# 第13回

# 可換環論シンポジウム報告集

1991年10月30日～11月2日

於　インテック大山研修センター

# 目　　次


橋本 光靖 (名大理) ........ 1
Syzygies of Pfaffian ideals

中村 幸男 (都立大理) ........ 12
$\mathbb{A}^3$ 及び $\mathbb{P}^3$ 内の monomial curve によって定まるある環の
Cohen-Macaulay 性について

山岸 規久道 (姫路獨協大) ........ 24
On surjective Buchsbaum modules

下田 保博 (北里大教養) ........ 39
ある prime ideal に関する symbolic Rees algebra について

関口 ひでみ (名大理) ........ 47
Gorensteinness of Finite Extensions of Rees Algebras

衛藤 和文 (早大理工) ........ 56
$S^2$ 上の rank 2 の projective modules について

衛藤 和文 (早大理工)，神蔵 正 (湘南工科大)，橘 貞雄 (日大文理) ...... 64
Contraction of L C I ideals

西田 康二 (千葉大自然) ........ 70
一般の filtration から定義される Rees 環の C-M 性と Gorenstein 性について

後藤 四郎 (明大理) ........ 78
Symbolic Rees 代数の C-M 性と Gorenstein 性について

土井 幸雄 (福井大教育) ........ 89
ホップ代数 25 年

宮崎 誓 (長野高専) ........ 104
Buchsbaum property with certain spectral sequences

吉野 雄二 (京大教養) ........ 111
Frobenius 写像を添加した環

奈良 亮一 (東海大理) .................................................... 118
$\mathbb{Z}$-graded ring の non-negative part について

鴨井 祐二 (東海大理) .................................................... 131
ある Semigroup Ring の Defining Ideal について

谷本 洋 (宮崎大教育) .................................................... 140
部分体上有限な超越次数を持つ局所環について

大石 彰 (横浜国大教育) .................................................... 147
極大コーエン・マコーレー加群の双対性について

泊 昌孝 (金沢大理), 渡辺 敬一 (東海大理) .............................. 157
Normal $\mathbb{Z}_r$-graded rings

永田 雅宜 (岡山理大) .................................................... 176
A new proof of the theorem of Eakin-Nagata

# Syzygies of Pfaffian Ideals

橋本光靖

名古屋市千種区不老町 名古屋大学理学部数学教室

## 0 序

Pfaffian ideal の syzygy については、古くから多くの研究がなされていたが、最近、蔵野氏によって、$\mathbb{Z}$ 上では minimal free resolution の存在しない Pfaffian variety の存在が示された。その例では、標数 2 で 2 番目の Betti 数 $\beta_2$ が標数 0 より増加していた。今回、勝手な generic Pfaffian variety の 2 番目の Betti number が計算により分かったので、それを報告する。結果として、奇数標数では、2 番目の Betti number は増加しないことが分かった。

$R$ を可換環、$A = (a_{ij})$ を $R$ 上 $n$ 次の正方行列とする。$A$ が交代行列であるとは、$\forall i, j\ a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i\ a_{ii} = 0$ が成立することをいう。$\mathrm{Alt}_n(R)$ によって、$R$ 係数の $n$ 次の交代行列の全体を表わす。$(a_{ij}) \in \mathrm{Alt}_n(R)$ とする。$n$ が奇数の時、よく知られているように、$\det(a_{ij}) = 0$ である。$n = 2r$ が偶数の時、

$$\begin{aligned}\mathrm{Pfaff}(a_{ij}) &\overset{def}{=} \tfrac{1}{2^n \cdot n} \textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\sigma a_{\sigma 1\, \sigma 2} \cdots a_{\sigma(n-1)\, \sigma n} \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\, \sigma 1 < \sigma 3 < \cdots < \sigma(n-1),\, \sigma(2i-1) < \sigma(2i) (\forall i)} (-1)^\sigma a_{\sigma 1\, \sigma 2} \cdots a_{\sigma(n-1)\, \sigma n}\end{aligned}$$

によって $(a_{ij})$ のパフィアン $\mathrm{Pfaff}(a_{ij})$ を定義する。すると、$(\mathrm{Pfaff}(a_{ij}))^2 = \det(a_{ij})$ が成立する。

$(a_{ij}) \in \mathrm{Alt}_n(R)$ のとき、$2 \leq 2t \leq n$ となる $t$ と $1 \leq i_1 < \cdots < i_{2t} \leq n$ なる $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_{2t})$ について、submatrix $(a_{i_\alpha i_\beta})_{\alpha, \beta = 1, \ldots, 2t}$ も交代行列である。

$$\{\mathrm{Pfaff}(a_{i_\alpha i_\beta}) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2t} \leq n\}$$

で生成される $R$ のイデアルを $\mathrm{Pf}_{2t}(a_{ij})$ で表わし、$(a_{ij})$ の Pfaffian ideal と呼ぶ。$R$ 係数の行列 $(b_{ij})$ の $t$-minors 全部で生成される $R$ のイデアルを $I_t((b_{ij}))$ で表わすことにする。交代行列 $(a_{ij})$ について、次の関係式が成立する。

**補題 0.1** 上の記号の下で、 $I_{2t}(a_{ij}) \subset I_{2t-1}(a_{ij}) \subset \mathrm{Pf}_{2t}(a_{ij}) \subset \sqrt{I_{2t}(a_{ij})}$. 特に、$R$ が reduced なら、$\mathrm{Pf}_{2t}(a_{ij}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rank}(a_{ij}) < 2t \Leftrightarrow \mathrm{rank}(a_{ij}) < 2t - 1$.

上からも分かるように、reduced ring 上の交代行列の階数は偶数であり、パフィアンによってはかることが出来る。

$K$ が可換環、$R = K[x_{ij}]_{1\le i<j\le n}$ は $K$ 上 $n(n-1)/2$ 変数多項式環とする。$x_{ji} = -x_{ij}$ $(i > j)$, $x_{ii} = 0$ できまる $(x_{ij}) \in \mathrm{Alt}_n(R)$ は generic な交代行列と呼ばれる。自然に、$\mathrm{Spec}\, R$ は $\mathrm{Alt}_n(K)$ と同一視される。$K$ が reduced なら、$\mathrm{Spec}\, R/\mathrm{Pf}_{2t}(x_{ij})$ (の $K$-valued point の全体) は $\{(a_{ij}) \in \mathrm{Alt}_n(K) \mid \mathrm{rank}(a_{ij}) < 2t\}$ である。以下、$\mathrm{Pf}_{2t}(x_{ij})$ を単に $\mathrm{Pf}_{2t}$ で表わす。

定理 **0.2** (**[11]**) $K, R$ は上の通りとする。$R/\mathrm{Pf}_{2t}$ は $K$-free である。$K$ が体ならば、$R/\mathrm{Pf}_{2t}$ は Gorenstein UFD で、$\mathrm{ht}\,\mathrm{Pf}_{2t} = \mathrm{proj.\,dim}_R\, R/\mathrm{Pf}_{2t} = (n-2t+2)(n-2t+1)/2$ である。

今回問題にするのは、$R/\mathrm{Pf}_{2t}$ の minimal free resolution の構成である。この問題も、古くから多くの人によって研究されてきた。

問題 **0.3** $R$-module としての $R/\mathrm{Pf}_{2t}$ の Minimal free resolution を構成せよ。

ここに、finite free $R$-complex $\mathbf{F}$ が minimal であるとは、$R/R_+ \otimes_R \mathbf{F}$ ($R_+$ は $R$ の変数で生成されるイデアル) の boundary map がすべて 0 であることを意味する。$\mathbf{F}$ が $R/\mathrm{Pf}_{2t}$ の minimal free resolution で、$K'$ が $K$-algebra なら、$K' \otimes_K \mathbf{F}$ は $K' \otimes_K R/\mathrm{Pf}_{2t} \cong K'[x_{ij}]/\mathrm{Pf}_{2t}(1 \otimes x_{ij})$ の minimal free resolution である。とくに、$\mathbb{Z}$ 上で問題 0.3 が解決すれば、base change によって、勝手な $K$ 上問題 0.3 は解決することになる。$K = \mathbb{Z}$ 上での問題 0.3 に関する結果は、次の通りである。

$t = 1$ の場合。$\mathrm{Pf}_2$ は、$R_+$ に他ならないので、(変数 $x_{ij}$ に関する) Koszul Complex が minimal free resolution を与える。$n - 2t = 0$ の場合も trivial で、$\mathrm{Pf}_n$ は単項イデアルである。$n - 2t = 1$ の場合、長さ 3 の resolution が Buchsbaum-Eisenbud によって構成された [5]。$n - 2t = 2$ の場合、長さ 6 の resolution が Pragacz によって構成されている [17]。この resolution の 2 番目の項は、$\mathbb{Q}$ 上の一般線型群の既約表現の $\mathbb{Z}$ form だが、Schur module でも Weyl module でもないものとなっている。$n - 2t = 3$ の場合は open であり、存在さえ明らかではない。存在したとすると、その長さは定理 0.2 によって 10 である。

各変数を degree 1 にして、$R = K[x_{ij}]$ は graded であり、$\mathrm{Pf}_{2t}$ は homogeneous である。従って、$K$ が体の場合、graded minimal free resolution が存在するのは自明であるが、その具体的構成となると話は別である。$K$ が標数 0 の体で、$n - 2t = 3$ の場合には、Jósefiak-Pragacz-Weyman [10] によって resolution が具体的に構成されているが、一般の $n - 2t$ に関しては $K$ の標数が 0 でも未解決である。標数 $p$ については、$\mathbb{Z}$ 上分かっていること以上の事は知られていない。

問題 **0.4** $K$ を体としたとき、$R/\mathrm{Pf}_{2t}$ の graded minimal free resolution は存在する。$R/\mathrm{Pf}_{2t}$ の Betti numbers $\mathrm{rank}\, F_i = \beta_i^K$ を求めよ。

よく知られているように、$\beta_i^K = \dim_K \mathrm{Tor}_i^R(R/R_+, R/\mathrm{Pf}_{2t})$ である。もっと詳しく、$\beta_{i,j}^K = \dim_K \left[\mathrm{Tor}_i^R(R/R_+, R/\mathrm{Pf}_{2t})\right]_j$ が求まればさらによい。ここに、[ ] は graded module の degree $j$ component である。$\beta_i^K, \beta_{i,j}^K$ は $K$ の標数のみに depend するので、$\beta_i^{\mathbf{F}_p}, \beta_{i,j}^{\mathbf{F}_p}$ を

それぞれ$\beta_i^p$, $\beta_{i,j}^p$ で表わして、これらをすべての $p$ に対して求めればよい。ここに、$\mathbf{F}_p$ は標数 $p$ の素体である ($\mathbf{F}_0 = \mathbb{Q}$)。

問題 0.3 が具体的な resolution の構成によって解決されている case では、その resolution の各項の rank を求めればよいわけであるから、問題 0.4 も自動的に解けている。また、$\mathbb{Z}$ 上の graded minimal free resolution が存在すれば、base change で勝手な体上の resolution が得られるから、$\beta_{i,j}^p$, $\beta_i^p$ は標数 $p$ にはよらない。実は、その逆も成立する。

**命題 0.5** (**[19, Chapter 4, Proposition 2]**) 次は同値である。

**1** すべての $i \geq 0$ に対して、$\beta_i^p$ は $p$ によらない。

**2** すべての $i, j \geq 0$ に対して、$\beta_{i,j}^p$ は $p$ によらない。

**3** $R/\mathrm{Pf}_{2t}$ の graded な minimal free resolution が $\mathbb{Z}$ 上存在する。

問題 0.4 は、$p = 0$ の場合に、Jósefiak-Pragacz-Weyman によって完全に解かれている。$K$ を標数 0 の体とするときに、$V = K^n$ とおいて、$e_1, \ldots, e_n$ を $V$ の標準的な基底とするときに、$R = K[x_{ij}]$ は $x_{ij} = e_i \wedge e_j$ によって symmetric algebra $S(\bigwedge^2 V)$ と同一視される。$\mathrm{GL}(V)$ は自然に $S(\bigwedge^2 V)$ に作用し、$\mathrm{Pf}_{2t}$ は $\mathrm{GL}(V)$ の作用で不変なので、$R/\mathrm{Pf}_{2t}$ にも $\mathrm{GL}(V)$ は自然に作用する。また、$R/R_+$ の resolution (Koszul Complex) $K_\bullet = S(\bigwedge^2 V) \otimes \bigwedge(\bigwedge^2 V)$ にも $\mathrm{GL}(V)$ が作用し、

$$H_i(R/\mathrm{Pf}_{2t} \otimes_R K_\bullet) = \mathrm{Tor}_i^R(R/R_+, R/\mathrm{Pf}_{2t})$$

は $\mathrm{GL}(V)$ の多項式表現になる。このとき、

**定理 0.6** (**[10, Theorem 3.14]**) $K$ は標数 0 の体、$V = K^n$ とするとき、$\mathrm{GL}(V)$ の多項式表現の同型

$$\mathrm{Tor}_i^R(R/R_+, R/\mathrm{Pf}_{2t}) \cong \bigoplus_{\substack{\mu:\text{partition}, k \geq 0 \\ \tilde{\mu}_1 \leq k,\ i = |\mu| + (k^2+k)/2}} K_\lambda V$$

が存在する。

ここに、$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ が partition であるとは、$\gamma$ が non-negative interger の無限列であって、有限個の $i$ を除いて $\gamma_i = 0$ であり、$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \cdots$ が成立することをいう。partition $\gamma$ に対して、$|\gamma|$ は $\gamma$ の degree $\sum_i \gamma_i$ を表わす。また、partition $\gamma$ に対して、$\tilde{\gamma}$ は $\gamma$ の transpose である。つまり、$\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \ldots)$ は、$\tilde{\gamma}_i = \#\{j \mid \gamma_j \geq i\}$ で与えられる partition である。和の中の $\lambda$ は partition $(k + \mu_1, \ldots, k + \mu_k, \overbrace{k, \ldots, k}^{2t-1}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \ldots)$ を表わす。partition $\gamma$ に対して、$K_\gamma V$ は $\gamma$ に対応した $V$ の Weyl module である。すなわち、$e_1 \wedge \cdots \wedge e_{\tilde{\gamma}_1} \otimes \cdots \otimes e_1 \wedge \cdots \wedge e_{\tilde{\gamma}_{\gamma_1}}$ で $\mathrm{GL}(V)$ 上生成される $\bigwedge_{\tilde{\gamma}} V = \bigwedge^{\tilde{\gamma}_1} V \otimes \cdots \bigwedge^{\tilde{\gamma}_{\gamma_1}} V$ の submodule である。$K$ の標数が 0 なので、$K_\lambda V$ は $\tilde{\lambda}_1 \leq n$ である限り、irreducible である。勝手な $K$ に対して、$K_\lambda V$ は $K$-free であり、$\mathrm{rank}\, K_\lambda V = \det\left(\binom{n}{\tilde{\lambda}_i - i + j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ が知られており、この公式から $\beta_i$ を計算するのは容易である。

一般の $p$ に対して、$\beta_i^p$ を計算するのは難しいように思われる。$\beta_0^p$, $\beta_1^p$ はそれぞれ 1, $\binom{n}{2t}$ で $p$ によらない。$\beta_2^p$ については、次のことが知られていた。

**定理 0.7 ([13],[14]) 1** $t=2$, $n=8$ で $\beta_2^2=\beta_2^0+1$. 特に $\beta_2^p$ は一般には $p$ に depend する。

**2** $2p>n-2t \Rightarrow \beta_0^p=\beta_2^0$. 特に、$2t+3=n$ ならば、$\beta_2^0$ は $p$ に depend しない。

**3** $j>2t$ ならば、$\beta_{2,j}^p=0$.

上の定理の **1** によって、$\mathbb{Z}$ 上では一般には $R/\mathrm{Pf}_{2t}$ の minimal free resolution は存在しないことが初めて示された。**3** は Gröbner basis の理論を応用して示された。

# 1 主定理

今回得られた結果は、

**定理 1.1**

$$\beta_2^p=\begin{cases} n\binom{n}{2t+1}-\binom{n}{2t+2} & (p\neq 2)\\ n\binom{n}{2t+1}-\binom{n}{2t+2}+\sum_{1\le i\le[\log_2 t]}\binom{n}{2^{i+1}+2t} & (p=2)\end{cases}$$

**系 1.2** $t\ge 2$, $2t+4\le n$ ならば、$\beta_2^2>\beta_2^0$. 特に、この場合、$\mathbb{Z}$ 上の $R/\mathrm{Pf}_{2t}$ の minimal free resolution は存在しない。

$R$-module の準同型 $\varphi\colon R\otimes\bigwedge^{2t}V\to\mathrm{Pf}_{2t}$ を $V$ の basis $x_1,\dots,x_n$ について

$$\varphi(a\otimes(x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_{2t}}))=a\,\mathrm{Pfaff}(x_{i_\alpha i_\beta})_{1\le\alpha,\beta\le 2t}$$

によって定義する。$\varphi$ の定義は $V$ の basis $x_1,\dots,x_n$ のとり方によらない。$\mathrm{Ker}\,\varphi$ は $\mathrm{Pf}_{2t}$ の relation module であり、その $R$-module としての生成元の個数は $K$ が標数 $p$ の体のとき $\beta_2^p$ である。$1\le j_1,\dots,j_{2r}$ に対して、$[j_1,\dots,j_{2r}]$ は $\bigwedge^{2r}V$ の basis element $e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_{2r}}$ を、$\langle j_1,\dots,j_{2r}\rangle$ は $\mathrm{Pfaff}(x_{j_\alpha j_\beta})_{1\le\alpha,\beta\le 2r}\in S$ をそれぞれ表わすことにする。
Pfaffian の間には次の様な関係式がある。

**補題 1.3** 余因子展開 $r\ge 0$, $1\le a,i_1,\dots,i_{2r+1}\le n$ のとき、

$$\sum_{\alpha=1}^{2r+1}(-1)^{\alpha+1}x_{ai_\alpha}\langle i_1,\overset{\alpha}{\check{\cdots}},i_{2r+1}\rangle=\langle a,i_1,\dots,i_{2r+1}\rangle$$

ラプラス展開 $a,b\ge 0$, $1\le i_1,\dots,i_{2(a+b)}\le n$ のとき、

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{a,b}}(-1)^{\sigma}\langle i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(2a)}\rangle\cdot\langle i_{\sigma(2a+1)},\dots,i_{\sigma(2(a+b))}\rangle=\langle i_1,\dots,i_{2(a+b)}\rangle$$

$p \neq 2$ のときは、$\mathrm{Pf}_{2t}$ の relation module の minimal generators を具体的に書き下すことはやさしい。

系 1.4 $K$ は可換環で、$1/2 \in K$ とする。$\mathrm{Ker}\,\varphi$ は

$$T(a,b;i_1,\ldots,i_{2t}) \overset{def}{=} \{\sum_{\alpha=1}^{2t}(-1)^\alpha x_{ai_\alpha} \otimes [b,i_1,\cdots\overset{\alpha}{\vee}\cdots,i_{2t}] + \sum_{\alpha=1}^{2t}(-1)^\alpha x_{bi_\alpha} \otimes [a,i_1,\cdots\overset{\alpha}{\vee}\cdots,i_{2t}]$$
$$| a < i_1 < \cdots < i_{2t} \leq n,\ 1 \leq a \leq b \leq n\}$$

で minimal に生成される。

$T(a,b;i_1,\ldots,i_{2t})$ は、$a,b,i_1,\ldots,i_{2t}$ が相異なる時は 2 通りの余因子展開の差であり、そうでないときは本質的には、index に重複のある Pfaffian(=0) の余因子展開である。つまり、$1/2 \in K$ のときには、Pfaffian の間の関係式は、余因子展開で生成される。しかし、一般にはそうなってはいない (Pragacz [17, Remark 2.1] を見よ)。

上の系の言い直しとして、$1/2 \in K$ の場合の '$R/\mathrm{Pf}_{2t}$ の minimal free resolution のはじめの部分' を具体的に書き下すことが出来る。

系 1.5 $K$ は $1/2$ を含む可換環とする。

$$1 \otimes (e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2t+1} \otimes e_1) \mapsto \sum_{\alpha=2}^{2t+1}(-1)^\alpha x_{1\alpha}[1,2,\cdots\overset{\alpha}{\vee}\cdots,2t+1]$$

で unique に定まる $\mathrm{GL}(V)$ 同変な $R$-linear map $\psi :\ R \otimes K_{(2,\underbrace{1,\ldots,1}_{2t})}V \to R \otimes \bigwedge^{2t} V$ について、

1 $R$-module の列

$$R \otimes K_{(2,1^{2t})}V \xrightarrow{\psi} R \otimes \bigwedge^{2t} V \xrightarrow{\varphi} R \to R/\mathrm{Pf}_{2t} \to 0$$

は exact である。

2 $K$ が noether で、$(a_{ij}) \in \mathrm{Alt}_n(K)$ とする。$x_{ij} \mapsto a_{ij}$ によって、$K$ を $R$-algebra と思う。このとき、次は同値。

a) $\mathrm{Im}(K \otimes_R \psi) = \mathrm{Ker}(K \otimes_R \varphi)$

b) $\mathrm{Pf}_{2t} = K$ または $\mathrm{grade}\,\mathrm{Pf}_{2t} = \binom{n-2t+2}{2}$.

標数が 2 の場合には、$\mathrm{Ker}\,\varphi$ の具体的な生成元の記述はかなり複雑になって来る。つぎの 3 つの type の relation (つまり $\mathrm{Ker}\,\varphi$ の元) を考える。

**type I** $\sum_\alpha (-1)^\alpha x_{ai_\alpha} \otimes [a,i_1,\cdots\overset{\alpha}{\vee}\cdots,i_{2t}]$ $(1 \leq a < i_1 < \cdots < i_{2t} \leq n)$.

**type II** $T(a,b;i_1,\ldots,i_{2t})$ $(1 \leq a < i_1 < \cdots < i_{2t} \leq n,\ 1 \leq i_1 \leq b \leq n$, ここに $T(a,b;i_1,\ldots,i_{2t})$ は 系 1.4 のものと同じである。

**type III** $0 \leq a \leq [\log_2 t]$ とする。$1 \leq i(1) < \cdots < i(2t+2^{a+1}) \leq n$ となる $\underline{i} = (i(1), \ldots, i(2t+2^{a+1}))$ に対して、ラプラス展開の公式により、

$$\varphi\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2t,2^{a+1}}} (-1)^{\sigma} \langle i(\sigma(2t+1)), \ldots, i(\sigma(2t+2^{a+1}))\rangle \otimes [\sigma 1, \ldots, \sigma(2t)]\right)$$
$$= \binom{t+2^a}{t} \langle i(1), \ldots, i(2t+2^{a+1})\rangle$$

が成立する。一方、余因子展開の公式のみを繰り返し使って得られる展開

$$\langle i(1), \ldots, i(2t+2^{a+1})\rangle = \sum_{\underline{j}} A(\underline{j}) \cdot \langle i(j_1), \ldots, i(j_{2t})\rangle$$

が存在する ($A(\underline{j}) \in S$)。このような展開を fix すると、

$$W(\underline{i}) \stackrel{def}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2t,2^{a+1}}} (-1)^{\sigma} \langle i(\sigma(2t+1)), \ldots, i(\sigma(2t+2^{a+1}))\rangle \otimes [\sigma 1, \ldots, \sigma(2t)]$$
$$-\binom{t+2^a}{t} \sum_{\underline{j}} A(\underline{j}) \otimes [i(j_1), \ldots, i(j_{2t})]$$

は $\operatorname{Ker}\varphi$ の元である。

**命題 1.6** $K$ が標数 2 の体の時、$\operatorname{Ker}\varphi$ は **type I-III** の relations で minimal に生成される。

# 2 定理の証明の概略

$K$ は可換環、$\phi : V_1 \to V_0$ は finie free $K$-modules の準同型とする ($\operatorname{rank} V_0 = m$, $\operatorname{rank} V_1 = n$)。$\phi$ は長さ 1 の finite free $K$-complex とみなすことが出来る。chain map $\tau : \phi \otimes \phi \to \phi \otimes \phi$ が $\tau(v_i \otimes w_j) = (-1)^{1+ij}(w_j \otimes v_i)$ ($v_i \in V_i$, $w_j \in V_j$) によって定まる。chain map $\tau_i : \phi^{\otimes r} \to \phi^{\otimes r}$ を $\mathrm{id}_{\phi^{\otimes i-1}} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_{\phi^{\otimes r-i-1}}$ $(1 \leq i \leq r-1)$ によって定義すると、relation $\tau_i^2 = \mathrm{id}$, $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$ ($|i-1| \geq 2$), $\tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}$ を充す。従って、$r$ 次対称群 $\mathfrak{S}_r$ が $K$-complex $\phi^{\otimes r}$ に $(i\, i+1) \mapsto \tau_i$ によって作用する。

$K$ が標数 0 の場合を考える。$r \geq 0$ に対して、$\bigwedge^r \phi$ は invariant subcomplex $(\phi^{\otimes r})^{\mathfrak{S}_r}$ として定義される。inclusion map $\bigwedge^r \phi \to \phi^{\otimes r}$ を $\Delta_r$ で表わす。$\bigwedge^r \phi^*$ の dual complex $(\bigwedge^r \phi^*)^*$ を $S_r\phi$ で表わす。合成射

$$\phi^{\otimes r} \cong ((\phi^*)^{\otimes r})^* \xrightarrow{\Delta_r^*} S_r\phi$$

を $m_r$ で表わす。patition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ (このように書いたら、$\lambda_i = 0$ $(i > s)$ を意味するものとする) に対して、

$$\textstyle\bigwedge_\lambda \phi \stackrel{def}{=} \bigwedge^{\lambda_1} \phi \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{\lambda_s} \phi$$
$$S_\lambda \phi \stackrel{def}{=} S_{\lambda_1}\phi \otimes \cdots \otimes S_{\lambda_s}\phi$$

と定義する。

Partition $\lambda$ に対して、$\lambda$ の *diagram* $\Delta_\lambda$ は $\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid j\le\lambda_i\}$ として定義される。$\Delta_\lambda$ に全順序 $\le_r$ と $\le_c$ をそれぞれ

$$(i,j)<_r(i',j')\Leftrightarrow i<i' \text{または} i=i', j<j'$$
$$(i,j)<_c(i',j')\Leftrightarrow j<j' \text{または} j=j', i<i'$$

によって導入する。$k=|\lambda|\ (=\sum_i\lambda_i=\#\Delta_\lambda)$ とおく。$(\Delta_\lambda,\le_r)$ および $(\Delta_\lambda,\le_c)$ から $[1,k]=\{1,\ldots,k\}$ への一意的な順序同型をそれぞれ $T(\lambda)$, $T'(\lambda)$ で表わす。$T'(\lambda)\circ T(\lambda)\in \mathrm{Aut}[1,k]=\mathfrak{S}_k$ を $\tau_\lambda$ で表わす。このとき、$d_\lambda:\bigwedge_\lambda\phi\to S_{\tilde\lambda}\phi$ を

$$\begin{aligned}\textstyle\bigwedge_\lambda\phi=\bigwedge^{\lambda_1}\phi\otimes\cdots\otimes\bigwedge^{\lambda_s}\phi&\xrightarrow{\Delta_{\lambda_1}}\otimes\Delta_{\lambda_s}\\ \phi^{\otimes\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\phi^{\otimes\lambda_s}&\cong\phi^{\otimes k}\xrightarrow{\tau_\lambda}\phi^{\otimes k}\\ &\cong\phi^{\otimes\tilde\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\phi^{\otimes\tilde\lambda_t}\xrightarrow{m_{\tilde\lambda_1}\otimes\cdots\otimes m_{\tilde\lambda_t}}\\ &S_{\tilde\lambda_1}\phi\otimes\cdots\otimes S_{\tilde\lambda_t}\phi=S_{\tilde\lambda}\phi\end{aligned}$$

の合成射によって定義する。$\mathrm{Im}\, d_\lambda$ を $L_\lambda\phi$ によって表わし、$\phi$ の $\lambda$ に関する *Schur complex* と呼ぶ。

$K$ が一般の標数の時には、$K_0=\mathbb{Z}[x_{ij}]_{1\le i\le m,1\le j\le n}$ を考え、$W_0=K_0^m$, $W_1=K_0^n$ とおき、$\phi_0:W_1\to W_0$ を行列 $(x_{ij})$ で表わされる map だとする。$\phi$ は、$V_1$ と $V_0$ の basis を固定すると、行列 $(a_{ij})$ で表わされる。$x_{ij}\mapsto a_{ij}$ によって $K$ は $K_0$ algebra になる。$V_i=K\otimes_{K_0}W_i\ (i=1,2)$, $\phi=K\otimes_{K_0}\phi_0$ と同一視される。このとき、$\bigwedge_\lambda\phi\stackrel{def}{=}K\otimes_{K_0}\bigwedge_\lambda\phi_0$, $S_\lambda\phi\stackrel{def}{=}K\otimes_{K_0}\bigwedge_\lambda\phi_0$, $d_\lambda\phi=\mathrm{id}_K\otimes d_\lambda\phi_0$ と定義する。この定義は行列 $(a_{ij})$ を決めるのに使った $V_0, V_1$ の basis のとり方によらないことが check できる。

**定理 2.1** (**[3]**) 上の記号の下で、次が成り立つ。

**1** $\mathrm{Im}\, d_\lambda\phi\cong K\otimes_{K_0}L_\lambda\phi_0$. この $K$-complex を $L_\lambda\phi$ と定義する。

**2** $L_\lambda\phi$ は finite free $K$-complex である。

**3** $L_\lambda\phi$ の degree $|\lambda|$-component は $K$-module として、$K_\lambda V_1$ と同型。

**4** Finite free $K$-modules の完全列

$$0\to G\xrightarrow{\psi}F\xrightarrow{\varphi}E\to 0$$

に対して、$H_i(L_\lambda\varphi)=0\ (i\ne|\lambda|)$, $H_{|\lambda|}(L_\lambda\varphi)\cong K_\lambda G$ が成立する。とくに、$\phi$ が同型で、$|\lambda|\ne 0$ ならば、$L_\lambda\phi$ は exact である。

$K$-complex

$$C=\cdots\to C_{i+1}\to C_i\to C_{i-1}\to\cdots$$

に対して、 $C_{\leq k}$ は $C$ の subcomplex

$$\cdots \to 0 \to 0 \to C_k \to C_{k-1} \to \cdots$$

と定義する。$(\bigwedge^k \phi)_{\leq k-t}$ を $\bigwedge^{t,k} \phi$ で表わす。patition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ に対して、

$$\bigwedge_{t,\lambda} \phi \stackrel{def}{=} \bigwedge^{t,\lambda_1} \phi \otimes \bigwedge^{\lambda_2} \phi \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{\lambda_s} \phi$$

と定義する。$(d_\lambda \phi)(\bigwedge_{t,\lambda} \phi) \subset L_\lambda \phi$ を $L_{t,\lambda}\phi$ で表わし、 $\phi$ の $\lambda$ に対応した $t$-Schur complex と呼ぶ。$t$-Schur complex の homology が determinantal ideal の syzygy に深く関わりがあることが最近分かった [18], [7]。実は、 $t$-Schur complex は Pfaffian ideal の syzygy を求めるのにもある程度使える。以下、 $K$ は標数 $p$ の体であるとする。前節の記号の下で、求めるべき数 $\beta^p_{ij}$ は $i \geq 1$ のとき、

$$\left[\mathrm{Tor}^R_i(R/R_+, R/\mathrm{Pf}_{2t})\right]_j \cong H_i([R/\mathrm{Pf}_{2t} \otimes_R K_\bullet]_j) \cong H_{i-1}([\mathrm{Pf}_{2t} \otimes_R K_\bullet]_j)$$

であった。ここに $K_\bullet$ は変数 $x_{ij}$ に関する Koszul complex である。

**命題 2.2** $j \leq 2t$ のとき、$[\mathrm{Pf}_{2t} \otimes_R K_\bullet]_j$ の filtration $\mathcal{F}$ でその associated graded complex が

$$\bigoplus_{\lambda:\text{partition}, |\lambda|=j} L_{t+\lambda_1, 2\lambda}\mathrm{id}_V$$

となるものが存在する。ここに、 partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ に対して、$2\lambda = (2\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots)$ である。

上の filtration $\mathcal{F}$ はきわめて具体的に構成されるものだが、その定義は複雑なので、割愛せざるを得ない。上の命題により、ある spectral sequence $E$ で、$E^\infty$ の次元によって $\beta^p_{2,j}$ $(j \leq 2t)$ が計算でき、 $E^1$ が $H_1(L_{t+\lambda_1, 2\lambda}\mathrm{id}_V)$ の直和になっているものが存在する。$j > 2t$ なら、 $\beta^p_{2,j} = 0$ なので、 $H_1(L_{t,\lambda}\mathrm{id}_V)$ をすべての $t, \lambda$ に関して求めることにより、ある程度の情報が得られるわけである。

**命題 2.3** $\lambda$ は partition とする。このとき、

$$H_1(L_{t,\lambda}\mathrm{id}_V) \cong \begin{cases} K_{(2,1^{t-1})}V & (\lambda = (t+1)) \\ \bigwedge^{|\lambda|} V & (\exists i \geq 0 \lambda = (t, p^i)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここに、 $0^0 = 1$ であると思う。

命題の証明には、 Akin-Buchsbaum [2] による length 2 の partition に関する Schur module の exterior power のテンソル積の直和による resolution を用いる。命題 2.3 によって、$E^1$-term が完全に決定され、多くの $\lambda$ に関して、 $E^1$-term が (universal coefficient theorem によって $E^\infty$-term も) 標数に depend しない事が分かった。$H_1(L_{t+\lambda_1, 2\lambda}\mathrm{id}_V)$ が標数によるのは、 $\lambda_1 = t$, $2\lambda_2 = p^i$ $(\exists p > 0)$ の場合だけで、このような $p$ は 2 以外にないか

ら、$p \neq 2$ なら、$\beta^p_{2,j}$ は $\beta^0_{2,j}$ と一致する。$p=2$ の場合については、具体的な手計算によって 問題となる partition の $E^2$-term 以降を調べ上げ、定理の結論に至った。

以上が定理の証明の概略であるが、$L_{t,\lambda}\mathrm{id}_V$ の homology はある種の Grassman 多様体上の homogeneous vector bundle の cohomology として表わされる。この cohomology は $K$ の標数が 0 の時には Bott の定理（例えば Lascoux [16] をみよ）によって、計算されている。つまり、$L_{t,\lambda}\mathrm{id}_V$ の homology は完全に決定できる。一方、命題 2.3 をより高い次数に拡張することは、Bott の定理 (の特殊な場合) の標数 $p$ 版を作ることに当たるわけで、難しいように思われる。この方法を使ってより高い syzygy を求めるにはこの問題が解決される必要があるのだが…。

# 3 Pfaffian ideal の 2 乗と determinantal ideal

標数 0 の交代行列の Pfaffian ideal と determinantal ideal の間には、次の関係が存在する。

**定理 3.1** ([8], [1]) $K$ が $\mathbb{Q}$ を含む可換環、$(a_{ij}) \in \mathrm{Alt}_n(K)$ とする。このとき、

$$(\mathrm{Pf}_{2t}(a_{ij}))^2 = I_{2t}(a_{ij}) \tag{3.2}$$

$$\mathrm{Pf}_{2t-2}(a_{ij}) \cdot \mathrm{Pf}_{2t}(a_{ij}) = I_{2t-1}(a_{ij}) \tag{3.3}$$

$K$ の標数が $p>0$ のときはどうであろうか？このような問題のためには、$R = K[x_{ij}]$ と $(x_{ij}) \in \mathrm{Alt}_n(R)$ を考えれば十分である。

**定理 3.4** (**Cayley** [6] (**1849**)) $n=2t$ なら、3.2, 3.3 が、$n=2t+1$ ならば 3.2 が正しい。

ここでは 3.2 の方を考えることにする。実はこれには、簡単な反例がある。

**例 3.5** $K$ は標数 2 の体、$n=4, t=1$ とする。このとき、$(\mathrm{Pf}_2(x_{ij}))^2 = R^2_+$ であり、その生成元の個数は 21 である。一方、$I_2(x_{ij})$ は（標数 2 だから）$4\times 4$ 対称行列の 2-minors で生成される。よく知られているように、$n\times n$ 対称行列の $t$-minors で生成されるイデアルの生成元の個数は $\dim_K K_{(2^t)}K^n = \binom{n}{t}^2 - \binom{n}{t+1}\cdot\binom{n}{t-1}$ 以下である (例えば [12])。よって、$I_2(x_{ij})$ の生成元の個数は 20 以下である。

しからば、

$$I_2(x_{ij}) \subset (\mathrm{Pf}_2(x_{ij}))^2 \tag{3.6}$$

についてはどうであろうか？

**命題 3.7** $K$ は標数 2 の体、$n=7, t=2$ とする。このとき、$I_4(x_{ij}) \not\subset (\mathrm{Pf}_4(x_{ij}))^2 \not\subset I_4(x_{ij})$.

このように、3.2 は一般標数では submaximal case のみに起こる特殊な事である。なお、$n = 2t+1$ のときの $I_{2t}(x_{ij}) = (\mathrm{Pf}_{2t}(x_{ij}))^2$ は perfect であるが、 $(\mathrm{Pf}_{2t}(x_{ij}))^k$ $(k \geq 3)$ は $t \neq 1$ なら imperfect である。その resolution は $k \geq 2$ について、構成されている [15], [4]。

例 3.5 でも使ったように、標数 2 では、交代行列は対称行列である。従って、 generic な交代行列 $(x_{ij})$ について、 $I_{2t}(x_{ij})$ の生成元の個数は、 generic な対称行列の生成元の個数 $\dim_K K_{(2^t)}K^n$ を越えない。実は、これは一致する。

**命題 3.8** $K$ が標数 2 の体の時、$K$ 上の $n \times n$ generic alternating matrix の生成元の個数 $\mu(I_{2t}(x_{ij}))$ は $\dim_K K_{(2^t)}K^n$ である。ここに、 $K_{(2^t)}K^n$ は partition $(2,2,\ldots,2)$ に関する $K^n$ の Weyl module である。

*Proof.* $I_{2t}$ の degree $2t$-component $I_{2t,2t}$ の $K$ 上の次元が求める値である。$V = K^n$ とおく。$(x_{ij})$ は対称行列であるから、$I_{2t,2t}$ は $\mathrm{GL}(V)$-module として、$L_{2t,2t}V$ の homomorphic image である。ここに、 $L_{(2t,2t)}V$ は $K_{(2^t)}V$ の contravariant dual (partition $(2t, 2t)$ に関する $V$ の Schur module) である。$I_{2t,2t} \cong L_{(2t,2t)}V$ をいえばよい。$L_{(2t,2t)}V$ の weigt $(2^t)$-component は 1 次元で、 simple socle に含まれるから、$I_{2t,2t}$ が $L_{(2t,2t)}V$ の homomorphic image であることにより、$I_{2t,2t}$ の weight $(2^t)$-component が non-zero ならよい。ところが、左上隅の minor $\det(x_{ij})_{1\leq i,j\leq 2t}$ は $\langle 1,\ldots,2t\rangle^2 \neq 0$ と一致し、weight $(2^t)$ をもつ。 **Q.E.D.**

# 参考文献


[1] S. Abeasis and A. Del Fra, Young Diagrams and Ideals of Pfaffians, *Adv. in Math.* **35** (1980), 158-176.

[2] K. Akin and D. A. Buchsbaum, Characteristic-Free Representation Theory of the General Linear Group, *Adv. in Math.* **58** (1985), 149-200.

[3] K. Akin, D. A. Buchsbaum and J. Weyman, Schur Functors and Schur Complexes, *Adv. in Math.* **44** (1982), 207-278.

[4] G. Boffi and R. Sánchez, On the resolutions of the powers of the Pfaffian ideal, preprint.

[5] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebra structure for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension three, *Amer. J. Math.* **99** (1977), 447-485.

[6] A. Cayley, Sur les déterminants gauches, *J. Reine Angew. Math.* **38** (1849), 93-96.

[7] M. Hashimoto, Resolutions of determinantal ideals: $t$-minors of $(t+2) \times n$ matrices, *J. Alg.* **142** (1991), 456-491.

[8] P. Heymans, Pfaffians and skew-symmetric matrices, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **19** (1969), 730-768.

[9] T. Józefiak and P. Pragacz, Syzygies de Pfaffians, *C. R. Acad. Sci. Paris* **287** (1978), 89-91.

[10] T. Józefiak and P. Pragacz and J. Weyman, Resolutions of determinantal varieties and tensor complexes associated with symmetric and anti-symmetric matrix, *Astérisque* **87-88** (1981), 109-189.

[11] H. Kleppe and D. Laksov, The algebra structure and deformation of Pfaffian schemes, *J. Alg.* **64** (1980), 167-189.

[12] K. Kurano, On Relations on Minors of Generic Symmetric Matrices, *J. Alg.* **124** (1989), 388-413.

[13] K. Kurano, Relations on Pfaffians I: Plethysm Formulas, *to appear in J. Math. Kyoto Univ.*

[14] K. Kurano, Relations on Pfaffians II: A counterexample, *to appear in J. Math. Kyoto Univ.*

[15] A. R. Kustin and B. Ulrich, A family of complexes associated to an almost alternating map, with applications to residual intersections, preprint.

[16] A. Lascoux, Syzygies des varietiés déterminantales, *Adv. in Math.* **30** (1978), 202-237.

[17] P. Pragacz, Characteristic free resolution of $(n-2)$-order Pfaffians of $n \times n$ anti-symmetric matrix, *J. Alg.* **78** (1982), 386-396.

[18] J. Roberts and J. Weyman, A short proof of a theorem of M. Hashimoto, *J. Alg.* **134** (1990), 144-156.

[19] P. Roberts, "Homological invariants of modules over commutative rings," Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal (1980).

# $\mathbb{A}^3$ 及び $\mathbb{P}^3$ 内の monomial curve によって定まるある環の Cohen-Macaulay 性について

中村 幸男

東京都立大学

## 1 序

$A = k[X,Y,Z]$, $k[U]$ を体 $k$ 上の多項式環とし $k$-algebra map $\varphi : A \to k[U]$ を $\varphi(X) = U^l$, $\varphi(Y) = U^m$, $\varphi(Z) = U^n$, 但し、 $l$, $m$, $n \in \mathbb{N}$ は $\mathrm{gcm}(l,m,n) = 1$ であるものとする。$p(l,m,n) = \mathrm{Ker}\,\varphi$ とおき $p = p(l,m,n)$ の symbolic Rees 代数 $R_s(p) = \sum_{i\geq 0} p^{(i)}t^i$ ($t$ は $A$ 上の不定元) の部分環 $S = A[pt, p^{(2)}t^2]$ の環論的性質について考察する。

1989 年に J. Herzog と B. Ulrich [7] は $p$ が self-linked (i.e., $\exists x_1, x_2 \in p$ s.t. $p = (x_1, x_2) : p$) ならば $S$ は Gorenstein 環となることを証明し、また self-linked でない場合の例として $p = p(7,9,10)$ に対して $S$ は Cohen-Macaulay type $\mathrm{r}(S) = 3$ の Cohen-Macaulay 環となることを示した。後に、1990 年、後藤-西田-下田 [4] によって $p$ が self-linked でない場合に $S$ が Cohen-Macaulay 環となる充分条件を与が与えられ、このとき $\mathrm{r}(S) = 3$ となることと、$p = p(13,14,17)$ に対して $S$ は Cohen-Macaulay 環とならないことが証明された。

主張を述べるために少し準備を行なう。Herzog [5] によれば $p$ が complete intersection でないとき $p$ は次の型の行列 $M$ の 2 次の小行列式で生成されることが知られており、

$$M = \begin{bmatrix} X^{a_1} & Y^{b_1} & Z^{c_1} \\ Y^{b_2} & Z^{c_2} & X^{a_2} \end{bmatrix} \quad (\text{但し、} a_i, b_i, c_i \text{ は正整数})$$

一方で [7] によって $p$ が self-linked でないことと $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $c_1 > c_2$ または $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$ のどちらかが成り立つこととが同値であることが知られている。そこで主張は次の様に述べられる。

**定理 1.1** 行列 $M$ は $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $c_1 > c_2$ となっているものと仮定すると、次は同値である。

*(1)* $S = A[pt, p^{(2)}t^2]$ が *Cohen-Macaulay* 環である。

*(2)* $(a_1 - 2a_2)(b_1 - 2b_2)(c_1 - 2c_2) \geq 0.$

そしてこの時 $\mathrm{r}(S) = 3.$

この定理 1.1 の条件 (2) は [4] で与えられたものである。また、Gorenstein 環は Cohen-Macaulay type で特徴付けられたので、定理 1.1 よりただちに $S$ が Gorenstein 環であることと $p$ が self-linked なイデアルであることとが同値であることがわかる。

つぎに $\mathbb{P}^3$ 内のある monomial curve に対して同様の議論を行うことを試みる。$B = k[X,Y,Z,W]$ と $k[U,V]$ を多項式環として $k$-algebra map $\Phi : B \to k[U,V]$ を$\Phi(X) = U^l$, $\Phi(Y) = U^m V^{l-m}$, $\Phi(Z) = U^n V^{l-n}$, $\Phi(W) = V^l$, 但し、$l > m$, $l > n$, $m \neq n$, $\mathrm{gcm}(l,m,n) = 1$ となるものとして定め、$P = \mathrm{Ker}\,\Phi$ に対して $B$-代数 $T = B[Pt, P^{(2)}t^2]$ の Cohen-Macaulay 性 及び $P$ の self-linked 性について考察する。

## 2　定理 1.1 の証明

$A = k[X,Y,Z]$, $k[U]$ を体 $k$ 上の多項式環、$\varphi : A \to k[U]$ を、次で定まる $k$-algebra map とする。$\varphi(X) = U^l$, $\varphi(Y) = U^m$, $\varphi(Z) = U^n$, 但し、$l$, $m$, $n$ は正整数で $\mathrm{gcm}(l,m,n) = 1$.

このとき、$p = p(l,m,n) = \mathrm{Ker}\,\varphi$ は complete intersection でないとき、$p$ は次の型の行列 $M$ の 2 次の小行列式で生成されることが知られている (cf. [5]) 。

$$M = \begin{bmatrix} X^{a_1} & Y^{b_1} & Z^{c_1} \\ Y^{b_2} & Z^{c_2} & X^{a_2} \end{bmatrix} \quad (\text{但し、} a_i,\ b_i,\ c_i \text{ は正整数。})$$

$p$ の生成元を次のようにかくことにする。

$$e_1 = Z^{c_1+c_2} - X^{a_2}Y^{b_1},\ e_2 = X^{a_1+a_2} - Y^{b_2}Z^{c_1} \text{ and } e_3 = Y^{b_1+b_2} - X^{a_1}Z^{c_2},$$

また、次の記号を与える。

$$\begin{array}{lll} a = \min\{a_1, a_2\} & a_3 = \max\{a_1 - a_2, 0\} & a_3' = \max\{0, a_2 - a_1\} \\ b = \min\{b_1, b_2\} & b_3 = \max\{b_1 - b_2, 0\} & b_3' = \max\{0, b_2 - b_1\} \\ c = \min\{c_1, c_2\} & c_3 = \max\{c_1 - c_2, 0\} & c_3' = \max\{0, c_2 - c_1\}. \end{array}$$

**補題 2.1** *([3],[10],[12])* $\Delta \in p^{(2)}$ で、

$$X^a\Delta - Y^{b_3}Z^{c_3'}e_2^2 + Y^{b_3'}Z^{c_3}e_1e_3 = 0,$$

$$Y^b\Delta - X^{a_3'}Z^{c_3}e_3^2 + X^{a_3}Z^{c_3'}e_1e_2 = 0,$$

$$Z^c\Delta - X^{a_3}Y^{b_3'}e_1^2 + X^{a_3'}Y^{b_3}e_2e_3 = 0,$$

$$p^{(2)} = p^2 + (\Delta).$$

をみたすものが存在する。

Proof. [3, Proposition 2.4], [3, Corollary 2.5], [10, Lemma 2.3] を見よ。□

$R = A[T_1, T_2, T_3, T_4]$, $A[t]$ を多項式環とし、$A$-algebra map $\psi : R \to A[t]$ を次のように定める。$\psi(T_i) = e_it$ $(i = 1,2,3)$, $\psi(T_4) = \Delta t^2$. このとき、$J = \mathrm{Ker}\,\psi$ は $R$ の高さ 3 の素イデアルで次の五個の元を含む。

$$
\begin{aligned}
f_1 &= X^{a_1}T_1 + Y^{b_1}T_2 + Z^{c_1}T_3,\\
f_2 &= Y^{b_2}T_1 + Z^{c_2}T_2 + X^{a_2}T_3,\\
g_1 &= X^{a}T_4 - Y^{b_3}Z^{c_3'}T_2^2 + Y^{b_3'}Z^{c_3}T_1T_3,\\
g_2 &= Y^{b}T_4 - X^{a_3'}Z^{c_3}T_3^2 + X^{a_3}Z^{c_3'}T_1T_2,\\
g_3 &= Z^{c}T_4 - X^{a_3}Y^{b_3'}T_1^2 + X^{a_3'}Y^{b_3}T_2T_3.
\end{aligned}
$$

さらに $f_1$, $f_2$, $g_1$, $g_2$, $g_3$ は次の交代行列の 4 次の pfaffian となっていることが確かめられる。

$$
\begin{bmatrix}
0 & Z^{c_3'}T_2 & X^{a_3'}T_3 & Y^{b_3'}T_1 & T_4\\
-Z^{c_3'}T_2 & 0 & Y^b & -X^a & Z^{c_3}T_3\\
-X^{a_3'}T_3 & -y^b & 0 & Z^c & X^{a_3}T_1\\
-Y^{b_3'}T_1 & X^a & -Z^c & 0 & Y^{b_3}T_2\\
-T_4 & -Z^{c_3}T_3 & -X^{a_3}T_1 & -Y^{b_3}T_2 & 0
\end{bmatrix}.
$$

また、$A[T_1,T_2,T_3]/(f_1,f_2) \cong R(p)$ (the Rees algebra of $p$) は整域 (cf. [15, Theorem 3.6]) なので、$f_1$, $f_2$, $g_1$ は $R$-正則列をなす。よって、[1, Theorem 2.1] より、$I = (f_1, f_2, g_1, g_2, g_3)R$ とおいて次の補題を得る。

**補題 2.2** *([4, Lemma (3.2)]) $R/I$ は 4 次元 Gorenstein 環である。*

もし、$p$ に対して $p = (x_1, x_2) : p$ となる 2 個の元 $x_1, x_2 \in p$ が存在するならば、$p$ は "self-linked" であるといわれ、Herzog と Ulrich は次を示した。

**補題 2.3** *([7, Corollary 1.10]) 次は同値である。*

*(1) $p$ は self-linked でない。*

*(2) 行列 $M$ は次の何れかを充す。*

*(a) $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$ and $c_1 > c_2$.*

*(b) $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ and $c_1 < c_2$.*

$\mathfrak{m} = (X, Y, Z)R$ とおく。$I$ の生成元 $f_1$, $f_2$, $g_1$, $g_2$, $g_3$ の形から、$p$ が self-linked でないことと $I \subset \mathfrak{m}$ とが同値であることが確かめられる。さらに、次の補題により、$p$ が self-linked であることと $I = J$ とが同値であることもわかる。

**補題 2.4** *([4, Lemma 3.3]) $\mathrm{Ass}_R\, R/I \subset \{J, \mathfrak{m}\}$ and $IR_J = JR_J$.*

このことから $p$ が self-linked でないとき、$I$ は $I = J \cap Q$ という形の 準素分解をもつことがわかる、但し $Q$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。

**命題 2.5** *$p$ は self-linked でないとする。次は同値である。*

*(1)* $S=A[pt,p^{(2)}t^2]$ が *Cohen-Macaulay* 環である。

*(2)* $IR_{\mathfrak{m}}\cap R=(X^\alpha,Y^\beta,Z^\gamma)R$ となる $\alpha,\beta,\gamma\geq 1$ が存在する。

このとき、$\mathrm{r}(S)=3$.

証明： $I$ は ある $\mathfrak{m}$-準素イデアル Q によって $I=J\cap Q$ という形の準素分解をもち、$[I:_R J]=Q$, $[I:_R Q]=J$ が成り立つ。従って、[9, Proposition 3.1] によれば、$S=R/J$ が Cohen-Macaulay であることと $R/Q$ が Cohen-Macaulay であることとが同値であり、(2) ならば (1) がわかる。$\mathfrak{M}=(X,Y,Z,T_1,T_2,T_3,T_4)R$ とおく。$K_S$ を $S$ の canonical module とすれば、$K_S=\mathrm{Hom}_{R/I}(R/J,R/I)\cong[I:_R J]/I=Q/I$ なので、$\mathrm{r}(S)=\ell_R(Q/I+\mathfrak{M}Q)=\ell_R(Q/\mathfrak{M}Q)=3$ である。

(1) を仮定する。$a_1>a_2$, $b_1>b_2$, $c_1>c_2$ と仮定してよいから$\alpha=\min\{a_2,a_3\},\beta=\min\{b_2,b_3\}$, $\gamma=\min\{c_2,c_3\}$ は正整数であり、$(X^\alpha,Y^\beta,Z^\gamma)R$ は $I$ を含む $\mathfrak{m}$-準素イデアルとなるので、$(X^\alpha,Y^\beta,Z^\gamma)R\supset Q$.

逆の包含を示そう。$\mathrm{rad}(Q+(T_1,T_2,T_3,T_4)R)=\mathfrak{M}$ で $R/Q$ は Cohen-Macaulay 環なので、$T_1,T_2,T_3,T_4$ は $(R/Q)_{\mathfrak{M}}$-正則列。よって $(T_1,T_2,T_3,T_4)R\cap Q=(T_1,T_2,T_3,T_4)Q$ が成り立つ。

今 $R$ を次の次数で次数環とみる。$\deg X=\deg Y=\deg Z=0$, $\deg T_1=\deg T_2=\deg T_3=1$, $\deg T_4=2$. $Q$ は斉次イデアルであるから、$Q$ の斉次な生成元を $u_1$, $u_2,\ldots$, $u_s\in Q\cap R_0$, $v_1$, $v_2,\ldots$, $v_t\in Q\cap\bigoplus_{i\geq 1}R_i$ ととることができる。$q=(u_1,u_2,\ldots,u_s)A$ は $A$ のイデアルであり、各 $v_i$ は $v_i\in Q\cap(T_1,T_2,T_3,T_4)R=(T_1,T_2,T_3,T_4)Q$. よって $Q=qR+(T_1,T_2,T_3,T_4)Q$ なので、中山の補題より $Q=qR$.

