研 究 集 会

第14回可換環論シンポジウム

1992年11月24～27日

於　第百生命・野沢研修所

平成4年度文部省科学研究費総合A

（課題番号 04302003 代表　丸山 正樹）

序

この報告集に収録されている論文は、第 14 回「可換環論シンポジウム」の講演の記録です。この研究集会は、京都大学の丸山正樹氏を代表とする科研費総合 A の援助の下に、1992 年 11 月 24 日から 27 日にかけて、第百生命・野沢研修所で開かれました。延べ 70 名の参加者が熱心に聞き入るなかで、合計 25 の非常に興味深い講演が行なわれ、第一級の優れた研究集会であったことをご報告申し上げます。また、3 時間をかけて解説を行ない、多元環の表現論への明快な展望を与えて下さいました筑波大学山形邦夫氏のご尽力に対し深い謝意を表し、この二つの分野の相互交流がますます活発となることを望みます。

末尾になりましたが、会場となった研修所の使用をはじめ、便宜をお図り下さいました第百生命野沢研究センターに感謝します。

1993 年 1 月

後藤 四郎・渡辺 敬一

プログラム

11 月 24 日 (火)

15:00 ~ 16:30　受け付け

16:30 ~ 17:30　小野田 信春 (福井大教育)
G_a-action の invariants について

19:00 ~ 20:00　後藤 四郎 (明大理工)
Graded rings associated to ideals of small analytic deviation

20:10 ~ 20:40　永田 雅宜 (岡山理大理)
Eakin - Nagata - Formanek Theorem

20:50 ~ 21:20　鴨井 祐二 (都立大理)
アーベル群を grading に持つ graded ring について

11 月 25 日 (水)

9:00 ~ 9:50　日比 孝之 (北大理)
Canonical modules and Cohen-Macaulay types of modular lattices

10:00 ~ 11:00　蔵野 和彦 (都立大理)
intersection multiplicity の正値性について

11:10 ~ 12:10　山形 邦夫 (筑波大数学系)
線形代数から多元環の表現論へ (I)

13:30 ~ 14:30　中島 晴久 (慶大教養)
群表現の余正則拡大について

14:40 ~ 15:30　吉野 雄二 (京大総合人間学部), 加藤 希理子 (京大数理研)
Auslander modules and quasi-homogeneity of local rings

15:40 ~ 16:30　山岸 規久道 (姫路獨協大一般教育部)
Blowing-up characterizations of Cohen-Macaulay rings

16:40 ~ 17:30　中村 幸男 (都立大理)
Gorenstein graded rings associated to ideals of small analytic deviation

19:00～20:00　浅沼 照雄（富山大教育）
$R[X,Y]$ の R-自己同型について

20:10～20:40　吉田 憲一（岡山理大）
Primary ideals の分類

20:50～21:20　岡部 章（小山高専），松田 隆輝（茨城大理）
On an AACDMZ question

11 月 26 日（木）

9:00～9:50　池田 信（岐阜教育大）
On normal local rings with multiplicity 3 over a field of characteristic zero

10:00～11:00　渡辺 公夫（筑波大数学系）
Survey of purely elliptic singularities

11:10～12:10　山形 邦夫（筑波大数学系）
線形代数から多元環の表現論へ (II)

13:30～14:30　石田 正典（東北大理）
正規可換半群の交叉複体

14:40～15:20　柳川 浩二（名大理）
0-次元スキームに関する Castelnuovo-Eisenbud-Harris の定理の別証明と拡張

15:25～16:05　寺井 直樹（阪大理）
non-C-M ASL domain の存在について

16:10～16:50　吉田 健一（名大理）
Ulrich module とその一般化について

16:55～17:35　川崎 健（都立大理）
local rings の type について

18:00～20:00　懇親会

11 月 27 日（金）

9:00～9:50　渡辺 純三（東海大理）
デデキント和の初等的性質と Mordell の公式の一般化

10:00～10:50　大石 彰（横浜国大教育）
特異点の接錐について

11:00～11:50　山形邦夫（筑波大学数学系）
線形代数から多元環の表現論へ(III)

目　　次

G_a-action の invariants について

福井大・教育　　小野田 信春

1、<u>主定理</u>　k は標数 $p \geqq 0$ の無限体とする。自然数 m と $SL_2(k)$ の要素 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、X の多項式 $(a+bX)^{m-i}(c+dX)^{i-1}$ を展開したときの X^{j-1} の係数を α_{ij} として、

$$\rho_m(M) = (\alpha_{ij}) \qquad 1 \leqq i, j \leqq m$$

とすることにより有理表現 $\rho_m : SL_2(k) \longrightarrow GL_m(k)$ を定める。k の加法群 G_a を $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in k \right\}$ と同一視することで $SL_2(k)$ の部分群とみなせば、ρ_m を G_a に制限することで G_a の表現が得られるが、これも同じ ρ_m で表わすことにする。具体的にはこの表現は、

$$\rho_m(\lambda) = \left(\binom{m-i}{j-i} \lambda^{j-i} \right) \qquad 1 \leqq i, j \leqq m, \quad \lambda \in k$$

で与えられる。

<u>定義</u> 1.1　表現 $\rho : G_a \to GL_n(k)$ が standard であるとは、$i_1 + \cdots + i_r = n$ を満たす自然数 $i_1, \cdots, i_r$ が存在して、ρ が $\rho_{i_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{i_r}$ と equivalent になることをいう。但し、$ch(k) = p > 0$ のときは、各 i_j は $i_j < p$ を満たすものとする。

<u>注意</u>　$ch(k) = 0$ かつ $k = \bar{k}$ ならば、すべての表現は standard である（[1] 参照）。

以下、standard な表現 $\rho : G_a \to GL_n(k)$ を1つ固定し、この表現により定まる G_a の多項式環 $A = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ への線形作用を考察する。但し、$M \in GL_n(k)$ の $f(x_1, \cdots, x_n) \in A$ への作用は

$$M \cdot f = f((x_1, \cdots, x_n)M)$$

で定義するものとする。

この作用に関する不変部分環を $R = A^{G_a}$ とおく。このとき、次の事実が知られている（[4], [5] 参照）。

FACT ① R は UFD（一意分解整域）である。

② 部分環 $S \subset R$ で次の2条件 (イ) (ロ) を満たすものが存在する：

(イ) S は k 上 $(n-1)$ 変数多項式環と同型である。

(ロ) $0 \neq f \in S$ で、$S[f^{-1}] = R[f^{-1}]$ となるものがある。

従って、特に $\dim R = n-1$ である。

R の特異点の状況については、詳しいことは知られていない様に思う。少し具体例を挙げておくことにする。

例 1.2 $\rho_n : G_a \to GL_n(k)$ から定まる G_a の $k[x_1, \cdots, x_n]$ への作用について考えてみる。n が小さいときは、不変部分環 R は次の様になる。

(イ) $n=2$ のとき $R = k[x_1]$

(ロ) $n=3$ のとき $R \cong k[X, Y]$

(ハ) $n=4$ のとき $R \cong k[X, Y, Z, U]/(X^2U + Y^3 + Z^2)$

(ニ) $n=5$ のとき $R \cong k[X, Y, Z, U, V]/(X^3V + Y^3 + Z^2 + X^2YU)$

$n \geq 6$ について R を具体的に決定することは難しい。

上の例で与えられた R は全て regular 又は hypersurface であるが、もちろん、一般的にはこんな単純ではない。但し、次はいえる。

主定理　仮定、記号は上の通りとする。このとき

(1) $\mathrm{ch}\,k=0$ ならば R は Gorenstein 環である。

(2) $\mathrm{ch}\,k=p>0$ のとき、固定された n に対し、p を十分大きくとれば R は Gorenstein 環である。

本稿はこの定理の証明を主目的とし、更に関連する事項について述べてみたい。

2. 証明の概略　R は UFD であるから、主定理を示すには、R が CM (Cohen-Macaulay) であることを言えば十分である。まず、k の標数が 0 の場合を考える。y_0, y_1 を新しい変数として多項式環 $B=A[y_0,y_1]\,(=k[x_1,\cdots,x_n,y_0,y_1])$ とおき、$\bar{\rho}=\rho\oplus\rho_2 : G_a\to GL_{n+2}(k)$ から定まる G_a の B への線形作用を考える。ρ は

$$\rho : SL_2(k[y_0,y_1,\tfrac{1}{y_1}])\longrightarrow GL_n(k[y_0,y_1,\tfrac{1}{y_1}])$$

に自然に拡張できることに注意して欲しい。この写像による $M=\begin{pmatrix} y_1 & 0\\ -y_0 & y_1^{-1}\end{pmatrix}$ の像を M_1 とおく。つまり $M_1=\rho\begin{pmatrix} y_1 & 0\\ -y_0 & y_1^{-1}\end{pmatrix}$ である。この M_1 を用いて、環準同型写像

$$\varphi : A=k[x_1,\cdots,x_n]\longrightarrow k[x_1,\cdots,x_n,y_0,y_1,y_1^{-1}]$$

を

$$\varphi(f(x_1,\cdots,x_n))=f((x_1,\cdots,x_n)M_1)$$

により定義する。φ はもちろん単射である。ところで、$\bar{\rho}$ は $SL_2(k)$ の表現 $SL_2(k)\to GL_{n+2}(k)$ に拡張可能であり、従って不変部分環 $B^{SL_2(k)}$ を考えることができるが、このとき実は次が成り立つ。

命題 2.1　$\varphi(R)=B^{SL_2(k)}$　従って　$R\cong B^{SL_2(k)}$ である。

証明　まず $\varphi(R)\subseteq B$ を示す。$N_1=\rho\begin{pmatrix} y_1 & y_0^{-1} \\ -y_0 & 0\end{pmatrix}$ とおき、環準同型写像 $\psi: A \longrightarrow A[y_0, y_1, y_0^{-1}]$ を

$$\psi(f(x_1,\cdots,x_n)) = f((x_1,\cdots,x_n)N_1)$$

で定義する。すると、

$$M_1^{-1}N_1 = \rho\left(\begin{pmatrix} y_1^{-1} & 0 \\ y_0 & y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_0^{-1} \\ -y_0 & 0\end{pmatrix}\right) = \rho\begin{pmatrix} 1 & (y_0y_1)^{-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ゆえ、$f\in R=A^{G_a}$ なら $M_1^{-1}N_1\cdot f = f$ となり $M_1\cdot f = N_1\cdot f$ を得る。これは $\varphi(f)=\psi(f)$ ということを意味する。$\varphi(f)\in A[y_0, y_1, y_1^{-1}]$ かつ $\psi(f)\in A[y_0, y_1, y_0^{-1}]$ ゆえ、よって $\varphi(f)\in A[y_0, y_1] = B$ が示せた。

次に $\varphi(R)\subseteq B^{SL_2(k)}$ を示そう。$f\in R$ と $\sigma=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in SL_2(k)$ を任意にとる。$SL_2(k)$ の B への作用は $\bar{\rho}=\rho\oplus\rho_2 : SL_2(k)\to GL_{n+2}(k)$ から定まったものゆえ、σ の $\varphi(f)$ への作用は、

$$\sigma\cdot\varphi(f) = f\left((x_1,\cdots,x_n)\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\rho\begin{pmatrix}\beta y_0+\delta y_1 & 0 \\ -(\alpha y_0+\gamma y_1) & (\beta y_0+\delta y_1)^{-1}\end{pmatrix}\right)$$

となることがわかる。よって、$\sigma\cdot\varphi(f)=\varphi(f)$ をいうには

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta y_0+\delta y_1 & 0 \\ -(\alpha y_0+\gamma y_1) & (\beta y_0+\delta y_1)^{-1}\end{pmatrix}\cdot f = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ -y_0 & y_1^{-1}\end{pmatrix}\cdot f \qquad \cdots\cdots (*)$$

がいえればよい。ところが

$$\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ -y_0 & y_1^{-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta y_0+\delta y_1 & 0 \\ -(\alpha y_0+\gamma y_1) & (\beta y_0+\delta y_1)^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

（但し $u=\beta/y_1(\beta y_0+\delta y_1)$ ）

かつ $f\in R=A^{G_a}$ ゆえ $(*)$ が成り立つ。よって $\varphi(R)\subseteq B^{SL_2(k)}$ がわかった。さて、$B^{SL_2(k)}\subseteq B^{G_a}$ であり、B のイデアル $(y_0, y_1-1)B$ は G_a-stable であることに注意して欲しい。そこで環準同型写像

$$\phi: B = A[y_0, y_1] \xrightarrow[\substack{y_0=0\\ y_1=1}]{} A$$

を考えてみる。φの定義より $\phi\cdot\varphi = id$ である。さらに $\mathrm{Ker}\,\phi = (y_0, y_1-1)$ ゆえ $\phi(B^{SL_2(k)}) \subseteq R$ となり、次の可換図が得られる。

$$\begin{array}{ccc} & B^{SL_2(k)} & \\ {}^{\varphi}\nearrow & & \searrow^{\phi} \\ R & = & R \end{array}$$

従って、$(y_0, y_1-1)B \cap B^{SL_2(k)} = (0)$ がわかれば $\varphi(R) = B^{SL_2(k)}$ となり証明が完了する。そこで $F = y_0 f + (y_1-1)g \in B^{SL_2(k)}$ を任意にとる。$\sigma = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in SL_2(k)$ に対し、$\sigma\cdot F = F$ ゆえ $\tilde{f}, \tilde{g} \in B$ が存在して、

$$y_0 f + (y_1-1)g = a y_0 \tilde{f} + (c y_0 + \frac{1}{a} y_1 - 1)\tilde{g}$$

が成り立つ。$y_0 = 0$ を代入して

$$(y_1-1)g = (\frac{1}{a} y_1 - 1)\tilde{g}$$

となり、よって $(a y_1 - 1) \mid g$ ($\forall a \in k^*$) となることがわかる。kは無限体ゆえまず $g=0$ を得る。よって、$F = y_0 f$ となるが、次に $\tau = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^{-1} \end{pmatrix}$ について $\tau\cdot F = F$ ゆえ $y_0 f = (a y_0 + y_1)\tilde{f}$ と表わせ、上と同様にして $f = 0$ がわかる。以上で $F = 0$ が示せた。■

$\mathrm{Ch}(k) = 0$ なら $SL_2(k)$ は半単純ゆえ $B^{SL_2(k)}$ はCMになる。従って主定理の(1)は命題2.1の系として得られる。主定理の(2)を導くには次のようにすればよい。

$k = \mathbb{Q}$(有理数体)の場合のRの生成元を $f_1, f_2, \cdots, f_N$ としよう。即ち、$R = \mathbb{Q}[f_1, f_2, \cdots, f_N]$ とする。このとき、次が成り立つ。

<u>定理</u>2.2　kの標数pは正とする。このとき、pが十分大きければ

$$R = k[f_1, f_2, \cdots, f_N]$$

が成り立つ。

主定理(2) は主定理(1) と定理 2.2 より得られるが詳略については省略することにする。

3. Reynolds operator　この節では $ch(k)=0$ と仮定する。前節の議論からわかるように、主定理は $B^{SL_2(k)}$ が CM となることの系であった。ところで、$B^{SL_2(k)}$ が CM になるのは、$B^{SL_2(k)}$ が $B^{SL_2(k)}$-加群として B の直和因子になることの帰結である。この最後の事実は代数群の一般論より得られるが、G_a の作用との関連で捉えれば、次のようにしてより初等的にも証明することができるので、それを紹介したい。ただし、$B^{SL_2(k)}$ と B の関係は $A^{SL_2(k)}$ と A の関係と同じなので、ここでは $A^{SL_2(k)}$ が A の直和因子になることを示すことにする。

$f \in A$ と $\lambda \in G_a$ に対し、λ の f への作用 $\lambda \cdot f$ は λ についての多項式の形に整理できる。そこで

$$\lambda \cdot f = \sum_{i \geq 0} D_i(f)\lambda^i \qquad (\lambda \in G_a,\ f \in A)$$

により写像 $D_i : A \longrightarrow A$ $(i \geq 0)$ を定義することができるが、このとき $\mathbb{D} = \{D_0, D_1, \cdots\}$ は locally finite iterative higher derivation と呼ばれるものになることが知られている（[4]参照）。また、R は $\mathbb{D}$ の ring of constants に一致するが、いまの場合 $ch(k)=0$ と仮定しているので $D_i = (1/i!)D_1^{\,i}$ $(i \geq 0)$ となり、$D = D_1$ とおくと $R = \{f \in A \mid D(f) = 0\}$ がわかる。D は A の k-導分である。逆に $D \in Der_k(A, A)$ に対して、G_a の A への作用を決めることができ、従って、G_a の A への作用と $D \in Der_k(A, A)$ とは1対1に対応する。この D は表現 $\rho : G_a \to GL_n(k)$ と A に依存して決まるので、記号では $D(\rho, A)$ で表わすことにする。

以下、$S = A^{SL_2(k)}$ とおく。もちろん、S は R の部分環である。

まず、前節で定義した写像 $\varphi: A \longrightarrow A[y_0, y_1, y_1^{-1}]$ と S との関係については次が成り立つ.

<u>命題</u> 3.1 $S = \{ f \in A \mid \varphi(f) = f \}$

更に、次の命題も成り立つが、その際、$R \cap D(A)$ が R のイデアルになる点に注意しておいて欲しい.

<u>命題</u> 3.2 S-加群として直和分解 $R = S \oplus (R \cap D(A))$ が成り立つ。特に $R/(R \cap D(A)) \cong S$ となる。

以上2つの命題の証明は省略する。さて、ここで変数 $x_1, \cdots, x_n$ を基底とするベクトル空間 $V = kx_1 + \cdots + kx_n$ とその双対空間 $V^* = kx_1^* + \cdots + kx_n^*$ を考える（x_i^* は x_i の双対基底）. $A = Sym(V)$（= 対称代数）であることに注意して欲しい. そこで $Sym(V^*) = k[x_1^*, \cdots, x_n^*]$ を考え、これが自然に A^* と同一視できるように次の様に定める。

$$(x_1^{*i_1} \cdots x_n^{*i_n})(x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}) = \begin{cases} i_1! \cdots i_n! & (i_1 = j_1, \cdots, i_n = j_n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

換言すれば $x_1^{*i_1} \cdots x_n^{*i_n} = i_1! \cdots i_n! (x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n})^*$ ということである。次に転置表現 ${}^t\rho : G_a \rightarrow GL_n(k)$ を考え、これにより定まる G_a の $A^* = k[x_1^*, \cdots, x_n^*]$ への線形作用を調べてみる. D の双対写像を D^* で表わすとき、次が成り立つ

<u>命題</u> 3.3 $D({}^t\rho, A^*) = D^*$

さて、次の（k-加群としての）完全列を考えよう.

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{D} A \xrightarrow{\pi} A/D(A) \longrightarrow 0$$

この双対として次の完全列を得る。

$$0 \leftarrow R^* \xleftarrow{\iota^*} A^* \xleftarrow{D^*} A^* \xleftarrow{\pi^*} (A/D(A))^* \leftarrow 0$$

従って命題3.3より $(A/D(A))^* \cong A^{*G_a}$ がわかる。次に可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 & A/D(A) \arrow[l] & A \arrow[l, "\pi"'] & \\
0 & R/R\cap D(A) \arrow[l] \arrow[u, "\iota_0"] & R \arrow[l] \arrow[u, "\iota"] & S \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

を考えてみる。これの双対は

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A/D(A))^* \arrow[r] \arrow[d, "\iota_0^*"] & A^* \arrow[d, "\iota^*"] & & \\
0 \arrow[r] & (R/R\cap D(A))^* \arrow[r] \arrow[d] & R^* \arrow[r] \arrow[d] & S^* \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

であるが、ここで

$$\ker \iota_0^* = \ker \iota^* \cap (A/D(A))^* = D^*(A^*) \cap A^{*G_a}$$

ゆえ従って $(R/R\cap D(A))^* = A^{*G_a}/D^*(A^*)\cap A^{*G_a}$ がわかる。従って命題3.2より $\nu^* : (R/R\cap D(A))^* \longrightarrow (A/D(A))^*$ が存在し、その双対として写像 $\nu : A/D(A) \longrightarrow R/R\cap D(A)$ を得る。そこで、合成写像

$$\mu : A \xrightarrow{\nu\circ\pi} R/R\cap D(A) \simeq S$$

を考えてみれば、$S \hookrightarrow A \xrightarrow{\mu} S$ が直和分解を与えている。なお

以上の写像は全て k-module hom. として与えられたものだが、得られた μ が S-module hom. であることが確認できるのでこの直和分解は S-加群としての分解になっていることがわかる。

4. <u>Poincaré 級数</u>　この節では表現 $\rho_{n+1} : G_a \longrightarrow GL_{n+1}(k)$ が定める G_a の多項式環 $A = k[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ への線形作用を取り扱かう。これまでと違って、変数を x_0 から始めているが、これは便宜上の理由による。A は通常の方法で次数付き環であり、不変部分環 R は次数付き環としての部分環である。A_d および R_d で、それぞれ、A および R の d 次の斉次部分を表わすことにする。ここでは R の Poincaré 級数 $P_R(t) = \sum_{d\geq 0} (\dim_k R_d) t^d$ を決定してみる。ただし、本節を通じて $ch(k) = 0$ と仮定しておく。

対応する k-導分 D は次数付けを保つので、$D : A \longrightarrow A$ は k-module hom. $D : A_d \longrightarrow A_d$ を導き、従って

$$R_d = \{ f \in A_d \mid D(f) = 0 \}$$

となることに注意して欲しい。ここで単項式 $u = x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ に対し、$w(u) = i_1 + 2i_2 + \cdots + n i_n$ と定めて、これを u の重さと呼ぶことにする。そして、次数 d、重さ j の単項式全体の作る k-ベクトル空間を $A_{d,j}$ で表わすことにする。このとき、D が

$$D : A_{d,j} \longrightarrow A_{d,j-1} \qquad (j \geq 1)$$

を induce することが容易にわかる。ただし便宜上 $A_{d,-1} = (0)$ とおく。更に、次が成り立つ。

<u>命題</u> 4.1　$D : A_{d,j} \longrightarrow A_{d,j-1}$ は $j > [nd/2]$ のとき単射であり、また、$j \leq [nd/2]$ のとき全射である。

系4.2 $\dim_k R_d = \dim_k A_{d,[\frac{nd}{2}]}$

$$= \#\{(i_0,\cdots,i_n) \mid i_0+\cdots+i_n=d,\ i_1+2i_2+\cdots+ni_n=[\tfrac{nd}{2}]\}$$

命題4.1の証明は省略する。系4.2はこの命題から簡単に導ける。系4.2を使えば R の Poincaré 級数が次の様な形で求まる。

まず、巾級数 $F_i(x,y)$, $G_i(x)$ を定義する。

$$F_i(x,y) = \frac{1-yx^i}{(1-y)(1-yx)\cdots(1-yx^n)} \qquad (0 \leqq i \leqq [\tfrac{n}{2}])$$

$$G_i(x) = F(x, \frac{1}{x^i}) \qquad (\quad〃\quad)$$

巾級数 $f(x) = \sum_{i\geqq 0} a_i x^i \in \mathbb{Q}[[x]]$ と正整数 j に対し、

$$[f(x)]_{(j)} = a_0 + a_j x + \cdots + a_{nj}x^n + \cdots$$

と約束することにすると、次の定理が成り立つ。

定理4.3 (1) $n=2m$ のとき $P_R(t) = \sum_{i=0}^{m-1} [G_i(t)]_{(m-i)}$

(2) $n=2m+1$ のとき $P_R(t) = \sum_{i=0}^{m} [(1+t)G_i(t^2)]_{(n-2i)}$

一見複雑に思えるが、上で与えた $P_R(t)$ はかなり具体的な公式である。例えば $n=5$ の場合の $P_R(t)$ を実際に計算してみることで、この場合、R は完全交叉ではないことがわかる。更に次も得られる。

系4.4 R の a-invariant を $a(R)$ で表わすとき、$a(R) = -(n+1)$ が成り立つ。(a-invariant については [2] 参照)

注意 $n \leqq 10$ のときの $P_R(t)$ については [8] においても計算されている。

参 考 文 献

[1] J. Forgarty, Invariant Theory, Benjamin, New York, 1969

[2] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings I, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 179-213.

[3] M. Hochster and J. L. Roberts, Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, Advances in Math. 13 (1974), 115-175.

[4] M. Miyanishi and Y. Nakai, Some remarks on strongly invariant rings, Osaka J. Math. 12 (1975), 1-17.

[5] Y. Nakai, On locally finite iterative higher derivations, Osaka J. Math. 15 (1978), 655-662.

[6] C. S. Seshadri, On a theorem of Weizenböck in invariant theory, J. Math. Kyoto Univ. 1-3 (1962), 403-409.

[7] R. Stanley, Hilbert functions of graded algebras, Advances in Math. 28 (1978), 57-83.

[8] J. Sylvester, Tables of generating functions and groundforms for the binary quantics of the first ten orders, Amer. J. Math. II, (1879), 223-251.

PRIME IDEALS OF HEIGHT TWO WHOSE ASSOCIATED GRADED RINGS ARE GORENSTEIN INTEGRAL DOMAINS

— AN EXTENSION OF HUCKABA AND HUNEKE'S EXAMPLES —

Shiro Goto[1)]

Department of Mathematics, Meiji University
Tama-ku, Kawasaki-shi, Japan 214

1 Introduction.

In this paper we will provide examples of height two prime ideals whose symbolic powers coincide with the ordinary ones and whose Rees algebras and associated graded rings are both Gorenstein rings. Our method of finding examples follows the idea given by Huckaba and Huneke [**HH1**, Proposition-Example 4.1], although our situation is more general than theirs.

Let k be a field and let $m \geq 0$ and $n \geq 1$ be integers. Let $A = k[(X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, (Y_j)_{1 \leq j \leq m}]$ be a polynomial ring in $n^2 + m$ indeterminates over k. Let $X = [X_{ij}]$ denote the n by n matrix consisting of the indeterminates $(X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. We put $f = \det X$ and choose an ideal I in A so that $f \in I$ and I is unmixed of $\mathrm{ht}_A I = 2$. Let $I^{(i)}$ $(i \in \mathbf{Z})$ denote the $i^{\underline{th}}$ symbolic power of I, that is defined by

1) Partially supported by Grant-in-Aid for Co-operative Research.

$I^{(i)} = \{x \in A \mid sx \in I^i$ for some $s \in A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A A/I} \mathfrak{p}\}$. We put $R(I) = A[It]$ (here t is an indeterminate over A) and call it the Rees algebra of I. Let $G(I) = R(I)/IR(I)$.

Our purpose is to prove the following

Theorem (1.1) $I^{(i)} = I^i$ for all $i \in \mathbf{Z}$ and R(I) is a Cohen-Macaulay ring.

In this theorem, if $\sqrt{I} = I$, we can improve the second assertion and get the following

Corollary (1.2) Suppose $\sqrt{I} = I$. Then R(I) is a Gorenstein ring and hence so is the ring G(I).

If $m = 0$ and $n = 2$, we have $A = k[X,Y,Z,W]$ and $f = XY - ZW$. The assertions (1.1) and (1.2) of this situation are due to [**HH1**, Proposition-Example 4.1], assuming I is a prime ideal. If $m = n$ and if we choose I to be the ideal in A generated by the maximal minors of the following n by n + 1 generic matrix

$$\begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} & Y_1 \\ X_{21} & \cdots & X_{2n} & Y_2 \\ & \cdots & & \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} & Y_n \end{bmatrix},$$

the first assertion in (1.1) covers Hochster's second example [**Hoc**, (2.2)].

The interests of this note date back to Hochster's above paper, in which he gave a criterion for the equality of symbolic and ordinary powers of primes in a Noetherian integral domain. Added to it, he raised a question in searching for any practical strong/weak condition under which these two powers always coincide. The first answer appeared in the famous paper of Cowsik and Nori [**CN**, Proposition 3]; let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal in a regular local ring R and assume that $\dim R/\mathfrak{p} = 1$. Then $\mathfrak{p}$ is a complete intersection in R if and only if $\mathfrak{p}^{(i)} = \mathfrak{p}^i$ for all $i \in \mathbb{Z}$. In it they made a smart use of Burch's inequality [**Bu**] between the analytic spread of ideals and the dimension of the base ring. The recent striking researches of Huckaba and Huneke [**HH1**, **HH2**] also concern Hochster's question. There they gave a beautiful criterion for certain ideals of small analytic deviation which are generically a complete intersection to have symbolic powers equal to the ordinary ones. As was cited before, this paper should be looked upon a succession to [**HH1**, Proposition-Example 4.1].

However, the known class of prime ideals possessing symbolic powers equal to the ordinary ones remains rather small. As far as the author knows, the systematic examples occurred in one of the following: (1) complete intersections, (2) ideals generated by the maximal minors of generic matrices (cf. [**BU**]), and (3) examples due to [**HH1**, Proposition-Example 4.1]. For further analysis, more series of examples are wanted. In this context our generalization (1.1) and (1.2) may have some significance, for further developments of the theory of Rees algebras and associated graded rings of ideals as well.

2 Proof of Theorem (1.1) and Corollary (1.2).

We may assume $n \geq 2$. Let $A_0 = k[(X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}]$ and $B_0 = A_0/fA_0$. Let P_0 denote the ideal of A_0 generated by the maximal minors of the $n - 1$ by n matrix consisting of the first $n - 1$ rows of X. Let $\mathfrak{p}_0 = P_0/fA_0$. Then $\mathfrak{p}_0$ is a prime ideal in B_0 of height 1. B_0 is a normal ring and the divisor class group $\mathrm{Cl}(B_0)$ of B_0 is a cyclic group generated by the class $\mathrm{cl}(\mathbf{p}_0)$ of $\mathbf{p}_0$ (cf. [**Br**]).

We begin with the following, in which the second assertion is essentially due to Herzog [**Her**].

Proposition (2.1) $G(\mathbf{p}_0)$ is a Gorenstein integral domain and $R(\mathbf{p}_0)$ is a Cohen-Macaulay normal ring.

Proof. For each $1 \le j \le n$, let X_j denote the matrix obtained from X by deleting the n th row and the j th column. Let $D_j = (-1)^{j+n} \cdot \det X_j$ and put $d_j = D_j \bmod fA_0$. Hence $\mathbf{p}_0 = (d_1, d_2, \ldots, d_n)B_0$. Let $V = k[(X_{ij})_{1 \le i,j \le n}, (Z_j)_{1 \le j \le n}]$ be a polynomial ring in $n^2 + n$ indeterminates over k and let $\varphi : V \to B_0[t]$ be the homomorphism of k-algebras defined by $\varphi(X_{ij}) = X_{ij} \bmod fA_0$ $(1 \le i, j \le n)$ and $\varphi(Z_j) = d_j t$ $(1 \le j \le n)$, where t is an indeterminate over B_0. Then we have $\mathrm{Im}\ \varphi = R(\mathbf{p}_0)$ and $\mathrm{Ker}\ \varphi \supseteq K := (\{ \sum_{j=1}^{n} X_{ij}Z_j \}_{1 \le i \le n}, f)V$. Therefore, as K is a prime ideal in V with $\dim V/K = n^2$ (cf. [**Her**][2]), we get $K = \mathrm{Ker}\ \varphi$ (recall $\dim R(\mathbf{p}_0) = n^2$, cf. [**U**, 1.6]), so that $R(\mathbf{p}_0)$ is a Cohen-Macaulay normal ring by Herzog's theorem [**Her**]. We put $W = k[(X_{ij})_{1 \le i \le n-1, 1 \le j \le n}, (Z_j)_{1 \le j \le n}]$ and $L = (\{ \sum_{j=1}^{n} X_{ij}Z_j \}_{1 \le i \le n-1}, \{ D_j \}_{1 \le j \le n})W$. Let $z_j = Z_j \bmod L$ for $1 \le j \le n$. Then as $G(\mathbf{p}_0) = R(\mathbf{p}_0)/\mathbf{p}_0 R(\mathbf{p}_0) \cong V/(\{ \sum_{j=1}^{n} X_{ij}Z_j \}_{1 \le i \le n}, \{ D_j \}_{1 \le j \le n})V$, we get an epimorphism $(W/L)[X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}] \to G(\mathbf{p}_0)$ whose kernel is generated by a single element $\rho = \sum_{j=1}^{n} X_{nj}z_j$. Notice that W/L is a Gorenstein normal ring (cf. [**Her**]), and we immediately have the

---

2) V/K is actually a normal ring. Herzog showed that V/K is a Cohen-Macaulay ring. It is standard to check that the ring V/K satisfies the condition (R_1): localize V/K by X_{11} and use the induction on the size n of the matrix X. This remark is applicable to the ring W/L below too.

required fact that $G(\mathbf{p}_0)$ is a Gorenstein integral domain, as ρ is a prime element in the polynomial ring $(W/L)[X_{n1},X_{n2},\dots,X_{nn}]$.

We now back to the polynomial ring $A = A_0[Y_1,Y_2,\dots,Y_m]$. Let $B = A/fA$ and $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0B$. Then as $R(\mathbf{p}) = B \otimes_{B_0} R(\mathbf{p}_0)$ and $G(\mathbf{p}) = B \otimes_{B_0} G(\mathbf{p}_0)$, by (2.1) we have the following

Corollary (2.2) $G(\mathbf{p})$ is a Gorenstein integral domain and $R(\mathbf{p})$ is a Cohen-Macaulay normal ring.

Let I be an unmixed ideal in A of height 2 and assume that $f \in I$.

Lemma (2.3) $I^{(i)} \cap fA = f\,I^{(i-1)}$ for all $i \in \mathbf{Z}$.

Proof. We may assume $i \geq 2$. Let $L = (I^{(i)} \cap fA)/fI^{(i-1)}$ and assume that $L \neq (0)$. Then, choosing $Q \in \mathrm{Ass}_A L$, we get $Q \supseteq I$ and depth $A_Q/fI^{(i-1)}A_Q = 0$. Hence $\mathrm{depth}_{A_Q} I^{(i-1)}A_Q = \mathrm{depth}_{A_Q} fI^{(i-1)}A_Q = 1$, so that we have depth $A_Q/I^{(i-1)}A_Q = 0$. Thus $Q \in \mathrm{Ass}_A A/I$. Hence $\dim A_Q = 2$ and $I^{(j)}A_Q = I^jA_Q$ for all $j \in \mathbf{Z}$. As A_Q/fA_Q is a DVR, we may write $IA_Q = (f,g)A_Q$ with $g \in A_Q$. Then f, g is an A_Q-regular sequence, so we have $I^iA_Q \cap fA_Q = fI^{i-1}A_Q$, that is $L_Q = (0)$. This is absurd.

We put $J = I/fA$. Then J is an unmixed ideal in B of height 1. As B is a normal ring with $\mathrm{Cl}(B) = \mathrm{Cl}(B_0)$, we have $\mathrm{cl}(J) = j\mathrm{cl}(\mathbf{p})$ for some $j \in \mathbf{Z}$. We may assume $j \geq 1$. (Recall that $\mathrm{cl}(\mathbf{q}) = -\mathrm{cl}(\mathbf{p})$, where $\mathbf{q}$ is the ideal in B generated by the maximal minors of the n by n - 1 matrix

$\begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n-1} \\ X_{21} & \cdots & X_{2n-1} \\ & \cdots & \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn-1} \end{bmatrix}$ mod fA, cf [**Br**].) Hence $J = \xi \mathbf{p}^{(j)}$ for some non-zero element ξ in the quotient field of B.

Proposition (2.4) $I^{(i)} = I^i$ for alll $i \in \mathbf{Z}$.

