた、$\mathrm{Max}(R)$ は R の極大イデアルの集合を表わすものとしておく。

§2　定理1の証明

Aはネーター環．RはA-algebraとする．これからは，Rとして，A上平坦かつ任意の$\mathfrak{q}\in \mathrm{Spec}\,A$に対し，$R\otimes_A k(\mathfrak{q})$は$k(\mathfrak{q})$上有限生成でその次元は$\mathfrak{q}$に依らずにnで一定となるようなものを考察の対象とする．便宜上，ここではそのようなRを，*flat pseudoaffine ring of rank n over A*，略して，A上階数nのFPRと呼ぶことにする．

<u>補題</u>1　RがA上階数nのFPRのとき，

(1)　SがAの積閉集合なら，$R\otimes_A S^{-1}A$は$S^{-1}A$上階数nのFPRである．

(2)　IがAのイデアルなら，$R\otimes_A A/I$はA/I上階数nのFPRである．

(3)　$x\in R$かつ$x\notin \mathfrak{m}R$ $({}^\forall \mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A))$なら，$R[x^{-1}]$はA上階数nのFPRである．

証明は容易なので省略する．

以下，RはA上階数nのFPRとして，その簡単な性質をまとめておくことにする．

<u>補題</u>2　(1)　RはA上忠実平坦である．

(2)　IがAのイデアルなら，$\mathrm{Min}_R(R/IR)$は有限集合である．

(3)　$P\in \mathrm{Spec}\,R$なら，PR_Pはイデアルとして有限生成である．

<u>証明</u>　(1)　仮定より$\mathfrak{m}R\neq R$ $({}^\forall \mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A))$が成立する

ことより明らか．

(2) まず．$\mathrm{Min}_R(R/IR)=\mathrm{Min}_R(R/\sqrt{I}R)$ ゆえ、I は radical ideal としてよい．次に．$I=\mathfrak{z}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{z}_r$ を素イデアル分解とするとき、$IR=(\mathfrak{z}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{z}_r)R=\mathfrak{z}_1R\cap\cdots\cap\mathfrak{z}_rR$ が成立し（∵(1)より），従って．$\mathrm{Min}_R(R/IR)\subseteq\mathrm{Min}_R(R/\mathfrak{z}_1R)\cup\cdots\cup\mathrm{Min}_R(R/\mathfrak{z}_rR)$ となるので．結局、$I=\mathfrak{z}$（素イデアル）と仮定してよい．このとき、$P\in\mathrm{Min}_R(R/\mathfrak{z}R)$ なら．(1)より $P\cap R=\mathfrak{z}$ に注意すれば．$PR_\mathfrak{z}\in\mathrm{Min}_{R_\mathfrak{z}}(R_\mathfrak{z}/\mathfrak{z}R_\mathfrak{z})$ を得る．ここで．$R_\mathfrak{z}/\mathfrak{z}R_\mathfrak{z}\cong R\otimes_A k(\mathfrak{z})$ は仮定から $k(\mathfrak{z})$ 上有限生成ゆえ、$\mathrm{Min}_{R_\mathfrak{z}}(R_\mathfrak{z}/\mathfrak{z}R_\mathfrak{z})$ は有限集合．従って．$\mathrm{Min}_R(R/\mathfrak{z}R)$ も有限集合である．

(3) $P\cap A=\mathfrak{z}$ とおくと．$PR_\mathfrak{z}/\mathfrak{z}R_\mathfrak{z}\in\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{z}/\mathfrak{z}R_\mathfrak{z})$ は有限生成イデアルゆえ．$PR_\mathfrak{z}$ も有限生成となり、従って PR_P は有限生成である ∎

<u>補題</u>3　$\mathfrak{z}\in\mathrm{Spec}\,A$,　$P\in\mathrm{Min}_R(R/\mathfrak{z}R)$ とする．このとき、$\dim R_\mathfrak{z}/PR_\mathfrak{z}=n$ ならば．$ht(P)=ht(\mathfrak{z})$ である．

<u>証明</u>　R は A 上忠実平坦なので．$ht(P)\geq ht(\mathfrak{z})$ はよい．そこで．逆向きの不等式を示せばよい．$R_\mathfrak{z}/PR_\mathfrak{z}$ は $A_\mathfrak{z}/\mathfrak{z}A_\mathfrak{z}=k(\mathfrak{z})$ 上のアフィン整域である．従って．

$$tr.\deg_{A/\mathfrak{z}}R/P=tr.\deg_{k(\mathfrak{z})}R_\mathfrak{z}/PR_\mathfrak{z}=n$$

が成立する．さて．$Q\in\mathrm{Min}(R)$ を $ht(P)=ht(P/Q)$ を満たすように選び、$\mathfrak{z}=Q\cap A$ とおく．このとき、$\mathfrak{z}\in\mathrm{Min}(A)$ であ

る．拡大 $A/\mathfrak{q} \subseteq R/Q$ に次元不等式を当てはめると．

$$\mathrm{ht}(P/Q) \leqq \mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}) + \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/Q - \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/P$$

を得るが，ここで

$$\mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/Q = \mathrm{tr.deg}_{k(\mathfrak{q})} R_\mathfrak{q}/QR_\mathfrak{q} = \dim R_\mathfrak{q}/QR_\mathfrak{q}$$
$$\leqq \dim R_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q} = n$$

に注意すれば

$$\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(P/Q) \leqq \mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}) \leqq \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$$

がわかり．主張の正しいことが示せた．

<u>補題4</u>　$P \in \mathrm{Spec}\, R$, $\mathfrak{q} = P \cap A$ のとき、次が成り立つ．

$$\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) + n - \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/P$$

<u>証明</u>　A, R の代わりに $A_\mathfrak{q}$, $R_\mathfrak{q}$ を考えることで，$\mathfrak{q}$ は極大イデアルとしてよい．このとき．$R/\mathfrak{q}R$ は $A/\mathfrak{q}$ 上有限生成かつ $\dim R/\mathfrak{q}R = n$ である．従って、$P_0 \in \mathrm{Min}_R(R/\mathfrak{q}R)$ が存在して $\dim R/P_0 = n$ となる．ここで、補題3より、$\mathrm{ht}(P_0) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$ が成立することに注意して欲しい．一方、R/P_0 は $A/\mathfrak{q}$ 上のアフィン整域ゆえ．

$$\mathrm{ht}(P/P_0) = \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/P_0 - \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/P$$
$$= n - \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/P$$

よって．$\mathrm{ht}(P) \geqq \mathrm{ht}(P/P_0) + \mathrm{ht}(P_0) = \mathrm{ht}(P/P_0) + \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$ に注意すれば．

$$\mathrm{ht}(P) \geqq \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) + n - \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/P \tag{1.1}$$

がわかる．逆に，$Q \in \mathrm{Min}(R)$ を $ht(P/Q) = ht(P)$ を満たすように選んで $\mathfrak{q} = Q \cap A$ とおき，拡大 $A/\mathfrak{q} \subset R/Q$ を考えると，

$$\begin{aligned} ht(P/Q) &\leq ht(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) + \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/Q - \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{p}} R/P \\ &\leq ht(\mathfrak{p}) + n - \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{p}} R/P \end{aligned} \tag{1.2}$$

(1.1) と (1.2) より主張を得る ■

<u>補題</u>5　$\dim A < \infty$ ならば $\dim R = \dim A + n$

<u>証明</u>　任意の $M \in \mathrm{Max}(R)$ に対し，$\mathfrak{m} = M \cap A$ とおくと，補題4より，$ht(M) = ht(\mathfrak{m}) + n - \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{m}} R/M \leq \dim A + n$ となり，まず

$$\dim R \leq \dim A + n \tag{1.3}$$

がわかる．逆に，任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ に対し，$\dim R/\mathfrak{m}R = n$ ゆえ，$M \in \mathrm{Max}(R)$ と $M_0 \in \mathrm{Min}_R(R/\mathfrak{m}R)$ を $ht(M/M_0) = n$ を満たすように選べる．このとき，補題3より $ht(M_0) = ht(\mathfrak{m})$ となり，従って，$ht(M) \geq ht(M/M_0) + ht(M_0) = n + ht(\mathfrak{m})$ が成立し，

$$\dim R \geq \dim A + n \tag{1.4}$$

がわかる．(1.3) と (1.4) より主張は正しい ■

以下，$(A, \mathfrak{m})$ が catenary な局所環と仮定する．

<u>補題</u>6　$P \in \mathrm{Spec}\, R$，$\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, A$ かつ $P \supset \mathfrak{q}R$ ならば，

$$ht(P/\mathfrak{q}R) = ht(P) - ht(\mathfrak{q})$$

<u>証明</u>　$\mathfrak{p} = P \cap A$ とおくと，補題4より，

$$ht(P) = ht(\mathfrak{p}) + n - \mathrm{tr.deg}_{A/\mathfrak{p}} R/P \tag{1.5}$$

一方，補題1に注意しながら，$R/\mathfrak{q}R \supset A/\mathfrak{q}$ に補題4を当てはめると，

$$ht(P/\mathfrak{q}R) = ht(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) + n - tr.deg_{A/\mathfrak{q}} R/P \qquad (1.6)$$

(1.5) と (1.6) より，$(A, \mathfrak{m})$ は catenary ゆえ

$$ht(P) - ht(P/\mathfrak{q}R) = ht(\mathfrak{p}) - ht(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = ht(\mathfrak{q})$$

となり，主張が示せた ∎

以下，* は $\mathfrak{m}$-adic completion を表わすものと仮定する．

<u>補題</u> 7　B が A 上平坦な A-algebra のとき，次が成り立つ：

(1)　B^* は A 上平坦．

(2)　A のイデアル $\mathfrak{q}$ に対し，$(\mathfrak{q}B)^* \cong \mathfrak{q}B^*$ かつ $(B/\mathfrak{q}B)^* \cong B^*/\mathfrak{q}B^*$．

(3)　さらに，$B/\mathfrak{m}B$ がネーター環ならば，

(i)　B^* はネーター環．

(ii)　$\dim B^* = \sup\{\dim (B_M)^\wedge \mid M \in Max(B)$ かつ $\mathfrak{m}B \subseteq M\}$．

(iii)　$\mathfrak{m}B \subseteq P$ を満たす $P \in Spec(B)$ に対し，次が成り立つ；

$$\dim (B_P)^\wedge = \dim (B_P)^*\ .$$

<u>証明</u>　[1], Lemma 1.3 を参照のこと．

<u>補題</u> 8　$\mathfrak{m}R \cap S = \phi$ を満たす R の積閉集合 S に対し，

$$\dim (S^{-1}R)^* \geq \dim S^{-1}R$$

が成り立つ．特に，$\dim R^* \geq \dim R$ が成り立つ．

<u>証明</u>　$d = \dim A$ に関する数学的帰納法で証明する．$\mathfrak{q} \in$

$\mathrm{Spec}(A)$ を $ht(\mathfrak{q})=1$ となるように選ぶと，前補題より，

$$(S^{-1}R)^*/\mathfrak{q}(S^{-1}R)^* \cong (S^{-1}R/\mathfrak{q}(S^{-1}R))^*$$

が成立する．いま，$\bar{S}$ を S の $A/\mathfrak{q}$ での像とすると，

$$S^{-1}R/\mathfrak{q}(S^{-1}R) \cong \bar{S}^{-1}(R/\mathfrak{q}R)$$

ゆえ，補題1と帰納法の仮定から，

$$\dim (S^{-1}R)^*/\mathfrak{q}(S^{-1}R)^* \geqq \dim S^{-1}R/\mathfrak{q}(S^{-1}R) \qquad (1.7)$$

がわかる．ここで，補題6より，

$$\dim S^{-1}R/\mathfrak{q}(S^{-1}R) = \dim S^{-1}R - 1 \qquad (1.8)$$

が成立することに注意して欲しい．一方，補題7の(i)より，

$$\dim (S^{-1}R)^*/\mathfrak{q}(S^{-1}R)^* \leqq \dim (S^{-1}R)^* - 1 \qquad (1.9)$$

となるので，(1.7)～(1.9) より $\dim (S^{-1}R)^* \geqq \dim S^{-1}R$ を得る ■

<u>補題</u>9　$P\in \mathrm{Spec}(R)$ に対し，$\dim R_P^\wedge \geqq \dim R_P$．

<u>証明</u>　$\mathfrak{q}=P\cap A$ とおく．このとき，必要なら A，R を $A_\mathfrak{q}$，$R_\mathfrak{q}$ で置き換えることで，$\mathfrak{q}=\mathfrak{m}$ と仮定してよい．すると，$\mathfrak{m}R\subset P$ かつ $R/\mathfrak{m}R\cong R\otimes_A A/\mathfrak{m}$ はネーター環である．よって，補題7の(iii)より $\dim R_P^\wedge = \dim R_P^*$ が成り立つ．従って前補題より結論を得る ■

以上で，上に挙げた主張の III が正しいことが示せた．これをもとにして，I，II を証明する部分は，[1] の Lemma 4.1 および Lemma 4.2 の場合と殆ど同様にしてできるので，詳細は（繰り返しになる上，きっちり書くとかなり長くなるので）

省略することにする．

とりあえず，これで定理1が示せた．次の節では定理2について解説したい．

§3 定理2の証明

定理2の証明に移るが，ここでは，定理1との関連を示すために，定理1の応用として定理2を証明することにする．そのために，本当は余計な条件だが，定理2において，

(∗) R は A 上忠実平坦である

という条件を付けた上で定理2を示す．（もちろん，この条件(∗)は無しにでも定理2は証明できる．その証明はこれから述べるものとはかなり異なり，どちらかといえば定理1の証明に近い．）

では，(∗)を込めた上で定理2を証明しよう．そのためには，この場合の A が定理1の条件を満たすことを示せばよい．つまり，次の2つをいえばよい：

(イ) 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対し，$R \otimes_A k(\mathfrak{p})$ は $k(\mathfrak{p})$ 上有限生成である．

(ロ) $R \otimes_A k(\mathfrak{p})$ は equidimensional かつその次元は $\mathfrak{p}$ に依らずに一定である．

まず，(イ)は簡単に示せる．実際 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対し，$\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$

なら．$\mathfrak{q}A[a^{-1}] \in \operatorname{Spec} A[a^{-1}]$ ゆえ．

$$R \underset{A}{\otimes} k(\mathfrak{q}) \cong (R \underset{A}{\otimes} A[a^{-1}]) \underset{A[a^{-1}]}{\otimes} k(\mathfrak{q}A[a^{-1}])$$

に注意すれば，$R \underset{A}{\otimes} k(\mathfrak{q})$ が $k(\mathfrak{q})$ 上有限生成であることがわかる．$a \in \mathfrak{q}$ なら．$R_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q} \cong (R_\mathfrak{q}/aR_\mathfrak{q})/(\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}/aR_\mathfrak{q})$ ゆえ．この場合も仮定から $R \otimes_A k(\mathfrak{q}) \cong R_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$ は $k(\mathfrak{q})$ 上有限生成である．従って (イ) が示せた．

次に (ロ) を示そう．このときも場合分けをする．$a \notin \mathfrak{q}$ なら．拡大．$A[a^{-1}] \subset R[a^{-1}]$ において．$R[a^{-1}]$ は $A[a^{-1}]$ 上有限生成かつ忠実平坦ゆえ $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}R[a^{-1}]) = \operatorname{ht}(\mathfrak{q}[a^{-1}]) = \operatorname{ht}(\mathfrak{q})$ を得る．従って．ある $P \in \operatorname{Min}_R(R/\mathfrak{q}R)$ が存在して．$\operatorname{ht}(P[a^{-1}]) = \operatorname{ht}(\mathfrak{q}[a^{-1}])$ が成り立つ．ここで．次元公式より．

$$\operatorname{ht}(P[a^{-1}]) = \operatorname{ht}(\mathfrak{q}[a^{-1}]) + \operatorname{tr.deg}_A R - \operatorname{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/P$$

が成り立ったので．従って．$\operatorname{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/P = \operatorname{tr.deg}_A R$ がわかる．一方．$P \cap A = \mathfrak{q}$ ゆえ．$k(\mathfrak{q}) = A_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{q} \subset R_\mathfrak{q}/PR_\mathfrak{q}$ かつ (イ) より $R_\mathfrak{q}/PR_\mathfrak{q}$ は $k(\mathfrak{q})$ 上有限生成なので．

$$\dim R_\mathfrak{q}/PR_\mathfrak{q} = \operatorname{tr.deg}_{k(\mathfrak{q})} R_\mathfrak{q}/PR_\mathfrak{q} = \operatorname{tr.deg}_{A/\mathfrak{q}} R/P$$

となり．よって $\dim R_\mathfrak{q}/PR_\mathfrak{q} = \operatorname{tr.deg}_A R$．つまり．$\dim R \underset{A}{\otimes} k(\mathfrak{q}) = \operatorname{tr.deg}_A R$ がわかった．

次に．$a \in \mathfrak{q}$ のときを考えよう．$\mathfrak{q}_0 \in \operatorname{Min}_A(A/aA)$ を $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}$ となるように選ぶ．拡大 $A/\mathfrak{q}_0 \hookrightarrow R/\mathfrak{q}_0R$ において（$\mathfrak{q}_0R \cap A = \mathfrak{q}_0$ に注意）$R/\mathfrak{q}_0R$ は $A/\mathfrak{q}_0$ 上有限生成かつ忠実平坦である．よ

って、 $ht(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_0) = ht(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_0 \cdot R/\mathfrak{q}_0 R) = ht(\mathfrak{q}R/\mathfrak{q}_0 R)$ を得、従って、$P \in \mathrm{Min}_R(R/\mathfrak{q}R)$ で $ht(P/\mathfrak{q}_0 R) = ht(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_0)$ を満たすものが存在する。ここで、$P_0 \in \mathrm{Min}_R(R/\mathfrak{q}_0 R)$ を $ht(P/P_0) = ht(P/\mathfrak{q}_0 R)$ となるように選ぶ。このとき、$P_0 \cap A = \mathfrak{q}_0$ かつ R/P_0 は $A/\mathfrak{q}_0$ 上に有限生成である。従って、

$$ht(P/P_0) = ht(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_0) + tr.deg_{A/\mathfrak{q}_0} R/P_0 - tr.deg_{A/\mathfrak{q}} R/P$$

が成立するが、ここで $ht(P/P_0) = ht(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_0)$ ゆえ、

$$tr.deg_{A/\mathfrak{q}} R/P = tr.deg_{A/\mathfrak{q}_0} R/P_0$$

がわかる。ところで、$P_0 \in \mathrm{Min}_R(R/aR)$ であることに注意して欲しい。従って、仮定から $\dim R/P_0 = \dim R - 1$ となり、

$$\begin{aligned} tr.deg_{A/\mathfrak{q}_0} R/P_0 &= \dim R/P_0 - \dim A/\mathfrak{q}_0 \\ &= (\dim R - 1) - (\dim A - 1) \\ &= \dim R - \dim A = tr.deg_A R \end{aligned}$$

が成立する。よって、この場合も $\dim R \otimes_A k(\mathfrak{q}) = tr.deg_A R$ となり、(ロ) の正しいことが示せた。

参考文献

[1] N. Onoda, Algebras with affine fibres over an excellent ring, to appear in Journal of Pure & Appl. Alg.

局所環の帰納的極限のネーター性について

高知大理　　小駒哲司

昨年の岐阜における第11回可換環論シンポジウムで、永田先生が次の命題に言及されました。

局所環（ネーターを仮定している）の拡大列 $(A_i, \mathfrak{m}_i)$ で次の2つの条件を満たすものを考える。

(1) $\mathfrak{m}_i A_{i+1} = \mathfrak{m}_{i+1}$

(2) A_{i+1} は A_i 上 flat.

このとき、和 $\bigcup_i A_i$ は、ネーター環となる。

もし、仮定(1)を落とせば、和 $\bigcup_i A_i$ がネーターにならない例がすぐ作れますが、条件(2)についてはどうなのか、というのが問でした。

局所環の列 $\{(A_i, \mathfrak{m}_i)\}$ で、ネーターでない和 $\bigcup_i A_i = A$ をもち、その極大イデアル $\mathfrak{m}$ が、どの $\mathfrak{m}_i$ でも生成される (i.e. $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i A$) もの (morphism は flat になっていない)

が構成されているので、条件(2)は一見必要に思えましたが、実際に和Aがネーターとなるない(1)を満たす例を作ろうとするとうまくいかず、実はAがネーターとなるには、(1)だけで十分ということがわかりました。

定理　$\{(A_\lambda, \mathfrak{m}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ を局所環の帰納系で，$\mu \geq \lambda$ について，$\mathfrak{m}_\lambda A_\mu = \mathfrak{m}_\mu$ なるものとすれば、その帰納的極限Aはネーターとなる。

定理の証明に先立って、先ず次のことに注意しておこう。

補題1　$(A, \mathfrak{m})$ は、ネーターとは限らない局所環で、$\mathfrak{m}$は有限生成イデアルとする。AのイデアルJについて，剰余環 A/J の完備化 $(A/J)^\wedge$ は、$\hat{A}/J\hat{A}$ と同型となる。ここで $\hat{A}$はAの完備化を意味する。

証明。$\hat{A}$ はネーターとなるから，$J\hat{A}$ は $\hat{A}$で閉集合となり $\hat{A}/J\hat{A}$ は完備環となる。一方

$$(\hat{A}/J\hat{A})/\mathfrak{m}^n(\hat{A}/J\hat{A}) = \hat{A}/(J\hat{A}+\mathfrak{m}^n\hat{A}) = A/(J+\mathfrak{m}^n)$$

であるから

$$(A/J)^\wedge = (\hat{A}/J\hat{A})^\wedge = \hat{A}/J\hat{A}$$

を得る。

さて、定理を証明するには、AのどのイデアルIも有限生成なることを示せばよい。ところで$\hat{A}$はネーターとなるから$I\hat{A}$は有限生成。よって、λ_0を十分大きくとれば、A_{λ_0}のイデアルJにより$I\hat{A}=J\hat{A}$と表わせる。

Jは有限生成であるから、$I=JA$を示せば証明が終る。そこで帰納系$\{A_\lambda/JA_\lambda \mid \lambda\in\Lambda, \lambda\geq\lambda_0\}$を考えると、その帰納的極限は$A/JA$となる。

さて、補題1より$(A/JA)^\wedge=\hat{A}/J\hat{A}$で、$(I/JA)(A/JA)^\wedge=I\hat{A}/J\hat{A}=0$となるから、$I/JA$は自然な準同型$A/JA\longrightarrow\hat{A}/J\hat{A}=(A/JA)^\wedge$の核に含まれる。よって、$A_\lambda/JA_\lambda$を改めて$A_\lambda$と考えることにより、次を示せば十分である。

命題2. 定理の仮定の下で、自然な準同型$\varphi: A\longrightarrow\hat{A}$は単射である。

証明. A_λの剰余体を$A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda=k_\lambda$とおけば、$\{k_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$は帰納系となり、その極限$k$は$A/\mathfrak{m}$と同型となる。

すると、$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_\lambda}A_\lambda\longrightarrow\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_\mu}A_\mu\ (\mu\geq\lambda)$から引きおこされる写像

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_\lambda}A_\lambda\otimes_{A_\lambda}k\longrightarrow\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_\mu}A_\mu\otimes_{A_\mu}k$$

は、$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_\lambda}A_\lambda\otimes_{A_\lambda}A_\mu\longrightarrow\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_\mu}A_\mu$が全射となるから、全射である。

よって、$\{\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_\lambda} A_\lambda \otimes_{A_\lambda} k \mid \lambda \in \Lambda\}$ は、極限を $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} A$ としてもつ次数付ネーター環の帰納系となり、その射はすべて全射である。それらの極限への射の核を考えれば、ネーター性から、ある μ_0 が存在して $\mu \geq \mu_0$ については、

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_\mu} A_\mu \otimes_{A_\mu} k \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} A$$

が同型となる。特に、このとき $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_\mu} A_\mu \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} A$ は単射であることがわかる。

さて、A の元 x が $\varphi(x)=0$ となるとしよう。x を代表する系の元 y をとる。y はある A_λ の元であるが、$\lambda \geq \mu_0$ としておいてよい。

すると $y=0$ である。実際、そうでなければ、A_λ がネーターであることから、$y \in \mathfrak{m}_\lambda^n \setminus \mathfrak{m}_\lambda^{n+1}$ となる n が存在する。すると y の $\mathfrak{m}_\lambda^n / \mathfrak{m}_\lambda^{n+1}$ におけるクラスの、単射 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_\lambda} A_\lambda \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} A$ による像は 0 でなくなるが、これは x の $\mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$ におけるクラスが 0 でないことになる。しかし、これは $\varphi(x)=0$ ということに矛盾するから、結局 $y=0$ でなければならない。φ は単射である。

On algebras which resemble the local Weyl algebra

C.W. Hang
Department of Mathematics, Dong-A University

M. Miyanishi and D.Q. Zhang
Department of Mathematics, Osaka University

Abstract

We extract ring-theoretic, algebraic conditions which the local Weyl algebra $\widehat{D}_n(K)$ has, and consider whether or not these conditions characterize $\widehat{D}_n(K)$. We are successful only in the case $n = 1$.

1 Introduction

Let K be an algebraically closed field of characteristic zero and let $\widehat{\mathcal{O}}_n(K) = K[[x_1, \ldots, x_n]]$ be the formal power series ring over K in n variables. According to Björk [1], we denote by $\widehat{D}_n(K)$ the subring of $\mathrm{End}_K(\widehat{\mathcal{O}}_n(K))$ generated over K by the left multiplications by elements of $\widehat{\mathcal{O}}_n(K)$ and partial differentials $\partial_i = \partial/\partial x_i$,

$$\widehat{D}_n(K) = \widehat{\mathcal{O}}_n(K) < \partial_1, \ldots, \partial_n >$$

where $\partial_i x_j - x_j \partial_i = \delta_{ij}$ (Kronecker's delta) and $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$. The ring $\widehat{D}_n(K)$, called the *local Weyl algebra*, has the Σ-filtration $\{\Sigma_v\}_{v \geq 0}$ such that $\Sigma_0 = \widehat{\mathcal{O}}_n(K)$ and $\Sigma_v = \{\Sigma_\alpha f_\alpha \partial^\alpha; f_\alpha \in \widehat{\mathcal{O}}_n(K)$ and $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ with $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq v\}$ and that the associated graded ring $\mathrm{gr}_\Gamma(\widehat{D}_n(K))$ is a polynomial ring over $\widehat{\mathcal{O}}_n(K)$ in n variables. Moreover, $\widehat{D}_n(K)$ has weak global dimension n, i.e., $\mathrm{w.gl.dim}(\widehat{D}_n(K)) = n$.

In the present article, we consider whether or not these conditions are sufficient to characterize the ring $\widehat{D}_n(K)$.

2 Structure theorems

To simplify the notations, we denote $\widehat{\mathcal{O}}_n(K)$ by R. Let A be a (not necessarily commutative) ring finitely generated over R. Consider the following three conditions on A:

(i) A has a Σ-filtration $\{\Sigma_v\}_{v\geq 0}$ such that $\Sigma_0 = R$, Σ_1 generates A over R, $\Sigma_v \cdot \Sigma_w \subset \Sigma_{v+w}$ for any $v, w \geq 0$ and $A = \cup_{v\geq 0}\Sigma_v$;

(ii) The associated graded ring $\mathrm{gr}_\Sigma(A) := \oplus_{v\geq 0}\Sigma_v/\Sigma_{v-1}$ is a polynomial ring $R[y_1, \ldots, y_m]$ in m variables;

(iii) $\mathrm{w.gl.dim}(A) = n$.

If A satisfies the above conditions (i) and (ii), we call it a *pre-W-algebra over R.* We denote by L the free R-module $\Sigma_1/\Sigma_0 = \oplus_{i=1}^m Ry_i$.

Lemma 2.1 *Let A be a pre-W-algebra over R. Then we have the following:*

(1) Let $Y_1, \ldots, Y_m$ be elements of Σ_1 such that $y_i \equiv Y_i \pmod{\Sigma_0}$ for any i. Then A is generated by $Y_1, \ldots, Y_m$ over R, which we write as $A = R < Y_1, \ldots, Y_m >$.

(2) For any $y \in L$ and $a \in R$, define $y[a]$ by

$$y[a] = Ya - aY$$

for $Y \in \Sigma_1$ with $y \equiv Y \pmod{\Sigma_0}$. Then $y[a]$ is independent of the choice of Y, and y is considered as a K-derivation on R. So, we have an R-linear map $\rho : L \to \mathrm{Der}_K(R)$; we write $y[a]$ as $\rho(y)(a)$ as well and we use this map ρ in the subsequent discussions without referring explicitly to this lemma.

(3) Define a bracket product $[y, z]$ on L by

$$[y, z] \equiv YZ - ZY \pmod{\Sigma_0}$$

for $Y, Z \in \Sigma_1$ with $y \equiv Y \pmod{\Sigma_0}$ and $z \equiv Z \pmod{\Sigma_0}$. Then $[y, z]$ is well-defined and ρ is a Lie-algebra homomorphism, i.e., $\rho([y, z]) = [\rho(y), \rho(z)]$.

Proof. (I) For any $f \in A$, we define $\nu(f)$ as the smallest integer r with $f \in \Sigma_r$. If $\nu(f) = r$, there exists $F_r(y_1, \ldots, y_m) \in R[y_1, \ldots, y_m]_r$ = the r-th homogeneous part of $\mathrm{gr}_\Sigma(A)$ such that $f - F_r(Y_1, \ldots, Y_m) \in \Sigma_{r-1}$. By induction on $\nu(f)$, we can verify the assertion straightforwardly.
(2) Replace Y by $Y + b$ with $b \in R$. Then we have

$$(Y+b)a - a(Y+b) = Ya - aY ,$$

whence $y[a]$ is independent of the choice of Y. Furthermore, we have

$$\begin{aligned} y[ab] &= Y(ab) - (ab)Y = (aY + y[a])b - abY \\ &= a(Yb - bY) + y[a]b = ay[b] + y[a]b . \end{aligned}$$

So, $y[\ ]$ is a K-derivation on R.
(3) The assertion can be verified by a straightforward computation.

Q.E.D.

The structure of a pre-W-algebra over R is given in the following:

Theorem 2.2 *(1) Let A be a pre-W-algebra over R. Let $Y_1, \ldots, Y_m$ be elements of Σ_1 as chosen in the previous lemma. Write*

$$\text{(2.0)} \qquad Y_iY_j - Y_jY_i = \textstyle\sum_{k=1}^m \rho_{ij,k}Y_k + \sigma_{ij} \ , \quad 1 \le i, j \le m,$$

where $\rho_{ij,k}, \sigma_{ij} \in R$. Then we have the following equalities:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{aligned} &\textstyle\sum_{\ell=1}^m (\rho_{ij,\ell}\rho_{\ell k,s} + \rho_{jk,\ell}\rho_{\ell i,s} + \rho_{ki,\ell}\rho_{\ell j,s}) \\ &\quad = y_i[\rho_{jk,s}] + y_j[\rho_{ki,s}] + y_k[\rho_{ij,s}] \ , 1 \le i, j, k, s \le m \end{aligned}$$

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{aligned} &\textstyle\sum_{\ell=1}^m (\rho_{ij,\ell}\sigma_{\ell k} + \rho_{jk,\ell}\sigma_{\ell i} + \rho_{ki,\ell}\sigma_{\ell j}) \\ &\quad = y_i[\sigma_{jk}] + y_j[\sigma_{ki}] + y_k[\sigma_{ij}] \ , 1 \le i, j, k \le m \end{aligned}$$

$$\text{(2.3)} \qquad \rho_{ij,k} = -\rho_{ji,k}, \ \sigma_{ij} = -\sigma_{ji} \ , 1 \le i, j, k \le m.$$

The elements $\{\rho_{ij,k}; 1 \le i, j, k \le m\}$ are determined uniquely by the Lie algebra L and the choice of R-free basis $\{y_1, \ldots, y_m\}$ of L.

(2) Suppose we are given as in Lemma 2.1 the Lie algebra L and an R-linear map $\rho : L \to \mathrm{Der}_K R$ which is a Lie-algebra homomorphism. For an R-free basis $\{y_1, \ldots, y_m\}$ of L, suppose we are given elements $\{\sigma_{ij}; 1 \le i, j \le m\}$ satisfying the conditions (2.2) and (2.3) above. Then there exists an R-algebra A with a Σ-filtration $\{\Sigma_v\}_{v \ge 0}$ such that

(i) *A is generated over R by elements* $Y_1, \ldots, Y_m$*;*

(ii) *The equalities (2.0) - (2.3) hold;*

(iii) $\Sigma_v = \{\Sigma_\alpha f_\alpha Y^\alpha; f_\alpha \in R, Y^\alpha = Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_m^{\alpha_m}, |\alpha| \leq v\}$ *for any* $v \geq 0$*;*

(iv) $\mathrm{gr}_\Sigma(A) \cong R[y_1, \ldots, y_m] :=$ *the symmetric algebra of L over R.*

Proof. (1) By the definition of $[y_i, y_j]$ in Lemma 2.1, $\{\rho_{ij,k}; 1 \leq i, j, k \leq m\}$ are the multiplication constants of the Lie algebra L. Hence they are uniquely determined by the choice of the R-free basis $\{y_1, \ldots, y_m\}$ of L. If one chooses $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ as in Lemma 2.1, then $\{1, Y_1, \ldots, Y_m\}$ is an R-free basis of Σ_1. Then the equalities (2.1) and (2.2) follow from the Jacobi identity:

$$[[Y_i, Y_j], Y_k] + [[Y_j, Y_k], Y_i] + [[Y_k, Y_i], Y_j] = 0 ,$$

where $[Y_i, Y_j] = Y_i Y_j - Y_j Y_i$.

(2) Let $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ be indeterminates and let A be the free R-algebra generated by $Y_1, \ldots, Y_m$ modulo the two-sided ideal I generated by

$$\{Y_i Y_j - Y_j Y_i - \sum_{k=1}^{m} \rho_{ij,k} Y_k - \sigma_{ij}; 1 \leq i, j, k \leq m\}$$

and

$$\{Y_i f - f Y_i - \rho(y_i)(f); 1 \leq i \leq m, \forall f \in R\}.$$

We write $y_i[f] = \rho(y_i)(f)$ by identifying Y_i's with y_i's in L. We can employ the proof of the Poincaré-Birkoff-Witt theorem (cf. Jacobson [2]) without major changes in the present situation to show that every element of A is written uniquely as a linear combination of standard monomials in $Y_1, \ldots, Y_m$ with coefficients in R. In particular, the equalities (2.1) and (2.2) imply that Σ_1 (with the notation in (iii)) is a free R-module generated by $1, Y_1, \ldots, Y_m$. Note that there is a surjective homomorphism $\theta : R[y_1, \ldots, y_m] \to \mathrm{gr}_\Sigma(A)$. Its kernel is generated by the relations $y_i y_j - y_j y_i$ and $y_i f - f y_i, 1 \leq i, j \leq m$. But these elements are already zero in $R[y_1, \ldots, y_m]$. Hence $\mathrm{gr}_\Sigma(A) \cong R[y_1, \ldots, y_m]$. Q.E.D.