$f_1=X^{a_1}T_1+Y^{b_1}T_2+Z^{c_1}T_3\in qR$ であり、よって $X^{a_1}T_1$, $Y^{b_1}T_2$, $Z^{c_1}T_3\in qR$ であるから、$X^{a_1}$, $Y^{b_1}$, $Z^{c_1}\in q$. $f_2$, $g_1$, $g_2$, $g_3$ にも同様にして

$$(X^{a_1},Y^{b_1},Z^{c_1},X^{a_2},Y^{b_2},Z^{c_2},X^{a_3},Y^{b_3},Z^{c_3})A\subset q$$

となるから $(X^\alpha,Y^\beta,Z^\gamma)R\subset qR=Q$ がわかる。□

つぎに $S$ の Cohen-Macaulay 性を行列 $M$ の言葉で書き表すことを試みる。$p$ は self-linked でないものとし $a_1>a_2$, $b_1>b_2$, $c_1>c_2$ となっているものと仮定する。さらに、$\alpha=\min\{a_2,a_3\}$, $\beta=\min\{b_2,b_3\}$, $\gamma=\min\{c_2,c_3\}$ とおくことにする。行列 $U$ を

$$U=\begin{bmatrix} X^{a_2-\alpha}T_4 & X^{a_3-\alpha}T_1T_2 & -X^{a_3-\alpha}T_1^2 \\ -Y^{b_3-\beta}T_2^2 & Y^{b_2-\beta}T_4 & Y^{b_3-\beta}T_2T_3 \\ Z^{c_3-\gamma}T_1T_3 & -Z^{c_3-\gamma}T_3^2 & Z^{c_2-\gamma}T_4 \end{bmatrix}.$$

とおく。すると、

**補題 2.6** $(a_1-2a_2)(b_1-2b_2)(c_1-2c_2)\geq 0$ と $\det U\notin\mathfrak{m}$ とは同値である。

証明：　$U$ の行列式を計算すれば、

$$\begin{aligned}\det U &= X^{a_2-\alpha}Y^{b_2-\beta}Z^{c_2-\gamma}T_4^3 + X^{a_3-\alpha}Y^{b_2-\beta}Z^{c_3-\gamma}T_1^3T_3T_4 \\ &\quad + X^{a_3-\alpha}Y^{b_3-\beta}Z^{c_2-\gamma}T_1T_2^3T_4 + X^{a_2-\alpha}Y^{b_3-\beta}Z^{c_3-\gamma}T_2T_3^3T_4.\end{aligned}$$

これより $\det U \notin \mathfrak{m}$ は次のどれかが成り立つことと同値である。

(1) $X^{a_2-\alpha}Y^{b_2-\beta}Z^{c_2-\gamma} = 1.$

(2) $X^{a_3-\alpha}Y^{b_2-\beta}Z^{c_3-\gamma} = 1.$

(3) $X^{a_3-\alpha}Y^{b_3-\beta}Z^{c_2-\gamma} = 1.$

(4) $X^{a_2-\alpha}Y^{b_3-\beta}Z^{c_3-\gamma} = 1.$

これらは、書き換えて

(1)' $a_1 - 2a_2 \geq 0,\ b_1 - 2b_2 \geq 0,\ c_1 - 2c_2 \geq 0.$

(2)' $a_1 - 2a_2 \leq 0,\ b_1 - 2b_2 \geq 0,\ c_1 - 2c_2 \leq 0.$

(3)' $a_1 - 2a_2 \leq 0,\ b_1 - 2b_2 \leq 0,\ c_1 - 2c_2 \geq 0.$

(4)' $a_1 - 2a_2 \geq 0,\ b_1 - 2b_2 \leq 0,\ c_1 - 2c_2 \leq 0.$

となることから結論が確かめられる。□

**定理 1.1 の証明**　$\det U \notin \mathfrak{m}$ と $IR_\mathfrak{m} = (X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma)R_\mathfrak{m}$ とが同値であることを示せば充分である。$L = (X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma)R$ とおく。行列 $V$ を

$$V = \begin{bmatrix} X^{a_1-\alpha}T_1 & X^{a_2-\alpha}T_3 & X^{a_2-\alpha}T_4 & X^{a_3-\alpha}T_1T_2 & -X^{a_3-\alpha}T_1^2 \\ Y^{b_1-\beta}T_2 & Y^{b_2-\beta}T_1 & -Y^{b_3-\beta}T_2^2 & Y^{b_2-\beta}T_4 & Y^{b_3-\beta}T_2T_3 \\ Z^{c_1-\gamma}T_3 & Z^{c_2-\gamma}T_2 & Z^{c_3-\gamma}T_1T_3 & -Z^{c_3-\gamma}T_3^2 & Z^{c_2-\gamma}T_4 \end{bmatrix}.$$

で定める。すると、行列の積で次のようにかけている。

$$[f_1, f_2, g_1, g_2, g_3] = [X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma]V,$$

$$[g_1, g_2, g_3] = [X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma]U.$$

行列 $V$ を $V = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$ とおけば、$v_1 \in \mathfrak{m}R^3$ で $T_4v_2 = T_3v_3 + T_1v_4 + T_2v_5$ であることが計算で確かめられるので、$I$ は剰余体 $K = R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ をテンソルしたところでは $g_1$, $g_2$, $g_3$ で生成されている。従って $I \otimes_R K = L \otimes_R K$ と $\det U \neq 0$ が同値となり目標とした結果が導かれる。□

**例 2.7**

$$\begin{aligned} p_1 &= p(n^2+2n+2, n^2+2n+1, n^2+n+1), \quad \text{但し} \quad n \geq 2, \\ p_2 &= p(n^2, n^2+1, n^2+n+1), \quad \text{但し} \quad n \geq 3, \\ p_3 &= p(n^2+n+1, n^2+2n-1, 2n^2-1), \quad \text{但し} \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

とする。

*(1) ([4, Example (3.7)])* $p = p_1$ と $p = p_2$ とに対し $S$ は *Cohen-Macaulay* 環で $\mathrm{r}(S) = 3$.

*(2)* $p = p_3$ に対し $S$ は *Cohen-Macaulay* 環でない。

Proof. $p_1, p_2, p_3$ はそれぞれ次の行列の 2 次の小行列式で生成されることからわかる。

$$\begin{bmatrix} X^n & Y^n & Z^{n+1} \\ Y & Z & X \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X^n & Y^n & Z^{n-1} \\ Y & Z & X \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X^n & Y^n & Z^n \\ Y & Z & X^{n-1} \end{bmatrix}.$$

□

# 3 The projective cases

本節では定理 1.1 の projective analogy なるものを考察する。はじめにその準備として多項式の斉次化について述べる (cf. [17, Chap.VII §.5]).

$A = k[X_1, X_2, ..., X_n]$ と $B = k[Y_0, Y_1, ..., Y_n]$ を次の次数で次数付き多項式環とする。

$$\eta_i = \deg X_i = \deg Y_i \ (i = 1, 2, ..., n) \ , \ \eta_0 = \deg Y_0.$$

但し、$\eta_0$ は正整数で各 $\eta_i$ を割り切るものとする。多項式 $g = g(Y_0, Y_1, ..., Y_n) \in B$ に対し $i_{Y_0}(g) \in A$ を次のように定める。

$$i_{Y_0}(g) = g(1, X_1, X_2, ..., X_n).$$

このとき、$i_{Y_0} : B \to A$ は $k$-algebra map となっている。

逆に $0 \neq f = f(X_1, X_2, ..., X_n) \in A$ に対して ${}^h f \in B$ を

$${}^h f = Y_0^{\deg f/\eta_0} f(\frac{Y_1}{Y_0^{\zeta_1}}, ..., \frac{Y_n}{Y_0^{\zeta_n}}),$$

但し、$\zeta_i = \eta_i/\eta_0$ と定める。$A$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して ${}^h\mathfrak{a}$ を $\{{}^h f \mid f \in \mathfrak{a}\}$ で生成される $B$ のイデアルとする。このとき $B$ の斉次イデアル $\mathfrak{b}$ に対して $Y_0$ が $B/\mathfrak{b}$-正則元ならば、$\mathfrak{b} = {}^h(i_{Y_0}(\mathfrak{b})A)$ となることが確かめられる。

**補題 3.1** $C = k[U_1, U_2, ..., U_m]$ と $D = k[V_0, V_1, ..., V_m]$ は多項式環で、$D$ は $\deg V_0 > 0$ の次数環で、$i_{V_0} : D \to C$ を上で定めた *k-algebra map* とする。$\Phi : B \to D$ を次数環の準同型で $\varphi : A \to C$ を環準同型とする。もし、$\varphi \circ i_{Y_0} = i_{V_0} \circ \Phi$ なら、$i_{Y_0}(\mathrm{Ker}\,\Phi)A = \mathrm{Ker}\,\varphi$ である。

証明： $i_{Y_0}(\mathrm{Ker}\,\Phi)A \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$ は明らか。逆を示す。$\xi \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ に対し、$\Phi({}^h\xi)$ は $D$ の斉次元であるが、$\Phi({}^h\xi) \in \mathrm{Ker}\, i_{V_0} = (V_0 - 1)D$ なので$\Phi({}^h\xi) = 0$. 故に、${}^h\xi \in \mathrm{Ker}\,\Phi$. 従って $i_{Y_0}({}^h\xi) = \xi$. □

次に $\mathbb{P}^3$ 内のある monomial curve を考察する。$B = k[X, Y, Z, W]$ と $k[U, V]$ は体 $k$ 上の多項式環とし、$k$-algebra map $\Phi : B \to k[U, V]$ を$\Phi(X) = U^l$, $\Phi(Y) = U^m V^{l-m}$, $\Phi(Z) = U^n V^{l-n}$, $\Phi(W) = V^l$, 但し、$l > m$, $l > n$, $m \neq n$, $\mathrm{gcm}(l, m, n) = 1$ となるものとして定め、$P(l, m, n) = \mathrm{Ker}\,\Phi$ とおく。すると、次のような横列が完全な可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & P(l,m,n) & \to & B = k[X,Y,Z,W] & \xrightarrow{\Phi} & k[U,V] \\
 & & \downarrow & & {\scriptstyle i_W}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle i_V} \\
0 & \to & p(l,m,n) & \to & A = k[X,Y,Z] & \xrightarrow{\varphi} & k[U]
\end{array}$$

但し、$\varphi$ は前節で定めた写像とする。さらに $\deg X = \deg Y = \deg Z = \deg W = l$, $\deg U = \deg V = 1$ と重さをいれることによって、次の系を得る。

**系 3.2** $\quad i_W(P(l, m, n))A = p(l, m, n)$.

以後、イデアル $P = P(l, m, n)$ に対して、$B/P$ は complete intersection でない Cohen-Macaulay 環であると仮定する。すると $P$ は行列

$$M' = \begin{bmatrix} X^{a_1}W^{d_1} & Y^{b_1} & Z^{c_1} \\ Y^{b_2} & Z^{c_2} & X^{a_2}W^{d_2} \end{bmatrix} \quad (\text{但し、} a_1 + d_1,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2,\ a_2 + d_2 \text{ は正整数})$$

の 2 次の小行列式で生成されることが知られている (cf. [8],[14]). そこで、$\varepsilon_1 = Z^{c_1+c_2} - X^{a_2}W^{d_2}Y^{b_1}$, $\varepsilon_2 = X^{a_1+a_2}W^{d_1+d_2} - Y^{b_2}Z^{c_1}$, $\varepsilon_3 = Y^{b_1+b_2} - X^{a_1}W^{d_1}Z^{c_2}$ とおけば $P = P(l, m, n)$ は $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ で生成されるが、系 3.2 によれば $p = p(l, m, n)$ は $i_W(\varepsilon_1)$, $i_W(\varepsilon_2)$, $i_W(\varepsilon_3)$ で生成されると考えられる。故に、$p(l, m, n)$ を定義する行列 $M$ と $P(l, m, n)$ を定義する行列 $M'$ とは同じ指数 $a_i$ $b_i$, $c_i$ $(i = 1, 2)$ を持つと考えられる。

前節で定めた様に

$$d = \min\{d_1, d_2\} \quad d_3 = \max\{d_1 - d_2, 0\} \quad d_3' = \max\{0, d_2 - d_1\}$$

とおく。すると、命題 2.1 で述べた主張と同様の方法で、$\Gamma \in P^{(2)}$ が存在して次の関係式をみたすことが確かめられる。

$$X^a W^d \Gamma - Y^{b_3} Z^{c_3'} \varepsilon_2^2 + Y^{b_3'} Z^{c_3} \varepsilon_1 \varepsilon_3 = 0,$$
$$Y^b \Gamma - X^{a_3'} W^{d_3'} Z^{c_3} \varepsilon_3^2 + X^{a_3} W^{d_3} Z^{c_3'} \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0,$$
$$Z^c \Gamma - X^{a_3} W^{d_3} Y^{b_3'} \varepsilon_1^2 + X^{a_3'} W^{d_3'} Y^{b_3} \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 0.$$

さらに M. Moralés - A. Simis は $B/P^2 + (\Gamma)$ の resolution を具体的にもとめ次の補題を証明した。

**補題 3.3** *([11, (2.1.2) Lemma])* $P^{(2)} = P^2 + (\Gamma)$

以後、$B$ は重さが $\deg X = \deg Y = \deg Z = \deg W = 1$ の次数環であるとする。すると、$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \Gamma$ は斉次元であることが確かめられる。

$R' = B[T_1, T_2, T_3, T_4]$ と $B[t]$ は多項式環とし、$B$-algebra map $\Psi : R' \to B[t]$ を次のように定める。

$$\Psi(T_i) = \varepsilon_i t \ (i = 1,2,3) \ , \ \Psi(T_4) = \Gamma t^2.$$

さらに、

$$\deg T_i = \deg \varepsilon_i \ (i = 1,2,3) \ , \ \deg T_4 = \deg \Gamma \ , \ \deg t = 0$$

と重さをいれ、$\Psi$ が次数付き環準同型となるようにする。

**補題 3.4** $\Psi$ は $P = P(l, m, n)$ で定まる *$B$-algebra map* で、$\psi$ は $p = p(l, m, n)$ で定まる *$A$-algebra map* とする。このとき $i_W(\mathrm{Ker}\,\Psi)R = \mathrm{Ker}\,\psi$.

証明: $k$-algebra map $i_W : R' \to R$ と $i_W : B[t] \to A[t]$ に対して、系 3.2 より $\psi \circ i_W = i_W \circ \Psi$ がなりたつので 補題 3.1 より示される。□

次に、$T = \mathrm{Im}\,\Psi = B[Pt, P^{(2)}t^2]$ の Cohen-Macaulay 性について考察する。

**補題 3.5** $P = P(l, m, n)$, $p = p(l, m, n)$ とする。もし、$T = B[Pt, P^{(2)}t^2]$ が *Cohen-Macaulay* 環なら、$S = A[pt, p^{(2)}t^2]$ も *Cohen-Macaulay* 環である。

証明: $\mathrm{proj.dim}_{R'} T = 3$ で $R'_0 = k$ であるから、$T$ の $R'$-graded free resolution $\mathbf{F}.$

$$0 \to F_3 \xrightarrow{d_3} F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\Psi} T \to 0,$$

がとれる、ここで $F_0 = R'$ である。

また、自然な同一視 $(R'[1/W])_0 \cong R$ より $\mathbf{G}. = (\mathbf{F}. \otimes_{R'} R'[1/W])_0$ とおけば $\mathbf{G}.$ は acyclic $R$-free complex となる。$\mathrm{Ker}\,\Psi$ は $R'$ の斉次イデアルなので、上の同一視より、$i_W(\mathrm{Ker}\,\Psi)R \cong ((\mathrm{Ker}\,\Psi) \otimes_{R'} R'[1/W])_0$ がわかる。

$\partial_i$ を $\mathbf{G}.$ の $d_i$ から導かれる微分とすれば、補題 3.4 より

$$\mathrm{Ker}\,\psi = i_W(\mathrm{Ker}\,\Psi)R \cong ((\mathrm{Im}\,d_1) \otimes_{R'} R'[1/W])_0 = \mathrm{Im}\,\partial_1.$$

従って、

$$0 \to G_3 \xrightarrow{\partial_3} G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0 \xrightarrow{\psi} S \to 0$$

は完全列。故に、$S$ は Cohen-Macaulay 環。□

$J' = \mathrm{Ker}\,\Psi$ は $\mathrm{ht}_{R'} J' = 3$ の $R'$ の素イデアルであり、次の五個の元を含む。

$$\begin{aligned}
F_1 &= X^{a_1}W^{d_1}T_1 + Y^{b_1}T_2 + Z^{c_1}T_3,\\
F_2 &= Y^{b_2}T_1 + Z^{c_2}T_2 + X^{a_2}W^{d_2}T_3,\\
G_1 &= X^{a}W^{d}T_4 - Y^{b_3}Z^{c'_3}T_2^2 + Y^{b'_3}Z^{c_3}T_1T_3,\\
G_2 &= Y^{b}T_4 - X^{a'_3}W^{d'_3}Z^{c_3}T_3^2 + X^{a_3}W^{d_3}Z^{c'_3}T_1T_2,\\
G_3 &= Z^{c}T_4 - X^{a_3}W^{d_3}Y^{b'_3}T_1^2 + X^{a'_3}W^{d'_3}Y^{b_3}T_2T_3.
\end{aligned}$$

$I' = (F_1, F_2, G_1, G_2, G_3)R'$ とおけば、$I'$ と $J'$ は補題 2.2 と補題 2.4 で述べたものと同様な主張が成り立つ。すなわち、$\mathfrak{m}_1 = (X, Y, Z)R'$, $\mathfrak{m}_2 = (Y, Z, W)R'$ とおけば、

**補題 3.6** *([11, (2.2.1) Theorem])* 次が成り立つ。

*(1)* $R'/I'$ *5* 次元 *Gorenstein* 環。

*(2)* $\mathrm{Ass}_{R'} R'/I' \subset \{J', \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2\}$ で $I'R'_{J'} = J'R'_{J'}$.

これらの証明は、補題 2.2, 補題 2.4 と同様にして確かめられる。

**注意** 補題 3.6 を見てわかるように、$I' \neq J'$ であることは、$I' \subset \mathfrak{m}_1$ または $I' \subset \mathfrak{m}_2$ が成り立つことと同値である。さらに、$I'$ の生成元を観察することによって、$\mathfrak{m}_1 \in \mathrm{Ass}_{R'} R'/I'$ となることと行列 $M'$ が次の何れかをみたすこととが同値であることが確かめられる。

(1) $a_1 > a_2 > 0$, $b_1 > b_2$ and $c_1 > c_2$.

(2) $a_2 > a_1 > 0$, $b_2 > b_1$ and $c_2 > c_1$.

同様にして、$\mathfrak{m}_2 \in \mathrm{Ass}_{R'} R'/I'$ となることと行列 $M'$ が次の何れかをみたすこととが同値である。

(1) $d_1 > d_2 > 0$, $b_1 > b_2$ and $c_1 > c_2$.

(2) $d_2 > d_1 > 0$, $b_2 > b_1$ and $c_2 > c_1$.

さて、補題 3.5 の逆について考えて見よう。

**定理 3.7** 次は同値である。

*(1)* $P = P(l,m,n)$ に対して $T = B[Pt, P^{(2)}t^2]$ は *Cohen-Macaulay* 環。

*(2)* $p_1 = p(l,m,n)$ と $p_2 = p(l, l-m, l-n)$ に対して $A[p_1t, p_1^{(2)}t^2]$ と $A[p_2t, p_2^{(2)}t^2]$ は *Cohen-Macaulay* 環。

このとき、$T$ の *Cohen-Macaulay type* は次で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{r}(T) &= 1 \quad \textit{if} \quad I' = J' \\
&= 3 \quad \textit{if} \quad I' \neq J'.
\end{aligned}
$$

証明: (1) を仮定する。$B[Pt, P^{(2)}t^2]$ は $P = P(l, l-m, l-n)$ に対しても Cohen-Macaulay であるから、補題 3.5 より (2) は出る。

(2) と仮定する。$\mathrm{Ass}_{R'} R'/I' = \{J', \mathfrak{m}_1\}$ の場合 $I'$ は $I' = J' \cap Q$, 但し、$Q$ は斉次な $\mathfrak{m}_1$-準素イデアル、となる準素分解がとれるので、$J' = [I' :_{R'} Q]$ となる。従って、[9] より、$R'/Q$ が Cohen-Macaulay となることを示せば充分である。$I$ と $J$ を前節で定めた $R$ のイデアルとすると、補題 3.2 と補題 3.4 より $I = J \cap i_W(Q)R$ である。ここで $i_W(Q)R$ は

$(X,Y,Z)R$-準素イデアルであることに注意すると命題 2.5 より、ある $\alpha,\beta,\gamma \geq 1$ によって、$i_W(Q)R = (X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma)R$ となる。一方 $W$ は $R'/Q$-正則元であるから

$$Q = {}^h(i_W(Q)R) = {}^h((X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma)R) = (X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma)R'.$$

従って $R'/Q$ が Cohen-Macaulay を得る。また $Q = [I' :_{R'} J']$ がいえるので

$$K_T = \mathrm{Hom}_{R'/I'}(R'/J', R'/I') \cong [I' :_{R'} J']/I' = Q/I',$$

as $R'$-modules. 従って $\mathrm{r}(T) = \mu_{R'}(Q/I') = \mu_{R'}(Q) = 3$ となる。

$\mathrm{Ass}_{R'} R'/I' = \{J, \mathfrak{m}_2\}$ のときは $X$ と $W$ を取り替えることによって上の証明に従う。

$\mathrm{Ass}_{R'} R'/I' = \{J, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2\}$ の場合 $I'$ の準素分解は $I' = J' \cap Q_1 \cap Q_2$, 但し、$Q_i$ $(i=1,2)$ は斉次な $\mathfrak{m}_i$-準素イデアルとなるので $J' = [I' :_{R'} Q_1 \cap Q_2]$ であり、$R'/Q_1 \cap Q_2$ が Cohen-Macaulay であることを示せば充分である。$I$ と $J$ を前節で定めた $R$ のイデアルとすると、$I = J \cap i_W(Q_1)R$ である。よって、上で議論したようにある $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$ が存在して $Q_1 = (X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma)R'$ となる。同じ理由である $\delta, \beta', \gamma' \geq 1$ が存在して $Q_2 = (W^\delta, Y^{\beta'}, Z^{\gamma'})R'$ となる。

上の注意によれば次のどちらかが成り立つので、

(1) $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $c_1 > c_2$, $d_1 > d_2$.

(2) $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$, $d_1 < d_2$.

$\alpha, \beta, \gamma$ の定義から $\beta = \beta'$ かつ $\gamma = \gamma'$ がわかる。従って、$Q_1 \cap Q_2 = (X^\alpha W^\delta, Y^\beta, Z^\gamma)R'$ となり $R'/Q_1 \cap Q_2$ は Cohen-Macaulay である。また、$[I' :_{R'} J'] = Q_1 \cap Q_2 = (X^\alpha W^\delta, Y^\beta, Z^\gamma)R'$ となるので、同様にして、$K_{R'/J'} \cong Q_1 \cap Q_2/I'$ より $\mathrm{r}(T) = \mu_{R'}(Q_1 \cap Q_2) = 3$ がわかる。□

上の注意により、$T$ の Cohen-Macaulay type を行列 $M'$ の言葉で述べることができる。

**系 3.8** $T$ は *Cohen-Macaulay* 環で、行列 $M'$ は $b_1 \geq b_2$ を充すとする。このとき、

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(T) &= 3 \quad \textit{if} \quad a_1 > a_2 > 0 \ \textit{and} \ b_1 > b_2 \ \textit{and} \ c_1 > c_2, \ \textit{or} \\ & \qquad\qquad d_1 > d_2 > 0 \ \textit{and} \ b_1 > b_2 \ \textit{and} \ c_1 > c_2. \\ &= 1 \qquad \textit{otherwise}. \end{aligned}$$

最後に $P$ の self-linked 性について述べて本稿を終わりにしたいとおもう。

**系 3.9** $P$ が *self-linked* ならば、$T$ は *Gorenstein* 環である。

証明： $P = P(l,m,n)$, $p_1 = p(l,m,n)$, $p_2 = p(l, l-m, l-n)$ とおく。$P$ が self-linked なので $\beta_1, \beta_2 \in P$ で $P^2 \subset (\beta_1, \beta_2)$ となるものが存在する。$\alpha_i = i_W(\beta_i)$ $(i=1,2)$ とおけば、$A = k[X,Y,Z]$ のなかで $p_1^2 \subset (\alpha_1, \alpha_2) \subset p_1$. $p_1$ が素イデアルなので、このことから $p_1 = (\alpha_1, \alpha_2) : p_1$ が従う。故に $p_1$ が self-linked であり $A[p_1 t, p_1^{(2)} t^2]$ は Gorenstein 環となる。同様にして $p_2$ は self-linked で $A[p_2 t, p_2^{(2)} t^2]$ は Gorenstein 環。定理 3.7 より $T$ は Cohen-Macaulay 環であるが、$p_1$ と $p_2$ は self-linked なので補題 2.3 と系 3.8 により $\mathrm{r}(T) = 1$ となる。□

系 3.9 の逆は一般には成り立たない。

**例 3.10** $P = P(11, 5, 2)$ に対して $T$ は *Gorenstein* 環となるが、$P$ は *self-linked* でない。

証明： $P$ は行列

$$M' = \begin{bmatrix} X & Y^2 & Z^3 \\ Y & Z^2 & W^3 \end{bmatrix}.$$

の 2 次の小行列式で生成されるが、$a = d = 0$ なので $I' = J'$. よって $T$ は Gorenstein 環である。

$\mathfrak{N} = (X, Y, Z, W)B$ とおく。もし $P = I_2(M')$ が self-linked ならば $PB_{\mathfrak{N}}$ もそうである。$M' = (m_{ij})$ とおく。[7, Theorem 1.1] によれば、$2 \times 3$ 行列 $N = (n_{ij})$ ($n_{ij} \in B_{\mathfrak{N}}$) で $I_2(N) = B_{\mathfrak{N}}$ かつ $\sum_{i,j} m_{ij}n_{ij} = 0$ となるものが存在することと、$PB_{\mathfrak{N}}$ が self-linked であることが同値であることがわかるので、

$$Xn_{11} + Y^2n_{12} + Z^3n_{13} + Yn_{21} + Z^2n_{22} + W^3n_{23} = 0$$

$$Y(Yn_{12} + n_{21}) + Z^2(Zn_{13} + n_{23}) = -(Xn_{11} + W^3n_{23})$$

であり、$X, Y, Z, W$ は $B_{\mathfrak{N}}$-正則列なので、$Yn_{12} + n_{21} \in (X, Z, W)$, $Zn_{13} + n_{22} \in (X, Y, W)$, $Xn_{11} + W^3n_{23} \in (Y, Z)$ を得る。故に、$n_{11}$, $n_{21}$, $n_{22}$, $n_{23} \in \mathfrak{N}B_{\mathfrak{N}}$ で $I_2(N) \in \mathfrak{N}B_{\mathfrak{N}}$ となるので矛盾。□

# 参考文献


[1] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorem for ideals of codimension 3, *Amer. J. Math.*, **99** (1977), 447-485.

[2] S. Goto, K. Nishida and Y. Shimoda, The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves, *J. Math. Soc. Japan*, **43** (1991), 465-481.

[3] S. Goto, K. Nishida and Y. Shimoda, The Gorensteinness of the symbolic blow-ups for certain space monomial curves, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*

[4] S. Goto, K. Nishida and Y. Shimoda, Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves, to appear in *Nagoya Math. J.*

[5] J. Herzog, Generators and relations of abelian semigroups and semigroups ring, *manuscripta math.*, **3** (1970), 175-193.

[6] J. Herzog and E. Kunz Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings, *Lecture notes in Math.* **238**, Springer-Verlag.

[7] J. Herzog and B. Ulrich, Self-linked curve singularities, *Nagoya Math. J.*, **120** (1990), 129-153.

[8] Y. KAMOI, Defining ideal of a Cohen-Macaulay semigroup ring, to appear in *Comm. Alg.*

[9] E. KUNZ, Almost complete intersections are not Gorenstein ring, *J. Alg.*, **28** (1974), 111-115.

[10] M. MORIMOTO AND S. GOTO, Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*

[11] M. MORALÉS AND A. SIMIS, The second symbolic power of an arithmetically Cohen-Macaulay monomial curves in $\mathbb{P}^3$, preprint.

[12] P. SCHENZEL, Examples of Noetherian symbolic blow-up rings, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **33** (1988), 4, 375-383.

[13] Y. NAKAMURA, On the Cohen-Macaulay property of $A[pt, p^{(2)}t^2]$ for space monomial curves, preprint.

[14] L. ROBBIANO AND G. VALLA, Some curves in $\mathbb{P}^3$ are set-theoretic complete intersections, in *Lecture Notes in Math.* **997**, Springer-Verlag.

[15] G. VALLA, On the symmetric and Rees algebras of an ideal, *manuscripta math.*, **30**, (1980), 239-255.

[16] G. VALLA, On the set-theoretic complete intersection, in *Lecture Notes in Math.* **1092**, Springer-Verlag.

[17] O. ZARISKI AND P. SAMUEL, Commutative Algebra, Vol. II. Van Nostrand 1960.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY, MINAMI-OHSAWA 1-1, HACHIOJI, TOKYO, 192-03, JAPAN

# On surjective Buchsbaum modules

By KIKUMICHI YAMAGISHI

*College of Liberal Arts, Himeji Dokkyo University*

## *Introduction*

Throughout this note let $(A, \mathfrak{m}, k)$ denote a Noetherian local ring and $M$ a finitely generated $A$-module with $\dim_A M =: s > 0$ .

In 1978 J. Stückrad and W. Vogel [9] gave us a very powerful criterion (here called the Surjectivity Criterion), which determines whether a given module is Buchsbaum. It seems the reason why the Surjectivity Criterion is important that most Buchsbaum modules were found by applying this criterion. From this point of view, we shall introduce the following new notion.

**Definition.** $M$ is said to be a surjective Buchsbaum module over $A$ if the canonical map $\phi_M^i$ such that

$$\phi_M^i : \mathrm{Ext}_A^i(k, M) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M) \cong \varinjlim_n \mathrm{Ext}_A^i(A/\mathfrak{m}^n, M)$$

is surjective for all $i \neq s$ . The local ring of positive dimension is said to be a surjective Buchsbaum ring if it is a surjective Buchsbaum module over itself.

There are several interesting questions concerning them:
(*i*) how we can describe the condition under which a given module becomes surjective Buchsbaum;
(*ii*) how useful our new notion of surjective Buchsbaum modules are;
(*iii*) find nice examples of surjective Buchsbaum modules.

In Theorem (1.1) we shall give a characterization of surjective Buchsbaum modules using in terms of Bass numbers. The only if part of Theorem (1.1) was essentially given by P. Schenzel in [7], p. 102. He said that this implication holds for every Buchsbaum modules, but as shown by our theorem we can note that his argument is slightly ambiguous. Also in Theorem (4.2) we shall describe further characterization of surjective Buchsbaum modules. Applications of Theorem (1.1) shall be discussed in Theorem (2.1) and Theorem (3.1). Examples and some remarks are found in the final section. The reader who requests more details for surjective Buchsbaum modules can be found further discussions in [12].

## 1. *Bass number characterization of surjective Buchsbaum modules*

In this section, we shall give a characterization in terms of Bass numbers, which determines whether a given module is a surjective Buchsbaum module. To describe this, we recall one more definition. The length of the $A$-module $\mathrm{Ext}_A^i(k, M)$ is called the $i^{\mathrm{th}}$ <u>Bass number</u> of $M$ and we denote it by $\mu_A^i(M)$, cf. [1], namely $\mu_A^i(M) := l_A(\mathrm{Ext}_A^i(k, M))$.

Now the main result of our study is described as follows.

**Theorem (1.1).** *The following two statements are equivalent.*

(1) $M$ *is a surjective Buchsbaum A-module.*

(2) *For every* $i = 0, \dots, s-1$, *the next equality holds:*

$$\mu_A^i(M) = \sum_{j=0}^{i} l_A(\mathrm{Tor}_{i-j}^A(k, k)).l_A(\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^j(M)) \quad .$$

To prove this theorem we shall need the following lemma.

**Lemma (1.2)(cf. [9], Lemma 5).** *Let*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} V \longrightarrow 0$$

*be an exact sequence of A-modules (not necessarily finitely generated over* $A$ *), and assume that* $\mathfrak{m}.V = (0)$. *Then the following conditions are equivalent.*

(1) *The induced A-linear map*

$$\mathrm{Hom}_A(k, \pi) : \mathrm{Hom}_A(k, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(k, V)$$

*is surjective.*

(2) *The A-linear map $\pi$ splits, namely there is an A-linear map $\tau : V \longrightarrow F$ such that $\pi\circ\tau = id_V$.*

*When this is the case the sequence of A-modules*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^i(k, E) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^i(k, F) \xrightarrow{\pi^i} \mathrm{Ext}_A^i(k, V) \longrightarrow 0$$

*is exact for all $i \in \mathbb{Z}$, where $\pi^i := \mathrm{Ext}_A^i(k, \pi)$.*

Now choose an injective resolution $I^\cdot$ of $M$ over $A$, and put $J^i := \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(I^i)$, $Z^i := \mathrm{Ker}(J^i \longrightarrow J^{i+1})$ and $B^i := \mathrm{Im}(J^{i-1} \longrightarrow J^i)$ for each $i \in \mathbb{Z}$. Then we have short exact sequences of $A$-modules

$$0 \longrightarrow B^i \longrightarrow Z^i \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

$$0 \longrightarrow Z^i \longrightarrow J^i \longrightarrow B^{i+1} \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

for each $i$. Notice that each $J^i$ is a direct sum of copies of the injective envelope of the residue field $k$ over $A$.

With these notations we have the following.

**Proposition (1.3).** *Let $t \geq 0$ be an integer and assume that $\phi_M^i$ is surjective for all $i < t$. Then one has*

(1) *under the above notations the short exact sequence of A-modules*

$$0 \longrightarrow B^i \longrightarrow Z^i \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M) \longrightarrow 0$$

*splits for all $i < t$;*

(2) *the following formula holds:*

$$\mu_A^t(M) = \sum_{j=0}^{t-1} l_A(\mathrm{Tor}_{t-j}^A(k, k)).l_A(\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^j(M)) + l_A(\mathrm{Im}\ \phi_M^t) .$$

Proof. We may assume $t > 0$. (1) By our assumption we have $\mathfrak{m}.\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M) = (0)$ for each $i < t$, and hence the canonical map $\phi_M^i$ coincides with $\mathrm{Hom}_A(k, Z^i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(k, \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M))$. By (1.2) the exact sequence as the above (1) must split for all $i < t$.

(2) Looking at the above exact sequences (1) and (2) and applying the above assertion (1), we get the followings (I), (II) and (III):

(I) $\mathrm{Ext}_A^i(k, M) = \mathrm{Ext}_A^0(k, Z^i)$ for all $i \geqq 0$ ;

(II) $\mathrm{Ext}_A^j(k, B^{i+1}) = \mathrm{Ext}_A^{j+1}(k, Z^i)$ for all $i, j \geqq 0$ ;

(III) the sequence of $A$-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^j(k, B^i) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^j(k, Z^i) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^j(k, \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M)) \longrightarrow 0$$

is exact for all $j \geqq 0$ and $i < t$ .

From these facts we have, for every $p \geqq 0$ ,

$$\begin{aligned} l_A(\mathrm{Ext}_A^p(k, B^t)) &= l_A(\mathrm{Ext}_A^{p+1}(k, Z^{t-1})) \\ &= l_A(\mathrm{Ext}_A^{p+1}(k, B^{t-1})) + l_A(\mathrm{Ext}_A^{p+1}(k, \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^{t-1}(M))) \\ &= \dots = \sum_{j=0}^{t-1} l_A(\mathrm{Ext}_A^{t+p-j}(k, \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^j(M))) \quad . \end{aligned}$$

By Matlis's duality we know $l_A(\mathrm{Ext}_A^p(k, k)) = l_A(\mathrm{Tor}_p^A(k, k))$ for all $p$ . By our standard assumption again, the local cohomolgy module $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^j(M)$ for each $j < t$ is a $k$-vector space, and hence we get

$$l_A(\mathrm{Ext}_A^p(k, B^t)) = \sum_{j=0}^{t-1} l_A(\mathrm{Tor}_{t+p-j}^A(k, k)).l_A(\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^j(M)) \tag{3}$$

for all $p \geqq 0$ . Consider the next commutative diagram (4):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}_A^0(k, B^t) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}_A^0(k, Z^t) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}_A^0(k, \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^t(M)) \arrow[r] \arrow[d, "i_{\mathrm{H}(M)}"] & \mathrm{Ext}_A^1(k, B^t) \\ 0 \arrow[r] & B^t \arrow[r] & Z^t \arrow[r] & \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^t(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{4}$$

where $\theta$ and vertical maps are canonical. Clearly the composition map $i_{\mathrm{H}(M)} \circ \theta$ coincides with the map $\phi_M^t$ , and hence by the exactness of the top row of the diagram (4) we have

$$l_A(\mathrm{Ker}(\phi_M^t)) = l_A(\mathrm{Ker}(\theta)) = l_A(\mathrm{Ext}_A^0(k, B^t)) \quad , \tag{5}$$

$$l_A(\mathrm{Im}(\phi_M^t)) = l_A(\mathrm{Im}(\theta)) \quad .$$

Combining these facts (3) and (5), we finally get the desired one at once.

Moreover by the argument in the proof of (1) of Proposition (1.3) as above, we get the following proposition too.

Proposition (1.4). *Suppose that* $M$ *is a quasi-Buchsbaum A-module, namely* $\mathfrak{m}.H_{\mathfrak{m}}^{i}(M) = (0)$ *for every* $i \neq s$ . *Then the following two statements are equivalent.*

(1) $M$ *is a surjective Buchsbaum A-module.*

(2) *Under the same notations as in Proposition (1.3), the exact sequence*

$$0 \longrightarrow B^{i} \longrightarrow Z^{i} \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i}(M) \longrightarrow 0$$

*splits for all* $0 \leqq i < s$ .

Now we are ready to prove our theorem (1.1).

<u>Proof of Theorem (1.1)</u>. (1) $\Longrightarrow$ (2) By (1.3) this is obvious.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Assume on the contrary and choose the integer $t$ $(0 \leqq t < s)$ as small as possible among counterexamples such that $\phi_{M}^{t}$ is not surjective. By (1.3) again we have

$$\mu_{A}^{t}(M) = \sum_{j=0}^{t-1} l_{A}(\mathrm{Tor}_{t-j}^{A}(k, k)).l_{A}(H_{\mathfrak{m}}^{j}(M)) + l_{A}(\mathrm{Im}(\phi_{M}^{t})) \quad .$$

The assumption (2) implies that $l_{A}(\mathrm{Im}(\phi_{M}^{t})) = l_{A}(H_{\mathfrak{m}}^{t}(M))$ , and hence $\phi_{M}^{t}$ is surjective; but this is a contradiction to the choice of $t$ . This completes the proof of Theorem (1.1).

2. *Lengths of Koszul cohomologies of Buchsbaum modules*

We recall the definition of a Buchsbaum module, cf. [10]. Namely, $M$ is said to be a <u>Buchsbaum</u> $A$-module if the difference $l_{A}(M/\mathfrak{q}M) - e_{\mathfrak{q}}(M)$ is an invariant of $M$ not depending on the choice of parameter ideal $\mathfrak{q}$ of $M$ , where $l_{A}(*)$ and $e_{\mathfrak{q}}(*)$ denote respectively the length and the multiplicity with respect to $\mathfrak{q}$ of an $A$-module. We denote this invariant of $M$ by $I_{A}(M)$ (or simply $I(M)$ ). The local ring $A$ is called a Buchsbaum ring if it is a Buchsbaum module over itself.

Let $K^{\cdot}(\mathfrak{m}; M)$ denote Koszul co-complex over $M$ with respect to a suitable minimal basis of the maximal ideal $\mathfrak{m}$ over $A$. As is well-known, this complex $K^{\cdot}(\mathfrak{m}; M)$ is uniquely determined to within an isomorphism; in particular it does not depend on the choice of a minimal basis of the maximal ideal $\mathfrak{m}$ over $A$, cf. [10], p. 27. We denote its $i^{\text{th}}$ cohomology module by $H^{i}(\mathfrak{m}; M)$. Moreover we denote by $v(A)$ the embedding dimension of $A$, i.e., $v(A) := \mu_A(\mathfrak{m})$, where $\mu_A(*)$ denotes the minimal number of generators of an $A$-module.

With these notations, we have the following.

Theorem (2.1). *The following two statements are equivalent.*

(1) *$M$ is a Buchsbaum $A$-module.*

(2) *For every $i = 0, \ldots, s-1$, the next equality holds:*

$$l_A(H^{i}(\mathfrak{m}; M)) = \sum_{j=0}^{i} \binom{v(A)}{i-j} . l_A(H^{j}_{\mathfrak{m}}(M))$$

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2) Using Lemma 3 of [8] (cf. also [10], p. 85), we can easily show this by induction on $s$ (and also $i$).

(2) $\Longrightarrow$ (1) By passing the completion of $A$ and applying Cohen's structure theorem for complete local rings, we may assume $A$ is a regular local ring. Then we have $\mathrm{Ext}^{i}_{A}(k, M) \cong H^{i}(\mathfrak{m}; M)$ and $l_A(\mathrm{Tor}^{A}_{i}(k, k)) = \binom{d}{i}$, where $d := \dim A$, and therefore the assumption (2) implies

$$\mu^{i}_{A}(M) = \sum_{j=0}^{i} l_A(\mathrm{Tor}^{A}_{i-j}(k, k)) . l_A(H^{j}_{\mathfrak{m}}(M)) .$$

By Theorem (1.1) we see $M$ is a surjective Buchsbaum module over $A$. According to the Surjectivity Criterion, $M$ is a Buchsbaum $A$-module and this completes the proof of Theorem (2.1).

## 3. *Non-zero-divisor characterization of surjective Buchsbaum modules*

This section shall be devoted to discussing the second application of

Theorem (1.1). J. Stückrad gave us an example of a Buchsbaum module which was not surjective Buchsbaum as follows:

**Example (3.1)([8], §2).** Let $A$ be a formal power series ring over a field $k$ with $2s$ (where $s \geqq 3$) indeterminates, say $X_1, \ldots, X_{2s}$, and set $M := A/(X_1,\ldots,X_s) \cap (X_{s+1},\ldots,X_{2s})$. Then clearly $M$ is a surjective Buchsbaum $A$-module. Put $a := X_1^2 + \ldots + X_{2s}^2$. Then $a$ is a non-zero-divisor on both $A$ and $M$. Let $\bar{A} := A/aA$, $\bar{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/aA$ and $\bar{M} := M/aM$. As $\bar{M}$ is a Buchsbaum module over $\bar{A}$ such that $H^j_{\bar{\mathfrak{m}}}(\bar{M}) = k$ if $j = 0, 1$ and $H^j_{\bar{\mathfrak{m}}}(\bar{M}) = (0)$ for all $j \neq 0, 1, s-1$. But, it is not a surjective Buchsbaum module over $\bar{A}$; in particular, the $\phi^1_{\bar{A}}(\bar{M})$ is not surjective. (See also [10], (5.7) of Chap. V.)

It seems the reason why a such strange phenomenon happens is that the given non-zero-divisor $a$ on both $A$ and $M$ is contained in $\mathfrak{m}^2$. Concerning this we have the following, which is the second application of Theorem (1.1).

**Theorem (3.2).** *Let* $s \geqq 2$ *and* $a \in \mathfrak{m}$ *a non-zero-divisor on both* $A$ *and* $M$. *Suppose that* $a \notin \mathfrak{m}^2$ *and* $a.H^i_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ *for all* $i \neq s$. *Then the following two statements are equivalent.*

(1) $M$ *is a surjective Buchsbaum A-module.*

(2) $M/aM$ *is a surjective Buchsbaum module over* $A/aA$.

Now suppose that $M$ is a surjective Buchsbaum $A$-module with $\dim_A M - \operatorname{depth}_A M \geqq 2$ and there is a non-zero-divisor $a$ on both $A$ and $M$ such that which is contained in $\mathfrak{m}^2$. Put $\bar{A} := A/aA$ (resp. $\bar{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/aA$ and $\bar{M} := M/aM$). As $a \in \mathfrak{m}^2$ we see $l_{\bar{A}}(\operatorname{Tor}_1^{\bar{A}}(k, k)) = l_A(\operatorname{Tor}_1^A(k, k))$. Let $r := \operatorname{depth}_A M$. As $H^j_{\bar{\mathfrak{m}}}(\bar{M}) = (0)$ for $j < r-1$ and $\bar{\mathfrak{m}}.H^{r-1}_{\bar{\mathfrak{m}}}(\bar{M}) =$

(0) , we know that the map $\phi^{j}_{\bar{A}}(\bar{M})$ $(j < r)$ is surjective. So, by (2) of (1.3) and Theorem (1.1) we get

$$\begin{aligned} l_{\bar{A}}(\mathrm{Im}\ \phi^{r}_{\bar{A}}(\bar{M})) &= \mu^{r}_{\bar{A}}(\bar{M}) - l_{\bar{A}}(\mathrm{Tor}^{\bar{A}}_{1}(k, k)).l_{\bar{A}}(\mathrm{H}^{r-1}_{\bar{\mathfrak{m}}}(\bar{M})) \\ &= \mu^{r+1}_{A}(M) - l_{A}(\mathrm{Tor}^{A}_{1}(k, k)).l_{A}(\mathrm{H}^{r}_{\mathfrak{m}}(M)) \\ &= l_{A}(\mathrm{H}^{r+1}_{\mathfrak{m}}(M)) < l_{\bar{A}}(\mathrm{H}^{r}_{\bar{\mathfrak{m}}}(\bar{M})) \quad . \end{aligned}$$

This means that the canonical map $\phi^{r}_{\bar{A}}(\bar{M})$ is not surjective. Combining this fact and Theorem (3.2) we conclude the following.

**Proposition (3.3).** *Let $M$ be a surjective Buchsbaum $A$-module with $\dim_{A}M - \mathrm{depth}_{A}M \geqq 2$ and suppose that there is a non-zero-divisor $a \in \mathfrak{m}$ on both $A$ and $M$. Then $M/aM$ is a surjective Buchsbaum module over $A/aA$ if and only if the non-zero-divisor $a$ is not contained in $\mathfrak{m}^2$.*

**Remark (3.4).** In [4] S. Goto gave us a Buchsbaum $A$-module which was not surjective Buchsbaum over $A$, when the local ring $A$ is non-regular and Cohen-Macaulay with $\dim A \geqq 2$. However, (3.3) says that the example $\bar{M}$ in (3.1) is a Buchsbaum ring, which is not a surjective Buchsbaum ring. Thus, applying (3.3) we can get Buchsbaum $A$-modules such that they are not surjective Buchsbaum over $A$, even the local ring $A$ is not Cohen-Macaulay. We shall discuss them again in (5.3) later.

## 4. *Complexes of local cohomologies of surjective Buchsbaum modules*

In this part we shall give a further characterization of surjective Buchsbaum modules. We refer to [2, 6] for unexplained terminology on the category of complexes of modules. Before discussing our results, we recall several basic notions on complexes, which shall be needed later.

Let $X^{\cdot}$ be a complex of $A$-modules. We denote the $i^{\mathrm{th}}$ term of $X^{\cdot}$ by $X^{i}$ and $i^{\mathrm{th}}$ defferentiation of $X^{\cdot}$ by $d^{i}_{X^{\cdot}}: X^{i} \longrightarrow X^{i+1}$ for $i \in \mathbf{Z}$.

We use the following notations too: $Z^i_{X^\cdot} := \mathrm{Ker}(d^i_{X^\cdot})$ , $B^i_{X^\cdot} := \mathrm{Im}(d^{i-1}_{X^\cdot})$ and $H^i(X^\cdot) := Z^i_{X^\cdot}/B^i_{X^\cdot}$ . These modules make three complexes $Z^\cdot_{X^\cdot}$ , $B^\cdot_{X^\cdot}$ and $H^\cdot(X^\cdot)$ , which have zero differentiations, and there is an exact sequence of complexes:

$$0 \longrightarrow B^\cdot_{X^\cdot} \longrightarrow Z^\cdot_{X^\cdot} \longrightarrow H^\cdot(X^\cdot) \longrightarrow 0 \quad .$$

By $\tau^s X^\cdot$ , where $s$ is an integer, we denote the truncated complex:

$$\ldots \longrightarrow X^i \longrightarrow \ldots \longrightarrow X^{s-1} \longrightarrow B^s_{X^\cdot} \longrightarrow 0 \quad .$$

A homomorphism of complexes of $A$-modules $\phi^\cdot : X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ is said to be a quasi-isomorphism if the induced homomorphism of complexes such that $H^\cdot(\phi^\cdot) : H^\cdot(X^\cdot) \longrightarrow H^\cdot(Y^\cdot)$ is an isomorphism. The two complexes $X^\cdot$ and $Y^\cdot$ are said to be <u>equivalent</u>, written $X^\cdot \approx Y^\cdot$ , if there exist a complex $V^\cdot$ and two quasi-isomorphisms $X^\cdot \longrightarrow V^\cdot$ and $Y^\cdot \longrightarrow V^\cdot$ . This is equivalent to saying that there exist a complex $U^\cdot$ and two quasi-isomorphisms $U^\cdot \longrightarrow X^\cdot$ , $U^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ , and thus the relation $\approx$ is really an equivalence relation. We denote by $\underline{\underline{X^\cdot}}$ the equivalence class of a complex $X^\cdot$ with respect to $\approx$ , cf. [2], (1.7). In general, $\underline{\underline{X^\cdot}} = \underline{\underline{Y^\cdot}}$ does not mean the existence of a quasi-isomorphism $X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ ; however, if $Y^\cdot$ is a bounded below complex of injective modules over $A$ (resp. if $X^\cdot$ is a bounded above complex of projective modules over $A$ ), then $\underline{\underline{X^\cdot}} = \underline{\underline{Y^\cdot}}$ implies the existence of a quasi-isomorphism $X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ , cf. [2], (3.5) (see also (2.5) of Chap. 2 in [6]). Note that the notations $H^\cdot(\underline{\underline{X^\cdot}})$ and $\tau^s\underline{\underline{X^\cdot}}$ make sense: in fact $H^\cdot(\underline{\underline{X^\cdot}})$ is the complex of $A$-modules defined by $H^\cdot(\underline{\underline{X^\cdot}}) := H^\cdot(X^\cdot)$ and $\tau^s\underline{\underline{X^\cdot}}$ is the equivalence class defined by $\tau^s\underline{\underline{X^\cdot}} := \underline{\underline{\tau^s X^\cdot}}$ . Let $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ be the local cohomology functor with respect to maximal ideal $\mathfrak{m}$ of $A$ , namely $\Gamma_{\mathfrak{m}}(*) := \bigcup_{n>0} [\,0 \underset{*}{:} \mathfrak{m}^n]$ . For a bounded below complex of $A$-modules $X^\cdot$ we denote by $\underline{\underline{\Gamma_{\mathfrak{m}}}}(X^\cdot)$ the equivalence class as follows: choose an injective resolution $I^\cdot$ of $X^\cdot$ over $A$ , namely $I^\cdot$ is a bounded below complex of injective modules over $A$ and there is a quasi-isomorphism $X^\cdot \longrightarrow$

$I^{\cdot}$ , then define $\underline{\underline{\Gamma_{\mathfrak{m}}}}(X^{\cdot}) := \underline{\underline{\Gamma_{\mathfrak{m}}(I^{\cdot})}}$ . If $M$ is a finitely generated $A$-module, then, by the definition of the local cohomology functors, we know that $\mathrm{H}^{i}(\underline{\underline{\Gamma_{\mathfrak{m}}}}(M)) \cong \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^{i}(M)$ for all $i \in \mathbf{Z}$ .

With these notations we begin with the following.

**Lemma (4.1).** *Let $X^{\cdot}$ be a complex of $A$-modules. Then the following conditions are equivalent.*

(1) *There exists a quasi-isomorphism $\mathrm{H}^{\cdot}(X^{\cdot}) \longrightarrow X^{\cdot}$ .*

(2) *The next short exact sequence of complexes splits:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{B}_{X^{\cdot}}^{\cdot} \longrightarrow \mathrm{Z}_{X^{\cdot}}^{\cdot} \longrightarrow \mathrm{H}^{\cdot}(X^{\cdot}) \longrightarrow 0 \quad .$$

**Theorem (4.2).** *The following two statements are equivalent.*

(1) *$M$ is a surjective Buchsbaum $A$-module.*

(2) *$\tau^{s}\underline{\underline{\Gamma_{\mathfrak{m}}}}(M) = \underline{\underline{V^{\cdot}}}$ , where $V^{\cdot}$ is a complex of $k$-vector spaces with zero differentiations.*

*When this is the case one also has*

$$V^{i} = \begin{cases} \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^{i}(M) & (0 \leqq i < s) \\ (0) & (\textit{otherwise}) \end{cases} \quad .$$

Proof. Let $I^{\cdot}$ be an injective resolution of $M$ over $A$ , and put $J^{\cdot} := \Gamma_{\mathfrak{m}}(I^{\cdot})$ . Then $\underline{\underline{\Gamma_{\mathfrak{m}}}}(M) = \underline{\underline{J^{\cdot}}}$ , and there is an exact sequence of $A$-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{B}_{J^{\cdot}}^{i} \longrightarrow \mathrm{Z}_{J^{\cdot}}^{i} \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^{i}(M) \longrightarrow 0 \qquad (6)$$

for every $i \in \mathbf{Z}$ .

(1) $\Longrightarrow$ (2) Looking at the above exact sequence (6) and recalling (1.4), the assumption (1) that $M$ is a surjective Buchsbaum $A$-module implies that the exact sequence (6) must split for each $i < s$ , and hence we can find a quasi-isomorphism

$$V^{\cdot} \longrightarrow \tau^{s}J^{\cdot} \quad , \tag{7}$$

where $V^{\cdot}$ is the complex of $k$-vector spaces defined by

$$V^{i} := \begin{cases} \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M) & (0 \leqq i < s) \\ (0) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

and zero differentiations. Therefore by the quasi-isomorphism (7), we have $\tau^{s}\Gamma_{\underline{\underline{\mathfrak{m}}}}(M) = \underline{\underline{\tau^{s}J^{\cdot}}} = \underline{\underline{V^{\cdot}}}$ .