Proof. We may assume $i \geq 2$. Then as $J^{(i)} = \xi^i \mathbf{p}^{(ij)}$ and $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}^k$ for all $k \in \mathbf{Z}$ by (2.2), we get $J^{(i)} = J^i$. Therefore, as $I^{(i)} \subseteq I^i + fA$, we have $I^{(i)} = I^i + (I^{(i)} \cap fA) = I^i + fI^{(i-1)}$ by (2.3). Hence the induction on i yields the required equality $I^{(i)} = I^i$ for all $i \in \mathbf{Z}$.

Because $R(J) = A[\mathbf{p}^j s]$ with $s = \xi t$, we have $R(J) = R(\mathbf{p}^j) = R(\mathbf{p})^{(j)}$, the j th Veronesean subring of $R(\mathbf{p})$. Thus $R(J)$ is a Cohen-Macaulay ring by [**HE**, Proposition 12], because so is the ring $R(\mathbf{p})$ by (2.2) and $R(J)$ is a direct summand of $R(\mathbf{p})$. As $I^i \cap fA = fI^{i-1}$ for all $i \in Z$ (cf. (2.3) and (2.4)), we have an isomorphism $R(I)/(ft)R(I) \cong R(J)$, which implies $R(I)$ is a Cohen-Macaulay ring. If $\sqrt{I} = I$, then by [**ST**, Corollary 3.4] we get $R(I)$ is a Gorenstein ring, so that $G(I)$ is a Gorenstein ring too (cf. [**Hu**, Proposition 1.2]). This proves Theorem (1.1) and Corollary (1.2).

REFERENCES

[**CN**] R. C. Cowsik and M. V. Nori, On the fibres of blowing up, J. Indian Math, Soc., **40** (1976), 217-222.

[**Br**] W. Bruns, Die Divisorenklassengruppe der Restklassenringe von Polynomringen nach Determinantenidealen, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **20** (1975), 1109-1111.

[Bu] L. Burch, Codimension and analytic spread, Proc. Camb. Philos. Soc., **72** (1972), 369-373.

[BU] W. Bruns and U. Vetter, Determinantal Rings, Lect. Notes in Math., 1327, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1988.

[Her] J. Herzog, Certain complexes associated to a sequence and a matrix, manuscripta math., **12** (1974), 217-248.

[Hoc] M. Hochster, Criteria for equality of ordinary and symbolic powers of primes, Math. Z., **133** (1973), 53-65.

[HE] M. Hochster and J. A. Eagon, Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci, Amer. J. Math., **93** (1971), 1020-1058.

[Hu] C. Huneke, On the associated graded ring of an ideal, Ill. J. Math., **26** (1982), 121-137.

[HH1] S. Huckaba and C. Huneke, Powers of ideals having small analytic deviation, Amer. J. Math., **114** (1992), 367-403.

[HH2] S. Huckaba and C. Huneke, Rees algebras of ideals having small analytic deviation, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[ST] A. Simis and N. V. Trung, The divisor class group of ordinary and symbolic blow-ups, Math. Z., **198** (1988), 479-491.

G. Valla, Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay, J. Alg., **42** (1976), 537-548.

On Eakin-Nagata-Formanek Theorem

By

Masayoshi NAGATA

The theorem of Eakin-Nagata ([1],[3], cf. [4]) was generalized by Formanek [2] and the main purpose of the present note is to give a new proof of the generalized result, which will be recalled below.

The writer likes to emphasize here that we avoided the use of Zorn Lemma in our new proof.

In this note, we mean by a ring a commutative ring with identity. If M is a module over a ring R, then a submodule of the form IM, with an ideal I of R, is called an extended submodule of M. Then the generalization can be stated as follows:

Eakin-Nagata-Formanek Theorem. Let M be a finitely generated module over a ring R. If M satisfies the maximum condition on extended submodules, then M is a noetherian R-module, consequently, $R/(\mathrm{Ann}\ M)$ is a noetherian ring, where $\mathrm{Ann}\ M = \{x \in R \mid xM = 0\}$.

Before proving the theorem, we prove a lemma as follows:

Lemma. Let M be a module over a ring R. For an $a \in R$, we denote by $0 : a$ the ideal $\{x \in R \mid ax = 0\}$. If $\mathrm{Ann}\ M = \{0\}$, then we have

$$\mathrm{Ann}\ (M/(0 : a)M) = 0 : a.$$

Proof. The inclusion $0 : a \subseteq \mathrm{Ann}\ (M/(0 : a)M)$ is clear. As for the converse inclusion, $z \in \mathrm{Ann}\ (M/(0 : a)M) \Rightarrow zM \subseteq (0 : a)M \Rightarrow az = 0$ $\Rightarrow z \in 0 : a$. QED

Proof of the theorem. We use a double induction on the number of generators of M and the largeness of extended submodules of M. We may assume that M is generated by n elements and $\mathrm{Ann}\ M = 0$. Then our induction hypothesis is that (1) the assertion is true for R-modules generated by less than n elements and (2) if I is a non-zero ideal of

R, then M/IM is a noetherian module. Note that if $n = 1$, then the extended submodules are in one-one correspondence with ideals of R modulo Ann M (preserving inclusion relation). Thus the assertion is clear in this case.

(i) The case where there are non-zero elements a, b of R such that $ab = 0$: By our induction hypothesis, $M/(0 : a)M$ is a noetherian module and therefore $R/(0 : a)$ is noetherian by the lemma above. Consider the R-module aM. aM is generated by n elements and is really an $R/(0 : a)$-module. Thus aM is noetherian. Since M/aM is noetherian by our induction hypothesis, it follows that M is noetherian.

(ii) The other case: R is an integral domain. Let $u_1, \ldots, u_n$ be a set of generators of M. M/Ru_1 is an R-module generated by $n - 1$ elements and therefore it is a noetherian module by our induction hypothesis. Set $I = \mathrm{Ann}\ (M/Ru_1)$. Then R/I is noetherian. If $I = \{0\}$, then R is noetherian. So, we assume that $I \neq \{0\}$. Take a non-zero element c of I. We have only to prove that any non-zero submodule N of M is finitely generated. Take a non-zero element w of N. Then cw is expressed as bu_1 with $b \in R$. M/bcM is a noetherian module by our induction hypothesis. bcM is generated by n elements and $bcM \subseteq Rbu_1 \subseteq N$, which implies that N is finitely generated. QED

REFERENCES

[1] Eakin, P.M.Jr. The converse to a well known theorem on Noetherian rings, Math. Ann. 177 (1968), 278 - 282.

[2] Formanek, E. Faithful Noetherian modules, Proc. A.M.S. 41 (1973), 381 - 383.

[3] Nagata, M. A type of subring of a noetherian ring, J. Math. Kyoto Univ. 8 (1968), 465 - 467.

[4] Nagata, M. A new proof of the theorem of Eakin-Nagata, Chin. J. Math. 20 (1992), 1 - 3.

Abelian Group を Grading に持つ Graded Ring について

東京都立大学 鴨井祐二 (Yuuji Kamoi)

1 Introduction.

G を Abelian group とし、R を commutative ring とする. このとき、ring R (resp. R-module M) が G-graded ring (resp. G-graded R-module) であるとは、R (resp. M) の subgroup の family $\{R_g\}_{g\in G}$ (resp. $\{M_g\}_{g\in G}$) があって次を満たすときに云う

- $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ (resp. $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$)
- $R_g R_h \subset R_{g+h}$ (resp. $R_g M_h \subset M_{g+h}$) for all $g, h \in G$.

まず始めに次の定義を置く.

Definition. R の graded ideal $\mathfrak{p}$ が次を満たすとき、G-prime と呼ぶ

すべての homogeneous element $a, b \in R$ について、もし $ab \in \mathfrak{p}$ ならば、$a \in \mathfrak{p}$ 又は $b \in \mathfrak{p}$.

G が torsion free Abelian group のとき、G-prime ideal は、prime ideal となる. 更に、R が Noetherian ならば、non-trivial G-graded R-module の associated prime ideals が graded ideals であることがよく知られている (Bourbaki[1]). 又、後藤-渡辺 [2] は、G が finitely generated free Abelian group で R が Noetherian のとき、G-graded R-module M と $P \in \mathrm{Spec}(R)$ について、M_P の dimension や Bass numeber 等を graded prime ideal での local condition で書き下している.

後藤-渡辺 [2] の結果は Bourbaki[1] の事実に基づくように思われるが、実はそうではなくて G-prime ideal を考えることが本質である (と思われる).

そこで、本稿では G が一般の Abelian group のとき G-graded modules (over Noetherian G-graded ring) の local な情報を G-prime ideals の言葉で述べる.

2 Preliminaries.

ここでは、本稿で用いる記号や定義を決めておく. 以下、R を G-graded ring とする.

$\bigcup_{g\in G} R_g$ の元を G-homogeneous element と呼ぶ. 特に、$a_g \in R_g$, $a_g \neq 0$ について、degree g の homogeneous element と呼び、$\deg(a_g) = g$ と書くことにする.

R の non-zero element $a \in R$ は、唯一通りに homogeneous elements の和に書ける、それを $a = \sum_{g\in G} a_g$ (但し、a_g は有限個を除いて 0) とするとき、$h(a) = \{g \in G \mid a_g \neq 0\}$ と置く. 又、$a_1, \ldots, a_m \in R$ について、$h(a_1, \ldots, a_m) = \cup_{i=1}^{m} h(a_i)$ と置く.

(G-graded R-module についても上と同様の記号を用いる.)

Definition 2.1 *1) R の nonzero G-homogeneous elements がすべて non-zero divisors of R のとき、R を G-domain graded ring と呼ぶ. この条件は、すべての G-homogeneous elements $a, b \in R$ について*

$$\text{もし } ab = 0 \text{ ならば、} a = 0 \text{ 又は } b = 0$$

と同値.

2) R の nonzero G-homogeneous elements がすべて units of R のとき、R を G-simple graded ring と呼ぶ. 言い替えれば、R は (0) 以外に proper G-graded ideals を持たない事と同値.

Definition 2.2 *1) R の G-graded ideal $\mathfrak{p}$ が次を満たすとき、G-prime graded ideal と呼ぶ、*

すべての homogeneous element $a, b \in R$ について、もし $ab \in \mathfrak{p}$ ならば、$a \in \mathfrak{p}$ 又は $b \in \mathfrak{p}$.

言い替えれば、$R/\mathfrak{p}$ が、G-domain graded ring と成ることと同値.

2) R の G-graded ideal $\mathfrak{m}$ について、$\mathfrak{m}$ を真に含む proper G-grade ideal がないとき、G-maximal graded ideal と呼ぶ. これは、$R/\mathfrak{m}$ が G-simple graded ring に成ることと同値.

注) G-prime graded ideals (resp. G-maximal graded ideals) of R は、prime ideals (resp. maximal ideals) of R に成るとは限らない.

Definition 2.3 *R が唯一の G-maximal graded ideal $\mathfrak{m}$ を持つとき、G-local graded ring と呼ぶ. このとき、$(R, \mathfrak{m})$ で表わすことにする.*

以下、M, N を G-graded R-module とする.

$f : M \longrightarrow N$ が G-graded R-modules の homomorphism であるとは、R-linear map such that $f(M_g) \subset N_g$ for all $g \in G$ であるものを云う．すべての G-graded R-modules とそれらの homomorphisms から成る category を $M_G(R)$ で表わすことにする．

$g \in G$ について、$M(g)$ を次の grading で定まる G-graded R-module とする

$$[N(g)]_h = N_{g+h} \text{ for every } h \in G.$$

$R(g)$ $(g \in G)$ の形の module の直和と ($M_G(R)$ の中で) 同型な G-graded R-modules を G-graded free R-module と呼ぶ．

$g \in G$ について、M から $N(g)$ への homomorphism 全体の作る Abelian group を $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N)_g$ で表わし、$\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N) = \oplus_{g \in G} \underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N)_g$ と置けば、$\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N)$ は G-graded R-module とおもえる．更に、$\underline{\mathrm{Ext}}^i_R(-,-)$ で $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-,-)$ の derived functors を表わす．もし R が Noetherian で M が finitely generated G-graded R-module であれば、R-module として $\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = \underline{\mathrm{Ext}}^i_R(M, N)$ ．

H を G の subgroup とするとき、$g \in G$ について

$$R^{(g,H)} = \bigoplus_{h \in H} R_{g+h} \text{ and } M^{(g,H)} = \bigoplus_{h \in H} M_{g+h}.$$

とおく．特に、$R^{(H)} = R^{(0,H)}$ (resp. $M^{(H)} = M^{(0,H)}$) とし、H-Veronesean subring of R (resp. submodule of M) と呼ぶことにする．

このとき、自然に、$R^{(H)}$ (resp. $M^{(g,H)}$) は H-graded ring (resp. H-graded $R^{(H)}$-module) と思える．又、次の grading で G-graded ring とも思える

$$[R^{(H)}]_g = \begin{cases} R_g & \text{if } g \in H \\ (0) & \text{if } g \notin H \end{cases} \quad \text{for all } g \in G.$$

同様にして、$M^{(g,H)}$ も G-graded $R^{(H)}$-module となる．

$g, g' \in G$ について、もし $g - g' \in H$ ならば、$M^{(g,H)} = M^{(g',H)}(g - g')$ as H (and G)-graded $R^{(H)}$-module である．従って、M は 次の G-graded $R^{(H)}$-submodules による直和分解をもつ

$$M = \bigoplus_{i \in I} M^{(g_i,H)}$$

ここで、$\{g_i\}_{i \in I}$ は G mod H の代表系．このとき更に、$R^{(g_i,H)} M^{(g_j,H)} \subset M^{(g_i+g_j,H)}$ for all $i, j \in I$ であるから、G-graded ring R (resp. G-graded R-module M) は、G/H-graded ring (resp. G/H-graded R-module) と思える．

3 G-simple graded ring の構造について

このセクションでは次の命題を示す.

Proposition 3.1 G が有限生成であれば、次は同値.

1) R が G-simple .

2) $k = R_0$ は field で

$$R \cong \begin{cases} k \\ \frac{k[X_1^{\pm 1},\dots,X_r^{\pm 1},Y_1,\dots,Y_n]}{(Y_1^{q_1}-u_1,\dots,Y_n^{q_n}-u_n)} & (u_1,\dots,u_n \in k^*) \end{cases}$$

ここで、$X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_n$ は k上の変数で q_i は素巾 $(1 \le i \le n)$.

Lemma 3.2 *(後藤-渡辺 [2],(1.1.4))*

1) $a \in R_g$, $a \neq 0$ が unit であれば、逆元は R_{-g} に在って、このとき $R_g = R_0 a$ と書ける.

2) R が G-simple であることと non-trivial G-graded R-module がすべて free であることは同値.

Proof of (3.1). 2) $\Longrightarrow$ 1) は明らか.

1) $\Longrightarrow$ 3) k が field に成るのは自明. そこで、$R \neq k$ とする. $G' = \{g \in G \mid R_g \neq (0)\}$ とおくと、G' は nonzero subgroup of G . 従って、有限生成 Abel 群の基本定理から

$$G' = \mathbf{Z}^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} C(q_i)$$

と書ける、但し q_i は素巾で $C(q_i)$ は cyclic group of order q_i $(1 \le i \le n)$. $e_1,\dots,e_r$ を $\mathbf{Z}^r$ の free basis, e'_i を $C(q_i)$ の generator $(1 \le i \le n)$ とすれば、G' の取り方から

$$^{\exists}x_i \in R_{e_i} \ \ (1 \le i \le r) \text{ and } {}^{\exists}y_j \in R_{e'_j} \ \ (1 \le j \le n).$$

このとき、(3.2), 1) より

$$R = k[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_n] = k[G'].$$

そこで次の k-algebra map φ を定める

$$\varphi : k[X_1^{\pm 1},\dots,X_r^{\pm 1},Y_1,\dots,Y_n] \longrightarrow R$$

by $\varphi(X_i) = x_i$ $(1 \le i \le r)$, $\varphi(Y_j) = y_j$ $(1 \le j \le n)$

但し $X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_n$ は k上独立変数. このとき、φ は surjective で更に

$$ker(\varphi) = (Y_1^{q_1} - u_1, \ldots, Y_n^{q_n} - u_n)$$

where $u_j = y_j^{q_j} \in k^*$ for $1 \le j \le n$

が確かめられる. □

このとき次が判る.

Proposition 3.3 *A Noetherian G-simple graded ring* は、*locally complete intersection.*

Proof. R を Noetherian G-simple graded ring とする. そこで local ring R_Q が complete intersection for every maximal ideal Q of R を示す.

今 R は Noetherian だから $Q = (a_1, \ldots a_n)$ for some $a_1, \ldots, a_n \in R$ とかける. H を $h(a_1, \ldots, a_n)$ で生成される G の subgroup とし、$P = Q \cap R^{(H)}$ とすれば、$a_1, \ldots, a_n \in R^{(H)}$ かつ $PR = Q$.

ところで $R^{(H)}$ は H-simple だから (3.2), 2) より R は free $R^{(H)}$-module . 従って、$(R^{(H)})_P \hookrightarrow R_Q$ は flat で fiber $R_Q/PR_Q = R_Q/QR_Q$ は field .

よって、(3.1), 2) より R_Q は complete intersection . □

4 G-prime ideal の性質について

ここでは、R を Noeterian G-graded ring とする.

- $P \in \mathrm{Spec}(R)$ について、P に含まれる最大の G-graded ideal を P^* で表わす. このとき、P^* は G-prime である.

- M を G-graded R-module 、$\mathfrak{p} \subset R$ を G-prime ideal とする.

$$\begin{array}{ll} M_{(\mathfrak{p})} = S^{-1}M & \text{where } S = \cup_{g \in G} R_g \setminus \mathfrak{p}_g \\ M_{\mathfrak{p}} = T^{-1}M & \text{where } T = R \setminus \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p})} P \end{array}$$

とする. 更に、$M_{(\mathfrak{p})} \ne 0$ となる G-prime ideal $\mathfrak{p}$ の全体を $V_G(M)$ とおく. また、$P \in \mathrm{Spec}(R)$ について、$M_{(P)} = M_{(P^*)}$ とする.

Proposition 4.1 *1)* $M \neq 0$ のとき、任意の $P \in \mathrm{Ass}_R(M)$ について、M のある *homogeneous element* $x \in M$ が在って $P^* = [0 : x]_R$ とかける. 従って、

$$(R/P^*)(g) \hookrightarrow M \text{ for some } g \in G\,.$$

2) R の *G-prime ideal* $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ について次が成り立つ.

a) $\mathfrak{p} = P^*$ *for every* $P \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p})$.

b) $R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}$ は *locally complete intersection* .

c) $\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{Min}_R(R/\mathfrak{p})$.

d) $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q} \iff \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) \cap \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{q}) = \phi$.

e) もし $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ であれば、任意の $P \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p})$ について、ある $Q \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{q})$ があって、$Q \subsetneq P$ となる.

Proof. 1) 勝手な $P \in \mathrm{Ass}_R(M)$ について、$P = [0 : \sum_{i=1}^m x_i]_R$ for some $\sum_{i=1}^m x_i \in M$ と書けている (但しここで、$x_1, \ldots, x_m$ は M の homogeneous element で degree が相異なるものとする). このとき、G-graded ideal $\bigcap_{i=1}^m [0 : x_i]_R$ は P に含まれるから、$\bigcap_{i=1}^m [0 : x_i]_R \subset P^*$. 逆に R の homogeneous element $a \in R$ について、

$$a \sum_{i=1}^m x_i = 0 \Longrightarrow a x_i = 0 \text{ for all } 1 \leq i \leq m$$

であるから、$\bigcap_{i=1}^m [0 : x_i]_R \supset P^*$. 従って、

$$P^* = \bigcap_{i=1}^m [0 : x_i]_R$$

となる. ところが、G-prime ideal は G-graded ideal に対しては既約性をもつから

$$P^* = [0 : x_i]_R \text{ for some } 1 \leq i \leq m$$

となる.

2) a) かってな $P \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p})$ について、$P^* \supset \mathfrak{p}$ は明らかだから逆向きの包含を示す. 今、1) より $R \setminus \mathfrak{p}$ の homogeneous element $a \in R \setminus \mathfrak{p}$ があって、$P^* = [\mathfrak{p} : a]_R$ と書けている. 従って、$aP^* \subset \mathfrak{p}$ となる. $\mathfrak{p}$ は G-prime で $a \notin \mathfrak{p}$ だから

$$P^* \subset \mathfrak{p}$$

となる.

b) $R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}$ は G-simple だから、(3.3) に従う.

c) 2-a) より、$\mathrm{Ass}_{R_{(\mathfrak{p})}}(R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}) = \{PR_{(\mathfrak{p})} \mid P \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p})\}$ で更に 2-b) より、$\mathrm{Ass}_{R_{(\mathfrak{p})}}(R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}) = \mathrm{Min}_{R_{(\mathfrak{p})}}(R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})})$ となる. 従って、$\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{Min}_R(R/\mathfrak{p})$.

d) は 2-a) より、e) は 2-c) より、直ちにでる. □

4.1 G-graded R-module の dimension について

Lemma 4.2 M を *G-graded R-module* とする.

0) $P \in \mathrm{Spec}(R)$ について、$P \in \mathrm{Supp}(M) \Longleftrightarrow P^* \in V_G(M)$.

1) $\mathfrak{p} \in V_G(R)$ について、$\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) \subset \mathrm{Supp}_R(M) \Longleftrightarrow \mathfrak{p} \in V_G(M)$.

2) $\mathrm{Supp}_R(M)$ の *minimal element* P について、$P \in \mathrm{Ass}_R(R/P^*)$.

3) $P, Q \in \mathrm{Supp}_R(M)$, $P \supset Q$ について、もし $\mathit{dim}(M_P) = \dim(R_P/QR_P)$ であれば $\dim(R_P/Q^*R_P) = \dim(M_P)$.

Proof. 0) は、定義より明らか. 2) は 0) と (4.1), 2-a) に従う.

2)) $\mathrm{Supp}_R(M)$ の minimal element P について、1) と (4.1), 2-c) より

$$\mathrm{Ass}_R(R/P^*) = \mathrm{Min}_R(R/P^*) \subset \mathrm{Supp}_R(M)$$

であるから、$P \in \mathrm{Ass}_R(R/P^*)$.

3) $P, Q \in \mathrm{Supp}_R(M)$, $P \supset Q$ について、$\mathit{dim}(M_P) = \dim(R_P/QR_P)$ とする. 1) より、$\mathrm{Ass}_R(R/Q^*) \subset \mathrm{Supp}(M)$ であるから

$$\dim(R_P/Q^*R_P) \leq \dim(M_P)$$

となる. 一方で、2) より $Q \in \mathrm{Ass}_R(R/Q^*)$ であるから

$$\dim(R_P/QR_P) \leq \dim(R_P/Q^*R_P)$$

となる. 従って、$\dim(R_P/Q^*R_P) = \dim(M_P)$. □

上の命題から次がわかる.

Theorem 4.3 *G-graded R-module M* と $\mathfrak{p} \in V_G(M)$ について、$n = \dim(M_{\mathfrak{p}})$ とおくと、$V_G(M)$ の中に $\mathfrak{p}$ に含まれる長さが n の *chain* が在る.

Proof. 1) $n = max\{\dim(M_P) \mid P \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p})\}$ (cf. (4.2), 1) であるから、$P \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p})$ を $\dim(M_P) = n$ なるものとする. このとき、n に関する帰納法で示す. $n = 0$ であれば明らかだから、$n > 0$ として $n-1$ まで主張が成り立つとする.

$Q \in \mathrm{Supp}_R(M)$ を $n = \dim(R_P/QR_P)$ となるものと取れば、(4.2), 3) より $\dim(R_P/Q^*R_P) = n$ である. $V_G(R/Q^*) \subset V_G(M)$ であるから、$V_G(R/Q^*)$ の中に chain が見つかればよい. 今、$n > 0$ であるから $P \notin \mathrm{Min}_R(R/Q^*)$. 従って、$P^* = \mathfrak{p} \neq Q^*$ となり、non-zero homogeneous element $a \in \mathfrak{p}$ such that $a \notin Q^*$ がある. 更に R/Q^* は、G-domain であるから a は R/Q^*-nonzero divisor . よって、

$$\dim(R_{\mathfrak{p}}/(a, Q^*)R_{\mathfrak{p}}) = \dim(R_P/(a, Q^*)R_P) = n - 1$$

となり、帰納法の仮定から、$V_G(R/(a, Q^*))$ の中に長さが $n-1$ の chain $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_{n-1}$ が在る. このとき、$\mathfrak{p}_{n-1} \supsetneq Q^*$ だから、$V_G(R/Q^*)$ の中に

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_{n-1} \supsetneq Q^*$$

がある. □

Corollary 4.4 *G-graded R-module M* と $\mathfrak{p} \in V_G(M)$ について、

$$\dim(M_P) = \dim(M_{\mathfrak{p}})$$

for every $P \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p})$.

Proof. $n = \dim(M_{\mathfrak{p}})$ と置けば、(4.3) より $V_G(M)$ の中の chain $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ が存在する. $P \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p})$ に対して、(4.1), 2-e) を繰り返し用いれば

$$P = P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \cdots \supsetneq P_n \text{ where } P_i \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p}_i) \text{ for every } 0 \leq i \leq n$$

が得られる. 従って、$\dim(M_P) = n$. □

Corollary 4.5 *G-graded R-module M* 、$P \in \mathrm{Supp}_R(M)$ について、

$$\dim(M_P) = \dim(M_{P^*}) + \dim(R_P/P^*R_P) .$$

Proof. $n = \dim(M_P)$, $m = \dim(M_{P^*})$ and $r = \dim(R_P/P^*R_P)$ とおく. (4.4) により、$n \geq m + r$ は云えている. そこで、$n \leq m + r$ を m に関する帰納法で示す.

$m = 0$ のとき、(4.2) と (4.3) より、$Q \in \mathrm{Supp}(M), Q \subset P$ について、$Q^* = P^*$. 従って、$n = r$ となる.

$m > 0$ のとき、$m - 1$ まで主張が成り立つとする. $Q \in \mathrm{Supp}_R(M)$ を $\dim(R_P/QR_P) = n$ と取れば、(4.2), 3) より $\dim(R_P/Q^*R_P) = n$ であった. 一方で、$Q^* \in V_G(M)$ だから、(4.3) より、$\dim(R_{P^*}/Q^*R_{P^*}) \leq m$. もし、$\dim(R_{P^*}/Q^*R_{P^*}) < m$ であれば帰納法の仮定より

$$n = \dim(R_P/Q^*R_P) \leq \dim(R_{P^*}/Q^*R_{P^*}) + r < m + r$$

となる. ところが、$n \geq m + r$ であったからこれは矛盾. 従って、$\dim(R_{P^*}/Q^*R_{P^*}) = m$. 今、$m > 0$ であるから $P^* \neq Q^*$. そこで homogeneous element $^\exists a \in P^*$ s.t. $a \notin Q^*$ をとれば、a は R/Q^*-nonzero divisor だから $\dim(R_P/(a, Q^*)R_P) = n - 1$ かつ $\dim(R_{P^*}/(a, Q^*)R_{P^*}) = m - 1$. よって、帰納法の仮定より

$$n - 1 = \dim(R_P/(a, Q^*)R_P) \leq \dim(R_{P^*}/(a, Q^*)R_{P^*}) + r = m - 1 + r$$

となる. □

4.2 G-graded R-module の Bass number について

G-graded R-module M の $M_G(R)$ の中での injective envelope を$\underline{E}_R(M)$ で表わす.

Definition 4.6 $\mathfrak{p} \subset R$ を *G-prime ideal* とするとき、$i \geq 0$ について、$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{R_{(\mathfrak{p})}}(R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}, M_{(\mathfrak{p})})$ は、*G-simple graded ring* $R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}$ 上の *module* と思えるから、*G-graded* $R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}$*-free module* である *(cf. (3.2) , 2))*. そこで、$i \geq 0$ について

$$\nu^i(\mathfrak{p}, M) = \mathrm{rank}(\underline{\mathrm{Ext}}^i_{R_{(\mathfrak{p})}}(R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}, M_{(\mathfrak{p})}))$$

とおき、M の *G-prime ideal* $\mathfrak{p}$ での *i-th G-Bass number* とする.

このとき、次が成り立つ.

Proposition 4.7 M を *G-graded R-module* とし

$$0 \to M \to \underline{E}^0_R(M) \to \cdots \to \underline{E}^i_R(M) \xrightarrow{d^i} \underline{E}^{i+1}_R(M) \to \cdots$$

を M の *minimal injective resolution in* $M_G(R)$ とする．このとき、かってな *G-prime graded ideal* $\mathfrak{p}$ と かってな *integer* $i \geq 0$ について、$\nu_i(\mathfrak{p}, M)$ は $\underline{E}_R^i(M)$ に現われる $\underline{E}_R(R/\mathfrak{p})(g)$ $(g \in G)$ の型の直和因子の数と一致する．

証明は (1.3.4) of [2] と全く同じ．

Theorem 4.8 $P \in \mathrm{Spec}(R)$ について、$d = \dim(R_P/P^*R_P)$ とおくとき、*G-graded R-module* M, $i \geq 0$ について

$$\mu^i(P, M) = \begin{cases} \nu^{i-d}(P^*, M) & (i \geq d) \\ 0 & (i < d) \end{cases}$$

となる．

Proof. P で homogeneous localization する事により、(R, P^*) は G-local としてよい．$S = R/P^*$ と置いて次の spectral sequence を考える．

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{S_P}(k(P), \mathrm{Ext}^q_{R_P}(S_P, M_P)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{R_P}(k(P), M_P)$$

where $k(P) = R_P/PR_P$．このとき、

$$\mathrm{Ext}^q_{R_P}(S_P, M_P) \cong (\underline{\mathrm{Ext}}^q_R(S, M))_P \cong (S_P)^{\oplus \nu^q(P^*, M)}$$

であり、S_P は、d-dimensional Gorenstein ring である (cf. (3.3))．従って、$E_2^{p,q} = 0$ for all $p \neq d$ and for all q で更に次の同型がある

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^{d+q}_{R_P}(k(P), M_P) &\cong \mathrm{Ext}^d_{S_P}(k(P), \mathrm{Ext}^q_{R_P}(S_P, M_P)) \\ &\cong \mathrm{Ext}^d_{S_P}(k(P), S_P)^{\oplus \nu^q(P^*, M)} \\ &\cong k(P)^{\oplus \nu^q(P^*, M)}. \end{aligned}$$

よって、$\mu^i(P, M) = \nu^{i-d}(P^*, M)$ for all $i \geq d$. 特に、$M_G(R)$ の injective object E について、

$$\mu^i(P, E) = \begin{cases} \nu^0(P^*, M) & , \text{if } i = d \\ 0 & , \text{if } i \neq d \end{cases}$$

となる．そこで、$0 \to M \to E^0 \to \cdots \to E^i \xrightarrow{d^i} E^{i+1} \to \cdots$ を $M_G(R)$ での M の injective resolution とすれば

$$\mu^i(P, M) = \mu^{i-1}(P, \mathrm{Im}(d^0)) = \cdots = \mu^0(P, \mathrm{Im}(d^{i-1})) = 0$$

for all $i < d$. □

Corollary 4.9 $\mathfrak{p} \in V_G(M)$, $i \geq 0$ について、

$$\nu^i(\mathfrak{p}, M) = \mu^i(P, M) \textit{ for every } P \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) .$$

□

Corollary 4.10 M が *finitely generated G-graded R-module* のとき、$P \in \mathrm{Supp}(M)$ について、次は同値.

1) M_P は *Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) module*.

2) M_{P^*} は *Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) module*.

このとき、$r_{R_P}(M_P) = r_{R_Q}(M_Q)$ *for every* $Q \in \mathrm{Ass}_R(R/P^*)$.

□

Corollary 4.11 $\mathfrak{p} \subset R$ を *G-prime ideal* とするとき、$\mathfrak{p}$ が *radical ideal* であれば次は同値.

1) $R_\mathfrak{p}$ が *regular ring*.

2) ある $P \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p})$ について、R_P は *regular local ring*.

□

5 補足

ここでは、"G-prime ideal が、いつ radical または、prime ideal になるか?" を考える.

まず始めに finite Abelian group 上の simple graded ring A を考える. このとき、(3.1) より、$k = A_0$ は field で、$u_1 \ldots, u_n \in k^*$、$q_1, \ldots, q_n \in \mathbf{Z}$ (但し、各々はある素数の巾) が在って、

$$A = \frac{k[Y_1, \ldots, Y_n]}{(f_1, \ldots, f_n)}$$

ここで、$Y_1, \ldots, Y_n$ は k 上独立変数で、$f_i = Y_i^{q_i} - u_i$ $(1 \leq i \leq n)$ と書けた.

Definition 5.1 A に対する条件 *(R),(D)* を次のように定める.

(R) A は、次のいずれかを満たす.

- $char(k) = 0$
- $char(k) = p > 0$ でかつ、$q_{i_1}, \ldots, q_{i_t}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n)$ を $q_1, \ldots, q_n$ の中で p で割れるものの全てとするとき、

$$(u_{i_s})^{\frac{1}{p}} \notin \frac{k[Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_s-1}]}{(f_{i_1}, \ldots, f_{i_s-1})}$$

for every $1 \leq s \leq t$.

(D) すべての $1 \leq t \leq n$ について、次を満たす.

p を q_t を割る素数とするとき、

$$(u_t)^{\frac{1}{p}} \notin \frac{k[Y_1, \ldots, Y_{t-1}]}{(f_1, \ldots, f_{t-1})}$$

更に $char(k) \neq 2$ で q_t が *4* で割れるとき

$$(-\frac{u_t}{4})^{\frac{1}{4}} \notin \frac{k[Y_1, \ldots, Y_{t-1}]}{(f_1, \ldots, f_{t-1})}$$

となる.

このとき、次が成り立つ.

Proposition 5.2 *A* が *reduced (resp. field)* で在るための必要十分条件は、*A* が条件 *(R) (resp. (D))* を満たすことである.

Lemma 5.3 *(Thm.16, §9, ch.VIII of [3])* K を *field*, $a \in K^*$, p を素数とする. このとき、$n > 0$ について、$X^{p^n} - a \in K[X]$ が K上既約 である為の必要十分条件は、$a^{\frac{1}{p}} \notin K$ で更に、もし $char(K) \neq 2$ で $4 \mid p^n$ ならば $(-\frac{a}{4})^{\frac{1}{4}} \notin K$ である.

Proof of (5.2).

$$A \text{ が field} \iff \begin{array}{l} \frac{k[Y_1,\ldots,Y_{t-1}]}{(f_1,\ldots,f_{t-1})} \text{ は field で、} \\ f_t \text{ は、irreducible over } \frac{k[Y_1,\ldots,Y_{t-1}]}{(f_1,\ldots,f_{t-1})} \\ \text{for every } 1 \leq t \leq n \end{array}$$

であるから (5.3) より、A が field と成る為の必要十分条件は、A が (D) を満たす事となる.

次に A が (R) を満たさなければ、$char(k) = p > 0$ でかつ、ある $1 \leq i \leq n$ について、$^\exists a \in \frac{k[Y_1,\ldots,Y_{i-1}]}{(f_1,\ldots,f_{i-1})}$ s.t. $a^p = u_i$ (in A) となる. このとき、Y_i の A での image を y_i と置けば、$0 \neq y_i^{q_i - 1} - a \in A$ かつ $(y_i^{q_i-1} - a)^p = y_i^{q_i} - a^p = 0$ となる. よって、A は reduced でない.