Let A be a pre-W-algebra over R. We are interested in the existence of an R-algebra homomorphism from A to the local Weyl algebra $\widehat{D}_n(K)$.

Theorem 2.3 *Let A be a pre-W-algebra over R. Then the following conditions on A are equivalent:*

(1) There is an R-algebra homomorphism $\tilde{\rho} : A \to \widehat{D}_n(K)$ such that $\tilde{\rho}(\Sigma_v) \subset \Sigma_v$ for all $v \geq 0$ and $\tilde{\rho}|_{\Sigma_1}$ induces the Lie-algebra homomorphism $\rho : L := \Sigma_1/\Sigma_0 \to \mathrm{Der}_K(R)$ (cf.Lemma 2.1).

(2) There exists a lifting $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ of the R-free basis $\{y_1, \ldots, y_m\}$ in Σ_1 for which $\sigma_{ij} = 0, 1 \leq i, j \leq m$.

(3) There exist $\{a_i\}_{1 \leq i \leq m}$ in R such that

$$(2.4) \qquad \sigma_{ij} = \textstyle\sum_{\ell=1}^{m} \rho_{ij,\ell} a_\ell + y_j[a_i] - y_i[a_j] \ , \ 1 \leq i, j \leq m \ .$$

(4) There exists an R-free submodule $\tilde{L}$ of Σ_1 such that $\tilde{L}$ is closed under the bracket product $[Y, Z] = YZ - ZY$ and the natural residue homomorphism $\pi : \Sigma_1 \to L$ induces a Lie-algebra isomorphism $\pi|_{\tilde{L}} : \tilde{L} \to L$.

Proof.

(1)$\Rightarrow$ (2). Note that $\widehat{D}_n(K)$ acts on R in the natural fashion. So, A acts on R via the homomorphism $\tilde{\rho}$. For $Y \in \Sigma_1$, let $a = \tilde{\rho}(Y) \cdot 1$ and let $Y' = Y - a$. Then, since $\tilde{\rho}(Y) \in \Sigma_1 := \oplus_{i=1}^{n} R\partial/\partial x_i + R$, we know that $\tilde{\rho}(Y') \in \mathrm{Der}_K(R)$. In particular, $\tilde{\rho}(Y') \cdot 1 = 0$. Now, for the given lifting $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$, we set $Y_i' = Y_i - \tilde{\rho}(Y_i) \cdot 1, 1 \leq i \leq m$. Then $\{Y_1', \ldots, Y_m'\}$ is a lifting of $\{y_1, \ldots, y_m\}$ in Σ_1. We assume from the beginning that $Y_i' = Y_i, 1 \leq i \leq m$. Then the equality (2.0) implies $\sigma_{ij} = 0$ $(1 \leq i, j \leq m)$ because $\tilde{\rho}(Y_i) \in \mathrm{Der}_K(R)$.

(2)$\Rightarrow$ (3). Suppose $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ is the given lifting of $\{y_1, \ldots, y_m\}$ and $\{Y_1', \ldots, Y_m'\}$ is a lifting for which $\sigma_{ij}' = 0$ when we write

$$(2.0)' \qquad Y_i'Y_j' - Y_j'Y_i' = \textstyle\sum_{k=1}^{m} \rho_{ij,k} Y_k' + \sigma_{ij}' \ , 1 \leq i, j \leq m.$$

Then $Y_i' = Y_i + a_i$ with $a_i \in R$. Replacing Y_i' in (2.0)' by this expression, we obtain the equality (2.4).

(3) $\Rightarrow$ (2). Conversely, if we are given $\{a_i\}_{1 \leq i \leq m}$ satisfying (2.4), set $Y_i' = Y_i + a_i$. Then $\{Y_i', \ldots, Y_m'\}$ is a lifting of $\{y_1, \ldots, y_m\}$ for which $\sigma_{ij}' = 0$.

(2)$\Rightarrow$(4). Let $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ be as in (2) above. Let $\tilde{L}$ be the R-submodule of Σ_1 generated by $Y_1, \ldots, Y_m$. Then $\tilde{L}$ is a free R-module. Since $\sigma_{ij} = 0$, we readily verify that $[Y, Z] \in \tilde{L}$ for any $Y, Z \in \tilde{L}$. Clearly, π induces an isomorphism between $\tilde{L}$ and L.

(4)$\Rightarrow$(1). Define $\widetilde{\rho} : \widetilde{L} \to \mathrm{Der}_K(R)$ by $\widetilde{\rho}(Y) = \rho(\pi(Y))$. Extend this to Σ_1 in a natural fashion by putting $\widetilde{\rho}|_{\Sigma_0} = \mathrm{id}_R$. Furthermore, we extend $\widetilde{\rho}$ to the free R-algebra F generated by $Y_1, \ldots, Y_m$ as follows. For an element $Y_{i_1} f_{i_1} \cdots Y_{i_r} f_{i_r}$ of F with $Y_{i_j} \in \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ and $f_{i_j} \in R$, define

$$Y_{i_1} f_{i_1} \cdots Y_{i_r} f_{i_r} \cdot (a) = y_{i_1}[f_{i_1}[y_{i_2}[\cdots [f_{i_r} a] \cdots]]] \,,$$

where $y_{i_j} = \pi(Y_{i_j})$ and $f[b] := fb \in R$. In view of (2) of Theorem 2.2, A is identified with the residue ring of F by the two-sided ideal I considered in Theorem 2.2. So, in order to have $\widetilde{\rho}$ as above, we have only to show that

$$y_i[y_j[a]] - y_j[y_i[a]] = \sum_{k=1}^{m} \rho_{ij,k} y_k[a] \quad \text{and} \quad y_i[fa] = f y_i[a] + y_i[f]a$$

for $a \in R$. These equations hold, in fact, because $\rho : L \to \mathrm{Der}_K(R)$ being a Lie-algebra homomorphism implies

$$y_i[y_j[a]] - y_j[y_i[a]] = [y_i, y_j][a] = \sum_{k=1}^{m} \rho_{ij,k} y_k[a]$$

and the second equality above. Q.E.D.

If a pre-W-algebra A over R satisfies one of the equivalent conditions in Theorem 2.3, we call A *a W-algebra over R*.

Remark 2.4. (1) Suppose that $\rho : L \to \mathrm{Der}_K(R)$ is an isomorphism. Then, as an R-free basis $\{y_1, \ldots, y_m\}$ of L, we can take $y_i = \rho^{-1}(\partial/\partial x_i)$. Then $\rho_{ij,k} = 0$ for all $1 \le i, j, k \le m$. So, the case with all $\rho_{ij,k} = 0$ can take place. We then say that L is *essentially abelian.*

(2) Suppose L is essentially abelian. Let $\{y_1, \ldots, y_m\}$ be an R-free basis of L such that $[y_i, y_j] = 0, 1 \le i, j \le m$ and let $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ be such that $y_i \equiv Y_i (\mathrm{mod}\ \Sigma_0)$ and $Y_i Y_j - Y_j Y_i = \sigma_{ij} \in R$. Suppose we can take $\sigma_{ij} = c_{ij} \in K^* = K - (0)$ for $1 \le i, j \le m$ and $i \ne j$ and that $\rho(y_i)(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$, where $\mathcal{M}$ is the maximal ideal of R. Then we cannot find $\{a_i\}_{1 \le i \le m}$ so that the equality (2.4) holds. There exists an R-algebra A satisfying these conditions. In fact, we take $m = n, \rho : L \to \mathrm{Der}_K(R)$ to be an ~~isomorphicm~~ injec such that $\rho(y_i) = \partial/\partial x_i, 1 \le i \le n$, and A to be the residue ring of an R-free algebra F generated by $Y_1, \ldots, Y_n$ modulo the two-sided ideal I as
x_i considered in Theorem 2.2,(2). Then ρ cannot be extended to an R-algebra homomorphism $\widetilde{\rho} : A \to \widehat{D}_n(K)$ as considered in Theorem 2.3.

3 Case L is essentially abelian

We begin with the following:

Lemma 3.1 *Let A be a W-algebra over R with an R-algebra homomorphism $\widetilde{\rho} : A \to \widehat{D}_n(K)$ which is an extension of the Lie-algebra homomorphism $\rho : L \to \mathrm{Der}_K(R)$. Then we have* w.gl.dim$(A) \geq n$.

Proof. Note that any element ξ of A can be expressed as $\xi = \sum_\alpha f_\alpha Y^\alpha$, where $f_\alpha \in R$ and $Y^\alpha = Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_m^{\alpha_m}$ (cf. the equality $Ya - aY = y[a]$ in Lemma 2.1). Furthermore, this expression is unique. Indeed, if we have a nontrivial expression $\sum_\alpha f_\alpha Y^\alpha = 0$ then this yields a homogeneous nontrivial relation

$$\sum_{|\alpha|=v} f_\alpha y^\alpha = 0\ ,\ y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdots y_m^{\alpha_m}$$

where $v = \max\{|\alpha|; f_\alpha \neq 0\}$. This contradicts the hypothesis that $\mathrm{gr}_\Sigma(A)$ is a polynomial ring in $y_1, \ldots, y_m$ over R. Hence A is a free R-module, whence A is R-flat as a left R-module. Similarly, ξ can be expressed uniquely as $\xi = \Sigma_\beta Y^\beta g_\beta$. So, A is R-flat as a right R-module. Hence A is R-flat as a ring. In view of Björk [1, Cor.2.9, p.42], we have

$$(*) \qquad \mathrm{w.dim}_R(A \otimes_R M) \leq \mathrm{w.dim}_A(A \otimes_R M)$$

for any left R-module M. Take an R-module $K = R/\mathcal{M}$ with $\mathcal{M} = (x_1, \ldots, x_n)R$. Then, by the theory of syzyzy, we know that $\mathrm{w.dim}_R(K) = n$; in fact, $\mathrm{Tor}_n^R(K, K) = K \neq (0)$. Then the above inequality (*) implies that $\mathrm{w.dim}_A(A \otimes_R K) \geq n$. Hence w.gl.dim$(A) \geq n$.

Q.E.D.

We shall be concerned with the condition w.gl.dim$(A) = n$ for a W-algebra over R.

Theorem 3.2 *Let A be a W-algebra over R with an R-algebra homomorphism $\widetilde{\rho} : A \to \widehat{D}_n(K)$. Suppose that L is essentially abelian and A has* w.gl.dim$(A) = n$. *Then $\widetilde{\rho}$ is an injection.*

Proof. Let $\widetilde{\rho}_1 := \widetilde{\rho}|_{\widetilde{L}}$, where $\widetilde{L}$ is an R-free submodule of Σ_1 isomorphic to L as a Lie algebra (cf. Theorem 2.3). Then there exists an R- free basis $\{Y_1,\ldots,Y_m\}$ of $\widetilde{L}$ such that $Y_iY_j = Y_jY_i$ for $1 \le i,j \le m$. Let $\widetilde{L}_0 = \oplus_{i=1}^m KY_i$ and let $Q = \mathrm{Ker}(\widetilde{\rho}_1|_{\widetilde{L}_0})$. Then $\widetilde{L}_0 \cong Q \oplus \widetilde{\rho}_1(\widetilde{L_0})$ is a direct sum as Lie algebras and Q is contained in the center of A. Let B be the R-subalgebra of $\widehat{D}_n(K)$ generated by $\widetilde{\rho}_1(\widetilde{L_0})$ and let J be the two-sided ideal of A generated by Q. Then $B \cong A/J$ and B is a W-algebra over R. Indeed, we may take $\{Y_1,\ldots,Y_m\}$ so that $\{Y_{r+1},\ldots,Y_m\}$ is a K- basis of Q. Let $\overline{Y}_i = \widetilde{\rho}_1(Y_i), 1 \le i \le r$. Then B is generated by $\overline{Y}_1,\ldots,\overline{Y}_r$ over R which act on R via the derivations $\delta_i = y_i[\ \ ], 1 \le i \le r$.Note that $\{\overline{Y}_1,\ldots,\overline{Y}_r\}$ are linearly independent over R. So, $r \le n$. We claim:

Lemma 3.3 *$\{\delta_1,\ldots,\delta_r\}$ are algebraically independent over R. Namely, if $\sum_\gamma f_\gamma\delta^\gamma = 0$ with $f_\gamma \in R$ and $\delta^\gamma = \delta_1^{\gamma_1}\cdots\delta_r^{\gamma_r}$ then $f_\gamma = 0$ for all γ.*

Proof. Denote by $Q(R)$ the quotient field of R. We can find $\Delta_1,\ldots,\Delta_r \in \oplus_{i=1}^r Q(R)\delta_i$ satisfying the following conditions:

(1) $\oplus_{i=1}^r Q(R)\delta_i = \oplus_{i=1}^r Q(R)\Delta_i$;

(2) We can express $\Delta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\partial_j$ with $a_{ij} \in R$ and $\partial_j = \partial/\partial x_j$, and if we define s_i as $\min\{j; a_{ij} \ne 0\}$ then $s_1 < s_2 < \cdots < s_r$.

Suppose we have a nontrivial relation $\sum_\gamma f_\gamma\delta^\gamma = 0$. Let $v = \max\{|\gamma|; f_\gamma \ne 0\}$. Expressing δ_i as a $Q(R)$-linear combination of Δ_j's and substituting it for δ_i in $\sum_\gamma f_\gamma\delta^\gamma = 0$, we obatain a nontrivial relation $\sum_\gamma g_\gamma\Delta^\gamma = 0$ with $\max\{|\gamma|; g_\gamma \ne 0\} = v$. Expressing then Δ^γ in terms of $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}$, we obtain

$$(*) \qquad \sum_{|\gamma|=v}(g_\gamma\prod_{i=1}^r(a_{is_i})^{\gamma_i})\partial^{\widetilde{\gamma}} + \cdots \ = 0 \ ,$$

where $\widetilde{\gamma}$, as an n-tuple, has γ_i at the s_i-th entry for $1 \le i \le r$ and 0 elsewhere if $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_r)$. Among g_γ's with $|\gamma| = v$ and $g_\gamma \ne 0$, let $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ be the smallest with respect to the lexicographic relation: $(\gamma_1,\ldots,\gamma_r) \le (\gamma_1',\ldots,\gamma_r')$ if and only if $\gamma_1 = \gamma_1',\ldots,\gamma_{t-1} = \gamma_{t-1}', \gamma_t \le \gamma_t'$. Then $(g_\alpha\prod_{i=1}^r(a_{is_i})^{\alpha_i})\partial^{\widetilde{\alpha}}$ has no other terms in (*) to cancel with. This is a contradiction. Q.E.D.

Proof of Theorem 3.2 resumed. The above lemma implies that B is isomorphic to a W-algebra over R generated by $Y_1,\ldots,Y_r$. Since any element ξ of A is expressed uniquely in the form

$$(**) \qquad \xi = \sum_{\gamma} f_\gamma Y^\gamma + \eta \; , \; f_\gamma \in R \quad \text{and} \quad \eta \in J \; ,$$

where $Y^\gamma = Y_1^{\gamma_1} \cdots Y_r^{\gamma_r}$, we know that A/J is isomorphic to B.

Now we can easily show that $A \cong B[Y_{r+1}, \ldots, Y_m]$, a polynomial ring in $Y_{r+1}, \ldots, Y_m$ over B (cf. the above expression (**) of ξ). By Björk [1, Th.3.4, p.43], we have $\text{w.gl.dim}(A) = \text{w.gl.dim}(B) + (m-r) \geq n+m-r$ (cf. Lemma 3.1). By the hypothesis $\text{w.gl.dim}(A) = n$, we have $m = r$. This implies $J = (0)$. hence $A \cong B$. Q.E.D.

A W-algebra A over R is called a *W-subalgebra of* $\widehat{D}_n(K)$ provided $\tilde{\rho}$ is injective.

Theorem 3.4 *There is a one-to-one correspondence between the set of W-subalgebras of $\widehat{D}_n(K)$ and the set of R-submodules $\tilde{L}$ of* $\text{Der}_K(R)$ *satisfying the conditions:*

(L-1) *$\tilde{L}$ is a free R-submodule of* $\text{Der}_K(R)$*;*

(L-2) *$\tilde{L}$ is closed under the bracket product of* $\text{Der}_K(R)$.

Proof. Let A be a W-subalgebra of $\widehat{D}_n(K)$. Then we can find an R-free submodule $\tilde{L}$ of Σ_1 which is isomorphic to $L := \Sigma_1/\Sigma_0$. Since $\tilde{\rho}$ is injective, so is $\rho : L \to \text{Der}_K(R)$. Hence $\tilde{L}$ is an R-free submodule of $\text{Der}_K(R)$. Since $\rho \cdot (\pi|_{\tilde{L}})$ is a Lie-algebra homomorphism, L is closed under the bracket product of $\text{Der}_K(R)$ (cf. Theorem 2.3). Conversely, let $\tilde{L}$ be an R-submodule of $\text{Der}_K(R)$ satisfying the conditions (L-1) and (L-2). Let $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ be an R-free basis of $\tilde{L}$. Then we have:

(1) $Y_iY_j - Y_jY_i = \sum_{k=1}^m \rho_{ij,k} Y_k, \; 1 \leq i,j \leq m,$

(2) $Y_i f - fY_i = Y_i[f]$ for $f \in R$ and $1 \leq i \leq m$.

Construct an R-algebra A as in Theorem 2.2,(2). Then the natural R-algebra homomorphism $A \to \widehat{D}_n(K)$ is injective (cf. the proof of Lemma 3.3). Q.E.D.

A W-subalgebra A of $\widehat{D}_n(K)$ is said to be *of maximal rank* if rank$\widetilde{L} = n$. We shall consider the case $n = 1$. Then L is essentially abelian. Hence there exists an R-algebra homomorphism $\widetilde{\rho} : A \to \widehat{D}_1(K)$ which must be injective by virtue of Theorem 3.2. We set $Y = Y_1$, a free generator of the R-module $\widetilde{L}$ (cf. Theorem 2.3). Then we have $Yx - xY = f$, where $f = x^r u$ with $u \in R^*$. Replacing Y by $u^{-1}Y$, we may assume that $f = x^r$. We shall show:

Lemma 3.5 $\mathrm{Tor}_2^A(K, K) = K$ *if* $r \geq 2$, *while it is zero if* $r = 1$. $\mathrm{Tor}_1^A(K, K) = K$ *if* $r = 1$.

Proof. Suppose $r > 0$. Then K is a two-sided A-module. As a right A-module, K has the following free A-module resolution:

$$0 \longrightarrow e_2 A \xrightarrow{\varphi_1} e_1 A \oplus e_1' A \xrightarrow{\varphi_0} e_0 A \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0 ,$$

where ε is the natural residue homomorphism and φ_i $(i = 0, 1)$ is given as:

$$\varphi_0(e_1) = e_0 Y, \varphi_0(e_1') = e_0 x \quad \text{and} \quad \varphi_1(e_2) = e_1 x - e_1'(Y + x^{r-1}).$$

Take the tensor product of this sequence with a left A-module $K = Av$ to obtain the complex:

$$0 \longrightarrow e_2 A \otimes_A Av \xrightarrow{\overline{\varphi}_1} (e_1 A \otimes_A Av) \oplus (e_1' A \otimes_A Av) \xrightarrow{\overline{\varphi}_0} e_0 A \otimes_A Av \longrightarrow 0,$$

where we can make the identification: $e_i A \otimes_A Av = e_i \otimes Kv$ for $e_i = e_0, e_1, e_1'$ and e_2. Then it is clear that $\overline{\varphi}_1 = \overline{\varphi}_0 = 0$ if $r \geq 2$. Hence $\mathrm{Tor}_2^A(K, K) = K$ if $r \geq 2$. If $r = 1$, then $\overline{\varphi}_1(e_2 \otimes v) = -e_1' \otimes v$, whence $\overline{\varphi}$ is injective. So, $\mathrm{Tor}_2^A(K, K) = 0$ if $r = 1$. If $r = 1$, $\mathrm{Tor}_1^A(K, K) = K$ because $\overline{\varphi}_0 = 0$.

Q.E.D.

If $n \geq 2$, we know little on W-subalgebras of $\widehat{D}_n(K)$ even if it is of maximal rank. We shall give two partial results.

Proposition 3.6 *Let A be a W-subalgebra of maximal rank of $\widehat{D}_n(K)$ corresponding to a Lie subalgebra $\widetilde{L} = \oplus_{i=1}^n RY_i$ with $Y_i = x_i^{r_i}\partial/\partial x_i$ and $r_i \geq 1$. then we have*

$$\mu := \max\{v; \mathrm{Tor}_v^A(K, K) \neq 0\} = 2\#\{i; r_i \geq 2\} + \#\{i; r_i = 1\}.$$

Hence $r_i = 1$ for all i provided w.gl.dim$(A) = n$.

Proof. Let S_i be the free algebra generated by Y_i over a one-dimensional polynomial ring $K[x_i]$ modulo the two-sided ideal generated $Y_ix_i - x_iY_i = x_i^{r_i}$. Since $Y_iY_j = Y_jY_i$ and $x_iY_j = Y_jx_i$ if $i \neq j$, A is isomorphic to

$$(S_1 \otimes_K S_2 \otimes_K \cdots \otimes_K S_n) \otimes_{K[x_1,\ldots,x_n]} R ,$$

where $S_1 \otimes_K \cdots \otimes_K S_n$ is regarded as an algebra over $K[x_1, \ldots, x_n]$. Consider a complex

$$(\widetilde{C}_i^\bullet) : 0 \longrightarrow e_2^{(i)}S_i \xrightarrow{\varphi_1} e_1^{(i)}S_i \oplus e_1^{\prime(i)}S_i \xrightarrow{\varphi_0} e_0^{(i)}S_i \xrightarrow{\epsilon} K \longrightarrow 0 \ ,$$

which is defined in the same fashion as in the proof of Lemma 3.5 with A replaced by S_i. It is a resolution of the two-sided S_i-module K by free right S_i-modules. The complex $\widetilde{C}^\bullet := (\widetilde{C}_1^\bullet \otimes_K \cdots \otimes_K \widetilde{C}_n^\bullet) \otimes_{K[x_1,\ldots,x_n]} R$ is a resolution of the two-sided A-module K by free right A-modules. Let $C_i^\bullet$ (resp. $C^\bullet$) be the complex obtained from $\widetilde{C}_i^\bullet$ (resp. $\widetilde{C}^\bullet$) by replacing K by 0. Then, taking the tensor products with the left A-module K, we obtain $\overline{C}^\bullet := C^\bullet \otimes_A K \cong \overline{C}_1^\bullet \otimes_K \cdots \otimes_K \overline{C}_n^\bullet$, where $\overline{C}_i^\bullet = C_i^\bullet \otimes_A K$. By the Künneth formula for homologies, we have

$$\mathrm{Tor}_v^A(K,K) \cong \oplus_{v_1+\cdots+v_n=v} \mathrm{Tor}_{v_1}^{S_1}(K,K) \otimes_K \cdots \otimes_K \mathrm{Tor}_{v_n}^{S_n}(K,K) \ .$$

Thence we obtain the stated formula in view of Lemma 3.5. Q.E.D.

Proposition 3.7 *Let A be a W-subalgebra of maximal rank of $\widehat{D}_2(K)$ corresponding to a Lie subalgebra $\widetilde{L} = RY_1 + RY_2$ with $Y_i = h\partial/\partial x_i$, where $h = x_1f + x_2g \in M := Rx_1 + Rx_2$. Suppose that h is a homogeneous polynomial in x_1 and x_2. Then $\mathrm{Tor}_3^A(K,K) \neq 0$ and $\mathrm{Tor}_4^A(K,K) = 0$.*

Proof. We have the following relations:

$$Y_1Y_2 - Y_2Y_1 = -h_{x_2}Y_1 + h_{x_1}Y_2$$

$$Y_1x_1 - x_1Y_1 = h = Y_2x_2 - x_2Y_2$$

$$Y_1x_2 - x_2Y_1 = 0 = Y_2x_1 - x_1Y_2 \ ,$$

where $h_{x_i} = \partial h/\partial x_i$. Construct a complex of right A-modules:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow e_3A \xrightarrow{\varphi_2}\ & e_2A \oplus e_2'A \oplus e_2''A \oplus e_2'''A \xrightarrow{\varphi_1} \\ & e_1A \oplus e_1'A \oplus e_1''A \oplus e_1'''A \xrightarrow{\varphi_0} e_0A \xrightarrow{\epsilon} K \longrightarrow 0 \ , \end{aligned}$$

where:

(0) K is the two-sided A-module with $x_i \cdot 1 = Y_i \cdot 1 = 0$ for $i = 1, 2$;

(i) $\varepsilon(e_0) = 1$;

(ii) $\varphi_0(e_1) = e_0 Y_1, \varphi_0(e_1') = e_0 x_1, \varphi_0(e_1'') = e_0 Y_2, \varphi_0(e_1''') = e_0 x_2$;

(iii) $\varphi_1(e_2) = e_1 x_1 - e_1'(Y_1 + f) - e_1'''g, \varphi_1(e_2') = -e_1' f + e_1'' x_2 - e_1'''(Y_2 + g), \varphi_1(e_2'') = e_1 x_2 - e_1''' Y_1, \varphi_1(e_2''') = -e_1' Y_2 + e_1'' x_1$;

(iv) $\varphi_2(e_3) = e_2 x_2(Y_2 + g + h_{x_2}) + e_2' x_1(Y_1 + f + h_{x_1}) - e_2'' x_1(Y_2 + g + h_{x_2}) - e_2''' x_2(Y_1 + f + h_{x_1})$.

It is straightforward to show that this complex is a resolution of K by right free A-modules. The stated result follows from this observation. Q.E.D.

References

[1] J.E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York, 1979.

[2] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover, New York, 1979.

線形化不可能な代数群の$\mathbb{A}^n$への作用について

富山大学教育学部　浅沼照雄

序　次の予想はよく知られている。

（線形化予想）簡約可能代数群Gのアファイン空間$\mathbb{A}^n$への作用は$\mathrm{Aut}\,\mathbb{A}^n$の中で表現と共役である。即ち$\mathbb{A}^n$の座標をうまくとると線形である。

最近この予想の反例がシュワルツによって与えられた。それは体が$\mathbb{R}$（実数体）又は$\mathbb{C}$（複素数体）のとき多項式環上のベクトル束への作用の形で与えられたものでGは非可換である。上の反例が今まで知られている本質的に唯一のものである。体が$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$以外のとき、Gが可換のときなど興味ある群については知られていなかった。本稿では標数が正の体のときトーラス群について線形化予想の反例を擬多項式環の理論を用いて構成する。有限巡回群についても紹介する。

なを上記のシュワルツの例を含めて線形化予想のについての解説及び文献が[5]にあります。

§1.　擬多項式環とエキゾチックなアファイン空間

1.1、シュワルツにしたがって線形化不可能な$\mathbb{A}^n$への代数群の作用をエキゾチックな作用とよぶ。エキゾチックな作用と

次の消去問題は密接な関係がある。

（消去問題）Vを体k上の代数多様体とする。もし$V\times\mathbb{A}^r\cong\mathbb{A}^n$ならば$V\cong\mathbb{A}^{n-r}$か？

Vの次元が1のとき，又2のときでk=完全体のときは肯定的である[3][4]。Vの次元$n-r$が3以上のときはまったく不明である。かりにVが消去問題た対する反例としよう。すると$V\times\mathbb{A}^r$の任意の点$v\times x$（$v\in V$, $x=(x_1,\dots,x_r)\in\mathbb{A}^r$）に対してトーラス群$k^*$の作用$\varphi$を

$$\varphi_a:\ v\times x\longrightarrow v\times ax=v\times(ax_1,\dots,ax_r)$$

（$\forall a\in k^*$）によって定めればφは同型$V\times\mathbb{A}^r\cong\mathbb{A}^n$を通して$\mathbb{A}^n$への作用と見なせる。そこでもし$\varphi$が線形であるとすると（よりくわしくいうと$\mathbb{A}^n$の座標をうまくとってその座標に関して$\varphi$が線形に作用している）$\varphi$による固定点の集合は線形代数の定理により$\mathbb{A}^{n-r}$と同型になる。これは$V\cong\mathbb{A}^{n-r}$であることを意味するから$V\not\cong\mathbb{A}^{n-r}$という仮定に反する。逆にトーラス群に対する線形化予想が正しければ消去問題は肯定的である。そこでトーラス群についての線形化予想はある意味で$\mathbb{A}^n$には異種の代数構造が入らないことを予想しているものと思える。このことは$\mathbb{A}^n$に普通でない（いわゆるエキゾチックな）代数構造を入れてその構造に対して普通に群を作用させると、こんどは$\mathbb{A}^n$の普通の代数構造で見た場合その作用

に関してエキゾチックになる可能性があるということである。問題はそのような異種の代数構造が$\mathbb{A}^n$に存在するかどうかである。kの標数$\mathrm{ch}\,k$が正のときは求める$\mathbb{A}^n$ $(n \geq 4)$のエキゾチックな代数構造が存在して、それに対して上のような方針でエキゾチックなトーラスの作用があることを示す。

1.2、 平坦なR-代数Aについて$A \otimes_R k(\mathfrak{p}) \cong k(\mathfrak{p})^{[n]}$が任意の$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R$についてなりたつとき$A$を$R$上$n$変数の擬多項式環という。ここで任意の環$R$に対して$R^{[n]}$は$R$上$n$変数の多項式環、$k(\mathfrak{p})$は剰余体$R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$を表わす。ここでは$R$が体$k$上の多項式環$R = k^{[r]}$, AがR上有限生成の場合を考える。すると[2]よりAは$R^{[n]}$と安定同型になる。すなわちある整数$m > 0$が存在して$A^{[m]} \cong_R R^{[n+m]}$となる。そこで仮定より$R^{[n+m]} \cong_k k^{[r+n+m]}$であるから$V = \mathrm{Spec}\,A$とおくと$V \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{r+n+m}$がなりたつ。さて上記の目的のエキゾチックな$\mathbb{A}^{r+n+m}$の構造を得るためには$A \not\cong_R R^{[n]}$が必要である。(注、$A \not\cong_k R^{[n]}$ i.e. 消去問題の反例となる例があればよいがここではそこまでは要求しない。) $\mathrm{ch}\,k = p > 0$, $R = k^{[1]}$, $n = 2$のときそのような例が知られている。

以下kを標数$p > 0$の体とする。

1.3、 定理 [2]. $A = k[x, y, z, w]/(x^\lambda y + z^{p^e} + w + w^{sp} = 0)$

とおく。ここで λ, s, e は正の整数で $\gcd(sp, p^e) \neq p^e, sp$ とする。$k[x] = k^{[1]} = R$ とおく。すると次の (i)〜(iii) がなりたつ。

(i) A は R 上 2 変数の擬多項式環である。

(ii) $A^{[r]} \cong_R R^{[2+r]}$ $(\forall r > 0)$

(iii) $A \not\cong_R R^{[2]}$

1.4. 上の定理1.3において $V = \mathrm{Spec}\, A$, $V \times \mathbb{A}^r = V_r$ とおく。ここで $r=0$ のとき $\mathbb{A}^r = (0)$, $V_r = V$ としておく。すると定理1.3より $V_r \cong \mathbb{A}^{3+r}$ $(\forall r > 0)$ がなりたつ。

以上の記号を固定しておく。

§2. トーラス群の作用

2.1. $G_m = k^* = 1$ 次元トーラス群とする。V_r への k^*-作用 φ を $\forall a \in k^*$ について

$$\varphi_a : (x, y, z, w, X_1, \ldots, X_r) \to (ax, a^{-\lambda}y, z, w, X_1, \ldots, X_r)$$

によって定義する。1.4 より $V_r \cong \mathbb{A}^{3+r}$ $(r > 0)$ であるから $r > 0$ のときはこの同型で V_r と $\mathbb{A}^{3+r}$ を同一視して φ は $\mathbb{A}^{3+r}$ への k^*-作用を与えている。この作用がエキゾチックなることを示すのがこの§の目的である。簡単のため $\lambda = 1$ のときのみを示す。ゆえこの§2では $\lambda = 1$ と仮定する。

2.2. $\mathfrak{m}=(x,y,z,w)\subset A$ を A の極大イデアル，$A^\wedge$ を $\mathfrak{m}$-adic completion とする。自然な injection によって $A\subset A^\wedge$ であるから

$$A=k[x,y,z,w]\subset k[[x,y,z,w]]=A^\wedge$$

は well defined である。とくに $k[[x,y,z]]$ は $A^\wedge$ の部分環となる。

2.3. 補題 $k[[x,y,z]]=A^\wedge$

証明、$xy+z^{p^e}+w+w^{\Delta p}=0$ より明らかに $w\in k[[x,y,z]]$. □

2.4. V_r の座標環は $A[X]:=A[X_1,\dots,X_r]$ である。$\mathfrak{n}=(\mathfrak{m},X)$ を $A[X]$ の極大イデアルとする。$A[X]^\wedge$ で $A[X]$ の $\mathfrak{n}$-adic completion を表わすことにすれば明らかに $A^\wedge\subset A[X]^\wedge$ で $A[X]^\wedge=k[[x,y,z,X]]$，すなわち $A[X]^\wedge$ は変数 x,y,z, $X_1,\dots,X_r$ についての k 上 $r+3$ 変数の形式的巾級数環と見なしてよい。さて φ は中への準同型 $\varphi^*: k^*\to \mathrm{Aut}_k A[X]$ をひきおこす。つまり φ は effective である。φ^* は具体的に

$$\varphi^*(a):(x,y,z,w,X)\to(ax,a^{-1}y,z,w,X)\quad(\forall a\in k^*)$$

によって与えられる。明らかに φ^* は $\mathrm{Aut}_k A[X]^\wedge$ に拡張できる。すなわち $\varphi^*(a)$ はべキ級数環 $A[X]^\wedge=k[[x,y,z,X]]$ の自己同型写像と見なしてよい。

2.5、 $A[X]=k[x,y,z,w,X]$ に $(x,y,z,w,X_1,\cdots,X_r)=(1,-1,0,\cdots,0)$ で次数を入れると $A[X]$ は次数付環となる。この次数に関して i 次の部分を $A[X]_i$ で表わす。

2.6、補題、 $A[X]_i=k[z,w;X]x^i \quad (i\geq 0)$

$A[X]_i=k[z,w,X]y^i \quad (i\leq 0)$

証明、 $A[X]_i$ は $\{x^\alpha y^\beta z^\gamma w^\delta \mid \alpha-\beta=i\}$ で生成される $k[X]$-加群である。$i\geq 0$ のときは $x^\alpha y^\beta z^\gamma w^\delta=x^i(x^\beta y^\beta z^\gamma w^\delta)$ であるから $xy=-(z^{p^e}+w+w^{sp})$ を代入して $x^\alpha y^\beta z^\gamma w^\delta=-x^i(z^{p^e}+w+w^{sp})^\beta\in k[z,w]x^i$ を得る。$i\leq 0$ のときも同様に示せる。 □