(2) $\Longrightarrow$ (1) Suppose that $\tau^{s}\Gamma_{\underline{\underline{\mathfrak{m}}}}(M) = \underline{\underline{V^{\cdot}}}$ , where $V^{\cdot}$ is a given complex of $k$-vector spaces with zero differentiations. Then we have that $V^{i} \cong \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{m}}(M)$ as $A$-modules for $0 \leqq i < s$ and $V^{i} = (0)$ for other $i$ . On the other hand, clearly $\tau^{s}\Gamma_{\underline{\underline{\mathfrak{m}}}}(M) = \underline{\underline{\tau^{s}J^{\cdot}}}$ , where $\tau^{s}J^{\cdot}$ is

$$0 \longrightarrow J^{0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow J^{s-1} \longrightarrow \mathrm{B}^{s}_{J^{\cdot}} \longrightarrow 0 \quad .$$

Now choose an injective resolution of $\mathrm{B}^{s}_{J^{\cdot}}$ over $A$ , say $L^{\cdot}$ . Consider the composition of complexes $\tau^{s}J^{\cdot}$ and $L^{\cdot}$ as

$$0 \longrightarrow J^{0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow J^{s-1} \xrightarrow{d} L^{0} \longrightarrow L^{1} \longrightarrow \cdots \quad ,$$

where $d$ is the composition map $J^{s-1} \longrightarrow \mathrm{B}^{s}_{J^{\cdot}} \longrightarrow L^{0}$ , and we denote it by $Q^{\cdot}$ : namely $Q^{\cdot}$ is a bounded below complex of injective modules over $A$ as

$$Q^{i} := \begin{cases} J^{i} & (i < s) \\ L^{i-s} & (i \geqq s) \end{cases} \quad .$$

Then we can naturally find a quasi-isomorphism $\tau^{s}J^{\cdot} \longrightarrow Q^{\cdot}$ and hence we get $\underline{\underline{Q^{\cdot}}} = \underline{\underline{V^{\cdot}}}$ . Since $Q^{\cdot}$ is a bounded below complex of injective modules over $A$ there is a quasi-isomorphism $V^{\cdot} \longrightarrow Q^{\cdot}$ , cf. Remark before (4.1). As $\mathrm{H}^{\cdot}(Q^{\cdot}) = \mathrm{H}^{\cdot}(V^{\cdot}) \cong V^{\cdot}$ , we see by (4.1) that the short exact sequence of complexes of $A$-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{B}^{\cdot}_{Q^{\cdot}} \longrightarrow \mathrm{Z}^{\cdot}_{Q^{\cdot}} \longrightarrow \mathrm{H}^{\cdot}(Q^{\cdot}) \longrightarrow 0$$

splits. Thus, by the definition of $Q^{\cdot}$ , it follows that the above exact sequence (6) splits for all $0 \leqq i < s$ . By (1.4) this implies the canonical map $\phi_M^i$ is surjective for all $0 \leqq i < s$ , and this finishes the proof of Theorem (4.2).

## 5. *Examples and remarks*

Let $M$ be a finitely generated $A$-module. We denote by $e_A(M)$ (or simply $e(M)$ ) the multiplicity with respect to maximal ideal $\mathfrak{m}$ of an $A$-module $M$ . Let $\mathfrak{q}$ be a parameter ideal of $M$ such that $\mathfrak{m}^{r+1}M = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^rM$ for some integer $r \geqq 0$ . Then $\mu_A(M) = l_A(M/\mathfrak{m}M) \leqq l_A(M/\mathfrak{q}M)$ and $e_A(M) = e_\mathfrak{q}(M)$ . Therefore if $M$ is a Buchsbaum $A$-module, then we have the inequality

$$\mu_A(M) \leqq e_A(M) + \mathrm{I}_A(M) \quad ,$$

and moreover the equality $\mu_A(M) = e_A(M) + \mathrm{I}_A(M)$ holds if and only if $\mathfrak{m}M = \mathfrak{q}M$ holds, where $\mathfrak{q}$ is a parameter ideal of $M$ as above.

We say that a Buchsbaum ring $A$ has <u>maximal embedding dimension</u> if the following equality holds, cf. [3]:

$$v(A) = e(A) + \dim A - 1 + \mathrm{I}(A) \quad .$$

It is easy to see that if $A$ is a Buchsbaum ring with maximal embedding dimension then the maximal ideal $\mathfrak{m}$ is a Buchsbaum $A$-module and the equality $\mu_A(\mathfrak{m}) = e_A(\mathfrak{m}) + \mathrm{I}_A(\mathfrak{m})$ holds.

With these notions we have the following.

**Example (5.1).** Let $M$ be a Buchsbaum $A$-module of dimension $s$ . Suppose that $\mu_A(M) = e_A(M) + \mathrm{I}_A(M)$ . Then the following formulas hold:

(I) $\quad \mu_A^i(M) = \sum_{j=0}^{i} \beta_{i-j} \cdot l_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^j(M))$ for all $0 \leqq i < s$ ;

(II) $\quad \mu_A^s(M) = \sum_{j=0}^{s-1} \beta_{s-j} \cdot l_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^j(M)) + e_A(M) - \sum_{i=1}^{s-1} \binom{s-1}{i-1} \cdot l_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(M))$ ,

where $\beta_i = l_A(\mathrm{Tor}_i^A(k, k))$ . Therefore by Theorem (1.1) this $M$ is a surjective Buchsbaum $A$-module. In particular, if $A$ is a Buchsbaum ring with maximal embedding dimension, then maximal ideal $\mathfrak{m}$ is a surjective

Buchsbaum $A$-module, and hence $A$ itself is a surjective Buchsbaum ring.

**Example (5.2)([11], (2.9)).** Let $A$ be a Buchsbaum ring of dimension $d$. Assume that $d \geq 2$ and $H^p_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ for all $p \neq 1, d$. Let $E_i$ $(i \geqq 1)$ be the $i^{th}$ syzygy module of the residue field $k$ over $A$; namely $E_i := \mathrm{Syz}^A_i(k)$. Then every $E_i$ is a surjective Buchsbaum $A$-module of dimension $d$ with $H^p_{\mathfrak{m}}(E_i) = (0)$ for all $p = 0, i + 1, \ldots, d - 1$.

**Example (5.3).** Let $(R, \mathfrak{n})$ be a Buchsbaum ring with $\dim R \geqq 3$ and $\operatorname{depth} R > 0$, and assume that $\dim R - \operatorname{depth} R \geqq 2$ and $H^i_{\mathfrak{n}}(R) = (0)$ for all $i \notin \{\operatorname{depth} R, \dim R\}$. Then, the local ring $R$ is a surjective Buchsbaum ring. Choose a parameter $a$ for $R$ such that $a \in \mathfrak{n}^2$ and put $A := R/aR$. Then, by (3.3), we know $A$ is a Buchsbaum ring such that it is not a surjective Buchsbaum ring.

**Remark (5.4).** For a finitely generated $A$-module $M$ with $\dim_A M = s$ the type of $M$, denoted $r_A(M)$, is defined to be $l_A(\mathrm{Ext}^s_A(k, M))$, namely $r_A(M) := \mu^s_A(M)$. If $M$ is a surjective Buchsbaum $A$-module, then by (2) of (1.3) one has the following equality:

$$r_A(M) = \sum_{j=0}^{s-1} l_A(\mathrm{Tor}^A_{s-j}(k, k)).l_A(H^j_{\mathfrak{m}}(M)) + l_A(\mathrm{Im}\ \phi^s_M) \quad .$$

This is a generalization of results given by C. Miyazaki in [5], (1.15). In fact, let $K_M$ denote the canonical module of $M$ (cf. §3 of [11]) if it exists, then as $l_A(\mathrm{Im}\ \phi^s_M) \leqq \mu_A(K_M)$ holds one has:

$$r_A(M) \leqq \sum_{j=0}^{s-1} l_A(\mathrm{Tor}^A_{s-j}(k, k)).l_A(H^j_{\mathfrak{m}}(M)) + \mu_A(K_M) \quad ;$$

moreover in the case that $\phi^s_M \neq 0$ one has the following too:

$$r_A(M) \geqq 1 + \sum_{j=0}^{s-1} l_A(\mathrm{Tor}^A_{s-j}(k, k)).l_A(H^j_{\mathfrak{m}}(M)) \quad .$$

**Remark (5.5).** In [13] Y. Yoshino has studied the behaviours of the class of maximal Buchsbaum modules of finite projective dimension. He has also pointed out to the author that, by applying the calculations of quivers (see [13] for details), one can show most of maximal Buchsbaum modules of finite projective dimension over Gorenstein local rings are not surjective Buchsbaum. (See also Remark (3.4) above).

The author is grateful to participants for their kindly discussions and comments during the 13-th Symposium on Commutative Algebra.

## References

[1] H. Bass. On the ubiquity of Gorenstein rings. Math. Zeitschr. 82(1963), 8-28.

[2] H.-B. Foxby. A homological theory of complexes of modules. (Preprint, 1981).

[3] S. Goto. Buchsbaum rings of maximal embedding dimension. J. Algebra 76(1982), 383-399.

[4] S. Goto. On the surjectivity criterion for Buchsbaum modules. Proc. Amer. Math. Soc. 108(1990), 641-646.

[5] C. Miyazaki. Graded Buchsbaum algebras and Segre products. Tokyo J. Math. 12(1989), 1-20.

[6] P. Roberts. Homological invariants of modules over commutative rings. Séminaire de Math. Sup. no. 72 (Les Press de l'Université de Montréal, 1980).

[7] P. Schenzel. Dualisierende Komplexe in der lokalen Algebra und Buchsbaum-Ringe. Lecture Notes in Math. vol. 907 (Springer-Verlag, 1982).

[8] J. Stückrad. Über die kohomologische Charakterisierung von Buchsbaum-Moduln. Math. Nachr. 95(1980), 265-272.

[9] J. Stückrad and W. Vogel. Toward a theory of Buchsbaum singularities. Amer. J. Math. 100(1978), 727-746.

[10] J. Stückrad and W. Vogel. Buchsbaum Rings and Applications. (Springer-Verlag, 1986).

[11] K. Yamagishi. Idealizations of maximal Buchsbaum modules over a Buchsbaum ring. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 104(1988), 451-478.

[12] K. Yamagishi. Bass number characterization of surjective Buchsbaum modules. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 110(1991), 261-279.

[13] Y. Yoshino. Maximal Buchsbaum modules of finite projective dimension. (Preprint, 1991)

# あるｐｒｉｍｅｉｄｅａｌに関する ｓｙｍｂｏｌｉｃ Ｒｅｅｓ ａｌｇｅｂａ について

下田保博

北里大教養

## §１序

$A=k[[X,Y,Z]]$ とし、$n_1, n_2, n_3 \in N$ で、その最大公約数は１であるとする。今、$\Phi : A \longrightarrow k[[t]]$ のｋ－ａｌｇ．ｈｏｍｏで

$$\Phi(X)=t^{n_1},\ \Phi(Y)=t^{n_2},\ \Phi(Z)=t^{n_3}$$

となるものとする。そして $\mathrm{Ker}\,\Phi=P(n_1, n_2, n_3)$ $(=:P)$ とおく。

$$R_s(P)=\sum P^{(n)}T^n \subset A[T]$$

をＰに関するｓｙｍｂｏｌｉｃ Ｒｅｅｓ ａｌｇｅｂｒａとよぶ。

このｒｉｎｇの基本的な問題はＣｏｗｓｉｋ（［１］）の中の次の問いであろう。

問題： $R_s(P)$ はいつＮｏｅｔｈｅｒｉａｎ ｒｉｎｇになるか。

Ｃｏｗｓｉｋはこの問題がｙｅｓならば、Ｐはｓｅｔ ｔｈｅｏｒｅｔｉｃ ｃ．ｉ．になることを示した。（実際はこれを用いなくても直接証明できる。）

そこで、ここではさらに“$R_s(P)$ がＮｏｅｔｅｒｉｎａｎ ｒｉｎｇのとき、Ｇｏｒｅｎｓｔｅｉｎになるか。”という問題についても合わせて考えていきたい。

まず次のような結果が知られている。

ｋｎｏｗｎ－ｒｅｓｕｌｔｓ：

（１）（Ｃ．Ｈｕｎｅｋｅ，［４］，［５］）
$n_1=3, 4$ では $R_s(P)$ はＮｏｅｔｈｅｒである。

（２）（Ｓ．Ｇｏｔｏ，Ｋ．Ｎｉｓｈｉｄａ ａｎｄ Ｙ．Ｓｈｉｍｏｄａ ［３］）
$n_1=3, 4$ では $R_s(P)$ はＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎである。

（３）　（［６］ｏｒ［７］）$R_s(P)$は$n_1=6$でＮｏｅｔｈｅｒである。

（４）その他の$n_1$については次の場合にＮｏｅｔｈｅｒかつＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎ ｒｉｎｇになることが知られている。（ｃ．ｆ．［２］，［３］）

$m \geq 1$とする。

$P=P(m, m+1, m+3)$

$P=P(m, m+1, m+4)$　ただし、$m \neq 9, 13$.

このように、$n_1$の具体的な数値に関してはあまり知られていない。ここでは、次のような場合に上記の問題が成立することを述べたいと思う。

**定理１** $P=I_2(M)$に対する$R_s(P)$はＮｏｅｔｈｅｒ　Ｇｏｒｅｎｓｔｅｉｎ ｒｉｎｇである。

ただし、Ｍは次のような２×３行列である

$$M=\begin{bmatrix} X^{\alpha} & Y^{n\beta} & Z^{\gamma} \\ Y^{\beta} & Z^{n\gamma} & X^{\alpha'} \end{bmatrix} \qquad (m, n \geq 2)$$

## §２　定理１の証明の概略

定理を示すのに必要となる次の２つの結果を述べることにする。

定理Ａ　（［５］）$f \in P^{(k)}$と$g \in P^{(m)}$で

$\mathrm{length}_A(A/(f, g, x)) = k \cdot m \cdot \mathrm{length}(A/P+xA)$

が、３－ｄｉｍ　ｒｅｇｕｌａｒ　ｌｏｃａｌ　ｒｉｎｇ$(A, N)$とそのｐｉｍｅ ｉｄｅａｌ$P$とある$x \in N \setminus P$に対して成立するような元が存在すれば、$R_s(P)$はＮｏｅｔｈｅｒ　ｒｉｎｇである。

定理Ｂ　（［２］）　定理Ａの$f, g$が存在して、$1 \leq n \leq k+m-2$なる$n$にたいして$A/(f, g)+P^{(n)}$がＣｏｈｅｎ－Ｍａｃａｕｌａｙならば、$R_s(P)$はＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎである。

さて、いま次のような行列を考える。

$$M' = \begin{bmatrix} X^{\alpha} & Y^{m} & Z \\ Y & Z^{n} & X^{\alpha} \end{bmatrix}$$

で、m, $n \geqq 2$とする。次に

$$a = Z^{n+1} - X^{\alpha'} Y^{m},\quad b = X^{\alpha+\alpha'} - YZ,\quad c = Y^{m+1} - X^{\alpha} Z^{n}$$

とおく。

**定理２．１** Aは3－dim regular local ringで、X, Y, Zをregular sequenceとする。Aの元a, b, cを上記のようにして、P＝（a, b, c）がprime idealで、$x \notin P$とする。$\alpha > \alpha'$として、$\alpha = k_0 \alpha' + \alpha_1$, $\alpha' = k_1 \alpha_1 + \alpha_2$, ..., $\alpha_{u-1} = k_u \alpha_u$であるとき、次のような自然数の列とPの元の列が存在する。

（1）$\{p_{i,j}\}$, $\{q_{i,j}\}$, $\{r_{i,j}\}$は$0 \leqq i \leqq u$, $1 \leqq j \leqq k_i$に対して存在する。

（2）$p_{i,j} > m r_{i,j}$, $q_{i,j} > n r_{i,j}$, and

$$p_{i,j} + q_{i,j} = (m+n+1) r_{i,j}$$

（3）$p_{0,j} = (j+1)m+1$, $q_{0,j} = (j+1)n+1$, $r_{0,j} = j+1$ for $1 \leqq j \leqq k_0$.

$$p_{1,j} = (jk_0 + j + 1)m + 1,$$
$$q_{1,j} = (jk_0 + j + 1)n + jk_0 + 1$$
$$r_{1,j} = jk_0 + j + 1$$
for $1 \leqq j \leqq k_1$.

（4）
$$\begin{cases} p_{i,1} = p_{i-2,k_{i-2}} + p_{i-1,k_{i-1}} \\ q_{i,1} = q_{i-2,k_{i-2}} + q_{i-1,k_{i-1}} \\ r_{i,1} = r_{i-2,k_{i-2}} + r_{i-1,k_{i-1}} \end{cases} \quad \text{for } i \geqq 2.$$

$$\begin{cases} p_{i,j} = p_{i,j-1} + p_{i-1,k_{i-1}} \\ q_{i,j} = q_{i,j-1} + q_{i-1,k_{i-1}} \\ r_{i,j} = r_{i,j-1} + r_{i-1,k_{i-1}} \end{cases} \quad \text{for } i \geqq 2,\ j \geqq 2.$$

(5) $e_{r_{i,j}} \in P^{(r_{i,j})}$が存在して、

$$e_{r_{i,j}} \equiv \begin{cases} Y^{p_{i,j}} + (-1)^{r_{i,j}} X^{\alpha_{i-1} - j\alpha_i} Z^{q_{i,j}} & \text{for } i : \text{even} \\ X^{\alpha_{i-1} - j\alpha_i} Y^{p_{i,j}} + (-1)^{r_{i,j}} Z^{q_{i,j}} & \text{for } i : \text{odd} \end{cases}$$

$$\mathrm{mod} \quad (X^{\alpha_{i-1} - (j-1)\alpha_i})$$

をみたす。

証明　まず$t_2 = ac - Y^{m-1} Z^{n-1} b^2$とおき、$e_2 = t_2 / X^{\alpha}$とする。一般に$t_j = ae_j - Y^{m-2} Z^{n-1} b^2 e_{j-1}$として、$e_j = t_j / X^{\alpha}$とおけばよい。これにより$i = 0$の列が作れる。

次に$t_{k+2} = ae_{k+1} - Y^{m-2} Z^{n-1} b^2 e_k$として、$e_{k+2} = t_{k+2} / X^{\alpha}$がつくれる。

一般には$e_{r_{i-1,k_{i-1}}} e_{r_{i,j-1}}$を考えてそのY，Zの項$(-1)^{r_{i,j-1}} Y^{r_{i,j-1}} Z^{r_{i-1,k_{i-1}}}$を別の次数が$(r_{i-1,k} + r_{i,j-1})$次のもので消すことにより、$(i, j)$での列が得られる。（実際のやりかたは下記の例を参照してください。）

定理１の証明；定理２．１で$Y \to Y^{\beta}$，$Z \to Z^{\gamma}$としてもちいると、

$$e_{r_{u,k_u}} \equiv Y^{p_{u,k_u}} + (-1)^{r_{u,k_u}} Z^{q_{u,k_u}} \quad \mathrm{mod} \quad X$$

と表されるので、$f = b$，$g = e_{r_{u,k_u}}$とすれば、

$$\mathrm{length}\,(A / (X, f, g)) = r_{u,k}\,(m+n+1)\,\beta\gamma$$

となり、定理AよりNoetherian ringになる。

次にGorensteinになることの証明は$(f, g) + P^{(j)}$の形を実際に求めて、$\mathrm{length}\,(A / (X, f, g) + P^{(j)}) = j \cdot (m+n+1)\,\beta\gamma$になることを（１）$1 \leqq j \leqq k_0 + 1$，（２）$k_0 + 2 \leqq j < r_{u,k} - 1$の時に分けて、jの帰納法で示す。

定理１の例を具体的に１つ書いて置くことにする。

**例**　$P = P(5, 44, 41)$

$a = Z^3 - X^7 Y^2$，$b = X^{17} - YZ$，$c = Y^3 - X^{10} Z^2$

$e_2 \equiv [(ac - YZb^2) / (-X^7)]$

$\equiv Y^5 + X^3 Z^5 \quad \mathrm{mod}\ (X^{10})$

$$e_3 = [(ae_2 + Y^2 b^3)/X^3]$$
$$\equiv -Z^8 + X^4 Y^7 \quad \mathrm{mod}\ (X^7)$$

$$e_2 e_3 \equiv (Y^5 + X^3 Z^5)(-Z^8 + X^4 Y^7)$$
$$\equiv -Y^5 Z^8 + X^4 Y^{12} - X^3 Z^{13} \quad \mathrm{mod}\ (X^7)$$

だから、

$t_5 = e_2 e_3 - Z^3 b^5$ として、$e_5 = t_5 / X^3$ とおくと、

$$e_5 \equiv -Z^{13} + XY^{12} \quad \mathrm{mod}\ (X^4)$$

$$e_2 e_5 \equiv (Y^5 + X^3 Z^5)(-Z^{13} + XY^{12})$$
$$\equiv -Y^5 Z^{13} - X^3 Z^{18} + XY^{17} \quad \mathrm{mod}\ (X^4)$$

となるので、

$t_7 = e_2 e_5 - YZe_3 b^4$ として、$e_7 = t_7 / X$とおけば、

$$e_7 \equiv Y^{17} - X^2 Z^{18} \quad \mathrm{mod}\ (X^3)$$

$$e_5 e_7 \equiv (-Z^{13} + XY^{12})(Y^{17} - X^2 Z^{18})$$
$$\equiv -Y^{17} Z 1^3 + XY^{29} - X^2 Z^{31} \quad \mathrm{mod}\ (X^3)$$

となるから、

$t_{12} = e_5 e_7 - Y^5 Z b^{12}$, $e_{12} = t_{12} / X$とおけば、

$$e_{12} \equiv Y^{29} - XZ^{31} \quad \mathrm{mod}\ (X^2)$$

最後に、

$$e_5 e_{12} \equiv (-Z^{13} + XY^{12})(Y^{29} - XZ^{31})$$

を作ると、

$t_{17} = e_5 e_{12} - Y^2 Z^3 e_7 b^{10}$ とおくことで、

$$e_{17} \equiv Y^{41} - Z^{44} \quad \mathrm{mod}\ (X)$$

が得られる。そこで、$f = b$, $g = e_{17}$とおくことで、Ｎｏｅｔｈｅｒがわかる。

次に、Ｇｏｒｅｎｓｔｅｉｎになることは定理Ｂにより

$A/(f, g) + P^{(n)}$ が $1 \leqq n \leqq 16$ でＣ－Ｍｒｉｎｇになることを言えばよい。すなわち、$I_n = (X) + (f, g) + P^{(n)}$ とおくとき、$I_n \supseteq J_n$ で $\mathrm{length}(A/J_n) \leqq 5n$ となるイデアル $J_n$ をさがせば、$I_n = J_n$ かつ $A/I_n$ はＣ－Ｍ ｒｉｎｇとなる。

まず、$e_n$ を用いて、$n = 1, 2, 3, 5, 7, 12$ のときを調べる。

$J_2=(X, YZ, Y^5, Z^6)$, $J_3=(X, YZ, Z^8, Y^8)$
$J_5=(X, YZ, Z^{13}, Y^{13})$, $J_7=(X, YZ, Y^{17}, Z^{19})$
$J_{12}=(X, YZ, Y^{29}, Z^{32})$

次に、上記以外のｎに関しては、この５つのイデアルを利用して帰納法を用いて間をうめて行く。

$J_4=(X, YZ, Z^{11}, Y^{10})$ $J_6=(X, YZ, Z^{16}, Y^8 Y^8)$ などとすればよい。

さて、Ｐが次のような行列の２次の行列式で生成される場合を考えてみることにしたい。

$$M=\begin{bmatrix} X^{\alpha} & Y^{n\beta} & Z^{\gamma} \\ & & \\ Y^{\beta} & Z^{\gamma} & X^{\alpha'} \end{bmatrix} \qquad (n\geqq 1)$$

このとき、次が成り立つ。

**命題２．２**　$P=I_2(M)$ とし、$R=Rs(P)$ とおく。

もし、$\alpha>\alpha'$ または $\alpha'\geqq(n-1)\alpha$ ならば、ＲはＮｏｅｔｈｅｒ Ｇｏｒｅｎｓｔｅｉｎである。

（証明）$\alpha>\alpha'$ のときは、定理２．１と同様な方法で自然数の列と $P^{(n)}$ の元の列が作れる。

$\alpha'\geqq(n-1)\alpha$ のとき、

$a=Z^{2\gamma}-X^{\alpha'}Y^{n\beta}$, $b=X^{\alpha+\alpha'}-Y^{\beta}Z^{\gamma}$, $c=Y^{(n+1)\beta}-X^{\alpha}Z^{\gamma}$ とする。

$2\leqq j\leqq n$ にたいして

$$t_2=ac-Y^{(n-1)\beta}b^2$$

$$t_j=e_{j-1}c-Y^{(n-j+1)\beta}(-1)^j b^j$$

とおくことにより、

$$e_j\equiv Z^{(j+1)\gamma} \quad \mathrm{mod}\ (X) \quad \mathrm{for}\quad 1\leqq j\leqq n$$

$$e_{n+1}\equiv\begin{cases} Z^{(n+2)\gamma} \\ Y^{(n2+2n)\beta}\end{cases} \quad \mathrm{mod}\ (X)$$

が得られる。

(１)　$\alpha' \geqq n\alpha$ ならば $f=c,\ g=e_{n+1}$

(２)　$\alpha'=(n-1)\alpha$ ならば $f=b,\ g=e_n$

(３)　$(n-1)\alpha<\alpha'<n\alpha$ ならば $f=e_n,\ g=e_{n+1}$

とおくことで、ＲはＮｏｅｔｈｅｒになる。Ｇｏｒｅｎｓｔｅｉｎは定理Ｂを用いて定理１と同様にできる。

## §３　$n_1=5$ について

$n_1=5$ となるｐｒｉｍｅ　ｉｄｅａｌＰは次のような行列Ｍを用いて $P=I_2(M)$ と表される。

(１)
$$\begin{bmatrix} X^{\alpha} & Y^3 & Z \\ Y & Z & X^{\alpha'} \end{bmatrix}$$

(２)
$$\begin{bmatrix} X^{\alpha} & Y & Z \\ Y^2 & Z & X^{\alpha'} \end{bmatrix}$$

(３)
$$\begin{bmatrix} X^{\alpha} & Y^2 & Z \\ Y & Z^2 & X^{\alpha'} \end{bmatrix}$$

(１)は命題２．２より $\alpha<\alpha'<2\alpha$ 以外はすべてＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎになる。

(２)は［２］の定理４．１からやはり $\alpha<\alpha'<2\alpha$ 以外はすべてＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎになる。

(３)は定理１により常にＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎである。

### 注意

命題２．２でのＲはすべてＮｏｅｔｈｅｒｉａｎになることが［６］で与えられており、したがって、$n_1=6$ でのＲはすべてＮｏｅｔｈｅｒｉａｎになっている。

そこで、最後に次のような予想を与えてこの報告集を終わりにしたい。

**予想**　$P=(6,-,-)$ での $R_s(P)$ はＧｏｒｅｎｓｔｅｉｎである。

## References

[1] R.W.Cowsik, Symbolic powers and the number of defininig equations, Algebra and Its Applications, Lecture Notes in Pure and Appl.Math., 91 (1985), 13-14.

[2] S.Goto,K.Nishida and Y.Shimoda, The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for spase curves, J.Math.Soc.Japan, 43 (1991), 465-481.

[3]__________,The Gorensteinness of the symbolic blow-ups for certain space monomial curves, to appear in Trans.A.M.S.

[4] C.Huneke, On the finite generation of symbolic blow-ups,Math. Z.,179 (1982) 465-472.

[5] ________, Hilbert functions and symbolic powers, Michigan Math. J., 34 (1987),293-318.

[6] S.Cutkosky, Symbolic algebras of monomial primes,preprint.

[7] H.Srinivasan, On finite generation of symbolic algebras of monomial primes, Comm. in Alg. 19 (1991) 2557-2564

# Gorensteinness of Finite Extensions of Rees Algebras

HIDEMI SEKIGUCHI

*Department of Mathematics, School of Science,*
*Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya, 464-01, Japan*

Let $(A,\mathfrak{m})$ be a Noetherian local ring and $\{I_n\}_{n\geq 0}$ a filtration on $A$; i.e., $I_n$ are ideals such that $I_n \supset I_{n+1}$, $I_m \cdot I_n \subset I_{m+n}$, $I_0 = A$ and $I_1 \subset \mathfrak{m}$. We set $R = \bigoplus_{n\geq 0} I_n$ and $G = \bigoplus_{n\geq 0} I_n/I_{n+1}$. Suppose that grade $I_1 \geq 2$ and that there exists an integer $r$ such that $I_n = I_1^{n-r} \cdot I_r$ for $n \geq r$. The purpose of this note is to characterize the Gorensteinness of $R$ in terms of the canonical modules of $A$ and $G$ under the assumption that $R$ is Cohen-Macaulay, extending the main theorem of Ikeda[4] on Rees algebra $\bigoplus_{n\geq 0} I_1^n$. I would like to refer the readers the paper of K. Nishida in this volume. He obtained more general result than ours.

## DEFINITION

Let $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ be a Noetherian graded ring and $M,N$ be $(\mathbb{Z}$-$)$graded $R$-modules. We write $N(m)$, where $m$ is an integer, for the graded $R$-module defined by $N(m)_n = N_{m+n}$. Let $\mathcal{H}om_R(M,N)$ be the graded $R$-module of homomorphisms whose homogeneous component of degree $n$ consists of degree-preserving $R$-linear morphisms from $M$ to $N(n)$.

For a non-negative integer $i$, the functor $\mathcal{E}xt^i_R(\ ,\ )$ is defined to be the i-th derived functor of $\mathcal{H}om_R(\ ,\ )$. Assume that $R_0$ is a Noetherian local ring $(A,\mathfrak{m})$ and let $M$ be the maximal homogeneous ideal of $R$. The i-th local cohomology functor $\mathcal{H}^i_M(\ )$ is defined by $\mathcal{H}^i_M(\ ) = \varinjlim_n \mathcal{E}xt^i_R(R/M^n,\ )$. Let $\mathcal{E}_R$ be the injective envelope of $R/M$ in the category of graded R-modules. If $A$ is complete, then we put $\mathcal{K}_R = \mathcal{H}om_R(\mathcal{H}^d_M(R), \mathcal{E}_R)$, where $d = \dim R$. If $A$ is not complete and if there is a graded R-module $\mathcal{K}_R$ which satisfies $\mathcal{K}_{\hat{R}} \simeq \mathcal{K}_R \otimes_R \hat{R}$, where $\hat{R} = R \otimes_A \hat{A}$ with $\hat{A}$ the completion of $A$, then $\mathcal{K}_R$ is uniquely determined up to isomorphism ([4, (1.7)]). We call $\mathcal{K}_R$ the canonical module of $R$. If $R$ is Cohen-Macaulay, then $R$ is Gorenstein if and only if $R$ has the canonical module $\mathcal{K}_R$ and $\mathcal{K}_R \simeq R(n)$ for some integer $n$ ([4,(1.9)]). We regard an A-module $N$ as a graded R-module with $N_0 = N$ and $N_n = 0$ for $n \neq 0$. Note that $\mathcal{H}^i_M(N) \simeq H^i_{\mathfrak{m}}(N)$ as R-modules, where $H^i_{\mathfrak{m}}(N)$ is the local cohomology module of $N$ as an A-module, and that, if $\mathcal{K}_A$ exists, then the canonical module $K_A$ of a local ring $A$ exists and $\mathcal{K}_A \simeq K_A$ as R-modules.

## STATEMENT OF THEOREM

Our result is the following:

**THEOREM.** *Let* $A$ *be a Noetherian local ring and* $\{I_n\}_{n\geq 0}$ *a filtration on* $A$. *We set* $R = \oplus_{n\geq 0} I_n$ *and* $G = \oplus_{n\geq 0} I_n/I_{n+1}$. *Suppose that* $\operatorname{grade} I_1 \geq 2$ *and that there exists an integer* $r$ *such that*

$I_n = I_1^{n-r} \cdot I_r$ *for* $n \geq r$. *If* R *is Cohen-Macaulay, then the following conditions are equivalent.*

(a) R *is Gorenstein.*

(b) *There exist* $K_A$ *and* $\mathcal{K}_G$, *and we have* $K_A \simeq A$ *and* $\mathcal{K}_G \simeq G(-2)$.

## PROOF OF THEOREM

In what follows, A, R and G are as in Theorem, M (resp. N) is the maximal homogeneous ideal of R (resp. G), and J (resp. L) is the ideal of R (resp. G) generated by the homogeneous elements of positive degree. Let $\mathfrak{m}$ be the maximal ideal of A and d the Krull-dimension of A. Note that $\dim R = d+1$ and $\dim G = d$, since $\operatorname{ht} I_1 > 0$. We identify $R = \bigoplus_{n\geq 0} I_n$ with the subalgebra $\bigoplus_{n\geq 0} I_n X^n$ of $A[X]$ where X is an indeterminate, and write $aX^n$ for the image of $a \in I^n$ in $R_n$. If $a \in I^n \setminus I^{n+1}$, then the image of a in $G_n$ is denoted by $a*$.

PROPOSITION 1. $\mathcal{H}^i_M(G) \simeq H^i_{\mathfrak{m}}(A)(1)$ *for* $i<d$.

*Proof.* Since R is Cohen-Macaulay, from the exact sequence $0 \to J \to R \to A \to 0$, we have $H^i_{\mathfrak{m}}(A) \simeq \mathcal{H}^{i+1}_M(J)$, and from the exact sequence $0 \to J(1) \to R \to G \to 0$, we have $\mathcal{H}^i_M(G) \simeq \mathcal{H}^{i+1}_M(J)(1)$.

LEMMA 2. *If* $K_A$ *(resp.* $\mathcal{K}_G$*) exists, then* $\operatorname{Hom}_A(K_A, K_A) \simeq A$ *(resp.* $\mathcal{H}om_G(\mathcal{K}_G, \mathcal{K}_G) \simeq G$*).*

*Proof.* By [1], we have only to prove that A (resp. G) satisfies $(S_2)$. Let $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. If $I_1 \subset \mathfrak{p}$, then depth $A_{\mathfrak{p}} \geq$ grade $I_1 \geq 2$. If $I_1 \not\subset \mathfrak{p}$, then $A_{\mathfrak{p}}[X] \simeq R_{\mathfrak{p}}$, hence $A_{\mathfrak{p}}$ is Cohen-Macaulay. Let $\mathfrak{q}$ be a homogeneous prime ideal of G. If $L \not\subset \mathfrak{q}$, then $G_{\mathfrak{q}}$ is Cohen-Macaulay by the same argument as above. By Proposition 1, we have depth $G_N$ = depth $A \geq 2$, hence we may assume $L \subset \mathfrak{q} \subsetneq N$. Then $\dim G_0 > \dim (G_{\mathfrak{q}})_0$, and the assertion follows by induction on $\dim G_0$.

LEMMA 3. *We set* $\overline{R} = R/(a, aX)R$ *for* $a \in I_1 \setminus I_2$ *such that* $a^*$ *is a non-zero-divisor of* G. *If* R *is Gorenstein, then* $\mathcal{H}^{d-1}{}_M(\overline{R}) = 0$.

*Proof.* By the duality theorem, what is required is that $\mathcal{E}xt^1{}_S(\overline{R}, S) = 0$, where we set $S = R/aR$, which is a d-dimensional Gorenstein graded ring. It is easy to calculate that

$$\mathcal{E}xt^1{}_S(\overline{R}, S)_{n-1} = \begin{cases} (\bigcap_{\nu\geq 0}(aI_{n+\nu} : I_{\nu+1}) \cap I_n)/aI_{n-1} & \text{for } n>0, \\ (\bigcap_{\nu\geq 0}(aI_\nu : I_{\nu+1}))/aA & \text{for } n=0, \\ 0 & \text{for } n<0. \end{cases}$$

If $n \geq 0$, then, since grade $I_n \geq 2$, we have

$$\bigcap_{\nu\geq 0}(aI_{n+\nu} : I_{\nu+1}) \cap I_n \subset (aA : I_1) \cap I_n = aA \cap I_n.$$

It is clear that $aA \cap I_0 = aA$. By the assumption for $a^*$, we have $aA \cap I_n = aI_{n-1}$ for $n>0$. Hence $\mathcal{E}xt^1{}_S(\overline{R}, S) = 0$.

REMARK 4. $I_n \supsetneq I_{n+1}$ *for* $n \geq 0$.

*Proof*. Let $a$ be an element of $I_1$ which is a part of a minimal reduction of $I_1$. Then $a^n$ is not contained in the integral closure of $I^n$ (cf.[5]), hence we have $a^n \in I_n \setminus I_{n+1}$.

LEMMA 5. *If* $A/\mathfrak{m}$ *is an infinite field, then there exists* $a \in I_1 \setminus I_2$ *such that* $a*$ *is a non-zero-divisor of* $G$.

*Proof*. Note that $R$ is an integral extension of $S = \bigoplus_{n\geq 0} I_1^n$. We take a non-zero-divisor $b \in I_1$ of $A$, and set $\overline{R} = R/bR$, $\overline{S} = S/bR \cap S$ and $\overline{A} = A/bA$. If $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\overline{R})$, then $\dim \overline{S}/\mathfrak{p}\cap\overline{S} = d > \dim \overline{A}/\mathfrak{p}\cap\overline{A}$, so that $\mathfrak{p}\cap\overline{R}_1 \neq \overline{R}_1$. By Remark 4, the ideal $I_2$ is strictly contained in $I_1$, and since $A/\mathfrak{m}$ is infinite, there exists $a \in I_1 \setminus I_2$ such that $aX \notin \mathfrak{p}$ for all $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\overline{R})$. We have $(bI_{n+1}:a) \cap I_n = bI_n$, hence

$$(I_{n+1}:a) \cap I_{n-1} \subset ((bI_{n+1}:a) \cap I_n):b = bI_n:b = I_n$$

for $n>0$. This means that $a*$ is a non-zero-divisor of $G$.

*Proof of (a)→(b)*. We may assume that $A$ is complete, when $K_A$ and $\mathcal{K}_G$ exist. Moreover, we may assume that $A/\mathfrak{m}$ is infinite and take $a \in I_1 \setminus I_2$ as in Lemma 5. We set $\overline{R} = R/(a, aX)R$. From the exact sequences $0 \to A \xrightarrow{a} R/aXR \to \overline{R} \to 0$ and $0 \to G(-1) \xrightarrow{aX} R/aR \to \overline{R} \to 0$, we get by Lemma 3 the exact sequences

$$0 \to H^d_{\mathfrak{m}}(A) \to \mathcal{K}^d_M(R/aXR) \to \mathcal{K}^d_M(\overline{R}) \to 0$$

and

$$0 \to \mathcal{K}^d{}_M(G)(-1) \to \mathcal{K}^d{}_M(R/aR) \to \mathcal{K}^d{}_M(\bar{R}) \to 0.$$

Applying $\mathcal{H}om_R(\ ,\mathcal{E}_R)$ to these sequences, we see that there are surjective R-homomorphisms $\mathcal{K}_{R/aXR} \to K_A$ and $\mathcal{K}_{R/aR} \to \mathcal{K}_G(1)$. If $\mathcal{K}_R \simeq R(n)$, then $\mathcal{K}_{R/aXR} \simeq R(n+1)$ and $\mathcal{K}_{R/aR} \simeq R(n)$. It follows that $n+1 = 0$, and that $K_A \simeq A/C$ and $\mathcal{K}_G \simeq (G/D)(-2)$ for some ideal $C$ of $A$ and some homogeneous ideal $D$ of $G$. By Lemma 2, we have $C = D = 0$.

**PROPOSITION 6.** *If* $I$ *is an ideal of* $A$ *such that* grade $I \geq 2$, *then* $\mathrm{Hom}_A(I,I) \simeq A$.

*Proof.* Let $x,y$ be an A-regular sequence in $I$. Then $(\mathrm{Hom}_A(I,I))_x \simeq A_x$, hence any homomorphism $f \in \mathrm{Hom}_A(I,I)$ is a mutiplication by $a/x^\nu$ for some $a \in A$ and a non-negative integer $\nu$. We have $(a/x^\nu)\cdot y \in I$, so that $a \in x^\nu A$ and $a/x^\nu \in A$.

*Proof of (b)→(a).* We may assume that $A$ is complete. The exact sequences $0 \to J \to R \to A \to 0$ and $0 \to J(1) \to R \to G \to 0$ yield the exact sequences

$$0 \to H^d_{\mathfrak{m}}(A) \to \mathcal{K}^{d+1}{}_M(J) \to \mathcal{K}^{d+1}{}_M(R) \to 0$$

and

$$0 \to \mathcal{K}^d{}_N(G) \to \mathcal{K}^{d+1}{}_M(J)(1) \to \mathcal{K}^{d+1}{}_M(R) \to 0,$$

from which we get the exact sequences

$$0 \to \mathcal{K}_R \overset{\alpha}{\to} \mathcal{K}_J \to K_A = A \to 0 \tag{1}$$

and

$$0 \to \mathcal{K}_R(2) \overset{\beta}{\to} \mathcal{K}_J(1) \overset{\gamma}{\to} \mathcal{K}_G(2) = G \to 0, \tag{2}$$

where $\mathcal{K}_J = \mathcal{H}om_R(\mathcal{H}^{d+1}{}_M(J), \mathcal{E}_R)$. We have isomorphisms $(\mathcal{K}_R)_n \overset{\alpha}{\to} (\mathcal{K}_J)_n$ for $n \neq 0$ and injections $(\mathcal{K}_R)_{n+2} \overset{\beta}{\to} (\mathcal{K}_J)_{n+1}$ for all $n$. Since $\mathcal{K}_R$ is Noetherian, we have $(\mathcal{K}_R)_n = 0$ for small enough integers $n$, hence we have

$$(\mathcal{K}_R)_n = 0 \quad \text{for} \quad n \leq 0. \tag{3}$$

Let $C$ be the R-submodule of $\mathcal{K}_J(1)$ generated by the homogeneous elements of non-negative degree. By (1) and (3), we have $\mathcal{K}_R = C(-1)$, so we are going to prove $C \simeq R$. Let $\omega$ be a homogeneous element of $C$ of degree 0 such that $\gamma(\omega)$ is a unit of $G$. We define an R-submodule $C'$ of $C$ by $C' = R\omega$, and an ideal $\mathfrak{a}$ of $R$ by the kernel of the natural map $R \to R\omega$. We show $C_n = C'_n$ and $\mathfrak{a}_n = 0$ $\mathfrak{a}_n = 0$ for $n \geq 0$ by induction on $n$, which completes the proof.

If $n=0$, then by (1),(2) and (3), we have

$$C_0 = (\mathcal{K}_J)_1 \simeq (\mathcal{K}_R)_1 \simeq (\mathcal{K}_J)_0 \simeq A$$

as A-modules, hence $C_0 = C'_0$ and $\mathfrak{a}_0 = 0$. Let $n>0$. We set $D = C \cap \ker(\gamma)$. Note that $G$ is generated by a single element of degree 0 as an R-module, of which fact ensures that

$$0 \to D \to C \overset{\gamma}{\to} G \to 0, \tag{2'}$$

and

$$0 \to D\cap C' \to C' \overset{\chi}{\to} G \to 0, \tag{2"}$$

are exact, and that it holds the equality

$$C = C' + D. \tag{4}$$

If we use induction hypothesis, then from (1),(2),(3) and (2"), we get

$$C_n = (\mathcal{K}_J)_{n+1} \simeq (\mathcal{K}_R)_{n+1} = D_{n-1} = (D\cap C')_{n-1} \simeq I_n/\mathfrak{a}_{n-1} = I_n.$$

Hence the inclusion $C'_n \to C_n$ is represented by a homomorphism of $\mathrm{Hom}_A(I_n/\mathfrak{a}_n, I_n)$, so that by Proposition 5, there exists $x\in A$ such that $C'_n = xC_n$ and $\mathfrak{a}_n = (0:_A x)\cap I_n$. On the other hand, we have $G_n \neq 0$ by Remark 4 and $D_n \neq C_n$ by (2'). Hence, if we apply Nakayama's Lemma to (4), we see that $x$ is a unit of A. Thus we get $C_n = C'_n$ and $\mathfrak{a}_n = 0$.

## EXAMPLES

EXAMPLE 1.(cf.[6]) Let $A = k[\![X_1,\cdots X_d]\!]$ with $d\geq 2$ be a formal power series ring over a field $k$. Let $\alpha_1,\cdots,\alpha_d$ be positive integers and $I_n$ be the integral closure of $(X_1^{\alpha_1},\cdots,X_d^{\alpha_d})^n$. Then $R = \oplus_{n\geq 0} I_n$ is Cohen-Macaulay by [3]. We define an integer $\delta$ to be the smallest integer which is no less then $\sum_{i=1}^{d} 1/\alpha_i$, and set $\varepsilon = \ell(\delta - \sum_{i=1}^{d} 1/\alpha_i)$, where $\ell$ is the least common multiple of $\alpha_1,\cdots,\alpha_d$. It is easy to verify that $\delta = \min\{n\in\mathbf{Z} \mid (\mathcal{K}_G)_n \neq 0\}$ and that $\mathcal{K}_G \simeq G(n)$ for some integer $n$ if and only if $\varepsilon = \ell-1$. Hence, by our theorem, $R$ is Gorenstein if and only if $\sum_{i=1}^{d} 1/\alpha_i = (\ell+1)/\ell$.

EXAMPLE 2. Let $A = k[X_1, \cdots, X_5]/(X_1^4+X_2^4+X_3^4+X_4^4+X_5^2)$, where $k$ is a field. We set $I_1 = (X_1, \cdots, X_5)A$ and $I_n = (X_1, \cdots, X_4)^{n-2}X_5A + (X_1, \cdots, X_4)^nA$ for $n \geq 2$. Then $R = \bigoplus_{n\geq 0} I_n$ is Gorenstein. This is an example for a Gorenstein graded ring which is not a Rees ring.

## REFERENCES


[1] Y. Aoyama, Some basic results on canonical modules, J. Math. Kyoto Univ. 23(1983), 85-94.

[2] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings I, J. Math. Soc. Japan 30(1978), 179-213.

[3] M. Hochster, Rings of invariant of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials and polytopes, Ann. of Math. 96(1972), 318-337.

[4] S. Ikeda, On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings, Nagoya Math. J. 102(1986), 135-154.

[5] D. G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, Proc. Camb. Phil. Soc. 50(1954), 145-158.

[6] 渡辺敬一, $n$ 個の divisor から作られる $\mathbb{Z}^n$-graded ring について, 第 12 可換環論シンポジウム報告集.

# $S^2$上の rank 2 の projective modules について

衛藤　和文　(早大　理工)

## 1　Projective modules

$A = R[x,y,z] = R[X,Y,Z]/(X^2+Y^2+Z^2-1)$ とする。(但し、R は実数体。) これから、$A$ 上の rank 2 の projective module について報告する。その前に、projective module の定義や、今までに知られている結果についてまとめよう。

$A$ を一般のネーター環とし、簡単のため、module はすべて有限生成を仮定する。$A$-加群 $P$が projective とは、$P$が自由加群の直和因子になっていることをいう。local ring 上、$P$が projective なら、中山の補題により、$P$は free になる。ゆえに、$P$が projective なら、$p$ ∈Spec $A$ に対し、$P_p$は free になる。実は、この性質が projective module を特徴づけている。[10, Ch.4, Cor. 3.6]

projective module の研究において、projective module がどれだけ自由加群に近いか、すなわち、いつ projective module が free になるか、逆に、どのようなときに free でない projective module が存在するかというのは、大きな問題である。これに関しては、$A = k[T_1,\cdots,T_n]$, $k$は体のときは、$A$ 上の projective module は free であることが知られている。(Serre Conjecture)(e.g.[10, Ch.4, Theorem 3.15])

次に、次のような性質を考える。

1. $P$は自由直和因子を持つ。

2. $P$は cancellative。

$$\text{i.e. } P \oplus A \cong Q \oplus A \Longrightarrow P \cong Q.$$

1. に関しては、

$$\mathrm{rank}P > \dim A、$$

2. に関しては、

$$\mathrm{rank}P > \dim A、$$

のとき成立する。また、この条件がなければ、ともに反例があることが知られている。([3], [6], [7]) $A$ が多項式環のときは、これよりもよい結果が知られている。([4], [11]) $A$ が代数閉体上の algebra のときは、cancellation に関してよい結果が知られている。([13])

話を元に戻して、$A = R[x,y,z] = R[X,Y,Z]/(X^2+Y^2+Z^2-1)$, $R$は実数体とする。$\dim A = 2$ より、rank $P > 2$のとき、$P$は cancellative。すなわち、このときは、projective modules が stably isomorphic なら、isomorphic。ゆえに、$K_0(A)=Z/2Z$ ([16]) から、rank $P>2$ のとき、各 rank に関して、同型類は 2 つしかない。また、$A$ は UFD なので、rank 1 projective は free。ゆえに、rank 2 projective がどのくらい存在するかが残された問題である。

## 2 $S^2$上の projective module

$A$ 上の projective module について考えるとき、$S^2$上の vector bundle として考えるのは非常に有効である。すなわち、環 $B$を位相空間 Spec $B$に対応させるとき、$B$上の projective module は、その locally free という性質から、$S^2$上の同じ rank の vector bundle と対応している。まず、一般にこの対応について次の結果は基本的である。

定理 [14] $X$を compact Hausdroff space とし、$C(X)$ を $X$上の連続関数のなす環とする。このとき、$X$上の vector bundle と $C(X)$ 上の projective module は 1 対 1 に対応している。

この定理から、もし $X$の座標環 $B$が $C(X)$ に近ければ、すなわち $B$上の projective module と $C(X)$ 上の projective module の間に 1 対 1 対応があれば、問題は簡単になる。しかし、今のところ、一般論では示されていない。ただし、$B$の代わりに $B_T$ (T はある積閉集合) に対しては示されている。([15])

次に $S^2$上の vector bundle (もちろん rank 2) について考えよう。$S^2$は 1 点を取り除けば $R^2$に同相なので、$S^2$上の vector bundle は $R^2$上の 2 つの trivial bundle を張り合わせたものとして考えられる。そのとき、張り合わせた上での transition function は、

$$R^2-\{0\}\longrightarrow GL_2(R)$$

と考えられる。また、$R^2-\{0\}$ は $S^1$に homotopy 同値なので、この function に対して、$\pi_1(GL_2(R))=\pi_1(SO(2))\cong Z$の元が対応できる。ただし、SO(2) は特殊直交群 (回転群)。その数の絶対値を vector bundle の Euler number という。([5]) このとき、Euler number は invariant になっている。すなわち、$E, E'$を vector bundle とすると、

$$E\cong E'\Longleftrightarrow e(E)=e(E').$$

ただし、$e(E)$ は $E$の Euler number を表す。

そこで、$A$ 上の projective module を vector bundle として考えて、その Euler number を考えることができる。これを単に、projective module の Euler number ということにする。このことから、問題は次のようになる。

> $\mathcal{P}_2(A)$ を $A$ 上の rank 2 projective module の同型類のなす集合とする。このとき、$e:\mathcal{P}_2(A)\longrightarrow \mathrm{N}\cup\{0\}$ は、bijective か。(N は自然数の集合)

この問題に関しては、Barge と Ojanguren よって肯定的に解決された。([2]) 実は、このことを講演申し込み前に知らなかったので、以下、これから述べる方法で、すべての数に対して、それを Euler number として持つ projective module を構成した。この方法は、彼らの方法とは異なっていた。

# 3 Euler number $n$ の projective module の構成

これから、Euler number $n$ の projective module を構成する。その前に、次のような極座標を用いることに注意する。

$$\begin{cases} x = s\sin\theta \\ y = t\sin\theta \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

但し、$s^2+t^2=1, 0 \leq \theta \leq \pi$。$u_n = (s\sin\theta, t\sin n\theta, \cos n\theta - 1) \in \mathrm{Hom}(A^3, A)$ とする。実際、$t\sin n\theta, \cos n\theta - 1$ は次のような $y, z$の多項式である。

$$\begin{aligned} t\sin n\theta &= 2^{n-1}y(z-\cos\tfrac{\pi}{n})\cdots(z-\cos\tfrac{n-1}{n}\pi) \\ \cos n\theta - 1 &= 2^{n-1}(z-1)(z-\cos\tfrac{2\pi}{n})\cdots(z-\cos\tfrac{n-1}{n}2\pi) \end{aligned}$$

**Proposition.** $I_n$を Im $u_n$とすると、$I_n$は height 2 の locally complete intersection ideal である。

(証明の概略)

$I_n \subset m \in \mathrm{Spec}\ A$ とすると、上の因数分解により、ある数 $k$が存在し、$m = (x, y - \sin\frac{2k\pi}{n}, z - \cos\frac{2k\pi}{n})$ となる。このことから、$\mathrm{V}(I_n) = \{(x, y-\sin\frac{2k\pi}{n}, z-\cos\frac{2k\pi}{n})\}_{1\leq k\leq n}$がわかる。あとは、各 maximal ideal で実際 localize して $(I_n)_m$の生成元を調べれば、2 元で生成されることが示される。

Proposition により pd $I_n \leq 1$ がわかるので、次の Corollary をえる。

**Corollary.** $P_n$を Ker $u_n$とすると、$P_n$は rank 2 projective になる。

実は、この $P_n$が求める projective module である。すなわち、$e(P_n) = n$ となっている。定理の形で書けば、

**Theorem.** $P_n$は Euler number $n$ の rank 2 projective である。

これから、Theorem の証明の概略を述べるが、その前に証明の方法をまとめよう。

1. $A_{z-1}, A_{z+1}$上の生成元をみつける。
2. それらの生成元を mod $z$する。
3. mod $z$した生成元について、その間の変換行列を求める。
4. 変換行列の基本群での image をとる。

1はちょうど、$S^2$から 1 点を取り除いたとき、vector bundle は trivial になるが、そのときの、すなわち $(P_n)_{z-1}, (P_n)_{z+1}$が free になるときの $A^3_{z-1}, A^3_{z+1}$での生成元を求めている。2は$S^2$から異なる 2 点を取り除いたとき、$S^1$とホモトピー同値になるが、その $S^1$を環 $A/(z)$ と

対応させ、その環上での 2 つの free module の生成元を求めている。3によって、transition function $S^1 \longrightarrow GL_2(R)$ が決まり、4で Euler number がわかる。

(証明の概略)

まず、$A^3_{z-1}$での $(P_n)_{z-1}$の生成元をみつける。$n=1$ のとき、$u_1=(s\sin\theta, t\sin\theta, \cos\theta-1)$ で、$\cos\theta-1$ が unit なので、$(P_1)_{z-1}$の生成元は

$$\begin{pmatrix} 1-\cos\theta \\ 0 \\ s\sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\cos\theta \\ t\sin\theta \end{pmatrix}$$

となる。$n \geq 2$ のとき、一般の $n$ に関して行うと煩雑になるので、$n=2, n=3$ の場合だけ生成元を求めて、$n \geq 4$ のときは結果のみ述べる。その前に、$a \in A_{z-1}, 1 \leq i,j \leq 3, i \neq j$ に対し、$E_{i,j}(a)$ を対角成分は 1、$(i,j)$ 成分は $a$、その他の成分は 0 の elementary(基本) 行列とする。

$n=2$ のとき、$u_2=(s\sin\theta, t\sin 2\theta, \cos 2\theta-1)$ である。このとき、

$$\begin{aligned} u_{21} &= u_2 E_{3,2}\left(-\tfrac{t\sin\theta}{\cos\theta-1}\right) = (s\sin\theta, -2t\sin\theta, \cos 2\theta-1) \\ u_{22} &= u_{21}E_{2,3}(-t\sin\theta)E_{1,3}(2s\sin\theta) = (s\sin\theta, -2t\sin\theta, 0) \end{aligned}$$