以上により、A が (R) を満たせば A が reduced と成る事を示せば十分. $char(k)=p>0$ のとき、$q_1,\ldots,q_n$ 並び換えて、

$$p \mid q_i \ \ (1 \leq i \leq t), \ \ p \nmid q_j \ \ (t+1 \leq j \leq n)$$

とすれば、上の議論により、$\frac{k[Y_1,\ldots,Y_t]}{(f_1,\ldots,f_t)}$ は field となる. そこで、k を $\frac{k[Y_1,\ldots,Y_t]}{(f_1,\ldots,f_t)}$ で置き換える事により、$chr(k)=p>0$ のときは、どの $q_1,\ldots,q_n$ も p で割れないとしてよい.

$1 \leq i \leq n$ について、$B_i = \frac{k[Y_1,\ldots,Y_i]}{(f_1,\ldots,f_i)}$ とおく. このとき、B_{i-1} が reduced であれば、B_i も reduced と成る事を示す. ($B_0 = k$ と思う事にする.)

B_{i-1} を reduced とする. B_{i-1} は Artinian であるから、任意の $P \in Max(B_{i-1})$ について $(B_{i-1})_P$ は field で

$$B_{i-1} \cong \bigoplus_{P \in Max(B_{i-1})} (B_{i-1})_P$$

となる. 従って、

$$B_i = B_{i-1}[Y_i]/(f_i) \cong \bigoplus_{P \in Max(B_{i-1})} (B_{i-1})_P[Y_i]/(f_i)$$

となるから、B_i が reduced であるためには $(B_{i-1})_P[Y_i]/(f_i)$ が reduced (for every $P \in Max(B_{i-1})$) であればよい. ところが、$P \in Max(B_{i-1})$ について、$char(k) = char((B_{i-1})_P)$ であるから、仮定より、f_i は $(B_{i-1})_P$ 上で重根を持たない. つまり、f_i の $(B_{i-1})_P[Y_i]$ での既約分解は重複を持たない. よって、$(B_{i-1})_P[Y_i]/(f_i)$ は reduced . □

”G-prime がいつ radical あるいは、prime ideal になるか？” という問題は上の条件に帰着される.

Proposition 5.4 *$\mathfrak{p} \subset R$ を G-prime ideal とする. このとき、$\mathfrak{p}$ が radical ideal (resp. prime ideal) で在る為の必要十分条件は、全ての finite subgroup $H \subset G$ について、$(R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})})^{(H)}$ が条件 (R) (resp. (D)) を満たすことである.*

証明は (5.2) と次の Lemma に従う.

Lemma 5.5 *G-prime $\mathfrak{p} \subset R$ について、次は同値.*

1) $\mathfrak{p}$ は、radical ideal (resp. prime ideal).

2) $R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}$ は、reduced (resp. domain).

3) 全ての *finitely generated subgroup* $H \subset G$ について、$(R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})})^{(H)}$ は、*reduced (resp. domain)*.

4) 全ての *finite subgroup* $H \subset G$ について、$(R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})})^{(H)}$ は、*reduced (resp. domain)*.

Proof. $R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}$ は、$R/\mathfrak{p}$ の $R/\mathfrak{p}$-non zero divisors による ring of fraction だから、1) $\Longleftrightarrow$ 2) は明らか. 又、2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) は自明. 更に 4) $\Longrightarrow$ 3) は (3.1) より直ちに判る. 従って、3) $\Longrightarrow$ 2) を示せば十分. そこで次を示す.

Claim. R が G-simple のとき、全ての finitely generated subgroup $H \subset G$ について、$R^{(H)}$ が reduced (resp. domain) であれば、R も reduced (resp. domain).

Proof of Claim. もし $x \in R$ s.t. $x \neq 0$ and $x^n = 0$ for some $n > 0$ (resp. $y, z \in R$ s.t. $y \neq 0 \neq z$ and $yz = 0$) が在ったとすると、$H \subset G$ を $h(x)$ (resp. $h(y,z)$) で生成される subgroup とすれば、$x \in R^{(H)}$ (resp. $y, z \in R^{(H)}$) かつ $x^n = 0$ (resp. $yz = 0$) となり仮定に反する. 従って、R は reduced (resp. domain). □

Corollary 5.6 *(Bourbaki, [1])* G が *torsion free* であれば、G*-prime ideal* は *prime ideal*. □

Corollary 5.7 R_0 が *field* k を含むとき、$char(k) = 0$ であるか、$char(k) = p > 0$ で p は G 全ての *torsion element* の *order* を割らないとすると、G*-prime ideal* は *radicel ideal*. □

Corollary 5.8 R が *Noetherian* のとき、G*-prime* $\mathfrak{p} \subset R$ について、$\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) = \{P_1, \ldots, P_n\}$ と置く. $1 \leq i \leq n$ について、$a_{i1}, \ldots, a_{ik_i}$ を P_i の生成元とし、$H \subset G$ を $h(a_{i1}, \ldots, a_{ik_i} \mid 1 \leq i \leq n)$ で生成される *finitely generated subgroup* とすれば、次は同値.

1) $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}}$.

2) $(R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}))^{(T(H))}$ は *(R)* を満たす. ここで、$T(H)$ は H の *torsion subgroup*.

(H の取り方から、

$$\mathrm{Ass}_{(R_{(\mathfrak{p})})^{(H)}}((R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})})^{(H)}) = \{P_i R_{(\mathfrak{p})} \cap (R_{(\mathfrak{p})})^{(H)} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

が判る.) □

最後に自明な例を挙げて置く.

Example 5.9 A を *commutative ring*, M を A-*module* とし、*idealization* $R := A \ltimes M$ を考える. このとき、$R_0 = A$, $R_1 = M$ と思うことにより、R は $\mathbf{Z}_2$-*graded ring* となる. ところで良く知られているように $\mathrm{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \ltimes M \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\}$ であるから、R の *prime ideal* は全て $\mathbf{Z}_2$-*prime* である.

References

[1] N. Bourbaki, *Commutative algebra*, Hermann, 1965.

[2] S. Goto and K. Watanabe, *On Graded Rings ($\mathbf{Z}^r$-grading)*, Tokyo J. Math. **1** (1978), 237-261.

[3] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965.

Cohen-Macaulay types and canonical modules of modular lattices

日　比　孝　之　（北海道大学理学部）

単体的複体、半順序集合や凸多面体の離散現象に現れる数え上げの問題に可換代数の理論が応用され、“可換代数と組合せ論”と呼ばれる境界分野が誕生してから約２０年の歳月が流れた。素人向けの概説記事[8]（英訳準備中）とともに、シドニー大学での講義録[11]（和訳準備中）を参照されたい。

本稿の話題は、Cohen-Macaulay 半順序集合 P の順序複体 $\Delta(P)$ の Stanley-Reisner 環 $k[\Delta(P)]$ の Cohen-Macaulay 型を計算し、更に、$k[\Delta(P)]$ の canonical module の極小生成系を探すことである。文献[7]において $L = \hat{P}$ が分配束のときに $k[\Delta(P)]$ の Cohen-Macaulay 型を linear extension の数え上げから計算する公式が得られているが、その公式をメビウス函数で表示すると系(2.13)の公式になる、ということが Stanley によって指摘された。他方、系(2.13)の公式が成立しない semimodular 束 $L = \hat{P}$ が存在する。しかし、$L = \hat{P}$ が modular 束のときには系(2.13)の公式が成立するに相違ない、と信じたことが当該研究の出発点であった。分配束 $L = \hat{P}$ のときには $\Delta(P)$ の幾何学的実現は球体と同相であるから、$k[\Delta(P)]$ の canonical module の極小生成系が簡単に記述でき、従って、$k[\Delta(P)]$ の Cohen-Macaulay 型を計算することが可能となる。しかし、$L = \hat{P}$ を modular 束とすると、$k[\Delta(P)]$ の canonical module の極小生成系の正体はさっぱり不明であったから、頼りになるのは Hochster の公式 Eq.(5)のみである。ところが、Eq.(5)の右辺に現われる homology 群の次元の計算などは通常の状態では絶望的、けれども、Munkres[13]では topological な方法で homology 群の消滅を論じており、その技巧は有益であった。なお、(2.5)で定義した優越的 (superior) という概念は、modular 束は満たすが、semimodular 束は満たさない combinatorial な性質を暗中模索しているうちに浮上したものである。ただし、定理(2.10)の後半(b)での等号成立の十分条件としては優越性はいささか強過ぎる条件に思える。更に、系(2.13)の公式と Baclawski[3]の結果を比較検討すると、$L = \hat{P}$ が modular 束のとき、$k[\Delta(P)]$ の canonical module の極小生成系についての結果である系(3.6)は、想像に難くは無く、気が付いてしまえば、定理(3.5)もちょっとした工夫で簡単に証明できる。他方、系(2.13)の公式を満たす優越的でない semimodular 束 $L = \hat{P}$ も存在するので、系(2.13)の公式を満たすような semimodular 束 $L = \hat{P}$ を分類することは、古典的な束論の視点からも興味深い問題であるかも知れない。

§1. Algebraic and combinatorial background

We here summarize fundamental material and notation for algebra, topology and combinatorics on simplicial complexes and partially ordered sets.

(1.1) Let $V = \{ x_1, x_2, \ldots, x_v \}$ be a finite set, called the vertex set, and Δ a simplicial complex on V. Thus Δ is a family of subsets of V such that (i) $\{ x_i \} \in \Delta$ for each $1 \le i \le v$ and (ii) $\sigma \in \Delta$, $\tau \subset \sigma$ imply $\tau \in \Delta$. Each element σ of Δ is called a face of Δ. More precisely, if $\#(\sigma) = i + 1$, then σ is called an i-face of Δ. Here $\#(\sigma)$ is the cardinality of σ as a finite set. Let $d := \max\{ \#(\sigma) ; \sigma \in \Delta \}$. Then the dimension of Δ is $\dim \Delta := d - 1$. We say that a face σ of Δ is a facet of Δ if $\#(\sigma) = d$. A simplicial complex Δ is called pure if every maximal face, with respect to inclusion, is a facet of Δ. Given a face σ of Δ, we define the subcomplex $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ (resp. $\mathrm{star}_\Delta(\sigma)$) of Δ by $\mathrm{link}_\Delta(\sigma) = \{ \tau \in \Delta ; \sigma \cap \tau = \emptyset$ and $\sigma \cup \tau \in \Delta \}$ (resp. $\mathrm{star}_\Delta(\sigma) = \{ \tau \in \Delta ; \sigma \cup \tau \in \Delta \}$). Thus, in particular, $\mathrm{link}_\Delta(\emptyset) = \Delta$. Also, if $\Delta' = \mathrm{star}_\Delta(\sigma)$, then $\mathrm{link}_{\Delta'}(\sigma) = \mathrm{link}_\Delta(\sigma)$. Moreover, if $\tau \in \Delta' = \mathrm{link}_\Delta(\sigma)$, then $\mathrm{link}_{\Delta'}(\tau) = \mathrm{link}_\Delta(\sigma \cup \tau)$. On the other hand, if W is a subset of V, then the subcomplex Δ_W of Δ is defined to be the simplicial complex $\Delta_W = \{ \sigma \in \Delta ; \sigma \subset W \}$ on the vertex set W.

(1.2) Fix a field k. We refer the reader to a standard textbook on algebraic topology for the definition of the i-th reduced homology group $\tilde{H}_i(\Delta;k)$ of Δ with coefficients k. Let $\dim_k(\tilde{H}_i(\Delta;k))$ be the dimension of $\tilde{H}_i(\Delta;k)$ as a vectore space over k. The reduced Euler characteristic $\tilde{\chi}(\Delta)$ of Δ is defined by $\tilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i \ge -1} (-1)^i \dim_k(\tilde{H}_i(\Delta;k))$. In particular, $\tilde{\chi}(\emptyset) = -1$. Note that $\tilde{\chi}(\Delta)$ is independent of the field characteristic of k.

(1.3) Let $A = k[x_1, x_2, \ldots, x_v]$ be the polynomial ring over k whose indeterminates are the elements of V. We define I_Δ to be the ideal of A which is generated by those square-free monomials $x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ir}$ such that $\{ x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir} \} \notin \Delta$, and set $k[\Delta] := A/I_\Delta$. The algebra $k[\Delta]$ over k is called the Stanley-Reisner ring of Δ over k in commemoration of Stanley [15] and Reisner [14]. From now on, we consider A to be a graded ring over k with the standard grading, i.e., each $\deg x_i = 1$, and regard $k[\Delta]$ as a graded

module over A **with the "quotient grading." Then** $\dim_A k[\Delta] = d$ **. When** $\mathfrak{M} = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{M}_n$ **is a graded module over** A **with each** $\dim_k \mathfrak{M}_n < \infty$ **, the Hilbert series** $F(\mathfrak{M},\lambda)$ **of** $\mathfrak{M}$ **is defined to be the formal power series**

$$F(\mathfrak{M},\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\dim_k \mathfrak{M}_n)\lambda^n$$

in the variable λ **.**

(1.4) The i**-th Betti number** $\beta_i^A(k[\Delta])$ **of** $k[\Delta]$ **over** A **is defined by** $\beta_i^A(k[\Delta]) = \dim_k \underline{\mathrm{Tor}}_i^A(k[\Delta],k)$ **. The homological dimension** $\mathrm{hd}_A(k[\Delta])$ **of** $k[\Delta]$ **over** A **is the maximal integer** i **for which** $\beta_i^A(k[\Delta]) \neq 0$ **. Then** $v - d \leq \mathrm{hd}_A(k[\Delta]) \leq v$ **. The topological formula on Betti numbers** $\beta_i^A(k[\Delta])$ **is**

$$\beta_i^A(k[\Delta]) = \sum_{W \subset V} \dim_k(\tilde{H}_{v-\#(W)-i-1}(\Delta_{V-W};k)) . \qquad \textbf{(1)}$$

On the other hand, let $\underline{H}_m{}^i(k[\Delta])$ **be the** i**-th local cohomology module of** $k[\Delta]$ **over** A **with respect to the irrelevant maximal ideal** $m = (x_1,x_2,\ldots,x_v)$ **of** A **, i.e.,**

$$\underline{H}_m{}^i(k[\Delta]) := \varinjlim_n \underline{\mathrm{Ext}}_A{}^i(A/m^n,k[\Delta]) .$$

Then (i) $\underline{H}_m{}^i(k[\Delta]) = 0$ **unless** $v - \mathrm{hd}_A(k[\Delta]) \leq i \leq d$ **and (ii)** $\underline{H}_m{}^i(k[\Delta]) \neq 0$ **for** $i = d$ **,** $v - \mathrm{hd}_A(k[\Delta])$ **. The Hilbert series** $F(\underline{H}_m{}^i(k[\Delta]),\lambda)$ **of** $\underline{H}_m{}^i(k[\Delta])$ **as a module over** $k[\Delta]$ **is**

$$F(\underline{H}_m{}^i(k[\Delta]),\lambda)$$

$$= \sum_{\sigma \in \Delta} \dim_k(\tilde{H}_{i-\#(\sigma)-1}(\mathrm{link}_\Delta(\sigma);k)) (\lambda^{-1}/(1-\lambda^{-1}))^{\#(\sigma)} . \qquad \textbf{(2)}$$

We refer the reader to [12, Sect. 5] and [16, Chap. II, Sect. 4] for further information on Eq. (1) and Eq. (2) as stated above.

(1.5) We say that a simplicial complex Δ is Cohen-Macaulay over k if $\mathrm{hd}_A(k[\Delta]) = v - d$, i.e., $\underline{H}_m{}^i(k[\Delta]) = 0$ for every $i \neq d$. A topological criterion [14] says that a simplicial complex Δ is Cohen-Macaulay over k if and only if $\tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta(\sigma);k) = 0$ for every face $\sigma \in \Delta$ (possibly, $\sigma = \emptyset$) and for each $i \neq \dim(\mathrm{link}_\Delta(\sigma))$. For example, a simplicial complex whose geometric realization is homeomorphic to either a ball or a sphere is Cohen-Macaulay. On the other hand, a simplicial complex Δ is called Buchsbaum over k if $\dim_k(\underline{H}_m{}^i(k[\Delta])) < \infty$ for every $0 \leq i < d$. Every Buchsbaum complex is pure. A simplicial complex Δ is Buchsbaum if and only if $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ is Cohen-Macaulay for every non-empty face σ of Δ .

(1.6) Every partially ordered set ("poset" for short) to be studied is finite. A chain is a totally ordered set. The length of a chain C is $\ell(C) := \#(C) - 1$. A totally ordered subset in a poset P is also called a chain of P . The rank of a poset P is $\mathrm{rank}(P) := \max\{ \ell(C) ; C$ is a chain of $P \}$. A poset P is called pure if every maximal chain has the same length. When $x , y \in P$, we say that y covers x if $x < y$ and $x < z < y$ for no $z \in P$. A chain $x_1 < x_2 < \ldots < x_s$ of P is called saturated if x_{i+1} covers x_i for each $1 \leq i < s$. Given a poset P , we write $\Delta(P)$ for the set of chains of P . Then $\Delta(P)$ is a simplicial complex on the vertex set P . We say that $\Delta(P)$ is the order complex of P . Note that $\dim \Delta(P) = \mathrm{rank}(P)$. On the other hand, we define the poset $\hat{P}$ by $\hat{P} = P \cup \{ \hat{0} , \hat{1} \}$ such that $\hat{0} < x < \hat{1}$ for every $x \in P$. If $x \leq y$ in P , then the open interval (x , y) (resp. closed interval $[x , y]$) of P is the induced subposet $\{ z \in P ; x < z < y \}$ (resp. $\{ z \in P ; x \leq z \leq y \}$) of P . In particular, $(x , x) = \emptyset$ and $[x , x] = \{ x \}$ for every $x \in P$.

(1.7) The Möbius function μ_P of a poset P is the map $\mu_P : \{ (x,y) \in P \times P ; x \leq y \} \to \mathbb{Z}$, where $\mathbb{Z}$ is the set of integers, defined as follows :

(i) $\mu_P(x,x) = 1$ for each $x \in P$, and

(ii) $\mu_P(x,y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu_P(x,z)$ for every $x < y$ in P .

One of the most important formula for us on Möbius functions is

$$\mu_{P^\wedge}(0^\wedge,1^\wedge) = \chi^\sim(\Delta(P)) . \tag{3}$$

Here $\chi^\sim(\Delta(P))$ is the reduced Euler characteristic of the order complex $\Delta(P)$ of P. Moreover, let $x < y$ in P, and suppose that both $0^\wedge = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = x$ and $y = y_0 < y_1 < \ldots < y_t = 1^\wedge$ are saturated chains of P. If $\sigma = \{ x_0, \ldots, x_s, y_0, \ldots, y_t \} \in \Delta(P)$, then $\mathrm{link}_{\Delta(P)}(\sigma)$ is just the order complex of the open interval (x, y) of $P^\wedge$. Hence

$$\mu_{P^\wedge}(x,y) = \chi^\sim(\mathrm{link}_{\Delta(P)}(\sigma)) . \tag{4}$$

See, e.g., [17, pp.116-124] for some results on Möbius functions.

(1.8) A lattice is a poset L for which every pair of elements α and β has a least upper bound (or "join") denoted by $\alpha \vee \beta$, and a greatest lower bound (or "meet") denoted by $\alpha \wedge \beta$. Thus, in particular, every (finite) lattice has a unique minimal element $0^\wedge$ and a unique maximal element $1^\wedge$. Every closed interval of a lattice is again a lattice. An atom of a lattice L is an element which covers $0^\wedge$ in L. We say that a lattice L is atomic if every element is the join of atoms of L. A lattice L is called complemented if, for every $x \in L$, there exists $y \in L$ such that $x \wedge y = 0^\wedge$ and $x \vee y = 1^\wedge$. Moreover, a lattice L is called relatively complemented if every closed interval of L is complemented. We say that a lattice L is semimodular if the following condition is satisfied : If $x, y \in L$ both cover $x \wedge y$, then $x \vee y$ covers both x and y. Moreover, we say that a lattice L is modular if, for all elements x, y and z in L with $x \leq z$, we have $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Every modular lattice is semimodular. A semimodular lattice L is atomic if and only if L is relatively complemented. A geometric lattice is a lattice which is both relatively complemented and semimodular.

§2. Cohen-Macaulay types

We inherit the notation in the preceding section.

(2.1) Suppose that a simplicial complex Δ is Cohen-Macaulay over k, i.e., $\mathrm{hd}_A(k[\Delta]) = v - d$. Then we write $\mathrm{type}(k[\Delta])$ for the $(v-d)$-th Betti number $\beta_{v-d}{}^A(k[\Delta])$ of $k[\Delta]$ over A, and call type($k[\Delta]$) **the Cohen-Macaulay type of** $k[\Delta]$. **By virtue of Eq. (1) we have the topological formula for** type($k[\Delta]$) **as follows :**

$$\mathrm{type}(k[\Delta]) = \sum_{W \subset V} \dim_k(\tilde{H}_{d-\#(W)-1}(\Delta_{V-W};k)) \qquad \textbf{(5)}$$

(2.2) A Cohen-Macaulay complex with type($k[\Delta]$) = 1 **is called Gorenstein. For example, a simplicial complex whose geometric realizationis homeomorphic to a sphere is Gorenstein. If** Δ **is Gorenstein, then** $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ **is Gorenstein for every face** σ **of** Δ. **Some characterization of Gorenstein complexes is obtained in, e.g., [12, pp.210-211] and [16, p.75] .**

(2.3) A Cohen-Macaulay complex Δ **is called doubly Cohen-Macaulay [2] if the subcomplex** $\Delta_{V-\{x\}}$ **is Cohen-Macaulay of the same dimension as** Δ **for each** $x \in V$. **A Gorenstein complex** Δ **with** $\tilde{\chi}(\Delta) \neq 0$ **is doubly Cohen-Macaulay. Every subcomplex** $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ **of a doubly Cohen-Macaulay complex** Δ **is again doubly Cohen-Macaulay. Moreover, a Cohen-Macaulay complex** Δ **is doubly Cohen-Macaulay if and only if** $(-1)^{d-1}\tilde{\chi}(\Delta) = \mathrm{type}(k[\Delta])$.

(2.4) EXAMPLE. Let $v = 7$, $d = 3$ **and** Δ **the simplicial complex of Figure 1. Then** Δ **is Cohen-Macaulay over an arbitrary field. However,** type($k[\Delta]$) = 7 **if** char(k) $\neq$ 2 **and** type($k[\Delta]$) = 8 **if** char(k) = 2 .

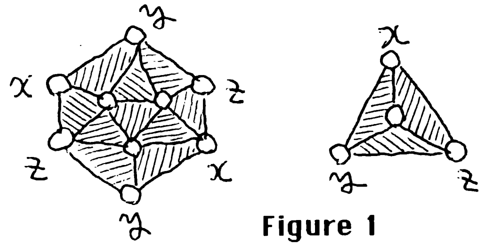


Figure 1

(2.5) We say that a face σ **of a Cohen-Macaulay complex** Δ **is fundamental if (i)** $\tilde{\chi}(\mathrm{link}_\Delta(\tau)) = 0$ **for every face** τ **of** Δ **with** $\tau \subset \sigma$ **and** $\tau \neq \sigma$, **and (ii)** $\tilde{\chi}(\mathrm{link}_\Delta(\sigma)) \neq 0$. **We write** $\mathcal{F}(\Delta)$ **for the set of fundamental faces of** Δ. **A Cohen-Macaulay complex** Δ **is called superior if** $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ **is doubly Cohen-Macaulay for every fundamental face** σ **of** Δ. **For example, if the geometric realization of** Δ **is homeomorphic to a ball, then the Cohen-Macaulay complex** Δ **is superior.**

(2.6) A poset P is called Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein, doubly Cohen-Macaulay) over a field k if the order complex $\Delta(P)$ of P is Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein, doubly Cohen-Macaulay) over k. When $x < y$ in a Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein, doubly Cohen-Macaulay) poset P, the open interval (x, y) is also Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein, doubly Cohen-Macaulay). Moreover, we say that a Cohen-Macaulay poset P is superior if the Cohen-Macaulay complex $\Delta(P)$ is superior.

(2.7) LEMMA. (a) (e.g., [1], [5]) Every semimodular lattice is Cohen-Macaulay.

(b) ([2]) If $L = \hat{P}$ is a geometric lattice, then P is doubly Cohen-Macaulay.

(2.8) PROPOSITION. If $L = \hat{P}$ is a modular lattice, then the Cohen-Macaulay poset P is superior.

Proof. Suppose that $L = \hat{P}$ is a modular lattice with $\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1}) \neq 0$. Then, by [17, Corollary (3.9.5)], in L, the element $\hat{1}$ is the join of atoms. Hence, thanks to [4, Thoerem 6, p.88], the lattice L is complemented. Then, [4, Theorem 14, p.16] guarantees that L is relatively complemented. Hence, the lattice L is geometric. Thus, the poset P is doubly Cohen- Macaulay. Q.E.D.

(2.9) EXAMPLE. Even though $L = \hat{P}$ is a semimodular lattice, the Cohen-Macaulay poset P is not necessarily superior. It follows easily that, when $L = \hat{P}$ is a semimodular lattice, the Cohen-Macaulay poset P is superior if and only if the following condition is satisfied : If $\hat{0} \leq x < y \leq \hat{1}$ in $\hat{P}$ and $\mu_{\hat{P}}(x,y) \neq 0$, then $\mu_{\hat{P}}(z,w) \neq 0$ for every $z, w \in \hat{P}$ with $x \leq z < w \leq y$ in $\hat{P}$.

We now come to the first result in the paper.

(2.10) THEOREM. Suppose that a simplicial complex Δ of dimension $d - 1$ is Cohen-Macaulay over a field k, and let $\mathcal{F}(\Delta)$ be the set of fundamental faces of Δ.

(a) Then we have the lower bound inequality

$$\operatorname{type}(k[\Delta]) \geq \sum_{\sigma \in \mathcal{F}(\Delta)} (-1)^{d-1-\#(\sigma)} \tilde{\chi}(\operatorname{link}_{\Delta}(\sigma)).$$

for the Cohen-Macaulay type of $k[\Delta]$.

(b) Moreover, in order that the equality holds in the above inequality, it is sufficient (however, not necessary) that the Cohen-Macaulay complex Δ is superior.

Our proof in [9] of the above Theorem (2.10) is based on Eq. (5) as well as the long exact sequence of local cohomology modules in the theory of commutative algebra.

(2.11) EXAMPLE. Let $v = 9$, $d = 3$ and Δ the Cohen-Macaulay complex of Figure 2. The fundamental faces of Δ are $\sigma_1 = \{ x \}$, $\sigma_2 = \{ y \}$ and $\sigma_3 = \{ z \}$ with each $\tilde{\chi}(\mathrm{link}_\Delta(\sigma_i)) = -1$. Since $\mathrm{type}(k[\Delta]) = 3$, we have the equality in the lower bound inequality for $\mathrm{type}(k[\Delta])$. However, the Cohen-Macaulay complex Δ is not superior. In fact, both $\mathrm{link}_\Delta(\sigma_1)$ and $\mathrm{link}_\Delta(\sigma_2)$ are not doubly Cohen-Macaulay.

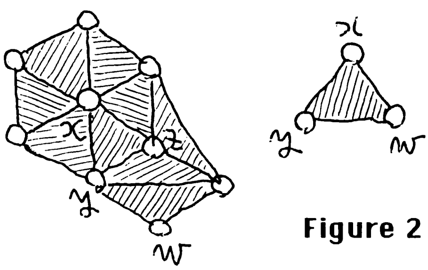


Figure 2

(2.12) We now study the poset-version of the second result (b) of Theorem (2.10). Suppose that P is a Cohen-Macaulay poset. In general, if $C : \hat{0} = x_0 < x_1 < \ldots < x_s < x_{s+1} = \hat{1}$ is a chain of $\hat{P}$ combining $\hat{0}$ with $\hat{1}$, then we set

$$\mu_{\hat{P}}(C) = \mu_{\hat{P}}(x_0,x_1)\mu_{\hat{P}}(x_1,x_2)\ldots\mu_{\hat{P}}(x_s,x_{s+1}).$$

We say that a chain $C : \hat{0} = x_0 < x_1 < \ldots < x_s < x_{s+1} = \hat{1}$ of $\hat{P}$ is essential if $\mu_{\hat{P}}(C) \neq 0$. Let $\mathcal{E}(\hat{P})$ be the set of essential chains of $\hat{P}$ and write $\mathcal{E}^*(\hat{P})$ ($\subset \mathcal{E}(\hat{P})$) for the set of minimal essential chains of $\hat{P}$. In other words, a chain $C : \hat{0} = x_0 < x_1 < \ldots < x_s < x_{s+1} = \hat{1}$ of $\hat{P}$ is a minimal essential chain of $\hat{P}$ if and only if the face $\sigma = \{ x_1, \ldots, x_s \}$ is a fundamental face of $\Delta(P)$.

(2.13) COROLLARY. Suppose that a Cohen-Macaulay poset P is superior. Then the Cohen-Macaulay type $\mathrm{type}(k[\Delta(P)])$ of the

Stanley-Reisner ring $k[\Delta(P)]$ **of the order complex** $\Delta(P)$ **of** P **is equal to** $\sum_{C \in \mathcal{E}^*(P^\wedge)} |\mu_{P^\wedge}(C)|$ **. In particular, if** $L = P^\wedge$ **is a modular lattice, then** $\mathrm{type}(k[\Delta(P)]) = \sum_{C \in \mathcal{E}^*(P^\wedge)} |\mu_{P^\wedge}(C)|$ **.**

(2.14) EXAMPLE. Let $L = P^\wedge$ **be the modular lattice of Figure 3. Then the minimal essential chains of** $P^\wedge$ **are** $0^\wedge < x < 1^\wedge$, $0^\wedge < y < z < 1^\wedge$, $0^\wedge < p < q < 1^\wedge$ **and** $0^\wedge < p' < q' < 1^\wedge$ **. Thus** $\mathrm{type}(k[\Delta(P)]) = 10$ **.**

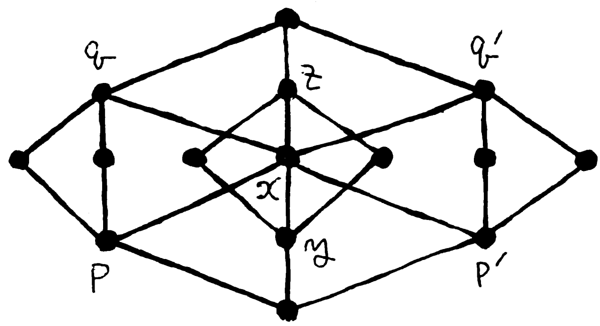


Figure 3

§3. Canonical modules

We now turn to the problem of finding a system of minimal generators of the canonical module of the Stanley-Reisner ring of the order complex of a modular lattice.

(3.1) Suppose that a poset P **of rank** $d - 1$ **is Cohen-Macaulay over a field** k **. Then, since** P **is pure, there exists a unique function** $\rho : P^\wedge \to \{0,1, \ldots ,d+1\}$ **such that** $\rho(0^\wedge) = 0$, $\rho(1^\wedge) = d + 1$ **, and** $\rho(\beta) = \rho(\alpha) + 1$ **if** β **covers** α **. We define** $\theta_i \in k[\Delta(P)]$ **by** $\theta_i = \sum_{\rho(x)=i} x$ **for each** $1 \le i \le d$ **. Then the sequence** $\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_d$ **is a system of parameters for** $k[\Delta(P)]$ **, in other words, (i)** $\theta_1 , \ldots , \theta_d$ **are algebraically independent over** k **and (ii)** $k[\Delta(P)]$ **is finitely generated as a module over the subalgebra** $k[\theta] = k[\theta_1,\theta_2, \ldots ,\theta_d]$ **. Since** P **is Cohen-Macaulay, the module** $k[\Delta(P)]$ **over** $k[\theta]$ **is free.**

(3.2) The canonical module $\Omega(k[\Delta(P)])$ **of** $k[\Delta(P)]$ **is defined to be the graded module**

$$\Omega(k[\Delta(P)]) = \mathrm{Hom}_{k[\theta]}(k[\Delta(P)],k[\theta])$$

over $k[\Delta(P)]$ **. Also, the socle** $Soc(k[\Delta(P)]/(\vartheta))$ **of** $k[\Delta(P)]/(\vartheta)$ **is**

$$Soc(k[\Delta(P)]/(\vartheta)) = \{\, y \in k[\Delta(P)]/(\vartheta) \,;\, xy = 0 \text{ for every } x \in P \,\},$$

where (ϑ) **is the parameter ideal** $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_d)$ **of** $k[\Delta(P)]$ **. The dimension** $\dim_k Soc(k[\Delta(P)]/(\vartheta))$ **of** $Soc(k[\Delta(P)]/(\vartheta))$ **as a vector space over** k **is equal to the Cohen-Macaulay type** $type(k[\Delta(P)])$ **of** $k[\Delta(P)]$ **. Moreover, It is known, e.g., [6, Corollary 6.11] that** $type(k[\Delta(P)])$ **is equal to the minimal number of generators of** $\Omega(k[\Delta(P)])$ **as a module over** $k[\Delta(P)]$ **.**

(3.3) Now, if $\alpha < \beta$ **in** $P^\wedge$ **with** $\rho(\beta) - \rho(\alpha) = r + 1$ **, then the** $(r-1)$**-th reduced homology group** $H^\sim{}_{r-1}(\Delta(\alpha,\beta);k)$ **of the order complex of the open interval** (α, β) **of** $P^\wedge$ **can be imbedded in** $k[\Delta(P)]$ **. Given a chain** $C : 0^\wedge = x_0 < x_1 < \ldots < x_s < x_{s+1} = 1^\wedge$ **of** $P^\wedge$ **with each** $\rho(x_{i+1}) - \rho(x_i) = r(i) + 1$ **, we write** $\mathcal{R}(C)$ **for the subspace of** $k[P]$ **spanned by those polynomials**

$$f_0 x_1{}^2 f_1 x_2{}^2 \ldots f_{s-1} x_s{}^2 f_s$$

with $f_i \in H^\sim{}_{r(i)-1}(\Delta(x_i,x_{i+1});k)$ **for every** $0 \le i \le s$ **. Here we employ the convention that each monimial of** f_i **is of the form** $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{r(i)}$ **with** $x_i < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{r(i)} < x_{i+1}$ **. Thus, in particular,** $\dim_k(\mathcal{R}(C)) = |\mu_{P^\wedge}(C)|$ **. Moreover, we define** $\mathcal{Q}(C)$ **to be the subspace of** $k[\Delta(P)]/(\vartheta)$ **which is the image of** $x_1{}^{-2} x_2{}^{-2} \ldots x_s{}^{-2} \mathcal{R}(C)$ **in** $k[\Delta(P)]/(\vartheta)$ **.**

(3.4) We write $\mathcal{I}^*(k[\Delta(P)])$ **for the ideal of** $k[\Delta(P)]$ **generated by all** $\mathcal{R}(C)$ **with** $C \in \mathcal{E}^*(P^\wedge)$ **. Moreover, we define** $\mathcal{J}^*(k[\Delta(P)])$ **to be the ideal of** $k[\Delta(P)]$ **which is generated by those square-free monomials** $x_1 x_2 \ldots x_s$ **such that** $x_i < x_{i+1}$ **in** P **for every** $1 \le i \le s$ **and** $0^\wedge = x_0 < x_1 < \ldots < x_s < x_{s+1} = 1^\wedge \in \mathcal{E}^*(P^\wedge)$ **.**

We are in the position to state the second result in the paper.