2.7、定理、 k が正標数の無限体，$r\geq 1$ のとき φ はエキゾチックな作用である。

証明、 φ が線形化できるとする。すなわち $F,G,H,Y_1,\cdots,Y_r\in A[X]$ が存在して $\forall a\in k^*$ について $\varphi^*(a)\in \mathrm{Aut}\,A[X]$ が

$$\varphi^*(a):(F,G,H,Y)\to(F,G,H,Y)M_a\cdots(*)$$

で定義されているとする。ここで $Y=(Y_1,\cdots,Y_r)$，M_a は a に depend した $GL_{3+r}(k)$ の元で $(*)$ の右辺は行列としての積を意味する。さて $\mathfrak{m}$ を 2.4 の極大イデアルとすると明らか

に $F, G, H, Y \in \mathfrak{M}$ がなりたつ。ゆえ 2.4 より

$$A[X]^\wedge = k[[x, y, z, X]] = k[[F, G, H, Y]]$$

がなりたつ。$F^{(1)}, G^{(1)}, \cdots$ で $F, G, \cdots$ の x, y, z, X - 変数についての1次の homogeneous form を表わすことにすれば

$(F^{(1)}, G^{(1)}, H^{(1)}, Y^{(1)}) = (x, y, z, X)N$ なる $N \in GL_{3+r}(k)$ が存在する。(F, G, H, Y) のかわりに座標として $(F, G, H, Y)N^{-1}$ をとっても φ は $A[X]$ に線形に作用するから初めから $N =$ 単位行列と仮定してよい。仮定より $\varphi^*(a) : (F, G, H, Y) \to (F, G, H, Y)M_a$ であるから1次の部分だけ考えれば

$$\varphi^*(a) : (F^{(1)}, G^{(1)}, H^{(1)}, Y^{(1)}) \to (F^{(1)}, G^{(1)}, H^{(1)}, Y^{(1)})M_a$$

がなりたつ。ところで上より $(F^{(1)}, G^{(1)}, H^{(1)}, Y^{(1)}) = (x, y, z, X)$ であったから

$$\varphi^*(a)(x, y, z, X) = (ax, a^{-1}y, z, X) = (x, y, z, X)M_a$$

がなりたつ。すなわち φ は座標 F, G, H, Y に関してトーラス $\left\{\begin{bmatrix} a & & & \\ & a^{-1} & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \middle| a \in k^* \right\}$ で表現されている。他方 F, G, H, Y は $k[x, y, z, w, X]$ の元であるから補題 2.6 よりとくに

$F = \sum_{i \geq 0} F_i x^i \oplus \sum_{i<0} F_i y^{-i}$ ($F_i \in k[z, w, X]$, $\sum$ は有限和)

と表わせる。ゆえ

$$\varphi^*(a)(F) = \sum_{i \geq 0} F_i a^i x^i \oplus \sum_{i<0} F_i a^i y^{-i} = aF。$$

ゆえ各次数 i について $a^i = a$ がなりたつ。仮定より k^* は無限位の元を含むから結局 $F_i = 0$ ($i \neq 1$) を得る。まとめ

ると $F = F_1 x$ がなりたつ。ところで F, x は $A[X]$ で既約であるから $F_1 \in k^*$ である。同様にして

$$G = \sum_{i \geq 0} G_i x^i \oplus \sum_{i<0} G_i y^i \quad (G_i \in k[z, w, X],\ \Sigma \text{は有限和})$$

と表わしたとき $G_i = 0\ (i \neq -1)$ を得る。ゆえ $G = G_1 y$ で $G_1 \in k^*$ と表わせる。以上のことから $A[X] = k[F, G, H, Y] = k[x, y, H, Y]$ となる。$A \supset k[x, y]$ であることに注意すれば [1] より $A \cong_{k[x,y]} k[x, y]^{[1]}$ がなりたつ。これは $A \ncong_{k[x]} k[x]^{[2]}$ という事実に矛盾する。すなわち φ はエキゾチックである。 $\square$

§3、有限アーベル群

3.1、この§では簡単のため k は代数的閉体と仮定しておく。λ, ν を2つの1より大なる整数とし $G(\lambda, \nu) = \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$ を考える。$\zeta_\lambda \in k$ を方程式 $x^\lambda = 1$ の原始根とすると $G(\lambda, \nu)$ は行列の群 $\left\{ \begin{bmatrix} \zeta_\lambda^\alpha & 0 \\ 0 & \zeta_\nu^\beta \end{bmatrix} \middle| \ 0 \leq \alpha < \lambda,\ 0 \leq \beta < \nu \right\}$ に同型である。すなわち $G(\lambda, \nu)$ は

$$\pi = \begin{bmatrix} \zeta_\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \zeta_\nu \end{bmatrix}$$

で生成される $GL_2(k)$ の部分群としてよい。さて §1 で定義した V_r をここではとくに $r=1$ のときについて考える。V_1 に $G(\lambda, \nu)$ ー作用 ψ を

$$\psi_a : (x, y, z, w, X) \longrightarrow (\xi_\lambda^\alpha x, y, z, w, \xi_\nu^\beta X)$$

で定める。ここで $X = X_1$, $a = \pi^\alpha \tau^\beta \in G_{(\lambda,\nu)}$ である。この§では ψ が $V_1 \cong \mathbb{A}^4$ へのエキゾチックな作用であることを示す。証明はトーラスの場合とほぼ同様に進める。そこで注意すべき所だけを述べる。

3.2、 V_1 への座標環 $A[X]$ への次数はこの場合 $(x, y, z, w) = (-1, \lambda, 0, \cdots, 0)$ で入れる。$A[X]_i$ でこの次数による i 次の部分とすると

$$A[X]_i = k[z, w, X]\, x^{-i} \quad (i \leq 0)$$

$$A[X]_i = k[z, w, X]\, x^j y^g \quad (i > 0,\ i = \lambda g - j,\ 0 \leq j < \lambda)$$

がなりたつ。なぜならば $x^\lambda y + z^{p^e} + w + w^{sp} = 0$ より $A[X]$ は $k[z, w, X]$ 上 $x^i\ (i \geq 0)$ 及び $x^j y^g\ (0 \leq j < \lambda,\ g > 0)$ で生成されている加群であることに注意すればよい。

3.3. §2と同様に ψ によりひきおこされた準同型 $G_{(\lambda,\nu)} \to \mathrm{Aut}\, A[X]$ を ψ^* と表わすと ψ^* は injective で自然に $\psi^* : G_{(\lambda,\nu)} \to \mathrm{Aut}\, A[X]^\wedge$ に拡張できる。ここで $A[X]^\wedge$ は 2.4 で定義されたものである。(注：2.4 は $\lambda = 1$ を仮定しているがこの仮定は completion に関して本質的でない)

3.4 定理、 kが代数的閉体 $\lambda \not\equiv 0, \nu \not\equiv 0 \pmod p$ とすると ψ は $\mathbb{A}^4$ へのエキゾチックな作用である。

証明、ψ が線形化可能ならば $F, G, H, Y \in A[X]$ が存在して、$^\forall a = \pi^\alpha \tau^\beta \in G(\lambda, \nu)$ に対して

$$\psi^*(a) : (F, G, H, Y) \to (F, G, H, Y) M_a \quad (M_a \in GL_4(k))$$

と表わせる。定理 2.7 の証明と同様にして F, G, H, Y を $A[X]^\wedge = k[[x, y, z, X]]$ の元とみて一次の homogeneous form は $(F^{(1)}, G^{(1)}, H^{(1)}, Y^{(1)}) = (x, y, z, X)$ としてよい。ゆえに

$$\psi^*(a) : (x, y, z, X) \to (\zeta_\lambda^\alpha x, y, z, \zeta_\nu^\beta X) = (x, y, z, X) M_a$$

がなりたつ。さて 3.2 より

$$F = \sum_{i \le 0} F_i x^{-i} \oplus \sum_{i>0} F_i x^j y^\ell \quad (F_i \in k[z, w, X],$$

$i = \lambda \ell - j, \ 0 \le j < \lambda$) と表わせる。ゆえにとくに $\beta = 0$ のときを考えれば

$$\psi^*(a) = \psi^*(\pi^\alpha) = \sum_{i \le 0} F_i \zeta_\lambda^{-\alpha i} x^{-i} \oplus \sum_{i>0} F_i \zeta_\lambda^{\alpha j} x^j y^\ell$$

$$\doteq \Big(\sum_{i \le 0} F_i x^{-i} \oplus \sum_{i>0} F_i x^j y^\ell\Big) \zeta_\lambda^\alpha$$

が任意の $0 \le \alpha < \lambda$ についてなりたつ。これより $F_0 = 0$ 及び $F_i = 0 \ (i>0, j=0)$ を得る。すなわち F は $A[X]$ の中で x でわりきれる。ゆえ $F = ux \ (u \in k^*)$ と表わせる。一方 Y は X の多項式として $Y = \sum f_i X^i \ (f_i \in A)$ と表わせる。$\alpha = 0$ とすると

$$\varphi^*(a) = \varphi^*(\tau^\beta) = \sum f_i \xi_\nu^{\beta i} X^i = \left(\sum f_i X^i\right)\xi_\nu^\beta$$

がなりたつ。ゆえに $f_0=0$，すなわち Y は $A[X]$ 内で X でわりきれる。ゆえ $Y = vX$ ($v \in k^*$) と表わせて

$$A[X] = k[F, G, H, Y] = k[x, G, H, X]$$

がなりたつ。このことは $A \cong_{k[x]} k[x]^{[2]}$ であることを示しているがこれは矛盾である。ゆえ φ はエキゾチックである。□

3.5. Remark. $G_{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)} = \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/\lambda_n\mathbb{Z}$ ($\lambda_i > 1$, $\lambda_i \not\equiv 0 \pmod{P}$) に対して同様な方法で $\mathbb{A}^{2+n}$ へのエキゾチックな $G_{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)}$-作用を構成できる。

3.6. Remark. $V = V_0$ は $\mathbb{A}^3$ に同型かどうかわからないが、次のようにして位数が P と素なる巡回群 $G_{(\lambda)} = \{\xi_\lambda^\alpha \mid 0 \leq \alpha < \lambda\}$ の $\mathbb{A}^3$ 又は $\mathbb{A}^4$ へのエキゾチックな作用 φ が存在することが示せる。

(i) $V \cong \mathbb{A}^3$ の場合.

φ を $\varphi_{\xi_\lambda} : (x, y, z, w) \to (\xi_\lambda x, y, z, w)$ で定義する。そこで φ が線形であるとすると定理3.4の証明より $A = k[x, F, G] \cong_{k(x)} k[x]^{[2]}$ となる。これは矛盾である。

(ii) $V \not\cong \mathbb{A}^3$ の場合

$V \times \mathbb{A}^1 \ni v \times X$ に対して $\varphi_{\xi_\lambda} : v \times X \to v \times \xi_\lambda X$ で φ を定め

る。φが線形とすると序で述べたトーラスの場合と同様にして $V \cong \mathbb{A}^3$ となる。これは矛盾である。

3.7. Remark. 体の標数が正のときエキゾチックなトーラスの作用の存在が不明なのは $\mathbb{A}^3$ の場合のみである。この場合次のいずれかがなりたつ。

(i) $\mathbb{A}^3$ に対する消去問題は否定的で V はその反例となっている。

(ii) $\mathbb{A}^3$ に対する線形化予想はトーラスの場合否定的で 2.1 で与えた $V \cong \mathbb{A}^3$ への作用 φ はその反例となっている。

文献

[1] T. Asanuma, On strongly invariant coefficient rings, Osaka J. Math., 11 (1974) 587-593

[2] ——, Polynomial fibre rings of algebras over noetherian rings, Invent. math. 87 (1987) 101-127

[3] T. Fujita, On Zariski problem, Proc. of Japan Acad. Ser. A, 55 (1979) 106-110

[4] M. Miyanishi and T. Sugie, Affine surfaces containing cylinder like open sets, J. Math. Kyoto Univ. 20 (1980) 11-42

[5] 枡田幹也, トポロジストからみた代数的群作用の一面, 数学, 42巻2号 (1990) 131-145

Maximal quasi Buchsbaum graded modules over polynomial rings with $\#\{i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0,\ i < \dim R\} \leq 2$

尼崎睦実（京大数研）

Regular local rings 上の maximal Buchsbaum module に関する Goto の定理 [Go2; Th(3.1)], [EG; Th 3.2] を用いて, $\mathbb{P}^n$ の codimension 2 の arithmetically Buchsbaum scheme を定める ideal の構造を詳しく調べることができた [A §§5-7]. 同様の方法を他の scheme にも用いようとするとき, Goto の定理に相当するものが必要となる. 本稿ではそういった方面のほんの入口の部分を扱う. アイデアはごく簡単で, complex のとりあつかいに慣れた人にとっては何でもないことであろう.

§1. Complex についての注意.

Ring, module はすべて noetherian とする. $(R, \mathfrak{m})$ で local ring, または graded ring で $R = \bigoplus_{t \geq 0} R_t$, $\mathfrak{m} = \bigoplus_{t \geq 1} R_t$, $R_0 = k$ (field) となるものを表す. 後者の場合, R-module はすべて graded で homomorphism は特にことわりがないかぎり次数が 0 のもののみを考える. $r = \dim R$. R-modules の complex $F.$:

$\cdots \to F_i \xrightarrow{\varphi_i^F} F_{i-1} \to \cdots$ に対し

$\alpha(F.) = \max\{i \mid H_i(F.) \neq 0\}$ ($F.$ が exact $\Leftrightarrow \alpha(F.) = -\infty$)

$\beta(F.) = \min\{i \mid H^i(F.^\vee) \neq 0\}$ ($F.^\vee$ が exact $\Leftrightarrow \beta(F.) = \infty$)

とおく．ただし $F.^\vee$ は complex $\cdots \to F_{i-1}^\vee \xrightarrow{(\varphi_i^F)^\vee} F_i^\vee \to \cdots$ を表す．さらに $L_i = F_{i-a}$, $\varphi_i^L = \varphi_{i-a}^F$ によって定まる complex $L.$ を $F._{-a}$ と書く．$\mathrm{Im}(\varphi_i^F) \subset \mathfrak{m}F_{i-1}$ ($\forall i$) をみたすとき $F.$ を minimal と呼び，$H_i(F.) = 0$, $F_i = \mathrm{Im}(\varphi_i^F) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi_i^F)$ ($\forall i$) となるときは split exact と呼ぶ．また chain map $\mu. : F. \to F.'$ に対しその mapping cone を $C.(\mu.)$ と書く．$C.(\mu.)$ の differential は $\varphi_i^{C(\mu.)} = \begin{pmatrix} -\varphi_{i+1}^{F'} & \mu_i \\ 0 & \varphi_i^F \end{pmatrix}$ である．次の条件 (1), (2), (3) をみたす complex $F.$ 全体を $\mathcal{C}x(R)$ で表す．

(1) 各 F_i は finitely generated free R-module,

(2) $\mathrm{Im}(\varphi_i^F) \subset \mathfrak{m}F_{i-1}$ ($\forall i \leq 0$),

(3) $\alpha(F.) < \beta(F.)$.

さらに

$$\mathcal{C}x^0(R) = \{G. \mid G. \text{は(1)をみたしかつ } G_i = 0\ (\forall i < 0),\ H_i(G.) = 0\ (\forall i > 0)\}$$

とおく．$G. \in \mathcal{C}x^0(R)$ のとき，$G.$ は $E := H_0(G.)$ の free resolution を与える．$G.$ が minimal のときこれを $\mathrm{res.}(E)$ で表すことがある．以下 complex といえばすべて(1)をみたすものとする．

(1.1) Lem. $F_\cdot \in C_x(R)$ に対し, minimal な $P_\cdot$ split exact な $Q_\cdot$ で $F_\cdot \cong P_\cdot \oplus Q_\cdot$, $P_\cdot, Q_\cdot \in C_x(R)$ となるものが存在する. しかも $P_\cdot$, $Q_\cdot$ は同形を除いて一意的に定まる.

(1.2) Def. (1.1) のようになるとき, $\mathrm{min.}(F_\cdot) = P_\cdot$, $\mathrm{se.}(F_\cdot) = Q_\cdot$ とおく.

(1.3) Rem. $F_\cdot, F'_\cdot \in C_x(R)$ が $\mathrm{rank}_R(F_i) = \mathrm{rank}_R(F'_i)$ $(\forall i)$ をみたすとき, $F_\cdot \cong F'_\cdot \Leftrightarrow \mathrm{min.}(F_\cdot) \cong \mathrm{min.}(F'_\cdot)$.

以下 $a \geqq 0$ とする.

(1.4) Lem. $F_\cdot \in C_x(R)$, $G_\cdot \in C_x^0(R)$ および chain map $\mu_\cdot : F_\cdot \to G_{\cdot - a - 1}$ があって $\alpha(F_\cdot) < a < \beta(F_\cdot)$ とする. このとき $H_i(C_\cdot(\mu_\cdot)) \cong H_i(F_\cdot)$ $(\forall i < a)$, $H_a(C_\cdot(\mu_\cdot)) \cong H_0(G_\cdot)$, $H_i(C_\cdot(\mu_\cdot)) = 0$ $(\forall i > a)$ となる. 特に $\alpha(C_\cdot(\mu_\cdot)) \leqq a$ (等号は $H_0(G_\cdot) \neq 0$ のとき). さらに $\beta(F_\cdot) - a \leqq \beta(G_\cdot)$ ならば $H^i(C_\cdot(\mu_\cdot)^\vee) = 0$ $(\forall i < \beta(F_\cdot))$, i.e. $C_\cdot(\mu_\cdot) \in C_x(R)$.

(1.5) Prop. $P_\cdot \in C_x(R)$, $G_\cdot \in C_x^0(R)$ を minimal complex で $\alpha(P_\cdot) = a$, $G_\cdot = \mathrm{res.}(H_a(P_\cdot))$, $\mathrm{Ext}_R^i(H_a(P_\cdot), R) = 0$

$(0 \leqq {}^\forall i < \beta(P.) - a)$ であるとする. このとき minimal な $F. \in \mathcal{C}_x(R)$ で $\alpha(F.) < a < \beta(P.) \leqq \beta(F.)$ をみたすものおよび chain map $\mu. : F. \to G._{-a-1}$ があって $P. = \min.(C.(\mu.))$ となる.

(1.6) Cor. $P. \in \mathcal{C}_x(R)$ は minimal で $\mathrm{Ext}^i_R(H_j(P.), R) = 0$ $(0 \leqq {}^\forall i < \beta(P.) - j,\ 0 \leqq {}^\forall j \leqq a)$, $\alpha(P.) = a$ とする. 各 j $(0 \leqq j \leqq a)$ に対し $G.^{(j)} = \mathrm{res.}(H_j(P.)) \in \mathcal{C}_x^0(R)$ とおく. このとき minimal な $F. \in \mathcal{C}_x(R)$ で $\alpha(F.) < 0 < \beta(P.) \leqq \beta(F.)$ をみたすもの および 帰納的に定まる chain map $\mu.^{(0)} : F. \to G.^{(0)}_{\cdot -1}$, $\mu.^{(j)} : C.(\mu.^{(j-1)}) \longrightarrow G.^{(j)}_{\cdot -j-1}$ $(1 \leqq j \leqq a)$ が存在して, $P. = \min.(C.(\mu.^{(a)}))$ となる. $P_i = 0$ $({}^\forall i < 0)$ のときは $F. = 0.$, R が Gorenstein で $H_i(P.) = 0$ $({}^\forall i < 0)$ のときは $\alpha(F.) = -\infty$, $\beta(F.) = \infty$, i.e. $H_i(F.) = 0$, $H^i(F.^\vee) = 0$ $({}^\forall i)$.

(1.7) Lem. $F., F.' \in \mathcal{C}_x(R)$, $G., G.' \in \mathcal{C}_x^0(R)$ はいずれも minimal で $a > \max(\alpha(F.), \alpha(F.'))$ とする. Chain map $\mu. : F. \to G._{\cdot -a-1}$, $\mu.' : F.' \to G.'_{\cdot -a-1}$ があるとき次のことが成立する.

(1) $\min.(C.(\mu.)) \cong \min.(C.(\mu.'))$ ならば $F. \cong F.'$, $G. \cong G.'$,

(2) $\mu. \oplus \mu.' : F. \oplus F.' \to G._{\cdot -a-1} \oplus G.'_{\cdot -a-1}$ に対し $C.(\mu. \oplus \mu.') \cong C.(\mu.) \oplus C.(\mu.')$.

(1.8) Prop. $F_{\cdot} \in C_x(R)$, $G_{\cdot} \in C_x^0(R)$はいずれもminimalで$a > d(F_{\cdot})$としさらに$\mu_{\cdot}, \mu'_{\cdot} : F_{\cdot} \to G_{\cdot - a - 1}$をchain mapとする。このときmin. $(C_{\cdot}(\mu_{\cdot})) \cong$ min. $(C_{\cdot}(\mu'_{\cdot}))$となるための必要十分条件はchain isomorphism $\lambda^F_{\cdot} : F_{\cdot} \to F_{\cdot}$, $\lambda^G_{\cdot} : G_{\cdot} \to G_{\cdot}$が存在して$\mu'_{\cdot}\lambda^F_{\cdot} \simeq \lambda^G_{\cdot - a - 1}\mu_{\cdot}$ (chain homotopic)となることである。

§2. 簡単な応用

$k = R/m$, $K_{\cdot} = \mathrm{res.}(k)$, $G_{\cdot} = K_{\cdot}^p = K_{\cdot} \otimes R^p \in C_x^0(R)$ (graded caseでは$G_{\cdot} = \bigoplus_n K_{\cdot}(n)^{p_n} = K_{\cdot} \otimes (\bigoplus_n R(n)^{p_n})$)とおく。$\mathrm{Im}(\varphi_1^G) = mG_0$であることから容易に次のことがわかる。(本節でもcomplexはすべて前節冒頭(1)をみたす。).

(2.1) Lem. $F_{\cdot}$を勝手なminimal complex, cを任意の整数とする。

(1) Chain map $\mu_{\cdot}, \mu'_{\cdot} : F_{\cdot} \to G_{\cdot - c}$に対し次は同値.

(イ) $\mu_{\cdot} \simeq \mu'_{\cdot}$,

(ロ) $\mu_c \equiv \mu'_c \pmod{m}$,

(ハ) $\mu_i \equiv \mu'_i \pmod{m}$ $(\forall i)$.

(2) 任意の $\eta \in \mathrm{Hom}_R(F_c, G_0)$ に対し chain map $\mu_\cdot : F_\cdot \to G_{\cdot - c}$ で $\mu_c = \eta$ となるものが存在する.

(3) $u \cdot id_{K_\cdot} : K_\cdot \to K_\cdot$ $(u \in R)$ は chain map. また任意の chain map $\lambda_\cdot : K_\cdot \to K_\cdot$ に対し $u \in R$ が存在して $\lambda_\cdot \simeq u \cdot id_{K_\cdot}$ となる.

(4) $\gamma \in \mathrm{Aut}_R(G_0)$ に対し $id_{K_\cdot} \otimes \gamma : G_\cdot \to G_\cdot$ は chain isomorphism. また任意の chain isomorphism $\lambda_\cdot : G_\cdot \to G_\cdot$ に対し $\gamma \in \mathrm{Aut}_R(G_0)$ が存在して $\lambda_\cdot \simeq id_{K_\cdot} \otimes \gamma$.

(2.2) Rem. 上の(2)で定まる chain map $\mu_\cdot$ に対し $C_\cdot(\mu_\cdot)$, $\min_\cdot(C_\cdot(\mu_\cdot))$ ができるが, これは(1)により $\mu_\cdot$ のとり方によらず η で unique に定まる.

(2.3) Prop. $F_\cdot = K_\cdot^q = K_\cdot \otimes R^q$ (graded case では $F_\cdot = \bigoplus_m K_\cdot(m)^{q_m} = K_\cdot \otimes (\bigoplus_m R(m)^{q_m})$) とおき, $a > 0$ とする. $\eta, \eta' \in \mathrm{Hom}_R(F_{a+1}, G_0)$ に対し chain map $\mu_\cdot, \mu'_\cdot : F_\cdot \to G_{\cdot - a - 1}$ で $\mu_{a+1} = \eta$, $\mu'_{a+1} = \eta'$ となるものをとる. K_{a+1} の free basis を $v_1, \dots, v_s$ とおいて $\eta = \sum_{l=1}^{s} v_l^* \otimes \eta_l$, $\eta' = \sum_{l=1}^{s} v_l^* \otimes \eta'_l$, $\eta_l, \eta'_l \in \mathrm{Hom}_R(R^q, R^p)$ (graded case では $\eta_l, \eta'_l \in \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_m R(m)^{q_m}, \bigoplus_n R(n)^{p_n})_{\deg v_l}$) と書くことにする.

(1) $\min.(C.(\mu.)) \cong \min.(C.(\mu'.))$ となるための必要十分条件は $\gamma \in \mathrm{Aut}_R(G_0)$, $\delta \in \mathrm{Aut}_R(F_0)$ が存在して

$$(2.3.1) \quad \gamma \eta_\ell \delta \equiv \eta'_\ell \pmod{\mathfrak{m}} \quad (1 \leqq {}^\forall \ell \leqq s)$$

となることである.

(2) R が graded で $\deg v_\ell = d$ $(1 \leqq {}^\forall \ell \leqq s)$ とする. このとき合成写像 $K.(m)^{q_m} \hookrightarrow F. \xrightarrow{\mu.} G._{-a-1} \longrightarrow K._{-a-1}(n)^{p_n}$ を $\mu.(m, n)$ とおくと,

$$\min.(C.(\mu.)) \cong \bigoplus_n \min.(C.(\mu.(n+d, n))).$$

(3) R は local とする. このとき 0. とは異なる minimal complex $L'.$, $L''.$ があって $\min.(C.(\mu.)) \cong L'. \oplus L''.$ となるための必要十分条件は, $\gamma \in \mathrm{Aut}_R(G_0)$, $\delta \in \mathrm{Aut}_R(F_0)$, p', q' $(0 \leqq p' \leqq p,\ 0 \leqq q' \leqq q,\ (p', q') \neq (0,0), (p, q))$ が存在して

$$(2.3.2) \quad \gamma \eta_\ell \delta \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon'_\ell & 0 \\ 0 & \varepsilon''_\ell \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{m}}$$

$$\varepsilon'_\ell \in \mathrm{Hom}_R(R^{p'}, R^{q'}),\ \varepsilon''_\ell \in \mathrm{Hom}_R(R^{p-p'}, R^{q-q'}) \ (1 \leqq {}^\forall \ell \leqq s)$$

となることである.

(4) R が graded で $\deg v_\ell = d$ $(1 \leq {}^\forall \ell \leq s)$, $F_\cdot = K_\cdot(d)^q$, $G_\cdot = K_\cdot^p$ のときも(3)と同じことが成立する("$\equiv$ (mod m)" は "$=$" にしてよい).

上の条件(2.3.2)については古くから考えられているそうで $s=2$ のときには完全な解答がある [D] ($s=1$ のときは trivial). すでに知られていることも含めて筆者が把握していることをまとめておく. 体 k の元を成分とする $i \times j$ 行列全体を $\mathrm{mat}(i,j)$ で表す. $\mathrm{mat}(p,q)^s$ に $\bar\eta = (\bar\eta_\ell)_{1\leq \ell \leq s} \sim \bar\eta' = (\bar\eta'_\ell)_{1 \leq \ell \leq s} \Leftrightarrow {}^\exists\gamma \in GL(p,k), {}^\exists\delta \in GL(q,k)$ s.t. $\bar\gamma\bar\eta_\ell\bar\delta = \bar\eta'_\ell$ $({}^\forall \ell)$ によって同値関係 "$\sim$" を入れ, $\mathrm{mat}(p,q)^s/\sim$ を $\mathrm{Mat}(p,q,s)$, $\bar\eta$ の表す同値類を $\langle\bar\eta\rangle$ と書く. $\bar\varepsilon'_\ell \in \mathrm{mat}(p',q')$, $\bar\varepsilon''_\ell \in \mathrm{mat}(p-p',q-q')$ $(1 \leq \ell \leq s)$, $0 \leq p' \leq p$, $0 \leq q' \leq q$, $(p',q') \neq (0,0),(p,q)$ があって $\bar\eta \sim \left(\begin{pmatrix} \bar\varepsilon'_\ell & 0 \\ 0 & \bar\varepsilon''_\ell \end{pmatrix}\right)_{1\leq \ell \leq s}$ となるとき $\langle\bar\eta\rangle = \langle\bar\varepsilon'\rangle \oplus \langle\bar\varepsilon''\rangle$ $(\bar\varepsilon' = (\bar\varepsilon'_\ell), \bar\varepsilon'' = (\bar\varepsilon''_\ell))$ と表し, $\langle\bar\eta\rangle$ は decomposable であるという. $s \geq 2$ のとき $\{z_t\}_{t\geq 0}$ を $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_t = sz_{t-1} - z_{t-2}$ $(t \geq 2)$ によって定まる数列,

$$\Lambda_t = \left\{(uz_{t+2} + vz_{t+1}, uz_{t+1} + vz_t) \,\middle|\, \begin{array}{l} u, v \in \mathbb{Z}, \\ u \geq 0, v > 0, u+v \geq 2 \end{array}\right\} \quad (t \geq 0)$$

を $\mathbb{Z}_0^2$ の部分集合，$\Lambda=\bigcup_{t\geq 0}\Lambda_t$ とする．"$\#k=\infty$ で，ある Zariski open set 上のすべての… " という意味あいで "generic" ということばを使うことにする．転置行列で考えても同じだから $p\geq q$ のときを考えよう．

(2.4) Prop. $p\geq q$, $\langle\eta\rangle\in Mat(p,q,s)$, $s\geq 2$ とする．

(1) 各 $t\geq 0$ に対し $Mat(z_{t+1},z_t,s)$ はただひとつ indecomposable な元を含む．それを $\langle\sigma(t)\rangle$ とおく．

(2) $(p,q)\in\Lambda_t$ ならば $\langle\eta\rangle$ は decomposable．このときさらに η が generic ならば $\langle\eta\rangle=\langle\sigma(t+1)\rangle^{\oplus u}\oplus\langle\sigma(t)\rangle^{\oplus v}$

(3) $s=2$ とする．$z_t=t$ $(\forall t\geq 0)$ である．$\langle\eta\rangle$ が indecomposable ならば $(p,q)\notin\Lambda$，すなわち $p=q,\ q+1$．

(イ) $p=q$ のとき indecomposable な $\langle\eta\rangle$ が存在する．$p=q$, $\bar{k}=k$ で η が generic ならば $p=q=1$, $p=q=0$ の場合を除いて $\langle\eta\rangle$ は decomposable.

(ロ) $p=q+1$ のとき η が generic ならば $\langle\eta\rangle=\langle\sigma(q)\rangle$.

(4) $s\geq 3$ とする．$\langle\eta\rangle$ が indecomposable ならば $(p,q)\notin\Lambda$. 逆に $(p,q)\notin\Lambda$ のとき η が generic ならば $\langle\eta\rangle$ は indecomposable.

(2.5) Rem. 各 $q\geq 0$ に対して整数 $\rho(q)$ が定まって

$\Lambda = \{(p,q) \mid q \geqq 0,\ p \geqq \rho(q)\}$ となっている.

Module に話を進めよう.

(2.6) Def. $P_\cdot \in C_X(R)$ を minimal とする. 各 b ($d(P_\cdot) < b \leqq \beta(P_\cdot)$) に対し $N(P_\cdot, b) = \mathrm{Coker}((\varphi_b^P)^\vee)$ とおく.

(2.7) Rem. (1) $N(P_\cdot, b)$ は free direct summand をもたず, $(P_{\cdot \leqq b})^\vee$ は $N(P_\cdot, b)$ の minimal free resolution を与える.

(2) $N(P_\cdot, b) \cong N(P'_\cdot, b') \iff P_\cdot \cong P'_{\cdot - b + b'}$.

(3) R-module M が $\mathrm{depth}_m M = r - b$ $(0 \leqq b \leqq r)$ をみたすとする. $L_\cdot = \mathrm{res.}(M)$, $P'_\cdot = \mathrm{res.}(\mathrm{Ker}((\varphi_1^L)^\vee))$ とおき, map $P'_0 \to \mathrm{Coker}(\varphi_1^{P'}) = \mathrm{Ker}((\varphi_1^L)^\vee) \hookrightarrow L_0^\vee$ を ψ と書く. Complex $P_\cdot$ を $P_i = L_{b-i}^\vee$, $\varphi_i^P = (\varphi_{b-i+1}^L)^\vee$ $(i \leqq b)$, $P_i = P'_{i-b-1}$ $(i > b)$, $\varphi_{b+1}^P = \psi$, $\varphi_i^P = \varphi_{i-b-1}^{P'}$ $(i > b+1)$ で定めると $P_\cdot \in C_X(R)$ でしかも $\mathrm{Im}(\varphi_i^P) \subset m P_{i-1}$ $(\forall i \neq b+1)$. $\mathrm{Im}(\varphi_{b+1}^P) = \mathrm{Im}(\psi) \subset m P_b$ となるのは M が free direct summand を持たないときに限る. よって free direct summand を持たない R-module M はすべて $M = N(P_\cdot, b)$ の形をしている.

(4) R は Gorenstein とする. このとき $P_\cdot$ が $H_i(P_\cdot) = 0$ $(\forall i < 0)$ をみたせば $\mathrm{depth}_m N(P_\cdot, b) \geqq r - b$ (等号が成立するのは

$H_0(P.)\neq 0$ のとき). さらに $\ell_R(H_j(P.))<\infty$ $(0\leqq {}^\forall j\leqq \alpha(P.))$ のときは $b\geqq r$, $H_j(P.)=0$ $(b-r<{}^\forall j\leqq \alpha(P.))$ でないかぎり $\dim N(P.,b)=r$.

R が regular の場合には $K.$ は $\mathfrak{m}$ の生成元に関する Koszul complex で, (1.5), (2.3), (2.4) を応用すると次のことがわかる.

(2.8) Th. R を regular local ring, または polynomial ring $k[x_1,\cdots,x_r]$ で $\deg x_i=1$ $({}^\forall i)$ によって次数付けられたもの, M を free direct summand を持たない quasi Buchsbaum R-module で $\dim M=r$, $H_{\mathfrak{m}}^i(M)=0$ $(i\neq i_1, i_2, r,$ $0\leqq i_1<i_2<r)$ をみたすものとし $q=\ell_R(H_{\mathfrak{m}}^{i_1}(M))$, $p=\ell_R(H_{\mathfrak{m}}^{i_2}(M))$ とおく.

(1) $M=N(\min.(C.(\mu.)),b)$ となるような chain map $\mu.:F.\to G._{-a-1}$ $(\eta:=\mu_{a+1})$ が存在する. ただし $a=i_2-i_1$, $b=r-i_1$ で, $F.$, $G.$ は (2.3) のように定められているものとする.