とおく。このとき、Ker $u_{22}$は

$$\begin{pmatrix} 2t\sin\theta \\ s\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される。ゆえに、Ker $u_2=(P_2)_{z-1}$の生成元はその列ベクトルを基本行列で変換することによってえられる。

$n=3$ のときも同様に、

$$\begin{aligned} u_{31} &= u_3 E_{3,2}\left(-\tfrac{t\sin\theta}{\cos\theta-1}\right) \\ u_{32} &= u_{31}E_{2,3}(-t\sin\theta)E_{1,3}(2s(\sin\theta+\sin 2\theta)) \\ u_{33} &= u_{32}E_{3,2}\left(-\tfrac{2t\sin\theta}{\cos\theta-1}\right) = (s\sin\theta, 0, -\cos 2\theta+\cos\theta) \end{aligned}$$

となる。Ker $u_{33}$の生成元は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta-\cos\theta \\ 0 \\ s\sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。一般の場合は

$$u_{nn} = \begin{cases} (s\sin\theta, 0, (-1)^m(\cos(m+1)\theta-\cos m\theta)) & \text{但し、} n \text{ は奇数} \quad m=\frac{n-1}{2} \\ (s\sin\theta, (-1)^m 2t\sin m\theta, 0) & \text{但し、} n \text{ は偶数} \quad m=\frac{n}{2} \end{cases}$$

で Ker $u_{nn}$の生成元は

$$\begin{pmatrix} (-1)^{m+1}(\cos(m+1)\theta - \cos m\theta \\ 0 \\ s\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{但し、} n \text{ は奇数、} \quad m = \tfrac{n-1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} (-1)^{m+1}2t\sin m\theta \\ s\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{但し、} n \text{ は偶数、} \quad m = \tfrac{n}{2}$$

となる。

次に、mod $z$するわけであるが、これは$\theta$に$\frac{\pi}{2}$を代入することと同じである。このとき、各基本行列は簡単な基本行列になり、そのことから、$z=0$上の$(P_n)_{z-1}$の$A^3_{z-1}$での生成元が計算できる。その結果、次の行列の２つの列ベクトルが生成元になっている。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ st & 1 \end{pmatrix} R^2 \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2st & 1 \end{pmatrix} R^2 \right)^{k-1} \qquad \text{但し、} n = 4k\text{、}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ s & t \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -st & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} R^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)^{k} \qquad \text{但し、} n = 4k+1\text{、}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} R \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2st & 1 \end{pmatrix} R^2 \right)^{k} \qquad \text{但し、} n = 4k+2\text{、}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ s & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ st & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -st & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} R^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)^{k+1} \qquad \text{但し、} n = 4k+3\text{、}$$

但し、$R = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}$。

次に、$(P_n)_{z+1}$の $z=0$ 上の生成元を求める。この方法は$(P_n)_{z-1}$の場合と多少異なるが、この報告の中では、省略して結果のみを述べることにする。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -st & 1 \end{pmatrix} R^{-2} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2st & 1 \end{pmatrix} R^{-2} \right)^{k-1} \qquad \text{但し、} n = 4k\text{、}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ s & t \end{pmatrix} R \left( \begin{pmatrix} 1 & -st \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{k} \qquad \text{但し、} n = 4k+1\text{、}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} R^{-1} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2st & 1 \end{pmatrix} R^{-2} \right)^{k} \qquad \text{但し、} n = 4k+2\text{、}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ s & -t \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} 1 & st \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & -st \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{k+1} \qquad \text{但し、} n = 4k+3\text{、}$$

そこで、それぞれの場合において、最初の行列が等しいので、容易に変換行列が求まる。このときの $R$の数の絶対値 (但し $R^{-1}$を－1個と数えて) が Euler number になる。実際計算すると、すべての場合に $n$ になっている。

# 4 Unimodular rows と Projective modules

$B$を環とし、$(b_1,\cdots,b_r)$ を $r$個の $B$の元の組とする。もし、イデアル $(b_1,\cdots,b_r)$ が $B$に等しいとき、$(b_1,\cdots,b_r)$ を長さ $r$の unimodular row という。このことは次のようにも考えられる。$(b_1,\cdots,b_r)$ によって、自然に $\mathrm{Hom}(B^r,B)$ の元が導かれるが、この写像が全射になることと $(b_1,\cdots,b_r)$ が unimodular row になることは同じである。

このとき、その写像の kernel は rank $r-1$ の $B$上の stably free projective module になる。そこで、長さ $r$の unimodular rows のなす集合 $Um_r(B)$ から、rank $r-1$ の $B$上の projective module のなす集合 $\mathcal{P}_{r-1}(B)$ への、自然な対応が考えられる。

これからは話を環 $A$ の場合に限定する。今までのことから、写像 $Um_3(A) \longrightarrow \mathcal{P}_2(A)$ をえる。この写像に関して、次の結果をえた。

**Theorem.** $v_n = (s\sin\theta, t\sin n\theta, \cos n\theta) \in Um_3(A)$ とする。このとき、$\mathrm{Ker}\ v_n$は $P_{2n}$と同型になる。

この Theorem から $P_{2n}$は stably free であることがわかる。
(証明の概略)

まず、次の完全列を考える。

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{{}^t v_n} A^3 \xrightarrow{M} A^3 \xrightarrow{u_{2n}} A \longrightarrow 0$$

但し、$M = \begin{pmatrix} s\frac{\sin n\theta \sin 2n\theta}{\sin\theta} & t\sin 2n\theta & \cos 2n\theta - 1 \\ t\sin n\theta & -s\sin\theta & 0 \\ \cos n\theta & 0 & -s\sin\theta \end{pmatrix}$。

ゆえに、$v' = (s\frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}, t\sin n\theta, \cos n\theta)$ とおくと、$v'^t v_n = 1$ より Ker $v'$は $P_{2n}$と同型になる。ところが、Roitman's Lemma([12, Lemma 1]) より、$v' \overset{E}{\sim} v_n$(すなわち、ある基本行列 $E$が存在し、$v' = v_n E$)。ゆえに、Ker $v_n$は Ker $v'$、すなわち、$P_{2n}$と同型になる。

# 5 Application

前の章で写像 $Um_3(A) \longrightarrow \mathcal{P}_2(A)$ に関して調べたが、もう少し深く $Um_3(A)$ について考えよう。$E_3(A)$ を成分を $A$ にもつ $3\times 3$ の基本行列によって生成される群とする。このとき、$E_3(A)$ は自然に $Um_3(A)$ に作用し、その商群 $Um_3(A)/E_3(A)$ が考えられる。このとき、$Um_3(A)/E_3(A)$ に群の構造が入ることがもっと一般の環に対して、van der Kallen によって証明されている。(詳しくは、[8], [9]) また、[9, Theorem 7.7] より、$Um_3(A)/E_3(A)$ から $\pi_2(S^2)$ への自然な写像 $m$ があり、しかも、$Um_3(C)/E_3(C)$ は$\pi_2(S^2)$ と同型であることがわかる。ただし、$C$は $S^2$上の連続関数のなす環。$G$ を $v_n(n\in Z)$ の $Um_3(A)/E_3(A)$ での image からなる集合とする。このとき、[17, Theorem 5.2, Cor. 7.4] により、$G$ は $Um_3(A)/E_3(A)$ の部分群になる。

次に、$\mathcal{P}_2(A)$ との関連について考えよう。$v, v' \in Um_3(A)$ について、$v \overset{E}{\sim} v'$ならば、その $\mathcal{P}_2(A)$ での image $P(v)$ と $P(v')$ は同型になるので、自然に $Um_3(A)/E_3(A)$ から $\mathcal{P}_2(A)$ への写像が決まる。このとき、次の結果をえる。

**Theorem.** 次の図は可換。

$$\begin{array}{ccc} Um_3(A)/E_3(A) & \xrightarrow{P} & \mathcal{P}_2(A) \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & {\scriptstyle e}\downarrow \\ \pi_2(S^2) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_1(SO(2))/\{\pm 1\} \end{array}$$

但し、$e$ は Euler number、$\Delta$は fibre space $SO(3)/SO(2) = S^2$から long exact sequence をとってえられる map から導かれる写像。

証明は、先ほど定義した群 $G$ を用いて示される。$e(P(v_n)) = \Delta(m(v_n)) = |2n|$ になっている。これは次のことを意味している。unimodular row から projective module を作る操作は、ある fibre space の long exact sequence の connection の map のある意味での具体的対応を与えている。

## 参考文献


[1] M. F. Atiyah, *K-Theory,* Benjamin, New York, 1967.

[2] J. Barge and M. Ojanguren, *Fibrés algébrique sur une surface réelle,* Comment. Math. Helv. 62 (1987), 616-629.

[3] H. Bass, *Libération des modules projectifs sur certains anneaux de polynômes,* in "Séminaire Bourbaki, 1973/74, #448", LN. 431, Springer-Verlag, pp. 228-254.

[4] S. M. Bhatwadekar and A. Roy, *Some Theorems about Projective Modules over polynomial rings,* J. Algebra 86 (1984), 150-158.

[5] R. Bott and L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology,* Springer-Verlag, New York, 1982.

[6] D. Eisenbud and E. G. Evans, Jr., *Generating Modules Efficiently: Theorems from Algebraic K-Theory,* J. Algebra 27 (1973), 278-305.

[7] D. Eisenbud and E. G. Evans, Jr., *Three conjectures about modules over polynomial rings,* in "Conference on Commutative Algebra" LN. 311, Springer-Verlag, 1973, pp. 78-89.

[8] W. van der Kallen, *A group structure on certain orbit sets of unimodular rows,* J. Algebra 82 (1983), 363-397.

[9] W. van der Kallen, *A module structure on certain orbit sets of unimodular rows,* J. Pure and Appl. Alg. 57 (1989), 281-316.

[10] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry,* Birkhäuser, Boston, 1985.

[11] R. A. Rao, *A question of H. Bass on the cancellative nature of large projective modules over polynomial rings,* Amer. J. Math. 110 (1988), 641-657.

[12] M. Roitman, *On unimodular rows,* Proc. Amer. Math. Soc. 95 (1985), 184-188.

[13] A. Suslin, *A cancellation theorem for projective modules over algebras,* Soviet Math. Dokl. 18 (1977), 1281-1284.

[14] R. G. Swan, *Vector bundles and projective modules,* Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 264-277.

[15] R. G. Swan, *Topological examples of projective modules,* Trans. Amer. Math. Soc. 230 (1977), 201-234.

[16] R. G. Swan, *Vector bundles, projective modules, and the K-theory of spheres,* Proc. of the John Moore Conference, "Algebraic Topology and Algebraic K-theory" Ann. Math. Stud., vol. 113, 1987, pp. 432-522.

[17] L. Vaserstein and A. Suslin, *Serre's problem on projective modules over polynomial rings and algebraic K-theory,* Math. USSR Izv. 10(5) (1976), 937-1001.

# Contraction of LCI ideals

衛藤　和文 (早大　理工)
神藏　　正 (湘南工科大)
橘　　貞雄 (日大　文理)

§0.

Noether 環 $A$ のイデアル $I$ の生成元の個数について conormal module との関連で調べるとき、一般の場合に比べて、$A$ が多項式環で $I$ が monic な多項式を含んでいると、豊富な結果がえられることが知られている。そこで一般の場合、$A$ 上の多項式環を考え、$I$ を拡張し、さらに monic を含むように作ったイデアル $J$ の性質が、$I$ に伝わることがわかれば、一般の場合に多項式環の結果がある程度使えるようになり、よいことである。

そこで、$A$ 上の多項式環 $R = A[T]$ と monic polynomial $f$ によって、$J = IR + fR$ とおいて、$J$ の性質が $I$ に伝わる例として、ここでは locally complete intersection をとりあげる。

§1.

まず、(locally) complete intersection については、いくつかの微妙に異なる定義が存在するので、ここで用いる定義について述べる。

**定義** Noether 環 $A$ のイデアル $I$ が complete intersection (ci) であるとは、$I$ が $A$-regular sequence で生成されることである。($A$ が CM 環のときは　$\mu(I) = ht(I)$ と同値である。) また、$I$ が locally a complete intersection (lci) であるとは、任意の $p \in \mathbf{V}(I)$ に対して、$I_p$ が長さ =height $I$ の $A_p$-regular sequence で生成されることである。

$I$ が ci ならば $I/I^2$ は rank=height($I$) の f ree $A/I$-module になる。$I$ が lci ならば $I/I^2$ は height($I$) と等しい constant rank を持つ projective $A/I$-module になる。

ここで環についての complete intersection の概念との関係についてふれておく。局所環 $(A, m)$ が complete intersection であるということを、$m$ の極小底から作った Koszul complex を $E.$ とするとき

$$\dim_{A/m} H_1(E.) = \mathrm{emdim} A - \dim A$$

が成り立つことと定義する ([M] §21)。これはその完備化 $\hat{A}$ を、ある正則局所環 $B$ の像として表現したとき kernel が $B$-regular sequence で生成されるようにできることと同値である。また局所環 $A$ のイデアル $I$が complete intersection であるということと、環 $A/I$が complete intersection であるということは $A$ が正則ならば同値である ([M] 定理 21.2)。

しかし $A$ が正則局所環でなければ、どちらも他方を導かない。

たとえば $B$を ci ではない局所環とする。$A = B[[X]], I = (X)$ とおけば $I$は ci であるが $A/I \cong B$は ci ではない。また $(A, m)$ を正則ではない局所環とすれば $A/m$ は体だから ci であるが $m$ は ci ではない。

次に、主定理を述べ証明の概略を与える。

**定理** $A$が Cohen-Macaulay 環、$I$が $A$ のイデアル、$R = A[T]$、$f$を monic polynomial とする。$J = IR + fR$が、lci ideal of $R$ならば、$I$は、lci ideal of $A$ である。

最初に補助定理を用意する。

**補助定理** $(A, m, k)$ は局所環、$M$は有限生成 $A$-module 、$R$を $A$-algebra で $R/mR \neq 0$ なるものとする。

この時 $\mu_A(M) = \mu_R(M \otimes_A R)$ がなりたつ。

証明

$A$-module $M$ の生成元は $R$-module $M \otimes_A R$ を生成するから $\mu_R(M \otimes_A R) \leq \mu_A(M)$ は常に成り立つ。そこで逆向きの不等式を示せばよい。

いま $A$ は局所環だから $\mu_A(M) = \dim_k(M/mM)$ である。

さらに $M/mM \otimes_k R/mR$は free $R/mR$-module で、その rank は

$\dim_k(M/mM)$ に等しいから

$$\mu_A(M) = \dim_k(M/mM) = \mu_{R/mR}(M/mM \otimes_A R/mR)$$

を得る。

$R$-module の同型

$$M/mM \otimes_k R/mR \cong (M \otimes_A R) \otimes_R R/mR$$

によって得られる不等式

$$\mu_R(M \otimes_A R) \geq \mu_{R/mR}(M/mM \otimes_k R/mR)$$

と併せて求める不等式がえられる。

（補助定理の証明終わり）

定理の証明の概略

まず、$J/J^2$ について次の直和分解が存在する。

$$J/J^2 \cong (I/I^2 \otimes_A R/fR) \oplus R/J.$$

また、local な性質についての問題だから、始めから、$A$ は局所環として、$I$ が ci であることを示せばよい。$J/J^2$ は constant rank=ht$(J)$ の projective $R/J$-module だから、$I/I^2 \otimes_A R/fR$ は constant rank=ht$(J)-1$ の projective $R/J$-module である。ところが、$A$ が局所環で、$R/J$ は $R/fR$ の homomorphic image なので、$A$ 上 integral、したがって、semilocal ring になる。故に $I/I^2 \otimes_A R/fR$ は free $R/J$-module であることがわかって、$\mu_{R/fR}(I/I^2 \otimes_A R/fR)$ =ht$(J)-1$ がえられる。

一般には、$A$ を ring、$B$ を $A$-algebra、$M$ を有限生成 $A$-module とすると、$\mu_A(M) \geq \mu_B(M \otimes_A B)$ であるが、$A$ が局所環のときは、補助定理により $\mu_A(M) = \mu_B(M \otimes_A B)$ である。

ゆえに、$\mu(I/I^2)$ =ht$(J)-1$ =ht$(I)$ で、しかも、$A$ は局所環だから、中山の補題によって、$\mu(I) = \mu(I/I^2)$(=ht$(I)$) を得る。ところで今、$A$ は CM 環だから、$I$ は regular sequence で生成される。

(終わり)

注意　1．$I$が lci ならば、$J$が lci になるのは明らかである。

注意　2．$\mu_A(M) = \mu_B(M \otimes_A B)$ は、$A$ が noether 環でなくても、$A$ の maximal ideal が有限個のときは、いつでも成り立つ。

注意　3．一般に、$A$ が semilocal のとき、$J$が lci でなくても、$\mu(J) = \mu(I) + 1$ が成り立つ。

§2.

ここでは§1 に関連する 2 つの例について述べる。

**R** を実数体とする。$A = \mathbf{R}[x,y,z] = \mathbf{R}[X,Y,Z]/(X^2+Y^2+Z^2-1)$, $m = (x-1,y,z)$ とすると、$\mu_A(m) = 3$ である。

これは、よく知られた事実であるが衛藤 [E] の結果の応用として簡単な証明が得られるのでここでのべる。

$A$ は 2 次元 UFD で $m$ は height 2 の極大イデアルだから $\mathrm{hd}_A m = 1$ である。従って、

$$
\begin{array}{rcl}
\phi : A^3 & \to & m \\
(1,0,0) & \mapsto & x-1 \\
(0,1,0) & \mapsto & y \\
(0,0,1) & \mapsto & z
\end{array}
$$

とすると、$P = ker\phi$ は rank 2 の projective $A$-module である。これを $K_0(A)$ で見ると $[P] = [A^3] - [m]$ となる。

ここで、surjective map $A^2 \to m$ が存在したとするとその kernel は rank 1 の projective $A$-module となるが、$A$ は UFD だから、それは $A$ である。これを $K_0(A)$ でみると $[m] = [A^2] - [A] = [A]$ となる。

従って $[P] = [A^3] - [m] = [A^3] - [A] = [A^2]$ が得られ、$[P]$ は stably free module となり、その Euler number $e(P)$ は偶数となるはずである。しかし、計算によれば $e(P) = 1$ となり矛盾である。つまり $m$ は 2 元では生成されない。

(例1) $\mu_A(M) > \mu_B(M \otimes_A B)$ となる例

$$B = A[T]/(T^2+1) \cong \mathbf{C}[X,Y,Z]/(X^2+Y^2+Z^2-1),$$

（$\mathbf{C}$ は複素数体）

$I = m$ とおくと、$I \otimes_A B = ((x-1)i+y, z)$ となり、$\mu_B(I \otimes_A B) = 2$ である。

(例2) $J$が ci でも、$I$は ci にならない例。

上と同じ記号で、$R = A[T], f = T$とする。$J = IR + TR = (x-1, y, z, T)$ とおくと、$J = ((x-1)+(x+1)T, y, z)$ となり、$J$は ci である。しかし、$\mathrm{ht}(I) = 2$ だから、$I$は ci ではない。(もちろん、lci にはなっている。)

講演のあと吉野先生から、次のような点について御指摘を頂きました。以下に内容を記して感謝します。

1. 定理は $R$を局所化して考えれば良く、その場合　$A \to R$ が flat local homomorphism で $I$が $A$ のイデアルとすると、$R/IR$の正則元となる任意の $f \in R$に対して$\mu_R(IR+fR) = \mu_A(I)+1$ を示せば良く、このことは elementary に証明できる。

2. 補助定理は $R$が局所環で $R/mR \neq 0$ の時は自明である。

## 参考文献

[E] 衛藤和文, $S^2$ 上の rank 2 の projective modules について (第 13 回可換環論シンポジウム報告集)

[K] E.Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry* , Birkhäuser, 1985

[M] 松村英之, 可換環論, 共立出版, 1980

[N] B. Nashier, *Monic Polynomials and Generating Ideals Efficiently,* Proc. AMS, 95 (1985), 338-340

# 一般のfiltrationから定義されるRees環のC-M性とGorenstein性について

西田康二

千葉大学自然科学研究科

## 1 序

この報告の内容は、良く知られているRees環のC-M性やGorenstein性についての結果を、一般のfiltrationから定義される様なRees環に対して拡張するもので、後藤四郎氏との共同研究である。

以下では $(A, \mathfrak{m})$ はNoetherian local ringで $d = \dim A > 0$ とし、$\mathcal{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ は次の三条件をみたす $A$ のidealの族とする。

(i) $F_n \supseteq F_{n+1}$ for $\forall n \in \mathbf{Z}$.

(ii) $F_0 = A, F_1 \neq A$.

(iii) $F_m F_n \subseteq F_{m+n}$ for $\forall m, n \in \mathbf{Z}$.

この様な $\mathcal{F}$ をfiltrationと呼ぶことにする。このとき次の様な $A$-代数が自然に定義される。

$$R = R(\mathcal{F}) = \sum_{n \geq 0} F_n t^n \subseteq A[t]$$
$$R' = R'(\mathcal{F}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} F_n t^n \subseteq A[t, t^{-1}]$$
$$G = R'/t^{-1}R'$$

これらの $A$-代数のNoether性について次が知られている。

**補題 (1.1)**(cf. [1]). 次は同値である。

(1) $R$ はNoetherである。

(2) $R'$ はNoetherである。

(3) $\exists k > 0$ s.t. $F_{kn} = (F_k)^n$ for $\forall n \in \mathbf{Z}$.

(1.1) の条件 (3) をみたす $k$ をとれば、Veronesean subring $R^{(k)}$ は普通のRees環 $R(F_k)$ に一致している。以下この報告では

<u>$R$ はNoether環である。</u>

と常に仮定する。すると $R, R', G$ の Krull 次元は次の様になる。

**補題 (1.2).** (1) $\sqrt{F_1} = \sqrt{F_n}$ for $\forall n > 0$.

(2) $\dim R' = d+1$, $\dim G = d$ であってさらに

$$\dim R = \begin{cases} d+1 & F_1 \not\subseteq \bigcap_{p \in \mathrm{Assh}\, A} p \text{ のとき} \\ d & \text{その他} \end{cases}$$

**証明.** (1) $\forall n > 0$ について $F_1 \supseteq F_n \supseteq {F_1}^n$ なので直ちに得られる。

(2) (1.1) より $\exists k > 0$ s.t. $F_{kn} = (F_k)^n$ for $\forall n \in \mathbf{Z}$. すると $R'^{(k)} \cong R'(F_k)$ で $R'$ は $R'^{(k)}$ 上 integral なので $\dim R' = \dim R'(F_k) = d+1$. さらに $G = R'/t^{-1}R'$ で $t^{-1}$ が $R'$-NZD なので $\dim G = d$. 又、$R$ についても同様に

$$\dim R = \dim R(F_k) = \begin{cases} d+1 & F_k \not\subseteq \bigcap_{p \in \mathrm{Assh}\, A} p \text{ のとき} \\ d & \text{その他} \end{cases}$$

となるが (1) で示した様に $\sqrt{F_1} = \sqrt{F_k}$ なので

$$F_1 \not\subseteq \bigcap_{p \in \mathrm{Assh}\, A} p \Leftrightarrow F_k \not\subseteq \bigcap_{p \in \mathrm{Assh}\, A} p$$

であるから所用の結果が得られる。∎

以下では $F_1 \not\subseteq \bigcap_{p \in \mathrm{Assh}\, A} p$ 即ち $\underline{\dim R = d+1}$ と仮定する。

## 2 Cohen-Macaulay 性

普通の Rees 環について良く知られている結果 [7, Theorem 1.1] は $R(\mathcal{F})$ に対しても次の様にそのまま成り立つ ($M = \mathrm{m}R + R_+$ とする)。

**定理 (2.1).** 次は同値である。

(1) $R$ は C-M である。

(2) $[\mathrm{H}^d_M(G)]_n = 0$ if $n \geq 0$ かつ $\mathrm{H}^i_M(G) = [\mathrm{H}^i_M(G)]_{-1}$ if $i \neq d$.

このとき $[\mathrm{H}^i_M(G)]_{-1} \cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{m}}(A)$ if $i \neq d$ である。

**証明 (概略).** $J = R_+ = \sum_{n \geq 1} F_n t^n$ として graded $R$-modules の完全列

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 0 \to J \to R \to A \to 0 \\ \text{(ii)} & 0 \to J(1) \to R \to G \to 0 \end{array}$$

を考える。

(1) $\Rightarrow$ (2). $i<d$ とすると (i) より $\mathrm{H}_M^{i+1}(J)\cong \mathrm{H}_{\mathrm{m}}^i(A)$ で (ii) より $\mathrm{H}_M^{i+1}(J)(1)\cong \mathrm{H}_M^i(G)$ であるので

$$[\mathrm{H}_M^i(G)]_n \cong [\mathrm{H}_M^{i+1}(J)]_{n+1} \cong [\mathrm{H}_{\mathrm{m}}^i(A)]_{n+1} = \begin{cases} \mathrm{H}_{\mathrm{m}}^i(A) & n=-1 \text{ のとき} \\ 0 & n\neq -1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

従って (2) の後半と (2.1) の最後の主張が得られる。(2) の前半も同様に示せる。

(2) $\Rightarrow$ (1). (1.1) より $R^{(k)}\cong R(F_k)$ なる $k>0$ がとれる。$G'=G(F_k)$ とおき $M'$を $R(F_k)$ の graded maximal ideal とすると、実は

$$[\mathrm{H}_{M'}^d(G')]_n = 0 \text{ if } n\geq 0 \text{ かつ } \mathrm{H}_{M'}^i(G') = [\mathrm{H}_{M'}^i(G')]_{-1} \text{ if } i\neq d$$

となる。よって [7, Theorem 1.1] により $R(F_k)$ は C-M である。従って $\mathrm{H}_{M'}^i(R^{(k)})=0$ if $i\neq d+1$. 即ち $i\neq d+1$ であれば $[\mathrm{H}_M^i(R)]_{kn}=0$ for $\forall n\in \mathrm{Z}$ である。以下 $i\neq d+1$ とする。もし $n\geq 0$ ならば (i) より $[\mathrm{H}_M^i(J)]_{n+1}\cong [\mathrm{H}_M^i(R)]_{n+1}$で (ii) より $[\mathrm{H}_M^i(J)]_{n+1}\cong [\mathrm{H}_M^i(R)]_n$だから $[\mathrm{H}_M^i(R)]_n\cong [\mathrm{H}_M^i(R)]_{n+1}$であるが $\mathrm{H}_M^i(R)$ は Artinian なので $[\mathrm{H}_M^i(R)]_n=0$ でなければならない。次に $n<0$ とする。(i) より $[\mathrm{H}_M^i(J)]_n\cong [\mathrm{H}_M^i(R)]_n$で (ii) より $[\mathrm{H}_M^i(J)]_n \hookrightarrow [\mathrm{H}_M^i(R)]_{n-1}$ だから $[\mathrm{H}_M^i(R)]_n \hookrightarrow [\mathrm{H}_M^i(R)]_{n-1}$ であるが、$[\mathrm{H}_M^i(R)]_{kn}=0$ なので $[\mathrm{H}_M^i(R)]_n=0$ でなければならない。以上より $\mathrm{H}_M^i(R)=0$. 従って $R$は C-M である。
∎

**系 (2.2)** (cf. [3]). $A$ が C-M のとき

$$R\text{が } \mathrm{C-M} \Leftrightarrow G \text{ が } \mathrm{C-M} \text{ かつ } \mathrm{a}(G)<0$$

以下で (2.1), (2.2) の応用を少し考える。

**命題 (2.3).** $A$ は C-M とし $p$ は $A$ の素 ideal で ht $p>0$ かつ $A_p$が regular になるものとする。このとき $F_n=p^{(n)}$とすると

$$R\text{が } \mathrm{C-M} \Leftrightarrow G \text{ が } \mathrm{C-M}$$

**証明.** $\mathrm{a}(G)<0$ を示せば十分。ht $p=r$とすると $G_p\cong G(pA_p)\cong k(p)[X_1,\dots,X_r]$ (多項式環). 従って $\mathrm{a}(G)=\mathrm{a}(G_p)=-r<0$. ∎

**命題 (2.4).** $B=\oplus_{i\geq 0}B_i$は $B_0$が local であるような C-M graded ring で ht $B_+>0$ かつ $\mathrm{a}(B)<0$ なるものとする。このとき $F_n=\oplus_{i\geq n}B_i$として $\mathcal{F}=\{F_n\}$ とおくと $\mathcal{F}$は $B$の filtration になり $R(\mathcal{F})$ は C-M である。

**証明.** $M=\mathrm{n}B+B_+$ (n は $B_0$の極大 ideal) とし、$A=B_M$, $F'_n=F_nA$, $\mathcal{F}'=\{F'_n\}_{n\in \mathrm{Z}}$ とおく。すると $G(\mathcal{F}')\cong A\otimes_B G(\mathcal{F})\cong G(F)\cong B$ となるので $G(\mathcal{F}')$ は C-M でかつ $\mathrm{a}(G(\mathcal{F}'))<0$ である。よって (2.2) より $R(\mathcal{F}')=A\otimes_B R(\mathcal{F})$ は C-M で、これより直ちに $R(\mathcal{F})$ も C-M であることがわかる。∎

最後に (2.2) を用いて normalized Rees algebra の C-M 性を特徴付けてみる。そこで $A$ は analytically unramified で C-M とし $I$ は $A$ の m-primary ideal とする。良く知られているように、$n \gg 0$ ならば

$$l_A(A/\overline{I^n}) = \overline{e_0}\begin{pmatrix} n+d-1 \\ d \end{pmatrix} - \overline{e_1}\begin{pmatrix} n+d-2 \\ d-1 \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^d\overline{e_d} \qquad (\overline{e_i} \in \mathbf{Z})$$

と書ける。左辺を $\overline{H}_I(n)$ 、右辺を $\overline{P}_I(n)$ と書き、$F_n = \overline{I^n}$ として filtration $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ を考えると次が成り立つ。

**命題 (2.5).** $d = 2$ とし $(x, y)$ は $I$ の minimal reduction とすると次は同値である。

(1) $R$ は C-M.

(2) $\exists k > 0$ s.t. $R^{(k)}$ は C-M.

(3) $\overline{I^n} = (x, y)\overline{I^{n-1}}$ for $\forall n \geq 2$.

(4) $\overline{H}_I(n) = \overline{P}_I(n)$ for $\forall n \geq 0$.

(5) $\overline{e_2} = 0$

(6) $\ell_A(A/\overline{I}) = \overline{e_0} - \overline{e_1}$.

**証明.** (3), (4), (5), (6) の同値性は Huneke の結果である (cf. [4]) 。又、(1) $\Rightarrow$ (2) は自明である。

(1) $\Rightarrow$ (3). (2.2) より $G$ は C-M で $\mathrm{a}(G) < 0$ である。すると $xt, yt$ は $G$-regular sequence をなすので、$\overline{G} = G/(xt, yt)G$ とおくと $\mathrm{a}(\overline{G}) < 2$. 従って $\overline{I^n} = (x, y)\overline{I^{n-1}} + \overline{I^{n+1}}$ if $n \geq 2$. 一方で $n \gg 0$ ならば $\overline{I^{n+1}} = (x, y)\overline{I^n}$ である (cf. [4]) ので、結局 $n \geq 2$ ならば $\overline{I^n} = (x, y)\overline{I^{n-1}}$ となる。

(3) $\Rightarrow$ (1). 条件 (3) は $G$ が C-M ($xt, yt$ が $G$-regular sequence になる) で $\mathrm{a}(G) < 0$ であることを示すので、(2.2) より $R$ は C-M である。

(2) $\Rightarrow$ (1). $\overline{e_i}$ は $I$ に depend するから本来 $\overline{e_i}(I)$ とでも書くべきもので、この記号の下で、$\overline{e_2}(I) = \overline{e_2}(I^k)$ であることが容易にわかる。従ってすでに示したことを用いて

$$R^{(k)} \text{が C} - \text{M} \ \Rightarrow \overline{e_2}(I^k) = 0 \Rightarrow \overline{e_2}(I) = 0 \Rightarrow R \text{は C} - \text{M}$$

を得る。∎

# 3 Gorenstein 性

$R$ の Gorenstein 性を特徴付けるため、filtration $\mathcal{F}$ について次の様な条件を考える。

(#) $f \in F_1^* := \mathrm{Hom}_A(F_1, A)$ ならば $f(F_n) \subseteq F_{n-1}$ for $\forall n \geq 1$.

(##) $p$ が $A$ の素 ideal で ht $p = 1$ ならば $F_nA_p = (F_1A_p)^n$ for $\forall n \in \mathbf{Z}$.

(##) に比べて (#) の内容は少し奇妙なものに思われるが、次の補題にあるように、様々な filtration がこの条件をみたす。

**補題 (3.1).** 次の様な $\mathcal{F}=\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は条件 (#) をみたす。

(1) grade $F_1 \geq 2$.

(2) $A$ の ideal $I$ と積閉集合 $S$ に対して

$$F_n = I^n \cdot S^{-1}A \cap A.$$

(3) $A=\oplus_{i\geq 0}A_i$ が graded ring で $A_1$ は $A$-NZD をもつとき

$$F_n = \oplus_{i\geq n}F_i.$$

grade $F_1 \geq 2$ であれば $\mathcal{F}$ は明らかに (##) もみたすから、結局、上に述べた条件は、grade $F_1=1$ の場合も取り扱うために考えているのである。

**定理 (3.2).** 次の二条件を考える。

(1) $R$ は Gorenstein である。

(2) $A$ は Gorenstein 環の像で、$K_A \cong F_1^*$ となりさらに

$$0 \to G(-2) \to K_G \to \mathrm{Ext}_A^1(A/F_1, A)(-1) \to 0$$

なる graded $R$-modules の完全列がある。

F が (#) をみたせば (1) ⇒ (2) が成り立ち、次の三つの場合には (2) ⇒ (1) が正しい。

(i) grade $F_1 \geq 2$.

(ii) $A$ は normal.

(iii) $A$ は $(\mathrm{S}_2)$ で F が (##) をみたす。

**証明** (概略). $J = R_+ = \sum_{n\geq 1} F_n t^n$ として graded $R$-modules の完全列

$$\begin{array}{ll}(*1) & 0 \to J \to R \to A \to 0 \\ (*2) & 0 \to J(1) \to R \to G \to 0\end{array}$$

を考える。

(1) ⇒ (2). $K_R \cong R(-1)$ なので $K_A \cong \mathrm{Ext}_R^1(A, R(-1))$ かつ $K_G \cong \mathrm{Ext}_R^1(G, R(-1))$ である。すると (*1) と (*2) に $\underline{\mathrm{Hom}}_R(\cdot, R(-1))$ を作用させて

$$\begin{array}{lll}(*3) & 0 \to R(-1) \to L(-1) \to K_A \to 0 & (\mathrm{ex.}) \\ (*4) & 0 \to R(-1) \to L(-2) \to K_G \to 0 & (\mathrm{ex.})\end{array}$$

が得られる。但し $L=\underline{\mathrm{Hom}}_R(J,R)$ である。(*3) より $L_{-1}\cong K_A$ となる。今 $f\in F_1{}^*$ に対して $\varphi(f)\in L_{-1}$ を

$$\varphi(f)(ct^n)=f(c)t^{n-1}\qquad (c\in F_n)$$

で定めると、

$$\begin{array}{ccc} F_1{}^* & \xrightarrow{\varphi} & L_{-1} \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}$$

は $A$-linear で isomorphism になることが容易に確かめられる。従って $F_1{}^*\cong K_A$ を得る。次に

$$0\to G(-2)\to K_G\to \mathrm{Ext}^1_A(A/F_1,A)(-1)\to 0$$

なる完全列の存在を言うには

$$\begin{array}{l} (\text{イ})\ [K_G]_n=0 \text{ if } n\le 0 \\ (\text{ロ})\ [K_G]_1\cong \mathrm{Ext}^1_A(A/F_1,A) \\ (\text{ハ})\ K_G|_{\ge 2}\cong G(-2) \end{array}$$

を示せば十分である。まず (イ) は (*4) より直ちに出る。(ロ) は次のような可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & F_1{}^* & \to & \mathrm{Ext}^1_A(A/F_1,A) & \to & 0 \quad (\text{ex.}) \\ & & \| & & \varphi\downarrow\wr & & & & \\ 0 & \to & A & \to & L_{-1} & \to & [K_G]_1 & \to & 0 \quad (\text{ex.}) \end{array}$$

から得られる。ここで上の完全列は $0\to F_1\to A\to A/F_1\to 0$ の $A$-dual をとったもので、下の完全列は (*4) の degree $=1$ の部分である。最後に (ハ) を示すには (*4) の degree $\ge 2$ の部分と (*2) を-2 だけずらした完全列から得られる可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & R(-1)|_{\ge 2} & \to & L(-2)|_{\ge 2} & \to & K_G|_{\ge 2} & \to & 0 \quad (\text{ex.}) \\ & & \wr\| & & \wr\| & & & & \\ & & (R|_{\ge 1})(-1) & & (L|_{\ge 0})(-2) & & & & \\ & & \wr\| & & \wr\| & & & & \\ 0 & \to & (J(1))(-2) & \to & R(-2) & \to & G(-2) & \to & 0 \quad (\text{ex.}) \end{array}$$

を考えれば良い。

(2) $\Rightarrow$ (1). 再び (*1) と (*2) に $\underline{\mathrm{Hom}}_R(\,\cdot\,,K_R)$ を作用させて

$$\begin{array}{ll} (*5) & 0\to K_R\to L\to K_A\to 0 \qquad (\text{ex.}) \\ (*6) & 0\to K_R\to L(-1)\to K_G\to 0 \quad (\text{ex.}) \end{array}$$

を得る。但し $L=\underline{\mathrm{Hom}}_R(J,K_R)$ である。(*6) の degree $=1$ の部分をとりだすと

$$0\to [K_R]_1\to L_0\to [K_G]_1\to 0\quad (\text{ex.})$$

であるが (*5) より $L_0\cong K_A$ で条件 (2) より $[K_G]_1\cong \mathrm{Ext}^1_A(A/F_1,A)$ であるから、結局

$$0\to [K_R]_1\to K_A\to \mathrm{Ext}^1_A(A/F_1,A)\to 0\quad (\text{ex.})$$

を得る。実は、この完全列と

$$0 \to A \to F_1{}^* \to \mathrm{Ext}_A^1(A/F_1, A) \to 0 \quad \text{(ex.)}$$

を比べて、(i),(ii),(iii) の各場合には $[K_R]_1 \cong A$ となることがわかる。従って $\exists \xi \in [K_R]_1$ s.t. $[K_R]_1 = A\xi$. 後は

$$[K_R]_n = F_{n-1}t^{n-1} \cdot \xi \text{ for } \forall n \geq 1$$

となることを$n$についての帰納法で示せば良い。$n=1$のときは$\xi$のとりかたより明らかなので、$n>1$とする。(*6) の degree $= n$ の部分をとりだすと $0 \to [K_R]_n \to L_{n-1} \to [K_G]_n \to 0$ (ex.) であるが、(*5) より $L_{n-1} \cong [K_R]_{n-1}$なので、結局

$$0 \to [K_R]_n \to [K_R]_{n-1} \to [K_G]_n \to 0$$

なる完全列が得られる。ここで

$$\begin{array}{rccc} \psi_i: & F_{i-1} & \longrightarrow & [K_R]_i \\ & c & \longmapsto & ct^{i-1} \cdot \xi \end{array}$$

とすると

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & [K_R]_n & \to & [K_R]_{n-1} & \to & [K_G]_n & \to & 0 \quad \text{(ex.)} \\ & & \uparrow{\scriptstyle \psi_n} & & \uparrow{\scriptstyle \psi_{n-1}} & & \| & & \\ 0 & \to & F_{n-1} & \to & F_{n-2} & \to & F_{n-2}/F_{n-1} & \to & 0 \quad \text{(ex.)} \end{array}$$

は可換になる。帰納法の仮定より$\psi_{n-1}$は surjective なので、$\psi_n$も surjective である。∎

**系 (3.3)** (cf. [6]). grade $F_1 \geq 2$ のとき次は同値である。

(1) $R_s(p)$ は Gorenstein である。

(2) $K_A \cong A$ かつ $K_G \cong G(-2)$.

最後に (3.2) の簡単な応用を述べてこの報告の終りとする。

**系 (3.4).** 次の様な記号を用いる。

$$\begin{aligned} &B = k[X,Y]^{(3)}, \mathbf{n} = B_+, P = XY(k[X,Y]) \cap B, \\ &A = B_{\mathbf{n}}, \mathbf{m} = \mathbf{n}B_{\mathbf{n}}, p = PA, \\ &S = R_s(p) = \sum_{i \geq 0} p^{(i)}t^i \subseteq A[t] \end{aligned}$$

このとき $F_n = \sum_{i \geq n} p^{(i)}t^i$ として$S$の filtration $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ を考えると、$R(\mathcal{F})$ は Gorenstein になる。

**証明.** $\mathrm{Cl}(B) = \langle \mathrm{cl}(P) \rangle \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ であるが $P \cong K_B$なので $\mathrm{cl}(K_B) + \mathrm{cl}(P) = 2\mathrm{cl}(P) = -\mathrm{cl}(P)$ となる。従って $\mathrm{cl}(K_A) + \mathrm{cl}(p) = -\mathrm{cl}(p)$. 一方で$S$は normal domain で $\mathrm{cl}(K_S) = \mathrm{cl}(K_A) + \mathrm{cl}(p)$ であることが知られている (cf. [1]) ので、$\mathrm{cl}(K_S) = -\mathrm{cl}(pS) =$

$-\mathrm{cl}(F_1) = \mathrm{cl}({F_1}^*)$ となる。従って $S$-module として $K_S \cong F_1$. 実は、このことから graded $S$-module として $K_S \cong {F_1}^*(-2)$ となることがわかる。そこで $0 \to F_1 \to S \to S/F_1 \to 0$ の $S$-dual をとり、degree を-2 だけずらせば

$$0 \to S(-2) \to K_S \to \mathrm{Ext}_S^1(S/F_1, S)(-2) \to 0 \quad (\mathrm{ex.})$$

が得られる。ここで $G := G(\mathcal{F}) \cong S$に注意すると

$$0 \to G(-2) \to K_G \to \mathrm{Ext}_S^1(S/F_1, S)(-1) \to 0$$

なる完全列の存在が保証できるので、(3.2) より ($S$を graded maximal で局所化して適用する)、$R(\mathcal{F})$ が Gorenstein であることがわかる。∎

# 参考文献


[1] Goto, S., Herrmann, M., Nishida, K. and Villamayor, O., *On the structure of Noetherian symbolic Rees algebras*, manuscripta math., **67** (1990), 197–225.

[2] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves*, J. Math. Soc. Japan, **43** (1991), 465–481.

[3] Goto, S. and Shimoda, Y., *On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings*, Commutative algebra (analytic methods), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., **68** (1982), 201 – 231.

[4] Huneke, C., *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J., **34** (1987), 293–318.

[5] Ikeda, S., *The Cohen-Macaulayness of the Rees algebras of local rings*, Nagoya Math. J., **89** (1983), 47-63.

[6] Ikeda, S., *On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings*, Nagoya Math. J., **102** (1986), 135-154.

[7] Trung, N. V. and Ikeda, S., *When is the Rees algebra Cohen-Macaulay*, Comm. Alg., **17(12)** (1989), 2893–2922.

Symbolic Rees 代数の C-M 性と Gorenstein 性について

後藤四郎

明大理工

# 1 外枠 (一般論) から

以下では常に $A$ は可換環で $p$ は $A$ の素 ideal とし

$$\begin{aligned} R &= R_s(p) = \sum_{n\geq 0} p^{(n)}t^n \subseteq A[t] \\ R' &= R'_s(p) = \sum_{n\in \mathbf{Z}} p^{(n)}t^n \subseteq A[t,t^{-1}] \\ G &= G_s(p) = R'/t^{-1}R' \end{aligned}$$

とおく。この報告では $R_s(p)$ の環論的性質について、例えばいったいいつ $R$ は C-M になったり Gorenstein になったりするのかというということを調べる。その動機は勿論これらの性質に大いに関心があるからであるが、それだけではなく、この様なかなり特殊な問題を設定し、これを解こうとする努力を通して、symbolic Rees algebra $R_s(p)$ についての理解が、いろいろな観点から少しずつ深まることを期待しているからである。

この研究の出発点になったのは、space curve についての次の二つの結果である。

**定理 (1.1)** (cf. [6]). $(A,m)$ を 3 次元の regular local ring で $|A/m| = \infty$ なるものとし、$p$ は $A$ の素 ideal で $\dim A/p = 1$ なるものとすれば次は同値である。

(1) $R_s(p)$ は $A$ 上 module-finite である。

(2) 正整数 $k, l$ 及び $f \in p^{(k)}, g \in p^{(l)}$ で $\ell_A(A/(f,g,x)) = kl \cdot \ell_A(A/(x)+p)$ for some $x \in m \setminus p$ なるものが存在する。

**定理 (1.2)** (cf. [2]). 定理 (1.1) の下に次は同値である。

(1) $R_s(p)$ は Gorenstein 環である。

(2) $1 \leq n \leq k+l-2$ ならば $A/(f,g)+p^{(n)}$ は C-M である。

さらにこの条件がみたされていれば、任意の $n > 0$ について $A/(f)+p^{(n)}, A/(g)+p^{(n)}, A/(f,g)+p^{(n)}$ はいつでも C-M であり、$R_s(p) = A[\{p^{(n)}t^n\}_{1\leq n\leq k+l-2}, ft^k, gt^l]$ が成立する。

[2], [3], [4] ではこの二つの判定法を space monomial curve に適用し、いくつかの結果を得ることができたのであるが、一方でこれらの判定法を、$A =$ regular の仮定を弱め、さ

らに$\dim A \neq 3$のときにも使える形に拡張して、適用範囲を拡げておくことも大切なことであろうと思う。この報告では、$\dim A/p = 1$の仮定は残して(つまり curve の場合に)、上の二つの定理の一般化として得られた結果を示すことを目的とする。

ところでこの様な作業をする場合、まず最初に$R$の C-M 性や Gorenstein 性を$G$のそれに帰着させる一般論を作るのが常套手段である。この、いわば外枠の部分は、ここ半年の間に急速に進み、結局 filtration の一般論の形でほぼ完成するに至った。この部分は西田君の報告と重なることになるが、symbolic case でもう一度まとめておく。

以下この節では$(A, m)$は$d$次元の Noether local ring とし$p$は$A$の素 ideal で$\mathrm{ht}_A\, p > 0$なるものとする。さらに常に

$$R = R_s(p) \text{ は Noether である。}$$

と仮定する。$M = mR + R_+$とおくと

**定理 (1.3).** 次の条件は同値である。

(1) $R$は C-M である。

(2) $H^i_M(G) = [H^i_M(G)]_{-1}$ $(i \neq d)$ かつ $\mathrm{a}(G) < 0$ である。

このとき任意の$i \neq d$について$[H^i_M(G)]_{-1} = H^i_m(A)$となっている。

**定理 (1.4).** $A$は$(\mathrm{S}_2)$をみたすと仮定すれば、次は同値である。

(1) $R$は Gorenstein である。

(2) 次の 4 条件が成り立つ。

(i) $A$は Gorenstein local ring の像である。

(ii) $K_A \cong p^* := \mathrm{Hom}_A(p, A)$ as $A$-modules.

(iii) $0 \to G(-2) \to K_G \to \mathrm{Ext}^1_A(A/p, A)(-1) \to 0$ なる graded $R$-modules の完全列が存在する。

(iv) $H^i_M(G) = [H^i_M(G)]_{-1}$ if $i \neq d$.

特に$A$が C-M で canonical module $K_A$を持つと仮定すれば、(1.3) と (1.4) は次のようにもう少しすっきりした形になる。

**系 (1.5).** $R$が C-M である $\Leftrightarrow$ $G$は C-M で $\mathrm{a}(G) = -2$.

**系 (1.6).** $\mathrm{ht}_A\, p \geq 2$ であれば

$$R\text{が Gorenstein である} \Leftrightarrow A \text{ と } G \text{ が Gorenstein で } \mathrm{a}(G) = -2.$$

**系 (1.7).** $\mathrm{ht}_A\, p = 1$ のとき、次は同値である。

(1) $R$は Gorenstein である。

(2) $K_A \cong p^*$かつ $G$ は C-M であり、$0 \to G(-2) \to K_G \to \mathrm{Ext}_A^1(A/p, A)(-1) \to 0$ なる graded $R$-modules の完全列が存在する。

一方で $A$ がnormalの場合は使える道具がもう少し増える。例えば $A_p$が regular であれば、$R$は normal になりさらに次のような事がわかる。

**命題 (1.8).** (cf. [5], [8]). $A$ は normal, $A_p$は regular で $\mathrm{ht}_A\, p \geq 2$ とし、$A$ は Gorenstein ring の像であると仮定すると、$R$は normal であってさらに

(1) $\mathrm{Cl}(R) = \mathrm{Cl}(A) \oplus \mathbf{Z}$.

(2) $\mathrm{cl}(K_R) = \mathrm{cl}(K_A) - (\mathrm{ht}_A\, p - 2)$.

$\mathrm{ht}_A\, p = 1$ の場合も同様に (岡山のシンポジウムで報告した) 、$\mathrm{Cl}(R) = \mathrm{Cl}(A)$ で $\mathrm{cl}(K_R) = \mathrm{cl}(K_A) + \mathrm{cl}(p)$ であり、又、$R'$についても $\mathrm{cl}(K_{R'}) = \mathrm{cl}(K_A)$ であるといった事が簡単に示せる。(1.5) と (1.8) をまとめると、

**系 (1.9).** $A$ が regular で $\mathrm{ht}_A\, p \geq 2$ のときは

$$R\text{は Gorenstein である} \Leftrightarrow G \text{ は C} - \text{M で } \mathrm{ht}_A\, p = 2.$$

このとき $G$ は勿論 Gorenstein となっている。

# 2 例

前節の話しは全くの形式論ではあるが、それなりに有効であることを次の例で確かめてみる。以下

$$\begin{aligned}&k\text{は体}, 2 \leq d \in \mathbf{Z}, 1 \leq l \leq d, 1 \leq n\\ &B = k[X_1, ..., X_d]\\ &A = B^{(n)}\\ &P = (X_1, ..., X_l)B\\ &p = P \cap A\end{aligned}$$

とおく。勿論 $l = \mathrm{ht}_A\, p$ である。

**例 (2.1).** 次が成り立つ。

(1) $R_s(p), G_s(p)$ は必ず C-M である。

(2) 次は同値である。

(i) $R_s(p)$ は Gorenstein である。

(ii) 次のいずれかが成り立つ。

(イ) $l = d = 2n$.

(ロ) $l=2<d$ かつ $n \mid d$.

(ハ) $l=1$ かつ $n \mid d+1$.

(3) $G_s(p)$ は Gorenstein である $\Leftrightarrow n \mid d$.

**証明.** $m=A_+$ とすると任意の $Q \in \operatorname{Spec} A \setminus \{m\}$ について $A_Q$ は regular であって、しかも $l<d$ で $p \subseteq Q$ なら $pA_Q$ は C-M であるといった事は容易に確かめられる。このことから、あたかも $(A,m)$ は local であるかのように取り扱っても不都合な事は一切生じない。また、良く知られているように、$K_A \cong {K_B}^{(n)} \cong X_1 \cdots X_d B \cap A$ であるから $\mathrm{a}(A)<0$ である。

勿論 $l=d$ ならば $p=m$ であり、従って $R \cong R(m)$, $G \cong G(m)$ となる。このとき graded rings として $G \cong A$ なので $G$ は C-M で $\mathrm{a}(G)<0$. よって (1.5) より $R$ は C-M である。さらに (1.6) より

$$\begin{aligned} R\text{が Gorenstein} &\Leftrightarrow A \text{ が Gorenstein で } \mathrm{a}(A)=-2 \\ &\Leftrightarrow n \mid d \text{ かつ } -d/n=-2 \\ &\Leftrightarrow 2n=d. \end{aligned}$$

次に $l<d$ とすると

$$p^{(i)}=P^i \cap A \qquad (i \in \mathbf{Z})$$

である。よって $R^{(n)} \cong R(P^n)$ となり $R$ は Noether である。又 $i \in \mathbf{Z}$ について

$$\begin{aligned} &({X_1}^n,\dots,{X_d}^n) \cap p^{(i)} \\ =\;& (({X_1}^n,\dots,{X_d}^n)B \cap P^i) \cap A \\ =\;& \Big(\sum_{j=1}^{l} {X_j}^n P^{i-n} + \sum_{j=l+1}^{d} {X_j}^n P^i\Big) \cap A \\ =\;& \sum_{j=1}^{l} {X_j}^n p^{(i-n)} + \sum_{j=l+1}^{d} {X_j}^n p^{(i)} \end{aligned}$$

だから ${X_1}^n t^n,\dots,{X_l}^n t^n, {X_{l+1}}^n,\dots,{X_d}^n$ は $G$-sequence であることがわかり、$G$ は C-M で $\mathrm{a}(G)=-l$ を得る。従って再び (1.5) より $R$ は C-M である。又、$A_p$ は regular なので $R$ は normal になり、このとき $\mathrm{cl}(K_{R'})=\mathrm{cl}(K_A)$ であったから、

$$\begin{aligned} G \text{ が Gorenstein} &\Leftrightarrow A \text{ が Gorenstein} \\ &\Leftrightarrow n \mid d \end{aligned}$$

を得る。すると $1<l<d$ ならば (1.6) より

$$\begin{aligned} R\text{が Gorenstein} &\Leftrightarrow A \text{ と } G \text{ は Gorenstein で } \mathrm{a}(G)=-2 \\ &\Leftrightarrow n \mid d \text{ かつ } l=2 \end{aligned}$$

である。$l=1$ のときは $\mathrm{cl}(K_R)=\mathrm{cl}(K_A)+\mathrm{cl}(p)$ であったので

$$R\text{が Gorenstrein} \Leftrightarrow \mathrm{cl}(K_A)=-\mathrm{cl}(p)$$

となる。始めに述べた様に $K_A=X_1\cdots X_dB\cap A$ なので $p_i=X_iB\cap A$ とおくと $K_A=p_1\cap\cdots\cap p_d$. よって $\mathrm{cl}(K_A)=\sum_{i=1}^{d}\mathrm{cl}(p_i)$. 実は $p=p_1,p_2,\dots,p_d$はいずれも対等であるから

$$\mathrm{cl}(K_A)=d\cdot\mathrm{cl}(p) \qquad \text{かつ}$$
$$\mathrm{Cl}(A)=<\mathrm{cl}(p)>\cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

従って

$$\mathrm{cl}(K_A)=-\mathrm{cl}(p)\Leftrightarrow n\mid d+1$$

▮

# 3 本論への序

1 節で述べた外枠 (一般論) の次の段階で立ち向かわなくてはならない問題は

(1) いつ $R$は Noether になるのか?