(3.5) THEOREM([10]). Suppose that the Stanley-Reisner ring $k[\Delta(P)]$ **of a poset** P **is Cohen-Macaulay. Then the ideal** $\mathcal{I}^*(k[\Delta(P)])$ **is isomorphic to the canonical module** $\Omega(k[\Delta(P)])$ **of** $k[\Delta(P)]$ **if and only if** $type(k[\Delta(P)]) = \Sigma_{C \in \mathcal{E}^*(P^\wedge)} |\mu_{P^\wedge}(C)|$ **.**

Proof. Let $\mathcal{I}(k[\Delta(P)])$ be the ideal of $k[\Delta(P)]$ generated by all $\mathcal{R}(C)$ with $C \in \mathcal{E}(\hat{P})$. The monomorphism ψ in [3, Theorem 1] enables us to define a monomorphism $\psi : \mathcal{I}(k[\Delta(P)]) \to \Omega(k[\Delta(P)])$ of graded modules over $k[\Delta(P)]$ in the analogous way. Note that the lowest degree of a non-zero homogeneous element of $\Omega(k[\Delta(P)])$ (resp. $\mathcal{I}(k[\Delta(P)])$) is $-d + \min\{\#(C); C \in \mathcal{E}(\hat{P})\}$ (resp. $d + \min\{\#(C); C \in \mathcal{E}(\hat{P})\}$), while ψ has degree $-2d$. We write $\mathcal{Q}(k[\Delta(P)])$ for the subspace of $k[\Delta(P)]$ which is spanned by those polynomials $f_0 x_1^{n_1} f_1 x_2^{n_2} \ldots f_{s-1} x_s^{n_s} f_s$ such that $\hat{0} = x_0 < x_1 < \ldots < x_s < x_{s+1} = \hat{1} \in \mathcal{E}(\hat{P})$ with $\rho(x_{i+1}) - \rho(x_i) = r(i) + 1$, $f_i \in \tilde{H}_{r(i)-1}(\Delta(x_i, x_{i+1}); k)$ for every $0 \le i \le s$, and each $n_i \ge 2$ is an integer. Since $\mathcal{Q}(k[\Delta(P)]) \subset \mathcal{I}(k[\Delta(P)])$, it follows from [16, Theorem 7.1, p.80] that the above monomorphism $\psi : \mathcal{I}(k[\Delta(P)]) \to \Omega(k[\Delta(P)])$ is an isomorphism and $\mathcal{Q}(k[\Delta(P)]) = \mathcal{I}(k[\Delta(P)])$. Moreover, each subspace $\mathcal{R}(C)$ with $C \in \mathcal{E}^*(\hat{P})$ is contained in the subspace of $k[\Delta(P)]$ spanned by an arbitrary system of generators of the ideal $\mathcal{I}(k[\Delta(P)])$. Hence $\mathcal{I}^*(k[\Delta(P)]) = \mathcal{I}(k[\Delta(P)])$ if and only if the minimal number of generators of $\Omega(k[\Delta(P)])$ is equal to $\sum_{C \in \mathcal{E}^*(\hat{P})} |\mu_{\hat{P}}(C)|$ as desired. **Q.E.D.**

When $\mu(\hat{0},\hat{1}) \neq 0$, the above Theorem (3.5) essentially coincides with [3, Theorem 2].

(3.6) COROLLARY. If $L = \hat{P}$ is a modular lattice, then $\mathcal{I}^*(k[\Delta(P)])$ is isomorphic to the canonical module $\Omega(k[\Delta(P)])$ of $k[P]$.

REMARK. Every subspace $\mathcal{Q}(C)$ of $k[\Delta(P)]/(\theta)$ with $C \in \mathcal{E}^*(\hat{P})$ is contained in $\mathrm{Soc}(k[\Delta(P)]/(\theta))$. However, even though the Cohen-Macaulay type of $k[\Delta(P)]$ is equal to $\sum_{C \in \mathcal{E}^*(\hat{P})} |\mu_{\hat{P}}(C)|$, the subspace of $\mathrm{Soc}(k[\Delta(P)]/(\theta))$ spanned by all $\mathcal{Q}(C)$ with $C \in \mathcal{E}^*(\hat{P})$ does not necessarily coincide with $\mathrm{Soc}(k[\Delta(P)]/(\theta))$.

It might be of interest to give a similar result to Hochster's theorem [16, Theorem7.3, p.81]. We refer the reader to, e.g., [16, p.28] for the definition of an orientable pseudo-manifold with boundary. The order complex $\Delta(P)$ of a Cohen-Macaulay poset P possesses the connectivity property [16, Definition 3.15 (c), p.28]. Moreover, if the order complex $\Delta(P)$ of a Cohen-Macaulay poset P over k is an orientable pseudo-manifold with boundary, then the poset P satisfies (☆) $|\mu_{\hat{P}}(x,y)| \le 1$ for every $\hat{0} \le x \le y \le \hat{1}$.

(3.7) PROPOSITION. Let P be a Cohen-Macaulay poset over k. Then there exists a homogeneous non-zero divisor $\Theta \in k[\Delta(P)]$ of degree d with $\mathfrak{J}^*(k[\Delta(P)])\cdot\Theta = \mathfrak{J}(k[\Delta(P)])$ ($= \mathfrak{a}(k[\Delta(P)])$) if and only if $\Delta(P)$ is an orientable pseudo-manifold with boundary.

Proof. Let $\mathfrak{M}(P^\wedge)$ be the set of maximal chains of $P^\wedge$. Given a function $\varepsilon : \mathfrak{M}(P^\wedge) \to k - \{0\}$, for each $F : 0^\wedge = y_0 < y_1 < \ldots < y_d < y_{d+1} = 1^\wedge \in \mathfrak{M}(P^\wedge)$, we set $m(F;\varepsilon) = \varepsilon(F) \prod_{1 \le i \le d} y_i \in k[\Delta(P)]$, and define $\Theta(\varepsilon) \in k[\Delta(P)]$ by $\Theta(\varepsilon) = \sum_{F \in \mathfrak{M}(P^\wedge)} m(F;\varepsilon)$, which is a homogeneous non-zero divisor on $k[\Delta(P)]$ of degree d. Now, let P be a Cohen-Macaulay poset over k and suppose the existence of a homogeneous non-zero divisor $\Theta \in k[\Delta(P)]$ of degree d with $\mathfrak{J}^*(k[\Delta(P)])\cdot\Theta = \mathfrak{a}(k[\Delta(P)])$. Then Θ must be of the form $\Theta(\varepsilon)$ for some ε. Hence, the poset P satisfies the above condition (☆), in particular, $\Delta(P)$ is a pseudo-manifold with boundary. If $F : 0^\wedge < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p < \gamma < \beta_1 < \ldots < \beta_q < 1^\wedge$, $F' : 0^\wedge < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p < \delta < \beta_1 < \ldots < \beta_q < 1^\wedge \in \mathfrak{M}(P^\wedge)$ with $\gamma \neq \delta$, then $\varepsilon(F) = -\varepsilon(F')$ since $C : 0^\wedge < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p < \beta_1 < \ldots < \beta_q < 1^\wedge \in \mathfrak{E}(P^\wedge)$ and $\alpha_1^2 \ldots \alpha_p^2 (\gamma - \delta) \beta_1^2 \ldots \beta_q^2 \in \mathfrak{R}(C)$. Thus $0 \neq \Theta \in H_{d-1}(\Delta(P), \partial\Delta(P); k)$, hence $\Delta(P)$ is orientable. On the other hand, suppose that the order complex $\Delta(P)$ of a Cohen-Macaulay poset P over k is an orientable pseudo-manifold with boundary. Since $H_{d-1}(\Delta(P), \partial\Delta(P); k) \neq (0)$, there exists $\varepsilon : \mathfrak{M}(P^\wedge) \to k - \{0\}$ such that $\varepsilon(F) = -\varepsilon(F')$ if $\#(F \cap F') = d - 1$. Then $0 \neq x_1 x_2 \ldots x_s \Theta(\varepsilon) \in \mathfrak{R}(C)$ for every $C : 0^\wedge = x_0 < x_1 < \ldots < x_s < x_{s+1} = 1^\wedge \in \mathfrak{E}(P^\wedge)$. Thus, since $\dim_k \mathfrak{R}(C) = 1$, the subspace $\mathfrak{R}(C)$ is spanned by $x_1 x_2 \ldots x_s \Theta$ over k. Hence $\mathfrak{J}^*(k[\Delta(P)])\cdot\Theta = \mathfrak{a}(k[\Delta(P)])$ as required. **Q.E.D.**

REFERENCES

[1] K. Baclawski, Cohen-Macaulay ordered sets, J. Algebra 63 (1980), 226-258.

[2] ______, Cohen-Macaulay connectivity and geometric lattices, Europ. J. Combin. 3 (1982), 293-305.

[3] ______, Canonical modules of partially ordered sets, J. of Algebra 83 (1983), 1-5.

[4] G. Birkhoff, "Lattice Theory," 3rd ed., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.

[5] A. Björner, A. Garsia and R. Stanley, An introduction to Cohen-Macaulay partially orgered sets, in "Ordered Sets" (I. Rival, ed.), Reidel, Dordrecht/Boston, 1982, pp. 583-615.

[6] J. Herzog and E. Kunz, "Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings," Lect. Notes in Math. No. 238, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.

[7] T. Hibi, Face number inequalities for matroid complexes and Cohen-Macaulay types of Stanley-Reisner rings of distributive lattices, Pacific J. Math. 154 (1992), 253-264.

[8] ———, 単体的複体と凸多面体の組合せ論，数学44巻，1992年.

[9] ———, Cohen-Macaulay types of Cohen-Macaulay complexes, submitted.

[10] ———, Canonical modules and Cohen-Macaulay types of partially ordered sets, preprint.

[11] ———, "Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes," Carslaw, Australia, 1992.

[12] M. Hochster, Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, in "Ring Theory II" (B. R. McDonald and R. Morris, eds.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., No. 26, Dekker, New York, 1977, pp. 171-223.

[13] J. Munkres, Topological results in combinatorics, Michigan Math. J. 31 (1984), 113-128.

[14] G. Reisner, Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, Advances in Math. 21 (1976), 30-49.

[15] R. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, Stud. Appl. Math. 54 (1975), 135-142.

[16] ———, "Combinatorics and Commutative Algebra," Birkhäuser, Boston/Basel/Stuttgart, 1983.

[17] ———, "Enumerative Combinatorics, Volume I," Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, Calif., 1986.

Takayuki Hibi
Department of Mathematics
Faculty of Science
Hokkaido University
Kita-ku, Sapporo 060, Japan
E-mail : hibi@math.hokudai.ac.jp

Intersection multiplicity の vanishing と positivity について

蔵野 和彦

東京都立大学 理学部

1 序章

Serre は彼の著書 "Algèbre locale. Multiplicités" [17] の中で、次の様な予想をしている。

Conjecture 1 $(A,\mathfrak{m})$ を正則局所環。M, N を有限生成 A-加群で、$0 < \ell_A(M \otimes_A N) < \infty$ を充たすものとする。このとき、$\chi(M,N) = \sum_{i \geq 0}(-1)^i \ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(M,N))$ と定義すれば、

(1) $\dim M + \dim N \leq \dim A$

(2) (1) で $<$ のとき、$\chi(M,N) = 0$

(3) (1) で $=$ のとき、$\chi(M,N) > 0$

であろう。

これは、正則局所環上の加群に関する予想であるが、別に局所的にだけ意味を持つものではない。実際、X を連結な正則スキーム、Y, Z をその既約な閉部分スキーム、U を $Y \cap Z$ の既約成分とし、$\mathcal{O}_{X,U} = A$, $\mathcal{O}_{Y,U} = M$, $\mathcal{O}_{Z,U} = N$ とおくことにより、上の Serre 予想の (1) は、U の X の中での余次元を上から評価 (つまり、雑にいえば、U の次元を下から評価) していて、(2) と (3) は、$\chi(M,N)$ によって Z と W の U に沿っての intersection multiplicity が定まることを意味している。Serre 予想は今のところ (1) は Serre 自身によって解かれていて ([17]), (2) は P. Roberts ([12]) と Gillet-Soulé ([6]) によって独立に解かれている。P. Roberts は、Fulton の著書 "Intersection Theory" [5] にある局所環の spectrum 上での Riemann-Roch 、あるいは bounded complex によって定まる local Chern character をうまく使って解いていて、また Gillet-Soulé は、algebraic K-theory を使って証明している。(3) は、まだ未解決であり、いろいろ部分的な結果はあるが、正則局所環 A が不分岐

(A が体を含むか、$A/\mathfrak{m}$ の標数が $p>0$ であり p が $\mathfrak{m}^2$ に入らない) の場合には正しいという Serre 自身の結果 ([17]) が、最も大きな結果といえる。Serre 予想自身は A が体を含む場合には簡単に証明できる。体 k 上の smooth な代数多様体 X の二つの閉部分多様体 Z, W が与えられたとき、$(Z \times_k W) \cap \Delta$ ($X \times_k X \supset \Delta$ は diagonal) として intersection product が定まるが、$A=\widehat{A}$ が係数体 k を持つときは、それと同じ考え方で k 上で二つの A-加群の complete tensor product ([17], [11]) を取って diagonal で切ることによって Serre 予想は証明できる。つまり、Serre 予想の本質は、そのような fibre 積を取ることをしなくても Tor の長さの交代和というホモロジー量によって intersection multiplicity が定まるということであるといえる。

さらに、A が正則局所環という条件を外して、次のようなことが予想された。

Conjecture 2 $(A,\mathfrak{m})$ を Noether 局所環。M, N を有限生成 A-加群で、M の射影次元は有限であり、$0<\ell_A(M\otimes_A N)<\infty$ を充たすものとする。このとき、$\chi(M,N)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(M,N))$ と定義すれば、

(1) $\dim M+\dim N\leq \dim A$

(2) (1) で $<$ のとき、$\chi(M,N)=0$

(3) (1) で $=$ のとき、$\chi(M,N)>0$

であろう。

上の (1) は、未解決、(2) と (3) は、Dutta-Hochster-MacLaughlin ([3]) によって反例が与えられていて、A が hypersurface のときでさえも成立しないことがわかる。このようなことが起こるのは、環が正則局所環のときに証明されているある local Chern character の vanishing ([14]) が、環が hypersurface であっても成立しない ([5] の Example 18.3.14) ことが原因となっている。

さらに、Conjecture 2 に条件を付けて、

Conjecture 3 $(A,\mathfrak{m})$ を Noether 局所環。M, N を有限生成 A-加群で、M, N の射影次元は有限であり、$0<\ell_A(M\otimes_A N)<\infty$ を充たすものとする。このとき、$\chi(M,N)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(M,N))$ と定義すれば、

(1) $\dim M+\dim N\leq \dim A$

(2) (1) で $<$ のとき、$\chi(M,N)=0$

(3) (1) で = のとき、$\chi(M,N) > 0$

であろう。

が予想された。これは、(1), (2), (3) の全てが未解決である。ただし、(2) については、P. Roberts により、A が complete intersection, または、$\dim \mathrm{Sing}(A) \leq 1$ と若干の条件のもとで解かれている ([14]) 。

ここで我々の目的は、Conjecture 3 の (2), (3) が、A の non complete intersection locus が充分小さい場合に証明することである (Theorem 4) 。Theorem 4 の (1) は、P. Roberts による上の二つの結果を完全に含み、Theorem 4 の (3), (4) の結果は、Dutta [2] や [9] の Proposition 3.3 よりも強いものである。

Theorem 4 の (4) で、A が標数 0 の体を含む場合を、それを A が正標数の体を含む場合に帰着させるところが非常に困難で面倒なところである。homological conjecture の多くは、正標数の体を含む場合に Frobenius 射を使って証明し、Hochster の Meta Theorem ([8]) を使って標数 0 の場合の情報を導き出すわけだが、今の場合、定理が特殊な環上でしか証明されておらず、Meta Theorem をそのまま使うことは出来ない。この状況に合うように、Meta Theorem を作りかえる必要がある。

最後に自分の考えをいえば、Serre 予想は将来誰かによって証明されると思うのですが、Conjecture 3 は、正しいのかどうかまったく判断がつきません。A が complete intersection であれば Conjecture 3 は成立しそうな気がしますが、A が complete intersection でないとき、Conjecture 2 の Dutta-Hochster-MacLaughlin による反例とよく似たことが、Conjecture 3 で起こったとしてもまったく不思議ではないような気がします。Serre 予想や Conjecture 3 は、加群の世界で、Tor の交代和により intersection theory をやろうというもので、これは Riemann-Roch によれば algebraic cycle の世界で local Chern character によって intersection theory をやることにほぼ対応しています。しかし、local Chern character を使って algebraic cycle 上で intersection theory をやるのは理にかなってないような気がします。例えば、Z が X の locally complete intersection subscheme であるとき、Z は他の algebraic cycle と (rational equivalence を保って) intersection をとることが出来ます。それは、refined Gysin map と呼ばれる写像で、$\mathcal{O}_Z$ の $\mathcal{O}_X$-locally free resolution で定まる local Chern character の一部と一致しています。つまり、この典型的な例を見てもわかるように、local Chern character 全体をとって intersection theory をやるよりは、local Chern character の一部分をとって algebraic cycle 上で intersection theory をやることが自然であると思われます。つまり、Serre 予想を一般の Noether 局所環上へ拡張するとすれば、単に Conjecture 3 のように加群の射影次元が有限という条件をつけるのではな

くて、Noether 局所環上の射影次元な加群の support は、他の algebraic cycle と intersection をとることができると考えるのが自然だと思われます。Z が X の locally complete intersection subscheme であるときの状況がそのまま射影次元有限な閉部分スキームで起こるとすれば、「A を Noether 局所環、M を射影次元有限な有限生成 A-加群、$\mathbb{F}.$ を M の A-free resolution, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ で $\ell_A(M/\mathfrak{p}M) < \infty$ であるとき、さらに若干の条件の下で、1). $\dim M + \dim A/\mathfrak{p} \leq \dim A$. 2). 1) で等号が成立するとき $\mathrm{ch}_t(\mathbb{F}.) \cap [\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p})] > 0$. (ただし $t = \dim A/\mathfrak{p}$)」と問題を設定するのが自然であるような気がします。こうすれば、A が正則局所環であれば、Serre 予想と同値であり、A が complete intersection であれば、Conjecture 3 よりも強い。A が complete intersection でないときは、Conjecture 3 よりは上のことが成立しそうな気がします。また、Conjecture 2 の Dutta-Hochster-MacLaughlin による反例のようなことは起こらない。

次の章では、Theorem 4 を、(4) で A が有理数体を含む場合以外を証明する。第三章では、Meta Theorem をいかに作り直すかについて簡単な説明を与える。

詳しいことは [10] を参照してください。

2 Theorem の証明

この章で、Theorem 4 を、(4) で A が有理数体を含む場合以外を証明する。

まずこの章で出てくる記号の説明をする。(詳しくは、Fulton [5] 参照)

$\mathrm{K}_0 X_{\mathbb{Q}}$ を、scheme X 上の coherent sheaf に関する rational Grothendieck group. $\mathrm{A}_* X_{\mathbb{Q}}$ を scheme X の rational Chow group. $\tau : \mathrm{K}_0 X_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{A}_* X_{\mathbb{Q}}$ を、Fulton-Riemann-Roch で定まる $\mathbb{Q}$-vector space の自然な同型。scheme X 上の locally free sheaf の bounded complex $\mathbb{F}.$ によって定まる local Chern character を $\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)$ とし、その cycle の次元を i 下げる部分を $\mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.)$ と表す。

以下、この章では、$(S, \mathfrak{n})$ を正則局所環、I をそのイデアルで、$A = S/I$ は等次元、$d = \dim A$ とおく。A の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ と書く。また

$$X = \operatorname{Spec} A \supseteq V = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid (I/I^2) \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \text{ は } A_{\mathfrak{p}}\text{-free でない}\}$$

とおく。V は、A の non complete intersection locus を表すことに注意。また、A が complete intersection のときは $\dim V = -\infty$ と約束する。M, N を有限生成 A-加群で、$\mathrm{pd}_A M < \infty$, $\mathrm{pd}_A N < \infty$ (pd_A は A-加群としての射影次元)、$0 < \ell_A(M \otimes_A N) < \infty$ と仮定する。$\mathbb{F}.$ と $\mathbb{G}.$ をそれぞれ M, N の A-free resolution. $\chi(M, N) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(M, N))$ とする。$\operatorname{Supp} M = Z \subseteq X$, $\operatorname{Supp} N = W \subseteq X$ とおく。

$\dim M = 0$ または $\dim N = 0$ のときは Conjecture 3 は、自明に正しいことに注意。

Theorem 4 上の状況で、更に $\dim M > 0$, $\dim N > 0$ と仮定する。このとき、

(1) $\dim V \leq 1$, $\dim M + \dim N < d$ であれば、$\chi(M, N) = 0$.

(2) $\dim V = 2$, $\dim M + \dim N < d$, d が奇数とする。A が Gorenstein または normal で canonical class $\mathrm{cl}(K_A)$ が divisor class group $\mathrm{Cl}(A)$ で torsion であれば、$\chi(M, N) = 0$.

(3) $\dim V \leq 0$, $\dim M + \dim N = d$ であれば、

$$\begin{aligned} \chi(M, N) &= \mathrm{ch}_d(\mathbb{F}. \otimes_A \mathbb{G}.) \cap [X] \\ &= \mathrm{ch}_{\dim N}(\mathbb{F}.) \cdot \mathrm{ch}_{\dim M}(\mathbb{G}.) \cap [X] \end{aligned}$$

(4) (3) で、更に $\dim M = \operatorname{depth} M$ とし、次のどちらかが成立すると仮定する。(i). A は体を含む。(ii). $\mathrm{ch}(A/\mathfrak{m}) = p > 0$ で $p^\nu N = 0$ $(\nu \gg 0)$. このとき、

$$\mathrm{ch}_d(\mathbb{F}. \otimes_A \mathbb{G}.) \cap [X] > 0.$$

以下、この章で Theorem 4 を、(4) で A が有理数体を含む場合以外に証明する。
次の補題が本質的である。

Lemma 5 $\dim V < d$ と仮定する。

$$\tau([A]) = q_d + q_{d-1} + \cdots + q_0 \quad (q_i \in \mathrm{A}_i X_{\mathbb{Q}})$$

とする。もし $0 \leq t \leq l \leq d$ を充たす自然数 l, t に対して $\mathrm{ch}_t(\mathbb{F}.) \cap q_l \neq 0$ であれば、このとき、$l - t \leq \dim(V \cap Z)$ または $\dim Z \geq d - t$ が成立する。

証明 $Y = \operatorname{Spec} S$ とおく。$\mathbb{P}.$ を A の S-free resolution とし、$i : X - V \to X$, $i' : Y - V \to Y$ を自然な単射とする。
このとき、

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A}_* Y_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\mathrm{ch}(\mathbb{P}.)"] \arrow[d, "(i')^*"'] & \mathrm{A}_* X_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "i^*"'] \\ \mathrm{A}_*(Y - V)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\mathrm{ch}(\mathbb{P}.|_{Y-V})"] & \mathrm{A}_*(X - V)_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd}$$

は可換である。$\tau : \mathrm{K}_0 X_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{A}_* X_{\mathbb{Q}}$ の構成法より、$\tau([A]) = \mathrm{ch}(\mathbb{P}.) \cap [Y]$ であり ([5]) 、このことにより、

$$\begin{aligned} & i^*(\mathrm{ch}(\mathbb{P}.) \cap [Y]) \\ = \ & i^*(q_d + q_{d-1} + \cdots + q_0) \\ = \ & \mathrm{ch}(\mathbb{P}.|_{Y-V}) \cap [Y - V] \end{aligned}$$

となる。$j : X - V \to Y - V$ は、locally complete intersection であり、$\mathbb{P}.|_{Y-V}$ は $\mathcal{O}_{X-V}$ の $\mathcal{O}_{Y-V}$-free resolution である。j の normal bundle を $\mathcal{E}$ とすれば、[5] の Corollary 18.1.2 より $\mathrm{ch}(\mathbb{P}.|_{Y-V}) = \mathrm{td}(\mathcal{E})^{-1} \cdot j^!$ ($j^!$ は j によって定まる refined Gysin map) となり、

$$\begin{aligned} & \mathrm{ch}(\mathbb{P}.|_{Y-V}) \cap [Y - V] \\ = \ & \mathrm{td}(\mathcal{E})^{-1} \cap j^!([Y - V]) \\ = \ & \mathrm{td}(\mathcal{E})^{-1} \cap [X - V] \end{aligned}$$

を得る。$\mathcal{E}$ の i 番目の Chern class $c_i(\mathcal{E})$ を単に c_i と表すと、$\mathrm{td}(\mathcal{E})^{-1}$ の $d-l$ 次の部分は、$\deg c_i = i$ として、$c_1, c_2, \ldots$ の $d-l$ 次式で表せる。それを $(\mathrm{td}(\mathcal{E})^{-1})_{d-l} = f_{d-l}(c_1, c_2, \ldots)$ とおけば、

$$i^*(q_l) = f_{d-l}(c_1, c_2, \ldots) \cap [X - V]$$

を得る。仮定より、

$$0 \neq \mathrm{ch}_t(\mathbb{F}.) \cap q_l \in \mathrm{A}_{l-t} Z_{\mathbb{Q}}$$

である。また、完全列

$$\mathrm{A}_{l-t}(V \cap Z)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{A}_{l-t} Z_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{A}_{l-t}(Z - V)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0$$

が存在することに注意。

ここで、$l-t > \dim(V \cap Z)$ と仮定する。このとき、$\mathrm{A}_{l-t}(V \cap Z)_{\mathbb{Q}} = 0$ であって $\mathrm{A}_{l-t} Z_{\mathbb{Q}} \neq 0$ であるので、$\mathrm{A}_{l-t}(Z - V)_{\mathbb{Q}} \neq 0$. 特に $Z - V \neq \emptyset$ である。$i" : Z - V \to Z$ を自然な単射とすれば、

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A}_l X_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)"] \arrow[d, "(i')^*"'] & \mathrm{A}_{l-t} Z_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "(i")^*"'] \\ \mathrm{A}_l(X - V)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\mathrm{ch}(\mathbb{F}.|_{X-V})"] & \mathrm{A}_{l-t}(Z - V)_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd}$$

は可換であるので、

$$\begin{aligned}
& (i'')^*(\mathrm{ch}_t(\mathbb{F}.)\cap q_l) \\
= \ & \mathrm{ch}(\mathbb{F}.|_{X-V})\cap i^*(q_l) \\
= \ & \mathrm{ch}(\mathbb{F}.|_{X-V})\cap f_{d-l}(c_1, c_2, \ldots)\cap [X-V] \\
= \ & f_{d-l}(c_1, c_2, \ldots)\cap \mathrm{ch}(\mathbb{F}.|_{X-V})\cap [X-V] \\
\neq \ & 0
\end{aligned}$$

である。故に $\mathrm{ch}(\mathbb{F}.|_{X-V})\cap [X-V]\neq 0$ となる。よって

$$t\geq \mathrm{codim}(Z-V, X-V) = \mathrm{codim}(\overline{Z-V}, X)\geq \mathrm{codim}(Z, X) = \dim X - \dim Z$$

ただし、$\overline{Z-V}$ は $Z-V$ の X での Zariski 位相での閉包とする。故に、$\dim Z\geq d-t$ となる。

証明終

定理の証明 $\tau([A]) = q_d + q_{d-1} + \cdots + q_0$ $(q_l\in \mathrm{A}_l X_{\mathbb{Q}})$ とおく。

まず、(1) を証明する。$\dim V\leq 1$, $\dim Z+\dim W < d$ と仮定する。$\dim Z > 0$, $\dim W > 0$ であるので、$d\geq 3$ となり、$d > \dim V$ に注意 (Lemma 5 の仮定を充す)。このとき、

$$\begin{aligned}
\chi(M, N)\cdot [\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m})] &= \mathrm{ch}(\mathbb{F}.\otimes_A \mathbb{G}.)\cap \tau([A]) \\
&= \mathrm{ch}(\mathbb{F}.\otimes_A \mathbb{G}.)\cap (q_d + q_{d-1} + \cdots + q_0) \\
&= \sum_{l=2}^{d} \mathrm{ch}_l(\mathbb{F}.\otimes_A \mathbb{G}.)\cap q_l
\end{aligned}$$

である。ここで、$d > 0$ より、$\mathrm{A}_0 X_{\mathbb{Q}} = 0$. 故に $q_0 = 0$ に注意。ここで、$1\leq l\leq d$ を充す整数 l に対して、$\mathrm{ch}_l(\mathbb{F}.\otimes_A \mathbb{G}.)\cap q_l\neq 0$ と仮定する。このとき、

$$0\neq \mathrm{ch}_l(\mathbb{F}.\otimes_A \mathbb{G}.)\cap q_l = \sum_{s+t=l} \mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.)\cdot \mathrm{ch}_t(\mathbb{G}.)\cap q_l$$

を充す。故に、$s+t=l$ となる非負整数 s, t が存在して、$\mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.)\cdot \mathrm{ch}_t(\mathbb{G}.)\cap q_l\neq 0$ となる。特に、$\mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.)\cap q_l\neq 0$, $\mathrm{ch}_t(\mathbb{G}.)\cap q_l\neq 0$ を充す。

$\dim Z > 0$, $\dim W > 0$, $\dim Z + \dim W < d$ であるから、$\dim Z\leq d-2$, $\dim W\leq d-2$ となる。このことと、X が等次元であることより、[13] によって、$\mathrm{ch}_0(\mathbb{F}.) = \mathrm{ch}_1(\mathbb{F}.) = \mathrm{ch}_0(\mathbb{G}.) = \mathrm{ch}_1(\mathbb{G}.) = 0$ がわかる。故に、$s\geq 2, t\geq 2$ としてよい。$s+t=l$ であることより、Lemma 5 から、$\dim Z\geq d-s$, $\dim W\geq d-t$ となる。このとき、

$$d > \dim Z + \dim W\geq 2d - s - t\geq d$$

となり矛盾する。

次に (2) を証明する。$\dim V = 2$, $\dim Z + \dim W < d$, d は奇数、A は Gorenstein または normal で canonical class が torsion と仮定する。ここでも、$\dim Z > 0$, $\dim W > 0$ であるので、$d \geq 3$ となり、$d > \dim V$ に注意 (Lemma 5 の仮定を充す)。

A に関する仮定より、$q_{d-1} = 0$ である ([9])。Lemma 5 の証明のときと同様の記号のもとで、

$$\begin{array}{ccc} A_* Y_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\mathrm{ch}(\mathbb{P}.)} & A_* X_{\mathbb{Q}} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (i')^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i^*} \\ A_*(Y - V)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\mathrm{ch}(\mathbb{P}.|_{Y-V})} & A_*(X - V)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

の可換性より、$i^*(q_d + q_{d-1} + \cdots + q_0) = \mathrm{td}(\mathcal{E})^{-1} \cap [X - V]$ となる。$\mathrm{td}(\mathcal{E})^{-1}$ は、$(\mathrm{td}(\mathcal{E})^{-1})_1 \cap [X - V] = 0$ であれば、任意の奇数 n に対して $(\mathrm{td}(\mathcal{E})^{-1})_n \cap [X - V] = 0$ であることがよく知られている (todd class の双対公式 [7])。このことと、完全列

$$A_* V_{\mathbb{Q}} \longrightarrow A_* X_{\mathbb{Q}} \longrightarrow A_*(X - V)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0$$

により $q_l \neq 0$ と仮定すれば l は奇数か 2 であることがわかる。

(1) と同様にして $\chi(M, N) \neq 0$ と仮定すれば、$q_l \neq 0$ と $s + t = l$ を充す非負整数 l, s, t が存在して、$\mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.) \cap q_l \neq 0$, $\mathrm{ch}_t(\mathbb{G}.) \cap q_l \neq 0$ となる。(1) と同様な議論によって $s \geq 2$, $t \geq 2$ としてよい。このことより l は 5 以上の奇数としてよい。このとき、Lemma 5 により、$l - s \leq \dim(V \cap Z)$ または $\dim Z \geq d - s$. $l - t \leq \dim(V \cap W)$ または $\dim W \geq d - t$ となる。

四つの場合に分けて考える。

$l - s \leq \dim(V \cap Z)$, $l - t \leq \dim(V \cap W)$ のとき。このとき、$s = t = 2$ となり、$l \geq 5$ に矛盾。

$l - s \leq \dim(V \cap Z)$, $\dim W \geq d - t$ のとき。このとき、$t = 2$ となり $\dim Z \geq 2$, $\dim W \geq d - 2$ となる。これは、$\dim Z + \dim W < d$ に矛盾。

$\dim Z \geq d - s$, $l - t \leq \dim(V \cap W)$ のときは上と同様。

$\dim Z \geq d - s$, $\dim W \geq d - t$ のとき。このとき、

$$d > \dim Z + \dim W \geq 2d - s - t \geq d$$

となり矛盾。以上で (2) が示された。

次に (3) を示す。$\dim V \leq 0$, $\dim Z + \dim W = d$ と仮定する。$d \geq 2$ となり、

$$\chi(M,N)\cdot[\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m})] = \sum_{l=2}^{d} \mathrm{ch}_l(\mathbb{F}.\otimes_A \mathbb{G}.)\cap q_l$$

となる。

$0 \leq s+t = l < d$ を充す非負整数 s, t, l が存在して、$\mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.)\cap q_l \neq 0$, $\mathrm{ch}_t(\mathbb{G}.)\cap q_l \neq 0$ と仮定する。

$\dim Z > 0$, $\dim W > 0$, $\dim Z + \dim W = d$ によって、$\dim Z < d$, $\dim W < d$ である。故に、$\mathrm{ch}_0(\mathbb{F}.) = \mathrm{ch}_0(\mathbb{G}.) = 0$ となる。このことより、$s \geq 1$, $t \geq 1$ としてよい。すると、Lemma 5 により、$\dim Z \geq d-s$, $\dim W \geq d-t$ を得る。このとき、

$$d = \dim Z + \dim W \geq 2d - s - t = d + (d-l) > d$$

となり矛盾する。

次に (4) を示す。ここでは、$\mathrm{ch}(A/\mathfrak{m}) = p > 0$, $p^\nu N = 0$ $(\nu \gg 0)$ の場合に証明する (これは、A 自身が正標数の体を含む場合も含んでいる)。

このとき、(3) によって

$$\begin{aligned}\chi(M,N)\cdot[\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m})] &= \mathrm{ch}_d(\mathbb{F}.\otimes_A \mathbb{G}.)\cap[X] \\ &= \sum_{s+t=d} \mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.)\cdot \mathrm{ch}_t(\mathbb{G}.)\cap[X]\end{aligned}$$

である。

ここで、$s+t=d$ を充す非負整数 s, t が存在して、$\mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.)\cap[X] \neq 0$, $\mathrm{ch}_t(\mathbb{G}.)\cap[X] \neq 0$ と仮定する。このとき、X は等次元であることにより $s \geq \mathrm{codim}(Z,X) = \dim X - \dim Z$, $t \geq \mathrm{codim}(W,X) = \dim X - \dim W$ となる。故に、

$$d = s+t \geq 2d - \dim Z - \dim W = d$$

となることより、$s = \dim X - \dim Z = \dim W$, $t = \dim X - \dim W = \dim Z$ を得る。改めて、$i = \dim W$, $j = \dim Z$ とおく。このとき、

$$\chi(M,N)\cdot[\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m})] = \mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.)\cdot \mathrm{ch}_j(\mathbb{G}.)\cap[X]$$

である。local-Riemann-Roch formula ([5] の Example 18.3.12) により、

$$\mathrm{ch}(\mathbb{G}.)\cap\tau([A]) = \tau([N]) \ \text{ in } \mathrm{A}_* W_{\mathbb{Q}}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\mathrm{Assh}_A(N) &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid \dim_A N = \dim A/\mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k\}\end{aligned}$$

とおき、$\tau([N])$ の次元が e の部分を $(\tau([N]))_e$ と表すことにすれば、

$$\begin{aligned}(\tau([N]))_i &= \sum_{h=1}^{k} \ell_{A_{\mathfrak{p}_h}}(N_{\mathfrak{p}_h}) \cdot [\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}_h)] \\ &= (\mathrm{ch}(\mathbb{G}.) \cap \tau([A]))_i \\ &= \sum_{r=0}^{j} \mathrm{ch}_r(\mathbb{G}.) \cap q_{i+r}\end{aligned}$$

となる。故に、

$$\mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.) \cap (\tau([N]))_i = \sum_{r=0}^{j} \mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.) \cdot \mathrm{ch}_r(\mathbb{G}.) \cap q_{i+r}.$$

ここで、(3) で見たように、$s+t<d$ であれば、$\mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.) \cdot \mathrm{ch}_t(\mathbb{G}.) \cap q_{s+t} = 0$ にが成立することに注意する。すると、

$$\begin{aligned}&\mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.) \cap (\tau([N]))_i \\ =\ &\mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.) \cdot \mathrm{ch}_j(\mathbb{G}.) \cap [X] \\ =\ &\chi(M,N) \cdot [\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m})]\end{aligned}$$

となる。故に、

$$\chi(M,N) \cdot [\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m})] = \sum_{h=1}^{k} \ell_{A_{\mathfrak{p}_h}}(N_{\mathfrak{p}_h}) \cdot \mathrm{ch}_i(\mathbb{F}. \otimes_A A/\mathfrak{p}_h) \cap [\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}_h)]$$

となるが、$\mathrm{ch}(A/\mathfrak{p}_h) = p > 0$ で、$\mathbb{F}.\otimes_A A/\mathfrak{p}_h$ は、長さ $j = \dim N = \dim A/\mathfrak{p}_h$ の $A/\mathfrak{p}_h$-自由加群の複体で、homology の長さが有限である。このとき、$\mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.\otimes_A A/\mathfrak{p}_h) \cap [\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}_h)] > 0$ であることが知られており ([15]) 、このことより、$\chi(M,N) > 0$ となる。

3 有理数体を含む場合

この章で、Theorem 4 の (4) で、A が有理数体を含む場合、どのように証明するかについて、若干のコメントをつける。詳しくは、[10] 参照。

記号は、Theorem 4 の (4) と同じとする。このとき、A は $\mathfrak{m}$ 以外の素イデアルで局所化すれば complete intersection であり、M, N の条件より (New Intersection Theorem [15] を使うことにより) 、A は Cohen-Macaulay 環となることがわかる。

A が正標数の体を含む場合は、前章で既に示した。A が標数 0 の体上有限生成な環の局所環であるときは、よくやるように、$\mathbb{Z}$ 上の議論を通して正標数に帰着させて証明することができる。問題は、標数 0 の体上有限生成な環の局所環の結果から、A が標数 0 の体を含む完備局所環の場合の結果を導くところである。

Hochster の有名な Meta Theorem [8] だと、A の homological な性質は保たれず、いまの状況で有効に使えるのかどうかわからない。我々の状況では、A は Cohen-Macaulay 環であり、$\mathfrak{m}$ 以外の素イデアルで局所化すれば complete intersection の場合しか正標数の場合も証明されてないのである。だから、Meta Theorem を base ring A の性質が保たれ、更に、我々の状況に合うように、作りかえる必要がある。

Meta Theorem は、標数 0 の体を含む完備局所環 A に対してその Noether の正規化をとり、それらの情報を使って標数 0 の体上有限生成な環の局所環で A と同じような性質を充すものを作り出すわけである。A の homological な性質を保たせるためには、そのように Noether の正規化を使うのではなく、最初に与えられた標数 0 の体を含む完備局所環 A を正則局所環の準同型像と見て、その正則局所環をうまく近似して、標数 0 の体上有限生成な環の局所化である正則局所環で、その準同型像が A と同様な性質を持つものを作り出すのである。

この方法でまず問題になるのは、正則局所環のイデアル $I = (f_1, \ldots, f_l)$ に対し、ideal adic topology で $f_1, \ldots, f_l$ の充分な近似を $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l$ とし、$\tilde{I} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l)$ とおくと、一般に、$\mathrm{ht}\,\tilde{I}$ は $\mathrm{ht}\,I$ より大きくなってしまう可能性があることである。

標数 0 の体上有限生成な環の局所環に帰着させるためには、どうしても、解析的な情報から、代数的な情報を取り出す必要があり、近似定理を使って、ヘンゼル化から良い元を選ばないといけないのだが、肝心なイデアルの高さが違ってくる可能性があるのである。しかし、Eisenbud の定理 ([4]) を使うことにより、イデアルの高さを変えないように (方程式を作って) ヘンゼル化から元を選び出すことができるのである。(詳しくは [10] 参照)

文献

[1] S. P. Dutta, Frobenius and multiplicities, *J. of Alg.*, **85** (1983), 424–448.