(2) $R=k[x_1,\cdots,x_r]$ (graded case) のとき quasi Buchsbaum module $M^{(n)}$ $(n\in\mathbb{Z})$ で

$$H^i_m(M^{(n)}) \cong \begin{cases} k(-n-a-1)^{q_{n+r+a+1}} & (i=i_1) \\ k(-n)^{p_{n+r}} & (i=i_2) \\ 0 & (i \neq i_1, i_2, r) \end{cases}$$

となるものが存在し $M \cong \bigoplus_n M^{(n)}$ となる.

(3) $R = k[x_1, \cdots, x_r]$ (graded case) で

$$H^i_m(M) \cong \begin{cases} k(-a-1)^q & (i=i_1) \\ k^p & (i=i_2) \\ 0 & (i \neq i_1, i_2, r) \end{cases}$$

とする.

(イ) $a = r-1$ (i.e. $i_2 = r-1$, $i_1 = 0$) の時. $s=1$. $p \leqq 1$ かつ $q \leqq 1$ でないかぎり M は decomposable. M が indecomposable なのは $(p, q) = (1, 0), (0, 1)$ (Buchsbaum case) か, $(p, q) = (1, 1)$ で $\eta = \mu_r$ が 0 と異なる 1×1 行列 (~ 1) のとき.

(ロ) $a < r-1$ の時. $s = \binom{r}{a+1} \geqq 3$. (p, q) または (q, p) が Λ に含まれれば M は decomposable. $(p, q), (q, p) \notin \Lambda$ で η が generic ならば M は indecomposable.

(4) R が regular local ring のときも(3)と同じことが成立する．

(2.9) Rem. R が regular のとき K_1 の free basis を u_ℓ $(1 \leqq \ell \leqq r)$, $\Gamma_\ell = \{(i_1, \dots, i_\ell) \mid 1 \leqq i_1 < \dots < i_\ell \leqq r\}$, $I \in \Gamma_\ell$ に対して $u_I = u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_\ell} \in K_\ell$ と書くことにする．(2.8) の (3), (4) において

$$\eta = \sum_{I \in \Gamma_{a+1}} u_I^* \otimes \eta_I \ , \quad \eta_I \in \mathrm{Hom}_R(R^q, R^p)$$

ならば

$$\mu_{a+1+\ell} = \sum_{I \in \Gamma_{a+1+\ell}} \sum_{\substack{J \in \Gamma_\ell \\ J \subset I}} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} I \\ J, I \setminus J \end{pmatrix} u_J \otimes u_I^* \otimes \eta_{I \setminus J}$$

$(0 \leqq \ell \leqq r-a-1)$ と思ってよい．さらに

$$e_m(M) = \binom{r-1}{i_1-1} q + \binom{r-1}{i_2-1} p - \mathrm{rank}_k(\bar{\mu}_{r-i_1+1}),$$

$$\ell_R(M/mM) = \binom{r}{i_1} q + \binom{r}{i_2} p - \mathrm{rank}_k(\bar{\mu}_{r-i_1+1}) - \mathrm{rank}_k(\bar{\mu}_{r-i_1}),$$

ただし $\binom{r-1}{-1} = 0$, "$-$" は $(\mathrm{mod}\ m)$ を表す．

一般の場合に maximal quasi Buchsbaum module を分類するということはまだできていない．

ところで R が regular または $k[x_1,\cdots,x_r]$ のとき，free direct summand を持たない maximal quasi Buchsbaum module M に対し，(1.6) のようにして定まる minimal な $P_\cdot \in C_x(R)$ $(F_\cdot = 0_\cdot,\ mH_0(G_\cdot^{(j)}) = 0\ (0 \leqq {}^\forall j \leqq a := \alpha(P_\cdot) < b \leqq \beta(P_\cdot)))$ があって $M = N(P_\cdot, b)$ となるが，

$$M \text{ が Buchsbaum} \iff \mu^{(j)} \equiv 0 \pmod{m}\ (0 \leqq {}^\forall j \leqq a)$$

ということが Goto の定理の内容である．これが一般の R についてはどうなるのかということも問題になる．ひとつ例をあげておく．

(2.10) Ex. R は Gorenstein，graded で algebra として $R_0 = k$ 上 R_1 によって生成されているとし $\dim_k R_1 = c$，$\# k = \infty$ とする．$K_0 = R$，$K_1 = R(-1)^c$，$K_2 = R(-2)^{\binom{c}{2}} \oplus \{\bigoplus_{n \geqq 2} R(-n)^{c_n}\}$，$\cdots$ となる．ある $m \geqq 3$ に対して $c_m \geqq 2$ と仮定し，K_2 の free base のうち degree が m であるものを $v_1^{(m)}, \cdots, v_{c_m}^{(m)}$ とおく．Chain map $\mu_\cdot : K_\cdot(m)^q \to K_{\cdot-2}^p$ を $\mu_2 = \sum_{\ell=1}^{c_m} (v_\ell^{(m)})^* \otimes \eta_\ell$，$\eta_\ell \in \mathrm{Hom}_R(R(m)^q, R^p)_m$ となるよう

に定めて b $(1<b\leqq r)$ に対して $M=N(\min.(C.(\mu.)),b)$ とおく．すると

$$H_{\mathfrak{m}}^{i}(M)\cong\begin{cases} k(g-m)^{q} & (i=r-b)\\ k(g)^{p} & (i=r-b+1)\\ 0 & (i\neq r-b,\ r-b+1,\ r)\end{cases}$$

$(g=\min\{t\mid H_{\mathfrak{m}}^{r}(R)_{-t}\neq 0\})$ で しかも $(m-g+r-b)-(-g+r-b+1)=m-1\neq 1$ だから M (すなわち $M_{\mathfrak{m}}$) は Buchsbaum となる．ここで (2.4) を用いると，p, q, n_{ℓ} $(1\leqq \ell\leqq c_m)$ をいろいろにかえていくらでも indecomposable な M が構成できることがわかる．Rとしてはたとえば complete intersection をとれば今述べたことが実現できる．

〈あとがき〉． のんびりしているうちに12月初旬 preprint [CHP] が着いた．それには本稿の (2.8) の(4) に相当する結果が含まれている．

References

[A] M. Amasaki, Application of the generalized Weierstrass preparation theorem to the study of homogeneous ideals, Transactions of the AMS, Vol. 317, No. 1 (1990), 1–43.

[D] J. Dieudonné, Sur la réduction canonique des couples de matrices, Bull. Soc. Math. Fr. 74 (1946), 130–146.

[EG] D. Eisenbud and S. Goto, Linear free resolutions and minimal multiplicity, J. Algebra 88 (1984), 89–133.

[Go1] S. Goto, A note on quasi Buchsbaum rings, Proceedings of the AMS, Vol. 90, No. 4 (1984), 511–516.

[Go2] S. Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules, Advanced studies in Pure Math. 11, "Commutative algebra and combinatorics" (1987), 39–64.

[ĈHP] M. Ĉipu, J. Herzog and D. Popescu, Indecomposable generalized Cohen-Macaulay modules, preprint.

Ramification divisors for branched coverings of $\mathbb{P}^n$

Hidetoshi Maeda

Department of Mathematics, School of Education
Waseda University, 1-6-1, Nishi-Waseda, Shinjuku-ku
Tokyo, 169 Japan

Introduction.

Here we will assume that the ground field k is algebraically closed and of characteristic zero.

Let X be a smooth projective variety of dimension n and $f:X \to \mathbb{P}^n$ a branched covering. Ein [E] proved that the ramification divisor R of f is ample unless f is an isomorphism. We will generalize this result to log-terminal algebraic varieties. The precise statements of our results are as follows:

Theorem A. *Let X be a log-terminal projective variety of dimension n and $f:X \to \mathbb{P}^n$ a branched covering. Then the ramification divisor R of f is always a semi-ample $\mathbb{Q}$-Cartier divisor. Furthermore, R is ample unless f is an isomorphism.* (For the definition of the ramification divisor, see (1.6).)

Theorem B. *Let X be as above and $f:X \to Q^n$ a branched covering of a smooth hyperquadric Q^n in $\mathbb{P}^{n+1}$. Then R is always a semi-ample $\mathbb{Q}$-Cartier divisor.*

Basically we use the standard notation from algebraic geometry. The words "line bundles" and "invertible sheaves" are used interchangeably. The pull-back f^*H of a line bundle H on Y by a morphism $f:X \to Y$ is often denoted by H_X or $\mathcal{O}_X(H)$.

§1. Preliminaries.

Let X be a complete algebraic variety defined over an algebraically closed field k of characteristic zero. We denote

$\mathrm{Div}(X)$ = the group of Cartier divisors on X,

$\mathrm{Pic}(X)$ = the group of line bundles on X.

$\mathbb{Q}$-Cartier divisors and *$\mathbb{Q}$-line bundles* are elements of $\mathrm{Div}(X) \otimes\mathbb{Q}$ and of $\mathrm{Pic}(X)\otimes\mathbb{Q}$, respectively. In what follows, the tensor products of $\mathbb{Q}$-line bundles are denoted additively. $D\in\mathrm{Div}(X)\otimes\mathbb{Q}$ is called *semi-ample* if $\mathcal{O}_X(mD)$ is generated by its global sections for some positive integer m with $mD\in\mathrm{Div}$

(X). $H \in \mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$ is called *nef* if $HC \geq 0$ for all integral curves C on X. A nef $\mathbb{Q}$-line bundle $H \in \mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$ is called *big* if $H^n > 0$ with $n = \dim X$. $H \in \mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$ is called *ample* if mH is ample for some positive integer m with $mH \in \mathrm{Pic}(X)$. $D \in \mathrm{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$ is said to be *ample* if a $\mathbb{Q}$-line bundle defined by D is ample.

Let X be a normal algebraic variety. The *canonical sheaf* ω_X on X is the cohomology sheaf of the dualizing complex at degree $-\dim X$. X is said to be *log-terminal* if

(1) $\omega_X \in \mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$, and

(2) given a desingularization $\mu : Y \to X$ such that the union $\cup F_j$ of the exceptional locus of μ is a simple normal crossing divisor, we have

$$\omega_Y = \mu^* \omega_X + \sum a_j F_j$$

with $a_j > -1$ for all j.

Let $f : X \to Y$ be a projective morphism of complete algebraic varieties. Let $Z_1(X/Y)$ be the free abelian group generated by curves on X which are mapped to points on Y by f. The intersection pairing gives a bilinear map $\mathrm{Pic}(X) \times Z_1(X/Y) \to \mathbb{Z}$, and the numerical equivalence $\equiv$ is defined so that the pairing $((\mathrm{Pic}(X)/\equiv) \otimes \mathbb{Q}) \times ((Z_1(X/Y)/\equiv) \otimes \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ is non-degenerate. The closed cone of curves $\overline{NE}(X/Y)$ is the closed convex cone generated by effective 1-cycles in the $\mathbb{R}$-vector space $N_1(X/Y) := (Z_1(X/Y)/\equiv) \otimes \mathbb{R}$. When $Y = \mathrm{Spec}\, k$, we drop

/Spec k from the notation. It is well-known that:

(1.1) *$\mathbb{Q}$-line bundle $H \in \mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$ is f-ample if $H > 0$ on $\overline{NE}(X/Y)-\{0\}$.* (See [KMM], Theorem 0-1-2.)

Let X be a log-terminal projective variety. Let $\overline{NE}(X)^+ = \{z \in \overline{NE}(X) \mid \omega_X . z \geq 0\}$. A ray $R \subset \overline{NE}(X)$ is called *extremal* if

(1) $R \not\subset \overline{NE}(X)^+$, and

(2) if $z_1, z_2 \in \overline{NE}(X)$ satisfy $z_1 + z_2 \in R$, then $z_1, z_2 \in R$.

We have the following two basic theorems.

(1.2) **The Contraction Theorem.** *Let X be a log-terminal projective variety. For each extremal ray R, there exists a surjective morphism $f: X \to Y$ to a normal projective variety Y contracting at least one curve on X such that $R = \overline{NE}(X/Y)-\{0\}$.*

For the proof, we refer to [KMM], Theorem 3-2-1 and Lemma 3-2-4.

(1.3) **The Cone Theorem.** *Let X be a log-terminal projective variety. Then*

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)^+ + \sum R_j,$$

where R_j's are extremal rays of $\overline{NE}(X)$ for X.

For the proof, we refer to [KMM], Theorem 4-2-1.

We need the following two lemmas which will be used later on.

(1.4) **Lemma.** *Let X be a log-terminal complete algebraic variety and H a line bundle on X. Assume that $H-\omega_X$ is nef and big. Then $H^q(X,H) = 0$ for $q > 0$.*

Proof. See [KMM], Theorem 1-2-5 and Remark 1-2-6.

Q.E.D.

(1.5) **Lemma.** *Let X be a log-terminal complete algebraic variety and H a $\mathbb{Q}$-line bundle on X. Assume that H is nef and that $H-\omega_X$ is nef and big. Then H is semi-ample.*

Proof. Immediate from [KMM], Theorem 3-1-1 and Remark 3-1-2-(1).

Q.E.D.

(1.6) Let X be a normal algebraic variety, U the smooth locus of X and $i:U \to X$ the natural inclusion. Given a smooth algebraic variety Y and a generically finite surjective morphism $f:X \to Y$, the Riemann-Hurwitz formula gives $\omega_U = (f^*\omega_Y)_U+S$, where S is the ramification divisor of $f\circ i$. Thus

(1.6.1) $\omega_X = i_*\omega_U = f^*\omega_Y+i_*S.$

Then $R := i_*S$ is an effective Weil divisor on X.

Definition. The effective Weil divisor R on X is said to be the *ramification divisor of* f.

Note that in particular if X is log-terminal, R is $\mathbb{Q}$-Cartier by (1.6.1).

§2. Proof of the main results.

We begin by establishing the following

(2.1) **Proposition.** *Let X be a log-terminal projective variety of dimension n and L an ample line bundle on X. Then $\omega_X+nL\in\mathrm{Pic}(X)\otimes\mathbb{Q}$ is nef unless $(X,L)\cong(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$. In particular, $\omega_X+(n+1)L$ is always nef.*

(2.2) *Remark.* If X is a rational normal Gorenstein projective variety, then this was already proved in [F1; Theorem 1].

(2.3) *Proof of Proposition* (2.1). We use Fujita's ideas and follow the argument in [F1;§2] and [F2;§3]. Assume that ω_X+nL is not nef. Then by (1.1), (1.2) and (1.3) we have an integral curve C on X and a surjective morphism $f:X\to Y$ to a normal projective variety Y such that

(2.3.1) $(\omega_X+nL)C<0$,

(2.3.2) $\mathbb{Q}$-line bundle $G\in\mathrm{Pic}(X)\otimes\mathbb{Q}$ is f-ample if $GC > 0$.

From (1.2) again, there exists a point y on Y such that $d :=\dim f^{-1}(y) > 0$. Take an irreducible component Z of $f^{-1}(y)$ with $d = \dim Z$. Let $g:M \to Z$ be a desingularization of Z. We will show that $h^{d}(M,-tL_{M}) = 0$ for $t \leq n$.

Take a very ample line bundle H on Y. Then, since $-\omega_X-tL$ is f-ample for $t \leq n$ by (2.3.1) and (2.3.2), $-\omega_X-tL+sH_X$ is ample for $t \leq n$ and $s \gg 0$. Thus by (1.4),

(2.3.3) $h^{q}(X,-tL+sH_X) = 0$ for $q > 0$, $t \leq n$ and $s \gg 0$.

Let Λ be the linear system of Cartier divisors $D\in|H|$ containing y and $D_1,\dots,D_{n-d}$ general members of $f^{*}\Lambda$. For $0 \leq j \leq n-d$, we define X_j by

$X_0 = X$,

$X_j =$ the scheme-theoretic intersection $D_1\cap\dots\cap D_j$ $(0 < j \leq n-d)$.

Then, since $\mathrm{codim}\, X_j = j$, we have an exact sequence

$$0 \to \mathcal{O}_{X_j}(-tL+(s-1)H_X) \to \mathcal{O}_{X_j}(-tL+sH_X) \to \mathcal{O}_{X_{j+1}}(-tL+sH_X) \to 0 \quad (0 \leq j < n-d).$$

We use (2.3.3) and induction on j to find

(2.3.4) $h^{q}(X_{n-d},(-tL+sH_X)_{X_{n-d}}) = 0$ for $q > 0$, $t \leq n$ and $s \gg 0$.

Let $\mathcal{I}_Z$ be the ideal sheaf of Z in X_{n-d}. The exact sequence $0 \to \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O}_{X_{n-d}} \to \mathcal{O}_Z \to 0$ together with $\dim(\mathrm{Supp}\,\mathcal{I}_Z) \leq d$ and

(2.3.4) gives $h^d(Z,(-tL+sH_X)_Z) \leq h^d(X_{n-d},(-tL+sH_X)_{X_{n-d}}) = 0$ for $t \leq n$ and $s \gg 0$, i.e.,

(2.3.5) $\quad h^d(Z,-tL_Z) = 0$ for $t \leq n$.

Let $\mathcal{C}$ be the cokernel of the natural injection $\mathcal{O}_Z \to g_*\mathcal{O}_M$. Then $\dim(\mathrm{Supp}\ \mathcal{C}) < d$, since $\mathrm{Supp}\ \mathcal{C}$ is the set of non-normal points on Z. Combining this with (2.3.5) yields

(2.3.6) $\quad h^d(Z,g_*(-tL_M)) = 0$ for $t \leq n$.

Consider the Leray spectral sequence

(2.3.7) $\quad E_2^{pq} = H^p(Z,R^qg_*(-tL_M)) \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(M,-tL_M)$.

We claim that $E_2^{pq} = 0$ if $p+q = d$ and $q > 0$. To see this, let E be the exceptional locus of g. By the theorem on formal functions, $\dim g^{-1}(z) \geq q > 0$ for any $z \in \mathrm{Supp}(R^qg_*(-tL_M))$, hence $\dim(\mathrm{Supp}(R^qg_*(-tL_M))) \leq \dim E-q < d-q = p$, and we are done. Combining this with (2.3.6) and (2.3.7) gives $h^d(M,-tL_M) = 0$ for $t \leq n$.

On the other hand, $h^q(M,-tL_M) = h^{d-q}(M,\omega_M+tL_M) = 0$ for $q < d$ and $t \geq 1$ by (1.4), and so $\chi(M,-tL_M) = 0$ for $1 \leq t \leq n$. Since $\chi(M,-tL_M)$ is of degree $d \leq n$, it follows that $d = n$. Thus $X = Z$ and Y is a point.

By (2.3.3), $h^q(X,-tL) = 0$ for $q > 0$ and $t \leq n$. Since $h^0(X,-tL) = 0$ for $t \geq 1$, we can write $\chi(X,-tL) = (-1)^n\frac{L^n}{n!}(t-1)(t-2)\dots(t-n)$. Therefore $L^n = \chi(X,\mathcal{O}_X) = h^0(X,\mathcal{O}_X) = 1$ and $h^0(X,L) = \chi(X,L) = n+1$. By Theorem 1.1 of [KO], $(X,L) \cong (\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$. Q.E.D.

(2.4) **Theorem A.** *Let X be a log-terminal projective variety of dimension n and $f:X \to \mathbb{P}^n$ a branched covering. Then the ramification divisor R of f is always a semi-ample $\mathbb{Q}$-Cartier divisor. Furthermore, R is ample unless f is an isomorphism.*

Proof. Set $L := f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. Then, by (2.1) $R = \omega_X - f^*\omega_{\mathbb{P}} = \omega_X + (n+1)L$ is nef. Hence, by (1.5) R is semi-ample. To prove the second statement, we suppose to the contrary that R is not ample. Then $\omega_X + nL$ is not nef. By (2.1) $(X,L) \cong (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$ and $\deg f = 1$, a contradiction. Q.E.D.

(2.5) **Theorem B.** *Let X be as in (2.4) and $f:X \to Q^n$ a branched covering of a smooth hyperquadric Q^n in $\mathbb{P}^{n+1}$. Then R is always a semi-ample $\mathbb{Q}$-Cartier divisor.*

Proof. Set $L := f^*\mathcal{O}_Q(1)$. Then $R = \omega_X - f^*\omega_Q = \omega_X + nL$. If R is not nef, then $(X,L) \cong (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$. This implies $1 = L^n = (f^*\mathcal{O}_Q(1))^n = 2\cdot\deg f$, which is absurd. Therefore R is nef and semi-ample by (1.5). Q.E.D.

References

[E] Ein, L.: The ramification divisors for branched coverings of $\mathbb{P}_k^n$. Math. Ann. **261**, 483-485(1982)

[F1] Fujita, T.: On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive. Adv. Stud. Pure Math. **10**, 167-178(1987)

[F2] Fujita, T.: Remarks on quasi-polarized varieties. Nagoya Math. J. **115**, 105-123(1989)

[KMM] Kawamata, Y., Matsuda, K., Matsuki, K.: Introduction to the minimal model problem. Adv. Stud. Pure Math. **10**, 283-360(1987)

[KO] Kobayashi, S., Ochiai, T.: Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics. J. Math. Kyoto Univ. **13**, 31-47(1973)

F-rationality and polynomial extentions.

中村幸男　(Yukio Nakamura)

東京都立大学

1　序文

以下 p は素数を表すものとする。R を標数 p の可換環、I を R のイデアルとするとき、M. Hochster と C. Huneke は I の tight closure I^* を次の様に定義した。

$$I^* = \{x \in R \mid \exists c \in R^\circ \quad \text{such that} \quad cx^{p^e} \in I^{[p^e]} \quad \text{for all} \quad e \gg 0\}$$

ここで、R° は極小素イデアルに属さない R の元の集合であり、$I^{[p^e]}$ は $a^{p^e} (a \in I)$ で生成される R のイデアルを表すものとする。このとき、I^* は R のイデアルとなり、R が Noether 環のならば、$I \subset I^* \subset \overline{I}$ ($\overline{I}$ は I の整閉包) が常に成り立つことが知られている。

すべてのパラメーターイデアル I に対して $I = I^*$ の成り立つ Noether 環は F-rational とよばれ、F-rational である環は normal であり、特に Noether の正規化をもつときには、Cohen-Macaulay 環となることがいえる ([5])。また、すべてのイデアル I に対して $I = I^*$ が成り立つ Noether 環は weakly F-regular とよばれ、環が Gorenstein 局所環のときには、weakly F-regularity と F-rationality とは同値であることが知られている ([4, Theorem 5.1])。

そこで次の問題を提起してみる。

問題 1 *F-rationality (weakly F-regularity)* は多項式拡大で遺伝するか？

F-rational でない局所環 R のパラメーターイデアル I に対しては一般に I と I^* とは異なる。しかしながら、ある意味で I と I^* との差が小さいならば、R は F-rationality にある程度似た性質を持つであろうと期待したいものである。そこで次の定義を与えてみよう。

$$t_0(R) = \sup \ell_R(I^*/I),$$

ここで、$\ell_R(\quad)$ は長さを表し、I は R のすべてのパラメーターイデアルを動くものとする。

このとき、R が F-rational であることは $t_0(R) = 0$ と同値であり、"I と I^* との差が小さい" を、"$t_0(R)$ の値が有限である" ということと考えて見ることで次の問題を得る。

問題 2 $t_0(R)$ が有限となる局所環はどんなものか？

これらの問題に対して得られた結果は次のものである。

定理 1 *R は標数 p の F-rational, Cohen-Macaulay 局所環とし、$S = R[X_1, X_2, ..., X_d]$ は多項式環とする。このとき、任意の $P \in \operatorname{Spec} S$ に 対して S_P は F-rational である。*

環が Gorenstein である場合は局所環の仮定をはずして次のようにいうことができる。

系 1 *R は標数 p の Gorenstein 環とし、$S = R[X_1, X_2, ..., X_d]$ は多項式環とする。このとき R が weakly F-regular であれば、S も weakly F-regular である。*

問題 2 については、

定理 2 *(R, M) を標数 p の Noether 完備局所環とし、等次元であるものとする。このとき、$t_0(R)$ が有限であれば、次がなりたつ。*

1. *R は F.L.C. を持つ。*
2. *任意の $P \in \operatorname{Spec} R \setminus \{M\}$ に対して $t_0(R_P) = 0$ となる。*

また、$t_0(R) < \infty$ となる局所環の例についても、少し述べてみたいと思う。

末尾になりましたが、この研究の遂行にあったては、後藤四郎先生から多くの助言を頂いたことに心から感謝の気持ちを述べさせて頂きます。

2 定理 1 の証明

はじめに系 1 について述べておく。wealky F-regularity についての次の性質に注意すれば、Gorenstein という仮定より系 1 は定理 1 からただちに導かれる。

命題 1 *([5, (4.15) Corollary.])* 標数 p の *Noether* 環 R に対して次は同値である。

1. R が *weakly F-regular*
2. 任意の $M \in \operatorname{Max} R$ に対して R_M は *weakly F-regular*

また、定理の証明の前に次の事実を引用しておく。

命題 2 *([7, Theorem (1.1)])* R は標数 p の *Cohen-Macaulay* 局所環とする。もし、$I = I^*$ となる R のパラメーターイデアルが存在するならば、任意の $P \in \operatorname{Spec} R$ に対して R_P は *F-rational* である。

定理 1 の証明

$d = 1$ としてよい。また、命題 2 より M を R の極大イデアルとして、$P \in \operatorname{Max} S$ かつ $P \cap R = M$ と仮定してよい。このとき、$P = MS + (f)$ となる $f \in S$ (f は monic) をとることができる。J を R のパラメーターイデアルとし、$I = JS + (f)$ とおく。このとき $I = I^*$ となることを証明しよう。

もし、$I \neq I^*$ ならば $\varphi \in I^* \setminus I$ を $\deg \varphi$ が最小となるようにとる。すると、$\deg \varphi < \deg f$ が成り立つ。実際 、f は monic だから、g, r $\in S$ を $\varphi = fg + r$, $\deg r < \deg f$ を満たすようにとることができる。このとき、$r \in I^* \setminus I$ なので $\deg \varphi$ の最小性より、$\deg \varphi \leq \deg r < \deg f$ を得る。一方、$\varphi \in I^*$ であったから、S の元 ξ が存在して、

$$\xi \varphi^{p^e} \in I^{[p^e]} = J^{[p^e]}S + (f^{p^e}) \quad \text{for all} \quad e \gg 0$$

となる。剰余環 $S/J^{[p^e]}S$ での像を $^-$ で表すことにすれば、もし $\overline{\xi}\overline{\varphi}^{p^e} \neq 0$ なら、$\overline{\xi}\overline{\varphi}^{p^e} \in (\overline{f}^{p^e})$ なので、

$$\deg \xi + p^e \deg \varphi \geq \deg \overline{\xi}\overline{\varphi}^{p^e} \geq \deg \overline{f}^{p^e} = p^e \deg f$$

$$\deg \xi \geq p^e(\deg f - \deg \varphi) \geq p^e$$

故に、十分大きいすべての e に対して $\xi \varphi^{p^e} \in J^{[p^e]}S$ を得る。

そこで、cX^n を ξ の leading term、aX^m を φ の leading term とすれば、

$$ca^{p^e} \in J^{[p^e]} \quad \text{for all} \quad e \gg 0$$

故に、$a \in J^* = J$。従って、$\varphi - aX^m \in I^* \setminus I$ となり $\deg \varphi$ の最小性に矛盾する。

いま、I は $P-$ 準素イデアルなので $I^*S_P = (IS_P)^*$ が成り立ち ([5, (4.14) Proposition.])、IS_P は S_P のパラメーターイデアルであるから命題 2 より定理の証明は完了する。 (Q.E.D.)

3 $t_0(R)$ の有限性

はじめに F.L.C. を持つ局所環について述べておく。

定義 1 (R, M) は d 次元の局所環とする。長さ $\ell_R(H^i_M(R))$ がすべての d と異なる i に対して有限であるとき、R は *F.L.C* を持つといわれる。

F.L.C. を持つ局所環について次の性質を思い起こしておこう。([3, §. 37])

命題 3 d 次元 *Noether* 局所環 (R, M) に対して次は同値である。

1. R が *F.L.C.* をもつ。
2. ある自然数 t が存在して、任意のパラメーター系 $a_1, a_2, ..., a_d$ と任意の自然数 $n_1, n_2, ..., n_d$ に対して次が成り立つ。

$$(a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, ..., a_{d-1}^{n_{d-1}}) : a_d^{n_d} \quad \subset \quad (a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, ..., a_{d-1}^{n_{d-1}}) : M^t$$

命題 4 R は *F.L.C.* を持つ *Noether* 局所環とする。この時 R は *quasi-unmixed* であり、したがって任意の $P \in \operatorname{Spec} R$ に対して $\dim R = \dim R/P + \operatorname{ht} P$ が成り立つ。

まずは、抽象論ではあるが次の補題を証明しておく。

補題 1 R は *Noether* 環とし、$P \in \operatorname{Spec} R$ を $\operatorname{ht} P = r$ とする。このとき、任意の R_P のパラメーターイデアル J に対して、$a_1, a_2, ..., a_r \in R$ を $a_1, a_2, ..., a_r$ は R のパラメーター系の一部をなし、$J = (a_1, a_2, ..., a_r)R_P$ となるものとしてとることができる。

証明 r に関する帰納法。$r = 0$ のときは明かであるから、$r \geq 1$ と仮定する。$f_1, f_2, ..., f_r \in R$ を $J = (f_1, f_2, ..., f_r)R_P$ ととり、$I = (f_1, f_2, ..., f_r)R$ とおくことにする。さらに、$\mathcal{F} = \{Q \in \operatorname{Min} R \mid Q \not\supset I\}$, $\mathcal{G} = \{Q \in \operatorname{Min} R \mid Q \supset I\}$ とおくと、$\mathcal{F} \neq \emptyset$ であるから、$d \in \bigcap_{Q \in \mathcal{F}} Q \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{G}} Q$ となる R の元 d が存在する。このとき d の R_P での像 $d/1$ はべき零であるから、はじめから $d/1 = 0$ としてよい。いま $I \not\subset \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q$ なので、$f_1 + z \notin \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q$ となる $z \in (f_2, f_3, ..., f_r)R$ をとることができる ([6, Theorem 124])。ここで $a = d + f_1 + z$ とおけば、$J = (a, f_2, f_3, ..., f_r)R_P$ であり、$a \notin \bigcup_{Q \in \operatorname{Min} R} Q$ が確かめられるので、a は R のパラメーター系の一部をなす。そこで、$R/(a), J/(a)$ 及び $P/(a)$ に帰納法の仮定を適用すればよい。

(Q.E.D.)

補題 2 *([7, lemma 2.2])* R は標数 p の *Noether* 環とし、I を R のイデアルで $\mathrm{Ass}\, R/I \subset \mathrm{Max}\, R$ を満たすものとする。このとき、任意の $P \in \mathrm{Spec}\, R$ に対して、$I^* R_P = (IR_P)^*$ となる。

命題 5 (R, M) は標数 p で d 次元 $(d > 0)$ の *Noether* 局所環とし、*F.L.C.* をもつものとする。$f_1, f_2, \ldots, f_{d-1} \in R$ が R のパラメーター系の一部をなすとき、任意の $P \in \mathrm{Spec}\, R$ に対して次が成り立つ。

$$(f_1, f_2, \ldots, f_{d-1})^* R_P = ((f_1, f_2, \ldots, f_{d-1}) R_P)^*$$

証明 $f_d \in R$ を $f_1, \ldots, f_{d-1}, f_d$ が R のパラメター系となるようにとり、$S = R[1/f_d]$ とおく。以上の仮定のもとで次の主張を証明しよう。

主張: $I^* S = (IS)^*$ が成り立つ、但し $I = (f_1, f_2, \ldots, f_{d-1})R$ とおいた。

実際、$x \in R$ を $x/1 \in (IS)^*$ となるものととれば、$c/1 \in S^\circ$ が存在して

$$(c/1)(x/1)^{p^e} \in I^{[p^e]} S \quad \text{for all} \quad e \gg 0$$

となる。ここで $c \in R$ は必要ならば取り直すことによって、$c \in R^\circ$ と仮定することができる。実際、$\mathcal{F} = \{Q \in \mathrm{Min}\, R \mid c \notin Q\}$, $\mathcal{G} = \{Q \in \mathrm{Min}\, R \mid c \in Q\}$ とおいて、補題 1 と同様の議論を行なえばよい。よって、p^e を固定すれば、ある自然数 j が存在して

$$f_d^j c x^{p^e} \in I^{[p^e]} = (f_1^{p^e}, f_2^{p^e}, \ldots, f_{d-1}^{p^e}) R$$

となる。いま、R は F.L.C. をもつのであったから、ある自然数 t が存在し、任意の e 及び j に対して、

$$M^t [(f_1^{p^e}, f_2^{p^e}, \ldots, f_{d-1}^{p^e}) : f_d^j] \quad \subset \quad (f_1^{p^e}, f_2^{p^e}, \ldots, f_{d-1}^{p^e})$$

が成り立ち、また、$f_d \in R^\circ$ となる。従って、$f_d^t c x^{p^e} \in I^{[p^e]}$ で $f_d^t c \in R^\circ$ となることから、$x \in I^*$ を得る。逆の包含関係 $I^* S \subset (IS)^*$ は一般に成り立つので ([5, (4.11) lemma.])、主張は証明された。

そこで、命題 5 の証明に戻ろう。いま、$\mathrm{Ass}\, S/IS \subset \mathrm{Max}\, S$ であるから、補題 2 により、

$$(IS)^* S_Q = (IS_Q)^*, \quad \text{但し} \quad Q = PS$$

が成り立つので、

$$I^* R_P = I^* S_Q = (IS)^* S_Q = (IS_Q)^* = (IR_P)^*$$

を得る。 (Q.E.D.)

系 2 (R, M) は標数 p の *Noether*局所環で *F.L.C.* を持つものとする。このとき、もし $t_0(R) < \infty$ ならば、任意の $P \in \operatorname{Spec} R \setminus \{M\}$ に対して $t_0(R_P) = 0$ となる。

証明 $d = \dim R$ とし、$r = \dim R/P$ に関する帰納法とする。$r = 1$ のとき。J を R_P のパラメーターイデアルとする。R は quasi-unmixed なので $\operatorname{ht} P = d-1$ となり、補題 **1** より、$a_1, a_2, ..., a_{d-1} \in R$ を R のパラメーター系の一部であり、かつ J を生成するものとしてとることができる。ここで、$t = t_0(R)$ ，$I = (a_1, a_2, ..., a_{d-1})R$ とおけば、$M^t I^* \subset I$ を得る。なぜなら、$\{a_1, a_2, ..., a_{d-1}, u\}$ を R のパラメーター系となるものとれば、任意の自然数 n に対し

$$M^t I^* \subset M^t(I + (u^n))^* \subset I + (u^n)$$

となるからである。よって、P で局所化すると、$I^* R_P = IR_P = J$ となり、一方、命題 **5** によれば $I^* R_P = (IR_P)^* = J^*$ なので、結局 $J = J^*$ となり、$t_0(R_P) = 0$ を得る。

$r \geq 2$ のとき。$Q \in \operatorname{Spec} R$ を $P \subset Q$ かつ $\dim R/Q = 1$ となるものとる。このとき、R_Q と PR_Q とに対して帰納法の仮定を適用することによって、

$$t_0(R_P) = t_0((R_Q)_{PR_Q}) = 0$$

を得る。 (Q.E.D.)