(2) $R$が Noether になったとして、そのときいかなる方法で $G$ の C-M 性や Gorenstein 性を定めるのか?

の二つである。本論では、$\dim A/p=1$ の場合にこの (1), (2) を論じてみる。そこで以下、$(A,m)$ は $d$-次元の Noether local ring で $|A/m|=\infty$ とし、$p$ は $A$ の素 ideal で $\dim A_p=d-1$ なるものとする。実は $d=1$ の場合は、一般論の仮定 $\mathrm{ht}_A\, p>0$ をみたしていないので、別に処理する必要がある。のみならず、$d\geq 2$ の場合は induction で $d=1$ の場合に reduce するため、$d=1$ のときをどうしても取り扱わざるを得ない。そこでこの場合を手早く片づけることから始める。

# 4 $d=1$ の場合

**命題 (4.1).** $R$が Noether $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ass}\, A=\{p\}$

このとき $A,R,G$ は全て C-M である。

**証明.** $R$が Noether とし任意に $s\in m\setminus p$ をとる。$s$ は $G$-regular なので、$t^{-1},s$ は $R'$-regular sequence をなす。すると $s,t^{-1}$ も $R'$-regular sequence であるから、特に $s$ は $A$-NZD であって (この証明は $d>1$ のときも work する), $p\in\mathrm{Min}\, A$ より $\mathrm{Ass}\, A=\{p\}$ を得る。

逆に $\mathrm{Ass}\, A=\{p\}$ ならば $n>0$ を $p^{(n)}=0$ となる最小の整数とすると $R=A\oplus p\oplus p^{(2)}\oplus\cdots\oplus p^{(n-1)}$ となり、これは C-M となる。同様に $G=A/p\oplus p/p^{(2)}\oplus\cdots\oplus p^{(n-1)}/p^{(n)}$ も C-M である。▮

**命題 (4.2).** $R$が Gorenstein $\Leftrightarrow p=0$ で $A$ は Gorenstein

**証明.** $\Rightarrow$) のみで十分。$C=A_p$とし $\mathrm{n}=pA_p$とする。さらに $n>0$ を $p^{(n)}=0$ となる最小の整数とすると $R_p=R(\mathrm{n})=C+\mathrm{n}t+\cdots+\mathrm{n}^{n-1}t^{n-1}$. $n\geq 2$ なら $R(\mathrm{n})$ は 0 次と $n-1$ 次に socle を持つことになる。よって $n=1$ で $C$は体。従って $p=0$. すると $A=R$ なので $A$ は Gorenstein である。∎

**命題 (4.3).** Ass $A=\{p\}$ とすると次は同値である。

(1) $G$ は Gorenstein である。

(2) $A$ と $G(pA_p)$ は Gorenstein である。

**証明.** $1\leq n$ を $p^{(n)}=0$ となる最小の整数とする。$C=A_p, \mathrm{n}=pA_p$とすれば $G(\mathrm{n})=G_p$ となりこれは Gorenstein だから、Hilbert function の対称性により、任意の $i\in\mathbf{Z}$ について $(0):\mathrm{n}^i=\mathrm{n}^{n-i}$である。すると $(0):p^{(i)}=p^{(n-i)}$. このことより完全列 $0\to p^{(i)}/p^{(i+1)}\to A/p^{(i+1)}\to A/p^{(i)}\to 0$ の A-dual をとれば、完全列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & (0):p^{(i)} & \to & (0):p^{(i+1)} & \to & [p^{(i)}/p^{(i+1)}]^* & \to & 0 \\ & & \| & & \| & & & & \\ & & p^{(n-i)} & & p^{(n-i-1)} & & & & \end{array}$$

より pairing

$$p^{(n-i-1)}/p^{(n-i)} \overset{\rho_i}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Hom}_A(p^{(i)}/p^{(i+1)}, A)$$

が得られる。さて

$$\xi : G \xrightarrow{p} G_{n-1}=p^{(n-1)}/p^{(n)}=p^{(n-1)} \overset{i}{\hookrightarrow} A$$

として

$$\begin{array}{ccc} G(n-1) & \xrightarrow{\sigma} & K_G=\underline{\mathrm{Hom}}_A(G,A) \quad : G-\text{linear} \\ 1 & \longmapsto & \xi\in[K_G]_{1-n} \end{array}$$

とすると任意の $i\in\mathbf{Z}$ について

$$\begin{array}{ccc} [G(n-1)]_{-i} & \xrightarrow{\sigma} & [K_G]_{-i}=\mathrm{Hom}_A(G_i,A) \\ \| & & \| \\ p^{(n-i-1)}/p^{(n-i)} & \xrightarrow{\rho_i} & \mathrm{Hom}_A(p^{(i)}/p^{(i+1)},A) \end{array}$$

は可換になるので、$\sigma$は isomorphism である。∎

# 5 $d\geq 2$ の場合

**定理 (5.1)**(Morales). 次の二条件を考える。

(1) $R_s(p)$ は Noether である。

(2) $A$ の sop $x, f_1, \ldots, f_{d-1}$で次をみたすものが存在する。

(i) $x \in m \setminus p, f_i \in p^{(k_i)}$ for some $k_i \geq 0$.

(ii) $e^0_{(x,f_1,\ldots,f_{d-1})A}(A) = e(A_p) \cdot \prod_{i=1}^{d-1} k_i \cdot \ell_A(A/(x)+p)$.

このときもし depth $A > 0$ ならば (1) $\Rightarrow$ (2) が正しく、$A$ が unmixed であれば (1) $\Leftrightarrow$ (2) である。

**証明.** (2) $\Rightarrow$ (1) のみ ((1) $\Rightarrow$ (2) は後に $d=2$ の場合に触れる。これを参考にすれば $d \geq 2$ の場合の証明は容易にわかる)。まず $f_1, \ldots, f_{d-1}$ を適当にとりなおして $k_1 = \cdots = k_{d-1} = k$ としてよいことに注意せよ。$B = A/(x), I = p^{(k)} \supseteq J = (f_1, \ldots, f_{d-1})$ とおく。$A$ は unmixed であるから $x$ は $A$-regular で、従って

$$\begin{aligned} e^0_{JB}(B) &= e^0_{xA+J}(A) \\ &= e(A_p) \cdot k^{d-1} \cdot \ell_A(A/((x)+p). \end{aligned}$$

一方で $\mathcal{F} = \mathrm{Min}_A A/J$ とおくと $\forall n \geq 0$ について $\mathcal{F} = \mathrm{Min}_A A/J^{n+1}$ であるから

$$\begin{aligned} \ell_B(B/J^{n+1}B) &= \ell_A(A/(x)+J^{n+1}) \\ &\geq e^0_{xA}(A/J^{n+1}) \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{F}} \ell_A(A/(x)+Q) \cdot \ell_{A_Q}(A_Q/J^{n+1}A_Q). \end{aligned}$$

ここで $\ell_{A_Q}(A_Q/J^{n+1}A_Q)$ は $n \gg 0$ のとき $n$ についての $d-1$ 次の多項式で表せることに注意すると

$$\begin{aligned} e^0_{JB}(B) &\geq \sum_{Q \in \mathcal{F}} \ell_A(A/(x)+Q) \cdot e^0_{JA_Q}(A_Q) \\ &\geq \ell_A(A/(x)+p) \cdot e^0_{JA_p}(A_p) && (p \in \mathcal{F}\text{なので}) \\ &\geq \ell_A(A/(x)+p) \cdot e^0_{IAp}(A_p) && (I \supseteq J\text{なので}) \\ &= \ell_A(A/(x)+p) \cdot e^0_{p^k A_p}(A_p) \\ &= \ell_A(A/(x)+p) \cdot k^{d-1} \cdot e(A_p). \end{aligned}$$

始めと終りを比べて、$\mathcal{F} = \{p\}$, $e^0_{IA_p}(A_p) = e^0_{JA_p}(A_p)$ を得る。今 $A_p$は (quasi-)unmixed であるから、Rees の定理より $IA_p \subset \overline{JA_p} = \overline{J}A_p$である。さらに $A$ は (quasi-)unmixed で $\mathrm{ht}_A\ J = \mu_A(J) = d-1$ であるので

$$\overline{A}^*(J) := \bigcup_{n>0} \mathrm{Ass}_A A/\overline{J^n} = \mathrm{Min}_A A/J = \mathcal{F} = \{p\}$$

(cf. [7]). 特に$\overline{J}$は $p$-primary であるので

$$I \subseteq \overline{J}A_p \cap A = \overline{J}.$$

よって $\ell_A(p^{(k)}) = d-1 = \mathrm{ht}_A\ p$ である。$A$ が<u>unmixed</u>であるので、これより $R_s(p)$ は Noether である (cf. [1])。∎

(5.1) は $d=3$ で $A$ を regular とすれば Huneke の判定法の完全な一般化になっていることがわかる。

次に、とくに $d=2$ のときにどの様になっているかを調べてみる。

**定理 (5.2).** $d=2$ のとき次は同値である。

(1) $R_s(p)$ は C-M である。

(2) $A$ は C-M で $\mu_A(p^{(k)})=1$ なる $k>0$ が存在する。

このとき $A$ は integral domain で $A_p$ は DVR になり、(2) の $k$ に対しては、$p^{(k-1)} \cong p^*$ as $A$-modules となっている。

**証明.** (2) $\Rightarrow$ (1) は容易なので (1) $\Rightarrow$ (2) のみ示す (これは同時に (5.1) の (1) $\Rightarrow$ (2) の証明のモデルでもある) 。まず $R_p \cong R(pA_p)$ は C-M なので $A_p$ は DVR である。一方 (4.1) の証明にあるように $\forall s \in A \setminus p$ は $A$-NZD なので $A \hookrightarrow A_p$. よって $A$ は integral domain である。このことからもし $p^{(k)} \cong A$ ならば $p^{(k-1)} \cong p^*$ がわかる。さて $R$ が Noether であるから $k>0$ で任意の $n$ について $[p^{(k)}]^n = p^{(kn)}$ となるものがとれる。すると任意の $n>0$ について $\operatorname{depth}_A A/[p^{(k)}]^n = 1$ であるので Burch の定理により $\ell(p^{(k)}) \leq 2 - \inf_{n>0} \operatorname{depth} A/[p^{(k)}]^n = 1$ となる。そこで $f \in p^{(k)}$ を $p^{(k)} \subseteq \overline{fA}$ となる様にとる。すると $A$ の sop $a, b$ に対して $a, b, ft^k$ は $R_s(p)$ の hsop 従って $R_s(p)$-regular sequence になる。すると勿論 $a, b$ は $A$-regular sequence でもあるので $A$ は C-M である。そこで $x \in m \setminus p$ を任意にとると、

$$
\begin{aligned}
\ell_A(A/(x)+p^{(k)}) &= \ell_{A_p}(A_p/p^k A_p) \cdot \ell_A(A/(x)+p) \\
&= k \cdot \ell_A(A/(x)+p) \qquad (A_p \text{が DVR なので}).
\end{aligned}
$$

一方 $B = A/xA$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\ell_B(B/[p^{(k)}]^{n+1}B) &= \ell_A(A/(x)+[p^{(k)}]^{n+1}) \\
&= \ell_A(A/(x)+p^{(k(n+1))}) \\
&= e^0_{xA}(A/p^{(k(n+1))}) \\
&= \ell_{A_p}(A_p/p^{k(n+1)}A_p) \cdot \ell_A(A/(x)+p) \\
&= k(n+1) \cdot \ell_A(A/(x)+p).
\end{aligned}
$$

従って $e^0_{p^{(k)}B}(B) = k \cdot \ell_A(A/(x)+p)$ である。すると

$$
\begin{array}{ccc}
e^0_{p^{(k)}B}(B) & = & \ell_A(A/(x)+p^{(k)}) \\
\| & & \\
e^0_{fA}(B) & = & \ell_A(A/(x)+fA)
\end{array}
$$

なので $(x)+p^{(k)} = (x)+fA$ となり、中山の補題を用いて $p^{(k)} = fA$ を得る。∎

**系 (5.3).** $d=2$ のとき次は同値である。

(1) $R_s(p)$ は Gorenstein である。

(2) 次の二条件がみたされる。

(i) $A$ は C-M で $\exists K_A$ s.t. $K_A \cong p^*$.

(ii) $\mu_A(P^{(k)}) = 1$ for some $k > 0$.

(5.3) の証明は省略する。

**定理 (5.4).** $k > 0, f \in p^{(k)}$ で $p^{(k)} \subseteq \overline{fA}$ とする。このとき次の条件は同値である。

(1) $G$ は C-M である。

(2) 次が成り立つ。

(i) $A$ と $G(pA_p)$ は C-M である。

(ii) $\forall n > 0$ について $A/(f) + p^{(n)}$ は C-M である。

この (5.4) は $x \in m \setminus p$ をとれば $x, ft^k$ が $G$ の hsop であることから従う (証明は省略する)。(2) の条件 (ii) は勿論

$$(f) + p^{(n)}/(f) = P^{(n)} \qquad \text{但し } P = p/fA$$

と同値である。従ってこの (5.4) を (4.3) 及び [2] と比べてみると $d$ を一般にしたときの formulation がようやく見えてくる。即ち、$\{x, f_1, \ldots, f_{d-1}\}$ は (5.1) の条件をみたすものとすると

**定理 (5.5).** $d \geq 2$ で $A$ は unmixed のとき次の条件は同値である。

(1) $G$ は C-M (resp. Gorenstein) である。

(2) 次が成り立つ。

(i) $A$ は C-M (resp. Gorenstein) である。

(ii) $1 \leq n \leq \sum_{1=1}^{d-1} k_i + a(G(pA_p))$ ならば $A/(f_1, \ldots, f_{d-1}) + p^{(n)}$ は C-M である。

このとき $R = A[\{p^{(n)}t^n\}_{1 \leq n \leq \sum_{i=1}^{d-1} k_i + a(G(pA_p))}, \{f_i t^{k_i}\}_{1 \leq i \leq d-1}]$ となっている。

この formulation が得られれば、証明は $d$ についての induction で、$d = 1$ の case へおとすことを工夫すればよい。勿論そうやさしくはないかもしれないが、やればできる。

1 節の外枠の議論と組合わせれば、

**系 (5.6).** $A$ は regular とすると次は同値である。

(1) $R_s(p)$ は C-M である。

(2) $1 \leq \forall n \leq \sum_{i=1}^{d-1} k_i - (d-1)$ について $A/(f_1, \ldots, f_{d-1}) + p^{(n)}$ は C-M である。

このとき $G$ は必ず Gorenstein である。

が得られ (1.2) の高次元化が得られる。最後に (5.5) の簡単な応用を述べて、この報告を終る。

**例 (5.7).** $A=k[[X,Y,Z,W]]/(XY-ZW)$, $p=(y,z,w)A$ とすると $R_s(p)$ は Gorenstein である。

**証明.** $\dim A=3$ で $e(A)=2$ である。勿論 $A$ は regular でなく, $A_p$は regular で $A/(x)+p$ は DVR である。今 $xy=zw$より $y\in p^{(2)}\setminus p^2$でさらに

$$\begin{aligned}\ell_A(A/(x,z-w,y) &= 2\\ &= 1\cdot 2\cdot e(A_p)\cdot \ell_A(A/(x)+p)\end{aligned}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned}k_1=1,\quad f_1=z-w\\ k_2=2,\quad f_2=y\end{aligned}$$

として上記の結果をあてはめると、$k_1+k_2-2=1$ より自明に $R_s(p)$ は Gorenstein であり

$$R_s(p)=A[yt,zt,wt,yt^2]$$

である。勿論 $G_s(p)$ は Gorenstein で $a=-2$ である。∎

# 参考文献

[1] Goto, S., Herrmann, M., Nishida, K. and Villamayor, O., *On the structure of Noetherian symbolic Rees algebras*, manuscripta math., **67** (1990), 197–225.

[2] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves*, J. Math. Soc. Japan, **43** (1991), 465–481.

[3] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., *The Gorensteinness of the symbolic blow-ups for certain space monomial curves*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[4] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., *Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves*, Nagoya Math. J. **124** (1991), 99–132.

[5] Herzog, J. and Vasconcelos, W., *On the divisor class group of Rees algebras*, J. Alg., **93** (1985), 182–188.

[6] Huneke, C., *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J., **34** (1987), 293–318.

[7] McAdam,S, *Asymptotic prime divisors*, Lecture Notes in Math., **1023**, Springer.

[8] Simis, A. and Trung, N. V., *The divisor class group of ordinary and symbolic blow-ups*, Math. Z., **198** (1988), 479-491.

# ホップ代数２５年

福井大学教育学部　土井幸雄

(次数つきでない)ホップ代数の研究が始まってから約２５年になります．その間必ずしも順調な発展ばかりとは言えなかったのですが，８０年代後半ホップ・ガロアの分野での大きな飛躍と量子群の発見により研究者の数も次第に増えています．８９年１月にはついにホップ代数の国際会議がイスラエルで開催され，研究者間の連絡網がやっと整備されました．また９１年１月のアメリカ数学会年会(サンフランシスコ)でも，特別分科会の一つとしてホップ代数が Montgomery と Taft により組織されました．現在ホップ代数の研究テーマはつぎの４つに大別されています:

有限次元ホップ代数の構造 -- ホップ・ガロア理論
-- 組合せ論(その他)への応用 -- 量子群.

今回はこの中から，ホップ・ガロア理論と量子群を取り上げ入門的なお話をさせていただきます．このような機会と会場での温かいおもてなしをいただいた富山大学の浅沼・菅谷両氏に感謝いたします.

## (I) ホップ・ガロア理論の誕生

アフィン代数群 $G = \mathrm{Spec}(A)$ が アフィンスキーム $X = \mathrm{Spec}(B)$ に右から作用しているとする．対応する comorphism を $\rho: B \to B\otimes A$ とすると，その affine quotient $Y$ は次で与えられる:

$$Y = \mathrm{Spec}(C) \quad ただし \quad C = \{b\in B \mid \rho(b) = b\otimes 1\}.$$

もし $X$ が "principal fibre bundle over $Y$ with group $G$"，すなわち，$X\times G \cong X\times_Y X$, $(x,g)\mapsto(x, xg)$，かつ $X\to Y$ が忠実平坦なら，この $Y$ が真の quotient $X/G$ に一致する．上の同型を翻訳すると，

写像 $\beta: B\otimes_C B \to B\otimes A$, $b'\otimes b \mapsto (b'\otimes 1)\rho(b) = \Sigma b'b_0\otimes b_1$，が全単射.

可換でない $A, B, C$ に対しても上の同型は意味をもつのではないだろうか? このようにしてホップ・ガロア拡大の概念が誕生する.

以下，k を単位元をもつ可換環とし，algebra，coalgebra，Hopf algebra はすべて k 上で考える．$\otimes = \otimes_k$，map = k-linear map，とする．

A で一般のホップ代数を表す(comultiplication $\Delta$: $A \to A\otimes A$，counit $\varepsilon$ : $A \to k$，antipode S: $A \to A$)．algebra B が right A-comodule algebra であるとは，B に right A-comodule 構造 $\rho$ : $B \to B\otimes A$ が与えられていて，この $\rho$ が algebra map になることと定義する．このとき，A は B に右から coact するという($\rho$ をその coaction という)．$B^{coA} := \{b\in B \mid \rho(b) = b\otimes 1\}$ を A-coinvariants という，B の subalgebra になる．

一般に，B を algebra，C を その subalgebra とする．B に (Hopf algebra) A が右から coact していて，$C = B^{coA}$ となるとき，拡大 B/C は A-extension であるという．さらに自然な k-線形写像

$$\beta : B\otimes_C B \to B\otimes A,\ b'\otimes b \mapsto (b'\otimes 1)\rho(b)$$

が全単射になるとき，拡大 B/C は A-Galois extension であると定義する．

[注意] 最初の研究は1969年の Chase-Sweedler [Hopf algebras and Galois theory, Lecture Notes in Math. vol 97, Springer] にまで逆上る．そこでは A が k 上有限生成射影的とし，B は可換かつ k 上忠実平坦で C = k の場合を考察している．その後たいした進展がなかったが，1981年 Kreimer-Takeuchi [KT] では $B\supset C$ が一般の場合を初めて考察(しかし A は k 上有限生成射影的)して，現在のホップ・ガロア理論がスタートした．

[例] (1) 群 G の algebra B への group grading $B = \bigoplus_{g\in G} B_g$ は，kG-extension B/C (ただし，kG は群環で $C = B_1$)とみれる．しかも "strongly G-graded" = "kG-Galois" となる．coaction $\rho$ と $B_g$ の対応は，$B_g = \{b\in B \mid \rho(b) = b\otimes g\}$．

(2) G が有限群のとき，$(kG)^* = \mathrm{Hom}(kG, k)$ は Hopf algebra になり，B への G の(k-algebra automorphism としての)作用とその不変環 $C = B^G$ が $(kG)^*$-extension B/C に対応する．古典的な意味の G-Galois (すなわち，$\exists \Sigma b_i\otimes c_i \in B\otimes_C B$ s.t. $\Sigma b_i g(c_i) = \delta_{1,g}$, $\forall g\in G$) が我々の $(kG)^*$-Galois と一致する．

(3) Char k = p (prime) とする．algebra B 上に長さ $q = p^e$ の iterative higher derivation $\{D_0 = id_B, D_1, \ldots, D_{q-1}\}$ を考察することは，$A = k[X]/(X^q) = k[x]$ に対する k[x]-extension B/C の考察と考えられる($\rho(b) = \Sigma D_i(b)\otimes x^i$)．ただし，k[x] は $\Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$，$\varepsilon(x) = 0$，$S(x) = -x$ によって Hopf algebra とみる．$C = \{b\in B \mid D_1(b) = \cdots = D_{q-1}(b) = 0\}$ となる．k[x]-Galois = "$\exists t\in B$ s.t.

$D_1(t) = 1$, $D_2(t) = \cdots = D_{q-1}(t) = 0$".
(4) 一方，B に $d^q = 0$ なる k-derivation d を考える場合が，$k[x]^*$-extension となり，$d^{q-1}(t) = 1$ なる元 $t \in B$ の存在が Galois 性に対応する．
(くわしい解説については，[D2, D3] 参照)．

このように従来個別的に研究されてきた環への種々の作用が統一した体系のなかで扱うことが可能になった(標語的にいうと，“Galois” = “良い作用” !)．

[一般論]

任意の A-拡大 B/C に対して，(相対)ホップ加群の圏 $\mathbf{M}_B^A$ を次で定義する：対象としては 右 A-comodule 構造 $\rho_M: M \to M\otimes A$ をもつ右 B-加群 M で

$$\rho_M(mb) = \Sigma m_0 b_0 \otimes m_1 b_1 \quad (\forall m\in M,\ \forall b\in B)$$

をみたすもの(ここで $\rho_M(m) = \Sigma m_0\otimes m_1$，$\rho_B(b) = \Sigma b_0\otimes b_1$ と表す)．A-comodule map かつ B-module map を射とする．(同様に圏 ${}_B\mathbf{M}^A$ も定義できる．) 明らかに $B \in \mathbf{M}_B^A$ となる．右 C-加群の圏を $\mathbf{M}_C$ で表そう．$V\in \mathbf{M}_C$ に対して，$V\otimes_C B\in \mathbf{M}_B^A$ となる，ただし，A-comodule 構造は $v\otimes b \mapsto \Sigma v\otimes b_0\otimes b_1$ で与える．逆に $M\in \mathbf{M}_B^A$ に対して，$M_0 = \{m\in M \mid \Sigma m_0\otimes m_1 = m\otimes 1\}$ とおくと，$M_0\in \mathbf{M}_C$ となり，関手 $V \mapsto V\otimes_C B$ は，関手 $M \mapsto M_0$ に対する左 adjoint になる．adjunctions は次で与えられる：

$$\Phi(V):\ V \to (V\otimes_C B)_0,\quad v \mapsto v\otimes 1,$$
$$\Psi(M):\ M_0\otimes_C B \to M,\quad m\otimes b \mapsto mb.$$

$B\otimes A$ は $b\otimes a \mapsto b\otimes\Delta(a)$，$(b\otimes a)b' = (b\otimes a)\rho(b')$ により $B\otimes A\in \mathbf{M}_B^A$ となり，さらに $\beta = \Psi(B\otimes A)$ がいえる．これから直ちに，関手 $(\ )\otimes_C B: \mathbf{M}_C \to \mathbf{M}_B^A$ が(圏)同値になれば，拡大 B/C は A-Galois となる．しかも，

もし B が左忠実平坦 C-加群なら，<u>この逆も成り立つ</u>[DT2, (2.11)]．

これを A = kG に適用すると，strongly G-grading に関する Dade の基本定理 [Math. Z. 174(1980), 241-262, Group-graded rings and modules] が得られる．

A から B への right A-comodule map $\phi: A \to B$ (i.e. $\rho\phi = (\phi\otimes id_A)\Delta$) で $\phi(1_A) = 1_B$ をみたすものを <u>total integral</u> という(ある意味でハール積分の代数化と考えられる)．存在するとは限らない．$\phi$ の存在は任意の $M\in \mathbf{M}_B^A$ が <u>relative injective A-comodule</u> であることと同値である[D1, (1.6)]．さらに antipode が全単射かつ B/C が A-Galois なら，C が B の 左 C-直和因子であることとも同値になる[D1, (2.4)]．また k が体のとき，B の A-<u>coflatness</u> (すなわち コテンサー積

$B\square_A(\ )$: ${}^A\mathbf{M} \to \mathbf{M}_k$ が完全関手)と同値になる．これを利用して，total integral と Galois 性に関する次の重要な結果が得られる(A,B が可換の場合[D1]，一般の場合[S1])：k が体で，A の antipode が全単射なら，

"写像 $\beta$ が全射でかつ total integral が存在する

⇔ B/C が A-Galois かつ B が左(または右)忠実平坦 C-加群"

⇔ 関手 $(\ )\otimes_C B$: $\mathbf{M}_C \to \mathbf{M}_B^A$ が同値

⇔ 関手 $B\otimes_C(\ )$: ${}_C\mathbf{M} \to {}_B\mathbf{M}^A$ が同値.

これをアフィン代数群 X = Spec(B) の閉部分群 G = Spec(A) に対して適用すると，Cline-Parshall-Scott による結果"G が exact (in X) ⇔ X/G がアフィン"の純代数的証明が得られる(CPS の論文 Math. Ann. 230(1977), 1-14 : Induced modules and affine quotients, では証明に Mumford 予想を使っている).

A-Galois extension の重要な例に接合積(crossed product) がある[DT1].
k-algebra D と k-linear maps $\omega$: $A\otimes D \to D$, $\sigma$: $A\otimes A \to D$ の組 $(D,\ \omega, \sigma)$ が次の条件をみたすとする：($\omega(a\otimes d) = a\cdot d$, $\sigma(a\otimes a') = \sigma(a,a')$ とかく，また，$\Delta(a) = \Sigma a_1\otimes a_2$, $(\Delta\otimes id)\Delta(a) = \Sigma a_1\otimes a_2\otimes a_3$ で表す)

① $\sigma$ は invertible(i.e., $\exists\sigma^{-1}$: $A\otimes A \to D$ s.t. $\Sigma\sigma(a_1,a'_1)\sigma^{-1}(a_2,a'_2) = \varepsilon(a)\varepsilon(a')1_D = \Sigma\sigma^{-1}(a_1,a'_1)\sigma(a_2,a'_2)$, $\forall a,a'\in A$.);

② $a\cdot(dd') = \Sigma(a_1\cdot d)(a_2\cdot d')$; $a\cdot 1_D = \varepsilon(a)1_D$; $1_A\cdot d = d$;

③ $\Sigma(a_1\cdot(a'_1\cdot d))\sigma(a_2,a'_2) = \Sigma\sigma(a_1,a'_1)(a_2a'_2\cdot d)$;

④ $\Sigma(a_1\cdot\sigma(a'_1,a''_1))\sigma(a_2,a'_2a''_2) = \sigma(a_1,a'_1)\sigma(a_2a'_2,a'')$;

⑤ $\sigma(a,1_A) = \sigma(1_A,a) = \varepsilon(a)1_D$.

このとき $D\otimes A = D\#_\sigma A$ は次の積により，(associative) algebra になる：

$$(d\#_\sigma a)(d'\#_\sigma a') = \Sigma d(a_1\cdot d')\sigma(a_2,a'_1)\#_\sigma a_3a'_2.$$

$1\#_\sigma 1$ が単位元になる.

(注意：条件②をみたす $\omega$ を measuring (または A の D への weak action)という．さらに，$a\cdot(a'\cdot d) = (aa')\rightharpoonup d$ をみたすとき，$(A,\omega)$ は left A-module algebra であるという．A が D に左から act するといういい方もする．条件③は twisted 条件，④は 2-cocycle 条件，⑤は正規(normal)条件と呼ばれる．$D\#_\sigma A$ はもちろん群の接合積 D★G を一般化したものになっている．また $(D,\omega)$ が left A-module algebra のとき，自明な 2-cocycle $\sigma(a,a') = \varepsilon(a)\varepsilon(a')$ に関して接合積 $D\#_\sigma A$ が作れて，これが通常の smash product D#A となる.)

接合積 $D\#_\sigma A$ は $\rho = id_D\otimes\Delta$: $D\#_\sigma A \to D\#_\sigma A\otimes A$ により，A-comodule algebra

で，その coinvariants は $D\#1_A \cong D$ となる．しかも，拡大 $D \subsetneq D\#_\sigma A$ は A-Galois になる．ここで，写像 $\beta$: $(D\#_\sigma A)\otimes_D(D\#_\sigma A) \cong D\#_\sigma A\otimes A \to D\#_\sigma A\otimes A$, は $\beta(d\#_\sigma a\otimes a') = \Sigma d\sigma(a_1, a'_1)\#_\sigma a_2a'_2\otimes a'_3$ となるが，逆写像は次で与えられる：　$\beta^{-1}(d\#_\sigma a\otimes a') = \Sigma d\sigma^{-1}(a_1S(a'_2), a'_3)\#_\sigma a_2S(a'_1)\otimes a'_4$.

（これを確かめることは大変よい計算練習）.

A-extension B/C が <u>A-cleft</u> であるとは，total integral $\phi: A \to B$ で $*$-invertible(i.e. $\exists \phi^{-1}\in \mathrm{Hom}(A,B)$ s.t. $\Sigma\phi(a_1)\phi^{-1}(a_2) = \varepsilon(a)1_B = \Sigma\phi^{-1}(a_1)\phi(a_2)$, $\forall a\in A$) なものが存在することと定義する．B/C が A-cleft なら，A-Galois となり($\beta^{-1}(b\otimes a) = \Sigma b_0\phi^{-1}(b_1)\otimes\phi(b_2)\in B\otimes_C B$)，さらに B は左 C-加群かつ右 A-comodule として $C\otimes A$ と同型になる(この条件は<u>正規底をもつ</u>と呼ばれる)．逆も成立し，$B \cong C\#_\sigma A$ (for some $\sigma$)となる([DT1], [BM])．このように，“非常に良い作用” = “A-cleft” = “A-Galois with normal basis” = “crossed product”!.

[A が有限次元のとき]

k を体とし，A を k 上有限次元な Hopf algebra とする．$H = A^*$ (= Hom(A, k)) で表すと，H は自然な Hopf algebra 構造をもつ．algebra B に right A-coaction $\rho$: $B \to B\otimes A$ を与えることは，left H-action $\omega$: $H\otimes B \to B$ を与えることと同じになる．つまり，right A-comodule algebra = left H-module algebra である．したがって A-extension B/C に対し，smash product $B\#H$ が作れる．このとき，${}_B\mathbf{M}^A = {}_{B\#H}\mathbf{M}$ (module category!)となる．また，$b \mapsto b\#1_H$ により，$B \subsetneq B\#H$ とみる．

最近 cohen-Fishmann-Montgomery [CFM] は次の興味ある結果を得た：
B/C を A-extension とする(A は体 k 上有限次元，$H = A^*$ とする)．このとき，
(i) $[C, {}_CB_{B\#H}, {}_{B\#H}B_C, B\#H,]$ は Morita context になる，ただし，

B は $(b\#h)\cdot b' = b(h\cdot b')$ によって 左 $B\#H$-加群とみる：，

B を 右 $B\#H$-加群とみる方法は大変複雑で，まず $ht = \varepsilon(h)t$ ($\forall h\in H$) をみたす H の元 $t \neq 0$ を一つ固定し(H が有限次元だからスカラー倍を除いてただ一つ存在する．<u>left integral in H</u> と呼ばれる)，$\lambda$ は “$th = \lambda(h)t$, $\forall h\in H$” で決まる元 $\lambda\in H^* = A$ とする．そして，$b'\cdot(b\#h) = S^{-1}(\Sigma h_1\lambda(h_2))(b'b)$ によって B を 右 $B\#H$-加群とみる．$S^{-1}$ は H の antipode S の逆写像を表す(有限次ホップ代数の antipode は全単射!)．bimodule maps は次で与えられる；

$[\ ,\ ]$: $B\otimes_C B \to B\#H$, $[b, b'] = (b\#t)(b'\#1)$,

$(\ ,\ )$: $B\otimes_{B\#H}B \to C$, $(b, b') = t\cdot(bb')$.

(ii) B/C: A-Galois ⇔ [ , ] が全射

⇔ $B\#H \cong \mathrm{End}_{-C}(B)$ かつ B は有限生成射影的右 C-加群.

とくに $B\#H$ が simple ring なら B/C は A-Galois になる(写像 [ , ] の像が $B\#H$ の両側イデアルだから).

(iii) B が division ring なら(C も division で), 常に $[B:C] \leq \dim_k A$. しかも $[B:C] = \dim_k A$ ⇔ B/C: A-Galois ⇔ B/C: A-cleft ⇔ $B\#H$: simple ring.

驚くべきことに, 普通の意味でガロアでない有限次分離拡大体 E/F ($F \supset k$ とする) でも, ある k-Hopf algebra A に対し E/F が A-Galois になることが可能である. 次の例は Greither-Pareigis [GP]による.

$A^* = H = \mathbb{Q}[c,s]/(c^2+s^2-1, cs)$ とおく. $\Delta(c) = c\otimes c - s\otimes s$, $\Delta(s) = c\otimes s + s\otimes c$, $\varepsilon(s) = 1$, $\varepsilon(s) = 0$, $S(c) = c$, $S(s) = -s$ とすれば, H は $\mathbb{Q}$ 上の Hopf algebra になる(これを "circle" Hopf algebraという). さて ω を 2 の実 4 乗根とするとき, 拡大 $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ は(古典的な意味で)ガロア拡大ではないが, この $H^* = A$ に対し, A -Galois になる. $\mathbb{Q}(\omega)$ への H の action は次の通り;

| • | 1 | $\omega$ | $\omega^2$ | $\omega^3$ |
|---|---|---|---|---|
| c | 1 | 0 | $-\omega^2$ | 0 |
| s | 0 | $-\omega$ | 0 | $\omega^3$ |

$H\otimes\mathbb{Q}(i) \cong \mathbb{Q}(i)\mathbb{Z}_4$ (as Hopf algebra) だから, $\mathbb{Q}\mathbb{Z}_4$ と H は互いに $\mathbb{Q}(i)$-form になる. また $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2]$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$-form になっている別のある Hopf algebra H' に対しても $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ は $H'^*$-Galois になる. このようにある拡大が 2 つの異なる Hopf algebra に対して Hopf Galois になることがある. 一方, どんな Hopf algebra に対しても Galois にならない分離体拡大も存在する.

上の結果 (ii) の観点からも, smash product $B\#H$ がいつ simple になるかを考えることは興味がある(群の outer action に関する Jacobson-Azumaya の結果のホップ化). これに関していくつかの結果も得られているが, B が division ring や体であっても, $B\#H$ が simple にならない例が最近発見された. (Sweedler の4 次元 Hopf algebra $H_4$ に対し, $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ は $(H_4)^*$-extension とみることができ, $\mathbb{C}\#H_4$ は semisimple であるが simple ではない.)

[多元環の表現論]

多元環の拡大 B/C が次の性質 (a),(b),(c) をもてば, B と C は表現論的によい関

係があることがわかっている[Reiten-Riedtman; Skew group algebras in the representation theory of artin algebras, J.Alg. 92 (1985)]:

(a) C が両側 C-加群として B の直和因子;

(b) B/C が分離拡大 (i.e. 積写像: $B\otimes_C B \to B \to 0$ が C-bimodule split);

(c) 関手 $(\ )\otimes_C B$: $\mathbf{M}_C \to \mathbf{M}_B$ が制限関手 $\mathbf{M}_B \to \mathbf{M}_C$ に対して 右 adjoint,
(i.e. $\mathrm{Hom}_C(V, W) \cong \mathrm{Hom}_B(V, W\otimes_C B)$ for $V\in\mathbf{M}_B$, $W\in\mathbf{M}_C$).

k 上有限生成射影的な Hopf algebra A の場合, B/C が A-Galois なら, 常に (c) が成立する[D4]. また (a) は $\phi(A)\subset Z_B(C)$ (the centralizer of C in B) なる total integral $\phi$: $A \to B$ の存在と同値[D1]. また 拡大 $Z_B(C)/Z_B(B)$ はいわゆる宮下-Ulbrich 作用により $A^*$-extension になるが, (b) は total integral $A^* \to Z_B(C)$ の存在と同値となる[DT2].

Schneider は最近 faithfully flat な A-Galois extension B/C の 表現論をさらに発展させて, 単純加群と直既約加群の誘導と制限を研究している[S2]. (例えば A = kG/N, B = kG, C = kN, ただし N は群 G の正規部分群.) そこで, いくつかの古典的結果( 群の Green's indecomposability theorem, a version of Blattner's simplicity theorem for induction from ideals of Lie algebras, Dade's theory on strongly graded algebras) を一般化している.

これらの結果が示すように, 一般の忠実平坦なホップ・ガロア拡大の表現論, すなわち, Hopf-Galois-Clifford 理論を研究することで, より一般的かつより自然(?)な証明を得ることができる. そのポイントは, 左 C-加群 V の “stable”性および V の “stabilizer” (A のある subcoalgebra として)をどう捕らえるか, である.

## (II) 私の量子(線形)群入門

Drinfeld-Jimbo の quantum enveloping algebra $U_q$ から始まった(1985-6年頃)いわゆる“量子群”の発見はホップ代数をやっていた多くの人々に強い衝撃を与えた. 可換でも余可換でもないホップ代数(これを Drinfeld は量子群と呼んだ)の例が重大な価値を伴って出現したわけである. $U_q$ のようにある種のリー環の展開環を量子化したもの(これらは量子リー環というほうが妥当だと思う)と, $GL_q$ のようにある種の線形代数群を量子化したものがある. ここでは後者のタイプに話を限定したい.

そのようなホップ代数の多くは braided（または co-quasitriangular）という性質をもっている．そこでまず braided ホップ代数のいくつかの一般的性質を調べることにする[D5].

[定義([H],[LTo])] A を可換環 k 上の bialgebra とする(Hopf algebra の定義から antipode の存在を除いたもの)．A 上の 2 次形式 $\sigma$: $A\otimes A \to k$ が次の条件をみたすとき，組 $(A, \sigma)$ を braided bialgebra という：

(0) $\sigma$ は invertible (i.e., $\exists\, \sigma^{-1}: A\otimes A \to k$ s.t. $\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma^{-1}(x_2, y_2)$ $=\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \Sigma\sigma^{-1}(x_1, y_1)\sigma(x_2, y_2)$, $\forall x, y\in A$.)；

(1) $\Sigma\sigma(x_1, y_1)x_2y_2 = \Sigma y_1x_1\sigma(x_2, y_2)$, $\forall x, y\in A$;

(2) $\sigma(xy, z) = \Sigma\sigma(x, z_1)\sigma(y, z_2)$, $\forall x, y, z\in A$;

(3) $\sigma(x, yz) = \Sigma\sigma(x_1, z)\sigma(x_2, y)$, $\forall x, y, z\in A$.

braided bialgebra は 準三角(quasitriangular) bialgebra の双対概念である([H] では CQT bialgebra と呼んでいる)．条件 (1)からわかるように，ある意味で可換に非常に近い bialgebra と思ってもよい．

braided bialgebra $(A, \sigma)$ に対し，次が成立する：

(4) $\sigma(1, x) = \varepsilon(x) = \sigma(x, 1)$, $\forall x\in A$;

(5) $\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2, z_1)\sigma(y_2, z_2) = \Sigma(y_1, z_1)\sigma(x_1, z_2)\sigma(x_2, y_2)$;

(6) $\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2y_2, z) = \Sigma\sigma(y_1, z_1)\sigma(x, y_2z_2)$, $\forall x, y, z\in A$.

(実際，(4) は $\sigma(1, x) = \Sigma\sigma(1, x_1)\varepsilon(x_2) = \Sigma\sigma(1, x_1)\sigma(1, x_2)\sigma^{-1}(1, x_3)$, よって (2) より，$= \Sigma\sigma(1, x_1)\sigma^{-1}(1, x_2) = \varepsilon(x)$ となる．(5) は (1) と (2) からただちにでる． (6) は (5) と (2)(3) より明らか.)

$\sigma_{12}$, $\sigma_{13}$, $\sigma_{23}$: $A\otimes A\otimes A \to k$ を $\sigma_{12}(x\otimes y\otimes z) = \varepsilon(z)\sigma(x, y)$, $\sigma_{13}(x\otimes y\otimes z) = \varepsilon(y)\sigma(x, z)$, $\sigma_{23}(x\otimes y\otimes z) = \varepsilon(x)\sigma(y, z)$ と定めると，(5) は $\sigma_{12}*\sigma_{13}*\sigma_{23} = \sigma_{23}*\sigma_{13}*\sigma_{12}$ と表せる．これを Yang-Baxter 条件という.

さらに A が antipode S をもつ(すなわち A が Hopf algebra)とき，次が成立することが容易に確かめられる：

(7) $\sigma^{-1}(x, y) = \sigma(S(x), y)$, $\forall x, y\in A$;

(8) $\sigma(x, y) = \sigma^{-1}(x, S(y))$, $\forall x, y\in A$;

(9) $\sigma(x, y) = \sigma^{-1}(S(x), S(y))$, $\forall x, y\in A$.

一般に Hopf algebra の antipode は全単射とは限らない．しかし，これらを用いると，$S^2(x) = \Sigma\sigma^{-1}(S(x_1), x_2)x_3\sigma(x_4, S(x_5))$ が示され，とくに braided Hopf algebra においては antipode は必ず全単射となる．

[例 1] $H_4$ で次のような Hopf algebra を表す：k 上 1(= 単位元), x, y, w で張られていて，$xy = w$，$x^2 = 1$，$y^2 = 0$，$xw = -wx = y$ で algebra 構造を入れる．さらに，$\Delta(x) = x\otimes x$，$\Delta(y) = y\otimes x + 1\otimes y$，$\Delta(w) = w\otimes 1 + x\otimes w$，$\varepsilon(x) = 1$，$\varepsilon(y) = \varepsilon(w) = 0$，$S(x) = x$，$S(y) = w$，$S(w) = -y$，によって $H_4$ は Hopf algebra になる．これを Sweedler の 4 次元ホップ代数という．任意の $\alpha\in k$ に対し，$\sigma_\alpha$: $H_4\otimes H_4 \to k$ を次で定義すると，$(H_4, \sigma_\alpha)$ は braided になる．

| $\sigma_\alpha$ | 1 | x | y | w |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| x | 1 | -1 | 0 | 0 |
| y | 0 | 0 | $\alpha$ | $-\alpha$ |
| w | 0 | 0 | $\alpha$ | $\alpha$ |

$(\sigma_\alpha)^{-1}(x, y) = \sigma_\alpha(y, x)$ となる．一般に braided $(A, \sigma)$ が $\sigma^{-1} = {}^t\sigma$ をみたすとき，cotriangular であるという（ただし ${}^t\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$）．

[例 2] bialgebra A に条件 (6)(2-cocycle 条件) をもつ invertible 2 次形式 $\sigma$: $A\otimes A \to k$ が与えられたとき，A は新しい積・

$$x\cdot y = \Sigma\sigma(x_1, y_1)x_2y_2\sigma^{-1}(x_3, y_3), \quad x, y\in A$$

で bialgebra になる．coalgebra 構造はもとのままとする．この新しい bialgebra を $A^\sigma$ で表そう．もし A が antipode S をもつなら，$A^\sigma$ もそうでその antipode は

$$S^\sigma(x) = \Sigma\sigma(x_1, S(x_2))S(x_3)\sigma^{-1}(S(x_4), x_5)$$

で与えられる．さらに A が可換なら，

$$\hat{\sigma}: A\otimes A \to k, \quad x\otimes y \mapsto \Sigma\sigma(y_1, x_1)\sigma^{-1}(x_2, y_2)$$

に対して $(A^\sigma, \hat{\sigma})$ は cotriangular braided になる．

[FRT-consturaction] 上のような方法からは $GL_q$ は捕らえられない．これとは別に braided なものを構成する一般的方法，いわゆる FRT-consturaction，が知られている(cf. [H], [LTo])．ここではもっと分かりやすく，しかもより一般的な構成を試みる．

C を任意の k-coalgebra とすると，tensor algebra $T(C) = \oplus_m C^{(m)}$ は自然な bialgebra 構造をもつ($xy\cdots z = x\otimes y\otimes\cdots\otimes z\in C^{(m)}$ に対し，$\Delta(xy\cdots z) = \Sigma x_1y_1\cdots z_1\otimes x_2y_2\cdots z_2$，$\varepsilon(xy\cdots z) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)\cdots\varepsilon(z)$ とする．)

invertible な2次形式 $\sigma: C\otimes C \to k$ が与えられたとき，

$$\{\Sigma\sigma(x_1,y_1)x_2\otimes y_2 - \Sigma y_1\otimes x_1\sigma(x_2,y_2)\,|\,x,y\in C\}$$

で生成された T(C) のイデアル $I_\sigma$ による quotient $T(C)/I_\sigma$ を $M(C,\sigma)$ で表す (quadratic bialgebra associated with $(C,\sigma)$ という). $I_\sigma$ は T(C) の bi-ideal となり，$M(C,\sigma)$ は確かに bialgebra になる．$\sigma$ が自明な2次形式(すなわち，$\sigma(x,y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$) のとき，$M(C,\sigma)$ は C 上の symmetric algebra と一致する．

2次形式 $\sigma: C\otimes C \to k$ は T(C) 上に(条件 (2),(3) の下で)一意的に拡張される．すなわち，$xy\cdots z = x\otimes y\otimes\cdots\otimes z \in C^{(s)}$，$uv\cdots w = u\otimes v\otimes\cdots\otimes w \in C^{(t)}$ に対し，

$$\sigma(xy\cdots z, uv\cdots w) = \Sigma\sigma(x_1,w_1)\cdots\sigma(x_{s-1},v_1)\sigma(x_s,u_1)\cdot$$
$$\cdot\sigma(y_1,w_2)\cdots\sigma(y_{s-1},v_2)\sigma(y_s,u_2)\cdots\sigma(z_1,w_t)\cdots\sigma(z_{s-1},v_t)\sigma(z_s,u_t).$$

しかし，この $\sigma$ が $M(C,\sigma) = T(C)/I_\sigma$ にまで拡張できるとは限らない．そのための条件は，$\sigma(T(C)\otimes I_\sigma + I_\sigma\otimes T(C)) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sigma(\Sigma\sigma(x_1,y_1)x_2y_2 - \Sigma y_1x_1\sigma(x_2,y_2), z) = 0$ かつ

$\sigma(x, \Sigma\sigma(y_1,z_1)y_2z_2 - \Sigma z_1y_1\sigma(y_2,z_2)) = 0$, $\forall x,y,z\in C$

$\Leftrightarrow$ $\Sigma\sigma(x_1,y_1)\sigma(x_2y_2,z) = \Sigma\sigma(y_1x_1,z)\sigma(x_2,y_2)$ かつ

$\Sigma\sigma(y_1,z_1)\sigma(x,y_2z_2) = \Sigma\sigma(x,z_1y_1)\sigma(y_2,z_2)$, $\forall x,y,z\in C$.

よって，次の条件と同値になる：($\forall x,y,z\in C$ に対し，)

$$\Sigma\sigma(x_1,y_1)\sigma(x_2,z_1)\sigma(y_2,z_2) = \Sigma\sigma(y_1,z_1)\sigma(x_1,z_2)\sigma(x_2,y_2).$$

(すなわち，$\sigma_{12}*\sigma_{13}*\sigma_{23} = \sigma_{23}*\sigma_{13}*\sigma_{12}$ in $(C\otimes C\otimes C)^*$，となる．これをみたす invertible な2次形式 $\sigma$ をもつ coalgebra $(C,\sigma)$ を <u>Yang-Baxter coalgebra</u> という). $\sigma: C\otimes C \to k$ が invertible なら，拡張された $\sigma: M(C,\sigma)\otimes M(C,\sigma) \to k$ も invertible となる．このようにして YB coalgebra $(C,\sigma)$ から，braided bialgebra $(M(C,\sigma),\sigma)$ が構成された．

[例 3] C として n 次正方行列 M(n,k) の dual coalgebra $M(n,k)^*$ とする．任意の k の units $\alpha,\beta$ に対して，$\sigma_{\alpha,\beta}: C\otimes C \to k$ を 次で定義する：

$i = 1,2,\ldots,n$ に対して $\sigma_{\alpha,\beta}(E_{ii},E_{ii}) = \alpha\beta$； $i < j$ に対して

$\sigma_{\alpha,\beta}(E_{jj},E_{ii}) = \alpha$，$\sigma_{\alpha,\beta}(E_{ii},E_{jj}) = \beta$，$\sigma_{\alpha,\beta}(E_{ij},E_{ji}) = \alpha\beta - 1$；

その他 $= 0$. (ただし，$\{E_{ij}\}$ は matrix units $\{e_{ij}\}$ の dual basis).

このとき，$(M(n,k)^*, \sigma_{\alpha,\beta})$ は YB coalgebra で，

$M(C,\sigma) = \langle E_{ij}\ (i,j = 1,2,\ldots,n) \mid E_{is}E_{ir} = \alpha E_{ir}E_{is}$ (if $r < s$),

$E_{jr}E_{ir} = \beta E_{ir}E_{jr}$ (if $i < j$), $E_{jr}E_{is} = \alpha^{-1}\beta E_{is}E_{jr}$ (if $i < j$, $r < s$),

$E_{ir}E_{js} - E_{js}E_{ir} = (\alpha^{-1} - \beta)E_{is}E_{jr}$ (if $i < j$, $r < s$) $\rangle$.

coalgebra 構造は $\Delta(E_{ij}) = \Sigma_k E_{ik} \otimes E_{kj}$, $\varepsilon(E_{ij}) = \delta_{ij}$.
これを Takeuchi's two-parameter matrix bialgebra[T2] といい, $M_{\alpha,\beta}(n)$ で表す.
$\alpha = \beta = q$ のとき, 通常の quantum matrix bialgebra $M_q(n)$ と一致する.

[$M(C,\sigma)$ のホップ化] 一般には $M(C,\sigma)$ は antipodeをもたない(すなわち, ホップ代数ではない). 一般の bialgebra A に対して, A のホップ化 $(A^{\sim}, i)$ をつぎの意味で定義しよう: $A^{\sim}$ は Hopf algebra, $i: A \to A^{\sim}$ は bialgebra map で, A から任意の Hopf algebra H への bialgebra map $f: A \to H$ に対し, Hopf algebra map $f^{\sim}$: $A^{\sim} \to H$ で $f = f^{\sim}i$ をみたすものがただ一つ存在すること. Takeuchi[T1] は, $A = T(C)$ に対して, 上の意味のホップ化($H(C)$で表している) が常に存在することを示した(決して簡単ではない!). さらに $C = M(n,k)^*$ $(n > 1)$ のとき, $H(C)$ の antipode は全単射にならないことを具体的に示した(したがって braided でない). また A が可換な bialgebra のとき, 可換な意味でのホップ化(上で $A^{\sim}$, H を可換なものに制限する)が存在し, それは grouplike elements 全体のつくる (multiplicative) monoid $G = \{g \in A \mid \Delta(g) = g \otimes g, \varepsilon(g) = 1\}$ による局所化 $A[G^{-1}]$ で与えられる[T1]. (一般に Hopf algebra H の $\forall$grouplike 元 g は可逆で, $g^{-1} = S(g)$ となることに注意).

$(A,\sigma)$ が braided bialgebra のとき, braided な意味でのホップ化を考えたい. A が非可換なので局所化 $A[G^{-1}]$ 自体考えられるのか(さらにこれが Hopf algebra になるのか)が問題になる. 条件(1)から $G(A)$ の元は互いに可換になるが, A の中心に属すとはかぎらない. しかし $\forall g \in G(A)$ に対し,

$$\pi_g: A \to A,\ a \mapsto \pi_g(a) = \Sigma\sigma(a_1, g)a_2\sigma(a_3, g)$$

とおくと, $\pi_g$ は A の bialgebra automorphism で, $\forall a \in A$ に対し $ga = \pi_g(a)g$, $ag = g(\pi_g)^{-1}(a)$, $\pi_g(ag) = \pi_g(a)g = ga$ をみたすことがわかる[H, §2]. とくに " $ga = 0 \Leftrightarrow ag = 0$ " となり, A の G による(両側)局所化 $A[G^{-1}]$ が作れる. さらに $A[G^{-1}]$ は braided bialgebra になる, ただし $\forall x, y \in A$, $\forall g, h \in G$ に対し,

$$\Delta(ag^{-1}) = \Sigma a_1g^{-1} \otimes a_2g^{-1},\quad \varepsilon(ag^{-1}) = \varepsilon(a),$$

$$\sigma(xg^{-1}, yh^{-1}) = \Sigma\sigma^{-1}(x_1, h)\sigma(g, h)\sigma(x_2, y_1)\sigma^{-1}(g, y_2).$$

一般に $A[G^{-1}]$ が Hopf algebra になるかどうか, わたしは知らない. しかし特別な場合, あるひとつの $g \in G$ によってホップ化 $A[g^{-1}]$ $(= A[G^{-1}])$ が得られることもある[D5, Thm 3.7]:

$(C, \sigma)$ を Yang Baxter coalgebra, $g$ を $M(C, \sigma)$ のある grouplike element とする．もし $C$ から $M(C, \sigma)$ への k-linear maps $j, j'$ で

$$\Sigma i(x_1)j(x_2) = \varepsilon(x)g = \Sigma j'(x_1)i(x_2), \ \forall x \in C,$$

をみたすものが存在すれば，$M(C, \sigma)[g^{-1}]$ がすでに Hopf algebra となる．
（この結果は，［T3, Proposition 1.3］の一種の変形と考えられる．）

［例］$M_{\alpha,\beta}(2)$ において，$g = E_{11}E_{22} - \alpha^{-1}E_{12}E_{21} = E_{22}E_{11} - \beta E_{12}E_{21}$ とおくと，$g$ は grouplike element になる（この元を quantum determinant という）．$j$, $j'$: $M(2, k)^* \to M_{\alpha,\beta}(2)$ をつぎで定義する：

$$j(E_{11}) = E_{22},\ j(E_{12}) = -\alpha E_{12},\ j(E_{21}) = -\alpha^{-1}E_{21},\ j(E_{22}) = E_{11},$$

$$j'(E_{11}) = E_{22},\ j'(E_{12}) = -\beta E_{12},\ j(E_{21}) = -\beta^{-1}E_{21},\ j(E_{22}) = E_{11}.$$

このとき，$\Sigma i(x_1)j(x_2) = \varepsilon(x)g = \Sigma j'(x_1)i(x_2)$, $\forall x \in M(2, k)^*$,（余因子展開!），となり，$M_{\alpha,\beta}(2)[g^{-1}]$ は Hopf algebra になる（これを $GL_{\alpha,\beta}(2)$ で表す）．
antipode $S$ はつぎで与えられる：

$$S(E_{11}) = E_{22}g^{-1} = g^{-1}E_{22},\ S(E_{12}) = -\alpha E_{12}g^{-1} = -\beta g^{-1}E_{12},$$

$$S(E_{21}) = -\alpha^{-1}E_{21}g^{-1} = -\beta^{-1}g^{-1}E_{21},\ S(E_{22}) = E_{11}g^{-1} = g^{-1}E_{11}.$$

$n \geq 3$ に対しても quantum determinant $g \in M_{\alpha,\beta}(n)$, $j, j'$ が存在し，Hopf algebra $GL_{\alpha,\beta}(n) = M_{\alpha,\beta}(n)[g^{-1}]$ が作れる．

## 参考文献


［BM］ R. Blattner and S. Montgomery: Crossed products and Galois extensions of Hopf algebras, Pacific J. Math. 137(1989), 37-54.