[2] S. P. Dutta, A special case of positivity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **103** (1988), 344–346.

[3] S. P. Dutta, M. Hochster and J. E. MacLaughlin, Modules of finite projective dimension with negative intersection multiplicities, *Invent. Math.*, **79** (1985), 253–291.

[4] D. EISENBUD, Adic approximation of complexes, and multiplicities, *Nagoya Math. J.*, **54** (1974), 61–67.

[5] W. FULTON, *Intersection Theory*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1984.

[6] H. GILLET AND C. SOULÉ, K-théorie et nullité des multiplicites d'intersection, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **300** (1985), 71–74.

[7] F. HIRZEBRUCH, *Toppological methods in algebraic geometry*, 1956, Grundlehren der math. Wissenschaften, Vol. 131, Third enlarged edition, Springer-Varlag, 1966.

[8] M. HOCHSTER, *Topics in the homological theory of modules over local rings*, C. B. M. S. Regional Conference Series in Math., **24**. Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1975.

[9] K. KURANO, An appoarch to the characteristic free Dutta multiplicities, *preprint.*

[10] K. KURANO, On vanishing and positivity of intersection multiplicities over local rings of small non complete intersection locus, *in preparation.*

[11] M. NAGATA, *Local Rings*, Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., Wiley, New York, 1962.

[12] P. ROBERTS, The vanishing of intersection multiplicities and perfect complexes, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **13** (1985), 127–130.

[13] P. ROBERTS, MacRae invariant and the first local chern character, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **300** (1987), 583–591.

[14] P. ROBERTS, Local Chern characters and intersection multiplicities, *Proc. of Symposia in Pure Math.*, **46** (1987), 389–400.

[15] P. ROBERTS, Intersection theorems, *Commutative algebra*, Proc. Microprogram, June 15-July 12, 1987, Math. Sci. Res. Inst. Publ., no. 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1989, 417–436.

[16] P. ROBERTS. Local Chern classes, multiplicities, and perfect complexes, *Société Mathématique de France Mémoire* no. 38 (1989), 145–161.

[17] J-P. SERRE, *Algèbre locale. Multiplicités*, Lect. Note in Math., vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1965.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY, MINAMI-OHSAWA 1-1, HACHIOJI, TOKYO, 192-03, JAPAN

e-mail address: kurano@math.metro-u.ac.jp

Group Extensions in Invariant Theory

Haruhisa NAKAJIMA

Keio University, Hiyoshi 4-1-1, Kouhoku-ku, Yokohama 223

1. Introduction. Let G be a complex reductive linear algebraic group which acts $\mathbb{C}$-morphically on an affine variety X over the complex number field $\mathbb{C}$. The pair (X, G) or the G-variety X is said to be *cofree*, if the $\mathbb{C}[X]^G$-module $\mathbb{C}[X]$ is free, where $\mathbb{C}[X]$ stands for the affine coordinate ring of X. On the other hand, we say that (X, G) or X is *equidimensional*, if the quotient map $X \to X/G$ from X to the algebraic quotient X/G has equidimensional fibres and that (X, G) or X is *coregular*, if $X/G \cong \mathbb{A}^n$. Let $\rho\colon G \to GL(V(\rho))$ be a finite-dimensional rational representation of G over $\mathbb{C}$ which is identified with its representation space denoted by $V(\rho)$ endowed with the linear action of G. For any irreducible representation Ψ, let $\mathbb{C}[\rho]_\Psi$ denote the isotypic component of the rational G-module $\mathbb{C}[\rho]$ of type Ψ, which is called a local module of covariants of (ρ, G) associated with Ψ. The graded $\mathbb{C}[\rho]^G$-module $\mathbb{C}[\rho]$ is regareded as the global module of covariants of (ρ, G) and had been studied by classics.

By the slice method [6], V. G. Kac, V. L. Popov and E. B. Vinberg [3] determined coregular irreducible representations of simple complex Lie groups. Popov entered into the classification theory of cofree representations and, in [12], determined cofree irreducible representations of simple ones. G. W. Schwarz [14, 15], O. M. Adamovich and E. O. Golovina [2] generalized those results to reducible representations. For irreducible representations, Kac and Popov pointed out that the properties that representations are respectively *cofree*, *equidimensional* and *coregular* are equivalent to each other. Recently P. Littelmann [5] has classified, up to castling transformations, coregular, equidimensional and cofree irreducible representations of semisimple complex Lie groups, repectively.

In this note, we try to extend the classification of coregular and cofree representations to the case where G is not connected or to the case where G is not semisimple. A more detailed explanation of our purpose is as follows: A represntation $\varrho\colon L \to GL(V(\varrho))$ of a reductive

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

algebraic group L is said to be an *extension*[1] of ρ, of G or of (ρ, G), if $V(\varrho) = V(\rho)$ and there is a morphism $\varsigma: G \to L$ such that $\rho = \varrho \circ \varsigma$ and G is normal in L via ς. If $L/\varsigma(G)$ is finite, (ϱ, L) is said to be a *finite extension* of ρ. If $L/\varsigma(G)$ is a connected algebraic torus, ϱ is said to be a *toric extension* of ρ, and, especially in the case where $L/\varsigma(G) \cong \mathbb{C}^*$, it is said to be a $\mathbb{C}^*$-*extension* of ρ. Moreover we say that ϱ is *coregular* (resp. *equidimensional, cofree*) *extension* of ρ, if ϱ is so. On the other hand, if (ϱ, L) is stable (i.e., $V(\varrho)$ contains a nonempty L-stable open set) (and $\rho(G) \neq \varrho(L)$), ϱ is said to be a (*non-trivially*) *stable extension* of ρ. We also say that an extension (ϱ, H) of ρ is *central*, if H is generated by the union of G and the centralizer $Z_H(G)$ of G in H. We will study on the following problems:

Problem 1.1. Classify representations of simple algebraic groups admitting cofree $\mathbb{C}^*$-extensions. For example, classify cofree representations of GL_n.

Problem 1.2. Can we determine, in principle, representations of a semisimple algebraic group admitting equidimensional toric extensions?

Problem 1.3. Classify finite coregular extensions of representations of simple algebraic groups.

Problem 1.4. Determine algebraic tori admitting finite coregular extensions.

The author would like to take this occasion to point out that, for rings of covariants of reductive groups, the terminologies similar to them in the case of rings of invariants can be defined and some results associated with the ones in this note can be shown. For example, we can prove the arguments similar to Theorem 2.1 and Theorem 3.5 given below, if (ρ, G) is replaced by the restriction of a representation of a reductive group to its maximal unipotent subgroup. So, it would be interesting and possible to classify finite coregular extensions or stable cofree extensions of restrictions to maximal unipotent subgroups.

2. Finite Coregular Extensions. In this section we study finite coregular extensions which has initially been defined by D. I. Panyushev.

Theorem 2.1(Panyushev [10]). *Let ρ be a representation of a connected semisimple complex algebraic group G which admits a finite coregular extension. Then the quotient variety $V(\rho)/G$ is a complete intersection.*

[1] This terminology is distinct from one in group theory

Such a representation stated as in Theorem 2.1 can, in principle, be determined, because the next result follows from [8]:

Theorem 2.2. *Let G be a connected semisimple complex algebraic group. Then, up to isomorphism and addition of trivial representation, there are only finitely many representations ρ of G whose quotient varieties $V(\rho)/G$ are complete intersections, and so they are, in principle, constructive.*

In 1991, using a method which is development of the one of [3], D. Shmel'kin[2] has classified all finite coregular extensions of irreducible representations of connected simple algebraic groups (cf. [10]). However, Theorem 2.1 implies that his classification, ***a priori***, is a part of the author's one in [8] which gives representations ρ such that $V(\rho)/G$ are complete intersections. Consequently, combining his classification with the author's one, we establish

Theorem 2.3. *Let ρ be an irreducible representation of a connected simple and simply connected complex algebraic group G. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *$V(\rho)/G$ is a complete intersection.*

(2) *(ρ, G) is coregular (cf. [3]) or equivalent to one of the following lists: $(Sym^5(\Phi_1), SL_2)$, $(Sym^6(\Phi_1), SL_2)$ and $(Sym^3(\Phi_1), SL_4)$, where Φ_1 denotes the natural representation of SL_n of degree n.*

(3) *(ρ, G) admits a finite central coregular extension.*

(4) *(ρ, G) admits a finite coregular extension.*

The implication (2) $\Rightarrow$ (3) can be directly checked.

Remark 2.4. Theorem 2.1 can not be extended to a reductive group which are not semisimple. In general, if (ρ, G) admits a finite central coregular extension, even then $V(\rho)/G$ may not be a Gorenstein variety.

Theorem 2.5. *Suppose that G^0 is an algebraic torus of rank one and $V(\rho)^{G0} = 0$. Denote by $V(\rho)_-$ (resp. by $V(\rho)_+$) the negative (resp. positive) weight subsapce in $V(\rho)$. Then (ρ, G) is coregular if and only if it satisfies one of the following conditions:*

(1) *$V(\rho)_-$ or $V(\rho)_+$ is equal to 0.*

(2) $\dim V(\rho) = 2$.

[2] The author has not yet obtained Shmel'kin's manuscript on this classification.

(3) $Z_G(G^0) = G$ and $\rho(G_X)$ is a finite pseudo-reflection group in $GL(V(\rho))$ for some $X \in V(\rho)$ which generates $V(\rho)_-$ or $V(\rho)_+$.

(4) $\dim V(\rho) = 4$ and there are a finite normal subgroup K of G in $Z_G(G^0)$ and $A_i \in GL_2(\mathbb{C})$ such that $\rho(K)$ is a pseudo-reflection group in $GL(V(\rho))$ and $\rho(G)$ is generated by $\rho(G^0)$ and matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i^{-1} \end{bmatrix} \ (1 \leq i \leq m)$$

for some $m \in \mathbb{N}$. Here these matrices are expressed as block matrices defined by the decomposition $V(\rho) = V(\rho)_+ \oplus V(\rho)_-$.

We deduce this from the following three facts in general situation:

Lemma 2.6. *Suppose that (ρ, G) is coregular. If $\dim V(\rho)/G \geq 2$, then G/G^0 is generated by the union of all G_x, where x runs through the complete set of representatives of nontrivial closed orbits of G^0 on $V(\rho)$.*

This follows from purity of branch loci.

Lemma 2.7. *Any subrepresentation of a representation admitting a finite coregular extension admits also a finite coregular extension. Moreover if $(\rho/\rho^G, G)$ admits a finite coregular extension, then (ρ, G) does so.*

Let $A^i = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A^i_j$, $i = 1, 2$, be noetherian positively graded algebras defined over $A^1_0 = A^2_0 = \mathbb{C}$ of dimension ≥ 1. We denote by $A^1 \sharp_{\mathbb{C}} A^2$ the Segre product $\bigoplus_{j=0}^{\infty} (A^1_j \otimes_{\mathbb{C}} A^2_j)$ of graded algebras A^i, $i = 1, 2$. The multiplicative group $\mathbb{C}^*$ acts on A^i, $i = 1, 2$, respectively as $\mathbb{C}$-algebra automorphisms in such a way that $A^1 \sharp_{\mathbb{C}} A^2 = (A^1 \otimes A^2)^{\mathbb{C}^*}$.

Proposition 2.8. *Suppose that one of graded algebras in the set $\{A^i \mid \dim A^i = 1\}$ is a normal domain, unless it is empty. $A^1 \sharp_{\mathbb{C}} A^2$ is a polynomial ring over $\mathbb{C}$ if and only if both graded subalgebras $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}e_2} A^1_j$, $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}e_1} A^2_j$ are polynomial rings over $\mathbb{C}$ and one of A^i $(i = 1, 2)$ is of dimension one. Here, for each i, let e_i denote the largest common divisor of integers in the unique minimal set of generators of the additive subsemigroup of $\mathbb{Z}$ generated by $\{j \in \mathbb{Z} \mid A^i_j \neq \{0\}\}$.*

Remark 2.9. Since finite linear groups generated by Huffman's special elements are known, we can effectively determine the groups in (4) of Theorem 2.5.

Algebras of invariants of $Sym^5(\Phi_1)$ and $Sym^6(\Phi_1)$ of SL_2 are classically known, where Φ_1 denotes the natural representation of SL_2. By (3.13) of [14], we get the following classification of representations of SL_2:

Theorem 2.10[3]. *Suppose that $G = SL_2$ and $V(\rho)^G = 0$. Then (ρ, G) admits a finite coregular extension if and only if ρ is equivalent to a subrepresentation of one of*

$$Sym^6(\Phi_1),\ Sym^5(\Phi_1),\ Sym^4(\Phi_1),\ Sym(\Phi_1)\oplus Sym^3(\Phi_1),\ Sym^2(\Phi_1)\oplus Sym^3(\Phi_1),$$

$$3Sym^2(\Phi_1),\ Sym(\Phi_1)\oplus 2Sym^2(\Phi_1),\ 2Sym(\Phi_1)\oplus Sym^2(\Phi_1),\ 3Sym(\Phi_1).$$

Consequently, for reducible representations, the converse of the assertion of Panyushev's theorem does not hold.

By Theorem 2.5, Theorem 2.10, [6] and [7], we get the following best possible refinement of Theorem 2 of [3] which is controlled by a reductive subgroup of rank one, because it is founded on the complete classifications of finite coregular extensions of reductive groups of rank one:

Theorem 2.11. *Let ψ be a representation of a reductive algebraic group H and T a maximal torus of a simple 3-dimensional subgroup of H. Suppose that, for a point $v \in V(\psi)^T$, $(N_H(T)/T)_v$ is finite. Put $G = (H_v)^0$ and define a representation ρ of G to satisfy $(\rho, G)\oplus(Ad(H), G) = (\psi, G)\oplus(Ad(G), G)$. If (ψ, H) admits a finite coregular extension, then one of conditions of (ρ, G) stated in Theorem 2.5 or in Theorem 2.10 holds.*

In [8] we have already shown an analogous refinement to this in order to classify representations of simple algebrraic groups whose orbit spaces are complete intersections. The implication (4) $\Rightarrow$ (2) of Theorem 2.3 immediately follows from Theorem 2.11, the computation in Sect. 4 in [8] and classical facts.

Theorem 2.11, as well as the methods in [1, 14], is useful in studying reducible representations admitting finite coregular extensions, although we state only two results:

Theorem 2.12. *Suppose that G is a connected simple algebraic group of exceptional type and ρ is any representation. If (ρ, G) admits a finite central coregular extension, then (ρ, G) itself is coregular.*

---

[3]Shmel'kin independently has proved this theorem as the main result of his paper which is entitled *Coregular algebraic linear groups locally isomorphic to SL_2* and is published in *Lie Groups, Their Discrete Subgroups, and Invariant Theory* Advances in Soviet Mathematics vol. **8** (ed. by E.B. Vinberg), p173-190, American Mathematical Society, Providence, 1992.

Theorem 2.13. *Suppose that G is a connected simple algebraic group. If (ρ, G) is noncoregular and admits a finite central coregular extension, then (ρ, G) is not minimally noncoregular (for definition, see [14]).*

In the case where G is a connected algebraic torus, $V(\rho)/G$ is regarded as an affine normal torus embedding, which is naturally associated with a strongly convex rational convex polyhedral cone.

Theorem 2.14. *Suppose that G is a connected algebraic complex torus of arbitrary rank. Then (ρ, G) admits a finite central coregular extension if and only if $V(\rho)/G$ is simplicial as a toric variety.*

As an easy consequence of this theorem, we obtain the following criterion for an algebraic torus G: Let $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ be a basis of $V(\rho)$ on which $\rho(G)$ is a diagonal subgroup of $GL_n(\mathbb{C})$. Let Γ denote a set consisting of all minimal subsets Λ of $\{1, \ldots, n\}$ such that nonzero weights in each subspace $\sum_{i \in \Lambda} \mathbb{C}Y_i$ generate a positive half plane containing the origin.

Corollary 2.15. *For a representation ρ of a connected algebraic complex torus G, it admits a finite central coregular extension if and only if $\bigcup_{\substack{\Theta \in \Gamma \\ \Theta \neq \Lambda}} \Theta \not\supseteq \Lambda$ for all $\Lambda \in \Gamma$.*

Remark 2.16. Suppose that X is an n-dimensional affine toric variety which is a complete intersection. Such a variety is determined by the author. It should be noted that there exist many X's which are not simplicial. On the other hand, there is a finite subgroup H of $\mathrm{Aut}X$ of X such that X/H is also a complete intersection with codim X/H = codim $X - 1$. It seems to be complicated to classify finite noncentral coregular extensions of representations of algebraic tori of rank ≥ 2.

3. Stable Cofree Extensions. In this section we study representations admitting stable cofree extensions and especially $\mathbb{C}^*$-extensions. First, we quote the following well known facts on cofree representations:

Proposition 3.1. *For a finite-dimensional representation ρ of a reductive algebraic group G, we have*

(1) *ρ is cofree if and only if ρ is equidimensional and coregular.*

(2) *ρ is cofree if and only if, for any irreducible representation Ψ, $\mathbb{C}[\rho]_\Psi$ is a graded free $\mathbb{C}[\rho]^G$-module.*

(3) *ρ is cofree if and only if $\mathbb{C}[\rho] \cong \mathbb{C}[\rho]^G \otimes_{\mathbb{C}} K$ for a graded rational G-submodule K of $\mathbb{C}[\rho]$.*

(4) *Suppose that ρ is coregular. Then ρ is cofree if and only if a (or any) minimal system of homogeneous generators of $\mathbb{C}[\rho]^G$ is a $\mathbb{C}[\rho]$-regular sequence.*

(5) *If that ρ is cofree, then slice representations and subrepresentations of cofree ρ are always cofree.*

Proposition 3.2 (S. Endo, D. L. Wehlau [17]). *Equidimensional representations of connected algebraic tori are cofree.*

Theorem 3.3 (O. M. Adamovich [1]). *Equidimensional representations of simple connected algebraic groups are cofree.*

By Hilbert-Mumford criterion on nullcones, we can show

Theorem 3.4. *Let G be a semisimple complex algebraic group. Then, up to isomorphism and addition of trivial representation, there are only finitely many representations of G admittting stable equdimensional toric extensions, and so they are, in principle, constructive.*

For cofree extensions, we have the following result, which seems to be useful to determine cofree representations of reductive groups:

Theorem 3.5. *Let G be a semisimple complex algebraic group and suppose that ρ is a representation of G admitting a stable cofree toric extension. Then $V(\rho)/G$ is a complete intersection.*

This is a partial affirmative answer to the following problem posed by the author:

Problem 3.6. Let ρ be a representation of a semisimple complex algebraic group G admitting a stable and equidimensional toric extension. Then is $V(\rho)/G$ a complete intersection?

Consequently there are different proofs on finiteness of representations of a semisimple group admitting stable cofree toric extensions which are based respectively on Theorem 2.2 and Theorem 3.4.

The remainder of this section is devoted to the study on $\mathbb{C}^*$-extensions and particularly on the ones of SL_2, which seem to be easy. The next result follows from Proposition 3.1, Proposition 3.2 and Theorem 3.3.

Lemma 3.7. *Let ρ be a cofree representation of $\mathbb{C}^* \times SL_2$ and v a nonzero point of a closed orbit in $V(\rho)$. Then $(\rho_v, (\mathbb{C}^* \times SL_2)_v^0)$ is cofree.*

For a subset Ω of a rational $\mathbb{C}^*$-module, we denote by Ω_+ (resp. by Ω_-) the subset consisting of all semi-invariants v of $\mathbb{C}^*$ in Ω whose weights $\sigma \to \sigma(v)/v$ are positive (resp. negative).

Lemma 3.8. *Let X be an affine conical factorial variety on which $\mathbb{C}^*$ acts morphically and suppose that $\mathbb{C}^*$ preserves the gradation of $\mathbb{C}[X]$. Let Γ be a minimal system of homogeneous generators of $\mathbb{C}[X]$ as a $\mathbb{C}$-algebra. Then we have*

(1) *$(X, \mathbb{C}^*)$ is non-trivially stable if and only if $\Gamma_+ \neq \emptyset$ and $\Gamma_- \neq \emptyset$.*

(2) *$(X, \mathbb{C}^*)$ is non-trivially stable and cofree if and only if* $\operatorname{card} \Gamma_+ = \operatorname{card} \Gamma_- = 1$.

Hereafter G stands for a connected reductive group, H stands for a connected semisimple algebraic group and ϱ (resp. ψ) denotes a representation of G (resp. of $\mathbb{C}^* \times H$. Let $T_0(\varrho/G)$ denote the Zariski tangent space of $V(\varrho)/G$ at the point which is the image of the origin under the quotient map $V(\varrho) \to V(\varrho)/G$.

Lemma 3.9. *For a closed normal reductive subgroup N of G, we have*

(1) *If both (ϱ, N) and $(\varrho/N, G/N)$ are cofree, then so is (ϱ, G).*

(2) *If (ϱ, G) is cofree, then so is $(\varrho/N, G/N)$.*

(3) *(ϱ, G) is stable if and only if both (ϱ, N) and $(\varrho/N, G/N)$ are stable.*

Lemma 3.10 (G. Kempf [4], Panyushev [9]). *Suppose that* $\dim V(\varrho)/G = 2$. *Then the following coditions are equivalent:*

(1) *ϱ is cofree.*

(2) *ϱ is equidimensional.*

(3) *The quotient map $V(\varrho) \to V(\varrho)/G$ is not blowing up in codimension one.*

Especially if G is semisimple, then these equivalent coditions are automatically satisfied.

The last assertion was initially shown by Kempf. The non-trivial part of this lemma follows immediately from [9]. By Lemma 3.9 and Lemma 3.10, we get

Corollary 3.11. *Suppose that* $\dim V(\psi)/H = 2$. *Then we have*

(1) *$(\psi, \mathbb{C}^* \times H)$ is always cofree.*

(2) $(\psi, \mathbb{C}^* \times H)$ *is stable if and only if* $\dim T_0(\psi/H)_+ = \dim T_0(\psi/H)_- = 1$ *or* $\dim T_0(\psi/H)_+ = \dim T_0(\psi/H)_- = 0$.

Corollary 3.12. *Suppose that* $\dim V(\psi)/H = 3$ *and* (ψ, H) *is coregular. Then* $(\psi, \mathbb{C}^* \times H)$ *is cofree and* $(\psi/H, \mathbb{C}^*)$ *is non-trivially stable if and only if* $\dim T_0(\psi/H)_+ = \dim T_0(\psi/H)_- = 1$.

Corollary 3.13. *Let* ψ_i, $i = 1, 2$, *be irreducible representation of* H *such that* $\mathbb{C}[\psi_i]^H \neq \{0\}$. *If* $(\psi_1 \bigoplus \psi_2, H)$ *admits a nontrivial stable cofree* $\mathbb{C}^*$*-extension, then the* $\mathbb{Q}$*-rank of the set* $\{\deg(g) \in \mathbb{Z}^2 \mid g$ *is a homogeneous polynomial in* $\Delta\}$ *is at most one, where*

$$\Delta = \mathbb{C}[\psi_1 \bigoplus \psi_2]^H \backslash \{\mathbb{C}[\psi_1]^H \cup \mathbb{C}[\psi_2]^H \cup (\mathbb{C}[\psi_1 \bigoplus \psi_2]^H_{(+)})^2\}$$

and $C[\psi_1 \bigoplus \psi_2]_{(+)}$ *denotes the homogeneous maximal ideal.*

In the case where $\mathbb{C}^*$ acts non-trivially on ψ^H, the following result is essential.

Lemma 3.14. *Suppose that* $\psi^H \neq \psi^{\mathbb{C}^* \times H}$. *Then* $(\psi, \mathbb{C}^* \times H)$ *is cofree if and only if both* (ψ, H) *and* $(\psi/H, \mathbb{C}^*)$ *are cofree.*

In the case where $V(\varrho)/G \neq \{*\}$, let P be a principal closed isotropy group of (ϱ, G) (cf. [6, 7]) and π the slice representation associated with P. Then there is an étale morphism $E \to V(\varrho)_f/G$ for some invariant f such that $V(\varrho)_f$ is regarded as a principal bundle over G/P from π/π^P in the sence of étale (cf. [6]). From this observation and Frobenius reciprocity in [16], we get a local criterion on freedom of modules of covariants.

Lemma 3.15 (compare [15]). *For any irreducible representation* Ξ *of* G, *we have*

$$[\mathbb{C}[\varrho]_\Xi/(\mathbb{C}[\varrho]^G_{(+)} \cdot \mathbb{C}[\varrho]_\Xi) : \Xi] \geq \dim(\mathbb{C}[\pi/\pi^P] \bigotimes_{\mathbb{C}} \Xi^*)^P.$$

The equality holds if and only if $\mathbb{C}[\varrho]_\Xi$ *is a free* $\mathbb{C}[\varrho]^G$*-module.*

For the sake of simplicity, we denote by $\mathfrak{Sym}_n$ the representation $(Sym^n(\Phi_1), SL_2)$ and fix an isomorphism $\nu\colon \mathbb{Z} \ni j \mapsto \nu_j \in \mathrm{Hom}\ (\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$. The modules $\mathfrak{Sym}_n$ and ν_j are naturally regarded as $\mathbb{C}^* \times SL_2$-modules. Then $\nu_j \mathfrak{Sym}_n$ denotes the tensor product of these representations.

Theorem 3.16. *Let ρ be a nontrivial finite-dimensional representation of $\mathbb{C}^* \times SL_2$. Then ρ is stable and cofrèe if and only if, up to an automorphism and addition of a trivial summand of $\mathbb{C}^* \times SL_2$, ρ is equivalent to one of the following representations:*

(1) **Case** *$(\rho, \mathbb{C}^*)$ is trivial;*

$$\mathfrak{S}ym_2,\ \mathfrak{S}ym_3,\ \mathfrak{S}ym_4,\ 2\mathfrak{S}ym_1,\ \mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \mathfrak{S}ym_2,\ 2\mathfrak{S}ym_2.$$

(2) **Case** *$\rho^{SL_2} = \{0\}$ and (ρ, SL_2) is coregular;*

$$\nu_a\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \nu_{-a}\mathfrak{S}ym_1\ (a > 0),\ \nu_a\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \nu_{-b}\mathfrak{S}ym_2\ (2a > b > 0),$$

$$\nu_a\mathfrak{S}ym_2 \bigoplus \nu_{-a}\mathfrak{S}ym_2\ (a > 0),$$

$$\nu_a\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \nu_b\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \nu_{-a}\mathfrak{S}ym_1\ (a > b \geq 0).$$

(3) **Case** *$\rho^{SL_2} = \{0\}$ and (ρ, SL_2) is not coregular;*

$$\nu_a\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \nu_{-a}\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \mathfrak{S}ym_2\ (a > 0),\ \nu_a\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \nu_{-a}\mathfrak{S}ym_3\ (a > 0).$$

(4) **Case** *$\rho^{SL_2} = \mathbb{C}$;*

$$\nu_a\mathfrak{S}ym_2 \bigoplus \nu_{-b}\ (a, b > 0),\ \nu_a\mathfrak{S}ym_3 \bigoplus \nu_{-b}\ (a, b > 0),$$

$$\nu_a\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \nu_b\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \nu_{-c}\ (a + b > 0, c > 0),$$

$$\nu_a\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \mathfrak{S}ym_2 \bigoplus \nu_{-b}\ (a, b > 0),$$

$$\nu_{-a}\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \nu_{2a}\mathfrak{S}ym_2 \bigoplus \nu_{-b}\ (a, b > 0).$$

(5) **Case** *$\rho^{SL_2} = \mathbb{C}^2$;*

$$\nu_a\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \nu_{-a}\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \nu_b \bigoplus \nu_{-b}\ (a, b > 0),$$

$$\nu_a \bigoplus \nu_{-b} \bigoplus \mathfrak{S}ym_2\ (a, b > 0),\ \nu_a \bigoplus \nu_{-b} \bigoplus \mathfrak{S}ym_3\ (a, b > 0),$$

$$\nu_a \bigoplus \nu_{-b} \bigoplus \mathfrak{S}ym_4\ (a, b > 0),\ \nu_a \bigoplus \nu_{-b} \bigoplus 2\mathfrak{S}ym_1\ (a, b > 0),$$

$$\nu_a \bigoplus \nu_{-b} \bigoplus \mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \mathfrak{S}ym_2\ (a, b > 0),$$

$$\nu_a \bigoplus \nu_{-b} \bigoplus 2\mathfrak{S}ym_2\ (a, b > 0).$$

(6) **Case** *(ρ, SL_2) is trivial;*

$$\nu_a \bigoplus \nu_{-b}\ (a, b > 0).$$

Here a, b and c are integers.

Remark 3.17. Since the generating invariant binary forms of algebras $\mathbb{C}[\rho]^{SL_2}$'s of representations ρ's stated in Theorem 3.16 have partially been studied by classics (see the references in [13]), using those concrete systems, we can effectively determine the generating systems of the algebras $\mathbb{C}[\rho]^{\mathbb{C}^* \times SL_2}$'s.

If G is a group extension of a simple algebraic group H of rank one such that $G/L \cong \mathbb{C}^*$, then, since $\mathrm{Out} H = \{1\}$, we have a covering map $\mathbb{C}^* \times SL_2 \to G$ which extends an isogeny $SL_2 \to H$. Thus this theorem gives an answer to Problem 1.1 for stable extensions in the case of rank one.

Corollary 3.18. *Let φ be a finite-dimensional representation of a simple algebraic group H of rank one with an isogeny $\upsilon\colon SL_2 \to H$. Then φ admits a non-trivially stable and cofree $\mathbb{C}^*$-extension if and only if $\varphi \circ \upsilon$ is, up to addition of a trivial summand, equivalent to one of the following representations:*

$$\mathbb{C}^2,\ \mathfrak{S}ym_2 \bigoplus \mathbb{C},\ \mathfrak{S}ym_3 \bigoplus \mathbb{C},\ \mathfrak{S}ym_4 \bigoplus \mathbb{C}^2,\ 2\mathfrak{S}ym_1,\ \mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \mathfrak{S}ym_2,$$

$$2\mathfrak{S}ym_2,\ 3\mathfrak{S}ym_1,\ 2\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \mathfrak{S}ym_2,\ \mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \mathfrak{S}ym_3.$$

Finally we will give a sketch of the proof of Theorem 3.16. By Lemma 3.8, Lemma 3.9 and a criterion in [11], we can determine the stable representations of $\mathbb{C}^* \times SL_2$. Let ρ be a stable cofree representation of $\mathbb{C}^* \times SL_2$. Then by Lemma 3.8, $V(\rho)/SL_2$ is a hypersurface and so ρ is contained in a list given by [8, 13]. If ρ/SL_2 is singular, we may assume that $\rho^{SL_2} = \{0\}$.