ここで、([5]) からの準備を少しおこなう。

補題 3 *([5, (7.9) Theorem.])* R は標数 p の *Noether*局所環で *Cohen-Macaulay*環の準同型像で等次元であるものとする。$x_1, x_2, ..., x_d \in R$ を *permutable* なパラメーター系、$A = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[T_1, T_2, ..., T_d]$ を多項式環とし、$A \ni T_i \longmapsto x_i \in R$ となる環準同型を考える。今、I と J を A の単項式で生成されたイデアルとするとき、次が成り立つ。

$$IR :_R JR \quad \subset \quad ((I :_A J)R)^*$$

ここで、パラメーター系が permutable とは任意の i 個の元からなる部分集合が高さ i のイデアルを生成することを言うものとする。

特に、R が quasi-unmixed であれば、$\operatorname{ht} P + \dim R/P = \dim R$ が成り立つので、すべてのパラメーター系は permutable となる。

定理 **2** の証明

R が F.L.C. を持つことを示せば後半は系 **2** に従う。$a_1, a_2, ..., a_d$ を R のパラメーター系、$t = t_0(R)$ とおき、$I = (a_1, a_2, ..., a_{d-1})R$ とする。補題 **3** より

$$(I : a_d) = ((a_1, a_2, ..., a_{d-1}) : A_d) \subset (a_1, a_2, ..., a_{d-1})^* = I^*$$

また、$M^t(I^*/I) = 0$ なので、

$$M^t(I : a_d) \quad \subset \quad I$$

これは、R が F.L.C. を持つことを意味する。 (Q.E.D.)

4 $t_0(R)$ の計算

以下、環 R に対し $\overline{R}$ で R の全商環内での整閉包を表すものとする。$t_0(R)$ の計算について次の補題は有用である。

補題 4 (R, M) は標数 p の *Noether* 局所環で次を満たすものとする、

1. $d = \dim R > 0$
2. $M\overline{R} \subset R$ であり、$\overline{R}$ は R 上有限生成
3. $\overline{R}$ は *weakly F-regular*

この時、任意の R のイデアル I に対して

$$I^* = I\overline{R}$$

$$\ell_R(I^*/I) = \mu_R(I\overline{R}) - \mu_R(I)$$

となる。ここで $\mu_R(\quad)$ は極小生成元の個数を表すものとする。とくに

$$t_0(R) \leq d(\mu_R(\overline{R}) - 1)$$

を得る。

証明 $c \in R^\circ \cap M, a \in I$ 及び $x \in \overline{R}$ に対して

$$c(ax)^{p^e} = (cx^{p^e})a^{p^e} \in I^{[p^e]} \quad \text{for all} e > 0$$

故に、$ax \in I^*$ なので $I\overline{R} \subset I^*$ を得る。また、$\overline{R}$ は被約なので R も被約であり、$R^\circ = R$ の非零因子全体となるから $R^\circ \subset (\overline{R})^\circ$ である。故に

$$I^* \subset (I\overline{R})^* = I\overline{R} \subset I^*$$

を得る。

後半は $M\overline{R} = M$ なので $MI^* = MI\overline{R} = MI$ となるから、

$$\begin{aligned} \ell_R(I^*/I) &= \ell_R(I^*/MI^*) - \ell_R(I/MI) \\ &= \mu_R(I\overline{R}) - \mu_R(I) \end{aligned}$$

となる。特に Q を R のパラメーターイデアルとすれば、$\mu_R(Q) = d$ であり $\mu_R(Q\overline{R}) \le d\mu_R(\overline{R})$ となるので

$$t_0(R) \le d(\mu_R(\overline{R} - 1)$$

を得る。 (Q.E.D.)

例 1 k は標数 p の体で $S = k[[X_1, X_2, ..., X_d]]$ を形式的べき級数環とする。S の $(X_1, X_2, ..., X_d)-$ 準素イデアル I に対し、$R = k + I, M = I$ とおく。このとき、(R, M) は *Noether* 局所環であり

$$t_0(R) \le d(\ell_S(S/I) - 1)$$

となる。

証明 $\ell_R(S/R) < \ell_R(S/I) < \infty$ なので Eakin- 永田の定理より R は Noether 環である。この R が補題 **4** の条件を満たすことは容易に確かめられるので

$$t_0(R) \le d(\mu_R(S) - 1) = d(\ell_S(S/I) - 1)$$

を得る。 (Q.E.D.)

例 2 $0 < m \le d$ を自然数、k を標数 p の体とし、$S = k[[X_1, X_2, ..., X_m, Y_1, Y_2, ..., Y_d]]$ を形式的べき級数環、$R = \frac{S}{(X_1, X_2, ..., X_m) \cap (Y_1, Y_2, ..., Y_d)}$ とする。このとき

1. $m \le t_0(R) \le d$ 　とくに $m = d$ なら $t_0(R) = d$ となる。

2. もし、$m = 1$ なら $t_0(R) = 1$ である。

証明 $P_1 = (X_1, X_2, ..., X_m)$, $P_2 = (Y_1, Y_2, ..., Y_d)$ とおくと、次の完全列を得る。

$$0 \longmapsto R \longmapsto R/P_1 \times R/P_2 \longmapsto R/P_1 + P_2 \longmapsto 0$$

M を R の極大イデアルとすれば $M = P_1 + P_2$ であり $\overline{R} \cong R/P_1 \times R/P_2$ は正則環であるから R は補題 **4** の条件を満たす。故に、R のイデアル I に対して

$$\begin{aligned}\ell_R(I^*/I) &= \mu_R(I\overline{R}) - \mu_R(I) \\ &= \mu_R(I + P_1/P_1) + \mu_R(I + P_2/P_2) - \mu_R(I)\end{aligned}$$

もし、$m = 1$ なら R/P_2 は D.V.R. なので $\mu_R(I + P_2/P_2) \leq 1$、一方 $\mu_R(I + P_1/P_1) \leq \mu_R(I)$ なので $\ell_R(I^*/I) \leq 1$ を得る。

一般の場合、J を R のパラメーターイデアルとすれば、$\mu_R(J + P_2/P_2) \leq d$ であり、また、$\mathrm{ht}(J + P_2/P_2) = \dim R/P_2 = m$ なので、$m \leq \mu_R(J+P_2/P_2)$ となる。一方、同様にして $\mu_R(J+P_1/P_1) = d$ が得られるので、あわせて

$$m \leq \ell_R(J^*/J) \leq d$$

が得られる。 (Q.E.D.)

参考文献

[1] R. Fedder and K.-i. Watanabe, A characterization of F-regularity in terms of F-puriry. Commutative Algebra, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 15 (1989), 227-245, Springer-Verlag.

[2] S. Goto and Y. Nakamura, On the length $\ell_R(I^*/I)$. in preparation.

[3] M. Herrmann, S. Ikeda and U. Orbanz, Equimultiplicity and Blowing up. Springer-Verlag, 1988

[4] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure. Commutative algebra, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 15 (1989), 305-324, Springer-Verlag.

[5] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure, Invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem. J. Amer. Math. Soc. vol. 3, Number 1 (1990), 31-116.

[6] I. Kaplansky, Commutative rings. Allyn and Bacon, 1970

[7] Y. Nakamura, The local rings of Cohen-Macaulay F-rational rings are F-rational. to appear in Tokyo J. Math.

A sufficient condition for a projective variety to be the Proj of a Gorenstein graded ring

Atsushi NOMA

Department of Mathematics, School of Science and Engineering
Waseda University, Tokyo 169, Japan

Introduction

Let X be a normal projective variety over an algebraically closed field k, and D be an *ample* $\mathbb{Q}$*-divisor* on X, i.e., a rational coefficient Weil divisor whose multiple rD for some $r \in \mathbb{N}$ is an ample Cartier divisor. We consider a normal graded ring R(X,D) defined by

$$R(X,D) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))T^n,$$

where $\mathcal{O}_X(nD)$ is the divisorial sheaf associated with a $\mathbb{Q}$-divisor nD (cf.(0.1)). We are interested in finding a criterion for a normal projective variety X over k to have an ample $\mathbb{Q}$-divisor D with R(X,D) Gorenstein. Since X = Proj R(X,D), thanks to a theorem of Demazure [1], it is equivalent to asking when a normal projective variety over k is the Proj of a Gorenstein normal graded k-algebra. When D is an ample Cartier divisor, Goto and Watanabe [2] have obtained a criterion for R(X,D) to be Gorenstein. Using this, our problem for ample Cartier divisors D has answered satisfactorily. In the case of ample $\mathbb{Q}$-divisors, Watanabe [7] has established a criterion for R(X,D) to be Gorenstein, in terms of D and the canonical divisor K_X of X (see,(0.3)). But from this, much was not known about our problem for ample $\mathbb{Q}$-divisors D.

The purpose here is to solve our problem, at least when X is Gorenstein, based on the criterion of Watanabe [7].

Our main result of this paper is the following:

Theorem *Let* X *be a Gorenstein normal projective variety of dimension* N *over an algebraically closed field* k.

(a) *Suppose that* $H^i(X,\mathcal{O}_X) = 0$ *for* $0 < i < N$. *Then, for every positive odd integer* a, *there exists an ample* $\mathbb{Q}$*-divisor* D *on* X *such that* R(X,D) *is a Gorenstein graded ring with* a(R(X,D)) = a. *(See* (0.3.2) *for the definition of* a(R(X,D))*). In particular,* X *is the* Proj *of a Gorenstein normal graded* k*-algebra.*

(b) *Suppose furthermore that there exists a Cartier divisor* F, *with* $H^i(X,\mathcal{O}_X(F)) = 0$ for $0 < i < N$, *such that* 2F *is linearly equivalent to a canonical divisor* K_X. *Then, for every positive even integer* a, *there exists an ample* $\mathbb{Q}$*-divisor* D *on* X *such that* R(X,D) *is a Gorenstein graded ring with* a(R(X,D)) = a.

It is well-known that the vanishing of cohomology groups of the structure sheaf, assumed in (a) of the Theorem, is necessary for the Cohen-Macaulay property of R(X,D) (cf.(0.3.1)). On the other hand, the existence of a *Weil* divisor F with the property above, assumed in (b) as well as the Cartier property of F, is necessary for the Gorenstein property of $R(X,D)$ with even $a(R(X,D))$, as we show in the Lemma (§1). Therefore, by the theorem of Demazure [1,(3.5)], the Theorem implies:

Corollary. *Ler* X *be a normal projective variety of dimension* N *over an algebraically closed field* k.

(a) *Suppose that* X *is Gorenstein. Let* a *be a positive odd integer. Then* X *is isomorphic to* $\mathrm{Proj}(R)$ *for a Gorenstein normal graded* k*-algebra* R *with* $a(R) = a$ *if and only if* $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ *for* $0 < i < \dim X$.

(b) *Suppose that* X *is a Cohen-Macaulay locally factorial scheme. Let* a *be a positive even integer. Then* X *is isomorphic to* $\mathrm{Proj}(R)$ *for a Gorenstein normal graded* k*-algebra* R *with* $a(R) = a$ *if and only if*

(b1) $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ *for* $0 < i < \dim X$, *and*

(b2) *there exists a divisor* F *on* X, *with* $H^i(X, \mathcal{O}_X(F)) = 0$ *for* $0 < i < \dim X$, *such that* $2F$ *is linearly equivalent to the canonical divisor* K_X.

Our exposition proceeds as follows: First we make a remark on the necessary condition for X to have an ample $\mathbb{Q}$-divisor D such that $R(X,D)$ is a Gorenstein with even $a(R(X,D))$ (§1). We next discuss the condition for a $\mathbb{Q}$-Gorenstein projective variety X to have an ample $\mathbb{Q}$-divisor D with $R(X,D)$ quasi-Gorenstein (§2). Using this, we prove the theorem (§3). Although the Gorenstein property of X plays an essential role in our proof, it seems likely that the assumption is somewhat redundant for our purpose.

In §4, we shall give some examples of X, to which we cannot apply our theorem, having an ample $\mathbb{Q}$-divisor D with R(X,D) Gorenstein.

I'm grateful to Professors, K.-i. Watanabe and M.Tomari for valuable discussions and encouragement.

§ 0. Notation and preliminaries.

(0.1) Let k be an algebraically closed field. Let X be a normal projective variety over k, where a *variety* over a field F means an integral separated scheme of finite type over F. A $\mathbb{Q}$-*divisor* on X is a $\mathbb{Q}$-linear combination of prime divisors on X. $\mathbb{Q}$-divisors D_1, D_2 are *linearly equivalent*, denoted by $D_1 \sim D_2$, if $D_1 - D_2$ is a principal divisor on X. A $\mathbb{Q}$-divisor D is a $\mathbb{Q}$-*Cartier divisor* if some positive multiple rD is a Cartier divisor. A $\mathbb{Q}$-divisor D is *ample* if some positive multiple rD of D is an ample Cartier divisor in the usual sense. For a $\mathbb{Q}$-divisor $D = \sum_Y a_Y \cdot Y$ with Y running through the set of prime divisors on X, we define a divisorial sheaf $\mathcal{O}_X(D)$ by $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in K(X);\ v_Y(f) + a_Y \geq 0$ for all prime divisors Y on X with $Y \cap U \neq \phi\}$ for each open set U of X. Here K(X) is the rational function field of X and $v_Y(f)$ is the value of f along Y. Hence $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X([D])$, where $[D] := \sum_Y [a_Y] \cdot Y$, i.e. the integral part of D.

(0.2) A canonical divisor K_X on X is a Weil divisor such that

$\mathcal{O}_{X_{reg}}(K_X|_{X_{reg}}) = \Omega_{X_{reg}}^{\dim X}$, where X_{reg} is the nonsingular locus of X and $K_X|_{X_{reg}}$ is the restriction of K_X onto X_{reg}. The divisorial sheaf $\mathcal{O}_X(K_X)$ is called the canonical sheaf and is denoted by ω_X. Recall that X is a *Gorenstein* scheme if X is Cohen-Macaulay and if the canonical sheaf ω_X is locally free. Similarly, we say that X is a $\mathbb{Q}$-*Gorenstein* scheme if the canonical divisor K_X is a $\mathbb{Q}$-Cartier divisor.

(0.3) Given a normal projective variety X over k and an ample $\mathbb{Q}$-divisor D on X, we define a graded k-algebra R(X,D) to be

$$R(X,D) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} H^0(X,\mathcal{O}_X(nD))T^n \subset K(X)[T],$$

where T is an indeterminate. Hence, it is easy to check that R(X,D) is integrally closed in K(X)(T). Since rD is an ample Cartier divisor for some $r \in \mathbb{N}$, X is isomorphic to Proj R(X,D). Concerning the Cohen-Macaulay property and the Gorenstein property of the graded ring R(X,D), we refer the reader to [7]. (See also [2]). The facts we need are the following:

(0.3.1)([7,(2.4)]) R(X,D) is Cohen-Macaulay if and only if $H^i(X,\mathcal{O}_X(nD)) = 0$ for $0 < i < \dim X$ and for every $n \in \mathbb{Z}$.

(0.3.2)([7,(2.9) and (2.10)]) Recall that a Noetherian ring R with the canonical module K_R is *quasi-Gorenstein* if the canonical module K_R is a locally free R-module. Suppose that $D = \sum_Y (p_Y/q_Y)\cdot Y$ with Y running through the set of prime divisors on X, where p_Y, $q_Y \in \mathbb{Z}$, $q_Y > 0$ and $(p_Y,q_Y) = 1$ for each Y. Then R(X,D) is a quasi-Gorenstein ring if and only if there exist an integer a and a rational function f on X such that $K_X + D' - aD = \mathrm{div}_X(f)$, where $D' := \sum_Y \{(q_Y-1)/q_Y\}\cdot Y$ and $\mathrm{div}_X(f)$ is the divisor of f. Then the integer a coincides with the integer $a(R(X,D)) = -\min\{m \in \mathbb{Z};\ (K_{R(X,D)})_m \neq 0\}$. By definition, $R(X,D)$ is Gorenstein if and only if $R(X,D)$ is Cohen-Macaulay and quasi-Gorenstein.

§ 1. A remark on the necessary condition for X to have D such that R(X,D) is a Gorenstein ring with even a(R(X,D)).

In the following lemma, we do not assume that k is algebraically closed, since (0.3.1) and (0.3.2) is valid over a field k (cf.[7]).

Lemma. *Let* X *be a normal projective variety over a field* k, *and* D *be an ample* $\mathbb{Q}$*-divisor on* X. *Suppose that* $R(X,D)$ *is a quasi-Gorenstein ring with even* $a(R(X,D))$. *Then there exists a Weil divisor* F *on* X *such that* $2F$ *is linearly equivalent to the canonical divisor* K_X. *Furthermore, if* $R(X,D)$ *is Gorenstein, the Weil divisor* F *satisfies the condition that* $H^i(X,\mathcal{O}_X(F)) = 0$ *for* $0 < i < \dim X$.

Proof. By (0.3.2), we have $K_X+D'-aD = \mathrm{div}_X(f)$ for some $f \in K(X)$ and $a = a(R(X,D))$. Suppose that $K_X-\mathrm{div}_X(f) = \sum_Y b_Y\cdot Y$ with Y running through the prime divisors. Note that every b_Y is an integer. Looking at each coefficient of Y in $\{K_X-\mathrm{div}_X(f)\}+D' = aD$, we have $b_Y+\{(q_Y-1)/q_Y\} = a(p_Y/q_Y)$ and, therefore, $(b_Y+1)q_Y-1 = ap_Y$. Since a is even, b_Y is even. Set $c_Y := (b_Y/2) \in \mathbb{Z}$, and F

$:= \sum_Y c_Y \cdot Y$. Then $2F = K_X - \mathrm{div}(f)$ and $2F + D' = aD$. Since $[D'] = 0$ and F is a Weil divisor, we have $[(a/2)D] = F$. Hence, if $R(X,D)$ is Gorenstein and a is even, then $H^i(X, \mathcal{O}_X(F)) = H^i(X, \mathcal{O}_X((a/2)D)) = 0$ for $0 < i < \dim X$, by (0.3.1). q.e.d.

Examples. (1) Let $X = \mathbb{P}^n$ be an even-dimensional projective space over a field k. Then there exists no ample $\mathbb{Q}$-divisor D on X such that $R(X,D)$ is a quasi-Gorenstein ring with even $a(R(X,D))$.
(2) Let X be a smooth projective variety. Let $\pi: \tilde{X} \longrightarrow X$ be the blowing-up of X along a smooth subvariety of even-codimension $r \geq 2$. Then there exists no ample $\mathbb{Q}$-divisor D on $\tilde{X}$ such that $R(\tilde{X},D)$ is a quasi-Gorenstein ring with even $a(R(\tilde{X},D))$.

§ 2. A sufficient condition for X to have D with R(X,D) quasi-Gorenstein.

Proposition. *Let* X *be a* $\mathbb{Q}$*-Gorenstein normal projective variety of dimension* N *over an algebraically closed field* k.
(a) *For every positive odd integer* a, *there exists an ample* $\mathbb{Q}$*-divisor* D *on* X *such that* $R(X,D)$ *is a quasi-Gorenstein graded ring with* $a(R(X,D)) = a$.
(b) *Let* a *be a positive even integer. Then there exists an ample* $\mathbb{Q}$*-divisor* D *on* X *such that* $R(X,D)$ *is a quasi-Gorenstein graded ring with* $a(R(X,D)) = a$ *if and only if there exists a Weil divisor* F *such that* $2F$ *is linearly equivalent to the canonical divisor* K_X.

Proof. (a) Thanks to (0.3.2), we have only to find out an ample $\mathbb{Q}$-divisor D such that $K_X+D'-aD$ is linearly equivalent to 0. Let L be a very ample Cartier divisor on X such that K_X+L is an ample $\mathbb{Q}$-divisor and that $\mathcal{O}_X(K_X+L)|_U$ is a very ample invertible sheaf on U, where U is the open subset of X on which K_X is Cartier divisor. Since $U \supseteqq X_{reg}$ and X is normal, by Bertini's theorem ([8,p.30,Theorem I.6.3]), there exist prime divisors Y_1 and Y_2 on X such that $Y_1 \sim K_X+2L$ and $Y_2 \sim L$. In fact, let us define the prime divisor Y_1 as follows. By Bertini's theorem, there exist prime divisor $Z_1 \sim (K_X+2L)|_U$ on U. Define Y_1 to be the closure of Z_1 on X. Then $Y_1 \sim K_X+2L$. (Note that Weil divisors E_1 and E_2 on a normal variety X are linearly equivalent, if $E_1 \cap U \sim E_2 \cap U$ as divisors on $U \supseteqq X_{reg}$). Fix integers $p_i>0$, $q_i>4$ $(i=1,2)$ such that $2q_1-1 = ap_1$, $q_2+1 = ap_2$. Set $D := (p_1/q_1)Y_1-(p_2/q_2)Y_2$. Then D satisfies the required condition. Indeed, D is $\mathbb{Q}$-Cartier, since Y_1 and Y_2 are $\mathbb{Q}$-Cartier divisors. Since D is numerically equivalent to $(p_1/q_1)(K_X+L) + \{(p_1/q_1)-(p_2/q_2)\}L$ and since K_X+L and L are ample, if $(p_1/q_1) > 0$ and $(p_1/q_1) - (p_2/q_2) > 0$, then D is ample. But we have $(p_1/q_1) = (2/a) - (1/aq_1) > 7/4a > 0$, and $(p_1/q_1) - (p_2/q_2) = (1/a) - (1/aq_1) - (1/aq_2) > 1/2a > 0$, as required. On the other hand, we note that $D' = \{(q_1-1)/q_1\}Y_1 + \{(q_2-1)/q_2\}Y_2$ and that $K_X \sim Y_1-2Y_2$. Hence we have $K_X+D'-aD \sim (1/q_1)(2q_1-1-ap_1)Y_1 + (1/q_2)(-q_2-1+ap_2)Y_2 = 0$.

(b) The "only if" part has already shown in the Lemma. To prove the "if" part, as in the proof of (a), we have only to find out an ample $\mathbb{Q}$-divisor D such that $K_X+D'-aD \sim 0$. Let L be a very

ample Cartier divisor on X such that F+L is an ample $\mathbb{Q}$-divisor and that $\mathcal{O}_X(F+L)|_V$ is a very ample invertible sheaf on V, where V is the open subset of X on which F is Cartier divisor. Let Y_1, Y_2, and Y_3 be prime divisors such that $Y_1, Y_2 \sim F+2L$ with $Y_1 \neq Y_2$ and $Y_3 \sim 2L$. Fix integers $s>0$, $p_i>0$, $q_i>4$ $(i=1,2,3)$ such that $(2s+3)q_1-1 = ap_1$, $(2s-1)q_2+1 = ap_2$, and $q_3+1 = ap_3$. (Since a is even, it is easily seen that such integers actually exist). Set $D := (p_1/q_1)Y_1 - (p_2/q_2)Y_2 - (p_3/q_3)Y_3$. Then D is $\mathbb{Q}$-Cartier. Since D is numerically equivalent to the $\mathbb{Q}$-divisor $\{(p_1/q_1)-(p_2/q_2)\}(F+L) + \{(p_1/q_1)-(p_2/q_2)-2(p_3/q_3)\}L$ and since $F+L$ and L are ample, if $(p_1/q_1) - (p_2/q_2) > 0$ and $(p_1/q_1) - (p_2/q_2) - 2(p_3/q_3) > 0$, then D is ample. But we have $(p_1/q_1)-(p_2/q_2) = \{(2s+3)/a - 1/aq_1\} - \{(2s-1)/a + 1/aq_2\} > 7/2a$, and, $(p_1/q_1) - (p_2/q_2) - 2(p_3/q_3) > 7/2a - 2\{1/a + 1/aq_3\} > 1/a$, as required. On the other hand, since $D' = \{(q_1-1)/q_1\}Y_1 + \{(q_2-1)/q_2\}Y_2 + \{(q_3-1)/q_3\}Y_3$ and $K_X \sim (2s+2)Y_1 - 2sY_2 - 2Y_3$, we have $K_X+D'-aD \sim$
$(1/q_1)\{(2s+3)q_1-1-aq_1\}Y_1 + (1/q_2)\{(-2s+1)q_2-1+ap_2\}Y_3 +$
$(1/q_3)\{-q_3-1+aq_3\}Y_3 = 0.$ q.e.d.

§ 3. Proof of the Theorem.

(a) We proceed in two steps. Note that the assumption, that K_X is Cartier and that X is Cohen-Macaulay, is required in the Step I.

Step I. There exists a very ample Cartier divisor L on X such that $L+K_X$ is very ample and that $H^i(X,\mathcal{O}_X(xL+yK_X)) = 0$ for $0 < i < N$ and for $(x,y) \in S := \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2; 2x\geq y\geq 0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2; 1\geq y\geq 2x+1\}$.

Proof. Since X is projective, there exists a very ample invertible sheaf $\mathcal{H}$ such that $\mathcal{H} \otimes \omega_X$ is very ample (e.g.[4,p.169,Exercise 7.5]). Let $\mathcal{E}$ be the vector bundle $(\mathcal{H} \otimes \omega_X)\oplus\mathcal{H}$ of rank 2 over X. Since $\mathcal{H} \otimes \omega_X$ and $\mathcal{H}$ are ample, the tautological line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ on $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ is ample ([3, Prop.2.2]). Here, by $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, we mean the projective space bundle defined by $\mathbf{Proj}(\mathrm{Symm}(\mathcal{E}))$. Then it follows from Serre's vanishing theorem (e.g.[4,p.229, Prop.5.3]) that there exists an integer $t\geq 2$ such that $H^i(\mathbb{P}(\mathcal{E}),\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(tx)) = 0$ for all integers $i > 0$ and $x > 0$. On the other hand, by well-known facts about the projective space bundles (e.g.[4,p.253,Exercise 8.4]), we have

$$\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(d)) = \mathrm{Symm}^d(\mathcal{E}) \qquad \text{for every integer } d \geq 0, \text{ and}$$

$$R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(d)) = 0 \qquad \text{for every integer } d \geq -1,$$

where π is the structure morphism $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow X$ and $\mathrm{Symm}^d(\mathcal{E})$ denotes the d-th symmetric product of $\mathcal{E}$. Therefore, by a degenerate case of the Leray spectral sequence, we have

$$\begin{aligned} H^i(\mathbb{P}(\mathcal{E}),\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(d)) &= H^i(X,\mathrm{Symm}^d(\mathcal{E})) \\ &= \oplus_{y=0}^{d} H^i(X,\mathcal{H}^{\otimes d}\otimes \omega_X^{\otimes y}) \text{ for all } d \geq 0 \text{ and } i \geq 0. \end{aligned}$$

Thus, for all integers $x > 0$, $0 \leq y \leq xt$, and $i > 0$, we have $H^i(X,\mathcal{H}^{\otimes xt}\otimes \omega_X^{\otimes y}) = 0$. For our purpose, let L be a Cartier divisor with $\mathcal{O}_X(L) \simeq \mathcal{H}^{\otimes t}$. Then L satisfies the required condition, since $H^i(X,\mathcal{O}_X) = 0$ for $0 < i < N$ by the assumption and since $H^i(X,\mathcal{O}_X(xL+yK_X)) \simeq H^{N-i}(X,\mathcal{O}_X(-xL-(y-1)K_X)^*$ for each $i > 0$ and any integers x,y by Serre duality (e.g.[4,p.224,Cor.7.7]). q.e.d.

Step II. Let L be the very ample Cartier divisor in the Step I. Hence K_X+L is a very ample Cartier divisor on X. Set D as in the proof of Proposition (a). Then D is an ample $\mathbb{Q}$-divisor such that R(X,D) is a Gorenstein ring with a(r(X,D)) = a.

Proof. It is shown that in the proof of Proposition (a) that D is an ample $\mathbb{Q}$-divisor on X such that R(X,D) is a quasi-Gorenstein with a(R(X,D)) = a. Now we show that R(X,D) is a Cohen-Macaulay ring. By (0.3.1), we have to show that, for all $n \in \mathbb{Z}$,

$$(*) \qquad H^i(X, \mathcal{O}_X(nD)) = 0 \quad \text{for} \quad 0 < i < N.$$

(Hence, if $N \leq 1$, then there is nothing to prove). For n = 0, (*) is included in our assumption.

Let us show (*) when n>0. Set $k_1(n) := [(p_1/q_1)n]$ and $k_2(n) := \lceil (p_2/q_2)n \rceil$, where $\lceil z \rceil := -[-z]$, i.e. the round up of a real number z. Since $\mathcal{O}_X(nD) = \mathcal{O}_X([nD]) = \mathcal{O}_X(k_1(n)Y_1 - k_2(n)Y_2) = \mathcal{O}_X((2k_1(n)-k_2(n))L + k_1(n)K_X)$, thanks to the Step I, we have only to check that $(2k_1(n)-k_2(n), k_1(n)) \in S$. First note that $(p_1/q_1)n \geq k_1(n) > (p_1/q_1)n-1$ and $(p_2/q_2)n \leq k_2(n) < (p_2/q_2)n+1$, and therefore, $(2/a)n > k_1(n) > (7/4a)n-1$ and $(1/a)n < k_2(n) < (5/4a)n+1$. Hence we have $2\{2k_1(n)-k_2(n)\}-k_1(n) = 3k_1(n)-2k_2(n) > 3\{(7/4a)n-1\}-2\{(5/4a)n+1\} = (11/4a)n-5$. If $n \geq 2a$, then $2\{2k_1(n)-k_2(n)\} \geq k_1(n) \geq 0$. For $0 < n < 2a$, by the above inequalities on $k_1(n)$ and $k_2(n)$, we have $0 \leq k_1(n) < 4$ and $1 \leq k_2(n) < (5/4a)2a+1 = 7/2$. Therefore $(2k_1(n)-k_2(n), k_1(n)) \in S$ for each $0 < n < 2a$.

Finally, let us show (*) when $n = -m < 0$. Set $h_1(m) := \lceil (p_1/q_1)m \rceil$ and $h_2(m) := [(p_2/q_2)m]$. Since $\mathcal{O}_X(nD) =$

$\mathcal{O}_X((-2h_1(m)+h_2(m))L-h_1(m)K_X)$ and Step I, we have only to check that $(-2h_1(m)+h_2(m),-h_1(m)) \in S$ for each $n = -m < 0$. Since $(7/4a)m < h_1(m) < (2/a)m+1$ and $(5/4a)m > h_2(m) > (1/a)m-1$, it is easily checked that $-h_1(m)-2\{-2h_1(m)+h_2(m)\} > (11/4a)m$ and that $h_1(m)>0$. Hence $0 \geq -h_1(m) \geq 2\{-2h_1(m)+h_2(m)\}+1$ for each $n = -m < 0$, as required. q.e.d.

(b) As in (a), we proceed in two steps.

Step I. There exists a very ample Cartier divisor L on X such that F+L is very ample and that $H^i(X,\mathcal{O}_X(xL+yF))=0$ for $0 < i < N$ and for $(x,y) \in T := \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2; 2x\geq y\geq 0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2; 2\geq y\geq 2x+2\} \cup \{(0,1)\}$.

Proof. The assertion follows from the same proof as that in the Step I of (a), if we replace K_X by F. q.e.d.

Step II. Let L be the very ample Cartier divisor in the Step I. Hence F+L is a very ample Cartier divisor on X. Set D as in the proof of Proposition (b). Then D is an ample $\mathbb{Q}$-divisor such that R(X,D) is a Gorenstein ring with a(R(X,D)) = a.

Proof. It is shown that in the proof of Proposition (b) that D is an ample $\mathbb{Q}$-divisor on X such that R(X,D) is a quasi-Gorenstein with a(R(X,D)) = a. Now we show that R(X,D) is a Cohen-Macaulay ring. By (0.3.1), we have to show that, for all $n \in \mathbb{Z}$,

$$(**) \qquad H^i(X,\mathcal{O}_X(nD)) = 0 \quad \text{for} \quad 0 < i < N.$$

(Hence, if $N\leq 1$, then there is nothing to prove). For $n = 0$, (**)

is the assumption.

Let us show (**) when $n > 0$. Set $k_1(n) := [(p_1/q_1)n]$, $k_2(n) := \lceil(p_2/q_2)n\rceil$ and $k_3(n) := \lceil(p_3/q_3)n\rceil$. Since Step I and $\mathcal{O}_X(nD) = \mathcal{O}_X(k_1(n)Y_1-k_2(n)Y_2-k_3(n)Y_3) = \mathcal{O}_X(2\{k_1(n)-k_2(n)-k_3(n)\}L + \{k_1(n)-k_2(n)\}F)$, we have only to check that $(2\{k_1(n)-k_2(n)-k_3(n)\},k_1(n)-k_2(n)) \in T$ for each $n > 0$. First note that $\{(2s+3)/a\}n > k_1(n) > \{(8s+11)/4a\}n-1$, $\{(2s-1)/a\}n < k_2(n) < \{(8s-3)/4a\}n+1$, and $(1/a)n < k_3(n) < (5/4a)n+1$. It is easily checked that $(4/a)n > k_1(n)-k_2(n) > (7/2a)n-2$, and, $4\{k_1(n)-k_2(n)-k_3(n)\}-\{k_1(n)-k_2(n)\} = 3\{k_1(n)-k_2(n)\}-4k_3(n) > (11/2a)n-10$. If $n \geq 2a$, then $2\{2(k_1(n)-k_2(n)-k_3(n))\} \geq k_1(n)-k_2(n) \geq 0$. For $0 < n \leq a$ we have $-1 \leq k_1(n)-k_2(n) \leq 3$ and $1 \leq k_3(n) \leq 2$, and, therefore, $(2\{k_1(n)-k_2(n)-k_3(n)\},k_1(n)-k_2(n)) \in T$. Similarly, for $a < n \leq 2a$, we have $2 \leq k_1(n)-k_2(n) \leq 7$ and $2 \leq k_3(n) \leq 3$. But in this case, it does not occure that $(2\{k_1(n)-k_2(n)-k_3(n)\},k_1(n)-k_2(n)) = (0,3)$. In fact, if $k_1(n)-k_2(n) = 3$, by the above inequalities on $k_1(n)-k_2(n)$, we have $(3/4)a < n < (10/7)a$, and, therefore, $k_3(n) = 2$. This is contradiction. Hence $(2\{k_1(n)-k_2(n)-k_3(n)\},k_1(n)-k_2(n)) \in T$ for each $a < n \leq 2a$.