［CFM］ M. Cohen, D. Fishmann, and S. Montgomery, Hopf Galois extensions, smash products, and Morita equivalence, J. Algebra 133(1990), 351-372.

［D1］ Y. Doi: Algebras with total integrals, Comm. Alg. 13(1985), 2137-2159.

［D2］ Y. Doi: R[X]/(P(X))-Galois extensions について，1986年1月，阪大「代数群，リー群とその表現・ホップ代数とガロア理論」シンポジウム報告集，207-217.

［D3］ Y. Doi: 環への種々の作用をホップ代数的にみれば，1987年2月，数理研講究録 608「ホップ代数学とその周辺」，pp21-33.

［D4］ Y. Doi: Hopf extensions of algebras and Maschke type theorems, Israel J.

Math. 72(1990), 99-108.

[D5] Y.Doi: Braided bialgebras and quadratic bialgebras, preprint.

[DT1] Y.Doi and M.Takeuchi: Cleft comodule algebras for a bialgebra, Comm. Alg. 14(1986), 801-817.

[DT2] Y.Doi and M.Takeuchi: Galois extensions of algebras, the Miyashita-Ulbrich actions, and Azumaya algebras, J. Algebra 121(1989), 488-516.

[GP] C.Greither and B.Pareigis: Hopf Galois theory for separable field extensions, J.Algebra 106(1987), 239-258.

[H] T.Hayashi: Quantum groups and quantum determinants, preprint.

[KT] H.Kreimer and M.Takeuchi: Hopf algebras and Galois extensions of an algebra, Indiana Univ. Math. J. 30(1981), 675-692.

[LTo] R.Larson and J.Towber: Two dual classes of bialgebras related to the concepts of "quantum group" and "quantum Lie algebras", preprint.

[S1] H.Schneider: Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras, Israel J. Math. 70(1990), 167-195.

[S2] H.Schneider: Representation theory of Hopf Galois extensions, Israel J. Math. 70(1990), 196-231.

[T1] M.Takeuchi: Free Hopf algebras generated by coalgebras, J.Math.Soc. Japan 23 (1971), 561-582.

[T2] M.Takeuchi: A two-parameter quantization of GL(n), Proc. Japan Acad. 66, (1990).

[T3] M.Takeuchi: Matric bialgebras and quantum groups, Isreal J.Math. 72 (1990), 232-251.

## Hopf Algebra Dictionary

For simplicity, we consider over a fixed ground field k. Map always means k-linear map, and the unadorned tensor product $V\otimes W$ is understood to be $V\otimes_k W$. The dual space of a vector space V is denoted by $V^*$. Algebra always means associative algebra with 1.

Antipode of a bialgebra A. The map $S \in \mathrm{Hom}(A, A)$ such that $id_B * S = u_A \varepsilon_A = S * id_A$, i.e. $\Sigma a_1 S(a_2) = \varepsilon(a) 1_A = \Sigma S(a_1) a_2$ for $\forall a \in A$. S (if it exists) is always an anti-algebra map and anti-coalgebra map.

Bialgebra. An algebra A which is also a coalgebra such that $\Delta_A$ and $\varepsilon_A$ are algebra map.

Bi-ideal of a bialgebra. A coideal and a (two-sided) ideal.

Braided bialgebra. A pair $(A, \sigma)$ where A is a bialgebra and $\sigma \in (A\otimes A)^*$ is invertible, such that the following conditions hold: For $\forall x, y, z \in A$, (B1) $\Sigma\,\sigma(x_1, y_1)x_2y_2 = \Sigma\, y_1x_1\sigma(x_2, y_2)$, (B2) $\sigma(xy, z) = \Sigma\,\sigma(x, z_1)\sigma(y, z_2)$, (B3) $\sigma(x, yz) = \Sigma\,\sigma(x_1, z)\sigma(x_2, y)$.

Cleft comodule algebra. A right A-comodule algebra B such that there exists a $*$-invertible A-comodule map $\phi : A \to B$, where A is a bialgebra.

Coalgebra. A vector space C equipped with a map (comultiplication) $\Delta: C \to C\otimes C$ and (counit) $\varepsilon : C \to k$ such that $(\Delta\otimes id)\Delta = (id\otimes\Delta)\Delta$ and $(\varepsilon\otimes id)\Delta = id = (id\otimes\varepsilon)\Delta$. We shall use the so-called "sigma notation" for iterates of images of $\Delta$. That is, $\Delta(c) = \Sigma\, c_1\otimes c_2$, $(\Delta\otimes id)\Delta(c) = \Sigma\, c_1\otimes c_2\otimes c_3, \cdots$.

Coalgebra map. A map $f: C \to D$, where C and D are coalgebras, such that $\Delta_D f = (f\otimes f)\Delta_C$ and $\varepsilon_D f = \varepsilon_C$.

Cocommutative coalgebra. For $\forall c\in C$, one has $\Delta(c) = \Sigma\, c_2\otimes c_1$.

Coideal J of a coalgebra C. A subspace of C such that $\Delta(J)\subset J\otimes C + C\otimes J$ and $\varepsilon(J) = 0$. C/J has a natural coalgebra structure.

Comodule for a coalgebra C. A vector space V with a map $\rho : V \to V\otimes C$ s.t. $(\rho\otimes id)\rho = (id\otimes\Delta)\rho$ and $(id\otimes\varepsilon)\rho = id_V$. We write $\rho(v) = \Sigma\, v_0\otimes v_1$.

Comodule algebra. An algebra B is a right A-comodule algebra (where A a bialgebra) if there exists an algebra map $\rho : B \to B\otimes A$ making B into a right A-comodule. In this situation we also say A coacts on B. The A-coinvariants is defined by $B^{coA} = \{ b\in B \mid \rho(b) = b\otimes 1\}$.

Convolution product $f*g. = m_B(f\otimes g)\Delta_C \in Hom(C, B)$ where C is a coalgebra, B is an algebra, and f, $g \in Hom(C, B)$. Hom(C, B) becomes an (associative) algebra with unit $u_B\varepsilon_C$.

Coradical of a coalgebra. The sum of all simple subcoalgebras.

Cosemisimple coalgebra. A coalgebra which is the sum of simple subcoalgebras.

Cotensor product $V\square_C U$. The kernel of $\rho_V\otimes id_U - id_V\otimes\rho_U: V\otimes U \to V\otimes C\otimes U$, where V is a right C-comodule and U is a left C-comodule.

Crossed product $D\#_\sigma A$. Let D be an algebra and A a bialgebra. Given a map $\omega: A\otimes D \to D$, $a\otimes d \mapsto a\cdot d$, and a map $\sigma : A\otimes A \to D$, $a\otimes a' \mapsto \sigma(a, a')$. If $a\cdot(dd') = \Sigma(a_1\cdot d)(a_2\cdot d')$, $a\cdot 1 = \varepsilon(a)1$, $1\cdot d = d$, $\Sigma\, a_1\cdot(a'_1\cdot d)\sigma(a_2, a'_2) = \Sigma\,\sigma(a_1, a'_1)(a_2a'_2\cdot d)$, $\Sigma(a_1\cdot\sigma(a'_1, a''_1))\sigma(a_2, a'_2a''_2) = \sigma(a_1, a'_1)\sigma(a_2a'_2, a'')$, and $\sigma(a, 1) = \sigma(1, a) = \varepsilon(a)1$, then one can form the croosed product algebra $D\#_\sigma A$; as a vector space $D\#_\sigma A$ is $D\otimes A$, multiplication is given by $(d\#_\sigma a)(d'\#_\sigma a') = \Sigma\, d(a_1\cdot d')\sigma(a_2, a'_1)\#_\sigma a_3a'_2$.

Grouplike element of a coalgebra C. An element g of C such that $\Delta(g) = g\otimes g$ and $\varepsilon(g) = 1$. One usually denotes the set of all grouplike elements of C by G(C).

Hopf algebra. A bialgebra with antipode.

Hopf Galois extension. Let A be a bialgebra and B a right A-comodule algebra. B is an A-Galois extension of $C = B^{coA}$ (or B/C is A-Galois) if the map

$\beta$ : $B\otimes_c B \to B\otimes A$, $b\otimes b' \mapsto (b\otimes 1)\rho(b')$, is bijective.

Hopf ideal of a Hopf algebra. A bi-ideal J such that $S(J)\subset J$.

Hopf module for right A-comodule algebra B. A right B-module M which is also a right A-comodule such that $\rho_M(mb) = \Sigma m_0 b_0 \otimes m_1 b_1$ for $\forall m\in M$, $b\in B$.

Integral in a bialgebra A. A non-zero element x in A such that $ax = \varepsilon(a)x$, $\forall a\in A$.

Integral in $A^*$. A non-zero element x in $A^*$ such that $p*x = p(1)x$, $\forall p\in A^*$.

Irreducible coalgebra. A coalgebra in which any two non-zero subcoalgebras have non-zero intersection.

Left coideal of a coalgebra. A subspace J such that $\Delta(J)\subset C\otimes J$.

Module algebra. An algebra B is a left A-module algebra (where A a bialgebra) if B is a left A-module, $a\cdot(bc) = \Sigma(a_1\cdot b)(a_2\cdot c)$, $\forall a\in A$, $b, c\in B$ and $a\cdot 1 = \varepsilon(a)1$, for $\forall$ $a\in A$. In this situation we also say A acts on B. The A-invariants is defined by $B^A = \{b\in B \mid a\cdot b = \varepsilon(a)b,\ \forall a\in A\}$.

Normal basis property. Let A be a bialgebra. We say that a right A-comodule algebra B has a normal basis property if there exists a left $B^{coA}$-module and right A-comodule isomorphism $B^{coA}\otimes A \cong B$.

Pointed coalgebra. A coalgebra in which all simple subcoalgebras are 1-dim.

Primitive element of a bialgebra A. An element of $P(A) = \{a\in A \mid \Delta(a) = a\otimes 1 + 1\otimes a\}$.

Quasi-triangular bialgebra. A pair (A, R) where A is a bialgebra and $R\in U(A\otimes A)$, such that the following conditions hold: (QT1) $R(\Sigma x_1\otimes x_2) = (\Sigma x_2\otimes x_1)R$ for $\forall x\in A$, (QT2) $(\Delta\otimes id)(R) = R_{13}R_{23}$, (QT3) $(id\otimes\Delta)(R) = R_{13}R_{12}$ (where $R_{ij}$ is an element of $A\otimes A\otimes A$ which is R in the i and j factors).

Right coideal of a coalgebra. A subspace J such that $\Delta(J)\subset J\otimes C$.

Simple coalgebra. A non-zero coalgebra which has no non-zero proper sub-coalgebras.

Smash product B#A for a A-module algebra B. As a vector space B#A is $B\otimes A$. Elements $b\otimes a$ are written b#a. Multiplication is defined by $(b\#a)(b'\#a') = \Sigma b(a_1\cdot b')\#a_2 a'$. B#A is an algebra with unit 1#1.

Subcoalgebra of a coalgebra C. A subspace D of C with $\Delta(D)\subset D\otimes D$.

Sweedler's 4-dimensional Hopf algebra $H_4$. The Hopf algebra with k-basis {1, x, y, w} and relations: $xy = w$, $x^2 = 1$, $y^2 = 0$, $xw = -wx = y$. The Hopf struc-is given by $\Delta(x) = x\otimes x$, $\Delta(y) = y\otimes x + 1\otimes y$, $\Delta(w) = w\otimes 1 + x\otimes w$, $\varepsilon(x) = 1$, $\varepsilon(y) = \varepsilon(w) = 0$, $S(x) = x$, $S(y) = w$, $S(w) = -y$.

Total integral $\phi$ of an A-comodule algebra B. An A-comodule map $\phi : A \to B$ with $\phi(1) = 1$.

[Classical Books]:

M. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969.

E. Abe, Hopf Algebras, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.

[Recent Papers]:

Israel J. Math. 72(1990), no. 1-2, Weizmann Science Press of Israel, Jerusalem, 1990, pp 1-256.

# Buchsbaum property with certain spectral sequences

宮崎　誓　（長野高専）

本稿は，Buchsbaum加群の特徴付けを，スペクトル系列で行ない，それによって幾つかの結果を導くものである。これは，[4]で予想した問題の解答も含んでいる。詳しくは，[5]で述べる予定である。

まず，[3]の結果を復習しよう。

$R=\bigoplus_{d\geq 0}R_d$ を体$k$上のgraded ringとし，$R_1$の元で$k$上有限生成とする。また，$M=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}M_d$ を有限生成graded $R$-moduleとし，$\dim M=m+1\geqslant 2$, $\operatorname{depth} M\geqslant 2$ と仮定する。

さて，$R=k[x_0,\cdots,x_N]$ ($\deg x_j=1$, $j=0,\cdots,N$) と書いて，これによって，$\operatorname{Proj}R\hookrightarrow\mathbb{P}^N$ を定める。そこで，

$\mathcal{F}=\widetilde{M}$ : a coherent sheaf on $\mathbb{P}^N$

$\mathcal{U}=\{U_\lambda\}$ : an affine open covering of $\mathbb{P}^N$

$L^\cdot=C^\cdot(\mathcal{U};\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(l))$ : the Čech complex

$K_\bullet=K_\bullet((x_0,\cdots,x_N);R)$ : the Koszul complex

とするとき，double complex $C^{\cdot\cdot}=\operatorname{Hom}_R(K_\bullet,L^\cdot)$について考察する。

ここで，2つの filtrations ${}'F_t(C^{\cdot\cdot}) = \sum_{p \geqq t} C^{p,q}$，${}''F_t(C^{\cdot\cdot}) = \sum_{q \geqq t} C^{p,q}$ によるスペクトル系列 $\{{}'E_r^{p,q}\}$，$\{{}''E_r^{p,q}\}$ を考えると，

$${}'E_1^{p,q} = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} H^q(\mathcal{F}(\ell)) \otimes_R (\wedge^p \sum R e_j^*)$$
$${}''E_1^{p,q} = 0$$

となる。そこで，第一のスペクトル系列を $E_r^{p,q} = {}'E_r^{p,q}$ とおくと，

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} H^q(\mathcal{F}(\ell)) \otimes_R (\wedge^p \sum R e_j^*)$$
$$E_2^{p,0} = H^p((x_0, \cdots, x_N); M)$$
$$E_\infty^{p,q} = 0$$

となる。

すると，次の結果を得る。

定理（[3, Theorem 2.3]）$R$，$M$，$\{E_r^{p,q}\}$ を上のようにするとき，次は同値である。

a) $M$ は，Buchsbaum graded $R$-module である。

b) $r \geqq 0$，$q < m$，$q-r+1 > 0$ を満たす任意の $p, q, r$ に対して，

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1}$$

は，zero map である。

この定理の系として，次を得る。

系（c.f. [3][7]）　R, M を上のようにする。

$$\mathfrak{S} = \{(i, l) \mid 0 < i < m,\ l \in \mathbb{Z},\ H^i(\mathcal{F}(l)) \neq 0\}$$

とするとき，$\mathfrak{S}$ が次の（*）を満たせば，M は Buchsbaum である。

（*）任意の $(i, l), (j, n) \in \mathfrak{S}$ に対して，

$i \geq j$ のとき，$i + l + 1 \neq j + n$ である。

問題　$\mathfrak{S}$ が（*）を満たさないとき，どうなるか。本稿の最後に述べる定理はその一部の解答である。

また，R を多項式環 $S = k[X_0, \cdots, X_N]$ の準同型像とし，$x_0, \cdots, x_N$ もまた $X_0, \cdots, X_N$ の準同型像とする。すると，

$$E_2^{p,0} = \mathrm{Ext}_S^p(k, M)$$

となるが，前定理によって次の系を得る。

系（c.f. [3], [9]）　R, M, S を上のようにすると，

$$\dim_k \mathrm{Ext}_S^p(k, M) \leq \sum_{j=0}^{p} \binom{N+1}{p-j} l_R(H_m^j(M))$$

$$(0 \leq p \leq m)$$

さらに，M が Buchsbaum のとき，上の等号は成り立ち，逆に上の等号が成り立つとき，M は Buchsbaum である。

さて，MとFLC（$\mathcal{F}$が locally Cohen-Macaulay）と仮定しよう。すると，

$$H^q(\mathcal{F}(\ell)) \overset{dual}{\longleftrightarrow} \mathrm{Ext}^{N-q}(\mathcal{F}(\ell), \omega_{\mathbb{P}^N})$$
$$\cong$$
$$H^{m-q}(\mathcal{E}xt^{N-m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{F}(\ell), \omega_{\mathbb{P}^N}))$$

となるので，

$$\mathcal{E}xt^{N-m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^N}) = \mathcal{F}'$$

とおくと，

$$\bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}} H^q(\mathcal{F}(\ell)) \cong \bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}} \left(H^{m-q}(\mathcal{F}'(-\ell))\right)'$$

となる。

よって，Mの canonical dual $M' = \bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}} \Gamma(\mathcal{F}'(\ell))$ のスペクトル系列 $\{F_r^{p,q}\}$ は，Mのスペクトル系列 $\{E_r^{p,q}\}$ の $k$-dual で得られる。このようにして，次のよく知られた結果の別証を得る。

系（c.f. [7] [8]） $R$, $M$, $M'$を上のようにすると，$M$が Buchsbaum であることと，$M'$が Buchsbaum であることは，同値である。

最後に，[4] で予想した Segre Product についての Buchsbaum 判定法について述べる。

まず，Segre Product について復習しよう。R，Sを $k$上の graded rings とし，L，M，Nをそれぞれ有限生成な R-module，

$S$-module とし，$\dim M = m$，$\dim N = n$ とする。$M$，$N$ の Segre Product は，$M \# N = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} M_\ell \otimes_k N_\ell$ で定義する。同様に，$R \# S = \bigoplus_{\ell \geq 0} R_\ell \otimes_k S_\ell$ とすると，$R \# S$ は $k$ 上の graded ring となり，$M \# N$ は $R \# S$-module である。

定理（[5]）$M$ を Cohen-Macaulay graded $R$-module で $\dim M = m \geq 2$ とし，$N$ を Buchsbaum graded $S$-module で，$\dim N = n$，$\operatorname{depth} N \geq 2$ とする。このとき，$M \# N$ が Buchsbaum であるための必要十分条件は，次の ①－④ がすべて満たされることである。

① $a(N) \leq \min\{ d \mid M_d \neq 0 \}$

② $a(M) \leq \min\{ d \mid N_d \neq 0 \}$

③ 任意の $d \in \mathbb{Z}$，$\ell (< n)$ に対して，

$$H^m_{m_R}(M)_{d+\ell} = 0 \quad \text{or} \quad H^\ell_{m_S}(N)_d = 0.$$

④ 任意の $d \in \mathbb{Z}$，$\ell (< n)$ に対して，

$$M_d = 0 \quad \text{or} \quad H^\ell_{m_S}(N)_{d+n-\ell+1} = 0.$$

この定理は，[3] において，"$M \# N$ が Buchsbaum のとき，④が成立" 以外の部分は証明されている。つまり，④が残されていた。

$$H^q_{m_{R\#S}}(M \# N) \cong \begin{cases} (M \# H^q_{m_S}(N)) \oplus (H^m_{m_R}(M) \# H^{q-m+1}_{m_S}(N)) & (q \neq m) \\ (M \# H^m_{m_S}(N)) \oplus (H^m_{m_R}(M) \# N) & (q = m) \end{cases}$$

であるから，前に述べたスペクトル系列でのmapの成分として，

$$M \# H^{q}_{\mathfrak{m}_S}(N) \longrightarrow M \# H^{q'}_{\mathfrak{m}_S}(N)$$

$$M \# H^{q}_{\mathfrak{m}_S}(N) \rightleftarrows H^{m}_{\mathfrak{m}_R}(M) \# H^{q'}_{\mathfrak{m}_S}(N)$$

$$M \# H^{q}_{\mathfrak{m}_S}(N) \rightleftarrows H^{m}_{\mathfrak{m}_R}(M) \# N$$

$$H^{m}_{\mathfrak{m}_R}(M) \# H^{q}_{\mathfrak{m}_S}(N) \longrightarrow H^{m}_{\mathfrak{m}_R}(M) \# H^{q'}_{\mathfrak{m}}(N)$$

$$H^{m}_{\mathfrak{m}_R}(M) \# H^{q}_{\mathfrak{m}_S}(N) \longrightarrow H^{m}_{\mathfrak{m}_R}(M) \# N$$

が出てくるが，このうちでzeroとならない可能性があるのは，

$$H^{m}_{\mathfrak{m}_R}(M) \# H^{q}_{\mathfrak{m}_S}(N) \longrightarrow H^{m}_{\mathfrak{m}_R}(M) \# N$$

$$M \# H^{n}_{\mathfrak{m}_S}(N) \longrightarrow M \# H^{q}_{\mathfrak{m}_S}(N)$$

だけである。つまり，スペクトル系列による判定法によって，上の2つのmapがzeroとなることが，$M \# N$がBuchsbaumとなるための必要十分条件である。実は，上の2つのmapは，定理の条件の③と④にそれぞれ対応している。証明を大まかにいうと，すでに③は示されているが，これは，$H^{q}_{\mathfrak{m}_S}(N) \to N$がnon-zeroということであり，これのdualとして，$H^{n}_{\mathfrak{m}_S}(N) \to H^{q}_{\mathfrak{m}_S}(N)$がnon-zeroを示すというものである。かなり誤解を招くことを覚悟して書いたが，詳しくは，[5]に書くつもりである。

References

[1] Goto-Watanabe : On graded rings I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978)

[2] Fiorentini-Vogel : Old and new results and problems on Buchsbaum modules I, Semin. Geom., Univ. Bologna (to appear)

[3] Miyazaki : Graded Buchsbaum Algebras and Segre Products, Tokyo J. of Math. 12 (1989)

[4] Miyazaki : Buchsbaum環とSegre Product, 第10回可換環論シンポジウム報告集 (1988)

[5] Miyazaki : Buchsbaum property with certain spectral sequences (in preparation)

[6] Stückrad-Vogel : On Segré product and applications, J. Alg. 54 (1978)

[7] Stückrad-Vogel : Buchsbaum Rings and Applications, Springer-Verlag, 1986

[8] Suzuki : Canonical duality for Buchsbaum modules, Bull. Dept. Gen. Educ. Shizuoka Coll. Pharmacy 13 (1984), 47-60.

[9] Yamagishi : Bass number characterization of surjective Buchsbaum modules (preprint)

# Frobenius写像を添加した環

吉野雄二（京大教養）

## 1. Introduction

標数 $p > 0$ の tight closure の理論が、Hochster-Huneke によって始められ、homological conjecture や有理特異点の理論にめざましい発展がもたらされたことは記憶に新しい。ここでは、tight closure の理論がその定義を含めてもっと理論的にきれいな形で統制できるのではないかと思い表題にいうような環を考えてみた。その結果を、まだ一部分であるが、紹介してみようと思う。

以下 $(R, \mathfrak{m}, k)$ を標数 $p > 0$ の Noether 局所環で、$k$ を無限体と仮定する。$R$ 上の Frobenius 写像を $f$ で表し、アーベル群としての $R$ の準同型環の部分環で、$R$ (= $R$ の元倍写像) と $f$ で生成された部分環を $A_R$ または単に $A$ と書くことにする。ひとまず、この環に関する環論的な性質を明らかにすることを考えてみたい。$A$ の元には次のような基本的関係式があることは明かであろう。

$$r^p f = fr \qquad (r \in R)$$

したがって、左 $R$ 加群とみて $A = \sum_{n \in \mathbf{N}} Rf^n$ と書くことができる。次の命題はこれが実は直和であることを示している。

命題 1.

$$A \simeq R[X; f]$$

但し右辺は $R$ 上の skew polynomial ring を表わす。特に $A$ は次数付き環である。

この命題 1 には $R$ の剰余体 $k$ が無限体であることが必要である。実際、もし $R$ が有限体 $\mathbf{F}_{p^e}$ であるときには $f^e = 1$ であるから、命題 1 は成り立たない。

次に環 $A$ の Noetherian property について考えてみる。

命題 2．(1) $A$ が左 Noether 環 $\Longleftrightarrow$ $R$ が体。
(2) $R$ が整域の時、$A$ が右 Noether 環 $\Longleftrightarrow$ $R$ が完全体。

証明: 簡単に (1) の証明を記しておく。

もし $R$ が体ならば、$A$ の元は $R$ の元を係数に持つ $f$ の多項式である。実はこの場合には Euclid の互除法と同じ事ができて、$A$ の左イデアルは皆単項生成であることがわかる。

そこで $R$ が体ではない局所環としよう。この時、$R$ の non unit $r \neq 0$ をひとつ取る。$A$ の部分集合 $rA = \{ra|\ a \in A\}$ が $A$ の左イデアルであることは容易に分かる。この $rA$ は左 $A$ 加群として可算無限個の元 $\{rf^i|\ i \geq 0\}$ で生成され、決して有限生成にならないことが証明できる。従ってこの場合 $A$ は左 Noether 環ではない。∎

この命題によって、$R$ として高次元の Noether 局所環を考えるとき、$A$ は右 Noether でも左 Noether でもないのである。

しかし両側イデアルについては状況はもっと良い。

命題 3．$A$ の両側イデアルはすべて graded である。

もっと詳しく、$A$ の部分集合 $I$ が $A$ の両側イデアルである $\Longleftrightarrow$ $R$ のイデアルの昇鎖列 $\{I_n\}$ があって、$I = I_0 + I_1 f + I_2 f^2 + \cdots + I_n f^n + \cdots$。

証明: 簡単に証明を与えておこう。$\Longleftarrow$ は明かであろう。

$\Longrightarrow$ を示すために、$A$ の任意の元 $z = \sum_{i=0}^{n} r_i f^i \quad (r_i \in R)$ を取る。$z \in I$ の時に $r_i f^i \in I \quad (0 \leq i \leq n)$ となることを示せば充分である。(実際この時 $I_n = \{r \in R|\ rf^n \in I\}$ とおけばよい。)

$n$ についての帰納法でこのことを示そう。$n = 0$ のときには明らかなので、$n \geq 1$ とする。$I$ は両側イデアルなので、任意の $x \in R$ について、$x^{p^n}z,\ zx$ は $I$ の元である。

$$
\begin{aligned}
x^{p^n} z &= r_0 x^{p^n} + r_1 x^{p^n} f + \cdots + r_n x^{p^n} f^n \\
zx &= r_0 x + r_1 x^p f + \cdots + r_n x^{p^n} f^n
\end{aligned}
$$

であるから、これらの差をとって $I$ は次の元を含んでいる。

$$
r_0(x - x^{p^n}) + r_1(x^p - x^{p^n}) f + \cdots + r_{n-1}(x^{p^{n-1}} - x^{p^n}) f^{n-1}
$$

よって帰納法の仮定により、$0 \leq i \leq n-1$ と $x \in R$ のときに、$r_i(x^{p^i} - x^{p^n}) \in I$ となることが分かった。ここで $R$ の剰余体が無限体であることから、各 $x^{p^i} - x^{p^n}$ が $R$ の unit であるように $x$ を選ぶことができるので、$r_i \in I$ が出る。∎

さて、左 $A$ 加群とは $R$ 加群 $M$ であって $f$ が左から作用し、

$$
frm = r^p fm \quad (r \in R,\ m \in M)
$$

が成立するようなものに他ならない。まったく同様に、右 $A$ 加群は $R$ 加群 $M$ であって $f$ が右から作用し、

$$mr^p f = mfr \quad (r \in R,\ m \in M)$$

が成立するものである。

例 1．(1) $R$ 加群 $R$ に $f$ が 0 写像として作用するとき、これを $R_0$ と書くことにする。容易に分かるように、左 $A$ 加群として $R_0 \simeq A/Af$ である。

(2) $R$ に $f$ が普通に Frobenius 写像として作用するときには、これを $R_1$ と書く。すると左 $A$ 加群として $R_1 \simeq A/A(f-1)$ である。

(3) $R^\infty = \bigcup_n R_{red}^{\frac{1}{p^n}}$ と置く。$fx = x^p$ によって $f$ の左からの作用を定義するとき、もちろん $R^\infty$ は左 $A$ 加群と見ることができる。一方、$f$ の右からの作用を $xf = x^{\frac{1}{p}}$ と与えて、$R^\infty$ は右 $A$ 加群にもなる。

環 $A$ を元 $f$ で局所化することを考えることができる。但し、左局所化 ${}_fA$ と右局所化 $A_f$ があるので注意。

定義 1．$S = \{f^n |\ n \in \mathbf{N}\}$ と置く。

(1)
$$A_f = A \times S/\sim_r$$

但し、$(a, f^n) \sim_r (b, f^m) \iff af^{\ell+m} = bf^{\ell+n}\ (\ell \gg 0)$ である。更に、$(a, f^n)$ の $A_f$ における類を $af^{-n}$ と書くことにする。

(2)
$${}_fA = S \times A/\sim_\ell$$

但し、$(f^n, a) \sim_\ell (f^m, b) \iff f^{r+m}a = f^{r+n}b\ (r \gg 0)$ である。更に、$(f^n, a)$ の ${}_fA$ における類を $f^{-n}a$ と書く。

命題 4．左 $R$ 加群として、

$$A_f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Rf^n, \quad {}_fA = \sum_{n\in\mathbb{Z}} R^\infty f^n$$

である。${}_fA$ は環になるが、$A_f$ は環にはならない。

左 $A$ 加群 $M$ を $f$ で左から局所化すると、左 ${}_fA$ 加群 ${}_fM$ が得られる。

例 2．左 ${}_fA$ 加群として、${}_f(R_1)$ は $R^\infty$ に同型である。同型写像 $\varphi : {}_f(R_1) \to R^\infty$ は $\varphi(f^{-n}r) = \bar{r}^{\frac{1}{p^n}}$ で与えられる。ここで、$\bar{r}$ は $r \in R$ の $R_{red}$ における像を表わしている。

補題 1．
(1) ${}_fA$ は右 $A$ 加群として flat である。

(2) 任意の左 $A$ 加群 $M$ に対して、左 ${}_fA$ 加群としての同型 ${}_fM \simeq {}_fA \otimes_A M$ がある。

このことを使っていままで知られていた $R^\infty$ に関するいくつかのことが見易くなる。たとえば、

例 3. $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ を $R$ のパラメータ系とするとき、各 $i$ $(0 \le i \le d)$ について、

$$(x_i^\infty) = \bigcup_{n \ge 0} \overline{x}_i^{\frac{1}{p^n}} R^\infty \ \subset \ R^\infty$$

と置く。但し、$\overline{x}$ は $R$ の元 $x$ の $R_{red}$ における像を表わしている。更に、$R^\infty$ 加群の鎖複体：

$$C_\cdot^\infty = \bigotimes_{i=1}^{d} (0 \longrightarrow (x_i^\infty) \longrightarrow R^\infty \longrightarrow 0)$$

を考える。この時、Hochster はこの複体が acyclic であることを証明している。([1] を見よ。)

これは上記の例 2 と補題 1 を使って次のように考えると良いと思う。まず、左 $A$ 加群の自然な埋め込み $x_iR_1 \subset R_1$ を $f$ で左から局所化すると、${}_f(x_iR_1) \simeq (x_i^\infty) \subset {}_fR_1 \simeq R^\infty$ となることが容易に分かる。そこで、左 $A$ 加群の鎖複体：

$$C_\cdot = \bigotimes_{i=1}^{d} (0 \longrightarrow x_iR_1 \longrightarrow R_1 \longrightarrow 0)$$

を考えるとき、上の事から ${}_f(C_\cdot) \simeq C_\cdot^\infty$ となることが分かる。そこで補題 1 によって、$C_\cdot^\infty$ が acyclic を言うためには、$H_i(C_\cdot)$ $(i > 0)$ 上に $f$ がべき零に作用することを言えば良い。ところがこれは容易である。

$R$ の乗法的に閉じた集合で $A$ を局所化するときには、次のようなことが言える。

命題 5. $S$ が $R$ の乗法的に閉じた集合の時、$A_{S^{-1}R} \simeq S^{-1}R \otimes_R A \simeq A \otimes_R S^{-1}R$。

さて、任意の $x \in R$ に対して局所化 $R_x$ には $f$ が通常の Frobenius 写像として作用する：$f(r/x^n) = (r/x^n)^p$ $(r/x^n \in R_x)$。この作用によって、$R_x$ を左 $A$ 加群とみたとき、それを $(R_x)_1$ と記すことにする。この時、左 $A$ 加群としての全射準同型 $\varphi : A \longrightarrow (R_x)_1$ が $\varphi(\sum_i r_i f^i) = \sum_i r_i/x^{p^i}$ によって定義され、その核は：

$$J(x) = A\{x^{p^i - 1} f^i - 1 |\ i \ge 0\}$$

に等しい。即ち、左 $A$ 加群としての同型 $A/J(x) \simeq (R_x)_1$ を得る。

更に、もし $x, y \in R$ のときには、自然な写像 $R_x \longrightarrow R_{xy}$ は左 $A$ 加群の準同型になることが容易に分かり、つぎの左 $A$ 加群の可換図式があることが確かめられる。

$$\begin{array}{ccc} A/J(x) & \xrightarrow{\text{right multiplication by } y} & A/J(xy) \\ \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\ (R_x)_1 & \xrightarrow{\text{natural}} & (R_{xy})_1 \end{array}$$

これらの事実から、もし $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ が $R$ のパラメータ系であるとき、それらから作った Čeck 複体にも自然に左 $A$ 加群の複体としての構造が入ることが分かり、とくに最高次の homology は上記の同型によって容易に $A$ 加群としての表示を求めることができる。結果は次の通りである。

命題 6．$R$ の $\mathfrak{m}$ を support に持つ local cohomology $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(R)$ には左 $A$ 加群としての構造が入る。特に、$d = \dim(R)$ のとき、$\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ が $R$ のパラメータ系ならば、

$$\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R) \simeq A/A\{\xi^{p^i-1}f^i - 1 |\ i \in \mathbf{N}\} + A(x_1, x_2, \ldots, x_d)$$

但し、$\xi = x_1 \cdot x_2 \cdots x_d$。

この表記は $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R) \neq 0$ と標数 p の monomial conjecture が同じであることを示している。

## 2. Tightly associated ideals and weak F-regularity

以下 $M$ は左 $A$ 加群とする。任意の部分左 $A$ 加群 $N$ に対して、$\mathrm{Ann}(N) = \{a \in A |\ aN = 0\}$ を考える。これは $A$ の両側イデアルなので、命題 3 より $R$ のイデアルの昇鎖列 $\{I_n\}$ があって、$\mathrm{Ann}(N) = \sum_n I_n f^n$ となっている。そこで、$\mathfrak{a}(N) = \cup_n I_n$ と定義する。

定義 2．

$$\mathrm{Asst}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \cup \{R\} |\ \mathfrak{p} = \mathfrak{a}(Ax) \text{ for some } x \neq 0 \in M\}$$

$\mathrm{Asst}(M)$ の元を $M$ の tightly associated ideal と呼ぶ。

例えば、$R$ が reduced の時には、$\mathrm{Asst}(R_1) = \mathrm{Ass}_R(R)$。ところが reduced でないときには、$\mathrm{Asst}(R_1) = \{R\} \cup \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R) |\ \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = 0\}$ である。このことは、$R_1$ の任意の元 $x$ について $\mathfrak{a}(Ax) = \mathrm{Ker}(R \longrightarrow R_x)$ であることから従う。

命題7．$\mathfrak{a}(Ax)$ $(x \neq 0 \in M)$ という形の $R$ のイデアルの中で極大なものは $\mathrm{Asst}(M)$ に属する。特に、$M \neq (0) \iff \mathrm{Asst}(M) \neq \phi$ が成立する。

そのほか Ass のときと同じ様なことの多くが $\mathrm{Asst}(M)$ について成立する。

注意1．
(1) $f$ が $M$ 上非零因子であるための必要充分条件は $R \notin \mathrm{Asst}(M)$ となることである。
(2) $M = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ が graded 左 $A$ 加群であるとき、$\mathfrak{p} \in \mathrm{Asst}(M) \iff \mathfrak{a}(Ax) = \mathfrak{p}$ となる $M$ の homogeneous な元 $x$ がある。

さて、ここでイデアルの tight closure の定義を思いだしておこう。([**2**] 参照)
$\mathfrak{a}$ が $R$ のイデアルのとき、$R$ の元 $x$ が $\mathfrak{a}$ の tight closure $\mathfrak{a}^*$ の元であるとは、

$$\exists c \in R - \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)} \mathfrak{p}, \quad \exists e \in \mathbf{N} \quad \text{such that} \quad cx^{p^n} \in \mathfrak{a}^{[p^n]} \quad \text{for all} \quad n \geq e$$

となることである。ここで、$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_\ell)R$ である時、$\mathfrak{a}^{[p^n]} = (a_1^{p^n}, a_2^{p^n}, \ldots, a_\ell^{p^n})R$ と定義される。$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$ である時、イデアル $\mathfrak{a}$ は tightly closed であると言われる。

$A\mathfrak{a} = \sum_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{a}^{[p^n]} f^n$ であることに注意すれば、この条件は $cf^eAx \subset A\mathfrak{a}$ と同じであることが分かる。このことを使って次が証明できる。

命題8．$\mathfrak{a}$ が $R$ のイデアルのとき次の2条件は同値。
(1) $\mathfrak{a}^{[p^n]}$ $(n \geq 0)$ がすべて tightly closed。
(2) $\mathrm{Asst}(A/A\mathfrak{a}) \subset \mathrm{Min}(R)$
特に、$R$ が weakly F-regular であるための必要充分条件は上の (2) が全ての $R$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して成立することである。

次に $A$ 上の injective module の構造について分かったことをのべておく。

命題9．$M = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ を graded 左 $A$ 加群とする。$R \notin \mathrm{Asst}(M)$ と仮定するとき、次の2条件は同値である。
(1) $M$ は graded 左 $A$ 加群の圏において injective である。
(2) $M_0$ は injective $R^\infty$ 加群であって、$A$ 加群の同型

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{R^\infty}({}_fA, M_0) \simeq M$$

がある。($M$ には左 ${}_fA$ 加群の構造が入る。)

環 $A$ を考えるとき、実際には左イデアルについての準素分解のようなものがあって、はじめて本質的な意味での新しい応用が考えられるのだと思っている。その意味で、$A$ 上の injective module の構造を明らかにすることは難しいのだが応用を考えるときまず必要になることであろう。以下にいくつかの予想を述べて本稿を終えることにする。

予想.
(1) $I$ が $A$ の左 (graded) イデアルのとき、$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対して $I(\mathfrak{p}) = IA_{\mathfrak{p}} \cap A$ と置く。この時、$A$ の左 (graded) イデアル $J$ で、(a) $I = I(\mathfrak{p}) \cap J$ かつ (b) $K \supsetneq I(\mathfrak{p}) \Longrightarrow K \cap J \supsetneq I$ となるものが存在するであろう。
(2) $M = \sum_n M_n$ が左 graded $A$ 加群の時、$E_R(M) = \sum_n E_R(M_n)$ にも左 graded $A$ 加群の構造が入るであろう。
(3) $E$ が左 injective $A$ 加群、$s \neq 0 \in R$ のとき、$E' = \{x \in E \mid s^n x = 0 \text{ for some } n \geq 0\}$ は明らかに $E$ の $A$ 部分加群である。この $E'$ も左 $A$-injective であろう。

REFERENCES

1. M. Hochster, *Canonical elements in local cohomology modules and the direct summand conjecture*, J. Algebra **84** (1983), 503–553.
2. M. Hochster and C. Huneke, *Tight closures, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem*, Jour. of the A. M. S. **3** (1980), 31–116.

[付記] シンポジウムでの講演終了後、永田雅宜先生より $A$ の Noether 性についての命題 2 がもっと一般化できることを教えていただいた。即ち、$R$ が一般の Noether 環 (局所環とは限らない) で標数 $p > 0$ のとき、$A = R[X; f]$ ( $R$ 上の skew polynomial ring) とする。このとき、次のことが成立する。

命題 2'. (1) $A$ が左 Noether 環 $\Longleftrightarrow$ $R$ は有限個の体の直積。
(2) $A$ が右 Noether 環 $\Longleftrightarrow$ $R$ は Artinian ring で、その任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $R/\mathfrak{m}$ が完全体。

ここに、あらためて永田先生に感謝いたします。

# $\mathbb{Z}$-graded ring の non-negative part について

東海大学理学研究科　奈良亮一

$\mathbb{Z}$-graded ring $U$ に対してその non-negative part を $T$ とするとき、$T$ の環論的性質（具体的には、Cohen-Macaulay Gorenstein 性）について考えたい。

一般に $U = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U_n$，$T = \bigoplus_{n \geq 0} U_n$（$= U_{\geq 0}$ とかく）のとき、$T \cong [U[X]]_0$（但し、$\deg X = -1$）であるので、$T$ は $U[X]$ の pure subring となる。従って $U$ の Noether 性、normal である事は $T$ に遺伝するが、以下に示すように Cohen-Macaulay 性については一般に遺伝しない。以下において、$U = R \otimes S$ という case についてこの事情を調べてみたいと思う。なお、本論での作業内容については、[1]，[2] を読んでいただければさらに納得しやすいと思う。

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether local ring、$\dim A = d$ とし、$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$、$S = \bigoplus_{n \leq 0} S_n$ を $R_0 = S_0 = A$ なる Noether graded ring とする。さらに $U = R \otimes_A S$ とし、このとき

$U$のZ-gradingを次のように定める。

$$U_n = \bigoplus_{i+j=n} (R_i \otimes_A S_j)$$

(同様に、$M=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} M_m$、$N=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} N_m$をそれぞれR-graded module、S-graded moduleとするとき、U-module $L=M\otimes_A N$ のZ-gradingを $L_n=\bigoplus_{i+j=n}(M_i\otimes_A N_j)$ と定める。)さらに、$T=U_{\geqq 0}=\bigoplus_{m\geqq 0} U_m$とし、$\mathfrak{a}=\bigoplus_{m>0} R_n$、$\mathfrak{b}=\bigoplus_{m<0} S_m$
$M_R=\mathfrak{m}R+\mathfrak{a}$、$M_S=\mathfrak{m}S+\mathfrak{b}$、$M_T=\mathfrak{m}T+[\mathfrak{a}\otimes_A S]_{\geqq 0}$
とする。このとき、$H^p_{M_T}(T)$ を計算し、TのCM性や、Gorenstein 性について調べる。もちろん一般にはtensor product の性質はよくわからない。そこでさらに条件を付け加えるわけだが、その前に予備知識として次のような事実に注意しておく。

$R=\bigoplus_{m\geqq 0} R_m$ をNoether. graded ringとし、$\mathfrak{a}$をRの homogeneous ideal、Mをgraded R-module とする。

このとき、Mが$\mathfrak{a}$ に関して

(*) であるとは、 $H^i_{\mathfrak{a}}(M)=\begin{cases} M & (i=0) \\ 0 & (i\neq 0) \end{cases}$

(**) であるとは、

$M=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ ( $N_\lambda$ は graded R-module )

であって、$\forall \lambda\in\Lambda$ について、$\exists b_\lambda\in\mathfrak{a}$ ( $b_\lambda$ は

homogeneous ) s.t.

$b_\lambda : N_\lambda \longrightarrow N_\lambda$ は bijective

とする。（よって、(**) ならば $H^i_{\mathfrak{m}}(M)=0$ 、$\forall i \geq 0$ である。）

もし、$0 \to R \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^n \to \cdots$ が exact sequence であり、各 $I^i$ は (*) または (**) をみたすものの直和であるならば、$H^i_{\mathfrak{m}}(R) = H^i(H^0_{\mathfrak{m}}(I^\bullet))$ である。

上記の事実をもとに、次のような条件を付け加える。

条件（☆）： $S$ は次の (1)〜(3) の条件をみたす graded $S$-module の resolution

$$0 \to S \to J^0 \to J^1 \to \cdots \to J^s \to 0$$

をもつ。

(1) 各 $J^i$ は $A$-flat である。

(2) $J^0, \ldots, J^{s-1}$ は $b$ に関して (**) を、$J^s$ は (*) をみたす。

(3) 各 $n<0$ について、$[J^s]_n = 0$

（このとき、$\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ について、$s = \dim k(\mathfrak{p}) \otimes_A S$ であり、$k(\mathfrak{p}) \otimes_A S$ は C-M、$a(S) < 0$ を意味する。）

われわれの主定理は次の通りである。

定理1　各 $p \geqq 0$ に対し、graded $T$-module の grade を保つ exact seq.

$$0 \to [H^p_{M_R}(R) \underset{A}{\otimes} S]_{\geqq 0} \to H^p_{M_T}(T) \to [H^{p-s}_{M_R}(R) \underset{A}{\otimes} J^s]_{<0} \to 0$$

が存在する。（但し、$(\ )_{\geqq 0}$，$(\ )_{<0}$ はそれぞれ degree non-negative、negative part を意味する。）

Proof　$0 \to R \to I^0 \to \cdots \to I^n \to \cdots$

を graded $R$-module の Category での minimal injective resolution とすると、（※）により、

$$0 \to R \underset{A}{\otimes} S \to I^{\bullet} \underset{A}{\otimes} J^{\bullet}$$

は exact seq. となり、従って、

$0 \to T \to [I^{\bullet} \underset{A}{\otimes} J^{\bullet}]_{\geqq 0}$ は graded $T$-module の exact seq. である。

そこで $H^p_{M_T}(T)$ を次の $H^0_{M_T}(\ )$ と $[I^{\bullet} \underset{A}{\otimes} J^{\bullet}]_{\geqq 0}$ に関する hyper Cohomology の Spectral sequence を用いて求めたい。

$$E_2^{p,q} = H^p(H^q_{M_T}([I^{\bullet} \underset{A}{\otimes} J^{\bullet}]_{\geqq 0})) \Longrightarrow H^{p+q}_{M_T}(T)$$

まず、$H^q_{M_T}([I^{\bullet} \underset{A}{\otimes} J^{\bullet}]_{\geqq 0})$ を求めたい。このとき、次の事

に注意する。

各$I^j$は次の形のgraded R-moduleの直和である。

$$E = E_R(R/\mathfrak{p})$$

（$\mathfrak{p}$はRのhomog、prime ideal、$E_R(\ )$はgraded R-moduleのCategoryでのinjective envelope）

ここでまず、各Eをprime ideal $\mathfrak{p}$の性質により、次の(1)〜(4)のtypeに分類する。

(1) $\mathfrak{p} = M_R$ (2) $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{n}$, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}$

(3) $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{n}$, $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{m}$ (4) $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{n}$, $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{m}$

さらにそれにより、各$I^j$を次のように分解する。

$$I^j = {}^{(1)}I^j \oplus {}^{(2)}I^j \oplus {}^{(3)}I^j \oplus {}^{(4)}I^j$$

（但し、${}^{(n)}I^j$は$I^j$の直和因子のうちで、type$(n)$のもの全部の直和）

よってこのとき次のようなComplexが作れる。

$${}^{(1)}I^{\bullet} : 0 \to {}^{(1)}I^0 \to {}^{(1)}I^1 \to \cdots {}^{(1)}I^n \to \cdots$$

$${}^{(1,2)}I^{\bullet} : 0 \to {}^{(1)}I^0 \oplus {}^{(2)}I^0 \to \cdots \to {}^{(1)}I^n \oplus {}^{(2)}I^n \to \cdots$$

$${}^{(2)}I^{\bullet} := \mathrm{Coker}\left({}^{(1)}I^{\bullet} \longrightarrow {}^{(1,2)}I^{\bullet}\right)$$

また仮定から、$J^{\bullet}$からも2つのComplexが作れる。

$${}''J^{\bullet} : 0 \to J^0 \to \cdots \to J^{s-1} \to 0$$

$${}'J^{\bullet} : 0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to J^s \to 0$$

こうして、$H^{\mathfrak{q}}_{M_T}([I^{\bullet} \otimes_A J^{\bullet}]_{\geq 0})$を計算する際に、$[I^j \otimes_A J^i]_{\geq 0}$

を $4\times 2=8$ つの part に分解して計算する。そこでさらに次の lemma を用意する。

Lemma 2　$\mathfrak{q}$ を $R$ の homog. prime ideal とし、$E=E_R(R/\mathfrak{q})$ とする。また $N=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}N_n$ を graded $S$-module で、(*) または (**) をみたすものとする。このとき、$W=E\otimes_A N$ とおくと $\mathfrak{q}$ が (1)〜(4)、$N$ が (*), (**) のそれぞれの case について次が成立する。

| $N \backslash E$ | (1) | (2) | (3, 4) |
|---|---|---|---|
| (*) | $W_{\geqq 0}$ は $M_T$ に関し (*) | $H^p_{M_T}(W_{\geqq 0})=\begin{cases} W_{<0} & (p=1) \\ 0 & (p\neq 1)\end{cases}$ | $W_{\geqq 0}$ は $M_T$ に関し (**) |
| (**) | | $W_{\geqq 0}$ は $M_T$ に関し (**) | |

この lemma から $H^q_{M_T}([I^\bullet\otimes_A J^\bullet]_{\geqq 0})$, $E_2^{p,q}$ を計算すると、

$q=0$ のとき、

$$H^0_{M_T}([I^\bullet\otimes_A J^\bullet]^p_{\geqq 0}) = \bigoplus_{i+j=p} H^0_{M_T}([I^i\otimes_A J^j]_{\geqq 0})$$
$$= \bigoplus_{i+j=p} [{}^{(1)}I^i\otimes_A J^j]_{\geqq 0}$$

$$= \left[{}^{(1)}I^{\bullet} \underset{A}{\otimes} J^{\bullet}\right]^{p}_{\geqq 0}$$

よって、 $E_2^{p,0} = [H^p({}^{(1)}I^{\bullet} \underset{A}{\otimes} J^{\bullet})]_{\geqq 0}$

ところで、 $H^p({}^{(1)}I^{\bullet}) = H^p_{M_R}(R)$

$$H^i(J^{\bullet}) = \begin{cases} S & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

であるから、Künneth formula により、

$$E_2^{p,0} = [H^p_{M_R}(R) \underset{A}{\otimes} S]_{\geqq 0}$$

同様に、$q = 1$ のとき、

$$E_2^{p,1} = [H^{p-s}({}^{(2)}I^{\bullet}) \underset{A}{\otimes} J^s]_{<0}$$

さらに、complex の exact seq.

$$0 \longrightarrow {}^{(1)}I^{\bullet} \longrightarrow {}^{(1,2)}I^{\bullet} \longrightarrow {}^{(2)}I^{\bullet} \longrightarrow 0$$

による homology の long exact seq.

$$\begin{aligned}
0 \to\ & H^0({}^{(1)}I^{\bullet}) \to H^0({}^{(1,2)}I^{\bullet}) \to H^0({}^{(2)}I^{\bullet}) \\
& \vdots \\
\to\ & H^p({}^{(1)}I^{\bullet}) \to H^p({}^{(1,2)}I^{\bullet}) \to H^p({}^{(2)}I^{\bullet}) \\
\to\ & H^{p+1}({}^{(1)}I^{\bullet}) \to \cdots
\end{aligned}$$

を得る。

ここで、 $H^p({}^{(1,2)}I^{\bullet}) = H^p_{\mathfrak{M}}(R) \cong \bigoplus_{n \geqq 0} H^p_{\mathfrak{M}}(R_n)$

$J^s$ は $A$-flat かつ $[J^s]_n = 0$ $(\forall n < 0)$

$H^i({}^{(1)}I^{\bullet}) = H^i_{M_R}(R)$

に注意すると、

$$E_2^{p,1} = \left[H_{M_R}^{p+1-s}(R) \otimes_A J^s\right]_{<0}$$

である。

また、$q \geqq 2$ のときは、Lemma 2 より、$E_2^{p,q} = 0$ である。

また、$d_2^{p,1} : E_2^{p,1} \longrightarrow E_2^{p+2,0}$ は graded $T$-module の degree 0 の map で、$E_2^{p,1} = \left[E_2^{p,1}\right]_{<0}$、$E_2^{p+2,0} = \left[E_2^{p+2,0}\right]_{\geqq 0}$ であるから $d_2^{p,1} = 0$ である。（よって $\forall p, q$ について、$d_2^{p,q} = 0$ である。）

ゆえに、$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ となり、

$$0 \to \left[H_{M_R}^p(R) \otimes_A S\right]_{\geqq 0} \to H_{M_T}^p(T) \to \left[H_{M_R}^{p-s}(R) \otimes_A J^s\right]_{<0} \to 0$$

となる。 q.e.d.