Example 3.19. Let (ρ, SL_2) be $\mathfrak{S}ym_2 \bigoplus \mathfrak{S}ym_3$ whose algebraic quotient is a singular hypersurface. Any non-trivially stable universal $\mathbb{C}^*$-extension is, up to an automorphism, $\nu_a \mathfrak{S}ym_2 \bigoplus \nu_{-b} \mathfrak{S}ym_3$ for some $a, b > 0$. By Luna-Richardson's generalization of Chevalley restriction theorem, we have homogeneous polynomials f_i, $i = 1, 2$, of degree 2, 4 respectively such that $\mathbb{C}[\mathfrak{S}ym_2]^{SL_2} = \mathbb{C}[f_1]$ and $\mathbb{C}[\mathfrak{S}ym_3]^{SL_2} = \mathbb{C}[f_2]$. We can choose homogeneous polynomials g_j $(1 \leq j \leq 3)$ in such a way that

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}ym_2 \bigoplus \mathfrak{S}ym_3]^{SL_2} = \mathbb{C}[f_1, g_1, g_2, g_3, f_2].$$

Since $Sym^3(\mathfrak{S}ym_2) \supset \mathfrak{S}ym_3$ and

$$Sym^2(\mathfrak{S}ym_3) = \mathfrak{S}ym_6 \bigoplus \mathfrak{S}ym_2,$$

we may assume that

$$(Sym^1(\mathfrak{S}ym_2) \bigotimes_{\mathbb{C}} Sym^3(\mathfrak{S}ym_3))^{SL_2} = \mathbb{C} g_1$$

and

$$(Sym^3(\mathfrak{S}ym_2)\bigotimes_{\mathbb{C}} Sym^1(\mathfrak{S}ym_3))^{SL_2} = \mathbb{C}g_2.$$

Thus, by Corollary 3.13, we see that (ρ, SL_2) does not admit stable cofree $\mathbb{C}^*$-extensions.

Using Corollary 3.13, Lemma 3.15 and the slice method (cf. Proposition 3.1 and [6, 7, 13]) we show that, in this case, (ρ, SL_2) is isomorphic to $2\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \mathfrak{S}ym_2$ or to $\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus \mathfrak{S}ym_3$. Non-trivially stable cofree $\mathbb{C}^*$-extensions of the latter representation are analyzed by Lemma 3.8 and Lemma 3.10. For the former representation, we use Lemma 3.15 and the following estimation of codimension of the null cone $\mathfrak{N}(\varrho, G)$ of (ϱ, G) in $V(\varrho)$.

Lemma 3.20 (Schwarz [15]). *If (ϱ, G) is self dual, then*

$$\operatorname{codim} \mathfrak{N}(\varrho, G) \geq (\deg\, \varrho - \dim G + \operatorname{rank}\, G + \dim V(\varrho)_0)/2,$$

where $V(\varrho)_0$ denotes the subspace of $V(\varrho)$ of weight zero.

The remaining cases follow from the results in this section, some variations of Hilbert-Mumford criterion in [16], further computations and so on. We can similarly study cofree representations of GL_n, $n \geq 3$.

Remark 3.21. The degrees of stable and cofree representations of $\mathbb{C}^* \times SL_2$ without trivial factors are at most 8. This fact can be generarilzed to the case of reductive algebraic groups. However the degrees of representations of stable and coregular representations are unbounded. In fact, by the second main theorem for invariants of SL_2 we see that $(2\nu_a\mathfrak{S}ym_1 \bigoplus n\nu_{-a}\mathfrak{S}ym_1, \mathbb{C}^* \times SL_2)$ is stable and coregular, for any nonzero $a \in \mathbb{Z}$ and any natural number n. This example seems to be special.

Remark 3.22. By the slice method, we can determine cofree representations of $\mathbb{C}^* \times SL_2$ which are not stable. The degrees of such representations as above without trivial factors are unbounded.

Bibliography

1. O. M. Adamovich, *Equidimensional representations of simple algebraic groups*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **128** (1986), 25–29.
2. O. M. Adamovich and E. O. Golovina, *Simple linear Lie groups having a free algebra of invariants*, Selecta Math. Soviet. **3** (1983/1984), 183-220.

3. V. Kac, V. L. Popov and E. B. Vinberg, *Sur les groupes linéaires algébriques dont l'algèbre des invariants est libre*, C. R. Acad. Sci. Paris **283** (1976), 865-878.
4. G. Kempf, *Some quotient surfaces are smooth*, Michigan Math. J. **27** (1980), 295-299.
5. P. Littelmann, *Koreguläre und äquidimensionale Darstellungen*, J. Algerba **123** (1989), 193–222.
6. D. Luna, *Slices étales*, Bull. Soc. Math. France **33** (1973), 81–105.
7. D. Luna, *Adhérences d'orbite et invariants*, Invent. Math. **29** (1975), 231–238.
8. H. Nakajima, *Representations of a reductive algebraic group whose algebras of invariants are complete intersections*, J. Reine Angew. Math. **367** (1986), 115-138.
9. D. I. Panyushev, *On orbit spaces of finite and connected linear groups*, Math. USSR-Izv. **20** (1983), 97–101.
10. D. I. Panyushev, *On semisimple groups admitting a fnite coregular extension*, Preprint 1991, Moscow.
11. V. L. Popov, *Stability criteria for the action of a semisimple group on a factorial manifold*, Math. USSR–Izv. **4** (1970), 527–535.
12. V. L. Popov, *Representations with a free module of covariants*, Functional Anal. Appl. **10** (1976), 242–244.
13. V. L. Popov, *Homological dimension of algebra of invariants*, J. Reine Angew. Math. **341** (1983), 157–183.
14. G. W. Schwarz, *Representations of simple Lie groups with regular rings of invariants*, Invent. Math. **49** (1978), 167-191.
15. G. W. Schwarz, *Representations of simple Lie groups with a free module of covariants*, Invent. Math. **50** (1978), 1–12.
16. G. W. Schwarz, *Lifting smooth homotopies of orbit spaces*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **51** (1980), 37–135.
17. D. L. Wehlau, *Some recent results on the Popov conjecture*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. **10** (1989), 221–228.

Auslander modules and quasi-homogeneity of local rings

吉野雄二（京大総合人間）、加藤希理子（京大数理研）

§0. Introduction

以下 $(R, \mathfrak{m}, k)$ を 2 次元完備局所環で、整閉整域であるとする。また、k は標数 0 の代数閉体であると仮定する。R の canonical module を K_R と書くことにすると、その定義から、$\mathrm{Ext}^2_R(k, K_R) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathfrak{m}, K_R)$ は k 上の次元が 1 である。このことは次のような nonsplit exact sequence が唯一つ存在することを意味している。

$$(0.1) \qquad 0 \longrightarrow K_R \longrightarrow A \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

この真中に現れた A は階数が 2 の reflexive module になり、同型を除いて一意的に定まることが容易に分かる。この A のことを R の Auslander module と呼ぶ。

Auslander module については、既にいくつかの性質が知られている（例えば、Yoshino [**7;chap.11**], Yoshino-Kawamoto[**8**] を見よ。）が、本稿では特に環 R の quasi-homogeneity と Auslander module の関係について考察してみようと思う。

最初に R が quasi-homogeneous であると仮定してみる。すなわち R は適当な positively graded な次数付き環の irrelevant maximal ideal に関する完備化になっている場合である。また、別の言葉で言うと R 上に Euler derivation という特別の k-derivation δ が存在するということである。R の universally finite module of differntials を $D_k(R)$ と表すと、その universality によって $\delta : R \to R$ は、R-linear map $\pi : D_k(R) \to R$ を導くが、δ が Euler derivation であるならば、この π の image は $\mathfrak{m}$ になる。逆に π の image が丁度 $\mathfrak{m}$ になるような derivation δ が存在するならば、Euler derivation も存在するが知られている。(Saito [**3**], Scheja-Wiebe [**5**]) さて K_R が実際には $(\wedge^2 D_k(R))^{**}$ に同型であることを使うと、δ が Euler derivation である場合には $\mathrm{Ker}(\pi^{**}) \cong K_R$ であることが分かる。すなわち次のような完全列がある。

$$(0.2) \qquad 0 \longrightarrow K_R \longrightarrow D_k(R)^{**} \xrightarrow{\pi^{**}} \mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

(π^{**} の像が R の unit を含まないことを見るには Zariski-Lipmann 予想が必要である。また、この sequence が non-split であることは $\mathfrak{m}$ が reflexive でないことから容易である。) と

もかく R が quasi-homogeneous の場合には、(0.2) より $D_k(R)^{**}$ が R の Auslander module になる。(Martsinkovsky [**2**])

数年前この逆を問う問題が Auslander によって提出された。

Auslander Conjecture (0.3). 上記の通り R は 2 次元整閉整域であると仮定する。もし $D_k(R)^{**}$ が R の Auslander module となるならば、R は quasi-homogeneous であろう。

上の議論からも明らかなように、$D_k(R)^{**}$ が R の Auslander module であるためには、R-linear な全射 $D_k(R)^{**} \to \mathfrak{m}$ が存在することが必要十分である。上記の Euler derivation の存在のためには R-linear な全射 $D_k(R) \to \mathfrak{m}$ があることが必要十分であったから、上の予想は次の様にも書き替えられる。

Conjecture (0.4). R が 2 次元整閉整域であるとき、もし R-linear な全射 $D_k(R)^{**} \longrightarrow \mathfrak{m}$ が存在するならば、R-linear な全射 $D_k(R) \longrightarrow \mathfrak{m}$ が存在する。

この予想に対して今までに得られている結果はすべて肯定的で、次のような場合に予想が正しいことが分かっている。

Facts (0.5).

(*a*) R が hypersurface で、その equation が $f(x,y,z) = z^n + g(x,y)$ の形をしている場合。(Martsinkovsky [**2**])

(*b*) R が cusp singularity の場合。(Behnke [**1**]、本質的には [**8**])

(*c*) R が minimally elliptic singularity の場合。(Behnke [**1**])

本稿ではもっぱら R が hypersurface の場合を考える。すなわち、$R = k[[x,y,z]]/(f(x,y,z))$ である。このとき $D_k(R)$ 上で Koszul type の鎖複体を考えて、Auslander conjecture の仮定を f の Jacobian ideal に関する Koszul homology の性質として記述することが出来る。(cf. (2.2)) この議論は f の Jacobian ideal 等の微分的な性質とは切り離して R 上の homology 代数として一般的に展開することができるので、それを §1 にまとめておいた。§2 では、上記に述べた (2.2) の結果を使って Auslander conjecture の仮定から導かれる必要条件をいくつか書き上げる。特に定理 (2.12) (あるいはその証明) によって、Martsinkovsky の結果 (0.5)(*a*) の別証明がえられる。また定理 (2.14) を合わせて使えば、与えられたいくつかの equation f について Auslander conjecture の正しさを確認することができる。しかし、現状では一般の equation については Auslander conjecture は open のままであることを付記しておく。

§1. Some complexes of Koszul type

ここでは $(R, \mathfrak{m}, k)$ は Cohen-Macaulay local ring で次元を d とする。今 R の元の $d+1$ 個の 2 組の列 $\{a_1, a_2, \dots, a_{d+1}\}$, $\{b_1, b_2, \dots, b_{d+1}\}$ が与えられているとする。更に $\sum_{i=1}^{d+1} a_i b_i = 0$

と仮定する。また、イデアル $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{d+1})R$, $\mathfrak{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_{d+1})R$ は $\mathfrak{m}$-primary であるとする。このとき R-module M を次の完全列で定義する。

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{(b_1,\ldots,b_{d+1})} R^{d+1} \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

このとき次の complex $\bigwedge^\bullet M$ を考えることができる。

$$0 \longrightarrow \bigwedge^{d+1} M \xrightarrow{\delta_a} \bigwedge^d M \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^2 M \xrightarrow{\delta_a} M \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

ここで δ_a は次のように定義される: R^{d+1} の基を $\{e_1, e_2, \ldots, e_{d+1}\}$ として、

$$\delta_a(\varphi(e_{i_1}) \wedge \varphi(e_{i_2}) \wedge \cdots \wedge \varphi(e_{i_n})) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{i_j} (\varphi(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \widehat{\varphi(e_{i_j})} \wedge \cdots \wedge \varphi(e_{i_n}))$$

これによって $\bigwedge^\bullet M$ が well-defined な鎖複体になることが容易に確かめられる。そして、この homology $\mathrm{H}^\bullet = \mathrm{H}^\bullet(\bigwedge^\bullet M)$ は次の定理の様に与えられる。

Theorem (1.1).
(*i*) (周期性) $\mathrm{H}^0 = H_0(\mathfrak{a})$(= 通常の $\mathfrak{a}$ についての Koszul homology)

$$\mathrm{H}^1 \cong \mathrm{H}^3 \cong \mathrm{H}^5 \cong \cdots \cong \mathrm{H}^{2n+1} (= \mathrm{H}^{odd}) \quad \text{for } 0 < 2n+1 \leq d+1,$$
$$\mathrm{H}^2 \cong \mathrm{H}^4 \cong \mathrm{H}^6 \cong \cdots \cong \mathrm{H}^{2n} (= \mathrm{H}^{even}) \quad \text{for } 0 < 2n \leq d+1$$

(*ii*) d が偶数のときには次の完全列;

$$\cdots \longrightarrow H_0(\mathfrak{a}) \xrightarrow{d_b} H_1(\mathfrak{a}) \longrightarrow H_0(\mathfrak{b}) \xrightarrow{d_a} H_1(\mathfrak{b}) \longrightarrow H_0(\mathfrak{a}) \longrightarrow \cdots$$

があり、

$$\mathrm{H}^{odd} \cong \mathrm{Ker}(d_a) \cong \mathrm{Coker}(d_b), \quad \mathrm{H}^{even} \cong \mathrm{Coker}(d_a) \cong \mathrm{Ker}(d_b).$$

(*iii*) d が奇数のとき、$d_b : H_0(\mathfrak{a}) \to H_1(\mathfrak{a})$, $d_a : H_0(\mathfrak{b}) \to H_1(\mathfrak{b})$ の Kernel, Cokernel はそれぞれ同型で、

$$\mathrm{H}^{odd} \cong \mathrm{Coker}(d_b) \cong \mathrm{Coker}(d_a), \quad \mathrm{H}^{even} \cong \mathrm{Ker}(d_b) \cong \mathrm{Ker}(d_a).$$

(*iv*) (rigidity) もし $1 \leq i \leq d+1$ なるある i について $\mathrm{H}^i = 0$ ならば、$\bigwedge^\bullet M$ は acyclic である。

PROOF: $F=\oplus_{i=1}^{d+1}Re_i$ を階数 $d+1$ の自由加群として、$\bigwedge^\bullet F$ 上に次の 2 つの differentiations $\delta_a^-:\bigwedge^\bullet F\to\bigwedge^{\bullet-1}F$, $\delta_b^+:\bigwedge^\bullet F\to\bigwedge^{\bullet+1}F$ を考える:

$$\delta_a^-(e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_n})=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{i_j}(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{e_{i_j}}\wedge\cdots\wedge e_{i_n})$$

$$\delta_b^+(\omega)=\left(\sum_{j=1}^{d+1}b_ie_i\right)\wedge\omega$$

このとき $(\delta_a^-)^2=0$, $(\delta_b^+)^2=0$, $\delta_a^+\cdot\delta_b^-+\delta_b^-\cdot\delta_a^+=0$ であることが容易に確かめられる。そこで、$G^{pq}=\bigwedge^{p-q}F$ $(q\geq 0)$, $G^{pq}=0$ $(q<0)$ とおいて二重複体 $G^{\bullet\bullet}$ を考える。

$$\begin{array}{ccc}
G^{p\ q}=\bigwedge^{p-q}F & \xrightarrow{\delta_a^-} & G^{p-1\ q}=\bigwedge^{p-q-1}F\\
{\scriptstyle\delta_b^+}\big\downarrow & & {\scriptstyle\delta_b^+}\big\downarrow\\
G^{p\ q-1}=\bigwedge^{p-q+1}F & \xrightarrow{\delta_a^-} & G^{p-1\ q-1}=\bigwedge^{p-q}F
\end{array}$$

この二重複体に付随して二通りのスペクトル列を考える: $E_1^{pq}=H^q(G^{p\bullet})$, ${}'E_1^{pq}=H^p(G^{\bullet q})$. このとき M の定義から $E_1^{\bullet 0}$ が上に与えた複体 $\bigwedge^\bullet M$ になることが分かる。したがって $\mathrm{H}^\bullet(\bigwedge^\bullet M)=E_2^{\bullet 0}$ となる。${}'E_1$ の方の計算と合わせて標記の結果を得る。(計算のみなので詳しいことは省略する。) ∎

§2. Homogeneity

ここでは k を標数 0 の代数閉体とし、P はべき級数環 $P=k[[x_1,x_2,\ldots,x_{d+1}]]$、そして $R=P/fP$、但し $f\in\mathfrak{m}_P^2$ とする。すなわち R は non-regular な hypersurface である。また $\nabla f=(f_{x_1},f_{x_2},\ldots,f_{x_{d+1}})\in P^{d+1}$ とおくと、R が isolated singularity をもつときには ∇f の各成分で生成される P のイデアルは $\mathfrak{m}_P$-primary である。R の k 上での universally finite module of differentials $D=D_k(R)$ は次の完全列であたえられる。

$$0\longrightarrow R\xrightarrow{\nabla f}R^{d+1}\longrightarrow D\longrightarrow 0.$$

さらに R 上の k-derivation $\delta=a_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+a_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+a_{d+1}\dfrac{\partial}{\partial x_{d+1}}$ は R^{d+1} の元 $(a_1,a_2,\ldots,a_{d+1})$ で $\sum_{i=1}^{d+1}a_if_{x_i}=0$ in R となるものと 1 対 1 に対応することが分かる。

我々の目的に直接には関係ないが、$d\geq 3$ のときには $D_k(R)$ は reflexive module であることが容易に確かめられるから、次の自明な結果を得る。(但し、(b) と (c) の同値性は Scheja-Wiebe [5] による。)

LEMMA (2.1). R が isolated singularity で、更に $d \geq 3$ のときには次は同値である。
(a) surjective な R-module map $D^{**} \longrightarrow \mathfrak{m}$ が存在する。
(b) surjective な R-module map $D \longrightarrow \mathfrak{m}$ が存在する。
(c) R は quasi-homogeneous である。

問題になるのは $d = 2$ のときであるが、このときには $D_k(R)$ は reflexive でない。定理 (1.1) を使って次の補題を得る。

THEOREM (2.2). $R = k[[x, y, z]]/(f)$ が 2 次元の isolated singularity のときには次の 2 つの条件が同値である。
(a) surjective な R-module map $D^{**} \longrightarrow \mathfrak{m}$ が存在する。
(b) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$ で次の条件を充すものが存在する。
($b-1$) $a_1 f_x + a_2 f_y + a_3 f_z = 0$ in R で ideal $(a_1, a_2, a_3)R$ は $\mathfrak{m}$-primary である。
($b-2$) $\nabla f \in R^3$ は $H_1(\mathbf{a})$ の (unique) nontrivial socle を与える。

PROOF: (a) $\Rightarrow$ (b) : D が torsion free であることは容易に分かる。すなわち $D \subseteq D^{**}$ である。(a) にいうような全射 $D^{**} \to \mathfrak{m}$ があるとき、その D への制限を $\pi : D \to \mathfrak{m} \subset R$ と書く。π に対応する R 上の derivation を $\delta = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + a_2 \dfrac{\partial}{\partial y} + a_3 \dfrac{\partial}{\partial z}$ とすると、上で説明したように $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ は ($b-1$) の条件を充す。この $\mathbf{a}$ を使って §1 で構成した複体とそのホモロジー $\mathrm{H}^{\bullet}$ を考える。(但し、∇f を (b_1, b_2, b_3) とする。) すると条件 (a) は H^{even} が $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ に同型であることを意味していることが diagram chasing によって簡単に分かる。したがって (1.1) により ($b-2$) の条件が成立することが確かめられる。
この逆をたどれば (b) $\Rightarrow$ (a) の証明もできるので、詳しいことは省略する。∎

したがって R が超曲面の場合には Auslander conjecture (0.3) は次のように言い換えることもできる。

CONJECTURE (2.3). R が 2 次元超曲面で isolated singularity をもつとき、もし (2.2)(b) の条件が充されるならば R は quasi-homogeneous であろう。

以下では $d = 2$ の場合のみを考えるのでそのための記号を準備しておく。
$F = \sum_{i=1}^{3} Re_i \cong R^3$ とし $\bigwedge^2 F$ を $e_1 \wedge e_2 \mapsto e_3,\ e_2 \wedge e_3 \mapsto e_1, e_3 \wedge e_1 \mapsto e_2$ によって F と同一視しておく。すると 2 個の元 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F$ について $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \bigwedge^2 F$ は通常のベクトル積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in F$ に対応する。特に列 $\mathbf{a}$ に関する Koszul complex は次のように書かれる。

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\ \mathbf{a}\ } F \xrightarrow{\ \mathbf{a}\times\ } F \xrightarrow{\ <\mathbf{a},\ >\ } R \longrightarrow 0$$

また $\mathbf{a} \in F$ に対してベクトルの内積による写像 $<\mathbf{a},\ >: F \to R$ の核を $\Omega(\mathbf{a})$ と書くことにする。$\Omega(\nabla f)$ は R 上の derivation module $D^* = \mathrm{Der}_k(R)$ と同型であることに注意しよう。

このような表記のもとでの Buchsbaum-Eisenbud または Bruns の free resolution の構造定理は次のようになる。(Yoshino [6] 参照)

LEMMA (2.4). $\mathbf{a} \in F$ で $\mathbf{a}$ の各成分で生成される R のイデアル $\mathfrak{a}$ は grade が 2 以上あるとする。もし 2 つの元 $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in F$ が共に $\Omega(\mathbf{a})$ の元であるとき、R の元 t で $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = t\mathbf{a}$ となるものが存在する。

REMARK (2.5). (2.2) において、∇f が $H_1(\mathbf{a})$ の自明な元を与えることは決してない。(これは Zariski-Lipman 予想による。)

実際、もし $\nabla f \equiv 0$ in $H_1(\mathbf{a})$ とすると、定義によって $\nabla f = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ となる $\mathbf{c} \in F$ が存在する。このとき次の複体を考えることができるが、それは Buchsbaum-Eisenbud の定理 (What makes a complex exact ?) より完全列であることが分かる。

$$0 \longrightarrow R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{{}^t\nabla f} R$$

すると $\mathrm{Der}_k(R) = D^* \cong \Omega(\nabla f) \cong R^2$ となるので、超曲面に対する Zariski-Lipman 予想 [4] によって R は regular になってしまう。∎

以下では $R = k[[x, y, z]]/(f)$ を non-regular な normal domain とする。そして (2.2)(b) が成立するような $\mathbf{a} \in F$ が存在すると仮定する。このとき $\mathfrak{m}_R$ の生成元 $\{\xi, \eta, \zeta\}$ に対して、$\mathbf{x} = (\xi, \eta, \zeta) \in F$ を考えると、∇f が $H_1(\mathbf{a})$ の socle であることから次のような可換図式が構成される。

(2.6)
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mathbf{a}"] & F \arrow[r, "\mathbf{a}\times"] & F \arrow[r, "\langle \mathbf{a},\ \rangle"] & R \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[u] \arrow[r, "\mathbf{x}"] & F \arrow[u, "\langle \mathbf{g},\ \rangle"] \arrow[r, "\mathbf{x}\times"] & F \arrow[u, "\mathbf{H}"] \arrow[r, "\langle \mathbf{x},\ \rangle"] & R \arrow[u, "\nabla f"] & &
\end{tikzcd}$$

ここで $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ と書いておく。また、3×3 行列 $\mathbf{H}$ の各行をそれぞれ $\mathbf{c}_\xi, \mathbf{c}_\eta, \mathbf{c}_\zeta$ と書き表す。

逆に (2.6) の可換図式があれば ∇f が $H_1(\mathbf{a})$ の socle を与えることが出る。

LEMMA (2.7). (2.6) のような可換図式があるとき、$\mathbf{g}$ は $H_1(\mathbf{x})$ の nontrivial な元 (= generator) を与える。特に、方程式 f は P 内において unit の違いを除けば、$g_1\xi + g_2\eta + g_3\zeta$ と表される。

PROOF: もし $\mathbf{g}$ が $H_1(\mathbf{x})$ の trivial な元を与えるとすると、$\mathbf{g} = \mathbf{x} \times \mathbf{c}$ となる $\mathbf{c} \in F$ がある。すると (2.6) における diagram chasing によって ∇f が $H_1(\mathbf{a})$ の trivial な元を与えてし

まうことがわかる。これは (2.5) に反する。後半は hypersurface 上の Koszul homology に関する一般論である。∎

さて (2.6) の可換図式のもとで、$\Psi : \Omega(\nabla f) \to R$ を次のように定義しよう。$\mathbf{d} \in \Omega(\nabla f)$ に対して (2.4) により $\mathbf{a} \times \mathbf{d} = t\nabla f$ となる $t \in R$ がある。そこで $\Psi(\mathbf{d}) = t$ と定義する。$\mathbf{a} \in \mathrm{Ker}(\Psi)$ であることは定義から当然のことであるが、実は $\mathrm{Ker}(\Psi) = R\mathbf{a}$ となることも容易に分かる。また $\Psi(\mathbf{c}_\xi) = \xi$ 等であるから Ψ の image は $\mathfrak{m}$ に一致する。結局次のことが分かった。

LEMMA (2.8). (2.6) の可換図式のもとで次の完全列がある。

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\mathbf{a}} \Omega(\nabla f) \xrightarrow{\Psi} \mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

これは $\Omega(\nabla f)$ が R の Auslander module であるという最初の仮定を確かめたに過ぎない。

PROPOSITION (2.9). (2.6) の可換図式のもとで、$\Omega(\nabla f)$ は丁度 4 個の元 $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}_\xi, \mathbf{c}_\eta, \mathbf{c}_\zeta\}$ で minimal に生成される。

PROOF: (2.6) の可換性により、$\mathbf{a}\times\mathbf{c}_\xi = \xi\nabla f$ となる。よって $\xi < \nabla f, \mathbf{c}_\xi > = < \mathbf{a}\times\mathbf{c}_\xi, \mathbf{c}_\xi > = 0$ となる。ξ は R 上の非零因子だから $< \nabla f, \mathbf{c}_\xi > = 0$ を得る。以上より $\mathbf{c}_\xi \in \Omega(\nabla f)$。$\mathbf{c}_\eta, \mathbf{c}_\zeta$ についても同様である。

逆に $\mathbf{d} \in \Omega(\nabla f)$ とすると、(2.4) によって $\mathbf{a} \times \mathbf{d} = t\nabla f$ となる $t \in R$ がある。t が unit なら ∇f が $H_1(\mathbf{a})$ において trivial になってしまうので (2.5) に矛盾する。

そこで $t \in \mathfrak{m}$ であるから、$t = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$ と書いておく。すると $\mathbf{a} \times (\mathbf{d} - \alpha\mathbf{c}_\xi - \beta\mathbf{c}_\eta - \gamma\mathbf{c}_\zeta) = 0$ となるから、結局 $\mathbf{d} - \alpha\mathbf{c}_\xi - \beta\mathbf{c}_\eta - \gamma\mathbf{c}_\zeta = \kappa\mathbf{a}$ となる $\kappa \in R$ が存在する。以上より $\Omega(\nabla f)$ が $\mathbf{a}, \mathbf{c}_\xi, \mathbf{c}_\eta, \mathbf{c}_\zeta$ によって生成されることが分かった。

次に $\mathbf{a}$ の minimality を証明する。もし $\mathbf{a}$ が最小生成元の一つでなければ、$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{c}_\xi + \beta\mathbf{c}_\eta + \gamma\mathbf{c}_\zeta$ と書くことができる。両辺に $\times\mathbf{c}_\xi$, $\times\mathbf{c}_\eta$ $\times\mathbf{c}_\zeta$ を施して (2.6) の可換性により次の等式をえる。

$$\begin{aligned}
\xi\nabla f &= -\beta g_3\nabla f + \gamma g_2\nabla f \\
\eta\nabla f &= \alpha g_3\nabla f - \gamma g_1\nabla f \\
\zeta\nabla f &= -\alpha g_2\nabla f + \beta g_1\nabla f
\end{aligned}$$

これより次の等式を得る。

$$(\xi, \eta, \zeta) = (\alpha, \beta, \gamma)\begin{pmatrix} 0 & g_3 & -g_2 \\ -g_3 & 0 & g_1 \\ g_2 & -g_1 & 0 \end{pmatrix}$$

いまこの等式をべき級数環 P の中で考えると、

$$\xi = -\beta g_3 + \gamma g_2 + \ell_1 f$$
$$\eta = \alpha g_3 - \gamma g_1 + \ell_2 f$$
$$\zeta = -\alpha g_2 + \beta g_1 + \ell_3 f \qquad (\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in P)$$

一方 (2.7) によって P の unit u を適当に取って $uf = \xi g_1 + \eta g_2 + \zeta g_3$ と書くことができるが、ここに上の等式を代入すると $uf = (\ell_1 g_1 + \ell_2 g_2 + \ell_3 g_3)f$. よって $u = \ell_1 g_1 + \ell_2 g_2 + \ell_3 g_3$ となり、どれかの g_i は P の unit でなくてはならない。すると再び (2.7) によって $f \notin \mathfrak{m}_P^2$ となって最初の仮定に反する。

次に $\Omega(\nabla f)$ の生成元の最小個数が丁度 4 であることを示そう。そうすれば定理の証明は終わる。(2.8) の完全列:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\mathbf{a}} \Omega(\nabla f) \xrightarrow{\Psi} \mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

において、上に示したように $\mathbf{a}$ が $\Omega(\nabla f)$ の minimal generator の一つであることと $\mu(\mathfrak{m}) = 3$ であることを考え合わせれば、$\mu(\Omega(\nabla f)) = 4$ となる。∎

$\Omega(\nabla f)$ の Koszul relations をそれぞれ $\mathbf{k}_x = (0, f_z, -f_y)$ $\mathbf{k}_y = (-f_z, 0, f_x)$ $\mathbf{k}_z = (f_y, -f_x, 0)$ と書き表しておく。さらにこれらで張られる $\Omega(\nabla f)$ の submodule を K と表す。∇f に関する Koszul homology は $H_1(\nabla f) \cong \Omega(\nabla f)/K$ と表されることを注意しよう。とくに (2.9) によると $H_1(\nabla f)$ の生成元の個数 $\mu(H_1(\nabla f))$ は 4 以下であることが分かる。

(2.9) の結果よりも更に強く次のことを証明することができる。

THEOREM (2.10). (2.6) の可換図式のもとで、さらに R が quasi-homogeneous でないと仮定すると、$\mathbf{a}$ は $H_1(\nabla f)$ の minimal な生成元の一つである。

PROOF: $\mathbf{a} \in \mathfrak{m}H_1(\nabla f)$ であると仮定して矛盾を導く。このとき $H_1(\nabla f)$ の中で $\mathbf{a} \equiv \sum_i c_i \mathbf{a}_i$ $(c_i \in \mathfrak{m}, \mathbf{a}_i \in \Omega(\nabla f))$ となる。したがって $\Omega(\nabla f)$ の中で

$$\mathbf{a} = \sum_i c_i \mathbf{a}_i + \mathbf{k} \tag{2.10.1}$$

と書ける。ただし $\mathbf{k}$ は Koszul relations の和として $\mathbf{k} = e_1\mathbf{k}_x + e_2\mathbf{k}_y + e_3\mathbf{k}_z$ $(e_i \in R)$ と書けるものである。

今一般に $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \Omega(\nabla f)$ に対して対応する R 上の k-derivation : $b_1\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial}{\partial y} + b_3\dfrac{\partial}{\partial z}$ を考え、さらにこの derivation から導かれる R-linear map :$D \to R$ を $F(\mathbf{b})$ と表す

ことにしよう。(2.10.1) から $F(\mathbf{a}) = \sum_i c_i F(\mathbf{a}_i) + F(\mathbf{k})$ となる。このとき $F(\mathbf{a})^{**}$ が (2.8) の Ψ に一致することが容易に確かめられる。(ただし $D^{**} \cong \Omega(\nabla f)$ と見ておく。) さらに任意の $\mathbf{b} \in \Omega(\nabla f)$ に対して $F(\mathbf{b})^{**}(D^{**}) \subseteq \mathfrak{m}$ であることを注意しておこう。(実際 $F(\mathbf{b})^{**}(D^{**}) = R$ と仮定すると、次が exact になることが分かる。

$$0 \longrightarrow (\bigwedge^2 D)^{**} \longrightarrow D^{**} \xrightarrow{F(\mathbf{b})^{**}} R \longrightarrow 0$$

ここで $(\bigwedge^2 D)^{**} \cong R$ に注意すると、$D^{**} \cong R^2$ となり Zariski-Lipman 予想 [4] によって R が regular となってしまい矛盾。)

さて以上より、

$$\mathfrak{m} \subseteq F(\mathbf{a})^{**}(D^{**}) \subseteq \sum_i c_i F(\mathbf{a}_i)^{**}(D^{**}) + F(\mathbf{k})^{**}(D^{**}) \subseteq \mathfrak{m}^2 + F(\mathbf{k})^{**}(D^{**})$$

(最後の包含関係は $c_i \in \mathfrak{m}$ による。) したがって NAK によって $F(\mathbf{k})^{**}(D^{**}) = \mathfrak{m}$ となる。結局次の補題をを示せば良い。

Lemma (2.11). R が quasi-homogeneous でないとき、任意の $\mathbf{k} \in K \subseteq \Omega(\nabla f)$ について $F(\mathbf{k})^{**}(D^{**}) \neq \mathfrak{m}$。

Proof: $F(\mathbf{k})^{**}(D^{**}) = \mathfrak{m}$ と仮定して矛盾を見る。$\mathfrak{a} = F(\mathbf{k})(D)$ とおくと、定義から $\mathfrak{a} \subseteq \overline{J} = (f_x, f_y, f_z)R$ であることに注意する。$\bigwedge^\bullet D$ に $\delta_{\mathbf{k}}^-$ による微分を考えて §1 の complex を取るとき、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigwedge^2 D & \xrightarrow{\delta_{\mathbf{k}}^-} & D & \xrightarrow{\delta_{\mathbf{k}}^-} & \mathfrak{a} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(\bigwedge^2 D)^{**} & \xrightarrow{(\delta_{\mathbf{k}}^-)^{**}} & D^{**} & \longrightarrow & \mathfrak{m} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H_0(\nabla f) & \xrightarrow{\psi} & H_1(\nabla f) & \longrightarrow & \mathfrak{m}/\mathfrak{a} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

ここで全ての列と第 2 行は exact である。したがって diagram chasing によって第 3 行も exact である。ところで第 3 行の ψ は 0 map である。実際 $\psi : R/\overline{J} \cong H_0(\nabla f) \to H_1(\nabla f)$ は $1 \in R/\overline{J}$ を $\mathbf{k}$ の $H_1(\nabla f)$ における class に対応させるが、これは 0 である。以上の議論によって

$H_1(\nabla f) \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{a}$が分かった。$R$が quasi-homogeneous でないので環 $R/\overline{J} = P/(f, f_x, f_y, f_z)P$ は almost complete intersection であり、$R/\overline{J}$ の canonical module $K_{R/\overline{J}}$ は $H_1(\nabla f)$ に同型である。以上をまとめて次のことが分かった。

$$\mathfrak{a} \subseteq \overline{J}, \qquad K_{R/\overline{J}} \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{a}$$