Finally, let us show (**) when $n = -m < 0$. Set $h_1(m) := \lceil(p_1/q_1)m\rceil$, $h_2(m) := [(p_2/q_2)m]$, and $h_3(m) := [(p_3/q_3)m]$. Then $\mathcal{O}_X(nD) = \mathcal{O}_X(2\{-h_1(m)+h_2(m)+h_3(m)\}L+\{-h_1(m)+h_2(m)\}F)$. On the other hand, it is easily seen that $h_1(m)-h_2(m)-2h_3(m) > (1/a)m$ and that $h_1(m)-h_2(m) > (7/2a)m$. Hence $(2\{-h_1(m)+h_2(m)+h_3(m)\},-h_1(m)+h_2(m)) \in \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2;0\geq y\geq x,x\in 2\mathbb{Z}\} \subset T$, as required. q.e.d.

§ 4. Remark and example.

We want to determine the necessary and sufficient condition for a normal projective variety X to have an ample $\mathbb{Q}$-divisor D with R(X,D) Gorenstein.

The most deficiency of our results is that the normal projective variety X is required to be Gorenstein. It seems likely that this assumption is somewhat redundant for our purpose. (Of course, we should assume that X is Cohen-Macaulay, since the Cohen-Macaulay property of R(X,D) implies that X is a Cohen-Macaulay scheme). In fact, the Gorenstein property of R(X,D) does not necessarily imply that X is Gorenstein or even $\mathbb{Q}$-Gorenstein. For example, it is proved by the author [5,(2.6)] that every projective torus embedding X has an ample $\mathbb{Q}$-divisor D on X such that R(X,D) is a Gorenstein ring with a(R(X,D))=-1. Note that a projective torus embedding is not necessarily Gorenstein nor $\mathbb{Q}$-Gorenstein.

On the other hand, it seems likely that the condition required in (b) of the Theorem, that is, F is a Cartier divisor, is also unnecessary for our purpose.

Indeed, we have:

Example. Concerning the torus embeddings, we refer the reader to [6]. Let T be a 2-dimensional algebraic torus defined over an algebraically closed field k and $N \simeq \mathbb{Z}^2$ be the group of one-parameter subgroups of T with $\{n_1, n_2\}$ as a $\mathbb{Z}$-basis. Let Δ be the complete fan generated by one-dimensional cones $\rho_1 := \mathbb{R}_{\geq 0}n_1$,

$\rho_2 := \mathbb{R}_{\geq 0}(n_1+2n_2)$, $\rho_3 := \mathbb{R}_{\geq 0}n_2$, $\rho_4 := \mathbb{R}_{\geq 0}(-n_1)$, and, $\rho_5 := \mathbb{R}_{\geq 0}(-n_2)$, where $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$. Let X be the projective torus embedding $T_N\mathrm{emb}(\Delta)$ associated with the complete fan Δ. Let V_i (i = 1,...,5) be the prime divisors, stable under the torus action, associated with the one-dimensional cones ρ_i. The canonical divisor $K_X = -(V_1+V_2+V_3+V_4+V_5)$ is linearly equivalent to $-2(V_2+V_3+V_4)$. Set $F := -(V_2+V_3+V_4)$. Since $H^1(X,\mathcal{O}_X) = 0$ and $V_2+V_3+V_4 = -F$ is connected and reduced as a subscheme of X, we have $H^1(X,\mathcal{O}_X(F)) = 0$. Since F is a $\mathbb{Q}$-Cartier divisor but is *not* a Cartier divisor, we cannot apply our theorem to this case. Nevertheless, for a positive even integer a, there exists an ample $\mathbb{Q}$-divisor D such that R(X,D) is a Gorenstein ring with $a(R(X,D)) = a$.

Indeed, the assumption that F is a Cartier divisor is required only in the Step I of the proof of the Theorem. Thus, keeping notation as in (b) of Proposition and Theorem, we have only to prove that there exists a very ample Cartier divisor L such that $\mathcal{O}_X(F+L)|_V$ is a very ample line bundle on V and that $H^1(X,\mathcal{O}_X(xL+yF))=0$ for $(x,y) \in T$. Then the same proof of Step II is still valid in this case. Let L be a very ample Cartier divisor such that F+(1/2)L is an ample $\mathbb{Q}$-divisor and that $\mathcal{O}_X(F+L)|_V$ is a very ample line bundle. Then, for each pair of integers x,y with $x > 0$ and $y \leq 2x$, yF+xL is an ample $\mathbb{Q}$-divisor stable under the torus action. In fact, since $yF+xL = y(F+(1/2)L)+(x-(y/2))L$, it is ample for $x > 0$ and $0 \leq y \leq 2x$. On the other hand, since -2F is generated by its global sections and $yF+xL = xL+(-y)(-F)$, it is also ample for $x > 0$ and $y < 0$. By [5, Cor.1.6], we have $H^1(X,\mathcal{O}_X(xL+yF)) = 0$ and

$H^1(X, \mathcal{O}_X(-xL-yF)) = 0$ for $x > 0$ and $y \le 2x$, as required.

References

1. M.Demazure, Anneaux gradués normaux, *in* "Introduction à la théorie des singularités II, Méthodes algébriques et géométriques," (Lê Dũng Tráng ed.), Travaux en cours **37**, Hermann, Paris, 1988.
2. S. Goto and K.-i.Watanabe, On graded rings,I, *J.Math.Soc. Japan* **30** (1978), 179-213.
3. R.Hartshorne, Ample vector bundles, *Publ.Math.IHES*, **29** (1966), 63-94.
4. R.Hartshorne, "Algebraic Geometry," Graduate Texts in Math., Vol.52, Springer, Berlin/New York, 1977.
5. A.Noma, Gorenstein toric singularities and convex polytopes, preprint.
6. T.Oda, "Convex Bodies and Algebraic Geometry," Ergeb. Math. Grenzgeb.(3), vol.15, Springer, Berlin/New York, 1988.
7. K.-i.Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, *Nagoya J. Math.* **83** (1981), 203-211.
8. O.Zariski, "Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces," Publ. Math. Soc. Japan, **4** (1958).

Hypertranscendental elements of a formal power-series ring of positive characteristic

Kayoko Shikishima-Tsuji
(京大教養非常勤)

Masashi Katsura
(京都産業大学理学部)

§0. Introduction

Throughout this paper, we denote by $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$ and $\boldsymbol{R}$ the set of all natural numbers containing 0, the set of all rational numbers, and the set of all real numbers, respectively.

Let K be a fixed field of positive characteristic p and K_a an algebraic closure of K. We denote by $K[[X]]$ the formal power-series ring and by $d = (d_\mu \,;\, \mu \in N)$ the formal derivation of $K[[X]]$, i.e., for every $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in K[[X]]$, the μ-th derivative $d_\mu A$ of A is defined by

$$d_\mu A = \sum_{i=\mu}^{\infty} \binom{i}{\mu} a_i X^{i-\mu}.$$

For differential rings and differential fields of positive characteristic, see Okugawa [4].

This paper contains three theorems. Let A be an element $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ of $K[[X]]$. We say that A is *hypertranscendental* over K, if, for every $\mu \in N$, $A, d_1A, \cdots, d_\mu A$ are algebraically independent over $K(X)$. When the characteristic of the field is zero, the existence of hypertranscendental elements is well-known (see D. Hilbert [1], O. Hölder [2], F. Kuiper [3]). Theorem 1 shows the existence of hypertranscendental elements in case of positive characteristic.

Let L be a differential field and S a subset of a differential extension field of L. We say that S is *differentially independent* over L or all the elements of S are *differentially independent* over L, if, for every $\mu \in N$ and elements $s_1, \cdots, s_\mu$ of S, there are no nonzero differential polynomial $F(X_1, \cdots, X_\mu) \in L\{X_1, \cdots, X_\mu\}$ such that $F(s_1, \cdots, s_\mu) = 0$.

Theorem 2 states that there are infinitely many hypertranscendental elements in $K[[X]]$ over K which are differentially independent over K.

If an element A of $K[[X]]$ is differentially quasi-algebraic over K (see K. Shikishima-Tsuji [5]), then

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \operatorname{tr} \deg \{d_\mu A \,;\, \mu < s\}/K(X) = 0.$$

If A is hypertranscendental over K, then

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \operatorname{tr} \deg \{d_\mu A \,;\, \mu < s\}/K(X) = 1.$$

Let A be hypertranscendental over K. It can be easily shown that, for every $0 < r < p$, the formal power series $B = d_{p-r}A$ satisfies the equation

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \operatorname{tr} \deg \{d_\mu B \,;\, \mu < s\}/K(X) = \frac{r}{p}.$$

For every $\alpha \in R$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, there exists a formal power series B_α of $K[[X]]$ such that

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \operatorname{tr} \deg \{d_\mu B_\alpha \,;\, \mu < s\}/K(X) = \alpha.$$

This is Theorem 3.

§1.

For $m, n \in N$, the binomial coefficient $\binom{m}{n}$ equals $\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ in case $m \geq n$, otherwise zero.

Lemma 1. Let $m, n \in N$. If $m = \sum_{i=0}^{e} m_i p^i$ and $n = \sum_{i=0}^{e} n_i p^i$ are the p-adic expressions of m and n respectively, then

$$(1) \quad \binom{m}{n} \equiv \binom{m_0}{n_0} \cdots \binom{m_e}{n_e} \pmod{p}.$$

Proof. By expanding both sides of the identity over the prime field of characterictic p:

$$(1 + x)^m = (1 + x)^{m_0} (1 + x^p)^{m_1} (1 + x^{p^2})^{m_2} \cdots (1 + x^{p^e})^{m_e},$$

and comparing the coefficients of x^n, we obtain the congruence (1).

q.e.d.

Lemma 2. Let m, n, e, t be natural numbers. For $t < p^e$, we have the following statements:

(1) If $m \equiv n \pmod{p^e}$, then $\binom{m}{t} \equiv \binom{n}{t} \pmod{p}$.

(2) If $m \equiv r \pmod{p^e}$ and $0 \le r \le t-1$, then $\binom{m}{t} \equiv 0 \pmod{p}$.

(3) if $m \equiv t \pmod{p^e}$, then $\binom{m}{t} \equiv 1 \pmod{p}$.

Proof. (1) Let $m = \sum_{i=0}^{\alpha} m_i p^i$, $n = \sum_{i=0}^{\alpha} n_i p^i$ and $t = \sum_{i=0}^{\alpha} t_i p^i$ be the p-adic expressions of m and n respectively. Since $m \equiv n$ (mod p^e), we have $m_0 = n_0, \cdots, m_{e-1} = n_{e-1}$. Lemma 1 implies that

$$\binom{m}{t} \equiv \binom{m_0}{t_0} \cdots \binom{m_{e-1}}{t_{e-1}} \binom{m_e}{0} \cdots \binom{m_\alpha}{0}$$

$$\equiv \binom{n_0}{t_0} \cdots \binom{n_{e-1}}{t_{e-1}} \binom{n_e}{0} \cdots \binom{n_\alpha}{0} \equiv \binom{n}{t} \qquad \pmod{p}.$$

(2) Since $r \le t-1$, we have $\binom{r}{t} = 0$. By (1), we have

$$\binom{m}{t} \equiv \binom{r}{t} \qquad \pmod{p}$$

$$= 0.$$

(3) By (1), we have

$$\binom{m}{t} \equiv \binom{t}{t} \qquad \pmod{p}$$

$$= 1.$$

q.e.d.

Let B be a formal power series of $K[[X]]$. We denote the leading degree of B by $\mathrm{v}(B)$ (i.e., if $B = \sum_{i=r}^{\infty} b_i X^i$ and $b_r \ne 0$, then $\mathrm{v}(B) = r$ and if $B = 0$, then $\mathrm{v}(B) = \infty$).

Theorem 1. Let A be an element $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^{m_i}$ of $K[[X]]$ with nonzero $a_i \in K$ $(i \in N)$ and $m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$ be natural numbers. If A satisfies the following condition, then A is hypertranscendental over K.

For any $e, s \in N$, there exist natural numbers $i_0 < i_1 < i_2 < \cdots$ such that

$$(1) \qquad m_{i_j} \equiv s \pmod{p^e} \qquad \text{and} \qquad \lim_{j \to \infty} \frac{m_{i_j}}{m_{i_j - 1}} = \infty.$$

Proof. Suppose A is not hypertranscendental over K_a. Then, there is a positive integer μ such that $A, d_1 A, \cdots, d_\mu A$ are algebraically dependent over $K_a(X)$, that is, there exists a non-zero polynomial $F(X, Y_0, \cdots, Y_\mu) \in K_a[X, Y_0, \cdots, Y_\mu]$ which satisfies the following two conditions:

(2) $F(X, A, d_1 A, \cdots, d_\mu A) = 0.$

(3) If $G(X, Y_0, \cdots, Y_\mu)$ is non-zero polynomial such that $G(X, A, d_1 A, \cdots, d_\mu A) = 0$, then the total degree of G is not smaller than that of F.

We see that F is irreducible by the condition (3).

Let c_1 and c_2 be the degrees of F on X and on $Y_0, \cdots, Y_\mu$, respectively. We take a natural number e such that $\mu < p^e$. By the assumption (1), there exist $k_0, k_1, \cdots, k_\mu \in N$ such that the following conditions hold for every s $(0 \le s \le \mu)$;

(4) $m_{k_s - 1} \ge c_1 + \mu,$

(5) $m_{k_s} > (c_2 + 1) m_{k_s - 1},$

(6) $\quad m_{k_s} \equiv s \pmod{p^e}$, and,

(7) $\quad m_{k_s} > \mathrm{v}(\frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, A, d_1A, \cdots, d_\mu A)) + 2\mu$, for every t $(0 \le t \le \mu)$ such that $\frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, A, d_1A, \cdots, d_\mu A) \neq 0$.

Let

$$G_s = \sum_{i=0}^{k_s-1} a_i X^{m_i} \text{ and } B_s = \sum_{i=k_s}^{\infty} a_i X^{m_i} \qquad (0 \le s \le \mu).$$

By Taylor's expansion, we have

$$0 = F(X, A, d_1A, \cdots, d_\mu A)$$

$$= F(X, G_s, d_1G_s, \cdots, d_\mu G_s) + \sum_{t=0}^{\mu} d_t B_s \frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, A, d_1A, \cdots, d_\mu A) - E_s$$

where E_s is a sum of terms of degree ≥ 2 in $\{B_s, d_1B_s, \cdots, d_\mu B_s\}$. We have

$$\deg F(X, G_s, d_1G_s, \cdots, d_\mu G_s) \le c_1 + c_2 m_{k_s-1},$$

$$\mathrm{v}(d_t B_s \frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, A, d_1A, \cdots, d_\mu A)) \ge \mathrm{v}(d_t B_s) \ge m_{k_s} - t,$$

and

(8) $$\mathrm{v}(E_s) \ge \min_{0 \le t_1, t_2 \le \mu} \{\mathrm{v}(d_{t_1} B_s d_{t_2} B_s)\} \ge 2(m_{k_s} - \mu).$$

Hence, by (4) and (5), we have

$$\mathrm{v}(\sum_{t=0}^{\mu} d_t B_s \frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, A, d_1A, \cdots, d_\mu A) - E_s)$$

$$\ge m_{k_s} - \mu > (c_2 + 1) m_{k_s-1} - \mu$$

$$\geq c_2 m_{k_s-1} + c_1 \geq \deg F(X, G_s, d_1 G_s, \cdots, d_\mu G_s).$$

Therefore, $F(X, G_s, d_1 G_s, \cdots, d_\mu G_s) = 0$ and

$$(9) \quad \sum_{t=0}^{\mu} d_t B_s \frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, A, d_1 A, \cdots, d_\mu A) = E_s \qquad (s = 0, 1, \cdots, \mu).$$

Let

$$W = \det \begin{pmatrix} B_0 & d_1 B_0 & \cdots & d_\mu B_0 \\ & \cdots & \cdots & \\ B_\mu & d_1 B_\mu & \cdots & d_\mu B_\mu \end{pmatrix},$$

and

$$V_t = \det \begin{pmatrix} B_0 & d_1 B_0 & \cdots & d_{t-1} B_0 & E_0 & d_{t+1} B_0 & \cdots & d_\mu B_0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ B_\mu & d_1 B_\mu & \cdots & d_{t-1} B_\mu & E_\mu & d_{t+1} B_\mu & \cdots & d_\mu B_\mu \end{pmatrix}.$$

On the other hand, $d_t B_s = \sum_{i=k_s}^{\infty} \binom{m_i}{t} a_i X^{m_i - t}$, and by (6) and Lemma 2,

$$\binom{m_{k_s}}{s} = 1, \ \binom{m_{k_s}}{s+1} = \cdots = \binom{m_{k_s}}{\mu} = 0.$$

Hence, the coefficient of the leading form of the power series W is $a_{k_0} \cdots a_{k_\mu}$ and $v(W) = m_{k_0} + \cdots + m_{k_\mu} - \frac{\mu(\mu+1)}{2}$. Therefore, $W \neq 0$. By Cramer's rule, (9) implies

$$(10) \qquad W \frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, A, d_1 A, \cdots, d_\mu A) = V_t.$$

We have

$$v(V_t) \geq \min_{0 \leq s \leq \mu} \{(m_{k_0} + \cdots + m_{k_\mu} - \frac{\mu(\mu+1)}{2}) - (m_{k_s} - t) + v(E_s)\}$$

$$\geq v(W) + \min_{0 \leq s \leq \mu} \{v(E_s) - m_{k_s}\}.$$

If $\frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, A, d_1A, \cdots, d_\mu A) \neq 0$, then by (7), (8) and (10), we have

$$v(\frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, A, d_1A, \cdots, d_\mu A)) = v(V_t) - v(W)$$

$$\geq \min_{0 \leq s \leq \mu} \{v(E_s) - m_{k_s}\}$$

$$\geq \min_{0 \leq s \leq \mu} \{m_{k_s} - 2\mu\} > v(\frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, A, d_1A, \cdots, d_\mu A)),$$

which is a contradiction. Therefore, we have

$$\frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, A, d_1A, \cdots, d_\mu A) = 0 \quad (0 \leq t \leq \mu).$$

By the assumption (3), we have

$$\frac{\partial F}{\partial Y_t}(X, Y_0, \cdots, Y_\mu) = 0 \qquad (0 \leq t \leq \mu).$$

Since F is irreducible, it follows that $F(X, Y_0, \cdots, Y_\mu) \in K_a[X, Y_0^p, \cdots, Y_\mu^p]$ and there exist $F_0, \cdots, F_{p-1} \in K_a[X^p, Y_0^p, \cdots, Y_\mu^p]$ such that

$$F(X, Y_0, \cdots, Y_\mu) = F_0(X, Y_0, \cdots, Y_\mu) + XF_1(X, Y_0, \cdots, Y_\mu) + \cdots + X^{p-1}F_{p-1}(X, Y_0, \cdots, Y_\mu).$$

Since $F(X, d_1A, \cdots, d_\mu A) = 0$ and $F_i(X, d_1A, \cdots, d_\mu A) \in K_a[[X^p]]$ $(i = 0, \cdots, p-1)$, we have

$$F_i(X, d_1A, \cdots, d_\mu A) = 0 \qquad (i = 0, \cdots, p-1).$$

Since K_a is perfect, there exist $G_0, \cdots, G_{p-1} \in K_a[X, Y_0, \cdots, Y_\mu]$ such that

$$F_i(X, Y_0, \cdots, Y_\mu) = (G_i(X, Y_0, \cdots, Y_\mu))^p \quad (i = 0, \cdots, p-1).$$

Since $G_i(X, d_1A, \cdots, d_\mu A) = 0 \quad (i = 0, \cdots, p-1)$, (3) implies that

$$G_i(X, Y_0, \cdots, Y_\mu) = 0 \quad (i = 0, \cdots, p-1).$$

It follows that $F(X, Y_0, \cdots, Y_\mu) = 0$. This is a contradiction.

q.e.d.

By this theorem, the power series

$$\sum_{i=0}^{\infty} X^{p^{i^2}+i}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} X^{i^ip+i} \quad \text{and} \quad \sum_{i=0}^{\infty} X^{i!+i}$$

are hypertranscendental.

§2.

Let $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ be a formal power series of $K[[X]]$. For $e \in N$ and $k \in \{0, 1, \cdots, p^e - 1\}$ we denote the power series $\sum_{i=0}^{\infty} a_{k+ip^e} X^{ip^e}$ by $A_k^{(e)}$. Then, $A_0^{(e)}, \cdots, A_{p^e-1}^{(e)}$ are elements of $K[[X^{p^e}]]$ and we have

$$A = A_0^{(e)} + XA_1^{(e)} + \cdots + X^{p^e-1} A_{p^e-1}^{(e)}.$$

Theorem 2. Let $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ be hypertranscendental. For each t $(t = 1, \cdots, p-1)$ and $s \in N - \{0\}$, let

$$B_{s,t} = (A_{tp^{s-1}}^{(s)})^{p^{-s}} = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{tp^{s-1}+ip^s})^{p^{-s}} X^i.$$

Then, $\{B_{s,t}\ ;\ s \in N - \{0\},\ t = 1, \cdots, p-1\}$ are differentially independent over $K_a(X)$.

Remark. Let $m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$ be a sequence of natural numbers satisfying the condition (1) of Theorem 1. The power series $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ where $a_i = 1$ if i equals some m_j $(j \in N)$, otherwise 0, is hypertranscendental over K by Theorem 1. Therefore, by Theorem 2, $B_{s,t} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{tp^{s-1}+ip^s} X^i$ $(s \in N - \{0\},\ t = 1, \cdots, p-1)$ are differentially independent over $K(X)$.

Proof of Theorem 2. By $\overset{(s-1)}{A_0} = \sum_{t=0}^{p-1} X^{tp^{s-1}} \overset{(s)}{A}_{tp^{s-1}}$, we have

$$A = \overset{(e)}{A_0} + \sum_{s=1}^{e} \sum_{t=1}^{p-1} X^{tp^{s-1}} \overset{(s)}{A}_{tp^{s-1}}\ .$$

Hence, for $1 \leq \mu \leq p^e - 1$,

$$d_\mu A = d_\mu \overset{(e)}{A_0} + \sum_{s=1}^{e} \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{\nu_1+\nu_2=\mu} d_{\nu_1} X^{tp^{s-1}} d_{\nu_2} \overset{(s)}{A}_{tp^{s-1}}.$$

For every u, $d_\nu \overset{(r)}{A_u} \neq 0$ implies $p^r | \nu$. Then, $d_\mu A \in K(X, d_{\nu p^s} \overset{(s)}{A}_{tp^{s-1}}\ ;\ s = 1, 2, \cdots, e,\ t = 1, 2, \cdots, p-1,\ \nu = 0, 1, \cdots, p^{e-s} - 1)$. Hence,

$$\begin{aligned} &K(X, d_\mu A\ ;\ \mu = 1, 2, \cdots, p^e - 1) \\ &\subseteq K(X, d_{\nu p^s} \overset{(s)}{A}_{tp^{s-1}}\ ;\ s = 1, 2, \cdots, e,\ t = 1, 2, \cdots, p-1,\ \nu = 0, 1, \cdots, p^{e-s} - 1). \end{aligned}$$

Since A is hypertranscendental,

$$\text{tr deg}\ \{d_{\nu p^s} \overset{(s)}{A}_{tp^{s-1}}\ ;\ s = 1, 2, \cdots, e,\ t = 1, 2, \cdots, p-1,\ \nu = 1, 2, \cdots, p^{e-s} - 1\}/K_a(X) \geq \text{tr deg}\ \{d_\mu A\ ;\ \mu = 1, 2, \cdots, p^e - 1\}/K_a(X) = p^e - 1.$$

However, the cardinality of the set $\{(s, t, v) \,;\, s = 1, 2, \cdots, e, t = 1, 2, \cdots, p-1, v = 0, 1, \cdots, p^{e-s}-1\}$ is $(p-1)(p^{e-1}+p^{e-2}+\cdots+p+1) = p^e - 1$. Hence, $\{d_{vp^s}A^{(s)}_{tp^{s-1}} \,;\, s = 1, 2, \cdots, e, t = 1, 2, \cdots, p-1, v = 0, 1, \cdots, p^{e-s}-1\}$ are algebraically independent over $K_a(X)$. Since, $d_{vp^s}A^{(s)}_{tp^{s-1}} = d_{vp^s}(B_{s,t})^{p^s} = (d_v B_{s,t})^{p^s}$, we see that

$$\{d_v B_{s,t} \,;\, s = 1, 2, \cdots, e, t = 1, 2, \cdots, p-1, v = 0, 1, \cdots, p^{e-s}-1\}$$

are algebraically independent over $K_a(X)$. Thus, we have the conclusion.

q.e.d.

§3.

For $k \in N$, we associate the real number $«k»$ as follows: If

$$k = k_0 + k_1 p + \cdots + k_{e-1}p^{e-1} \qquad (0 \leq k_i \leq p-1)$$

is the p-adic expression, then

$$«k» = \frac{k_0}{p} + \frac{k_1}{p^2} + \cdots + \frac{k_{e-1}}{p^e}.$$

For a set S, the cardinal number of S is denoted by $\#S$.

Lemma 3. Let $\alpha \in R$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Then,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\#\{\lambda \in N \,;\, \lambda \leq s-1, «\lambda» \leq \alpha\} = \alpha \qquad (s \in N).$$

Proof. Let $\alpha = \dfrac{\alpha_0}{p} + \dfrac{\alpha_1}{p^2} + \cdots$ be the p-adic expression of α, where there is no n such that $\alpha_n = \alpha_{n+1} = \cdots = p-1$. We fix a natural number s and associate $e = e(s) \in N$ with s by $p^{e-1} \leq s < p^e$. The set $\{\lambda \in N\,;\, \lambda \leq s-1,\ «\lambda» \leq \dfrac{\alpha_0}{p} + \cdots + \dfrac{\alpha_{e-1}}{p^e}\}$ is the disjoint union of the following sets:

$$T_{ij} = \{\lambda_0 + \lambda_1 p + \cdots + \lambda_{e-1}p^{e-1}\,;\, \lambda_0 = \alpha_0,\ \lambda_1 = \alpha_1, \cdots, \lambda_{i-1} = \alpha_{i-1},$$
$$\lambda_i = j,\ \lambda < s-1\}$$
$$(i = 0, 1, \cdots, e-1, j = 0, 1, \cdots, \alpha_i - 1).$$

Let $s = s_0 + s_1 p + \cdots + s_{e-1}p^{e-1}$ be the p-adic expressions of s. If $\alpha_0 + \alpha_1 p + \cdots + \alpha_{i-1}p^{i-1} + jp^{i-1} < s_0 + s_1 p + \cdots + s_i p^i$, then

$$\#T_{ij} = s_{i+1} + s_{i+2}p + \cdots + s_{e-1}p^{e-i-1}.$$

If $\alpha_0 + \alpha_1 p + \cdots + \alpha_{i-1}p^{i-1} + jp^{i-1} \geq s_0 + s_1 p + \cdots + s_i p^i$, then

$$\#T_{ij} = s_{i+1} + s_{i+2}p + \cdots + s_{e-1}p^{e-i-1} - 1.$$

In any case, we have

$$\frac{s}{p^{e+1}} - 1 \leq \#T_{ij} \leq \frac{s}{p^{e+1}}.$$

It follows that

$$s(\alpha - \frac{1}{p^{e(s)}}) - (p-1)e(s)$$
$$\leq s(\frac{\alpha_0}{p} + \frac{\alpha_1}{p^2} + \cdots + \frac{\alpha_{e-1}}{p^e}) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{e-1})$$
$$= \alpha_0(\frac{s}{p} - 1) + \alpha_1(\frac{s}{p^2} - 1) + \alpha_{e-1}(\frac{s}{p^e} - 1)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{e-1}\sum_{i=0}^{\alpha_i-1} \#T_{ij}$$

$$\leq \#\{k \in N \mid k \leq s-1, \text{«}k\text{»} < \frac{\alpha_0}{p} + \frac{\alpha_1}{p^2} + \cdots + \frac{\alpha_{e-1}}{p^e}\}$$

$$\leq \#\{k \in N \mid k \leq s-1, \text{«}k\text{»} \leq \alpha\}$$

$$\leq \#\{k \in N \mid k \leq s-1, \text{«}k\text{»} < \frac{\alpha_0}{p} + \frac{\alpha_1}{p^2} + \cdots + \frac{\alpha_{e-1}}{p^e}\} + 1$$

$$\leq \sum_{i=0}^{e-1}\sum_{i=0}^{\alpha_i-1} \#T_{ij} + 1$$

$$\leq \alpha_0\frac{s}{p} + \alpha_1\frac{s}{p^2} + \alpha_{e-1}\frac{s}{p^e} + 1$$

$$= s(\frac{\alpha_0}{p} + \frac{\alpha_1}{p^2} + \cdots + \frac{\alpha_{e-1}}{p^e}) + 1$$

$$\leq s\alpha + 1.$$

Since $\lim_{s\to\infty} (\alpha - \frac{1}{p^{e(s)}} - \frac{(p-1)e(s)}{s}) = \lim_{s\to\infty}(\alpha + \frac{1}{s}) = \alpha,$ we have the conclusion.

q.e.d.

Lemma 4. A power series A is hypertranscendental over K if and only if $\{A_0^{(e)}, \cdots, A_{p^e-1}^{(e)}\}$ is algebraically independent over $K(X)$ for every $e \in N$.

Proof. It is easy to see that if $\mu < p^e - 1$, then

$$d_\mu A_k^{(e)} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{k+ip^e} X^{ip^e} = 0$$

for $k \in \{0, 1, \cdots, \mu\}$. Since $A = A_0^{(e)} + XA_1^{(e)} + \cdots + X^{p^e-1}A_{p^e-1}^{(e)}$, the vector space spanned by $A, Xd_1A, \cdots, X^{p^e-1}d_{p^e-1}A$ over K coincides with the vector space spanned by $A_0^{(e)}, XA_1^{(e)}, \cdots, X^{p^e-1}A_{p^e-1}^{(e)}$ over K.

q.e.d.

Theorem 3. For any $\alpha \in \boldsymbol{R}$ $(0 \le \alpha \le 1)$, there exists a formal power series B of $K[[X]]$ such that

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \text{ tr deg } \{B, d_1B, \cdots, d_{s-1}B\}/K(X) = \alpha \qquad (s \in N).$$

Proof. Let $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ be hypertranscendental. We consider the formal power series $B = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i a_i X^i$ with $\varepsilon_i = 0$ if «i» $> \alpha$ and $\varepsilon_i = 1$ if «i» $\le \alpha$. Let $\alpha = \dfrac{\alpha_0}{p} + \dfrac{\alpha_1}{p^2} + \cdots$ be the p-adic expression of α, where there is no n such that $\alpha_n = \alpha_{n+1} = \cdots = p - 1$. We fix a natural number s and associate

$$e = e(s) \in N \quad \text{by } p^{e-1} \le s < p^e,$$

$$t = \alpha_0 + \alpha_1 p + \cdots + \alpha_{e-1} p^{e-1}$$

and

$$\beta = «t» = \frac{t_0}{p} + \frac{t_1}{p^2} + \cdots + \frac{t_{e-1}}{p^e}.$$

For every $k \in N$ such that «k» $> \alpha$ and every $i \in N$, we have «$ip^e + k$» $\ge$ «k» $> \alpha$. By the definition of B, we have

$$B_k^{(e)} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{i+kp^e} a_{i+kp^e} X^{ip^e} = 0.$$

Therefore,

(1) if «k» $> \alpha$ then $B_k^{(e)} = 0$.

For each $j \in N$ $(j < p^e)$, either «k» > «j» or else «j» > α. In the formar case, we have $\binom{j}{k} = 0$ by Lemma 1. In the latter case, we have $B^{(e)}_k = 0$ by (1). Hence we have

$$d_k B = \sum_{j=k}^{p^e-1} \binom{j}{k} B^{(e)}_j X^{j-k} = 0.$$

Therefore,

(2) if «k» > α then $d_k B = 0$.

It follows that

$$K(X, B, d_1 B, d_2 B, \cdots, d_{s-1} B) = K(X)(d_k B \; ; k \le s-1, «k» \le \alpha).$$

Hence

(3) $\text{tr deg } \{B, d_1 B, d_2 B, \cdots, d_{s-1} B\}/K(X)$

$\le \#\{k \in N \; ; k \le s-1, «k» \le \alpha\}$.

For every $k \in N$ such that «k» < β and every $i \in N$, we have «$ip^e + k$» < «k» + $\dfrac{1}{p^e} \le \alpha$. By the definition of B, we have

$$B^{(e)}_k = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{i+kp^e} a_{i+kp^e} X^i p^e = A^{(e)}_k.$$

Therefore,

(4) if «k» < β then $B^{(e)}_k = A^{(e)}_k$.

For any $k \in N$ with $k < p^e$ and «k» < β it follows from (2) and (4) that

$$d_k B = A^{(e)}_k + \binom{t}{k} B^{(e)}_t X^{t-k} + \sum \binom{i}{k} A^{(e)}_i X^{i-k}$$

where the summation ranges over all i with $k < i < p^e$, «i» $< \beta$.

Therefore,

$$K(X, B_t^{(e)})(d_k B\ ;\ k \le s-1,\ k \ne t)(A_i^{(e)}\ ;\ s \le i < p^e,\ «i» < \beta)$$

$$= K(X, B_t^{(e)})(A_k^{(e)}\ ;\ k < p^e,\ «k» < \beta).$$

Since $\{A_k^{(e)}\ ;\ 0 \le k < p^e,\ «k» < \beta\}$ is algebraically independent over $K(X)$ by Lemma 4, we have

$$\mathrm{tr\ deg}\ \{B, d_1B, d_2B, \cdots, d_{s-1}B\}/K(X)$$

$$\ge \mathrm{tr\ deg}\ \{d_kB \mid k \le s-1,\ k \ne t\}/K(X, B_t^{(e)})$$

$$\ge \#\{k \in N\ ;\ k \le s-1,\ «k» < \beta\} - 1.$$

Since $\{k \in N\ ;\ k \le s-1,\ «k» < \beta\} = \{k \in N\ ;\ k \le s-1,\ «k» \le \alpha\} - \{t\}$, we have

$$\text{(5)}\quad \mathrm{tr\ deg}\ \{B, d_1B, d_2B, \cdots, d_{s-1}B\}/K(X)$$

$$\ge \#\{k \in N\ ;\ k \le s-1,\ «k» \le \alpha\} - 2.$$

Now the conclusion follows from (3), (5) and Lemma 3.

q.e.d.

The problem treated in this paper has been derived from a subject suggested by Professor Hideyuki Matsumura, for whom the authors are grateful.

References

[1] D. Hilbert, Mathematische Probleme, C.R. du 2. congrès international des math., Paris 1902.

[2] O. Hölder, Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen, Math. Ann. **28** (1886), 1-13

[3] F. Kuiper, On algebraic independence in differential rings, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Ser. A**67**(1964), 90-103.

[4] K. Okugawa, "Differential Algebra of Nonzero Characteristic", Lectures in Mathematics, Department of Math. Kyoto Univ., **16**, 1987.

[5] K. Shikishima-Tsuji, Differentially quasi-algebraic extension of positive characteristic p, J. Math. Kyoto Univ., **31-1**, *in press*.