この結果から例えば次のようなことが言える。

例0 （☆）のとき、

$R$ が C-M、$a(R) < 0$ ならば、

$T$ は C-M である。

例1 $S = A[X_1, \cdots, X_s]$, $\deg X_i = -1$ とする。
このとき、Čech complex により、$S$ の resolution

$$0 \to S \to \tilde{C}^0 \to \tilde{C}^1 \to \cdots \to \tilde{C}^s \to 0$$

が得られる。ここで $\tilde{C}^n := \bigoplus_{\# I = n} \tilde{C}_I$ で、$I \subset \{1, \cdots, s\}$ について、$\tilde{C}_I := X_{j_1}^{-1} \cdots X_{j_n}^{-1} A[X_1^{-1}, \cdots, X_s^{-1}, X_{k_1}, \cdots, X_{k_{s-n}}]$

（但し、$I = \{j_1, \cdots, j_n\}$, $\{1, \cdots, s\} \setminus I = \{k_1, \cdots, k_{s-n}\}$ とする。）である。このとき、明らかに（☆）が満足され、したがって定理1より、

$$0 \to [H_{M_R}^p(R) \otimes_A S]_{\geq 0} \to H_{M_T}^p(T) \to [H_{M_R}^{p-s}(R) \otimes_A \tilde{C}^s]_{<0} \to 0$$

よって $S$、$\tilde{C}^s$ の定義から次のことがわかる。

$\dim T = \dim R + s$ とする。このとき、

$$
\begin{aligned}
T \text{ が C-M} &\iff H_{M_T}^p(T) = 0, \ \forall p \leq \dim T - 1 \\
&\iff [H_{M_R}^p(R)]_n = 0 \begin{pmatrix} \forall p < \dim R \\ \forall n \neq -1, \cdots, -s \end{pmatrix} \\
&\qquad \text{かつ} \quad a(R) < 0
\end{aligned}
$$

また、$R$ の filtration $F = \{F_n\}_{n \geq 0}$, $F_n = \bigoplus_{i \geq n} R_i$ に対して $R^\natural := \mathcal{R}(F)$（$F$ による Rees ring）とする。$s = 1$ のとき、$T = R^\natural$ となる。従って上の結果は西田氏の $R^\natural$ に関する結果（cf. [3]）の別証明になっている。

さらに、$S$ が多項式環の場合に限らず、$S$ が normal な semigroup ring の場合でも $S$ の resolution で（☆）

をみたすものがとれる。その結果同様に $T$ が C−M であるための条件がわかる。

次に $T$ が Gorenstein ring になるための条件を考えてみる。

例2　　$A = k$ ( field )

$R = k[X_1, \dots, X_r]$ ( $\deg X_i = 1$ )

$S = k[Y_1, \dots, Y_s]$ ( $\deg Y_j = -1$ )

とする。

このとき、明らかに $\dim T = r+s$ 、$T$ は C−M でありさらに、

$$H^{r+s}_{M_T}(T) = [\,\tilde{\mathcal{C}}^r_X \otimes_k \tilde{\mathcal{C}}^s_Y\,]_{<0}$$

$$= [X_1^{-1}\cdots X_r^{-1}k[X_1^{-1},\dots,X_r^{-1}] \otimes_k Y_1^{-1}\cdots Y_s^{-1}k[Y_1^{-1},\dots,Y_s^{-1}]]_{<0}$$

$$\cong [[k[X_1^{-1},\dots,X_r^{-1}] \otimes_k k[Y_1^{-1},\dots,Y_s^{-1}]]_{\leq r-s-1}](r-s)$$

よって　　$K_T \cong [[R \otimes_k S]_{\geq s-r+1}](s-r)$

となり、

$T$ が Gorenstein ring

$\Longleftrightarrow K_T \cong T(h)$ ( $\exists h \in \mathbb{Z}$ )

$\Longleftrightarrow s-r+1 = 0 \Longleftrightarrow r = s+1$

一般に $R$, $S$ が Gorenstein ring、$S$ は(☆)をみたし $a(R)=a(\widetilde{S})-1$ のとき、$T$ は gS-Gorenstein ring（即ち、$K_T$ は $T$-free）である。
（但し、$\widetilde{S}$ は $\widetilde{S}_n=S_{-n}$ と $S$ の grading を逆転させた graded ring とする。）

ところで、今までは $R$ は任意、$S$ に強い条件をつけたが、今度は $S$ を任意、$R$ に次のような条件をつける。

条件(☆☆)：　$R$ は次の(1),(2)（(3)はない）をみたす graded $R$-module の resolution

$$0 \to R \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^r \to 0$$

をもつ。

(1) 各 $I^i$ は $A$-flat である。

(2) $I^0, \cdots, I^{r-1}$ は $\mathfrak{m}$ に関して(＊＊)を、$I^r$ は(＊)をみたす。

このとき、

定理3　各 $p \geq 0$ に対し、graded $T$-module の grade を保つ次のような exact seq. が存在する。

ア）$r=1$ のとき

$$0 \to [I^1 \otimes_A H^{p-1}_{\mathfrak{m}}(S)]_{\geq 0} \to H^p_{M_T}(T) \to [I^0 \otimes_A H^{p-1}_{M_S}(S)]_{<0} \to 0$$

イ）$r \geq 2$ のとき

$$0 \longrightarrow \left[ I^k \underset{A}{\otimes} H_{\mathfrak{m}}^{p-k}(S) \right]_{\geqq 0} \longrightarrow H_{M_T}^{p}(T)$$
$$\longrightarrow \left[ \left( R \underset{A}{\otimes} H_{M_S}^{p-1}(S) \right) \oplus \left( I^k \underset{A}{\otimes} H_{M_S}^{p-k}(S) \right) \right]_{<0} \longrightarrow 0$$

よって同様にして T が C-M、Gorenstein ring になるための条件がわかる。

なお、この仕事は渡辺敬一氏と奈良亮一の共同である。また、講演の時には、

$$H_{M_T}^{p}(T) = \left[ H_{M_R}^{p}(R) \underset{A}{\otimes} S \right]_{\geqq 0} \oplus \left[ H_{M_R}^{p-s}(R) \underset{A}{\otimes} J^s \right]_{<0}$$

としたが、宮崎誓氏に注意されたようにまだ直和分解の証明は得られていないので、定理は上記の形で書いた。現在、この short exact sequence が split するかどうかはわからない。

References

[1] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings, I, J. Math. Soc Japan, 30 (1978) 172 – 213

[2] S. Goto, K. Watanabe
On graded rings, II, Tokyo J. Math. 1
(1978) 237-261

[3] K. Nishida, S. Goto 本報告集

ある Semigroup Ring の Defining Ideal について

鴨井 祐二

東海大 理

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ とし、$r, n \in \mathbb{N}$ $(r > 0)$ について

$$H = \sum_{i=1}^{r+n} \mathbb{N} h_i \subset \mathbb{N}^r$$

但し、$h_1, \ldots, h_r$ は $\mathbb{Q}$ 上 linearly independent でかつ $^{\exists} d > 0$ such that $dH \subset \sum_{i=1}^{r} \mathbb{N} h_i$ とする。更に、次の field $k$ 上の polynomial ring の写像を与える。

$$\varphi : S = k[X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_n] \longrightarrow k[t_1, \ldots, t_r]$$

$$\text{by } \varphi(X_i) = t^{h_i} \ (1 \leq i \leq r), \quad \varphi(Y_j) = t^{h_{r+j}} \ (1 \leq j \leq n)$$

とする。

このとき、

$$k[H] = \mathrm{Im}(\varphi), \quad I_H = \ker(\varphi)$$

とおく。

**Remark.** $r = \dim k[H]$ かつ $n = \mathrm{ht}\, I_H$ となる。

このとき、次を考える。

- $k[H]$ が Cohen-Macaulay ring (以下、C-M) と成るための条件を Gröbner basis の言葉で述べる。
- $\mathrm{ht}\, I_H = 2$ (i.e. $n = 2$) のとき $k[H]$ が C-M となる $I_H$ の生成元を決める。
- 3-dimensional projective space 内の monomial curve の座標環を与える semigroup ring の C-M 性を特徴づける。

## 1 準備

$M(S) = \{S$ の monomial$\}$ とする。

**Definition.** $M(S)$ 上の全順序 ">" が次を満たすとき $S$ の monomial ordering と言う。かってな $m_1, m_2, m_3 \in M(S)$ について、

$$\begin{aligned} 1 \neq m_1 &\implies 1 < m_1 \\ m_1 < m_2 &\implies m_1 m_3 < m_2 m_3 \end{aligned}$$

**Remark.** ">" を $S$ の monomial ordering とする。

1) $m, m' \in M(S)$ について、$m$ が $m'$ を割り切るとき $m \leq m'$

2) かってなに " >" 関する降下列は、有限。従って $M(S)$ の non empty subset は、smallest element をもつ。

**例** $h = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbf{N}^r$ について、

$$d(h) := \sum_{i=1}^{r} a_i$$

として $S$ の monomial の degree を

$$\deg(X_i) = d(h_i)\ (1 \leq i \leq r), \quad \deg(Y_j) = d(h_j)\ (1 \leq j \leq n)$$

で定める。このとき、$X^\alpha Y^\beta < X^\gamma Y^\delta$ を次の様に定義する。

$$\deg(X^\alpha Y^\beta) < \deg(X^\gamma Y^\delta)$$

であるか又は、

$$\deg(X^\alpha Y^\beta) = deg(X^\gamma Y^\delta)$$

であって

$$1 \leq^{\exists} i \leq r+n \text{ such that } a_j = b_j (j < i), \quad a_i > b_i.$$

ただし、$(\alpha, \beta) = (a_1, \ldots, a_{r+n}) \in \mathbf{N}^{r+n}$, $(\gamma, \delta) = (b_1, \ldots, b_{r+n}) \in \mathbf{N}^{r+n}$.

このとき、"<" は $S$ の monomial ordering と成る。この monomial ordering を weight $(d(h_1), \ldots, d(h_{r+n}))$ に関する graded inverse lexicographic ordering (以下、GIL-ordering) という。特に、weight $(1, \ldots, 1)$ に関する GIL-ordering を total degree に関する GIL-ordering と呼ぶ。

以下、$S$ には適当な monomial ordering "<" が入っているとする。
$f \in S$, $F \subset S$ について、

- $f$ の initial term を $in(f) = f$ の "<" に関する maximal term
- $F$ の initial term を $in(F) = \{in(F) \mid f \in F\}$

と定める。

**Definition.** $S$ の ideal $I$、$I$ の finite suset $F$ について

$$< in(I) >=< in(F) >$$

を満たすとき $F$ を $I$ の Gröbner basis という。特に、$I$ の Gröbner basis $F$ について、$in(F)$ が $< in(I) >$ の minimal basis のとき $F$ を $I$ の minimal Gröbner basis と呼ぶ。このとき、$I =< F >$ であることが知られている。(cf. [3])

## 2 C-M 性について

$$\begin{aligned} \Sigma(m) &= \{m' \in M(S) \mid m - m' \in I_H,\ m > m'\} \text{ for } m \in M(S) \\ \mathcal{R}_H &= \{m - m' \in I_H \mid m' \in \Sigma(m),\ Gcd(m, m') = 1\} \\ \mathcal{F}_H &= \{f \in \mathcal{R}_H \mid in(f) = Y^\alpha, {}^\exists \alpha \in \mathbf{N}^n\} \end{aligned}$$

とおくと

$$I_H =< \mathcal{R}_H > \text{ かつ } < in(I_H) >=< in(\mathcal{R}_H) >$$

である。このとき次が成り立つ。

**Theorem 2.1.**

1) $< in(\mathcal{F}_H) >=< in(I_H) >$

2) $k[H]$ が C-M

について、

- 1) $\Rightarrow$ 2) が成り立つ。
- $S$ の monomial ordering が次の条件 (M) を満たすとき 2) $\Rightarrow$ 1) も成り立つ。
  (M) $Y^\alpha - X^\beta Y^\gamma \in I_H, \beta \neq 0$ ならば $Y^\alpha > X^\beta Y^\gamma$

このとき、$I_H$は、$\mathcal{F}_H$で生成される。

theorem 2.1. の証明のために次を用いる。

**Theorem** (cf. [1]) 次は、同値。

1) $k[H]$ is C-M.

2) For any $u,\ v \in H$ with $u + h_i = v + h_j (1 \leq i \neq j \leq r)$,

$$u - h_j = v - h_i \in H.$$

上の theorem の条件 2) を $I_H$ の元で書き換えれば次の 命題 と成る。

**Proposition 2.2.** 次は、同値。

1) $k[H]$ is C-M.

2) $X_i X^\alpha Y^\beta - X_j X^\gamma Y^\delta \in I_H$ with $\alpha_{(j)} = \gamma_{(i)} = 0\ (1 \leq i \neq j \leq r)$ について、

$$^\exists Y^\beta - X_j X^{\alpha'} Y^{\beta'} \in I_H \text{ かつ } ^\exists Y^\gamma - X_i X^{\gamma'} Y^{\delta'} \in I_H$$

3) $X_i X^\alpha Y^\beta - X_j X^\gamma Y^\delta \in I_H$ with $\alpha_{(j)} = \gamma_{(i)} = 0\ (1 \leq i \neq j \leq r)$ について、

$$^\exists Y^\beta - X_j X^{\alpha'} Y^{\beta'} \in I_H \text{ 又は } ^\exists Y^\gamma - X_i X^{\gamma'} Y^{\delta'} \in I_H$$

($\alpha \in \mathbb{N}^r$ について、$\alpha$ の i 番目の成分を $\alpha_{(i)}$ であらわす。)

**Proof of Theorem 2.1.**

2) $\Longrightarrow$ 1): $X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in \mathcal{R}_H$ with $\alpha \neq 0$ について、条件 (M) より $\gamma \neq 0$ でなければならない。$Gcd(X^\alpha Y^\beta,\ X^\gamma Y^\delta) = 1$ だから、

$$i,\ j \in \{1, \ldots, r\},\ i \neq j \text{ s.t. } \alpha_{(i)} > \gamma_{(i)} = 0 \text{ and } \alpha_{(j)} = 0 < \gamma_{(j)}$$

が見つかる。従って、Proposition 2.2. より

$$^\exists Y^\beta - X_j X^{\alpha'} Y^{\beta'} \in I_H$$

このとき、条件 (M) より $Y^\beta > X_j X^{\alpha'} Y^{\beta'}$ である。従って

$$X^\alpha Y^\beta \ \in < in(\mathcal{F}_H) >$$

だから

$$< in(\mathcal{R}_H) > = < in(\mathcal{F}_H) >$$

1) $\Longrightarrow$ 2): 条件 1) は、次の条件 4) と同値である。

$$4)\ \ \Sigma(X^\alpha Y^\beta) \neq \emptyset\ (\alpha \neq 0) \implies \Sigma(Y^\beta) \neq \emptyset$$

ここで、$X_i X^\alpha Y^\beta - X_j X^\gamma Y^\delta \in I_H$ with $\alpha_{(j)} = \gamma_{(i)} = 0\ (1 \leq i \neq j \leq r)$ について、

$$\Sigma(X_i X^\alpha Y^\beta) \neq \emptyset \text{ or } \Sigma(X_j X^\gamma Y^\delta) \neq \emptyset$$

だから上の条件より

$$\Sigma(Y^{\beta}) \neq \emptyset \text{ or } \Sigma(Y^{\delta}) \neq \emptyset$$

このとき、

$$^{\exists}X^{\alpha'}Y^{\beta'} \in \Sigma(Y^{\beta}) \ s.t. \ \alpha'_{(j)} > 0 \text{ or } ^{\exists}X^{\gamma'}Y^{\delta'} \in \Sigma(Y^{\delta}) \ s.t. \ \gamma'_{(i)} > 0$$

が示せれば Proposition 2.2. より $k[H]$ は Cohen-Macaulay と成る。そこで、これを否定して矛盾を導く。即ち、

$$\text{if } X^{\alpha'}Y^{\beta'} \in \Sigma(Y^{\beta}), \text{ then } \alpha'_{(j)} = 0 \text{ and if } X^{\gamma'}Y^{\delta'} \in \Sigma(Y^{\delta}), \text{ then } \gamma'_{(i)} = 0$$

とする。

一般性を失うことなく $X_iX^{\alpha}Y^{\beta} > X_jX^{\gamma}Y^{\delta}$ としてよい。このとき $\Sigma(Y^{\beta}) \neq \emptyset$ だから仮定より次の元が取れる。

$$X^{\alpha'}Y^{\beta'} \in \Sigma(Y^{\beta}) \text{ with } \alpha'_{(j)} = 0 \ : \text{ minimal in } \Sigma(Y^{\beta}) \text{ w.r.t. } >$$

従って、

$$X_iX^{\alpha+\alpha'}Y^{\beta'} - X_jX^{\gamma}Y^{\delta} \in I_H \text{ with } (\alpha+\alpha')_{(j)} = \gamma_{(i)} = 0$$

このとき $X^{\alpha'}Y^{\beta'}$ の minimality より $\Sigma(X^{\alpha'}Y^{\beta'}) = \emptyset$ であるから $\Sigma(Y^{\beta'}) = \emptyset$ 。従って $X_iX^{\alpha+\alpha'}Y^{\beta'} < X_jX^{\gamma}Y^{\delta}$ でなければ成らない。再び、$\Sigma(Y^{\delta}) \neq \emptyset$ だから仮定より次の元が取れる。

$$X^{\gamma'}Y^{\delta'} \in \Sigma(Y^{\delta}) \text{ with } \gamma'_{(i)} = 0 \ : \text{ minimal in } \Sigma(Y^{\beta}) \text{ w.r.t. } >$$

更に

$$X_iX^{\alpha+\alpha'}Y^{\beta'} - X_jX^{\gamma+\gamma'}Y^{\delta'} \in I_H \text{ with } (\alpha+\alpha')_{(j)} = (\gamma+\gamma')_{(i)} = 0$$

このとき

$$\Sigma(X_iX^{\alpha+\alpha'}Y^{\beta'}) \neq \emptyset \text{ or } \Sigma(X_jX^{\gamma+\gamma'}Y^{\delta'}) \neq \emptyset$$

であるから条件 4) より

$$\Sigma(Y^{\beta'}) \neq \emptyset \text{ or } \Sigma(Y^{\delta'}) \neq \emptyset$$

となり $X^{\alpha'}Y^{\beta'}$ と $X^{\gamma'}Y^{\delta'}$ の minimality に矛盾する。

以上により Theorem 2.1. が証明された。

# 3 $\mathrm{ht}\, I_H = 2$ の Case について

ここでは、$\mathrm{ht}\, I_H = 2$ で $S$ の monomial ordering は GIL-ordering とする。このとき $I_H$ は、Therorem 2.1. の条件 (M) を充たす。

今、$ht\, I_H = 2$ (i.e. $n = 2$) だから、$\mathcal{F}_H$ は次の subset に分割される。

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \{f \in \mathcal{F}_H \mid in(f) = Y_1^a \text{ for } a \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\} \\
\mathcal{F}_2 &= \{f \in \mathcal{F}_H \mid in(f) = Y_2^b \text{ for } b \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\} \\
\mathcal{F}_3 &= \{f \in \mathcal{F}_H \mid in(f) = Y_1^a Y_2^b \text{ for } a, b \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}
\end{aligned}$$

このとき、$in(\mathcal{F}_1)$ (resp. $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$) の minimal element を $Y_1^{a_1}$ (resp. $Y_2^{b_2}, Y_1^{a_3}Y_2^{b_3}$) で表わす。更に、$\mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ の元で initial term が minimal であるものを $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ の minimal element と呼ぶことにする。

**Lemma 3.1.** $k[H]$ が Cohen-Macaulay とする。このとき、$f_1, f_2, f_3$ をそれぞれ $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ の minimal element とすると、$\{f_1, f_2\}$ か $\{f_1, f_2, f_3\}$ が $I_H$ の minimal Gröbner basis と成る。従って、$\mu(I_H) \leq 3$

**Proof.** Theorem 2.1. より

$$\begin{aligned}
& < in(I_H) > \\
= & < in(\mathcal{F}_H) > \\
= & < in(\mathcal{F}_1), in(\mathcal{F}_2), in(\mathcal{F}_3) > \\
= & < Y_1^{a_1}, Y_2^{b_2}, in(\mathcal{F}_3) >
\end{aligned}$$

従って、$in(\mathcal{F}_3) \subset < Y_1^{a_1}, Y_2^{b_2} >$ であるならば、$\{f_1, f_2\}$ が $I_H$ の minimal Gröbner basis と成る。そこで、$in(\mathcal{F}_3) \not\subset < Y_1^{a_1}, Y_2^{b_2} >$ のときに $\{f_1, f_2, f_3\}$ が $I_H$ の minimal Gröbner basis と成ることを示す。

$in(\mathcal{F}_3) \not\subset < Y_1^{a_1}, Y_2^{b_2} >$ より、$Y_1^a Y_2^b - X^\alpha \in \mathcal{F}_3$ such that $a < a_1$ and $b < b_2$ が存在する。

Claim. 次の二つの元

$$Y_1^a Y_2^b - X^\alpha, Y_1^{a'} Y_2^{b'} - X^{\alpha'} \in \mathcal{F}_3 \text{ such that } a, a' < a_1 \text{ and } b, b' < b_2$$

について、$a \leq a', b \leq b'$ であるか又は、$a \geq a', b \geq b'$ と成る。

もし、Claim が言えたとすると $f_3$ の minimality より $Y_1^a Y_2^b - X^\alpha \in \mathcal{F}_3$ such that $a < a_1$ and $b < b_2$ について、$a_3 \leq a, b_3 \leq b$ でなければ成らないから、Lemma が示せる。

(Claim. の証明) Claim. が成り立たないとして矛盾を導く。従って、$a < a', b > b'$ としてよい。このとき、

$$X^\alpha Y_1^{a'-a} - X^{\alpha'} Y_2^{b-b'} \in I_H$$

が得られる。ここで、$\alpha \leq \alpha'$ 又は、$\alpha \geq \alpha'$ であるならば、$Y_1^{a'-a} \in < in(\mathcal{F}_1) >$ 又は、$Y_2^{b-b'} \in < in(\mathcal{F}_2) >$ となり $Y_1^{a_1}, Y_2^{b_2}$ の minimality に反する。従って、$\alpha_{(i)} > \alpha'_{(i)}, \alpha_{(j)} < \alpha'_{(j)}$ となる $1 \leq i \neq j \leq r$ がなければならない。ところが、Theorem 2.1. の条件 1) より再び $Y_1^{a'-a} \in < in(\mathcal{F}_1) >$ 又は、$Y_2^{b-b'} \in < in(\mathcal{F}_2) >$ となり、$Y_1^{a_1}, Y_2^{b_2}$ の minimality に矛盾する。

よって Claim が示された。

Lemma 3.1. より直ちに次が得られる。

**Theorem 3.2.** $k[H]$ が C-M $\Longleftrightarrow \mu(I_H) \leq 3$.

以下、$k[H]$ は、C-M と仮定する。

$Y_1^a - X^\alpha Y_2^b \in \mathcal{F}_1$ について、GIL-ordering の定義から $\alpha > 0$ でなければ成らない。そこで、次の場合に分ける。

Case 1. $\exists Y_2^{b_2} - X^\alpha Y_1^a \in \mathcal{F}_2$ : minimal element such that $\alpha > 0$

Case 2. $\exists^1 Y_2^{b_2} - Y_1^a \in \mathcal{F}_2$ : minimal element

**一覧 2.3.** Case 1. の時、

$$f_1 = Y_1^{a_1} - X^{\alpha_1} Y_2^{b_1}$$
$$f_2 = Y_2^{b_2} - X^{\alpha_2} Y_1^{a_2}$$
$$f_3 = Y_1^{a_3} Y_2^{b_3} - X^{\alpha_3}$$

をそれぞれ $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ の minimal element とする。

(1.1) $a_2 > 0$ かつ $b_1 > 0$ の時、$f_1, f_2, f_3$ が $I_H$ の minimal Gröbner basis でさらに $a_1 = a_2 + a_3, b_2 = b_1 + b_3, \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$。従って

$$I_H = I_2 \begin{pmatrix} X^{\alpha_1} & Y_1^{a_2} & Y_2^{b_3} \\ Y_1^{a_3} & Y_2^{b_1} & X^{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

(1.2) $a_2 = 0$ 又は $b_1 = 0$ の時、$f_1, f_2$ が $I_H$ の minimal Gröbner basis 。

Case 2. の時、

$$f_1 = Y_1^{a_1} - X^{\alpha_1} Y_2^{b_1}$$
$$f_2 = Y_2^{b_2} - Y_1^{a_2}$$
$$f_3 = Y_1^{a_3} Y_2^{b_3} - X^{\alpha_3}$$

をそれぞれ $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ の minimal element とする。

(2.1) $b_2 > b_3$ の時、$f_1, f_2, f_3$ が $I_H$ の minimal Gröbner basis でさらに $a_1 = a_2 + a_3, b_2 = b_1 + b_3, \alpha_3 = \alpha_2$。従って $f_1 = Y_2^{b_1} f_3 - Y_1^{a_2} f_2$ and $I_H = < f_2, f_3 >$

(2.2) $b_2 \leq b_3$ の時、$f_1, f_2$ が $I_H$ の minimal Gröbner basis 。

(証明は、煩雑な計算を繰り返すだけなので省略します。詳しくは、[4] を参照して下さい。) これは、r=1 のときに Herzog がしめした結果の一般化になっている。(cf. [2])

## 4 $k[t_1^a, t_1^b t_2^{a-b}, t_1^c t_2^{a-c}, t_2^a]$ の C-M 性について

$d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $s.t.$ $d_1 > \cdots > d_n$ $and$ $(d_1, \ldots, d_n) = 1$ について、

$$H = \sum_{i=1}^n \mathbb{N} \cdot d_i$$
$$\widetilde{H} = \sum_{i=0}^n \mathbb{N} \cdot (d_i, d_1 - d_i) \text{ 但し } d_0 = 0$$

とする。更に、次の多項式環の間の写像を与える。

$$\varphi : S = k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow k[t_1] \quad \text{by} \quad \varphi(X_i) = t_1^{d_i} \quad (1 \le i \le n)$$
$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{S} = k[X_0, \ldots, X_n] \longrightarrow k[t_1, t_2] \quad \text{by} \quad \widetilde{\varphi}(X_i) = t_1^{d_i} t_2^{d_1 - d_i} \quad (0 \le i \le n)$$

$S, \widetilde{S}$ には、それぞれ Total degree に関する GIL-ordering が入っているとする。

**Definition 4.1.** $f \in S, g \in \widetilde{S}, F \subset S, G \subset \widetilde{S}$ について、

$$\begin{aligned} {}^h f &= X_0^{deg(f)} f(X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0) \\ {}^i g &= g(1, X_1, \ldots, X_n) \\ {}^h F &= \{{}^h f \mid f \in F\} \\ {}^i G &= \{{}^i g \mid g \in G\} \end{aligned}$$

このとき次が成り立つ。

**Lemma 4.2.**

$$\mathcal{R}_H = {}^i \mathcal{R}_{\widetilde{H}} \text{ and } {}^h \mathcal{R}_H = \mathcal{R}_{\widetilde{H}}$$

$$\text{特に } in(\mathcal{R}_H) = in({}^i \mathcal{R}_{\widetilde{H}}) = in(\mathcal{R}_{\widetilde{H}}) = in({}^h \mathcal{R}_H)$$

以下、$Y_1 = X_2, \ldots, Y_{n-1} = X_n$ とする。このとき Lemma より直ちに次が解る。

**Proposition 4.3.** $F \subset \mathcal{R}_H$ is a (minimal) Gröbner basis if and only if ${}^h F \subset \mathcal{R}_{\widetilde{H}}$ is a (minimal) Gröbner basis.

**Corollary 4.4.** $k[H]$ is C-M if and only if there exists a minimal Gröbner basis $F \subset \mathcal{R}_H$ such that $in(F) \subset M(k[Y_1, \ldots, Y_{n-1}])$.

更に、$n = 3$ の場合について観ていく。

$$\mathsf{R}(a) = \{(b, c) \in \mathbb{N}^2 \mid b > 0 \text{ and } a \cdot d_2 = b \cdot d_1 + c \cdot d_3\} \text{ for } a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\tilde{a} = \min\{a \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \mathsf{R}(a) \neq \emptyset\}$$

とおくと、次が成り立つ。

**Theorem 4.5.** $k[H]$ is C-M if and only if $^{\exists}(b, c) \in \mathsf{R}(\tilde{a})$ such that $\tilde{a} \geq b + c$.

**Proof.** $k[H]$ は、C-M と仮定する。
一覧 2.3. の

$$f_1 = Y_1^{a_1} - X_1^{b_1} Y_2^{c_1}$$

$$f_2 = Y_2^{c_2} - X_1^{b_2} Y_1^{a_2}$$

$$f_3 = Y_1^{a_3} Y_2^{c_3} - X_1^{a_3}$$

について、$c_1 < c_2$ としてよい。ここで、$^{\forall}(b, c) \in \mathsf{R}(\tilde{a})$ について、$\tilde{a} < b + c$ とする。このとき、$a_1 = \tilde{a}$ だから $a_1 < b_1 + c_1$ かつ

$$-({}^h f_1) = X_1^{b_1} Y_2^{c_1} - X_0^{b_1 + c_1 - a_1} Y_1^{a_1} \in \mathcal{R}_{\widetilde{H}}$$

今、$k[H]$ は、C-M だから Theorem 2.1. より

$$^{\exists}Y_2^c - X_0^d X_1^b Y_1^a \in \mathcal{F}_{\widetilde{H}} \text{ s.t. } c \leq c_1$$

従って、Lemma 4.2. より

$$^{\exists}Y_2^c - X_1^b Y_1^a \in \mathcal{F}_H \text{ s.t. } c \leq c_1$$

よって、$c_2 < c \leq c_1$ となり矛盾。

逆に、$a_1 \geq b_1 + c_1$ とすると、Buchberger の algorithm (cf. [3]) より $f_1, f_2, f_3$ が $I_H$ の Gröbner basis と成る。従って、Corollary 4.4. より $k[H]$ は、C-M と成る。

# 参考文献


[1] S.Goto, N.Suzuki and K.-i.Watanabe, *On affine semigroup rings*, Japan. J. Math. 2, 1-12, 1976.

[2] J.Herzog, *Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings*, manu. math. 3, 175-193, 1970.

[3] L.Robbiano, *Gröbner basis : a foundation for commutative algebra*, Preprint, 1990.

[4] Y.Kamoi, *Defining ideals of Cohen-Macaulay semigroup rings*, to appear in *Comm. in Algebra.*

# 部分体上有限な超越次数を持つ局所環について

宮崎大・教育　谷 本　洋

よく知られた定理の一つとして次の定理がある．

**定理 1**　体 $k$ 上有限生成な整域を $A$ とする．このとき，$\dim A = \mathrm{tr.\,deg}_k A$ が成立する．ただし，$\mathrm{tr.\,deg}_k A$ は，$A$ の部分体 $k$ 上の $A$ の商体 $\mathrm{Q}(A)$ の超越次数を表す．

実は，次の定理 2 のように，これは局所的にも成立することが次元公式を用いて容易に示せる．

**定理 2**　$A$ は定理 1 のとおりとする．このとき，任意の $p \in \mathrm{Spec}(A)$ と，$k \subseteq \ell \subseteq \kappa(p)$ かつ $\kappa(p)$ は $\ell$ 上代数的であるような任意の $A_p$ の部分体 $\ell$ について，$\dim A_p = \mathrm{tr.\,deg}_\ell A_p$ が成立する．

私は局所環とその部分体との関係に興味があるので，以下，局所環 $(A,\mathrm{m})$ と $A$ の部分体 $k$ について，いつ $\dim A = \mathrm{tr.\,deg}_k A$ が成立するか，そして $\dim A = \mathrm{tr.\,deg}_k A$ が成立して何か良いことがあるか，という問題を扱う．ここでは，[1] で用いられた手法を基本的なものとして使う．

**注意**　$\dim A < \mathrm{tr.\,deg}_k A$ が成り立つ例として次のものがある．

(a) $A = k[[X]]$ とすれば，$\dim A < \mathrm{tr.\,deg}_k A = \infty$ が成立する．

(b) $\mathrm{tr.\,deg}_k A < \infty$ と仮定しても，"=" とはならない例がある．すなわち，任意の自然数 $n, e$ と任意の体 $k$ について，次の条件をみたす局所環 $A$ が存在する：

$$k \subseteq A \subseteq k[[X_1, X_2, \cdots, X_n]],\ \text{しかも}\ \dim A = n,\ \mathrm{tr.\,deg}_k A = n + e.$$

まず次の補題に注意する．

**補題 1**　必ずしもネーターではない局所整域 $A$ と $\mathrm{tr.\,deg}_k A < \infty$ をみたす $A$ の部分体 $k$ について，

$$\dim A \leq \mathrm{tr.\,deg}_k A$$

が成立する．

証明　$t = \mathrm{tr.\,deg}_k A$ とおき，$t < \dim A$ と仮定する．すると $A$ の素イデアルの真減少列 $p_0 \supset p_1 \supset \cdots \supset p_{t+1}$ が存在する．そこで各 $i$ に対し $a_i \in p_i \setminus p_{i+1}$ をとり $B = k[a_0, \cdots, a_t]_{(a_0,\cdots,a_t)}$ とおけば，$k$ はネーター局所整域 $B$ の係数体ゆえに，

$$t + 1 \leq \dim B \leq \mathrm{tr.\,deg}_k B \leq \mathrm{tr.\,deg}_k A = t.$$

これは矛盾である．□

以前，0–smoothness に関する結果を出したが，それに関して次の定理を得る：

**定理 3**　正則局所環 $(A,\mathrm{m})$ と，標数が 0 の $A$ の準係数体 $k$ について，

$$A \text{ が } k \text{ 上 0–smooth} \iff \dim A = \mathrm{tr.\,deg}_k A.$$

証明は，$A^h = K < \underline{X} >$ に帰着させ，[2] の結果を利用する．

次元と超越次数が等しい例として次の 2 つの定理があげられる．

**定理 4**　$X_1, \cdots, X_n$ は体 $k$ 上の $n$ 変数であり，$M$ は $X_1, \cdots, X_n$ についてのいくつかの単項式によって生成された必ずしも有限生成ではない半群であるとする．$A = k[M]_{(M)}$ とおく．すると

$$\dim A = \mathrm{tr.\,deg}_k A$$

が成立する．

証明　$X_1, \cdots, X_n$ についての単項式全体からなる集合を $N$ とし，$N$ から $\mathbf{Q}^n$ への写像 $\log_X$ を

$$\log_X X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

と定める．すると $\log_X$ は単射であり，しかも

$$(\sharp) \qquad \mathrm{tr.\,deg}_k A = \dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\log_X M)$$

が成立する．$t = \mathrm{tr.\,deg}_k A$ とおく．$t = 1$ のときは容易．よって $t > 1$ とし，$m_1, \cdots, m_t \in M$ が $k$ 上代数的独立であるとする．各 $i$ に対し $\mathbf{a}_i = (\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in}) = \log_X m_i$ とおく．すると $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_t$ は $\mathbf{Q}$ 上線型独立であるから，$t \times n$ 行列 $(\alpha_{ij})$ のある $t-1$ 次小行列式は 0 ではない．そこでその小行列式が $(\alpha_{ij})$ の左上の $t-1$ 次小行列式であるとする．い

ま，$\mathbf{u}=(u_t,\cdots,u_n)\in\mathbf{N}^{n-t+1}$ について $t-1$ 次正方行列

$$D_{\mathbf{u}}=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1t-2} & \alpha_{1t-1}+\sum_{i=t}^{n}\alpha_{1i}u_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{t-11} & \cdots & \alpha_{t-1t-2} & \alpha_{t-1t-1}+\sum_{i=t}^{n}\alpha_{t-1i}u_i \end{pmatrix}$$

を考えると，

$$\mid D_{\mathbf{u}}\mid=\mid\alpha_{ij}\mid+\sum_{i=t}^{n}D_iu_i,\ \mid\alpha_{ij}\mid\neq 0, D_i\in\mathbf{Q}.$$

従って，ある $\mathbf{u}\in\mathbf{N}^{n-t+1}$ について $\mid D_{\mathbf{u}}\mid\neq 0$. そこでこの $\mathbf{u}$ に対し，$N$ から $X_1,\cdots,X_{t-1}$ についての単項式全体からなる集合 $N'$ への写像 $\varphi$ を次のように定義する：

$$\varphi(X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n})=X_1^{\alpha_1}\cdots X_{t-2}^{\alpha_{t-2}}X_{t-1}^{\alpha_{t-1}+\sum_{i=t}^{n}\alpha_iu_i}$$

すると $\varphi$ は $k[X_1,\cdots,X_n]$ から $k[X_1,\cdots,X_{t-1}]$ への環準同型写像 $f$ に拡張できる．すると，$\mathrm{Ker}(f)$ は素イデアルであり，$\mathrm{Ker}(f)=(X_t-X_{t-1}^{u_t},\cdots,X_n-X_{t-1}^{u_n})\subseteq(X_1,\cdots,X_n)$ をみたす．そこで $f(M)=M'$ とおけば，$f$ は環準同型写像 $g:k[M]\longrightarrow k[M']$ を定める．すると，

$$(0)\subset\mathrm{Ker}(g)\subseteq(M)$$

が成立する．なぜなら，$\mathrm{tr.\,deg}_kk[M']=\dim_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\log_X M')\leq t-1<\mathrm{tr.\,deg}_kk[M]$ より $\mathrm{Ker}(g)\supset(0)$，さらに $\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Ker}(f)\cap k[M]\subseteq(X_1,\cdots,X_n)\cap k[M]=(M)$ であるから．さて $\mathbf{u}$ のとり方より，($\sharp$) から $\mathrm{tr.\,deg}_kk[M']=\dim_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\log_X M')=t-1$. ゆえに仮定より $k[M']$ には $P_0=(M')\supset P_1\supset\cdots\supset P_{t-1}$ なる素イデアル列が存在する．従って $k[M']\simeq k[M]/\mathrm{Ker}(g)$ より $\dim A\geq t$. 一方，補題 1 より $\dim A\leq t$. よって示された．□

**定理 5**　$A$ はネーター局所整域，$k$ は $A$ の部分体であり，$\dim A=\mathrm{tr.\,deg}_kA$ が成り立っているとする．このとき $k\subseteq R\subseteq A$ をみたす任意のネーター局所整域 $R$ について

$$\dim R=\mathrm{tr.\,deg}_kR$$

が成立する．

証明　$n=\dim A$ とおき，$p_0\supset p_1\supset\cdots\supset p_n$ を $A$ の素イデアル列とし，各 $i$ に対し $a_i\in p_i\backslash p_{i+1}$ をとる．さらに $t=\mathrm{tr.\,deg}_RA$ とし，$b_1,\cdots,b_t\in A$ が $R$ 上代数的独立であるとする．$B=R[a_0,\cdots,a_{n-1},b_1,\cdots,b_t]$ とおき，各 $i$ に対し $q_i=p_i\cap B$ とおく．すると $q_0\supset q_1\supset\cdots\supset q_n$ ゆえに，次元不等式より

$$n\leq\mathrm{ht}\ q_0\leq\mathrm{ht}(q_0\cap R)+\mathrm{tr.\,deg}_RB-\mathrm{tr.\,deg}_{\kappa(q_0\cap R)}\kappa(q_0).$$

よって $\mathrm{ht}(q_0 \cap R) \geq n-t$ であり，$\dim R \geq n-t$.

一方，$\mathrm{tr.\ deg}_k R = \mathrm{tr.\ deg}_k A - \mathrm{tr.\ deg}_R A = n-t$ であるから，補題 1 より $\dim R \leq n-t$.

以上より $\dim R = \mathrm{tr.\ deg}_k R$. □

次に我々の等式をみたすような鎖状環の特徴付けを与える.

**定理 6** 　ネーター局所整域 $A$ と $\dim A = \mathrm{tr.\ deg}_k A$ をみたす $A$ の部分体 $k$ について，次は同値である.

1. $A$ は鎖状環である.
2. $A$ の任意の素イデアル $p$ について，
   (a) $\dim A/p = \mathrm{tr.\ deg}_k A/p$, かつ，
   (b) $k \subseteq \ell \subseteq \kappa(p)$ であり $\kappa(p)$ は $\ell$ 上代数的であるような $A_p$ の任意の部分体 $\ell$ について $\dim A_p = \mathrm{tr.\ deg}_\ell A_p$.
3. $p \supseteq q$ であるような $A$ の任意の素イデアル $p, q$ と，$k \subseteq \ell \subseteq \kappa(p)$ であり $\kappa(p)$ は $\ell$ 上代数的であるような $A_p/qA_p$ の任意の部分体 $\ell$ について，$\dim A_p/qA_p = \mathrm{tr.\ deg}_\ell A_p/qA_p$.

証明は次の 3 つの補題から容易にできる.

**補題 2** 　$(A, m)$ は必ずしもネーターではない局所整域，$k$ は $\mathrm{tr.\ deg}_k A < \infty$ をみたす $A$ の部分体であるとする．いま $\ell_1, \ell_2$ がともに $A$ の部分体であり，しかも各 $i$ について $k \subseteq \ell_i \subseteq A/m$ かつ $A/m$ は $\ell_i$ 上代数的であるならば，$\mathrm{tr.\ deg}_{\ell_1} A = \mathrm{tr.\ deg}_{\ell_2} A$ が成立する.

証明は容易.

**補題 3** 　$A$ は必ずしもネーターではない局所整域，$k$ は $\mathrm{tr.\ deg}_k A < \infty$ をみたす $A$ の部分体であるとする．このとき $A$ の任意の素イデアル $p$ と，$k \subseteq \ell \subseteq \kappa(p)$ であり $\kappa(p)$ が $\ell$ 上代数的であるような $A_p$ の任意の部分体 $\ell$ について，

$$\mathrm{tr.\ deg}_k A = \mathrm{tr.\ deg}_k A/p + \mathrm{tr.\ deg}_\ell A_p$$

が成立する.

証明 　$t = \mathrm{tr.\ deg}_k A/p$ とすれば，$\mathrm{mod}\, p$ で $k$ 上代数的独立であるような $A$ の元 $x_1, \cdots, x_t$ が存在する．すると，$k[x_1, \cdots, x_t] \cap p = (0)$. よって $\ell_0 = k(x_1, \cdots, x_t)$ とおけば $\ell_0 \subseteq A_p$ であり，$\kappa(p)$ は $\ell_0$ 上代数的である．しかも，$\mathrm{tr.\ deg}_k A = \mathrm{tr.\ deg}_k A/p + \mathrm{tr.\ deg}_{\ell_0} A_p$. よっ

て補題 2 より示された. □

**補題 4** $(A, m)$ は必ずしもネーターではない局所整域, $k$ は $\mathrm{tr.\ deg}_k A < \infty$ をみたす $A$ の部分体であるなら, $A/m$ は $k$ 上代数的である.

証明 $A$ のある元 $a$ が $\bmod m$ で $k$ 上超越的であるとすると, $k[a] \cap m = (0)$. よって $k(a)$ は $A$ の部分体である. 従って, 補題 1 より,

$$\dim A \leq \mathrm{tr.\ deg}_{k(a)} A = \mathrm{tr.\ deg}_k A - 1 < \dim A.$$

これは矛盾である. □

この定理の応用として次の定理を得る.

**定理 7** $A, B$ はネーター局所整域であり, $A$ は $B$ の部分環であるとする. さらに $k$ は $\dim B = \mathrm{tr.\ deg}_k B$ をみたす $A$ の部分体であるとする. いま $A$ の任意の素イデアル $p$ に対し, $B$ の素イデアル $P$ が存在して $P \cap A = p$ かつ $\mathrm{coht}\ p = \mathrm{coht}\ P$ であるとする. このとき $B$ が鎖状環であるなら, $A$ も鎖状環である.

証明のためにまず次の補題を示す.

**補題 5** $A, B$ はネーター局所整域であり, $B$ は鎖状環, $A$ は $B$ の部分環であるとする. さらに, $k$ は $\dim B = \mathrm{tr.\ deg}_k B$ をみたす $A$ の部分体であるとする。いま $B$ の素イデアル $P$ に対し $p = P \cap A$ とおく. このとき, $k \subseteq \ell \subseteq \kappa(P)$ であり $\kappa(P)$ は $\ell$ 上代数的であるような $A_p$ の部分体 $\ell$ が存在するための必要十分条件は $\mathrm{coht}\ p = \mathrm{coht}\ P$ が成り立つことである.

証明 上のような $A_p$ の部分体 $\ell$ がとれたとする. このとき $B/P$ は $A/p$ 上代数的だから $\mathrm{tr.\ deg}_k A/p = \mathrm{tr.\ deg}_k B/P$. 一方 $B$ は鎖状環であり $\dim B = \mathrm{tr.\ deg}_k B$ をみたすから, 定理 6 より $\dim B/P = \mathrm{tr.\ deg}_k B/P$. さらに $k \subset A/p \subset B/P$ ゆえに, 定理 5 より $\dim A/p = \mathrm{tr.\ deg}_k A/p$. 以上より $\dim A/p = \dim B/P$.

逆に $\dim A/p = \dim B/P$ なら, $B$ は鎖状環であり $\dim B = \mathrm{tr.\ deg}_k B$ ゆえに定理 6 より $\dim B/P = \mathrm{tr.\ deg}_k B/P$. よって定理 5 より $\dim A/p = \mathrm{tr.\ deg}_k A/p$. よって $\mathrm{coht}\ p = \mathrm{coht}\ P$ より $\mathrm{tr.\ deg}_k A/p = \mathrm{tr.\ deg}_k B/P$ だから $B/P$ は $A/p$ 上代数的。そこで $t = \mathrm{tr.\ deg}_k A/p$ とし, $A$ の元 $x_1, \cdots, x_t$ は $\bmod p$ で $k$ 上代数的独立であるとする. このとき $k[x_1, \cdots, x_t] \cap p = (0)$ ゆえに $k \subset k(x_1, \cdots, x_t) \subset A_p$ であり, しかも $\kappa(P)$ は $k(x_1, \cdots, x_t)$ 上代数的となる. □

定理 7 の証明 $A$ の任意の素イデアル $p$ に対し定理の条件をみたす $B$ の素イデアル $P$ をとる. すると $\dim B = \mathrm{tr.\ deg}_k B$ であり $B$ は鎖状環であるから, 定理 6 よ

り $\dim B/P = \mathrm{tr.\,deg}_k B/P$ であり，しかも $k \subseteq \ell_0 \subseteq \kappa(P)$ かつ $\kappa(P)$ が $\ell_0$ 上代数的であるような $B_P$ の任意の部分体 $\ell_0$ について $\dim B_P = \mathrm{tr.\,deg}_{\ell_0} B_P$ である．さて，$k \subseteq A/p \subseteq B/P$ であるから，定理 5 より $\dim A/p = \mathrm{tr.\,deg}_k A/p$. 一方，補題 5 より $k \subseteq \ell \subseteq \kappa(P)$ であり $\kappa(P)$ は $\ell$ 上代数的であるような $A_p$ の部分体 $\ell$ が存在する．$\dim B_P = \mathrm{tr.\,deg}_\ell B_P$ ゆえに定理 5 より $\dim A_p = \mathrm{tr.\,deg}_\ell A_p$. よって定理 6 より $A$ は鎖状環である．□

最後に次のことに注意する．

**定理 8**　$(A, m)$ は鎖状ネーター局所整域であり，$k$ は $\dim A = \mathrm{tr.\,deg}_k A$ をみたす $A$ の部分体とする．$A$ 上の $n$ 変数を $\underline{X} = \{X_1, \cdots, X_n\}$ とすれば，$A[\underline{X}]$ の任意の素イデアル $P$ と，$k \subseteq \ell \subseteq \kappa(P)$ であり $\kappa(P)$ が $\ell$ 上代数的であるような $A[\underline{X}]_P$ の任意の部分体 $\ell$ について，$\dim A[\underline{X}]_P = \mathrm{tr.\,deg}_\ell A[\underline{X}]_P$ が成立する．

証明　$p = P \cap A$ とおく．$A$ は鎖状環であるから，定理 6 より $A_p$ を $A$ としてもよい．このとき $P \cap A = m$. さらに，補題 2 より $n = 1$ のときに示しさえすればよい．

・$P = mA[X]$ のとき．　次元公式より，

$$\mathrm{ht}\ P = \mathrm{ht}\ m + \mathrm{tr.\,deg}_A A[X] - \mathrm{tr.\,deg}_{\kappa(m)} \kappa(P) = \mathrm{ht}\ m.$$

さらに $k[X] \cap P = (0)$ ゆえに $k(X) \subseteq A[X]_P$. 従って $\dim A[X]_P = \mathrm{ht}\ P = \mathrm{ht}\ m = \mathrm{tr.\,deg}_k A = \mathrm{tr.\,deg}_{k(X)} A[X]_P$. しかも $k \subseteq k(X) \subseteq \kappa(P)$ であり，補題 4 より $\kappa(P)$ は $k(X)$ 上代数的である．

・mod $mA[X]$ で既約な $A[X]$ のモニック多項式 $f(X)$ について $P = (m, f(X))A[X]$ のとき．　次元公式より

$$\mathrm{ht}\ P = \mathrm{ht}\ m + \mathrm{tr.\,deg}_A A[X] - \mathrm{tr.\,deg}_{\kappa(m)} \kappa(P) = \mathrm{ht}\ m + 1.$$

従って $\dim A[X]_P = \mathrm{ht}\ P = \mathrm{ht}\ m + 1 = \mathrm{tr.\,deg}_k A + 1 = \mathrm{tr.\,deg}_k A[X]_P$. よって示された．□

**系**　$A$ は強鎖状ネーター局所整域であるとし，$k$ は $\dim A = \mathrm{tr.\,deg}_k A$ をみたす $A$ の部分体であるとする．このとき $A$ 上に本質的には有限型である任意の局所整域 $(B, n)$ と，$k \subseteq \ell \subseteq B/n$ であり $B/n$ が $\ell$ 上代数的であるような $B$ の任意の部分体 $\ell$ について，

$$\dim B = \mathrm{tr.\,deg}_\ell B$$

が成立する．

**注意**　鎖状ネーター局所整域 $A$ で，部分体 $k$ について $\dim A = \mathrm{tr.\,deg}_k A$ をみたすが強鎖状環ではない例が [1] であげられている．従って定理 6，定理 8 より，この例は次の条件をみたすネーター局所整域 $R$ とその部分体 $k$ の存在を保証している：

1. $R$ の任意の素イデアル $P$ と，$k \subseteq \ell \subseteq \kappa(P)$ であり $\kappa(P)$ は $\ell$ 上代数的であるような $R_P$ の任意の部分体 $\ell$ について，$\dim R_P = \mathrm{tr.\,deg}_\ell R_P$ が成立する．

2. $R$ のある素イデアル $Q$ について，$\dim R/Q < \mathrm{tr.\,deg}_k R/Q$ となる．

# 参考文献


[1] H.Matsumura, *Quasi-coefficient rings*, Nagoya Math. J. 68 (1977) , 123-130.

[2] H.Tanimoto, *Smoothness of Noetherian Local Rings*, Nagoya Math. J. 95 (1984) , 163-179.