このようなことは起こらないことを次に見よう。

$ann_R(\mathfrak{m}/\mathfrak{a}) = ann_R(K_{R/\overline{J}}) = \overline{J}$ であるから $\mathfrak{a} :_R \mathfrak{m} = \overline{J}$、したがって $R/\mathfrak{a}$ の socle は $\overline{J}/\mathfrak{a}$ である。一方 $\ell(\mathfrak{m}/\mathfrak{a}) = \ell(K_{R/\overline{J}}) = \ell(R/\overline{J})$ から $\ell(\overline{J}/\mathfrak{a}) = 1$ が出る。すなわち、$R/\mathfrak{a}$ は 0 次元の Gorenstein ring でその socle は $\overline{J}/\mathfrak{a}$ で生成されることが分かった。まず $\overline{J}/\mathfrak{a}$ は k 上 1 次元であるから、一般性を失うことなく $\overline{J}/\mathfrak{a} = f_zR + \mathfrak{a}/\mathfrak{a}$ であるとしてかまわない。さて $\overline{J}(\mathfrak{m}/\mathfrak{a}) = \overline{J}K_{R/\overline{J}} = 0$ より $\mathfrak{m}\overline{J} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \overline{J}$、ここで $\ell(\overline{J}/\mathfrak{m}\overline{J}) = \mu(\overline{J}) = 3$ だから $\ell(\mathfrak{a}/\mathfrak{m}\overline{J}) = 2$ が出る。$x \mapsto x + \lambda z, y \mapsto y + \rho z$ $(\lambda, \rho \in k)$ という形の変数変換の後で $\mathfrak{a} = (f_x, f_y)R + f_z\mathfrak{m}$ としてよい。ここで上のことから f_x, f_y は $\mathfrak{a}$ の minimal generator の一部である。$\mu(\mathfrak{a}) = 3$ であったから、$\mathfrak{a} = (f_x, f_y, cf_z)R$ $(c \in \mathfrak{m})$ と書けるはずである。

さて P のイデアル $\mathfrak{b} = (f, f_x, f_y, cf_z)P$ を考えると、$R/\mathfrak{a} \cong P/\mathfrak{b}$ であって、この環は Gorenstein であった。すなわち $\mathfrak{b} \subset P$ は height 3 の Gorenstein ideal なので、その生成元の個数は奇数個のはずであるから、実は $\mathfrak{b}$ は 3 個の元で生成される。いま $J' = (f, f_x, f_y, f_z)P$ とおくと、R が quasi-homogeneous でないことから、これら 4 個の元がこのイデアルの極小生成元であることが容易に出る。したがって、とくに自然な k-linear map $h : \mathfrak{b}/\mathfrak{m}_P\mathfrak{b} \to J'/\mathfrak{m}_PJ'$ を考えると、$h(f), h(f_x), h(f_y)$ は一次独立であるから、$\{f, f_x, f_y\}$ は $\mathfrak{b}/\mathfrak{m}_P\mathfrak{b}$ においても一次独立である。以上より $\mathfrak{b} = (f, f_x, f_y)P$ であることが分かった。とくに $\mathfrak{a} = (f_x, f_y)R$ である。

さて $R/\mathfrak{a} = P/(f, f_x, f_y)P$ の socle は、$\{f, f_x, f_y\}$ が P 内の regular sequence であることから、その Jacobi 行列式によって与えられる。

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \end{vmatrix} \equiv f_z \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \quad \mathrm{mod}\ \mathfrak{b}$$

一方で $R/\mathfrak{a}$ の socle は f_z で張られるように取ってあったから、$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ は P の unit でなくてはならない。これは変数変換 $\{x, y, z\} \mapsto \{f_x, f_y, z\}$ の Jacobi 行列式が invertible であることを示すから、べき級数環 P の regular system of parameters（あるいは変数）として $\{f_x, f_y, z\}$ が取れることを意味する。すなわち $P/(f_x, f_y)$ は単項イデアル環であるので、P のイデアルで f_x, f_y を含むものは高々3 個の元で生成される。しかし、R が quasi-homogeneous でない場合には $J' = (f, f_x, f_y, f_z)P$ は丁度 4 個の元で生成された。これは矛盾である。したがって定理が証明された。∎

THEOREM (2.12). (2.6) の可換図式のもとで、さらに R が quasi-homogeneous でないと仮定するとき、
(a) もし $\mu(H_1(\nabla f)) \leq 2$ ならば、

$$\dim_k(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^2) \geq 2.$$

(b) もし $\mu(H_1(\nabla f)) \leq 3$ ならば、

$$\dim_k(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^2) \geq 1.$$

PROOF: (2.8) の Ψ に関して、$\Psi(\Omega(\nabla f)) = \mathfrak{m}$ であったが、一方 $\mathbf{a} \times \mathbf{k}_x = a_1 \nabla f$ 等が計算によって分かるので、$\Psi(K) = \mathfrak{a}$ である。結局 Ψ は全射 $\overline{\Psi}: H_1(\nabla f) = \Omega(\nabla f)/K \to \mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ を導く。ここで $\mathbf{a}$ の $H_1(\nabla f)$ における像は $\mathrm{Ker}(\overline{\Psi})$ に属し、かつ (2.10) によって $H_1(\nabla f)$ の最小生成元の一つである。よって、$\mu(H_1(\nabla f)) - 1 \geq \mu(\mathfrak{m}/\mathfrak{a})$。これから定理は簡単に得られる。∎

EXAMPLE (2.13). $f = h(x,y) + z^n$ という形のときには、簡単な計算によって $\mu(H_1(\nabla f)) \leq 2$ であることが分かる。したがって上の定理によると $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}$ の生成元を少なくとも 2 個含むことが分かる。実際には上記の証明を見直すと $\mathfrak{a}$ は $(x,y)R$ を含むとして良いことが分かり、(2.6) の可換図のもとで $h(x,y)$、したがって f が quasi-homogeneous であることが証明できる。従って Auslander の予想はこの場合に正しい。これは、Martsinkovsky の結果 (0.5)(a) である。

THEOREM (2.14). (2.6) の可換図式のもとで、$\mu(H_1(\nabla f)) \leq 3$ かつ $f \in \mathfrak{m}^3$ ならば、P において次の関係がある。

$$(J : f)f \not\subseteq \mathfrak{m}^2 J$$

但し、$J = (f_x, f_y, f_z)P$ である。

PROOF: (2.9) に示したように $\Omega(\nabla f)$ は 4 個の元で生成される。一方 $H_1(\nabla f) = \Omega(\nabla f)/K$ が 3 個の元で生成されるのだから、$\Omega(\nabla f)$ の 4 個の生成元 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{k}$ を次のように取ることができる。まず $\mathbf{a}$ は可換図式 (2.6) の $\mathbf{a}$ である。((2.9) を見よ。) また $\mathbf{k} \in K$ である。すなわち $\mathbf{k} = \alpha \mathbf{k}_x + \beta \mathbf{k}_y + \gamma \mathbf{k}_z$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$ と書ける。(2.4) より

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = r_b \nabla f$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = r_c \nabla f$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{k} = r_k \nabla f$$

と書けるので、$\Psi(\Omega(\nabla f)) = (r_b, r_c, r_k)R$ となる。したがって (2.8) によって $(r_b, r_c, r_k)R = \mathfrak{m}$ を得る。$\mu(\mathfrak{m}) = 3$ であるから、とくに $r_k \notin \mathfrak{m}^2$ となることに注意する。

ところで $\varphi: H_1(\nabla f) \to P/J$ を次のように定義する。$\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in H_1(\nabla f)$ とするとき P において $d_1 f_x + d_2 f_y + d_3 f_z = tf$ となる $t \in P$ が存在する。そこで $\varphi(\mathbf{d}) = t \bmod J$ と定義する。このとき次が完全列であることはよく知られているし、簡単に示すこともできる。

$$0 \longrightarrow H_1(\nabla f) \xrightarrow{\varphi} P/J \xrightarrow{f} P/J$$

いま $\varphi(\mathbf{a}) = t$ であるとき $t \in J : f$ である。そこで $tf \in \mathfrak{m}^2 J$ であると仮定してみよう。このとき $tf = d_1 f_x + d_2 f_y + d_3 f_z$ $(d_1, d_2, d_3 \in \mathfrak{m}_P^2)$ となる $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in P^3$ がある。すると $(a_1 - d_1) f_x + (a_2 - d_2) f_y + (a_3 - d_3) f_z = 0$ であり、$\{f_x, f_y, f_z\}$ が P の regular sequence であることから $\mathbf{k}' = \mathbf{a} - \mathbf{d}$ は（$F = R^3$ の元と考えて）K の元である。しかし、$\mathbf{k}' = \alpha' \mathbf{k}_x + \beta' \mathbf{k}_y + \gamma' \mathbf{k}_z$ $(\alpha', \beta', \gamma' \in R)$ と書いておくと、F の元として、

$$\begin{aligned} r_k \nabla f &= \mathbf{a} \times \mathbf{k} = \mathbf{d} \times \mathbf{k} + \mathbf{k}' \times \mathbf{k} \\ &= (\alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma d_3) \nabla f + \{(\beta' \gamma - \beta \gamma') f_x + (\gamma' \alpha - \gamma \alpha') f_y + (\alpha' \beta - \alpha \beta') f_z\} \nabla f \end{aligned}$$

仮定によって $f_x, f_y, f_z \in \mathfrak{m}^2$ であるから、この等式から $r_k \in \mathfrak{m}^2$ が導かれ、前半で注意したことに反する。以上より $tf \notin \mathfrak{m}^2 J$ でなくてはならない。$tf \in (J : f) f$ であるから定理が出る。∎

Remark(2.15). f が isolated singularity を与えるときには、いつでも $(J : f) f \subseteq \mathfrak{m} J$ が成り立つ。

Example (2.16). $f = x^p + y^q + z^r + xyz$ とする。このとき常に $\mathfrak{m} f \subseteq J$ であることが簡単に確かめられる。したがって $\mathfrak{m} \subseteq J : f$ である。また、次の同値性も分かる。

$$\begin{aligned} f \text{ が quasi-homogeneous であること} &\iff J : f = R \\ &\iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1 \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} f \text{ が inhomogeneous であること} &\iff J : f = \mathfrak{m} \\ &\iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 \end{aligned}$$

したがって f が inhomogeneous のときには $H_1(\nabla f) \cong \mathfrak{m}/J$ となるので次の式を得る。

$$\mu(H_1(\nabla f)) = \begin{cases} 1 & \text{(homogeneous case)}, \\ 2 & \text{(inhomogeneous かつ } p, q, r \text{ のどれかが } 2), \\ 3 & \text{(inhomogeneous かつ } p, q, r \geq 3) \end{cases}$$

よって Auslander conjecture は $\mu(H_1(\nabla f)) = 2$ の場合には (2.13) に帰着する。また $\mu(H_1(\nabla f)) = 3$ のときには、$(J : f)f \subseteq \mathfrak{m}^2 f$ であることが計算によって確かめられるので、(2.14) によって $D_k(R)^{**}$ は R の Auslander module にはなりえない。この場合にも Auslander conjecture は正しい。

REFERENCES

1. K. Behnke, *On Auslander modules of normal surface singularities*, Manuscripta Math. **66** (1989), 205–223.
2. A. Martsinkovsky, *Almost split sequences and Zariski differentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), 285–307.
3. K. Saito, *Quasihomogen isolierte Singularitäten von Hyperfläschen*, Invent. Math. **14** (1971), 123–142.
4. G. Sceja and U. Storch, *Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren*, Math. Ann. **197** (1972), 137–170.
5. G. Scheja and H. Wiebe, *Über Derivationen von lokalen analytische Algebren*, Sympos. Math. **11** (1973), 161–192.
6. Y. Yoshino, *On the structure theorem for free resolutions*, 第7回可換環論シンポジウム報告集 (1985), 195–200.
7. Y. Yoshino, "Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings," Lecture Note Series 146, Cambridge University Press, 1990, p. 177.
8. Y. Yoshino and T. Kawamoto, *The fundamental module of a normal local domain of dimension two*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), 425–431.

Blowing-up characterizations of Cohen-Macaulay rings

By KIKUMICHI YAMAGISHI

College of Liberal Arts, Himeji Dokkyo University

1. *Introduction*

In 1982 S. Goto [2] gave us an epoch-making characterization of Buchsbaum rings in terms of the blowing-ups. Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be a Noetherian local ring of dimension $d > 0$ and $\mathfrak{q}$ a parameter ideal of A, and let $R(\mathfrak{q})$ denote the Rees algebra of $\mathfrak{q}$. Then he showed that $A/H^0_\mathfrak{m}(A)$ is a Buchsbaum ring if and only if $\operatorname{Proj} R(\mathfrak{q})$ is a locally Cohen-Macaulay scheme for every parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A. He also gave us the similar blowing-up characterization of Gorenstein rings, complete intersections and regular local rings. However there was given no statement for the local ring $A/H^0_\mathfrak{m}(A)$ to be a Cohen-Macaulay ring using the terms of the blowing-ups. So our problem is stated:

> Problem. What is the condition in terms of the blowing-ups for the local ring $A/H^0_\mathfrak{m}(A)$ to be a Cohen-Macaulay ring?

The speaker already gave us tentative answers to this problem in [13], and therefore it is the aim of his talk to improve on such ones, especially the evaluation of the type at points of the blowing-ups. To describe our improvements let us need more notations. We call the d^{th} Bass number of A the type of A and denote it by $r(A)$, i.e., $r(A) := \ell_A(\operatorname{Ext}^d_A(k, A))$, [1]. Let $K_{\hat{A}}$ denote the canonical module of the completion $\hat{A}$ of A, and let $\mu_A(*)$ be the minimal number of generators of an A-module. Then the following result is our improved evaluation of the type at points of the blowing-ups.

Theorem 1. Let A be a Buchsbaum ring and $a_1, \ldots, a_d$ a system of parameters for A. Let R denote the Rees algebra of the parameter ideal $(a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d})$ of A, where $n_1, \ldots, n_d > 0$. Then if all $n_i \geqq 2$ $(1 \leqq i \leqq d)$, one has the equality

$$r(\mathrm{R}_{\mathfrak{P}}) = \mu_{\hat{A}}(K_{\hat{A}}) + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} \cdot l_A(\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A))$$

for all $\mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} \mathrm{R}$ such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}\mathrm{R}$.

This provides us an evaluation of the type at almost all points of $\operatorname{Proj} \mathrm{R}(\mathfrak{q})$. By Theorem 1 and the blowing-up characterization of Buchsbaum rings in [2], we directly get the following theorem, which is an answer to our problem stated above. Namely

Theorem 2 ([13]). The following two statements are equivalent.

(1) $A/\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(A)$ is a Cohen-Macaulay ring.

(2) For every parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A, $\operatorname{Proj} \mathrm{R}(\mathfrak{q})$ is a locally Cohen-Macaulay scheme and the equality $r(\mathrm{R}(\mathfrak{q})_{\mathfrak{P}}) = \mu_{\hat{A}}(K_{\hat{A}})$ holds for all $\mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} \mathrm{R}(\mathfrak{q})$ such that $\dim \mathrm{R}(\mathfrak{q})/\mathfrak{P} = 1$.

2. *Type of blowing-ups of ideals in Buchsbaum rings*

We call the d-th Bass number of A with respect to the maximal ideal $\mathfrak{m}$ the type of A and denote it by $r(A)$, see [1], i.e.

$$r(A) := l_A(\operatorname{Ext}_A^d(k, A)) .$$

As is well-known, if A is a Cohen-Macaulay ring, then the type $r(A)$ coincides with other two kinds of the invariants, namely

$$r(A) = l_A(\operatorname{Hom}_A(k, A/\mathfrak{q})) = \mu_{\hat{A}}(K_{\hat{A}})$$

holds, where $\mathfrak{q}$ is any parameter ideal of A, and moreover A is a

Gorenstein ring if and only if $r(A) = 1$.

Let us denote by $A(X)$ the localization of the polynomial ring $A[X]$, where X is an indeterminate, at the prime ideal $\mathfrak{m}.A[X]$. Then we have

$$r(A) = r(A(X)) .$$

Let $\mathfrak{q}$ be an ideal of A . Then we define the followings:

$\mathrm{R}(\mathfrak{q}) := \bigoplus_{n \geqq 0} \mathfrak{q}^n$, the Rees algebra of $\mathfrak{q}$;

Proj $\mathrm{R}(\mathfrak{q})$, the set of homogeneous prime ideals of $\mathrm{R}(\mathfrak{q})$ not containing the ideal $\mathrm{R}(\mathfrak{q})_+ := \bigoplus_{n > 0} \mathfrak{q}^n$.

We call Proj $\mathrm{R}(\mathfrak{q})$ the blowing-up of A with center $\mathfrak{q}$. When we set $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots , a_d)$, then we also use $\mathrm{R}(a_1, \ldots , a_d)$ instead of $\mathrm{R}(\mathfrak{q})$, which is regarded with the A-subalgebra $A[a_1X, \ldots , a_dX]$ of the polynomial ring $A[X]$, i.e.

$$\mathrm{R}(\mathfrak{q}) \cong A[a_1X, \ldots , a_dX] \subset A[X] .$$

From now on, untill the end of this section we assume that A is a Buchsbaum ring of dimension d and $\mathfrak{q} := (a_1, \ldots , a_d)$ is a parameter ideal of A .

We shall divide our computations into three cases as follows:

Case 1: $\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{m}.\mathrm{R}(\mathfrak{q})$;

Case 2: $\mathfrak{P} = \mathfrak{m}.\mathrm{R}(\mathfrak{q})$;

Case 3: $\mathfrak{P}$ is a closed point, i.e. $\dim \mathrm{R}(\mathfrak{q})/\mathfrak{P} = 1$ holds.

For Case 1, we have that $\mathrm{R}(\mathfrak{q})_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}[X]$ as $A_\mathfrak{p}$-algebras, where we put $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$, and hence we obtain the following lemma at once.

Lemma 3. $r(R(q)_{\mathfrak{P}}) = r(A_{\mathfrak{p}})$ holds for all $\mathfrak{P} \in \mathrm{Proj}\, R(q)$ such that $\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{m}.R(q)$, where we put $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$.

Next we shall consider Case 2, namely the type $r(R(q)_{\mathfrak{m}.R(q)})$. Let $B := A[\frac{x}{a_d} \mid x \in q]$. Then clearly $\mathfrak{m}B$ is a prime ideal of B, and as $\mathfrak{m}.R(q)$ does not contain a_dX it is easy to see that $R(q)_{\mathfrak{m}.R(q)} \cong B_{\mathfrak{m}B}(a_dX)$. So we have

$$r(R(q)_{\mathfrak{m}.R(q)}) = r(B_{\mathfrak{m}B}) .$$

Let $Y_1, \ldots, Y_{d-1}$ be $(d-1)$-indeterminates over A, and put

$C := A(Y_1, \ldots, Y_{d-1})$;

$f_i := a_dY_i - a_i$ for each $1 \leqq i < d$.

Then we can find an A-algebra map $C \longrightarrow B_{\mathfrak{m}B}$, say ψ, defined by $\psi(Y_i) := a_i/a_d$ for every i. As $\psi(f_i) = 0$ for every i, there exists an exact sequence of C-modules

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow C/(f_1, \ldots, f_{d-1}) \xrightarrow{\pi} B_{\mathfrak{m}B} \longrightarrow 0 ,$$

where π is the induced map of ψ and $K := \mathrm{Ker}\,\pi$. Then we claim the followings, cf. [2, (3.4)];

(I) $B_{\mathfrak{m}B}$ is a Cohen-Macaulay ring of dimension 1;

(II) C is a Buchsbaum ring of dimension d with maximal ideal $\mathfrak{m}C$ and $f_1, \ldots, f_{d-1}, a_d$ is a system of parameters for it;

(III) K is annihilated by the a_d^n for $n > 0$ large enough, and hence K is of finite length as a C-module.

By these claims we know that $K \cong H^0_{\mathfrak{m}C}(C/(f_1, \ldots, f_{d-1}))$, and hence it yields that

$$B_{\mathfrak{m}B} \cong C/[(f_1, \ldots, f_{d-1}) : a_d] .$$

From the observations above we get the following.

Proposition 4. Let C and f_i for $1 \leqq i < d$ be the same things defined above. Then one has the equality

$$r(R(\mathfrak{q})_{\mathfrak{m}.R(\mathfrak{q})}) = l_C(\mathrm{Hom}_C(C/\mathfrak{m}C,\ C/[(f_1, \ldots, f_{d-1}) : a_d] + (a_d))) \quad .$$

Finally we shall deal with the last case.

Proposition 5. Assume that the residue field k of A is algebraically closed. Let $\mathfrak{P} \in \mathrm{Proj}\ R(\mathfrak{q})$ be a closed point such that $a_dX \notin \mathfrak{P}$. Then there exist elements $c_1, \ldots, c_{d-1}$ of A so that

$$r(R(\mathfrak{q})_{\mathfrak{P}}) = l_A(\mathrm{Hom}_A(k,\ A/[(b_1, \ldots, b_{d-1}) : a_d] + (a_d))) \ ,$$

where we put $b_i := a_i - c_ia_d$ for each $1 \leqq i < d$.

Proof. Let B be the same ring as above. Then $B/\mathfrak{m}B$ is isomorphic to the polynomial ring over the residue field k with $(d - 1)$-indeterminates and every maximal ideal of B contains the prime ideal $\mathfrak{m}B$. Put $N := \mathfrak{P}.R(\mathfrak{q})_{a_dX} \cap B$. As $a_dX \notin \mathfrak{P}$ we see $R(\mathfrak{q})_{\mathfrak{P}} \cong B_N(a_dX)$, whence $r(R(\mathfrak{q})_{\mathfrak{P}}) = r(B_N)$. Note that N is a maximal ideal of B and it contains $\mathfrak{m}B$. Hence $N/\mathfrak{m}B$ is also a maximal ideal of $B/\mathfrak{m}B$. Applying Hilbert's Nullstellensatz to the maximal ideal $N/\mathfrak{m}B$, we can find elements $c_1, \ldots, c_{d-1}$ in A such that

$$N = \left(\frac{a_1}{a_d} - c_1, \ \ldots, \ \frac{a_{d-1}}{a_d} - c_{d-1} \right) + \mathfrak{m}B \quad .$$

Now put $b_i := a_i - c_ia_d$ for each $i = 1, \ldots, d - 1$. Then it clearly follows that $\mathfrak{q} = (b_1, \ldots, b_{d-1}, a_d)$ and that

$$B = A[\frac{b_1}{a_d}, \ldots, \frac{b_{d-1}}{a_d}] \text{, and}$$

$$N = (\frac{b_1}{a_d}, \ldots, \frac{b_{d-1}}{a_d}) + \mathfrak{m}B .$$

Put $\mathfrak{Q} := (\frac{b_1}{a_d}, \ldots, \frac{b_{d-1}}{a_d}, a_d)B$. By [2, (3.4)] we easily have

(IV) B_N is a Cohen-Macaulay ring of dimension d ;

(V) $\mathfrak{Q}$ is a parameter ideal of B_N ;

(VI) $B_N/\mathfrak{Q}.B_N \cong A/[(b_1, \ldots, b_{d-1}) : a_d] + (a_d)$.

Hence from these observations we finally obtain that

$$\begin{aligned} r(R(\mathfrak{q})_{\mathfrak{P}}) &= r(B_N) = l_{B_N}(\mathrm{Hom}_{B_N}(B_N/N.B_N, B_N/\mathfrak{Q}.B_N)) \\ &= l_A(\mathrm{Hom}_A(k, A/[(b_1, \ldots, b_{d-1}) : a_d] + (a_d))) . \end{aligned}$$

As applications of Proposition 5 we have the followings.

Proposition 6. Assume that $e(A) \geqq 2$ and let $\mathfrak{q}$ be a minimal reduction of $\mathfrak{m}$. Then $r(R(\mathfrak{q})_{\mathfrak{P}}) \leqq e(A) - 1$ holds for every $\mathfrak{P} \in \mathrm{Proj}\ R(\mathfrak{q})$. Moreover if A has maximal embedding dimension (i.e., $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}$ holds, see [4] for more details), then the equality

$$r(R(\mathfrak{q})_{\mathfrak{P}}) = e(A) - 1$$

holds for every $\mathfrak{P} \in \mathrm{Proj}\ R(\mathfrak{q})$ such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}.R(\mathfrak{q})$.

Corollary 7. Assume that A has maximal embedding dimension and $e(A) \geqq 2$. Then for some (and hence every) minimal reduction $\mathfrak{q}$ of $\mathfrak{m}$, $\mathrm{Proj}\ R(\mathfrak{q})$ is a locally Gorenstein scheme if and only if $e(A) = 2$. When this is the case $A_{\mathfrak{p}}$ is a Gorenstein ring for all $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ A \setminus \{\mathfrak{m}\}$.

3. *Proof of Theorems*

We begin with the following basic fact, which plays an important role in our study.

Lemma 8. Let n be an integer and let $c_1, \ldots, c_{d-1}$ be elements of A. Put $b_i := a_i + c_i a_d{}^n$ for each $1 \leqq i < d$. Then if $n \geqq 2$ one has the equality

$$[(b_1, \ldots, b_{d-1}) : a_d] + (a_d) = [(a_1, \ldots, a_{d-1}) : a_d] + (a_d) .$$

Proof. Choose an element x of A so that $a_d x$ belongs to $(b_1, \ldots, b_{d-1})$. Then write $a_d x$ as follows:

$$a_d x = b_1 x_1 + \ldots + b_{d-1} x_{d-1}$$

with $x_i \in A$. Since $b_i = a_i + c_i a_d{}^n$ by our definition we get

$$a_d(x - \sum_{i=1}^{d-1} a_d{}^{n-1} c_i x_i) = a_1 x_1 + \ldots + a_{d-1} x_{d-1} ,$$

whence as $n \geqq 2$ we conclude $x \in [(a_1, \ldots, a_{d-1}) : a_{d-1}] + (a_d)$. The converse is shown in the same way.

For the Rees algebra of the system consisting of suitable powers of parameters for A, for example $\mathrm{R}(a_1, \ldots, a_{d-1}, a_d{}^n)$, we get much sharper arguments than given ones in the preceding section. Namely the following result is a key-lemma in our discussions.

Proposition 9. Let $n > 0$ be an integer and let R denote the Rees algebra of the system of parameters $a_1, \ldots, a_{d-1}, a_d{}^n$ for A, i.e. $\mathrm{R} := \mathrm{R}(a_1, \ldots, a_{d-1}, a_d{}^n)$. If $n \geqq 2$, then one has

$$r(\mathrm{R}_{\mathfrak{P}}) = r(\mathrm{R}_{\mathfrak{m}\mathrm{R}})$$

for every $\mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} R$ such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}R$ and $a_d{}^n X \notin \mathfrak{P}$. When this is the case it coincides with the length

$$l_A(\operatorname{Hom}_A(k, A/[\mathfrak{q}_{d-1} : a_d] + (a_d))) ,$$

where we put $\mathfrak{q}_{d-1} := (a_1, \dots , a_{d-1})$.

Proof. Let $C := A(Y_1, \dots , Y_{d-1})$ be the same as above and put $h_i := a_d{}^n Y_i - a_i$ for each $1 \leqq i < d$. Then by Proposition 4 we know that

$$r(R_{\mathfrak{m}R}) = l_C(\operatorname{Hom}_C(C/\mathfrak{m}C, C/[(h_1, \dots , h_{d-1}) : a_d] + (a_d))) .$$

Since $n \geqq 2$, applying Lemma 8 to the system h_i's we have

$$[(h_1, \dots , h_{d-1}) : a_d] + (a_d) = [\mathfrak{q}_{d-1}C : a_d] + (a_d)$$

as ideals of C . As C is faithfully flat over A and $\mathfrak{m}C$ is the maximal ideal of C we finally conclude that

$$r(R_{\mathfrak{m}R}) = l_A(\operatorname{Hom}_A(k, A/[\mathfrak{q}_{d-1} : a_d] + (a_d))) .$$

To finish our proof it is enough to show that

$$r(R_{\mathfrak{P}}) = l_A(\operatorname{Hom}_A(k, A/[\mathfrak{q}_{d-1} : a_d] + (a_d)))$$

for every $\mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} R$ such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}R$ and $a_d{}^n X \notin \mathfrak{P}$. According to [2, (3.5)] and [13, (4.3)] we may assume that the residue field k of A is algebraically closed. At first, we deal with that $\mathfrak{P}$ is a closed point of $\operatorname{Proj} R$. By Proposition 5 we have that

$$r(R_{\mathfrak{P}}) = l_A(\operatorname{Hom}_A(k, A/[(b_1, \dots , b_{d-1}) : a_d] + (a_d))) ,$$

where we put $b_i := a_i - c_i a_d{}^n$ $(1 \leqq i < d)$ for some $c_i \in A$. As $n \geqq 2$ we have by Lemma 8 again that

$$[(b_1, \dots , b_{d-1}) : a_d] + (a_d) = [\mathfrak{q}_{d-1} : a_d] + (a_d) ,$$

whence we get that

$$r(R_{\mathfrak{P}}) = l_A(\mathrm{Hom}_A(k, A/[\mathfrak{q}_{d-1} : a_d] + (a_d))) .$$

Next choose any $\mathfrak{P} \in \mathrm{Proj}\, R$ such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}R$ and $a_d{}^n X \notin \mathfrak{P}$. Then we can find a closed point $\mathfrak{P}' \in \mathrm{Proj}\, R$ such that $\mathfrak{P}' \supset \mathfrak{P}$. According to Proposition 4.1 of [8, p. 63], it follows that

$$r(R_{\mathfrak{P}'}) \geqq r(R_{\mathfrak{P}}) \geqq r(R_{\mathfrak{m}R})$$

and hence from the observation $r(R_{\mathfrak{P}'}) = r(R_{\mathfrak{m}R})$ as above we get that

$$r(R_{\mathfrak{P}'}) = r(R_{\mathfrak{P}}) = r(R_{\mathfrak{m}R}) .$$

This finishes the proof of Proposition 9.

Now we are ready to prove our theorems.

Proof of Theorem 1. Let R denote the Rees algebra of the system of parameters $a_1{}^{n_1}, \ldots, a_d{}^{n_d}$, and put $b_i := a_i{}^{n_i}$ for each $1 \leqq i \leqq d$. Assume that $n_i \geqq 3$ for all i. As $b_i X \notin \mathfrak{m}R$ for each i we know by Proposition 9 that

$$r(R_{\mathfrak{P}}) = r(R_{\mathfrak{m}R}) = l_A(\mathrm{Hom}_A(k, A/[(b_1, \ldots, b_{d-1}) : a_d] + (a_d)))$$

for every $\mathfrak{P} \in \mathrm{Proj}\, R$ such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}R$. By [13, (3.8)] we already know that as $n_i \geqq 3$ for all i the equality

$$r(R_{\mathfrak{P}}) = \mu_{\hat{A}}(K_{\hat{A}}) + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} . l_A(\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A))$$

holds.

To show our standard case that $n_i \geqq 2$ for all i let us define

$$r(n_1, \ldots, n_d) := r(R_{\mathfrak{m}R}) .$$

Then by Proposition 9 again we see that

$$\begin{aligned} r(n_1, \ldots, n_d) &= l_A(\mathrm{Hom}_A(k, A/[(b_1, \ldots, b_{d-1}) : a_d] + (a_d))) \\ &= l_A(\mathrm{Hom}_A(k, A/[(b_1, \ldots, b_{d-1}) : a_d{}^3] + (a_d{}^3))) \\ &= r(n_1, \ldots, n_{d-1}, 3) = \ldots = r(3, \ldots, 3) , \end{aligned}$$

and hence by the argumant above we finally get

$$r(n_1, \ldots, n_d) = \mu_{\hat{A}}(K_{\hat{A}}) + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} \cdot l_A(\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A)) .$$

This completes the proof of Theorem 1.

Theorem 2 has already been established in [13, (1.2)]. As an consequence of Theorem 2 we have the following too.

Corollary 10 ([2, (1.2)]). The following two statements are equivalent.

(1) $A/\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(A)$ is a Gorenstein ring.

(2) Proj $\mathrm{R}(\mathfrak{q})$ is a locally Gorenstein scheme for every parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A.

4. *Examples*

Unfortunately, Theorem 1 tells us nothing about the type of blowing-ups Proj $\mathrm{R}(a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d})$, when $n_i = 1$ for some i occurs. Therefore it is the aim of this section to compute type concerning few Buchsbaum rings with small multiplicity.

Throughout this section $(A, \mathfrak{m}, k)$ still be a Noetherian local ring of dimension d. For simplicity we assume that A is complete with respect to the $\mathfrak{m}$-adic toplology and the residue field k of A is infinite.

Let $\mathfrak{q} := (a_1, \ldots, a_d)$ be a parameter ideal of A. Then as the same as the before we still regard the Rees algebra, say $\mathrm{R}(a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d})$, as a subring of the polynomial ring $A[X]$ over A with an indeterminate X, i.e.

$$R(a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d}) = A[a_1^{n_1}X, \ldots, a_d^{n_d}X] \subset A[X] .$$

We say that a Buchsbaum ring A has <u>minimal multiplicity</u> if the following equality holds:

$$e(A) = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} \cdot l_A(H_{\mathfrak{m}}^i(A)) .$$

Notice that in general the term of the right hand side of this equality is a lower bound for the multiplicity $e(A)$ of a Buchsbaum ring A, and the condition that A has minimal multiplicity is equivalent to saying that $\mathfrak{m} = \sum(\mathfrak{q})$ holds for some (and hence every) minimal reduction $\mathfrak{q}$ of $\mathfrak{m}$; see [5, §4]. When this is the case, it is easy to see that the equality

$$\mu_A(K_A) = e(A) + \sum_{i=2}^{d-1} \binom{d-1}{i-2} \cdot l_A(H_{\mathfrak{m}}^i(A))$$

holds, cf. [11] and also [12]. We also claim that every Buchsbaum ring with minimal multiplicity has maximal embedding dimension.

With these notations we have the following.

Example 11. Let A be a Buchsbaum ring of dimension $d \geqq 2$ and $e(A) = 2$. Then as is well-known such Buchsbaum ring A has minimal multiplicity and the canonical module K_A is Cohen-Macaulay. Hence $\mu_A(K_A) = 2$ by the remark above and Proj $R(\mathfrak{q})$ is a locally Gorenstein scheme for every minimal reduction $\mathfrak{q}$ of $\mathfrak{m}$, by Cor. 7. See [3] for the structure theorems and concrete examples of Buchsbaum rings with multiplicity 2.

Now let us consider the case that $d = e(A) = 2$. Choose a minimal reduction of $\mathfrak{m}$, say $\mathfrak{q} := (a, b)$. Then by Proposition 9 and Theorem 1 we have the following statements too.

(I) Let $R := R(a^m, b)$ and let $\mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} R$ be such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}R$. Then if $m \geqq 2$ one has

$$r(R_{\mathfrak{P}}) = 1 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \not\ni a^m X ;$$
$$= 3 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \ni a^m X .$$

For $R(a, b^m)$ we get the similar assertion as above.

(II) Let $R := R(a^m, b^n)$ for $m, n \geqq 2$. Then one has

$$r(R_{\mathfrak{P}}) = 3 \quad \text{for all} \quad \mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} R \quad \text{such that} \quad \mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}R .$$

To describe further examples we recall one more definition. We make the Cartesian product $A \times M$ into a commutative ring with respect to componentwise addition and multiplication defined by $(a, x).(b, y) = (ab, ay + bx)$. We call this the <u>idealization</u> of M (over A) and denote it by $A \ltimes M$. The idealization $A \ltimes M$ is a Noetherian local ring with an identity $(1, 0)$, its maximal ideal is $\mathfrak{m} \times M$, and its Krull dimension equals $\dim A$. As is well-known, the given local ring A is Cohen-Macaulay if and only if every idealization $A \ltimes M$ of a maximal Buchsbaum A-module M (i.e. $\dim_A M = \dim A$ holds) is a Buchsbaum ring, cf. [11].