代数的微分について

京大教養　　鈴木　敏

ここで、2 種類の問題を提起したい。おのおのは、過去の、この可換環論シンポジウムのいずれかで 話をした内容に含まれている筈であるが、ここで、私の主張する問題が、そのときは、他の一般論の内に埋没され、問題として印象づけて居なかったと思うこと、およびこのシンポジウムにおけるメムバーが過去 2 回に比べ、随分若返って居り、過去の私の話を聞いていないことを考慮にいれて、ここに改めて問題を提起する次第である。

なお、最初に断っておくが、以下の話で、高階微分という言葉が出てくるときには、iterativitiy の条件は仮定しない。

完備局所環の係数環の間の同型の拡張

R を完備局所環、m を：その極大イデアル、κ をその剰余体つまり R/m とし、P, P' などを R の係数環達とする。

完備局所環の構造定理では次が知られる。

" 任意の P, P' に対して、

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr] & & P' \arrow[dl] \\ & \kappa & \end{tikzcd}$$

が可換図であるような同型 σ が存在する。ただし $P \to \kappa$ などは自然な準同型である。"

しかし、このような同型 σ が R の自己同型に拡張出来るかどうかについては一般論がない。

ここでは、「任意の σ が R の自己同型に拡張出来るための、R の特性を求めよ」と云う形で問題提起をしたい。

ただし、R が一般の 完備局所環と云うのでは問題が複雑になるであろうから、ひとまづ、R が正則局所環の場合に限ろう。しかしこのとき

R が等標数ならば P, P' は体であり R はそれらの上の巾級数環であるから、σ が R の自己同型に拡張可能なことは自明である。

だから、R が不等標数の場合が問題になる。このとき R の標数は 0 、κ の標数は $p \neq 0$ となる。

Krull 次元が 1 の場合、R は完備付値環であるが、この場合については文献

[1] S.SUZUKI, J.Nishimura,"*Higher differential algebras of discrete valuation rings*", J.Math. Kyoto Univ. 15-1(1975), pp.25-52, そのresearch annoucement, Bull. AMS 80-5(1974), pp.865-867

に於て次の結果、定理B が出ている。ただし、その前に、出発点となる、叙述の簡潔な 1 つの事実から述べる。ただし、これらの叙述に表われる記号の説明をするには、可成

り手間を必要とするので、それは後回しにする。

予備定理 1つの P に対して可換図 $\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\sigma} & P' \\ & \searrow \swarrow & \\ & \kappa & \end{array}$ を満たす同型 σ を与えること(ただし P' は σ に応じて変わりうる)と、高階微分 $\delta = \{\delta^0 = \mathrm{id}_P, \delta^1, \delta^2, \cdots\}$ で $\delta^1 c_\iota \in m$ かつ $\delta^i c_\iota = 0$, $i = 2, 3, \cdots, \iota \in \mathrm{I}$ なるものを与えることとは同値である。

略証 一般に、高階微分 δ に対して、$\sigma(x) = \Sigma\delta^i x$ は右辺が収束しさへすれば、高階微分の性質から準同型を与えることが分かる。逆に、σ が与えられたとき、可換図から $\sigma(x) - x \in m$ 。P の形が単純だから2つの同型が $\{c_\iota\}_{\iota \in \mathrm{I}}$ の上で一致すれば P 上で一致することは分かる。

定理B 完備付値環 R において、次の条件(1)～(5)は同値である。またこれらが成立するとき(6),(7)も成立する。

(1) 任意の n に対して $\Delta^n{}_P(u) \geqq 0$.

(2) 任意の n に対して $\Delta^n{}_P(u) \geqq 1$.

(3) 任意の $P \to P$ の高階微分 $\delta = \{\mathrm{id}_P, \delta^1, \delta^2, \cdots\}$ は $R \to R$ の高階微分 $\partial = \{\partial^0 = \mathrm{id}_R, \partial^1, \partial^2, \cdots\}$ に拡張出来る。

(4) 任意の $\kappa \to \kappa$ の高階微分は $R \to R$ の高階微分から導かれる。

(5) 自然な準同型 $(R \otimes_P A(R))^* \to A(R)^*$ 左可逆である。

(6) R の $(f'(u), f''(u)/2!, \cdots, f^{(n)}(u)/n!\ )$ なるイデアルは P 、u の選び方によらず一定である。

(7) P , P' に対し $\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\sigma} & P' \\ & \searrow \swarrow & \\ & \kappa & \end{array}$ が可換図であるような同型写像 σ は R の自己同型写像に拡張出来る。

先ず κ が完全体であったり、R がtamely ramified であったりする場合には容易に(1)～(5)の条件が満たされることが分かる。そこでKrull 次元が1と云う仮定を外して、すぐに次の一般化の問題が浮かぶ。ただしここで R がtamely ramified とは、R の商体の P の商体上での拡大次数が p と素になる場合のことである。

問題1 R が完備正則局所環で、その剰余体が完全体のとき任意の σ は R の自己同型に拡張できるか。

問題2 R がtamely ramified な完備付値環の上の巾級数環であるとき、任意の σ は R の自己同型に拡張できるか。

最後に、再び完備付値環の場合に限るが、

問題 3 定理B ですべての条件は同値ではないか。

問題3 が問題として成立するであろうと云う根拠は、同型の第 1 次近似とも云うべき 1 階微分に関して、ちゃんとした結論が出ているからである。それは、次の定理 A であるが、先ず文献を上げる。

S.SUZUKI, "*Differential modules and derivations of complete dicrete valuation rings*", J. Math. Kyoto univ. 9-3(1969), pp.425-437. その Corrections and supplements, J. Math. Kyoto Univ. 11-2(1971), pp.377-379.

S.SUZUKI, "*On Neggers' numbers of discrete valuation rings*", J. Math. Kyoto Univ. 11-2(1971), pp.373-375.

定理 A 完備付値環 R において、次の条件は同値である。

(1) ある P, u にたいし、 $\Delta_P(u) \geqq 1$ 。

(2) 任意の P , u の選び方をしても $\Delta_P(u) \geqq 1$ 。

(3) 任意の微分 $\partial : R \to R$ は微分 $\bar{\partial} : R/m \to R/m$ を導く。

(4) 任意の微分 $\bar{\partial} : R/m \to R/m$ はある微分 $\partial : R \to R$ により導かれる。

(5) 任意に選ばれた P, P' に対し $\Omega_{R/P}$ と $\Omega_{R/P'}$ とは自然な意味で同型である。

(6) R の $(f'(u))$ なるイデアルは P 、u の選び方によらず一定である。

記号、概念の説明をする。R が不等標数の完備付値環であるとき、P は p を素元とする完備付値環であり R は P より次のように生成される。R の 1 つの素元 u を取るとき $f(u)=0$ となる Eisenstein 多項式

$$f(X) = X^e + p(a_{e-1}X^{e-1} + \cdots + a_0) \qquad (p \nmid a_0)$$

があり $R \cong p(X)/(f(X))$.

$\{\bar{c}_\iota\}_{\iota \in I}$ を κ の κ^p 上での独立な基底、$\{c_\iota\}_{\iota \in I}$ を $\bar{c}_\iota$ 達の P での一組の代表元とする。

* で p-adic 或は m-adic 完備化を示すことにすれば 1 階の微分加群につき

$$\Omega_P^* \cong \{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i d_P c_{\iota(i)} \mid \alpha_i \in P, \lim_{i\to\infty}\alpha_i = 0, \iota(i) \in I\}$$

ここで $\{d_P c_\iota\}_{\iota \in I}$ は P 上 1 次独立である。また

$$\Omega_{R/P} \cong R\,dX / R(f'(X)dX)$$

$$\Omega_R^* \cong \left((R \otimes_P \Omega_P)^* \oplus R\,dX / R((d_P f)(u) + f'(u)dX)\right)^*$$

$(R \otimes_P \Omega_P)^*$ の中で $(d_P f)(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (1 \otimes d_P c_{\iota(i)})$ $(\beta_i \in R)$ と表されるが、ここで、便宜上次の記号で表される整数値を考える。

定義 (Neggers の数)

$$\Delta_P(u) = \min_i (v(\beta_i) - v(f'(u)))$$

この $\Delta_P(u)$ は所謂 invariant ではない、しかし非常に便利な道具として使われる。

R の (Kawahara や Berger の意味での) 高階微分代数を $A(R)$ で示し、n 階の canonical derivation を $d^n{}_R$ で示す。$A(R)$ は graded ring であるが、その n 階の部分加群を、$A^n(R)$ で示す。したがって $A^1(R) = \Omega_R$ である。P 等に関しても同様のものを定義する。$A(P)^*$ は $\{d^i{}_P c_\iota\}_{\iota \in I, i=1,2,\ldots}$ で生成される多項式環の完備化である。ただし $d^i{}_P c_\iota$ は重さ i と考える。

$(R \otimes_{P[X]} A(P[X]))^*$ の中で ($d^i{}_{P[x]} c_\iota$ 等を $d^i c_\iota$ 等と書き)

$$d^n f(X) = \sum_{j=1}^{e} (f^{(j)}(u)/j!) \sum_{i_1+\ldots+i_j=n,\ 1 \le i_1,\ldots,i_j} d^{i_1}X \ldots d^{i_j}X$$
$$+ pG_n(d^1X, d^2X, \cdots; \cdots, d^i c_\iota, \cdots)$$

と表される。 ただし G_n は d^iX 等と $d^i c_\iota$ 等の、重さ n の単項式 (ただし d^iX 等からのみなるものを含まない) の可算個のR 上の一次結合 (ただし係数は収束する) 。これより

$$(f'(u))^{2n-1} d^n{}_R u = F_n(\cdots, d^i c_\iota, \cdots)$$

と表される。ここに F_n は G_n のような $d^i c_\iota$ の可算個のR 上の一次結合。

定義 (拡張されたNeggers の数)

$$\Delta^n{}_P(u) = \min v(F_n \text{の係数}) - (2n-1)v(f'(u))$$

定理A での同値性を証明するのに、最も困難であった点は、 $\Delta_P(u) < 1$ のとき、より他のP' で $\Delta_P(u) \neq \Delta_{P'}(u)$ なるものを作りだす点にあった。これを真似て、問題3 の場合も (2) の条件を満たさないとき、他の P' をある n に関して $\Delta^n{}_P(u)$ が $\Delta^n{}_{P'}(u)$ と異なるものを作りだせばよいのだが、定理A の場合でもかなり手こづった

のでこの場合さらに難しいことと思う。手始めに階数２の高階微分でやってみても十分定理Ｂの拡張になり、非常に良い手掛かりとなるだろう。

超越拡大と微分

聞けばすぐ分かる問題

定理　K を標数０の体．$d: K \to K$ を微分とする．$z \in K$ は K 内で積分不可能（つまり $z \notin d(K)$）．L/K を体の拡大として d を $L \to L$ まで拡大出来るとする．このとき　$y \in L$ で　$dy = z$　となるものがあれば y は K 上超越的である．

（例．$z = 1/x \in Q(x)$．その積分 $\log x$ は $Q(x)$ 上超越的である．）

証明　y が K 上代数的なら $f(Y) = Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + a_{n-2}Y^{n-2} + \dots + a_0$ を y の K 上の最小多項式とする．

$$0 = d(f(y)) = f'(y)dy + da_{n-1}y^{n-1} + da_{n-2}y^{n-2} + \dots + d\,a_0$$
$$= (nz + da_{n-1})y^{n-1} + ((n-1)a_{n-1}z + da_{n-2})y^{n-2} + \dots + (ia_iz + da_{i-1})y^{i-1} + \dots .$$

$f(Y)$ の最小性より $nz + da_{n-1} = 0$．$z = d(-a_{n-1}/n)$ となり矛盾．

標数 p まで拡張（不思議に過去の文献にない）

定理　K を標数 $p\,(\neq 0)$ の体．$d: K \to K$ を微分とする．$z \in K$ は K 内で積分不可能（つまり $z \notin d(K)$）．L を K の代数的拡大体として d を $L \to L$ まで拡張出来るとする．k を d の定数体とする（つまり $k = \{x \in K \mid dx = 0\}$）．このとき　$y \in L$ で $dy = z$ となるものがあれば y は k 上非分離的である．そして $k(y)$ と K は k 上 linearly disjoint である．

証明　上の定理と同じ記号を用いる．次の主張を backwards induction で証明する．但し $a_n = 1$ とする．<u>すべての $i = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して $da_i = 0$．且つ $p \nmid i$ なら $a_i = 0$．</u>

$i = n$ のとき $p \nmid i$ とすると前と同様 $z \in d(K)$ となり矛盾．故に $p \mid i$．勿論 $da_n = d1 = 0$．$i > 0$ まで正しいとする．$ia_iz + da_{i-1} = 0$ より，$p \mid i$ なら直ちに $da_{i-1} = 0$．$p \nmid i$ のとき，仮定より $a_i = 0$．故に $da_{i-1} = 0$．$i-1 = 0$ なら，$p \mid 0$ でそれで終わり．$i-1 > 0$ ならもう一度 $(i-1)a_{i-1}z + da_{i-2} = 0$ を考え $p \nmid i-1$ なら $a_{i-1} \neq 0$ とすると，$a_{i-1} \in k$ だから $z = d(-a_{i-2}/(i-1)a_{i-1}) \in d(K)$ で矛盾．故に $a_{i-1} = 0$．

以上より

$$f(Y) = Y^{hp} + a_{(h-1)p}Y^{(h-1)p} + a_{(h-2)p}Y^{(h-2)p} + \dots + a_0$$

で $a_{ip} \in k$ となりすべての主張を得る．

高階微分に拡張　標数 $p\,(\neq 0)$ の場合 1 階の微分だけを考えても余り有用ではないから以上を高階微分の議論に拡張したい。　以下すべて文献は

S.Suzuki "*On extensions of higher derivations for algebraic extensions of fields of positive characteristics*" J.Math. Kyoto Univ., pp.29-1(1989), 105-117

によるが、少し記号の説明をする。K を標数 $p\,(\neq 0)$ の体. $d = \{\, d_0=\mathrm{id.}\,,\, d_1\,,\, d_2\,, \ldots\ldots \}$ を $K \to K$ の高階微分とする. L を K の拡大体として d は $L \to L$ まで拡張出来るとする. $K_i = \{\, x\in K \mid d_1x = d_2x = \ldots = d_ix = 0 \}$, $L_i = \{\, x\in L \mid d_1x = d_2x = \ldots = d_ix = 0 \}$. $E: L \to L[[T]]$ は $E(x) = x + (d_1x)T + (d_2x)T^2 + \ldots + (d_ix)T^i + \ldots\ldots$ で定まる単射同型（テイラー展開）とする.

以下スタンダードな議論を用いて、次の予備定理が得られる。

予備定理　L は K の代数的拡大体とする.　$i\,,t$ は自然数で $i < p^t$ とする。このとき次が成り立つ.

(1) $L_i \supset L^{p^t}$.

(2) K と L_i は K_i 上 linearly disjoint.

(3) L_i と $K(L^{p^t})$ は $K_i(L^{p^t})$ 上 linearly disjoint.

(4) $L_i \cap K(L^{p^t}) = K_i(L^{p^t})$.

(5) $L_i \cdot d_i(K) \cap K = d_i(K)$.

この結果、次の定理を得る。

定理　L は K の代数的拡大体とする.　$z \notin d_i(K)$ とする.　このとき $y \in L$ で $d_iy = z$ なるものがあれば, 次が成り立つ.

(1) y は K 上非分離的.

(2) 正の整数 t で $z^{p^t} \in d_{ip^t}(K)$ なるものが存在する.

(3) y の K 上の非分離指数は (2) を満足する t の最小数に等しいかそれより大きい.

証明　q を y の K 上の非分離指数とする.　$i < p^s$ と仮定する.　y^{p^q} は K 上分離的であるから $y^{p^q} \in K(y^{p^{q+s}}) \subset K(L^{p^{q+s}})$.　$ip^q < p^{s+q}$ であるから, 予備定理

の(1) により

$L^{p^{q+s}} \subset L_{ip^q}$ である. 故に $z^{p^q} = (d_i(y))^{p^q} = d_{ip^q}(y^{p^q}) =$

$d_{ip^q}(y^{p^q}) \in d_{ip^q}(K(L^{p^{q+s}})) \subset d_{ip^q}(K(L_{ip^q})) = L_{ip^q} d_{ip^q}(K)$ 故に予備定理の(5)

により $z^{p^q} \in K \cap L_{ip^q} d_{ip^q}(K) = d_{ip^q}(K)$. 故に(2) が成り立つ q の選び方から(3) も正しい もし y が K 上分離的なら $q = 0$ となり $z \in d_i(K)$ となって仮定に反する.

この結果、標数が $p \neq 0$ の場合、超越元が微分的に（或は積分的に）どの様に特徴付けられるかの疑問が沸いてくる。いささか乱暴かも知れないが、

問題 定理において、L は代数的拡大であると云う仮定を外す。このとき(2) が成立しなければ y は K 上超越的であるか。

さらに標数0 の場合、$1/x$ の積分として $\log x$ なる超越元が得られるが、その逆関数として e^x が巾級数の範囲で得られるが、このことのアナロジーは、一体標数 $p \neq 0$ の場合どのようなものであろうか。

正則局所環における完備イデアルについて

広島工大　　佐久间元敬

よく知られているように，2次元正則局所環では完備イデアル（整閉イデアル）の積は又完備であり，任意の完備イデアルは単純な完備イデアルの巾積として一意的に表現出来る．（O. Zariski）．しかしながら次元が3又はそれ以上の正則局所環についてはどういった理論が成立つのか決定的な結果はない。3次元の場合，上記の完備イデアルについての性質が成立しない反例が何れも存在する。

最近Lipmanは Higher dimension の場合，ある特殊な単純完備イデアルをとることによって，任意の"finitely supported"な完備イデアルはこれら特殊な完備イデアルの＊一積として，負の巾をとることを許すならば，一意的に表現出来ることを示し，2次元の場合はこれらの結果から導かれることに注意している．（[8]）．この小論ではこれらの結果の簡単な紹介をする。くわしくは原論文を参照されたい。

1° Kを体，$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ をKを商体とする正則局所環で $\dim \geqq 2$ なるものとする。こゝで次元は Krull dim. を表す。これらを "points" という。

点 α の極大イデアルを $\mathfrak{m}_\alpha$，$\mathfrak{m}_\alpha$ の中で入れた order valuation を ord_α で表す。

点 α の quadratic transf. とは次の形の局所環：$Q = \alpha[x^{-1}\mathfrak{m}_\alpha]_{\mathfrak{p}}$，こゝで $x \in \mathfrak{m}_\alpha, \notin \mathfrak{m}_\alpha^2$，$\mathfrak{p}$ は $\alpha[x^{-1}\mathfrak{m}_\alpha]$ の素イデアルで $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}_\alpha$. Qは必然的に正則で，かつ

$$\text{tr. deg. } Q/\mathfrak{m}_Q \text{ over } \alpha/\mathfrak{m}_\alpha = \dim \alpha - \dim Q$$

が成り立つ。

点 β が infinite near to α とは sequence $\alpha = \alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \cdots \subset \alpha_n = \beta$ で α_i は α_{i-1} の quad. transf.，となるものが存在すること。このとき $\beta \succ \alpha$ 又は $\alpha \prec \beta$ とかく。そのような sequ. は存在すれば一意的である。

$\dim \alpha = 2$ のとき $\alpha \subset \beta$ ならば β は inf. near to α である。（[1]）しかし $\dim \alpha > 2$ のときはこのことは成立しない。（[11]）.

$\alpha \prec \beta$ ならば ord_β は α の prime divisor（Kの valuation v で tr. deg R_v/M_v o. $\alpha/\mathfrak{m}_\alpha = \dim \alpha - 1$，discrete rank 1）であり，逆に，$\alpha$ の任意の prime divisor は ord_β $(\alpha \prec \beta)$ の形である。これから

<u>Th. 1.</u> $\{\alpha$ の inf. near pts $\} \longrightarrow \{\alpha$ の prime divisors $\}$, $(\beta \longrightarrow \mathrm{ord}_\beta)$ は bijection を与える.

2° I を α のイデアルとし, $\alpha < \beta$ なる β に対して I の transform I^β を次のように定義する。そのため一般に

$R \subset S \subset K$, R, S は共通の商体をもつ何れも U.F.D. とする。

R のイデアル $I \neq (0)$ に対して, x を I の elements の G.C.D. とする (I を含む R の単項イデアルの中 xR が最小のもの). $I^{-1} = \{z \in K \mid zI \subset R\}$ とすると $I^{-1} = x^{-1}R$ である。II^{-1} は R の次の性質をもつ unique ideal J である。

i) $J^{-1} = R$.

ii) $I = yJ$ for some elem. $y \in R$.

よって, すべての $\neq (0)$ イデアル I は次のようにかける。

$$I = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n} J \quad (a_i > 0), \ p_i \text{ は単項素イデアル},$$

J は $J^{-1} = R$. そこで I の transform I^S in S を

$$I^S = \mathfrak{q}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{q}_n^{a_n} (JS)(JS)^{-1} \quad \mathfrak{q}_i = p_i S_{p_i} \cap S$$

($S_{p_i} = S \otimes_R R_{p_i}$) と定義する. $I = p_i R$ のとき $I^S = \mathfrak{q}_i S$ となる。

<u>I^S の基本的性質.</u> $R \subset S \subset K$ は前のようにとる。

i) I が単項素イデアルのとき, $IS \cap R = I$ ならば I^S

も単項素イデアルであり $I^S \cap R = I$. $IS \cap R \neq I$ ならば $I^S = S$.

ii) $I^{-1} = R$ ならば $I^S = (IS)(IS)^{-1}$ (これから $(I^S)^{-1} = S$)

iii) $(I_1 I_2)^S = I_1^S I_2^S$

iv) $(I^S)^T = I^T$ ただし $R \subset S \subset T \subset K$

v) S が R の localization のときは $I^S = IS$.

vi) $I_2 \subset I_1 \subset \overline{I_2}$ (integral closure of I_2) ならば $I_2^S \subset I_1^S \subset \overline{I_2^S}$ ($= I_2^{\overline{S}}$ とかく) $I_2^{\overline{S}}$ を I_2 の complete transform という。

3° さて $\alpha < \beta$ (α の infinite near pt) とするとき, α, β は何れも U.F.D. だから α のイデアル I に対し I の transf. I^β が定まる ($I^\alpha = I$ とする)。

$I \neq (0)$ なる α のイデアルに対して I の point basis $B(I)$ とは non negative な整数の集り $\{\mathrm{ord}_\beta I^\beta \mid \beta > \alpha\}$ のこと。point β ($\beta > \alpha$) が I の base pt. であるとは $\mathrm{ord}_\beta I^\beta \neq 0$ (i.e. $I^\beta \neq \beta$) のときいう。このとき, 次式が成立つ。

i) $B(IJ) = B(I) + B(J)$

ii) $B(I) = B(J) \iff \overline{I} = \overline{J}$

$\beta > \alpha$ のとき ord_β の valuation ring を R_β とすると $\overline{I} = \bigcap_{\beta > \alpha} IR_\beta$ となる. よって

$$\overline{I} = \overline{J} \iff IR_\beta = JR_\beta \quad \text{for } {}^\forall \beta > \alpha$$

$$\Longleftrightarrow \ \mathrm{ord}_\beta I = \mathrm{ord}_\beta J \quad \left(\mathrm{ord}_\beta I = \min_{x \in I} \mathrm{ord}_\beta x \right)$$

よって ii) を示すには次が示されればよい。

$$\mathrm{ord}_\beta I = \mathrm{ord}_\beta J \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_\beta I^\beta = \mathrm{ord}_\beta J^\beta \ \text{for } {}^\forall \beta > \alpha .$$

これは次の Lemma による。

<u>Lemma</u> $\beta > \alpha$ とし $\alpha = \alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \cdots \subset \alpha_n = \beta$ を quad. sequ. とし，L を α の $\neq (0)$ イデアル，α_i の極大イデアルを m_i とするとき，$R_v \supset \beta$ なる任意の valuation v に対して

$$v(L) = v(L^{\alpha_n}) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{ord}_{\alpha_j}(L^{\alpha_j})\, v(m_j)$$

が成立つ。

α の non zero complete ideals に対して $*$-product を $I * J = \overline{IJ}$ (integ. closure of IJ) と定めると，α の non zero complete ideals の全体は $*$-product について，commutative semi-gr. with cancellation を作る．これを $\mathfrak{M}_\alpha$ とかく。即ち $*$-product は $I * J = I' * J \Rightarrow I = I'$ をみたす。

<u>Th. 2</u> 写像 $\mathfrak{M}_\alpha \longrightarrow \prod_{\beta > \alpha} \mathbb{N}_\beta$ を α の complete ideal $I \to B(I) = \{\mathrm{ord}_\beta I^\beta\}_{\beta > \alpha}$ によって定義するとこれは injective な homomorphism を与える。

4° Zariski の結果を Higher dimension の場合に拡張するには $\mathfrak{M}_\alpha$ を少し制限しなければならない。

$\mathfrak{o}$のイデアル I が finitely supported (f.s.) であるとは、$I \neq (0)$ で I の base pts が高々有限個であることと定める。(即ち、$\mathrm{ord}_\beta I^\beta \neq 0$ なる $\beta > \alpha$ は高々有限個である)。

α のイデアル I が f.s. ならば $^\forall \beta > \alpha$ に対して

i) I^β も f.s.

ii) β/I^β は Artin ring.

ii) については $\beta = \alpha$ のとき示せばよい。仮に $I \subset \mathfrak{p}$ for some non max. ideal $\mathfrak{p}$ とすると、$^\forall \gamma$, $\gamma > \alpha$, $\gamma \subset \alpha_{\mathfrak{p}}$ は I の base pt. となる。よって次のことを示せばよい。

<u>Lemma</u> $\mathfrak{p}$ を α の non max. ideal とする。このとき、

i) ある quad. trans. α_1 of α で $\alpha_1 \subset \alpha_{\mathfrak{p}}$ となるものがある。

ii) ある infinite sequ. $\alpha = \alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \cdots$ $(\subset \alpha_{\mathfrak{p}})$ で各 α_i は α_{i-1} の quad. transf. となっているものが存在する。

これからまた導かれることは、

iii) $\beta > \alpha$ なる β が α の f.s. なイデアルの base pt. であれば $\dim \alpha = \dim \beta$ である。

iv) α のイデアル I, J に対して $I * J$ が f.s $\Leftrightarrow$ I, J が f.s. である。

iii) は $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 \subset \cdots \subset \alpha_n = \beta$ として n に関する帰納法と

イデアルの transf. についての基本性質から導かれる。以上から次の定理がえられる。

<u>Th. 3</u>　$\mathfrak{M}_\alpha^f$ を f.s. complete ideals in α with $*$-product とし，$\mathcal{F}$ を free commutative s.g. $\prod_\beta N_\beta$ $(\beta > \alpha,\ \dim\alpha = \dim\beta)$ とする。このとき定理2の写像 $\mathfrak{M}_\alpha \longrightarrow \prod_{\beta>\alpha} N_\beta$ を $\mathfrak{M}_\alpha^f$ に制限すると $\mathfrak{M}_\alpha^f$ は $\mathcal{F}$ の sub. s.g. と同型である。

Zariski の結果（$\dim\alpha = 2$ のとき）は $\mathfrak{M}_\alpha^f$ 自身 free な commut. s.g. となる。

5° complete ideal I in α が $*$-simple であるとは，$I \neq (0)$ で $I = J * L$ なら $J = \alpha$ or $L = \alpha$ が成立つこととして定義する。次の定理は，ある特別な性質をもつ simple ideal の存在を示すもので Lipman の議論の本質的な部分をなす。

<u>Th. 4</u>　α, β を pair of points で $\dim\alpha = \dim\beta$ なるものとする。このとき次の性質をもつ，一意的に定まる complete ideal $p_{\alpha\beta}$ in α が存在する。

$$\forall \gamma > \alpha \text{ に対し} \begin{cases} \gamma < \beta \text{ ならば } p_{\alpha\beta}^{\gamma} \text{ は } *\text{-simple (ideal in } \gamma) \\ \text{そうでないとき } p_{\alpha\beta}^{\gamma} = \gamma \end{cases}$$

この証明はあとまわしにして，この定理から導かれることを先づ述べておく。

i)　γ が $p_{\alpha\beta}$ の base pt $\Leftrightarrow$ $\alpha < \gamma < \beta$　特に $p_{\alpha\beta}$ は f.s.

ii) $\alpha/\rho_{\alpha\beta}$ は Artinian

iii) $\rho_{\alpha\alpha}=m_\alpha$

iv) $\forall\gamma>\alpha$, $\dim\gamma=\dim\alpha \Rightarrow \rho_{\alpha\beta}^{\bar\gamma}=\rho_{\gamma\beta}$

i) については，γ が $\rho_{\alpha\beta}$ の base pt $\Leftrightarrow \mathrm{ord}_\gamma\rho_{\alpha\beta}^\gamma\neq 0$

$\Leftrightarrow \rho_{\alpha\beta}^\gamma\neq\gamma \Leftrightarrow \rho_{\alpha\beta}^{\bar\gamma}\neq\gamma \Leftrightarrow \alpha<\gamma<\beta.$

iii) については，$(m_\alpha)^{\bar\alpha}=m_\alpha$．また $\gamma>\alpha$, $\gamma\neq\alpha$ なら $m_\alpha^{\bar\gamma}=\gamma$ が示されるので一意性より $\rho_{\alpha\alpha}=m_\alpha$.

iv) は $\delta>\gamma$ のとき $(\rho_{\alpha\beta}^{\bar\gamma})^{\bar\delta}=\rho_{\gamma\beta}^{\bar\delta}$ となることと同様に一意性を使って導かれる。

さて定理4の証明であるが β が infinite near to α でないならば，即ち $\alpha \not< \beta$ ならば $\rho_{\alpha\beta}=\alpha$ が条件をみたす unique ideal であることが容易に示されるから，$\alpha<\beta$ のとき考えれば十分である。いま $\alpha=\alpha_0\subset\alpha_1\subset\cdots\subset\alpha_n=\beta$ を対応する quadratic sequ. として n に関する induction による。

$n=0$ のとき $\rho_{\alpha\alpha}=m_\alpha$ は先にみたように $\alpha<\gamma$ なる任意の γ について要求された条件をみたす。これ以外に α の ideal で条件をみたすものが存在せぬことは次の lemma による。($T=O_X$ とおく).

$n>0$ のとき帰納法の假定から $\rho_{\alpha_1\beta}$ は存在する。また $\gamma>\alpha$, $\gamma\neq\alpha$ ならば $\gamma>{}^\exists\delta$ (δ は α の quad. transf.) となる δ

があるから，α の $*$-simple, complete ideal I で $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$ のみたすべきものが存在することは次の條件と同値である。

$$I^{\overline{\alpha_1}} = \mathfrak{p}_{\alpha_1\beta}, \quad I^{\overline{\delta}} = \delta \text{ for } \forall \text{quad. transf. } \delta \text{ of } \alpha \ (\delta \neq \alpha_1)$$

さて α の極大イデアル $\mathfrak{m}_\alpha$ に対して graded ring $S = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}_\alpha^n$ を作り，$X = \mathrm{Proj}\, S$，$f: X \to \mathrm{Spec}\, \alpha$ とする。X は $\mathfrak{m}_\alpha$ の任意の base から定められる projective model, f は domination map. である。α の quad. transf. は $\mathcal{O}_{X,x}$, $x \in f^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha)$ の形である。今 $y \in f^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha)$ で $\mathcal{O}_{X,y} = \alpha_1$ なるものをとると $\alpha_1/\mathfrak{p}_{\alpha_1\beta}$ は Artin 環だから，ある unique な coherent $\mathcal{O}_X$-ideal $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\alpha,\beta)$ で y における stalk $\mathcal{T}_y = \mathfrak{p}_{\alpha_1\beta}$，$\forall x \neq y$ における stalk $\mathcal{T}_x = \mathcal{O}_{X,x}$ となるものがある。これから Th. 4 は次の lemma に帰着する。

<u>Lemma</u> $f: X \to \mathrm{Spec}\, \alpha$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\alpha$ を上のようにとる。$\mathcal{T}$ を coherent $\mathcal{O}_X$-ideal で各 stalk $\mathcal{T}_x$ は complete $\mathcal{O}_{X,x}$-ideal で $\mathcal{T}_x = \mathcal{O}_{X,x}$ if $x \notin f^{-1}(\mathfrak{m})$ 且つ $\mathcal{T} \not\subset \mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ なるものとする。このとき，次の性質をもつ unique $\mathfrak{m}$-primary complete ideal in α が存在する。

1) 任意の quad. transf. $\gamma = \mathcal{O}_{X,x}$ of α に対し，$I^{\overline{\gamma}} = \mathcal{T}_x$

2) any complete ideal $J \subset \mathfrak{m}$ s.t. $J^{\overline{\gamma}} = I^{\overline{\gamma}} = \mathcal{T}_x$ for $\forall \gamma = \mathcal{O}_{X,x}$ of α ならば $J = \mathfrak{m} * \cdots * \mathfrak{m} * I$.