# 極大コーエン・マコーレー加群の双対性について

横浜国立大学教育学部　　大石　彰　（Akira Ooishi）

０．<u>序</u>．極大コーエン・マコーレー（maximal Cohen-Macaulay，略してＭＣＭ）加群についての問題は、大雑把に言って、次のように述べることが出来ると思われます：

（ａ）与えられた局所環または特異点にどのようなＭＣＭ加群が存在するか（<u>ＭＣＭ加群の存在</u>），

（ｂ）与えられた局所環または特異点のＭＣＭ加群は（局所環の内在的構造により）どのように分類されるか（<u>ＭＣＭ加群の分類</u>），

（ｃ）特別な性質を有するＭＣＭ加群の存在は、局所環または特異点にどのような制約を与えるか（<u>ＭＣＭ加群による局所環・特異点の特徴付け</u>）。

ＭＣＭ加群の理論（特に分類理論）については吉野雄二氏による本［13］を参照して下さい。ここでは、特に、ＭＣＭ加群の<u>双対性</u>に着目して、以上の問題の考察することを試みます。

１．<u>双対ＭＣＭ加群</u>．（Ｒ，ｍ，ｋ）をｄ次元コーエン・マコーレー局所環とする。簡単のためＲの剰余体は無限体とし、Ｒの標準（canonical)加群$K=K_R$が存在すると仮定する。有限生成Ｒ－加群Ｍはｄｅｐｔｈ（Ｍ）＝ｄのときＭＣＭ　Ｒ－加群であると言われる。ＭＣＭ　Ｒ－加群Ｍに対して

$$M^{*}:=\mathrm{Hom}_R(M,\ K_R)$$

とおき、これをＭの<u>双対加群</u>と言う。この講演の目的はＭと$M^*$との関係を調べることである言って良い。最初に注意することとして

<u>命題</u>（1.1）　ＭがＭＣＭ　Ｒ－加群のとき

（１）$M^*$もＭＣＭ　Ｒ－加群であり、標準的な同型$M^{**}\cong M$が成り立つ。

（２）$e(M^*)=e(M)$，$\mu(M^*)=r(M)$かつ$r(M^*)=\mu(M)$。

但し、ｅ（Ｍ）はＭの重複度，μ（Ｍ）はＭの極小生成系の個数，ｒ（Ｍ）はＭのコーエン・マコーレー型を表す。

<u>系</u>（1.2）　Ｒが超曲面ならば、$\mu(M)=r(M)$が成り立つ。

一般のＭＣＭ　Ｒ－加群Ｍに対して、不等式$\mu$（Ｍ）≦ｅ（Ｍ），ｒ（Ｍ）≦ｅ（Ｍ）が成り立つ。等式ｅ（Ｍ）＝$\mu$（Ｍ）が成り立つことと、等式ｅ（Ｍ）＝ｒ（Ｍ）が成り立つことは同値で、このときＭが<u>ウルリッヒ</u>（Ulrich）<u>加群</u>であると言う。（その他の同値条件として、$g_s(M) := e_1(M) - e(M) + \mu(M) = 0$であること、$\mathrm{reg}\,G(M) = 0$であること、などがある。［９］を参照。）ウルリッヒ加群は（自由加群を除いて）最も構造の簡単なＭＣＭ加群である。

<u>系</u>（1.3）　Ｍがウルリッヒ加群ならば$M^*$もウルリッヒ加群である。

２．<u>双対加群と接錐</u>．Ｍの接錐（tangent cone）Ｇ（Ｍ）、およびそのヒルベルト級数$F(G(M), t)$を

$$G(M) = \oplus_{n\geqq 0}\, m^n M / m^{n+1} M,$$

$$F(G(M), t) = \Sigma_{n\geqq 0}\, \dim_k (m^n M / m^{n+1} M)\, t^n$$

で定義する。この節では、Ｇ（Ｒ），Ｇ（Ｍ）がコーエン・マコーレーであると仮定して、$M^*$の接錐$G(M^*)$が、いつ（次数のずらしを除いて）Ｇ（Ｍ）の<u>次数付き双対加群</u>

$$G(M)^* := \underline{\mathrm{Hom}}_{G(R)}(G(M), K_{G(R)})$$

に同型になるかということを問題にする。これはＧ（Ｒ）がいつゴレンスタイン環になるかという問題、より一般には、$G(K_R)$がいつＧ（Ｒ）の標準加群になるかという、前回および前々回にこのシンポジウムでお話しした問題の一般化である。また$M^*$の数値的不変量を知るためには、$M^*$のヒルベルト関数を調べることが必要で、それは次数付き加群$G(M^*)$を調べることに帰着する。もし同型

$$G(M^*) \cong G(M)^*$$

が言えるならば事情は極めて簡単になる訳である。いま、

$$F(G(M), t) = (a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r) / (1-t)^d, \quad a_r \neq 0$$

とおく。一般に、Ｇ（Ｍ）がコーエン・マコーレー加群ならば、不等式$a_r \leqq r(M) \leqq r(G(M))$が成り立つ。等式$r(G(M)) = a_r$が成り立つとき、Ｇ（Ｍ）が<u>レベル</u>（level,水平）<u>加群</u>であると言う。

<u>例</u>（2.1）　Ｇ（Ｒ）がレベル環であることは、Ｇ（Ｒ）がコーエン・マコーレー環で$G(K_R)$が標準Ｇ（Ｒ）－加群であることと同値である（［10］を参照）。

<u>定理</u>（2.2）　Ｇ（Ｍ），$G(M^*)$がコーエン・マコーレー加群として、$a = a(G(M)) = \deg F(G(M), t)$とおく。次の条件は同値である：

（１）Ｇ（Ｍ）がレベル加群である。

（２）Ｇ（$M^*$）がレベル加群である。

（３）等式 $F(G(M^*), t) = (-1)^d t^a F(G(M), t^{-1})$ が成り立つ、即ち、

$$(1-t)^d F(G(M), t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r, \quad a_r \neq 0$$

とおくと

$$(1-t)^d F(G(M^*), t) = a_r + a_{r-1} t + \cdots + a_0 t^r。$$

［証明］はＲをアルチン環としてＳｏｃ（Ｇ（Ｍ））を計算することによって得られる。

この節の最初に述べた問題は、Ｇ（Ｍ）がレベル加群であることと密接な関係があることが分かる：

定理 (2.3)　Ｇ（Ｒ）がレベル環（例えばゴレンスタイン環）で、Ｇ（Ｍ），Ｇ（$M^*$）がコーエン・マコーレー加群とする。このとき次の条件は同値である。

（１）Ｇ（Ｍ）がレベル加群かつ $a(G(M)) = a(G(R))$。

（２）$G(M^*) \cong G(M)^*(-s)$，但し，$s = a(G(R)) + d$。

（３）自然な準同型写像

$$G(M^*) = G(\mathrm{Hom}(M, K)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{G(R)}(G(M), G(K))$$

が同型写像である。

Ｒがアルチン環の場合には、Ｇ（Ｒ）がレベル環という仮定は不要である。一般次元でこの仮定が必要なのは、自然な準同型写像 $G(M^*) \to G(M)^*(-s)$ が作れないことによる。

３．自己双対性．ＭＣＭ　Ｒ－加群Ｍは、同型 $M^* \cong M$ が成り立つとき自己双対的（self- dual）であると言われる。

例 (3.1)（１）Ｒ（または $K_R$）が自己双対的であることは，Ｒがゴレンスタイン環であることに他ならない。一般に、$R \subset S$ をコーエン・マコーレー局所環の有限拡大とすると、Ｓ－加群としての同型 $K_S \cong \mathrm{Hom}_R(S, K_R)$ が成り立つ。従ってＳがゴレンスタイン環ならばＳは自己双対的ＭＣＭ　Ｒ－加群である。この逆は一般には成立しないが、$R \subset S$ が双有理拡大のときには正しい（二つの torsion- freeなＳ－加群がＳ－加群として同型であることとＲ－加群として同型であることが同値であることによる）。例えば、有限群Ｇがゴレンスタイン局所環Ｓに作用し、Ｇの位数がＳの単数のとき、不変部分環 $R = S^G$ はコーエン・マコーレー局所環でＳは自己双対的ＭＣＭ　Ｒ－加群である。

（2）$R=\mathbb{C}[[X, Y, Z]]/(f)$ が超曲面の正規特異点とすると、Rの微分加群 $\Theta_R := \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(R)$ は自己双対的MCM　R－加群である（マーツィンコフスキー）。

<u>命題</u>（3.2） Rが0次元ゴレンスタイン局所環のとき、RのイデアルIが自己双対的であるためにはIが主イデアルであることが必要十分である。

<u>命題</u>（3.3） Rが1次元ゴレンスタイン局所環とする。Rのm－準素イデアルIが条件 $e(I)=\ell(I/I^2)=2\ell(R/I)$ を満たすならばIは自己双対的MCM　R－加群である。

［証明］ $G(I)=\oplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$, $R(I)=\oplus_{n\geq 0} I^n$, および $S=\cup_{n\geq 1}(I^n : I^n)$ とおく。［8］により、Iについての条件から次数付き環G（I）がゴレンスタイン環であるから、スキームProj（G（I））がゴレンスタインである。従って、スキームSpec（S）≅Proj（R（I））もゴレンスタイン、即ち、Sがゴレンスタイン環である。故に、I≅Sは自己双対的MCM　R－加群である。

<u>系</u>（3.4） Rが1次元ゴレンスタイン局所環とする。

（1） $\mathrm{emb}(R)=e(R)-1$ ならば、任意の $n\geq 2$ に対して $m^n$ は自己双対的MCM　R－加群である。

（2） $\mathrm{emb}(R)=2$ ならば、任意の $n\geq e(R)-1$ に対して $m^n$ は自己双対的MCM　R－加群である。

以下、この節では、任意のMCM　R－加群が自己双対的であるという意味で自己双対性の成立するコーエン・マコーレー局所環の特徴付けを与えることが目標である。

<u>定理</u>（3.5） Rがアルチン局所環のとき、次の条件は同値である：

（1）任意のMCM　R－加群は自己双対的である。

（2）Rはゴレンスタイン環でmが自己双対的である。

（3）mが単項イデアルである。

（4）Rは主イデアル環である。

（5）離散付値環Sと自然数rがあり $R\cong S/(\pi^r)$ となる、但し $\pi$ はSの素元である。

［証明］（1）⇒（2）は自明。（2）⇒（3）は命題（3.3)による。条件（3），（4），（5）の同値性はコーエンの構造定理から従う。（5）⇒（1）：$M\cong R/m^i$（巡回加群）として良い。このとき

$$M^*\cong \mathrm{ann}(m^i)=m^{r-i}\cong R/\mathrm{ann}(m^{r-i})=R/m^i\cong M。$$

定理（3.6）　Rが１次元コーエン・マコーレー局所環で離散付値環でないとする。このとき、次の条件は同値である：

（１）Rはゴレンスタイン環でmが自己双対的である。

（２）emb（R）＝２かつmが自己双対的である。

（３）e（R）＝２（即ち、Rは２次の平面曲線の特異点）。

更にRが解析的不分岐な整域とすると、以上の条件は次の条件とも同値である：

（４）任意のＭＣＭ　R－加群は自己双対的である。

定理（3.7）　Rが正則局所環でない２次元複素解析的正規特異点のとき、次の条件は同値である：

（１）任意のＭＣＭ　R－加群は自己双対的である。

（２）Rは次のいずれかの特異点に同型である：

（$A_1$型）　$x^2+y^2+z^2=0$,

（$D_n$型）　$x^2y+y^{n-1}+z^2=0$,　nは偶数で$n\geqq 4$,

（$E_7$型）　$x^3+xy^3+z^2=0$,

（$E_8$型）　$x^3+y^5+z^2=0$。

（特にRは有理二重点 rational double pointである）。

［証明］（１）⇒（２）：まずR自身が自己双対的なのでRはゴレンスタイン環である。次に任意の反射的イデアルが自己双対的、即ち、Rの因子類群が$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$上のベクトル空間（特にねじれ群）である。従ってシュトルヒによりRは有理特異点である。故にRは有理二重点で、因子類群についての条件からRは上に挙げた特異点のいずれかに同型である。

（２）⇒（１）は有理二重点上のＭＣＭ加群の分類から従う。即ち、ＭＣＭ　R－加群はディンキン図形の頂点と一対一に対応しているので、既に自己双対的であることが分かっているR－加群（例えばR自身）からの既約射の存在を考えることにより全てのR－加群が自己双対的であることが分かる（この証明は吉野雄二氏、渡辺敬一氏に教示された）。

講演後、後藤四郎氏により一般に次のことが成り立つことを指摘された：

定理（3.8）　任意のＭＣＭ　R－加群が自己双対的ならば、Rは超曲面である。

［証明］ＭＣＭ　R－加群の完全列$0\to L\to M\to N\to 0$に対して、その双対を取ることにより完全列$0\to N^*\to M^*\to L^*\to 0$を得る。仮定によりこれは$0\to N\to M\to L\to 0$なる完全列と同型である。今、M，NをそれぞれR－加群kのd番目，d＋１番目のシチジー加群として$0\to N\to F_d\to M\to 0$，$F_d$が自由R－加群とすると、上のことから、完全列$0\to M\to F_d\to N\to 0$がある。従って、Mはkのd＋２番目のシチジー加群になる。

以下続けて、ｋのｉ番目のベッチ数$\beta_i$（ｋ）が$i \geqq d$で一定になるから、テイトの定理によりＲは超曲面である。

現在のところ、正則局所環以外の環で、任意のＭＣＭ加群が自己双対的であるような３次元以上のゴレンスタイン環（または超曲面）の例を筆者は知らない。それらは、単純特異点（特にｅ（Ｒ）＝２）になるのだろうか…？

４．アウスランダー加群と高さ２のゴレンスタイン・イデアル．この節では、常に$d = \dim(R) \geqq 2$と仮定する。この節の目標は、アウスランダー加群と呼ばれる自己双対的なＭＣＭ加群のクラスを導入し、Ｒがゴレンスタイン整閉整域のとき、「向き付け可能な」アウスランダー加群の同型類とＲの高さ２のゴレンスタイン・イデアルの偶連鎖類（even linkage class)が一対一に対応すると言う「ラオ対応(Rao correspondence)」を示すことである。この一つの応用として、６次元以上の孤立超曲面特異点では、任意の高さ２のゴレンスタイン・イデアルは完全交叉であることを示す。

ＭＣＭ　Ｒ－加群Ｍが自己双対的かつ条件$e(M) = 2e(R)$を満たすときに、Ｍがアウスランダー（Auslander)加群であると言う。Ｒが整域のとき、後の条件は$\mathrm{rank}(M) = 2$ということと同値である。ＲのイデアルＩは、剰余環Ｒ／Ｉがゴレンスタイン環のときゴレンスタイン・イデアルであると言う。

命題（4.1）　ＩがＲの高さ２のゴレンスタイン・イデアルとすると、次の分裂しない短完全列で特徴付けられるアウスランダーＲ－加群Ａ（Ｉ）が唯一つ存在する：

$$\xi : \quad 0 \to K \to A(I) \to I \to 0.$$

［証明］Ａ（Ｉ）の作り方：Ｒ／Ｉがゴレンスタイン環であることから

$$\mathrm{Ext}^1(I, K) \cong \mathrm{Ext}^2(R/I, K) \cong K_{R/I} \cong R/I.$$

巡回加群$\mathrm{Ext}^1(I, K)$の生成元に対応する拡大$\xi$を取れば、それが求めるものである。

Ａ（Ｉ）をイデアルＩのアウスランダー加群と言う。

例（4.2）　Ｒが２次元の局所環のとき、$A_R := A(m)$をＲのアウスランダー加群と言う。この場合については、アウスランダー［１］、吉野－川本［12］、マーツィンコフスキー［７］、ベンケ［３］などで研究されている。アウスランダー加群は曲面の特異点を特徴付ける色々な性質を反映していると予想される。例えば：

（１）$A_R$が直既約にならないのはＲが巡回商特異点であるときに限る（吉野－川本）。

（２）Ｒが擬斉次(quasi-homogeneous) ならば、

$$A_R \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(\Omega_R^1, R), R)$$ （Ｒのザリスキー微分加群）

であることは良く知られている。マーツィンコフスキーはこの逆も正しいこと、即ち、「$A_R$がザリスキー微分加群と同型になるのはＲが擬斉次であるときに限る」と予想した。幾つかの場合（例えばＲがゴレンスタイン環のとき）においてこの予想が正しいことが確認されている。

以下、Ｒは整閉整域であるとする。階数ｒの有限生成Ｒ－加群Ｍに対して

$$\mathrm{det}(M) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(\wedge^r M, R), R)$$

とおく。$\mathrm{det}(M) \cong R$のときＭが<u>向き付け可能</u>(orientable)であると言う。

<u>補題</u>（4.3） 高さ２のゴレンスタイン・イデアルＩに対して$\mathrm{det}(A(I)) \cong K_R$。

<u>命題</u>（4.4） Ｒがゴレンスタイン整閉整域とする。

（１）高さ２のゴレンスタイン・イデアルＩに対してＡ（Ｉ）は向き付け可能である。逆に、任意の向き付け可能なアウスランダー加群はある高さ２のゴレンスタイン・イデアルＩのアウスランダー加群Ａ（Ｉ）に同型である。

（２）安定的に同型 (stably isomorphic)な二つのアウスランダー加群は同型である。

以上の事実と、［６］のヘルツォーク、キュールによる結果を合わせると次の定理が得られる：

<u>定理</u>（4.5）（ラオ対応）．Ｒがゴレンスタイン整閉整域のとき、向き付け可能なアウスランダー加群の同型類とＲの高さ２のゴレンスタイン・イデアルの偶連鎖類が一対一に対応する。

<u>命題</u>（4.6） 高さ２のゴレンスタイン・イデアルＩに対して次の条件は同値である：

（１）Ａ（Ｉ）が自由加群。

（２）Ｉが完全交叉。

更にＲがゴレンスタイン整閉整域ならば、これらの条件は次の条件とも同値である：

（３）Ａ（Ｉ）が自由加群を直和因子に持つ。

有限生成Ｒ－加群Ｍに対して、Ｍの非自由域 (non-free locus) Ｎｆ（Ｍ）を

$$\mathrm{Nf}(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_p \text{は自由} R_p \text{－加群でない}\}$$

で定義する。

定理（4.7）（ブルンス）Ｒを超曲面であるような局所整域とする。ＭＣＭ　Ｒ－加群Ｍが
Ｒを直和因子に持たなければ、

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Nf}(M)) \leqq 2\,\mathrm{rank}(M)+1$$

が成り立つ。

系（4.8）　Ｒが孤立超曲面特異点とする。条件$\mathrm{rank}(M) < (d-1)/2$を満たす
任意のＭＣＭ　Ｒ－加群Ｍは自由加群である。

正則局所環の高さ２のゴレンスタイン・イデアルは完全交叉であることは良く知られている
（セールの定理）。次の定理は、この事実の一般化を与える：

系（4.9）　Ｒが超曲面の特異点で余次元≦５で正則とする（例えば、６次元以上の孤立
超曲面特異点）と、Ｒの任意の高さ２のゴレンスタイン・イデアルは完全交叉である。

［証明］Ｉが高さ２のゴレンスタイン・イデアルとする。Ｉが完全交叉でなければ、
命題(4.6）より$M = A(I)$はＲを直和因子に持たない。よって定理（4.7)より

$$6 \leqq \mathrm{codim}(\mathrm{Nf}(M)) \leqq 2\,\mathrm{rank}(M)+1=5$$

となり矛盾。

注意．系（4.9)は５次元以下の孤立超曲面特異点に対しては必ずしも成立しないことを、
蔵野和彦氏に教えていただきました。

５．ウルリッヒ加群．双対性と直接の関係はないがここではウルリッヒ加群について考察
する。ウルリッヒ加群についての基本的な問題はどのような局所環にウルリッヒ加群が存在
するかと言うことである。現在の所、$\dim(R) \leqq 1$，$\mathrm{emb}(R)=e(R)+d-1$，
Ｒが強完全交叉（即ち、$G(R)$が完全交叉）などであれば、ウルリッヒ加群が存在する
ことが知られている（［２］，［４］，［５］，［６］参照）。

まずＲ自身または$K_R$がウルリッヒ加群であるのは、Ｒが正則局所環であることに注意し、
以下Ｒは正則局所環でないとする。次のような問題を考える：Ｒを直和因子に持たない
任意のＭＣＭ加群がウルリッヒ加群であるような局所環の特徴付けを与えよ。これについて
知られているのは、先ず、

定理（5.1）（ヘルツォーク、キュール）$e(R)=2$、即ち、Ｒが２次超曲面の特異点
ならば、Ｒを直和因子に持たない任意のＭＣＭ加群はウルリッヒ加群である。

ここでは（Ｒについての緩やかな条件下）この逆も正しいことを予想として述べ、次元が低い場合にこの予想が正しいことを確認する。

予想．Ｒを直和因子に持たない任意のＭＣＭ加群がウルリッヒ加群であるためには、ｅ（Ｒ）＝２であることが必要十分である。

定理（5.2）アルチン局所環Ｒについて次の条件は同値である：

（１）Ｒを直和因子に持たない任意のＭＣＭ加群はウルリッヒ加群である。

（２）ある離散付値環ＳによりＲ≅Ｓ／（$\pi^2$）、但し$\pi$はＳの素元である。

注意．この定理から、上記のヘルツォーク、キュールの定理（一般次元の場合）の簡単な別証を与えることが出来る。

定理（5.3）Ｒが１次元整域のとき、Ｒを直和因子に持たない任意のＭＣＭ加群がウルリッヒ加群であるためには、ｅ（Ｒ）＝２であることが必要十分である。

定理（5.4）正則局所環でない２次元整閉整域Ｒについて次の条件は同値である：

（１）ｅ（Ｒ）＝２。

（２）Ｒはゴレンスタイン環で、Ｒのアウスランダー加群$A_R$がウルリッヒ加群である。

（３）Ｒを直和因子に持たない任意のＭＣＭ加群はウルリッヒ加群である。

［証明］（１）⇒（３）は定理（5.1)。（３）⇒（２）は自明。（２）⇒（１）：
仮定より、$2e(R) = e(A_R) = \mu(A_R) \leqq \mathrm{emb}(R) + 1 \leqq e(R) + 2$。
故に、ｅ（Ｒ）＝２。

以上の話題の詳細について興味がおありの方は、［11］を参照して下さい。

## 参考文献

[1] M.Auslander, Rational singularities and almost split sequences, Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1986), 511-531.

[2] J.Backelin and J.Herzog, On Ulrich-modules over hypersurface rings, preprint 1987.

[3] K.Behnke, On Auslander modules of normal surface singularities, Manuscripta Math. 66 (1989), 205-223.

[4] J.P.Brennan, J.Herzog and B.Ulrich, Maximally generated Cohen-Macaulay modules, Math. Scand. 61 (1987), 181-203.

[5] J.Herzog, B.Ulrich and J.Backelin, Linear maximal Cohen-Macaulay modules over strict complete intersections, preprint 1989.

[6] J.Herzog and M.Kühl, Maximally generated Cohen-Macaulay modules over Gorenstein rings and Bourbaki-sequences, Advances in Pure Math. 11, Commutative Algebra and Combinatorics, Kinokuniya (1987), 65-92.

[7] A.Martsinkovsky, Almost split sequences and Zariski differentials, Trans. Amer. Math. Soc. 319 (1990), 285-307.

[8] 大石, Stable ideals in Gorenstein local rings, J. Pure Appl. Algebra 69 (1991), 185-191.

[9] 大石, On the associated graded modules of canonical modules, J. Algebra 142 (1991), 143-157.
[Canonical 加群の associated graded加群について, 第１１回可換環論シンポジウム（岐阜, 1989）報告集, 35-45.]

[10] 大石, On the Gorenstein property of the associated graded rings and the Rees algebra of an ideal, to appear in J. Algebra.
[イデアルのassociated graded rings と Rees 環の Gorenstein 性について, 第１２回可換環論シンポジウム（京都, 1990）報告集, 1-10. ]

[11] 大石, On the duality of maximal Cohen-Macaulay modules, 準備中

[12] 吉野ー川本, The fundamental module of a normal local domain of dimension 2, Trans. Amer. Math. Soc. 309 (1988), 425-431.

[13] 吉野, COHEN-MACAULAY MODULES OVER COHEN-MACAULAY RINGS, London Math. Soc. Lecture Note Series 146, Cambridge University Press 1990.

（平成３年１１月）

# Normal $\mathbb{Z}_r$-graded Rings

泊 昌孝 (金沢大・理)
渡辺敬一 (東海大・理)

## 序

"graded" "ring" という時は、$\mathbb{Z}$ 又は $\mathbb{N}$ による grading を考えるのが普通だが、cyclic cover の理論を環論的に扱かおうとするとき、一番簡単な定式化と思われるのが、torsion group $\mathbb{Z}_r = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ による grading を考える方法である。というわけで、この講演の motivation は、1987年の本 symposium での泊の normal graded ring の cyclic cover の議論と、normal graded ring の Demazure による表示である。(この表示自体が cyclic cover の概念を内包している。)

但し、"graded ring" とは云っても、ふつうの $\mathbb{Z}$-graded ring にくらべると、torsion があるために、云える事はずっと弱くなる。いくつかの例をあげると、

(1) "graded ideal" の associated prime は "graded" とは限らない。

(2) $\mathbb{Z}_r$-graded ring の正規化は，$\mathbb{Z}_r$-grading を保たない。

(3) $\mathbb{Z}_r$-graded ring の divison class group は，"homogeneous" prime によっては一般に生成されない。

等々があげられる，しかし，以下に見るように，Cohen-Macaulay，Gorenstein，regular 等の性質に関しては，この弱い grading も役に立てられるという事を以下で示したい。

## §1．構成，整域，正規性．

(1.1) $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} S_i$，$S_i \cdot S_j \subset S_{i+j}$ $(\forall i, j \in \mathbb{Z}_r)$ となる環を $\mathbb{Z}_r$-graded ring と呼ぶ。以下常に，

$R := S_0$

とおく。R は Noetherian domain と仮定する。grading を調整して，$S_1 \neq (0)$ とできるから，常にそう仮定する。

$K := Q(R)$ （R の商体）とし，$u \neq 0 \in S_1$，$u^r = f \in K$ とすると，S が domain のとき，$Q(S) \cong K[U]/(U^r - f)$。

(1.2) 構成．

S が normal とすると，$R < \oplus S$ も normal であり，各 $S_i$ $(i \in \mathbb{Z}_r)$ は R の divisorial fractional ideal と同型であ

る。 $u \in S_1$, $u^r = f \in K$ とすると、 $a \in K$ に対し、

$$au^i \in S_i \iff (au^i)^r = a^r \cdot f^i \in R$$
$$\iff r \cdot \mathrm{div}_R(a) + i\,\mathrm{div}_R(f) \geqq 0$$
$$\iff \mathrm{div}_R(a) + \frac{i}{r}\,\mathrm{div}_R(f) \geqq 0.$$

ここで、 $\mathrm{div}_R(a) = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R),\ \mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} v_{\mathfrak{p}}(a) \cdot V(\mathfrak{p}) \in \mathrm{Div}(R)$,

但し、 $v_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$ に対応する valuation, $V(\mathfrak{p}) := \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})$,

$\mathrm{Div}(R)$ を $R$ の divisor group ( $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1\}$ で生成される free Abelian group) とする。 また、 $D = \sum_{\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{p}} \cdot V(\mathfrak{p}) \geqq 0$ $\overset{\mathrm{dfn}}{\iff} \forall n_{\mathfrak{p}} \geqq 0$.

従って、 $D := \frac{1}{r} \cdot \mathrm{div}_R(f)$ とおくと、 $(D \in \mathrm{Div}(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$

$$S_i \cong R(iD) := \{a \in K \mid \mathrm{div}_R(a) + iD \geqq 0\},$$

$S_i = R(iD) \cdot u^i$ と書ける。 ゆえに、改めて、

Definition. (1.3). $D \in \mathrm{Div}(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, such that $rD = \mathrm{div}_R(f)$ に対して、

$$S(R, D, f) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(iD) \cdot u^i \quad (\text{但し}, \ u^r = f)$$

と定義する。

注意 (1.4). $f, f' \in K$ に対し、 $\mathrm{div}_R(f) = \mathrm{div}_R(f')$ $\iff f/f' \in U(R)$ だが、この unit 倍の差は normality, factoriality 等に影響を及ぼす。

例 1. $r = 2$, $R = \mathbb{Z}$, $V = V(3)$, $D = \frac{1}{2}V$ とする。

(i) $f = 3$ とおくと、 $S(R, D, f) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, normal.

(ii)　$f=-3$ とすると　$S\cong \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, not normal.
なお，このとき $S$ の正規化は $S\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ だが この環には $\mathbb{Z}_2$-grading はひろがらない。

例2.　$r=2$, $R=\mathbb{R}[X,Y]$ （$\mathbb{R}$ : 実数体）, $D=\frac{1}{2}V$, $V=V(X^2+Y^2)$ とする。

(i)　$f=X^2+Y^2$ とすると，$S\cong \mathbb{R}[X,Y,U]/(U^2-(X^2+Y^2))$, $S$ は not UFD, $Cl(S)\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(ii)　$f=-(X^2+Y^2)$ とすると，$S\cong \mathbb{R}[X,Y,U]/(U^2+X^2+Y^2)$ は UFD.

次に，$S=S(R,D,f)$ がいつ整域になるか，normal かを考える。

Proposition (1.5).　$D\in \mathrm{Div}(R)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ に対し，

$$(*)\quad r=\min\{n>0 \mid nD=\mathrm{div}_R(f)\ (\exists f\in K)\}$$

とし，$rD=\mathrm{div}_R(f)$ なる $f$ に対し，$S=S(R,D,f)$ は integral domain.

この命題の証明は、次の命題（[8], VIII, §9, Thm 16）よりただちに得られる。

Proposition (1.6).　$K$ : 体，$f=X^r-a\in K[X]$ とする。もし $f$ が $K[X]$ に於て可約なら，次のいずれかが起る。

(i)　$\exists$素数 $p\mid r$, $\exists b\in K$,　$a=b^p$.

(ii) $\mathrm{char}(K) \neq 2$, $4 \mid r$, $\exists b \in K$, $b^4 = -4a$.

次は $S = S(R, D, f)$ がいつ normal か？を考える。Serre の条件 $(R_1)$ と $(S_2)$ で、$S$ の定義より $(S_2)$ は常にみたすので、$(R_1)$ のみ確めれば良い。$R$ の高さ $1$ の prime で localize して、$R$ は DVR として良い。

(1.7) $R$ が normal, 体 $k$ を含むとする。$\mathrm{char}(k) = p > 0$ のときは $(r, p) = 1$ とする。このとき (1.5) の (*) がみたされるならば、$S = S(R, D, f)$ は normal.

(実は、この形は symposium で述べたより大分弱い結論である。実は、$R$ が DVR, $f$ が unit の時に、$R[U]/(U^r - f)$ は normal か？という点を見過していたのが原因である。もちろん、$(p, r) = 1$ のときは上の環は normal であり、一般には No である。)

(証明) $(R, \mathfrak{m})$ : DVR として良い。$D = \frac{a}{q} V$ $(V = V(\mathfrak{m}))$, $\mathrm{GCD}(a, q) = 1$ のとき、$S(R, D, f)$ が regular はすぐわかる。一般には $R'$ を complete, $1$ の $r$ 乗根を含む $R$ の faithfully flat extension にすると、$S \otimes_R R'$ は上のような場合の直和に分解する。また、$D = 0$ のとき、$S \cong R[U]/(U^r - f)$ ($f$ は $R$ の unit) となり、$S$ は $R$ 上 étale だから normal.

## §2. Divisor Class Group, Canonical Class.

(2.0)
この節では，$S$，$R$ は normal，更に，

(i) $(R, \mathfrak{m})$ は local　　　　又は

(ii) $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ graded，$R_0 = (A, \mathfrak{a})$ は local かつ $D$ はこの grading に関し homogeneous divisor とする．

また，(1.5) の条件 (*) は常に仮定するとする．

<u>Lemma</u> (2.1)　(i) $(R, \mathfrak{m})$ local のとき，$S$ も local で極大イデアル $\mathfrak{m} \oplus [\bigoplus_{i \neq 0} S_i]$.

(ii) $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ graded ((2.0), (ii) の場合) のとき，$S$ は unique graded maximal ideal $\mathfrak{m} \oplus \bigoplus_{i \neq 0} S_i$ $(\mathfrak{m} = \mathfrak{a} + R_+)$ をもつ．

(∵) (i) のみ示す．$\forall i \neq 0 \in \mathbb{Z}_r$ $(0 < i < r$ とする$)$ $S_i \cdot S_{r-i} \subset \mathfrak{m}$ を示せば十分。$S_i \cdot S_{r-i} = R$ と仮定すると，$S_i$，$S_{r-i}$ は invertible より，$[iD]$，$[(r-i)D]$ は principal divisor かつ $[iD] + [(r-i)D] = rD = \mathrm{div}_R(f)$ となり，$iD = [iD]$ は principal divisor となり，(1.5) (*) に反する．

(2.2)　$S$ の $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} \mathfrak{a}_i u^i$ の形の divisorial ideal を，"homogeneous" divisorial ideal という．($\mathfrak{a}_i$ は $R$ の

divisorial ideal). $S$ の "homogeneous" ideals で生成される $\mathrm{Div}(S)$ の subgroup を $\mathrm{HDiv}(S)$, 更に principal "homogeneous" divisors で生成される $\mathrm{HDiv}(S)$ の subgroup を $\mathrm{HP}(S)$ と書く。このとき (2.0) の (i) 又は (ii) の仮定の下に、$\mathrm{HDiv}(S) \cap P(S) = \mathrm{HP}(S)$ となり、($P(S) = \{\mathrm{div}_S(f) \mid f \in Q(S)^*\}$)

$$\mathrm{HCl}(S) := \mathrm{HDiv}(S)/\mathrm{HP}(S) \hookrightarrow \mathrm{Cl}(S) = \mathrm{Div}(S)/P(S).$$

(但し、$\mathrm{HDiv}(S)$ の生成元は prime divisors では取れない)

以後 $D = \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i}{q_i} V_i$ ($V_i = V(g_i)$, $\mathrm{ht}(g_i) = 1$, $(q_i, p_i) = 1$) と書く。また、$D' := \sum_{i=1}^{s} \frac{q_i - 1}{q_i} V_i$ とおく。このとき、$R \hookrightarrow S$ は各 $g_i$ $(i = 1, \dots, s)$ で $q_i$ 次の分岐をしているので、$j(R(E)) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(E + iD) \cdot u^i$ とおくと、

$$0 \to \mathrm{Div}(R) \xrightarrow{j} \mathrm{HDiv}(S) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z} \to 0 \quad (\text{exact}).$$

また、$S$ の "homogeneous" principal divisor は $g \cdot u^i$ の形 ($g \in K^*$) だから、$\mathrm{HP}(S)/P(R) \cong \mathbb{Z}_r$ ($\mathrm{div}_S(u)$ で生成)。

また、$g \cdot u^a S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} g \cdot R(iD) \cdot u^{i+a} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R((i-a)D - \mathrm{div}_R(g)) \cdot u^i$ より、$j(E) \in \mathrm{HP}(S) \iff \exists g \in K^*, \exists a \in \mathbb{Z}, E = \pm D + \mathrm{div}_R(g)$.

これより次のダイアグラムを得る (タテ、横は exact)

(2.3)
$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P(R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Div}(R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Cl}(R) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{j}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dot{H}P(S) \arrow[r] \arrow[d] & H\mathrm{Div}(S) \arrow[r] \arrow[d] & H\mathrm{Cl}(S) \arrow[r] & 0 \\
 & \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z} \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

系 (2.4). $0 \to \mathbb{Z}.\mathrm{cl}(LD) \to \mathrm{Cl}(R) \xrightarrow{\bar{j}} H\mathrm{Cl}(S) \to \mathrm{Coker}(\beta) \to 0$

は exact, 但し $L := \mathrm{LCM}(q_i \mid i=1, \dots, s)$.

(注) $H\mathrm{Div}(S)$ の生成元は prime divisor ではとれないので、$H\mathrm{Cl}(S) = \mathrm{Cl}(S)$ となる事は一般には期待できない。

次に canonical class $K_S$ を求めよう. $K_S \cong \mathrm{Hom}_R(S, K_R)$ より, $K_S$ は $S$ の "homogeneous" divisor である。

定理 (2.5). $K_R = R(\mathcal{K}_R)$ とするとき,

(i) $K_S \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(\mathcal{K}_R + D' + iD) \cdot u^i$,

(ii) $K_S$ が $S$-free $\iff$ $\mathcal{K}_R + D' = aD + \mathrm{div}_R(g)$

$(\exists a \in \mathbb{Z},\ g \in K^*)$.

(証明) $K_S \cong \mathrm{Hom}_R(S, K_R) = \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(iD).u^i, R(\mathcal{K}_R))$

$= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(\mathcal{K}_R - [-iD])\, u^i = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(\mathcal{K}_R + D' + iD) \cdot u^i$. ここで,

$-[-iD] = [iD + D']$ ([ ] は整数部分) を使っている。

注. 例えば, $V = V(g)$ のとき, $\mathrm{div}_R(g) = V$, $g = R(-V)$

より，$K_R = R(-\mathrm{div}_R(K_R))$，$k_R = -\mathrm{div}_R(K_R))$．

系 (2.6). $D \in \mathrm{Div}(R)$ のとき，$K_S$ が $S$-free $\Longleftrightarrow$ $k_R = tD$ ($\exists t \in \mathbb{Z}$)。このとき，$cl(k_R)$ は $Cl(R)$ で有限位数。

特に，$D = k_R$ とおいた cyclic cover を "canonical cover" と云っているが，$D \in \mathrm{Div}(R)$，$K_S$ が $S$-free のとき，$\exists s \mid r$，$sD \sim \pm k_R$ (linearly equiv.)，従って，このとき，$S$ は $R$ の canonical cover を "dominate" する．

しかし，$D$ が分数部分をもつと様相が異ってくる，

系 (2.7). $r = 2$，$S = R \oplus Iu$ ($I \subset K$) とおくとき，

(i) $K_S$ が $S$-free $\Rightarrow$ $K_R \cong R$ 又は $K_R \cong I$.

(ii) 逆に，$I \cong K_R$ なる分数イデアル $I$ に対し，$w \in K$ を $w \in R(2\mathrm{div}_R(I)) = I^{(-2)}$，$\mathrm{div}_R(w) + 2\mathrm{div}_R(I) = E$ が <u>reduced</u> にとる。($R(2\mathrm{div}_R(I))$ の定義より，$E \geqq 0$ である。) このとき，

$$S = R \oplus Iu, \quad u^2 = w$$

とおくと，$K_S \cong S$．

(証明) $D := \frac{1}{2}\mathrm{div}_R(w) = \frac{1}{2}E - \mathrm{div}_R(I) = \frac{1}{2}E + k_R$ より，$S = S(R, D, w)$. $D' = \frac{1}{2}E$ より，$k_R + D' = D$ である。

<u>Remark.</u> 「任意の Cohen-Macaulay normal domain は Gorenstein normal domain を double cover にもつ」が云えそうに思うが？ 上のように，$w \in (I^{(2)})^{-1}$ に対し，$S = R \oplus Iu$,

$u^2 = w$ とおくと，S は Gorenstein ring にはなっている。

$S = S(R, D, w)$ $\left(D := \frac{1}{2}\mathrm{div}_R(w)\right)$ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{div}_R(w) + 2\mathrm{div}_R(I)$ : reduced.

(川又 [7]，§8 に、この構成が見られる。)

例 (2.8)． $k$ : 体，$x, y, T$ を $k$ 上の変数，

$R := k[T, xT, yT, xyT, y^2T] \supset I := (xT, xyT) \cong K_R$

とすると，$w := x^{-2}T^{-1}$ とおいて，$wI^2 = (T, yT, y^2T)$ より，

$w, I$ は (2.7) の条件をみたす．このとき，

$R \oplus Iu = k[xT, xyT, xTu, xyTu] = k[U, yU, V, yV]$

$(U = xT,\ V = xTu)$．となる。$(\mathrm{ord}(\mathrm{cl}(K_R)) = \infty$ in $\mathrm{Cl}(R))$.

## §3. Regular の判定

この節でも，$(R, \mathfrak{m})$ local 又は graded ((2.0) の (i) 又は (ii)) とする。S が regular となる必要十分条件を与えるのが目的である。

まず、次の "cyclic quotient singularity" の概念が重要な役割を果す。

Def - Prop. (3.1). ([9], (5.7)). $(A, \mathfrak{m})$ : $d$ 次元 local，体 $k \cong A/\mathfrak{m}$ を含むとき，正整数 $r$ に対し次は同値

(i) $\exists H = \left\{ (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d \;\middle|\; \sum_{i=1}^{d} a_i n_i \equiv 0 \pmod r \right\} \subset \mathbb{N}^d$,

$\hat{A} \cong k[[H]] = k[[T_1^{n_1} \cdots T_d^{n_d} \mid (n_1, \dots, n_d) \in H]]$ ,

$T_1, \cdots, T_d$ は $k$ 上の不定元，$A$ 上 integral。

(ii) $\exists$ regular local $(B, n)$, $B = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} B_i$, $B_0 = A$ かつ $B_i \subset n$ $(i \neq 0)$.

$A$ がこの同値な条件をみたすとき，"cyclic quotient singularity" という。($(R, m)$ graded の時も同様に定義できる。)

$k$ が 1 の $r$ 乗根 $\zeta$ を含むとき $\mathbb{Z}_r = \langle \zeta \rangle =: G$ の $B$ ((ii) の記号) への作用を $b \rightsquigarrow \zeta^i b$ $(b \in B_i)$ によって決めると $A = B^G$ である。($G$ の invariant subring)。一般には invariant subring としては書けないので，" " をつけている次才である。

(注) このとき $Cl(B) = (0)$ より，(2.4) により $Cl(R)$ は cyclic group.

ついでに，"normal crossing" の概念をこの場合に拡張しておく。

定義 (3.2). $A$ が "cyclic quotient sing.", $B$ を (3.1) (ii) のものとする。このとき $D \in Div(A)$ が cyclic normal crossing $\Leftrightarrow$ $supp(D) \subset \sum_{i=1}^{d} V(t_j B \cap A)$, 但し $(t_1, \cdots, t_d)$ は $B$ の homogeneous ($\mathbb{Z}_r$-grading に関し) regular s.o.p.

この節の主定理を述べよう。

定理 (3.3). $(R, m)$ local, $S = S(R, D, f)$ が $r$ 次の normal cyclic cover, $D = \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i}{q_i} V_i$ $((q_i, p_i) = 1, \forall i)$ とおく。このとき，$S$ が regular $\Leftrightarrow$ 次の (1)～(4) が成立。

(1) $R$ は (3.1) の意味で、"cyclic quotient singularity".

(2) $D$ の分数部分の support は cyclic normal crossing.

(3) $q_i$ $(i=1,\dots,s)$ は2つずつ互いに素.

(4) $cl(q_1\cdots q_s\cdot D)$ が $Cl(R)$ を生成する。

証明はいくつかの step にわかれるが、面白い事に、(2.4) が良く役に立つ。

以下に於て、$S=S(R,D,f)$: normal cyclic cover, $rD=\mathrm{div}_R(f)$, $D=\sum \frac{p_i}{q_i}V_i$, $r=\min\{i>0 \mid iD\in P(R)\}$ とする。

(3.4) $t:=\min\{i>0 \mid iD\in \mathrm{Div}(R)\}$, $r=tt'$ とする。

もし $S$ が regular なら、

(1) $t=\prod_{i=1}^{s} q_i$, $(q_1,\dots,q_s)$ は2つずつ互いに素、$tD$ は $Cl(R)$ を生成,

(2) $S^{(t)}:=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{t'}} R(itD)\cdot u^{it}$ は regular local.

(証明) (2.3) に於て、$HCl(S)=(0)$ だから、

$$0\to Cl(R)\longrightarrow \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}\xrightarrow{\beta}\bigoplus_{i=1}^{s}\mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z}\to 0$$

exact。 これより (1) はあきらか。また、

$$S^{(t,j)}:=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{t'}} R((it+j)D)\cdot u^{it+j}\qquad (j=1,\dots,t-1)$$

とおくと、$S^{(t,j)}$ は $S^{(t)}$ の homogeneous divisorial ideal。さて、(2.3) に於て、$S^{(t)}$ を $S$ と思うと、

$$0\to \mathbb{Z}/(t')\longrightarrow Cl(R)\longrightarrow HCl(S^{(t)})\to 0\quad (\text{exact}).$$

$Cl(R)$ は $tD$ で生成されるから，$Hcl(S^{(t)})=(0)$ となる。各 $S^{(t,j)}$ は従って $S^{(t)}$-free。 $S=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_t} S^{(t,j)}$ は従って $S^{(t)}$-free. ゆえに，$S^{(t)}$ は regular local である。

これで，(3.4) は証明されたが，これにより，(3.3) の (1), (3), (4) が必要条件である事がわかる。また，(3.4) により，① $D\in Div(R)$，② $R$ : regular の場合にわけられる。

(3.5) $R$ : "cyclic quotient sing."，$D\in Cl(R)$，$r=\operatorname{ord}(cl(D))$ のとき，$S=S(R,D,f)$ が regular $\Longleftrightarrow$ $cl(D)$ が $Cl(R)$ を生成する。（ $rD=\operatorname{div}_R(f)$ とする。）

（証明） $\Rightarrow$) は (2.3) よりただちに得られる。

$\Leftarrow$) $S'=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{r'}} S'_i$ が regular とする。（ $S'_0=R$ ）

(3.4) により，$S'$ は $R$ の integral divisor による cyclic covering と思える。 このとき，$Cl(R)\cong\mathbb{Z}_{r'}$ で $cl(S'_1)$ で生成される。$cl(D)$ は $Cl(R)$ の生成元だから，$r=r'$，$\exists j$，$(r,j)=1$，$jD\sim S'_1$ (linearly equiv.) degree を $i\longmapsto ij$ とかえる事により，$S(R,D,f)\cong S(R,jD,f^j)\cong S'$ であるから，$S$ は regular である。

次に $R$ が regular の場合を考える．このとき，$Div(R)$

$= P(R)$ だから，$R$ の integral divisor は無視できる。

(3.6) $R$ : regular, $D = \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i}{q_i} V_i$, $\forall i$, $q_i \geqq 2$ とする。$rD = \mathrm{div}_R(f)$ のとき，$S = S(R, D, f)$ が regular $\Longleftrightarrow$

$\begin{cases} \text{①} \quad r = \prod_{i=1}^{s} q_i, \quad (q_i, q_j) = 1 \quad (i \neq j). \\ \text{②} \quad V_i = V(g_i) \text{ とおくとき，} (g_1, \ldots, g_s) \text{ は normal} \end{cases}$

crossing (即ち，$(g_1, \ldots, g_s)$ は regular s.o.p. の一部.)

(証明) $s$ に関する帰納法による。$s = 1$ のとき，$a_1 p_1 \equiv 1 \pmod{q_1}$ なる $a_1$ に対し，$S$ の grading を $S_j \longrightarrow S_{a_1 j}$ として，$p_1 = 1$ として良い。すると $S \cong R[U]/(U^r - g_1)$，$r \geqq 2$ のとき，$S$ が regular $\Longleftrightarrow$ $R/(g_1)$ が regular.

$t_s := q_1 \cdots q_{s-1}$，$r_s := t/t_s$ とおく。$D_s := t_s D$ として，$S' := S(R, D_s, f)$ は $R$ の $r_s$ 次の cyclic cover である。

($\Rightarrow$) ① は (3.4) で示されているから，② を示す。また，$(t_s, q_s) = 1$ より $D_s$ の分数部分も $\frac{p_s'}{q_s} \cdot V_s$，$(q_s, p_s') = 1$ で，(2.3) より，$\mathrm{Hcl}(S') = (0)$。従って (3.4) と同様に $S$ は $S'$ 上 free。ゆえに $S'$ も regular。$S' \cong R[U]/(U^{q_s} - g_s)$ が regular，$S$ は $S'$ の $t_s$ 次の cyclic cover で，$S = S(S', \sum_{i=1}^{s-1} \frac{p_i}{q_i} V_{S'}(g_i), f)$ だから，帰納法の仮定より，$S'/(g_1, \ldots, g_{s-1}) \cong (R/(g_1, \ldots, g_{s-1}))[U]/(U^{q_s} - g_s)$ が regular. ゆえに $(g_1, \ldots, g_{s-1}, g_s)$ は $R$ の regular s.o.p. の一部.

($\Leftarrow$) も同様に得られる。

$R=\bigoplus_{n\geqq 0} R_n$ を normal graded ring とする。Demazure [1] により，R の商体の homogeneous, degree 1 の元 $T\neq 0$ を fix すると，$\exists_1\, D\in \mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$， ND : ample Cartier divisor $(\exists N>0)$, $(R^{(N)}=R_0[R_N]$ なる N に対し)，

$$R=\bigoplus_{n\geqq 0} H^0(X,\mathcal{O}_X(nD)).T^n.$$

このとき，$R=R(X,D)$ と書く。更に $U:=U(X,D)=\mathrm{Spec}(R)-V(R_+)$ とおく。U が regular となるための条件を考えたい。($R_0=k$：体のとき，U が regular $\Leftrightarrow$ R は孤立特異点)。

ところで，$U(X,D)\cong \mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(nD).T^n)$ と X 上の fibre 構造をもち，更に，$U^{(N)}(X,D):=\mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(nND).T^{nN})$ は X 上の $\mathbb{A}^1$-bundle であり，$U(X,D)$ は $U^{(N)}(X,D)$ の N 次の cyclic cover である。従って U が regular になるための判定法に (3.3) が応用でき，次の結果を得る。

<u>定理</u> (3.7). $R=R(X,D)$ を normal graded ring, $U=U(X,D)=\mathrm{Spec}(R)-V(R_+)$ とするとき，U が regular $\Leftrightarrow$ X の各 closed point $x$ に於て，次の4つの条件が成立する。

(1) $\mathcal{O}_{X,x}$ は (3.1) の意味で "cyclic quotient sing."

(2) D の分数部分は $x$ に於て (3.2) の意味で，cyclic normal crossing.

(3) $D=\sum_{i=1}^{s}\frac{p_i}{q_i}V_i$ $((q_i, p_i)=1)$, $V_i \neq V_j$ が共に $x$ を通るとき, $(q_i, q_j)=1$.

(4) $\left(\prod_{\substack{1\le i\le s \\ V_i \ni x}} q_i\right)\cdot D$ の class が $Cl(\mathcal{O}_{X,x})$ を生成する。

証明は cyclic cover $U(X,D) \to U^{(N)}(X,D)$ を $x$ の近傍で見る事により得られる。

## §4. Rational singularity, F-pure and F-regular Rings, ....

$S = S(R,D,f)$ がいつ rational singularity か? という問には良い答が得られていないが, もう少し強い概念に対しては定式化ができる。

([6] 参照.)

定義 (4.1). $X$ : $d$ 次元 normal variety, $\Delta \in Div(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ のとき, $(X, \Delta)$ が log-terminal $\Leftrightarrow$ 次の (1)～(3) をみたす。

(1) $\exists t>0$, $t(K_X+\Delta)$ は Cartier divisor.

(2) $[\Delta]=0$ $\left(\Delta=\sum_{i=1}^{s}d_iV_i,\ d_i\in\mathbb{Q},\ 0<{}^{\forall}d_i<1,\ s\geq 0\right)$

(3) $\exists f: Y \to X$ resolution of sing., $f$ の excep. locus と $f^{-1}(supp(\Delta))$ の和集合が normal crossing divisor で,

$$K_Y = f^*(K_X+\Delta) + \sum a_jF_j \qquad (a_j\in\mathbb{Q},\ {}^{\forall}a_j>-1)$$

(但し, $F_j$ は $f$ に関し exceptional — $\dim F_j > \dim f(F_j)$)

特に、$\Delta = 0$ のとき $X$ が <u>log-terminal sing.</u> という。一般に log-terminal sing. $\Rightarrow$ rational sing.，$X$ が Gorenstein のとき逆が成立する。このとき，標数 0 の体上 ess. of finite type のカテゴリーで次が成立する。（証明略）

<u>定理</u>（4.2）．$S = S(R, D, f)$ : normal cyclic cover of order $r$ of $R$ とするとき，$S$ が log-terminal of index $t$ （$t \cdot K_S$ が principal）$\Longleftrightarrow$ 次の (i), (ii)

(i) $\exists a'$, $t \cdot (K_R + D') - a'D \in P(R)$．（$D'$ は (2.2) 参照）

(ii) $(\mathrm{Spec}(R), D')$ が log-terminal.

"標数 0" の世界では今のところ，どうしても resolution のお世話になるが，標数 $p > 0$ のとき，Frobenius map を使った，F-regular，F-rational，F-pure 等の概念がある。やはり，"F-rational" については $S$ が F-rational $\Rightarrow$ $R$ も so. 位しかわからないが，(4.1) のまねをして，"$(R, D')$ という組が F-regular，F-pure" を定義してみる。（[2], [4], [5] 参照）

<u>定義</u>（4.3）．$(R, \mathfrak{m})$: normal, ess. of finite type $/k$, $\mathrm{char}(k) = p > 0$, perfect，$(R, \mathfrak{m})$ は local 又は graded とする。canonical module を $K_R = R(K_R)$，$d = \dim(R)$ とする。また，$D = \sum \frac{p_i}{q_i} V_i$，$D' = \sum \frac{q_i - 1}{q_i} V_i$ とし，$rD = \mathrm{div}_R(f)$ を仮定する。このとき，

(1) $(R, D')$ が F-pure $\Longleftrightarrow$ $F : H^d_{\mathfrak{m}}(K_R) \to H^d_{\mathfrak{m}}(R(p(K_R + D')))$

が injective.（F は Frobenius map）

(2) $(R, D')$ が F-regular $\iff$ $F^e: H^d_m(K_R) \to H^d_m(R(q(K_R+D')))$ $(q := p^e)$, $z \in H^d_m(K_R) \cong E_R(R/m)$ を socle の生成元とするとき, $\bigcap_{e>0} \mathrm{Ann}_R(F^e(z)) = (0)$.

このとき,

定理 (4.4). R は (4.3) と同じ, $S = S(R, D, f)$ が r 次の normal cyclic cover, $(p, r) = 1$ とする。このとき,

(1) S が F-pure $\iff$ $(R, D')$ が F-pure

(2) S が F-regular（正確には strongly F-regular; [3], [4] 参照）$\iff$ $(R, D')$ が F-regular.

(4.2), (4.2) 共に, S がこれらの性質をみたすための条件が、個々の D でなく, D の「分岐」を表す D' にしかよらないのが興味深い所である.

(4.4) の証明は, $E_S(S/n) \cong H^d_m(K_S) \cong H^d_m(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} (K_R + D' + iD) \cdot u^i)$ の socle が $H^d_m(K_R)$ の socle と一致する事を見れば, すぐに従う（[11] 参照）.

References.

[1] M. Demazure, Anneaux gradués normaux, in "Introduction a la théorie des singularités II, (ed. Lê Dũng Tráng), Hermann, Paris, 1988, pp. 35-68.

[2] R. Fedder and K.-i. Watanabe, A characterization of F-regularity in terms of F-purity, in "Commutative Algebra", Math. Sci. Research Inst. Publ. 15, 227-245, Springer, 1989.

[3] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure and strong F-regularity, Mem. Soc. Math. de France, 38 (1989), 119-133.

[4] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem, J. of A. M. S. 3 (1990), 31-116.

[5] M. Hochster and J. L. Roberts, The purity of the Frobenius and local cohomology, Adv. in Math. 21 (1976), 117-172.

[6] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, Introduction to minimal model problem, Adv. Studies in Pure Math. 10 (1987), 283-360.

[7] Y. Kawamata, The crepant blowing-ups of 3-dimensional canonical singularities and its applications to degenerations of surfaces, Ann. of Math. (2) 127 (1988), 93-163.

[8] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965.

[9] M. Tomari., K.-i. Watanabe., Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with " star-shaped " resolution, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 25 (1989), 681-740.

[10] K.-i. Watanabe., Some remarks concerning Demazure's construcution of normal graded rings. Nagoya Math. J. 83 (1981) 203-211.

[11] K.-i. Watanabe, F-regular and F-pure normal graded rings, J. of Pure and Appl. Alg. 71 (1991), 341-350.

# A new proof of the theorem of Eakin-Nagata

岡山理科大学応用数学　永田雅宜　(NAGATA Masayoshi)

In this article,we mean by a ring a commtative ring with identity. We are giving a new and very simple proof of the following theorem, which is known as the theorem of Eakin-Nagata ([2],[3],[4]).

Theorem. Let A be a subring of a noetherian ring R. If R is finitely generated as an A-module, then A is noetherian.

In the previous proofs,we used the theorem of Cohen, which asserts as follows:

Theorem of Cohen (cf.[1]). A ring A is noetherian if (and only if) every prime ideal of A has a finite basis.

In this new proof, we need not use the theorem of Cohen.

Proof of the theorem. We use an induction on the largeness of ideals of R. Then our induction hypothesis is stated as follows:

If J is a non-zero ideal of R, then $A/(J \cap A)$ is noetherian.

(1) Assume first that A is an integral domain. Since R is integral over A, there is a prime ideal of R lying over {0} of A.Therefore, we may assume that R is an integral domain.Then, there are elements $c_1, \ldots, c_m$ of R such that (i) $A[c_1, \ldots, c_m]$ is a free A-module and (ii) the field of fractionsof $A[c_1, \ldots, c_m]$ coincides with that of R. If we see that $A[c_1, \ldots, c_m]$ is noetherian, then we see easily that A is noetherian, because $A[c_1, \ldots, c_m]$ is a free A-module. Thus we may assume that the field of fractions of A coincides with that of R. Then, there is a

non-zero element d of A such that $dR \subseteq A$. We have only to show that an arbitrary ideal I ($\neq \{0\}$) of A has a finite basis. We may choose d from elements of I. $A/d^2R$ is noetherian by our assumption, and I modulo $d^2R$ has a finite basis. Since $d^2R \subseteq dA \subseteq I$, we see that I has a finite basis, and A is noetherian.

(2) Assume now that A contains a zero-divisor b ($\neq 0$). Consider bR as an A-module. This is really an $A/(0:bA)$-module,and $0:bA = (0:bR) \cap A$. Therefore bR is a noetherian module by our assumption, and its sub-module $J = bR \cap A$ is a noetherian module. Let I be an arbitrary ideal of A. Since A/J is noetherian by our assumption, we see that I + J has a finite basis. Take $a_1, \ldots, a_n \in I$ such that $\Sigma_i a_iA + J = I + J$. Then $I = \Sigma_i a_iA + (J \cap I)$. Since J is a noetherian module, we see that I has a finite basis. QED

## References


[1] Cohen,I.S., Commutative rings with restricted minimum condition, Duke Math.J.17 (1950),27-42.

[2] Eakin,P.M.Jr, The converse to a well known theorem on noetherian rings,Math.Ann.177 (1968),278-282.

[3] Nagata,M., A type of subring of a noetherian ring,J.Math.Kyoto Univ.8 (1968),465-467.

[4] Nagata,M., A proof of the theorem of Eakin-Nagata,Proc.Jap.Acad. 67,ser.A (1991),238-239.



Acknowledgement. This simplification of the proof is owing to the writer's discussion with Dr. Shiro GOTO.