更に $\mathcal{T}$ が $*$-simple ならば (i.e. $\mathcal{T} \neq \mathcal{O}_X$, $\mathcal{J}, \mathcal{L}$ を $\mathcal{O}_X$-ideal で

$^\forall x \in X$ に対し $T_x = \mathcal{J}_x * \mathcal{L}_x$ ならば $\mathcal{J} = O_X$ or $\mathcal{L} = O_X$) , I は $*$-simple である。

（証明の概要） O_X-ideal $\mathfrak{m}O_X$ は invertible だから， $^\forall$integer $n \geq 0$, $^\forall x \in X$ に対して $\mathfrak{m}^n T_x$ は complete. また $\mathfrak{m}O_X$ は very ample だから，ある integer $N > 0$ に対して O_X-ideal $\mathfrak{m}^N T$ は global section で生成される．([4], Th. 5. 17). よって $I_n = H^0(X, \mathfrak{m}^n T) = \bigcap_{x \in X} \mathfrak{m}^n T_x$ は α-ideal であって， $^\forall x \in X$ に対して $\mathfrak{m}^N T_x = I_N O_{X,x}$ となる。そこで integer r を次の性質をもつ最小の integer $n > 0$ と定める。 i.e. $^\forall x \in X$ に対して $\mathfrak{m}^n T_x$ = completion of $I_n O_{X,x}$. そこで $I = I_r$ とするとこれが Lemma の條件をみたす。くわしくは原論文を参照して下さい。

次の定理がこの論文の主定理である。任意の f.s. な完備イデアルは simple, complete な ideal の巾積として "負の巾指数" をとることを許すならば，一意的に書けることを主張する。特に2次元の場合にはこれらの巾指数はすべて non negative となる。

<u>Th. 5</u> I を f.s. なる complete ideal in α とする。このとき I に対してある unique family of integers $(n_\beta) = (n_\beta(I))_{\beta > \alpha}$, $\dim\beta = \dim\alpha$ s.t. $n_\beta = 0$ （ほとんどすべての β に対して）かつ

$$\left(\prod_{n_\beta<0}^{*} \rho_{\alpha\beta}^{-n_\beta}\right) * I = \prod_{n_\gamma>0}^{*} \rho_{\alpha\gamma}^{n_\gamma}$$

ここで $\rho_{\alpha\beta}$ は Th. 4 で定まる simple complete ideals であり $\prod^*$ は $*$-product を表す。

この Th. 5 は次の Theorem 5′ と同値であることは直ちにわかる。

<u>Th. 5′</u>　α を fix する。β を variable として β は $\beta > \alpha$, $\dim\beta = \dim\alpha$ を動くとする。さて

$\mathfrak{g}_\alpha^f = \{ \sum_\beta n_\beta \beta \mid n_\beta \in \mathbb{Z},\ \beta > \alpha,\ \dim\beta = \dim\alpha \}$

$\mathfrak{M}_\alpha^f =$ f. s. complete ideals in α with $*$-product

とするとき, Th. 3 の canonical map $\mathfrak{M}_\alpha^f \longrightarrow \mathfrak{F}_\alpha^f$ による $\rho_{\alpha\beta}$ の image は free group $\mathfrak{g}_\alpha^f$ の free base となる。

(証明)　$\Gamma = \{ \gamma \mid \gamma > \alpha,\ \dim\gamma = \dim\alpha \}$ とし, $\rho_{\alpha\beta}$ の上の写像による像を $\{\rho_{\alpha\beta,\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}$ とする。いま $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ を set of integers (ほとんどすべての γ に対し $g_\gamma = 0$) とするとき, ある unique family of integers $(h_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ (ほとんどすべての $h_\beta = 0$) があって $g_\gamma = \sum_{\beta\in\Gamma} h_\beta \rho_{\alpha\beta,\gamma}$ $(\gamma \in \Gamma)$ をみたすことが示されればよい。このような $(h_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ の存在は $\nu_g =$ number of γ s.t $g_\delta \neq 0$ for $^\exists\delta > \gamma$ とするとき, ν_g についての induction による。

最後に3次元の場合の例をあげる.

$$\alpha = k[[x, y, z]],\quad I = (x^3, y^3, z^3, xy, yz, zx)$$

に対して Th. 5 の結果は

$$(x, y, z) I = (x^2, y, z) \cdot (x, y^2, z)(x, y, z^2)$$

で，ここで $(x, y, z) = m_\alpha$ の exponent は (-1) である。

また complete ideal の (ordinary) product が complete でない例として，

(1) $R = k[x, y]_{(x,y)} \subset S = R[z]_{(m, z)}$

$I = (x^2 + y^3, m^4)$，$J = (y^3, m^4)$ から $I_1 = (I, z)$，$J_1 = (J, z)$ を作るとこれらは S の complete ideal であるが $I_1 J_1$ は complete でない。[6]

(2) $R = k[x, y, z]_{(x,y,z)}$，$m = (x, y, z)$ に対して $I = (x^2 + xy^2, z^4)$，$J = m^4$ は $\bar{I} = I$，$\bar{J} = J$．しかし $\overline{IJ} \neq IJ$．[6]

References

[1] S. S. Abhyankar, On the valuations centered in a local domain, Amer. J. Math **78** (1956), 321–348.

[2] S. D. Cutkosky, Factorization of complete ideals, J. Algebra 115, 144–149 (1988)

[3] H. Göhner, Semifactoriality and Muhly's condition (N) in two dimensional local rings, J. Algebra **34** (1975), 403–429.

[4] R. Hartshorne, "Algebraic Geometry," Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[5] M. A. Hoskin, Zero-dimensional valuation ideals associated with plane curve branches, Proc. London Math. Soc. (3) **6** (1956), 70–99.

[6] C. Huneke, The primary components of and integral closures of ideals in 3-dimensional regular local rings, Math. Ann. **275** (1986), 617–635.

[7] C. Huneke, J. Sally, Birational extensions in dimension two and integrally closed ideals, J. Algebra (to appear).

[8] J. Lipman, Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. no.36 (1969), 195–279.

[9] J. Lipman, *Complete Ideals in Regular Local Rings* Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of Masayoshi NAGATA pp. 203–231 (1987)

[10] D. Rees, Hilbert functions and pseudo-rational local rings of dimension two, J. London Math. Soc. (2) **24** (1981), 467–479.

[11] J. Sally, Regular overrings of regular local rings, Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972), 291–300.

[12] O. Zariski, Polynomial ideals defined by infinitely near base points, Amer. J. Math. **60** (1938), 151–204.

[13] O. Zariski, P. Samuel, "Commutative Algebra," volume II, van Nostrand, Princeton, 1960.

n 個の divisor から作られる $\mathbb{Z}^n$-graded ring について.

渡辺 敬一 (東海大・理)

§ 1.

体 k 上の normal projective variety X と, 有理係数 ample Weil divisors $D_1, \cdots, D_n \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ をとると,

$$R(X;\underline{D}) := R(X;D_1,\cdots,D_n)$$
$$:= \bigoplus_{k_1,\cdots,k_n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(k_1D_1+\cdots+k_nD_n)).T_1^{k_1}\cdots T_n^{k_n}$$

という環ができる. 但し, 各 D_i が ample とは ND_i が ample Cartier divisor となる正整数 N がとれる事とする.

$R(X,\underline{D})$ は $T_1,\cdots,T_n$ の巾による grading により, $\mathbb{Z}^n$-graded ring と思える. また、$D_1,\cdots,D_n$ が ample であるので、$R(X,\underline{D})$ は Noetherian であり, また, 定義のしかたより, normal にもなっている. この $\mathbb{Z}^n$-graded ring の性質、特に, local cohomology, Cohen-Macaulay (又は Gorenstein) ring になるか? また, divisor class group について等を調べるのが、本稿の目的である。

本論に入る前に、記号が煩雑になるので、次のような vector notation を導入しよう.

$\underline{D} := (D_1, \dots, D_n)$, $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$.

$\underline{k}\underline{D} := k_1 D_1 + \cdots + k_n D_n$

$H^0(X, \underline{k}\underline{D}) := \{ f \in k(X) \mid div_X(f) + \underline{k}\underline{D} \geqq 0 \} \subset k(X)$

($D = \sum r_i V_i \in Div(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ について, $D \geqq 0 \Leftrightarrow \forall r_i \geqq 0$).

$\underline{k} = (k_1, \dots, k_n)$ のとき, $\underline{k} \geqq 0 \Leftrightarrow k_1, \dots, k_n \geqq 0$

$\underline{k} \leqq 0 \Leftrightarrow k_1, \dots, k_n \leqq 0$, $\underline{k} > 0 \Leftrightarrow k_1, \dots, k_n > 0$,

$\underline{k} < 0 \Leftrightarrow k_1, \dots, k_n < 0$

$T = (T_1, \dots, T_n)$, $T^{\underline{k}} = T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n}$.

$$R(X, \underline{D}) = \bigoplus_{\underline{k} \geqq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(\underline{k}\underline{D})) . T^{\underline{k}} \subset k[T_1, \dots, T_n]$$

また, 以後 maximal graded ideal を

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{\underline{k} \geqq 0, \underline{k} \neq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(\underline{k}\underline{D})) . T^{\underline{k}}$$ で表わす.

$n = 1$ のとき, $R(X, D)$ は [W] で扱っているが, $n = 1$ のときと, $n \geqq 2$ のときでは, かなり様相が異なる. 以下に於て, 常に $n \geqq 2$ とする.

さて, こんな環としてどんなものが出て来るだろう. 典型的なものとしては次のものが挙げられる.

例1. $D_1, \dots, D_n$ がすべて ample Cartier divisor のとき,

rank n の vector bundle $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(D_n)$ を考えると，$\bigoplus_{k_1+\cdots+k_n=m} \mathcal{O}_X(\underline{k}\,\underline{D}) \cong S^m(\mathcal{F})$ (symmetric power) となるので，

$$R(X, \underline{D}) \cong \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, S^m(\mathcal{F})).T^m$$

となる。($\mathbb{Z}^n$-grading を $\mathbb{Z}$-grading に直して，同型).

更に特殊な場合として，$D_1 = \cdots = D_n = D$ (ample Cartier divisor) のとき，$R(X,D) = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)).T^n$ とおいて，

$$R(X, \underline{D}) \cong R(X,D) \# k[T_1, \ldots, T_n] = \bigoplus_{m \geq 0} R(X,D)_m \otimes_k (k[T_1, \ldots, T_n])_m$$

と，$R(X,D)$ と n 変数多項式環の Segre Product となる.

$D_1, \ldots, D_n$ が有理係数なので，次のような「純粋環論的」な例を扱う事ができる。

例 2. $X = \mathbb{P}^1$ とし，(i) $D_1 = \cdots = D_n = \frac{1}{r}\cdot(\infty)$ とおく.

$k(X) = k(x)$ とし，$\mathrm{div}_X(x) = (0) - (\infty)$ とすると，$\underline{a} \geq 0$ に対し，

$$x^b . T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n} \in R(\mathbb{P}^1, \underline{D}) \Leftrightarrow x^b \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\underline{a}.\underline{D})).$$

$$(\underline{a}.\underline{D} = \frac{1}{r}(a_1 + \cdots + a_n)\cdot(\infty) \text{ だから，})$$

$$\Leftrightarrow a_1 + \cdots + a_n \geq rb.$$

$R(X, \underline{D})$ を x に関して $\mathbb{Z}$-graded と思うと，

$$R(X, \underline{D}) = \bigoplus_{b \geq 0} (T_1, \ldots, T_n)^{br}. x^b \cong \mathcal{R}_{k[T]}((T_1, \ldots, T_n)^r)$$

と $k[T]$ の ideal $(T_1, \ldots, T_n)^r$ の Rees 環を得る。この $R(X, \underline{D})$ は常に Cohen - Macaulay だが，後述の判定法 (4.2) により，

$$R(X, \underline{D}) = \mathcal{R}_{k[T]}((T_1, \ldots, T_n)^r) \text{ が Gorenstein} \Leftrightarrow n = r+1.$$

(ii) $D_1 = \frac{1}{r_1}(\infty)$, $D_2 = \frac{1}{r_2}(\infty)$, …, $D_n = \frac{1}{r_n}(\infty)$ のとき，$R(\mathbb{P}^1, \underline{D})$ は，$k[T_1, .., T_n]$ の，イデアル $(T_1^{r_1}, .., T_n^{r_n})$ による Rees 環の normalization である事がわかる。

$$R(\mathbb{P}^1, \underline{D}) \cong \overline{\mathcal{R}_{k[T]}((T_1^{r_1}, .., T_n^{r_n}))} \cong \bigoplus_{b \geq 0} \overline{(T_1^{r_1}, .., T_n^{r_n})^{b}} \cdot x^b .$$

（$\overline{}$ はそれぞれ，ring, ideal の整閉包を表す．）この R はどんな $r_1, .., r_n$ に対しても Cohen-Macaulay で，$R(X, \underline{D})$ が Gorenstein $\Longleftrightarrow \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n} = \frac{s+1}{s}$，但し，$s = \mathrm{LCM}(r_1, \cdots, r_n)$.

例えば，$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$ だから，$\overline{\mathcal{R}_{k[T_1,T_2,T_3]}((T_1^2, T_2^3, T_3^3))}$ は Gorenstein ring.）．

§2. Local Cohomology の計算．

R は graded ring で，m が R の unique graded maximal ideal だから，R の homological な性質は $H_m^i(R)$ によって記述される。$Y := \mathrm{Spec}(R)$ とおくと，R は normal より，$H_m^i(R) = 0$ $(i = 0, 1)$ で，

$$H_m^i(R) \cong H^{i-1}(Y - \{m\}, \mathcal{O}_Y). \qquad (i \geq 2).$$

従って，$U := Y - \{m\}$ が問題になるが，この cohomology を記述するために，次の variety を導入する．

<u>定義</u> (2.1). $Z = Z(X, \underline{D}) := \mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{O}_X(k\underline{D}).T^k)$.

$\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{O}_X(k\underline{D}).T^k$ は $\mathcal{O}_X$-alg. of finite type で，我々は，この algebra を $k(X)[T_1, .., T_n]$ の subalg. と思うことにする。

上記．例1の vector bundle $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(D_n)$ の場合には，Z は vector bundle の total space であるから，X 上の $\mathbb{A}^n$-bundle （$\mathbb{A}^n$ は affine n-space $= \mathrm{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n])$）である。$ND_i$ $(i=1, \ldots, n)$ が integral Cartier divisor である正整数 N をとり，（N は以下でこの意味に使う.）

$$Z^{(N)} := \mathrm{Spec}_X\left(\bigoplus_{\underline{k} \geq 0} \mathcal{O}_X(N\underline{k}\underline{D}).\, T^{N\underline{k}}\right)$$

とおけば，$Z^{(N)}$ は X 上の $\mathbb{A}^n$-bundle であり，Z は $Z^{(N)}$ の finite covering になっている。

さて，$0 \neq s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(ND_i))$ をとり，

$$X_s := \{x \in X \mid s(x) \neq 0\} = \{x \in X \mid s_x \text{ は } \mathcal{O}_X(ND_i)_x \text{ の生成元}\}$$

とおくと，$\mathcal{O}_X(ND_i)$ が ample invertible sheaf より，このような X_s の集合は X の open affine covering をなし，$\forall \mathcal{F}$, X 上の coherent sheaf と，$\forall u \in H^0(X_s, \mathcal{F})$ に対し，$\exists m$, $u \otimes s^m \in H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(mND_i))$. 従って，$f = s \cdot T_i^N \in R_{(0,\ldots,N,0,\ldots)}$ とおくと，

$$(*) \quad H^0\Big(X_s, \bigoplus_{\substack{k_j \geq 0\ (j \neq i) \\ k_i \in \mathbb{Z}}} \mathcal{O}_X(\underline{k}\underline{D})\Big).\, T^{\underline{k}} \cong R_f \quad (\text{as } \mathbb{Z}^n\text{-graded rings}).$$

（[EGA, I, §9, II, §4]）

$\pi : Z \longrightarrow X$ を structure morphism とすると，

$$\pi^{-1}(X_s) = \bigoplus_{\underline{k} \geq 0} H^0(X_s, \mathcal{O}_X(\underline{k}\underline{D})).\, T^{\underline{k}} \supset R$$ だから，morphism

$$\varphi : Z \longrightarrow Y = \mathrm{Spec}(R)$$

ができるが，上の同型 $(*)$ の左辺の Spec は $\pi^{-1}(X_s)$ の affine open subset である。ND_i $(i=1,\dots,n)$ が very ample となる N を fix し，$i=1,\dots,n$，$s \in H^0(X,\mathcal{O}_X(ND_i))$ を動かすと，上の同型 (*) により，φ は，

$$\varphi|_{Z-X_0} : Z - X_0 \xrightarrow{\sim} Y - \{m\} = U$$

をひきおこす。但し，X_0 は $\bigoplus_{k \geqq 0} \mathcal{O}_X(k\mathbf{D}).T^k$ のイデアル，$\bigoplus_{\substack{k \geqq 0 \\ k \neq 0}} \mathcal{O}_X(k\mathbf{D}).T^k$ によって def. された Z の closed subscheme である。$\left(\bigoplus_{k \geqq 0} \mathcal{O}_X(k\mathbf{D}).T^k\right) \Big/ \left(\bigoplus_{\substack{k \geqq 0 \\ k \neq 0}} \mathcal{O}_X(k\mathbf{D}).T^k\right) \cong \mathcal{O}_X$ により，あきらかに，$X_0 \cong X$ である。(X_0 を "π の 0-section" と呼ぼう。) 以上で見て来た事を図にしてまとめると，

(2.2)
$$\begin{tikzcd}
 & Z - X_0 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook, "\text{open}"] & Y - \{m\} = U \arrow[d, hook, "\text{open}"] \\
X_0 \arrow[r, hook, "\text{closed}"] \arrow[dr, "\wr"'] & Z \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi : \text{affine}"] & Y = \operatorname{Spec}(R) \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

以下 $U = Z - X_0$ と同一視する事にする。あきらかに，

$$\dim R = \dim Y = \dim Z = \dim X + n.$$

$n = 1$ のときと，$n \geqq 2$ の違いは，

(i) $\operatorname{codim}_Z X_0 = n$ だから，$n = 1$ のときは U は X 上 affine だが $n \geqq 2$ のときはそうでない。

(ii) Cl で divisor class group を表す事にすると，

$n = 1$ のとき，$\quad 0 \to \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot cl(X_0) \longrightarrow Cl(Z) \longrightarrow Cl(U) \to 0$

が exact だが，$n \geqq 2$ のとき，$Cl(Z) \cong Cl(U)$．

後に使うので，divisor class group の次の同形を確認しておこう．

(2.3) $\quad Cl(R) \cong Cl(U) \cong Cl(Z)$．

次に，$H^i_m(R) \cong H^{i-1}(U, \mathcal{O}_Z)$ の計算に移ろう．$U = Z - X_0 \hookrightarrow Z$ により，次の local cohomology long exact sequence がある．([LC, §1])

$$
\begin{aligned}
0 = H^1_{X_0}(Z, \mathcal{O}_Z) &\to H^1(Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^1(U, \mathcal{O}_Z) \\
&\to H^2_{X_0}(Z, \mathcal{O}_Z) \to \cdots \\
&\to H^i_{X_0}(Z, \mathcal{O}_Z) \to H^i(Z, \mathcal{O}_Z) \to H^i(U, \mathcal{O}_Z) \to H^{i+1}_{X_0}(Z, \mathcal{O}_Z) \to \cdots \\
&\to \cdots
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

ここで，Z は $\mathbb{Z}^n$-graded scheme，X_0 は $\mathbb{Z}^n$-graded ideal で定義されているから，上の exact sequence は $\mathbb{Z}^n$-graded modules の (degree 0 の) exact sequence である．

$H^i(U, \mathcal{O}_Z)$ を計算するために，$H^i(Z, \mathcal{O}_Z)$，$H^{i+1}_{X_0}(Z, \mathcal{O}_Z)$ を計算してみるが，まず，Z は X 上 affine だから，

(2.5) $\quad H^i(Z, \mathcal{O}_Z) \cong H^i(X, \pi_*(\mathcal{O}_Z)) \cong \bigoplus_{\underline{a} \geq 0} H^i(X, \mathcal{O}_X(\underline{a}\underline{D})).T^{\underline{a}}$．

次に $H^i_{X_0}(Z, \mathcal{O}_Z)$ は local cohomology sheaf による spectral sequence によって計算できる．([LC, §1])

(2.6)． $\quad E_2^{pq} = H^p(Z, \mathcal{H}^q_{X_0}(\mathcal{O}_Z)) \Rightarrow H^{p+q}_{X_0}(Z, \mathcal{O}_Z)$

実は $\mathcal{H}^q_{X_0}(\mathcal{O}_Z) = 0 \ (q \neq n)$ となり，この spectral sequence

は退化してしまうのだが，$\mathcal{H}^q_{x_0}(\mathcal{O}_Z)$ を計算するために、次の complex を用意する．

$$\mathcal{C}^\cdot = [\, 0 \to \mathcal{C}^0 = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{O}_X(\underline{k}\underline{D}).T^{\underline{k}} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1 = \bigoplus_{|I|=1} e_I \to \cdots$$
$$\to \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{C}^p = \bigoplus_{|I|=p} e_I \xrightarrow{d} \cdots\cdots \to \mathcal{C}^n = \bigoplus_{\underline{k}<0} \mathcal{O}_X(\underline{k}\underline{D}).T^{\underline{k}}\, e_1\wedge\cdots\wedge e_n \to 0\,]$$

但し，I は index set $\{1,\cdots,n\}$ を動き，$e_1,\cdots,e_n$ は，$k(X)[T_1,T_1^{-1},\cdots,T_n,T_n^{-1}]$ 上の free basis とし，（$\mathcal{C}^\cdot$ は外積代数 $\bigwedge(\bigoplus_{i=1}^n k(X)[T_1,T_1^{-1},\cdots,T_n,T_n^{-1}]\,e_i)$ の subcomplex となる），

$$C_I := \Big[\bigoplus_{\substack{k_i\in\mathbb{Z} \text{ for } i\notin I\\ k_i<0 \text{ for } i\in I}} \mathcal{O}_X(\underline{k}\underline{D}).\,T^{\underline{k}}\Big]\, e_I \quad ,\quad e_I = \bigwedge_{i\in I} e_i$$

（$I=\{i_1,\cdots,i_p\}$, $i_1<\cdots<i_p$ のとき，

$e_I = e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$ とする．）

$I\subset J$ のとき，$i\in J$, $i\notin I$ なる i と $k_i\geq 0$ なる $\underline{k}$ に対して，$\mathcal{O}_X(\underline{k}\underline{D}).T^{\underline{k}}$ を 0 に写す事により，$C_I \twoheadrightarrow C_J$ であるが，この canonical surjection と，$\wedge(e_1+\cdots+e_n)$ を組合せて，$d:\mathcal{C}^p\to\mathcal{C}^{p+1}$ が定義され，complex になり，更に，

$$(2.7)\quad H^p(\mathcal{C}^\cdot) = \begin{cases} \bigoplus_{\underline{k}\geq 0} \mathcal{O}_X(\underline{k}\underline{D}).\,T^{\underline{k}} & (p=0)\\ 0 & (p\neq 0)\end{cases}$$

となる事も，各 $T^{\underline{k}}$ の成分を見る事により容易にわかる．

各成分 $\mathcal{C}_I$ は $\bigoplus_{\underline{k}\geq 0}\mathcal{O}_X(\underline{k}\underline{D}).T^{\underline{k}}$ - module だが，定義により，$0\neq s\in H^0(X,\mathcal{O}_X(ND_i))$ をとると，$f=s\cdot T_i^N$ は $i\notin I$ のとき X_s 上で $\mathcal{C}_I$ に bijective に作用する．従って，

(2.8) (i) $0 \leqq p < n$ のとき $\mathcal{H}^q_{X_0}(\mathcal{E}^p) = 0 \quad (q \geqq 0)$

(ii) $\mathcal{H}^0_{X_0}(\mathcal{E}^n) = \mathcal{E}^n, \quad \mathcal{H}^q_{X_0}(\mathcal{E}^n) = 0 \quad (q > 0)$.

がわかる。ゆえに，簡単な計算により，

$$(2.9) \quad \mathcal{H}^q_{X_0}(\mathcal{O}_Z) = \begin{cases} 0 & (q \neq n) \\ \mathcal{E}^n = \bigoplus_{k<0} \mathcal{O}_X(kD).T^k & (q = n) \end{cases}$$

がわかり，spectral sequence (2.6) に代入して，

$$(2.10) \quad H^i_{X_0}(Z, \mathcal{O}_Z) \cong \begin{cases} 0 & (i < n) \\ \bigoplus_{k<0} H^{i-n}(X, \mathcal{O}_X(kD)).T^k & (i \geqq n) \end{cases}$$

を得る。exact sequence (2.4) に戻ると，各 map が $\mathbb{Z}^n$-graded hom. であることから，各 $H^i_{X_0}(Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^i(Z, \mathcal{O}_Z)$ は 0 である。従って，

<u>定理</u> (2.11). $$H^q_m(R) \cong \Big[\bigoplus_{k \geqq 0} H^{q-1}(X, \mathcal{O}_X(kD)) \cdot T^k\Big] \oplus \Big[\bigoplus_{k<0} H^{q-n}(X, \mathcal{O}_X(kD)) \cdot T^k\Big] \quad (q \geqq 2).$$

<u>系</u> (2.12) R が Cohen-Macaulay ring

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ① \ H^q(X, \mathcal{O}_X(kD)) = 0 \ \text{for } q > 0 \text{ and } k \geqq 0,\ \text{かつ} \\ ② \ H^q(X, \mathcal{O}_X(kD)) = 0 \ \text{for } q < \dim X \text{ and } k < 0. \end{cases}$$

<u>例</u> (2.13). $X = \mathbb{P}^1$, $n = 2$, $D_1 = \frac{1}{2}(\infty) - \frac{1}{3}(0)$, $D_2 = \frac{1}{3}(\infty) - \frac{1}{4}(-1)$ とおくと，$[D_1 + D_2] = [\frac{5}{6}]\cdot(\infty) + [-\frac{1}{3}](0) + [-\frac{1}{4}](-1) = -(0) - (-1)$ で，$H^1(X, \mathcal{O}_X(D_1 + D_2)) \cong k$. より，$\dim [H^2_m(R)]_{(1,1)} = 1$.
$H^2_m(R)$ は $(1,1)$ 成分のみしかもたない事は容易にわかるので，
($[x]$ は x を越えない最大の整数)

Rは3次元 normal Buchsbaum ring である事がわかる．なお，Rの生成元を求めると，$emb(R) = 6$で，

$$R = k[\,xT_1^2,\ xT_1^3,\ (x+1)T_2^3,\ (x+1)T_2^4,\ x(x+1)^2T_1T_2^8,\ x(x+1)T_1^3T_2^2\,].$$

Rの商体は $k(x, T_1, T_2)$ である．

この例は，$n = 1$ のとき，$X = \mathbb{P}^r$ や Grassmann Variety のとき，$\forall D \in Div(X)\otimes\mathbb{Q}$，ample に対し，$R(X, D)$ が C-M であった事と対照すると，$n = 1$ と $n \geqq 2$ との差がここにも見える．

<u>Remark</u> (2.13)．X上の rank n の vector bundle $\mathcal{E}$ に対して，

$$R(X, \mathcal{E}) := \bigoplus_{k \geqslant 0} H^0(X, S^k(\mathcal{E}))\cdot T^k$$

とおくと $Z = Spec_X(\bigoplus_{k\geqslant 0} S^k(\mathcal{E})T^k)$ とおいて，ほぼ同じ議論ができる．(2.2)〜(2.6)は全く同様，$\mathcal{H}^q_{X_0}(\mathcal{O}_Z) = 0\ (q \neq n)$ も同様だが，$\mathcal{H}^n_{X_0}(\mathcal{O}_Z)$ の構造がまだ解析できていない．予想としては，$\mathcal{H}^n_{X_0}(\mathcal{O}_Z) \cong \bigoplus_{k \leqq -n} \left(S^k(\mathcal{E}^*)\otimes_{\mathcal{O}_X} \det(\mathcal{E})^{-1}\right)\cdot T^{-n-k}$ (as graded $\mathcal{O}_Z$-Module) と予想している．($*$ は $\mathcal{O}_X$-dual)．

一番簡単な例として，$X = \mathbb{P}^2$，$\mathcal{E} = T_{\mathbb{P}^2}$ (tangent bundle) をとると，不定元 x, y, U, W を用いて，

$$R = k[\,x^{-1}U,\ x^{-1}yU,\ U,\ y^{-1}W,\ xy^{-1}W,\ x(U+W),\ y(U+W)\,] \subset k[x, x^{-1}, y, y^{-1}, U, W]$$

と表わされる．この ring は8変数多項式環を，9つの2次式で生成される ideal でわった4次元 normal ring で，"Macaulay" によると，このRは Gorenstein になるようだ．この場合，

$\det(\mathcal{E}) + K_X = 0$ なので、この事実は、(4.4) の Gorenstein ring の判定法とも合致している。

<u>訂正</u> (2.14). 講演の時勘違いをして、「$\mathbb{P}^2$ 上の ample vector bundle $\mathcal{E}$ に対し、上記の $R(X, \mathcal{E})$ は常に Cohen-Macaulay である。」と言ってしまいましたが、$\mathbb{P}^2$ 上の ample vector bundle $\mathcal{E}$, $\mathrm{rk}(\mathcal{E}) = 2$ で、$H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{E}) \neq 0$ なるを佐藤栄一氏に教えて頂きました。このとき $H^2_{\mathfrak{m}}(R)_1 \neq 0$, $\dim R = 4$ ですから、$R = R(X, \mathcal{E})$ は Cohen-Macaulay ではありません。

§3. Divisor Class Group.

(2.2) で見たように、$Cl(R) \cong Cl(Z)$ より、Z の divisor class group を計算すれば良い。$D_1, \dots, D_n$ を

$$D_i = \sum_V \frac{p_{i,V}}{q_{i,V}} V$$ (V は X の codim. 1 subvariety を動き、$p_{i,V}/q_{i,V}$ は既約分数) $(i = 1, \dots, n)$,

$Q_V := \mathrm{LCM}(q_{1,V}, \dots, q_{n,V})$ とおく。更に、

$\mathrm{HDiv}(Z)$, $\mathrm{HP}(Z)$ をそれぞれ Z の ($\mathbb{Z}^n$-graded で) homogeneous divisors, homogeneous principal divisors の群とおくと、$\mathrm{HDiv}(Z)$ は $F_V := \pi^{-1}(V)_{red}$ ($V \subset X$, codim. 1 subvar.) と、$\bigoplus_{k \geq 0,\, k_i > 0} \mathcal{O}_X(kD)T^k$ で定義された subvariety W_i $(i = 1, \dots, n)$ で生成される。また、$V \subset X$, $\mathrm{codim}_X V = 1$ に対して、$\pi^*(V) = Q_V \cdot F_V$.

$HP(Z) = P(X) \oplus \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\cdot \mathrm{div}(T_i)$ である．これらの事実から次の可換図式ができる。

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*"] & \mathrm{Div}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*"] & Cl(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & HP(Z) \arrow[r] \arrow[d] & H\mathrm{Div}(Z) \arrow[r] \arrow[d] & Cl(Z) \arrow[r] & 0 \\
 & \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\cdot \mathrm{div}_Z(T_i) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \left[\bigoplus_{V} \mathbb{Z}/Q_V\mathbb{Z}\right] \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\cdot W_i\right] \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

上の写像 α に於て，$\mathrm{div}_Z(T_i)$ は W_i 成分が 1，$W_j\ (j \neq i)$ 成分が 0 だから，α は injective，$\mathrm{Coker}(\alpha) \cong \bigoplus_{V} \mathbb{Z}/Q_V\mathbb{Z}$. この事から次が得られる。

__定理__ (3.2). X と R の divison class groups の間に，

$$0 \to Cl(X) \to Cl(R) \to \bigoplus_{V} \mathbb{Z}/Q_V\mathbb{Z} \to 0,$$

という exact sequence が存在する。

特に，X は projective variety より，ample invertible sheaf $\mathcal{L}$ をとると，$\mathbb{Z}\cdot cl(\mathcal{L}) \cong \mathbb{Z} \hookrightarrow Cl(X)$ であり，$Cl(R)$ は必らず無限位数の元をもつ。

__Remark__ (3.3). $(l_V \bmod Q_V)_V \in \bigoplus_{V} \mathbb{Z}/Q_V\mathbb{Z}$ に写される $Cl(R)$ の元を代表する R の divisorial module として，

$$\bigoplus_{k \geq 0} H^0\Big(X, \mathcal{O}_X\Big(\sum_{V} \frac{l_V}{Q_V}\cdot V + k\underline{D}\Big)\Big)\, T^k$$

がとれる。

§4. Gorenstein Property

$\dim X = d$ のとき, $\dim R = n + d$ で, (2.11) より,

$$H_m^{d+n}(R) \cong \bigoplus_{k<0} H^d(X, \mathcal{O}_X(kD)).\ T^k$$

R の canonical module K_R は $K_R = [H_m^{d+n}(R)]^*$ ($*$ は dual, 即ち, $\underline{\mathrm{Hom}}_k(\ ,k)$ を表す. [GW], Chap. II 参照.)

で与えられる. Serre duality により,

定理 (4.1). $K_R \cong \bigoplus_{k>0} H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - [-kD])).\ T^k$

X の codim 1 irred. subvar. V に対し, Q_V を §3 で定義した数とすると, $-[-kD] = [kD + \sum_V \frac{Q_V - 1}{Q_V} \cdot V]$ である.

ゆえに,

$$K_R \cong \bigoplus_{k>0} H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + \sum_V \frac{Q_V-1}{Q_V} V + kD)).\ T^k$$

$$= \bigoplus_{k\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X((K_X + \sum_V \frac{Q_V-1}{Q_V} \cdot V + D_1 + \cdots + D_n) + kD))\, T^k \cdot (T_1 \cdots T_n)$$

とも書ける. (3.3) も考え合わせると,

定理 (4.2). K_R が R-free (R が quasi-Gorenstein)

$\Leftrightarrow$ $K_X + \sum_V \frac{Q_V-1}{Q_V} \cdot V + \sum_{i=1}^n D_i + \mathrm{div}_X(f) = 0$ となる $f \in k(X)$ が存在する.

例 (4.3). §1 の例2 を見てみよう. $X = \mathbb{P}^1$ のとき, $K_X = -2(\infty)$ として良い. (i) では $\sum_V \frac{Q_V-1}{Q_V} V = \frac{r-1}{r} \cdot (\infty)$ より,

K_R が R-free $\Leftrightarrow$ $-2 + \frac{r-1}{r} + \frac{n}{r} = 0$ $\Leftrightarrow$ $n = r+1$.

(ii) では, $\sum_V \frac{Q_V-1}{Q_V} V = \frac{s-1}{s} \cdot (\infty)$ だから, K_R が free

$\Leftrightarrow$ $-2 + \frac{s-1}{s} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n} = \frac{s+1}{s}$.

Remark (4. 4). rank n の vector bundle $\mathcal{E}$ について $R(X, \mathcal{E}) = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, S^k(\mathcal{E})) . T^k$ を考えるとき，(2.13) の予想が正しければ，

K_R が free $\Longleftrightarrow$ $\det(\mathcal{E}) + K_X \sim 0$ (lin. eq. to 0)

となる筈である．

Remark (4. 5). $\varphi : Z \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ は R の "partial resolution" と考えられる。もし Z が rational singularity のみをもつとき（基礎体は標数 0 とする），R が rat^l sing. $\Longleftrightarrow$ $\forall i > 0$, $R^i \varphi_* \mathcal{O}_Z = \bigoplus_{k \geq 0} H^i(X, \mathcal{O}_X(kD)) . T^k = 0$ となり，この条件は R が Cohen-Macaulay ならばみたされている。Z が rat^l sing. のみをもつために，X が rat^l sing. のみをもつ事は必要条件だが，一般には逆は良くわからない。今のところは，次の場合に Z が rat^l sing. をもつ事がわかるのみである．（[W] 参照．）

(i) X が rat^l sing. のみをもち，$D_1, \cdots, D_n$ が integral Cartier divisor.

(ii) X が smooth で，各 D_i の分数部分の union が，simple normal crossing.

References

[EGA] A. Grothendieck and J. Dieudonné, Eléments de Géometrie Algébrique, I, II, Publ. I.H.E.S. 4 (1960), 8 (1961).

[GW] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings, II. (Z^n-graded rings), Tokyo J. Math. 1 (1978), 237-261.

[LC] A. Grothendieck (notes by R. Hartshorne), Local Cohomology, Lect. Notes in Math. 41, Springer (1967).

[W] K.-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, Nagoya Math. J. 83 (1981), 203-211.