With this notation we have the following.

Example 12. Let $S := k[[a, b, c]]$ be a formal power series ring over a field k and let $E := \operatorname{Syz}_2^S(k)$ be the 2^{ed} syzygy module of k over S. Put

$$A := S \ltimes E \quad \text{and} \quad \mathfrak{q} := (a, b, c)A ,$$

cf. [7, §3] and see also [11, (3.11)]. Then it is easy to check the followings.

(I) A is a Buchsbaum ring with minimal multiplicity;

(II) $\dim A = e(A) = 3$, depth $A = 2$ and $H^2_{\mathfrak{m}}(A) \cong k$, so $\mathbf{I}(A) = 1$;

(III) $\mathfrak{q}$ is a minimal reduction of $\mathfrak{m}$;

(IV) $\mu_A(K_A) = e(A) + 1 = 4$.

Moreover we have the following.

(V) $r(R(\mathfrak{q})_{\mathfrak{P}}) = 2$ for all $\mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} R(\mathfrak{q})$ such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}.R(\mathfrak{q})$.

(VI) Let $R := R(a^m, b, c)$ and let $\mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} R$ be such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}R$. Then if $m \geqq 2$ one has

$$r(R_{\mathfrak{P}}) = 2 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \not\ni a^m X ;$$
$$= 3 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \ni a^m X \text{ , which is a closed point.}$$

For $R(a, b^m, c)$ and $R(a, b, c^m)$ we get the similar assertion as above.

(VII) Let $R := R(a^m, b^n, c)$ and let $\mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} R$ be such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}R$. Then if $m, n \geqq 2$ one has

$$r(R_{\mathfrak{P}}) = 3 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \not\ni a^m X \text{ or } \mathfrak{P} \not\ni b^n X ;$$
$$= 6 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \ni a^m X , b^n X .$$

For $R(a^m, b, c^n)$ and $R(a, b^m, c^n)$ we get the similar assertion as above.

(VIII) Let $R := R(a^l, b^m, c^n)$ for $l, m, n \geqq 2$. Then one has

$$r(R_{\mathfrak{P}}) = 6 \quad \text{for all } \mathfrak{P} \in \operatorname{Proj} R \text{ such that } \mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}R .$$

Example 13. Let $k[[x, y, z]]$ be the formal power series ring over a field k . Put

$$A := k[[x^2, y^2, z^2, xy, yz, x^3z, xz^3]] \text{ in } k[[x, y, z]] ,$$
$$a := x^2, \quad b := y^2 , \quad c := z^2 \quad \text{and} \quad \mathfrak{q} := (a, b, c)A ,$$

cf. [6, (7.6)]. Then it is easy to see that:

(I) A is a Buchsbaum ring with $\dim A = 3$ and $e(A) = 4$;

(II) $H^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ for $i = 0, 2$ and $H^1_{\mathfrak{m}}(A) \cong k$, hence $\mathbf{I}(A) = 2$;

(III) $\mathfrak{q}$ is a minimal reduction of $\mathfrak{m}$ such that $\mathfrak{m}^3 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^2$ and $\mathfrak{m}^2 \neq \mathfrak{q}\mathfrak{m}$, hence A does not have maximal embedding dimension;

(IV) $\mu_A(K_A) = 3$.

Moreover we have the following.

(V) Let $\mathfrak{P} \in \mathrm{Proj}\ \mathrm{R}(q)$ be such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}.\mathrm{R}(q)$. Then

$$r(\mathrm{R}(q)_{\mathfrak{P}}) = 1 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \not\ni bX \ ;$$

$$= 3 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \ni bX \text{ , which is a closed point.}$$

(VI) Let $\mathrm{R} := \mathrm{R}(a,\ b^m,\ c)$ and let $\mathfrak{P} \in \mathrm{Proj}\ \mathrm{R}$ be such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}\mathrm{R}$. Then if $m \geqq 2$ one has

$$r(\mathrm{R}_{\mathfrak{P}}) = 1 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \not\ni b^mX \ ;$$

$$= 4 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \ni b^mX \text{ , which is a closed point.}$$

(VII) Let $\mathrm{R} := \mathrm{R}(a^m,\ b,\ c)$ and let $\mathfrak{P} \in \mathrm{Proj}\ \mathrm{R}$ be such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}\mathrm{R}$. Then if $m \geqq 2$ one has

$$r(\mathrm{R}_{\mathfrak{P}}) = 3 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \not\ni a^mX \ ;$$

$$= 4 \quad \text{if} \quad \mathfrak{P} \ni a^mX \text{ , which is a closed point.}$$

For $\mathrm{R}(a,\ b,\ c^m)$ we get the similar assertion as above.

(VIII) Let $\mathrm{R} := \mathrm{R}(a^l,\ b^m,\ c^n)$ for $l,\ m,\ n > 0$. If $l,\ m,\ n \geqq 2$ except one at most, then one has $r(\mathrm{R}_{\mathfrak{P}}) = 4$ for all $\mathfrak{P} \in \mathrm{Proj}\ \mathrm{R}$ such that $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{m}\mathrm{R}$.

References

[1] H. Bass. On the ubiquity of Gorenstein rings. *Math. Z.* 82(1963), 8-28.

[2] S. Goto. Blowing-up of Buchsbaum rings. In *Commutative Algebra: Durham 1981*, London Math. Soc. Lecture Note Series 72 (Cambridge Univ. Press 1982), 140-162.

[3] S. Goto. Buchsbaum rings with multiplicity 2. *J. Algebra* 74(1982), 494-508.

[4] S. Goto. Buchsbaum rings of maximal embedding dimension. *J. Algebra* 76(1982), 383-399.

[5] S. Goto. On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings. *J. Algebra* 85(1983), 490-534.

[6] S. Goto. Noetherian local rings with Buchsbaum associated graded rings. *J. Algebra* 86(1984), 336-384.

[7] S. Ikeda. The Cohen-Macaulayness of the Rees algebras of local rings. *Nagoya Math. J.* 89(1983), 47-63.

[8] P. Roberts. *Homological invariants of modules over commutative rings.* Séminaire de Math. Sup. no. 72 (Les Press de l'Université de Montréal, 1980).

[9] J. Stückrad and W. Vogel. Eine Verallgemeinerung der Cohen-Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie. *J. Math. Kyoto Univ.* 13(1973), 513-528.

[10] J. Stückrad and W. Vogel. *Buchsbaum Rings and Applications* (Springer-Verlag, 1986).

[11] K. Yamagishi. Idealizations of maximal Buchsbaum modules over a Buchsbaum ring. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 104(1988), 451-478.

[12] K. Yamagishi. Bass number characterization of surjective Buchsbaum modules. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 110(1991), 261-279.

[13] K. Yamagishi. On types of blowing-ups of ideals in Buchsbaum rings. In *The ring theory of blowing-up rings*, RIMS Kokyuroku 801 (Kyoto University, 1992), 144-154.

Graded rings associated to ideals of small analytic deviation

後藤四郎　明治大学理工学部

中村幸男　東京都立大学理学部

1　序

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環, I を A のイデアル, $A[t]$ を多項式環とするとき, I の Rees 環とは $R(I) = \sum_{n\geq 0} I^n t^n \subseteq A[t]$, associated graded ring とは $G(I) = R(I)/IR(I)$ で定まるものである. 本稿ではイデアル I の analytic deviation が 1 または 2 のときの $R(I)$ や $G(I)$ の Cohen-Macaulay 性, Gorenstein 性についてわかったことを報告する.

J を I の minimal reduction とし, $\ell(I)$ で I の analytic spread (i.e., $\ell(I) = \dim G(I) \otimes_A A/\mathfrak{m}$) を表すことにする. 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が無限体であれば J の極小生成元の個数は $\ell(I)$ となることが知られており, 従って非負整数 $\ell(I) - \mathrm{ht}_A(I)$ が定まるが, これを I の analytic deviation と呼び $\mathrm{ad}(I)$ でかくことにする. $R(I)$ や $G(I)$ の議論を, この analytic deviation によるイデアルの類別で行うことは, 非常に有効である様に思える.

$\mathrm{ad}(I) = 0$ のイデアル I は equimuliple と呼ばれ, その典型的なものは $\mathfrak{m}$-準素イデアルがあり, このときの $R(I)$ や $G(I)$ については多くのことが知られている. $\mathrm{ad}(I) > 0$ となるものについては, その特別な場合として almost complete intersection がある. almost complete intersection 以外の解析は, Huckaba-Huneke [4] により $\mathrm{ad}(I) = 1, 2$ の場合について始められた.

本稿は彼らの結果の次のステップとして考えられる問題を研究し, 得られたものである. その内容を述べると, 2 節では base ring A が 1 次元の場合を扱い, $G(I)$ が Cohen-Macaulay となるある充分条件, Gorenstein となる必要充分条件などをあたえる. 3 節では 2 節での結果を高次元化したときの条件について述べる. その結果 3 次元正則局所環上の高さ 2 の素イデアル $\mathfrak{p}$ の定める Rees 環について, その Cohen-Macaulay 性, Gorenstein 性は $\mathfrak{p}$ の reduction number で完全に決定できること (cf. 系 3.7) などがわかる. 4 節では analytic deviation が 2 のときの $G(I)$ の a-invariant について述べる.

以下, $(A,\mathfrak{m})$ は剰余体が無限体の Cohen-Macaulay 局所環とする. イデアル I の Rees 環, associated graded ring をそれぞれ $R=R(I)$, $G=G(I)$ と略記する. Rees 環は多項式環 $A[t]$ の部分環として考えるものとし, f を R の元としたとき $\overline{f}$ で G における像を表すものとする. M は G の極大斉次イデアル $\mathfrak{m}G+G_+$ のこととする. M に関する i-次 local cohomology functor を $H^i_M(\ )$ でかく. G の a-invariant とは $\mathrm{a}(G):=\max\{n \mid [H^d_M(G)]_n \neq (0)\}$, ただし $d=\dim G$, のことである. イデアル I の minimal reduction を J としたとき, $\mathrm{r}_J(I):=\min\{n \mid I^{n+1}=JI^n\}$ とかき, これを (J に関する) I の reduction number と呼ぶ. A-加群 E に対し $\ell_A(E)$ で E の長さ, $\mu_A(E)$ で E の極小生成元の個数, $\mathrm{Socle}_A(E):=(0):_E \mathfrak{m}$ で E の socle, $\mathrm{r}(E)$ で E の type (i.e., $\mathrm{r}(E)=\ell_A(\mathrm{Ext}^d_A(A/\mathfrak{m},E)$, ただし $d=\dim E$) を表すものとする.

2 一次元における結果

この節では $(A,\mathfrak{m})$ は 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環とし, イデアル I は $\mathrm{ht}_A I=0$, $\ell(I)=1$, generically complete intersection (i.e., 任意の $Q\in \mathrm{Min}_A A/I$ に対して $IA_Q=(0)$) であるものとする. J は I の minimal reduction で, その生成元を $J=(b)$ とする. U で I の unmixed component を表すことにすれば, 任意の $Q\in \mathrm{Min}_A A/I$ に対し $UA_Q=IA_Q=(0)$ で, A/U は 1 次元 Cohen-Macaulay 環である. また $\mathfrak{a}=(0):b$, 即ち J の annhilator を $\mathfrak{a}$ とかくことにする.

補題 2.1 $U\cap\mathfrak{a}=(0)$

証明 $U\cap\mathfrak{a}\neq(0)$ と仮定して $Q\in \mathrm{Ass}_A U\cap\mathfrak{a}$ を取る. $\mathfrak{a}A_Q\neq(0)$ より $b\in Q$, 従って $I\subseteq Q$ となる. すると $\mathrm{ht}_A Q=0$ であるから $UA_Q=IA_Q=(0)$ となり矛盾. □

補題 2.1 より b は $A/\mathfrak{a}$-正則元となり, $\sqrt{(b)+\mathfrak{a}}=\mathfrak{m}$. よって $y\in\mathfrak{a}$ を $y+b$ が A-正則元となるように取ることができる. この時 $y+bt\in R$ について $\sqrt{(y+bt)G}=M$ が成り立つ. 実際, $Q\in\mathrm{Spec}\,G$ を $Q\ni\overline{y+bt}$ ととれば, $\overline{y^2}\equiv\overline{-ybt} \bmod Q$ で $yb=0$ より $\overline{y}, \overline{bt}\in Q$. 故に $\overline{\mathfrak{m}}, \overline{It}\subseteq Q$ となり $Q=M$ を得る.

この節のはじめの目標は G の a-invariant を求めることである. 一般次元で G が Cohen-Macaulay ならば $\mathrm{a}(G)=\max\{\mathrm{r}_J(I)-s-1,-s\}$ となる事は示されている [2, Proposition 2.4]. ここでは $\dim A=1$ の場合には Cohen-Macaulay の仮定なしに正しい事を保証しよう. Cohen-Macaulay の仮定が外せるという事実は第 4 節で効いてくる. まずは次の補題を準備する.

補題 2.2 $W=[(0):_G bt]$, $\overline{G}=G/btG$, $r=\mathrm{r}_J(I)$ とおくと次がなりたつ.

(1) $[H^1_M(W)]_i = (0)$ *for all* $i > 0$.

(2) $j = 0, 1$ について $[H^j_M(\overline{G})]_i = (0)$ *for all* $i > r$ *and for all* $i < 0$.

(3) $r > 0$ なら $[H^0_M(\overline{G})]_r \neq (0)$.

(4) $r > 0$ なら $[H^0_M(G)]_r = (0)$

証明　(1) $i > r$ なら $W_i = (0)$ である. 実際, $\overline{xt^i} \in W_i$ $(x \in I^i)$ をとれば $(bt)(xt^i) \equiv_G 0$. よって $bx \in I^{i+2} = bI^{i+1}$ となることから $x \in (I^{i+1} + \mathfrak{a}) \cap I = I^{i+1}$ を得る. 故に [2, Lemma 2.2] より $[H^1_M(W)]_n \cong H^1_{\mathfrak{m}}(W_n)$ for all n. 今 $n > 0$ で $\overline{xt^n} \in W_n$ ととると, $(y + bt)xt^n \equiv_G 0$ なので $\overline{xt^i} \in H^0_M(G)$. よって $\ell_A(W_n) < \infty$ であり $[H^1_M(W)]_n = (0)$ となる.

(2) $[\overline{G}]_i = I^i/(bI^{i-1} + I^{i+1})$ なので $[\overline{G}]_i = (0)$ for all $i > r$ and for all $i < 0$. 従って $[H^j_M(\overline{G})]_i = H^j_{\mathfrak{m}}([\overline{G}]_i) = (0)$.

(3) $r > 0$ なら $I^r/(bI^{r-1} + I^{r+1})$ は長さ有限であり, 中山の補題から零加群でないこともわかる.

(4) $i \geq r$ を $[H^0_M(G)]_i \neq (0)$ となる最大のものとしてとる. $0 \neq \overline{xt^i} \in H^0_M(G)$ とすれば, $(bt)(xt^i) \equiv_G 0$. 故に $bx \in I^{i+2} = bI^{i+1}$ より $x \in I^{i+1}$ が導かれるので矛盾. □

命題 **2.3**　$\mathrm{a}(G) = \max\{\mathrm{r}_J(I) - 1, 0\}$.

証明　2つの完全列

$$0 \to W(-1) \to G(-1) \to btG \to 0$$

$$0 \to btG \to G \to \overline{G} \to 0$$

から導かれる local cohomology の長完全列

$$H^1_M(W)(-1) \to H^1_M(G)(-1) \xrightarrow{\alpha} H^1_M(btG) \to 0 \tag{1}$$

$$H^0_M(G) \to H^0_M(\overline{G}) \to H^1_M(btG) \xrightarrow{\beta} H^1_M(G) \to H^1_M(\overline{G}) \to 0 \tag{2}$$

を考える. $a = \mathrm{a}(G)$, $r = \mathrm{r}_J(I)$ とおくことにする. はじめに $a \leq \max\{\mathrm{r}_J(I) - 1, 0\}$ を示そう. $0 \neq x \in [H^1_M(G)]_a$ を取ったときもし $z := \alpha(x) = 0$ ならば $[H^1_M(W)]_a \neq (0)$. 故に補題 2.2(1) より $a \leq 0$ を得る. $z \neq 0$ と仮定する. z は $a+1$ 次の元だから $\beta(z) = 0$. 故に $[H^0_M(\overline{G})]_{a+1} \neq (0)$ となり, 補題 2.2 (2) より $a + 1 \leq r$.

逆の不等号を示す. $r = 0$ ならば補題 2.2(2) より $H^1_M(\overline{G})$ は 0 次のみからなり, 完全列 (2) より $[H^1_M(G)]_0 \neq 0$ で $a \geq 0$ を得る. $r > 0$ とし $a < r - 1$ と仮定する. 完全列

(1) より $[H^1_M(btG)]_r = (0)$. 一方, 補題 2.2(4) より $[H^0_M(G)]_r = (0)$ なので完全列 (2) から $[H^0_M(\overline{G})]_r = (0)$ が従うが, これは補題 2.2(3) に反する. □

次に G の Cohen-Macaulay 性について述べる. 1次元の場合 $\mathrm{r}_J(I) \leq 1$ ならば常に G は Cohen-Macaulay となることが [4, Theorem 2.9] で証明されている. $\mathrm{r}_J(I) \leq 2$ の場合については次のことがいえる.

命題 2.4 *A/I が Cohen-Macaulay 環で $I^3 = JI^2$ ならば G は Cohen-Macaulay 環である.*

証明　$f = y + bt$ が G-正則であることをいう. $g = \sum_{0 \leq i \leq n} g_i t^i \in R$ を $fg \equiv_G 0$ ととる. $fg = yg_0 + bg_0t + bg_1t^2 + \ldots + bg_nt^{n+1}$ となるので, $bg_i \in I^{i+2} = bI^{i+1}$ for all $i > 0$. 故に $g_i \in (I^{i+1} + \mathfrak{a}) \cap I^i = I^{i+1}$ となり $g_it^i \equiv_G 0$ を得る. $i = 0$ のところでは $yg_0 \in I$ で y は A/I-正則なので $g_0 \in I$ となる. □

最後に G の Gorenstein 性を論じよう. そこでまず次の完全列を考える.

$$0 \to \mathfrak{a}G \to G \to G/\mathfrak{a}G \to 0 \tag{3}$$

補題 2.1 より, $[\mathfrak{a}G]_i = (0)$ for all $i > 0$, と $[\mathfrak{a}G]_0 = (I + \mathfrak{a})/I \cong \mathfrak{a}$ とが確かめられるので, $\mathfrak{a}$ を自明な次数付けで graded G-加群と見たときに $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}G$ は graded G-加群として同型である. また $G/\mathfrak{a}G \cong G((I + \mathfrak{a})/\mathfrak{a})$ となることもいえる.

命題 2.5 *G が Gorenstein 環ならば $I^2 = JI$. さらに A/I が Cohen-Macaulay 環であれば $I = J$ となる.*

証明　一般論より A は Gorenstein 環である. 補題 2.1 より $\mathfrak{a} = (0) : U$ がわかるので $\mathfrak{a} = K_{A/U}$ (A/U の canonical module). そして A/U は maximal Cohen-Macaulay G-加群であるから次の同型が得られる.

$$\mathrm{Hom}_G(\mathfrak{a}, K_G) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}_G(A/U, K_G), K_G) \cong A/U$$

よって完全列 (3) の K_G-dual をとることにより次の完全列を得る.

$$0 \to K_{G/\mathfrak{a}G} \to K_G \xrightarrow{\gamma} A/U \tag{4}$$

$r = \mathrm{r}_J(I)$ とおき $r \geq 2$ と仮定して矛盾を導く. 今, 命題 2.3 より $\mathrm{a}(G) = r - 1$ であり, $K_G = G(r-1)$. よって完全列 (4) の $1 - r$ 次の部分を抜き出せば, $[K_{G/\mathfrak{a}G}]_{1-r} \cong A/I$ とな

る．故に $\mathfrak{a}(A/I)=(0)$ であり，このことから $\mathfrak{a}=(0)$, 従って b が A-正則となり矛盾する．これで命題の前半は示せた．

$r \leq 1$ なので $\mathrm{a}(G)=0$ となる．また b は $A/\mathfrak{a}$-正則であるから [8, Proposition 3.1] より $G/\mathfrak{a}G \cong G((I+\mathfrak{a})/\mathfrak{a})$ は bt を正則元にもつ Cohen-Macaulay 環となり γ は全射となる．さらに A/I が Cohen-Macaulay と仮定すると $[\gamma]_0$ は同型を与えるので $[K_{G/\mathfrak{a}G}]_0=(0)$ となる．故に $\mathrm{a}(G/\mathfrak{a}G) \leq -1$ であり，$\mathrm{a}(G/(\mathfrak{a}G+btG)) \leq 0$ となり，$I+\mathfrak{a}=(b)+\mathfrak{a}$ となり，$I=(b)+\mathfrak{a}\cap I=(b)$ を得る．□

命題 2.5 より G の Gorenstein 性を扱うときは $I^2=JI$ を仮定してよいことになるが，この時次がいえる．

補題 2.6 $I^2=JI$ と仮定し $f=y+bt \in R$ とおく．このとき

(1) $\sum_{i \geq 2} G_i \subseteq fG$.

(2) $a \in I$ に対し，$\overline{at} \in fG$ *if and only if* $a \in bU$.

証明 (1) $I^2t^2=(y+bt)It$ より従う．

(2) $\overline{at} \in fG$ とする．$g=\sum_{0 \leq i \leq n} g_i t^i \in R$ を $at \equiv_G fg$ ととれば，$fg=yg_0+bg_0t+bg_1t^2+\ldots+bg_nt^{n+1}$ となるので，$yg_0 \in I$ と $a-bg_0 \in I^2=bI$ がわかる．y は A/U-正則であるから，$yg_0 \in U$ より $g_0 \in U$ となり，$a \in bU$ を得る．逆については $a=bu\ (u \in U)$ とかいたとき $at=(y+bt)u$ となることから従う．□

1 次元の場合 G の Gorenstein 性は次のように特徴付けられる．

定理 2.7 次は同値である．

(1) G は *Gorenstein* 環．

(2) (i) A は *Gorenstein* 環, *(ii)* $I^2=JI$ で, *(iii)* $[I:\mathfrak{m}]\cap[JU:I]=I$.

証明 はじめから A は Gorenstein 環で $I^2=JI$ と仮定して，(1) と (2)(iii) が同値であることを示せばよい．このとき $I \subseteq [I:\mathfrak{m}]\cap[JU:I]$ は既に成り立つ．また bt は $G/\mathfrak{a}G$-正則なので (cf. 命題 2.5), $f=y+bt$ とおけば完全列 (3) より次の完全列が得られる．

$$0 \to \mathfrak{a}/y\mathfrak{a} \xrightarrow{\alpha} G/fG \xrightarrow{\beta} G/(\mathfrak{a}G+btG) \to 0$$

$Z=[fG:_G M]$ とおくと Z/fG は Artin 局所環 G/fG の socle を与える．もし G が Gorenstein ならば $\ell_G(Z/fG)=1$ なので α は socle 間の同型を与え，$\beta(Z/fG)=(0)$ 即

ち $Z \subseteq \mathfrak{a}G + btG$ となる. 逆に $\beta(Z/fG) = (0)$ と仮定すると $Z/fG \cong \mathrm{Socle}_A\, \mathfrak{a}/y\mathfrak{a}$. 一方 $\mathfrak{a} \cap [(0):y] \subseteq \mathfrak{a} \cap U = (0)$ より y は $\mathfrak{a}$-正則 (故に f は G-正則) なので, $\ell_A(\mathrm{Socle}_A\, \mathfrak{a}/y\mathfrak{a}) = \mathrm{r}(\mathfrak{a}) = \mathrm{r}(K_{A/U}) = 1$. G_M は Cohen-Macaulay 環で $\mathrm{r}(G_M) = 1$ なので G は Gorenstein 環となる.

以上のことから定理の証明は (1') $Z \subseteq \mathfrak{a}G + btG$, と (2') $[I : \mathfrak{m}] \cap [JU : I] = I$ とが同値であることを示せば充分である. 以下 $L = [I : \mathfrak{m}] \cap [JU : I]$ とおく.

(1') $\Rightarrow$ (2')　$a \in L$ をとれば $\mathfrak{m}a \subseteq I$ かつ $(It)a \subseteq (bt)U$. 補題 2.6 より $\overline{btU} \subseteq fG$ なので $aM \subseteq fG$ となり $\overline{a} \in Z \subseteq \mathfrak{a}G + btG$. ゆえに $a \in I + \mathfrak{a}$. また $a \in U$ なので $a \in I + \mathfrak{a} \cap I = I$ となり (2') が成り立つ.

(2') $\Rightarrow$ (1')　$g \in R$ を $\overline{g} \in Z$ ととる. 補題 2.6 より $g = g_0 + g_1 t$ とかけるものとしてよい. $\overline{(It)g_0} = \overline{(It)g + (It)g_1 t} \subseteq fG$ なので補題 2.6 より $Ig_0 \subseteq bU$. 従って $g_0 \in bU : I$. 特に $bg_0 = bu$ $(u \in U)$ とかけば $a := g_0 - u$ は $\mathfrak{a}$ の元となる.

主張　$u \in L$ かつ $g_1 \in (b)$.

この主張が正しければ, (2') の仮定より $\overline{g} = \overline{(u + a) + g_1 t} = \overline{a + g_1 t}$. 故に $\overline{g} \in \mathfrak{a}G + btG$ が得られて証明は終わる.

主張の証明　$x \in \mathfrak{m}$ を任意に取れば $xg \equiv_G fh$ $(h = \sum_{0 \le i \le n} h_i t^i \in R)$ とかけるので, $x((u+a) + g_1 t) \equiv_G yh_0 + bh_0 t + bh_1 t^2 + \ldots + bh_n t^{n+1}$. このとき t の係数をみて $xg_1 = bh_0 + bi$ $(i \in I)$, 定数項をみて $x(u+a) = yh_0 + j$ $(j \in I)$ とかけることがわかる. $xu - j = yh_0 - xa \in I \cap \mathfrak{a} = (0)$ なので $xu = j$, $xa = yh_0$. ゆえに $u \in I : \mathfrak{m}$. 一方 $g_0, a \in bU : I$ なので $u \in L$ となる.

後半を示す. $xa = y(h_0 + i)$ とかくことができるので $x(a + g_1) = (y + b)(h_0 + i)$. 故に $a + g_1 \in \mathrm{Socle}\, A/(y + b)$ となる. $y + b$ は A のパラメーター系であり $A/(y + b)$ は Artin Gorenstein 環となるから, その socle は零でないすべてのイデアルに含まれる. 故に $a + g_1 \in (y, b)$ であり, $(y, b) = (y) \oplus (b)$ なので $a \in (y)$ と $g_1 \in (b)$ が従う. □

命題 2.5 の結果とあわせて次の系が得られる.

系 **2.8**　*A/I が Cohen-Macaulay 環であれば, 次は同値である.*

(1) G は Gorenstein 環.

(2) A は Gorenstein 環, かつ $I^2 = JI$.

(3) A は Gorenstein 環, かつ $I = J$.

3　高次元の場合

ここでは $(A,\mathfrak{m})$ は d-次元 Cohen-Macaulay 局所環，イデアル I は $\mathrm{ht}_A I = s \geq 0$, $\ell(I) = s+1$, generically complete intesection (i.e., 任意の $Q \in \mathrm{Min}_A A/I$ に対して IA_Q は長さ s の A_Q-列で生成) であるものを考える．以下, $\mathcal{P} = \mathrm{Min}_A A/I$ とかくことにする．J を I の minimal reduction とすれば J は $s+1$ 個の元で生成され, $Q \in \mathcal{P}$ で局所化すると s 個の元で生成されることから $K := (a_1, a_2, ..., a_s) \subseteq J$ を $J = K + (b)$ かつ任意の $Q \in \mathcal{P}$ に対して $IA_Q\ (= JA_Q) = KA_Q$ となるものとしてとることができる．このとき $K : I \not\subseteq Q$ for all $Q \in \mathcal{P}$, なので $y \in K : I$ をとり y, x_1, x_2,..., x_{d-s-1} が A/I のパラメーター系となるようにできる．以下, $L = (x_1,\ x_2, ..., x_{d-s-1})$ とおく．

補題 3.1　*(1)* $a_1, ..., a_s, x_1, ..., x_{d-s-1}, y+b$ は A のパラメーター系．

(2) $a_1t, ..., a_st, x_1, ..., x_{d-s-1}, y+bt$ は G_M のパラメーター系．

(3) $(I+L)/(K+L)$ は $A/(K+L)$ 内で *generically complete intersection.*

証明　(1) $Q \in \mathrm{Spec}\, A$ を $Q \supseteq K + L + (y+b)$ ととる．$y^2 \equiv -yb \bmod Q$ で, $yb \in K$ より $y, b \in Q$. 故に $J \subseteq Q$ で, $I \subseteq Q$ となり, $I + L + (y) \subseteq Q$ となり $Q = \mathfrak{m}$ を得る．

(2) (1) と同様に確かめられる．

(3) $\dim A/(I+L) = 1$ なので, 任意の $Q \in \mathrm{Min}_A A/(I+L)$ に対して $K : I \not\subseteq Q$. 故に $(I+L)A_Q = (K+L)A_Q$. □

以後 $\overline{A} = A/K+L$ とおく，これは 1 次元 Cohen-Macaulay 環である．$\overline{I} = I\overline{A}$, とおくと $\mathrm{ht}_{\overline{A}}\overline{I} = 0$ で generically complete intersection になっている．$\overline{J} = J\overline{A}$ は $\overline{I}$ の minimal reduction で b で生成される単項イデアルである．

定理 3.2　*A/I が Cohen-Macaulay 環であれば, 次が同値である．*

(1) G が Gorenstein 環．

(2) A が Gorenstein 環で, $I^2 = JI$.

(3) A が Gorenstein 環で, $I = J$.

証明　(1) $\Rightarrow$ (3)　G が Cohen-Macaulay 環なので $a_1t, ..., a_st,\ x_1, ..., x_{d-s-1}$ は G-正則列となり $G/(KtG + LG) \cong G(\overline{I})$ となる．この同型に剰余体 $A/\mathfrak{m}$ をテンソルして, $\overline{J}$ は $\overline{I}$ の minimal reduction であることがわかる．$G(\overline{I})$ が Gorenstein 環なので系 2.8 よ

り $\overline{A}$ は Gorenstein 環で $\overline{I} = \overline{J}$. 故に A は Gorenstein 環であり, [8, Theorem 2.3] より $I = (J + L) \cap I = J + LI$. よって中山の補題より $I = J$ が従う.
(2) $\Rightarrow$ (1) [4, Theorem 2.9] より G が Cohen-Macaulay であるから, $G(\overline{I})$ が Gorenstein 環であることを示せば充分である. 今 $\overline{A}$ が Gorenstein で $\overline{I^2} = \overline{JI}$ が成り立つので, 系 2.8 より $G(\overline{I})$ は Gorenstein である. □

定理 3.2 の状況のとき, [2, Proposition 2.4] より $\mathrm{a}(G) = -s$ が成り立っている. 一方 [5, Theorem 3.1] より $s \geq 2$ であれば, R が Gorenstein であることと G が $\mathrm{a}(G) = -2$ の Gorenstein 環であることが同値なので, 次の系を得る.

系 **3.3** *A/I が Cohen-Macaulay 環であれば, 次が同値である.*

(1) R が Gorenstein 環.

(2) A が Gorenstein 環, $I^2 = JI$ で, $s = 2$.

(3) A が Gorenstein 環, $I = J$ で, $s = 2$.

以上の議論より $\mathrm{r}_J(I) \leq 1$ の状況は (A/I が Cohen-Macaulay の仮定があれば) わかったものと思える. 次に reduction number を少し大きくしてものを考えてみることにする.

定理 **3.4** *A/I が Cohen-Macaulay 環で $\mathrm{r}_J(I) \leq 2$ ならば, 次は同値である.*

(1) G が Cohen-Macaulay 環.

(2) $\mathrm{depth}_A A/I^2 \geq \dim A/I - 1$.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) $x_1, x_2, \ldots, x_{d-s-1}$ は G-列, 従ってこれは任意の $n > 0$ に対して A/I^n-列となる. 特に $\mathrm{depth}_A A/I^2 \geq d - s - 1$.

逆を示すために次の補題を準備する.

補題 **3.5** *A/I が Cohen-Macaulay 環であると仮定する. このとき*

(1) $\mathrm{r}_J(I) \leq 2$ ならば $I^n \cap K = KI^{n-1}$ *for all* n.

(2) $\mathrm{depth}_A A/I^2 \geq d - s - 1$ ならば $\mathrm{depth}_A A/(I^2 + K) \geq d - s - 1$.

証明 (1) まず $I^2\cap K=KI$ をいう．$Q\in \mathrm{Ass}_A(I^2\cap K)/KI$ がとれたと仮定すると次の完全列より $Q\in \mathrm{Ass}_A A/K\cup \mathrm{Ass}_A K/KI$ となる．

$$0\to K/KI\to A/KI\to A/K\to 0$$

一方，$K/KI\cong \overset{s}{\bigoplus} A/I$ であり，$Q\supseteq I$ のはずだから $Q\in\mathcal{P}$. これは $IA_Q=KA_Q$ となり矛盾．

$n\geq 3$ と仮定すると $I^n\cap K=(KI^{n-1}+bI^{n-1})\cap K=KI^{n-1}+bI^{n-1}\cap K$. [4, Remark 2.1] より $[K:b]\cap I=K$ なので，$bI^{n-1}\cap K=b([K:b]\cap I^{n-1})=b(K\cap I^{n-1})$. よって帰納法の仮定から結論が得られる．

(2) (1) より $I^2\cap K=KI$ なので，$I^2+K/I^2\cong \overset{s}{\bigoplus} A/I$. 故に次の完全列が得られるので，これに Depth Lemma を適用すればよい．

$$0\to \overset{s}{\oplus} A/I\to A/I^2\to A/(I^2+K)\to 0$$

□

定理 **3.4** の証明 (2) ⇒ (1) 補題 3.5(1) と [8, Theorem 2.3] より $a_1t, a_2t, \ldots, a_st$, は G-列となるので $G(I/K)$ が Cohen-Macaulay であることを示せば充分である．A/K は $d-s$ 次元 Cohen-Macaulay 環, $\mathrm{ht}_{A/K} I/K=0$, $\ell(I/K)=1$, I/K は generically complete intersection となることは容易に確かめられ，さらに補題 3.5(2) より定理の証明は $s=0$ のときに示せば充分であることがわかる．

$s=0$ とする．$(0):I\not\subseteq Q$ for all $Q\in\mathcal{P}$, であるから $y\in(0):I$ を A/I のパラメーター系の一部となるようにとる．そこで G が Cohen-Macaulay であることを示すのに，$x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}\in\mathfrak{m}$ で，$x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, y+bt$ が G-列となるものがとれることを保証する．

主張 $\mathrm{depth}_A A/I^n\geq d-1$ *for all* $n>0$ ．

証明 $n=1,2$ のときは仮定より正しい．$n\geq 3$ で $\mathrm{depth}_A A/I^{n-1}\geq d-1$ と仮定すると $\mathrm{depth}_A I^{n-1}=d$ である．今 $[(0):b]\cap I=(0)$ なので $I^n=bI^{n-1}\cong I^{n-1}$. このことから $\mathrm{depth}_A A/I^n\geq d-1$ が従う．

$\mathcal{F}=\bigcup_{n>0}\mathrm{Ass}_A A/I^n$ とおけば，これは有限集合である．$d\geq 2$ とすると，$\mathfrak{m}\notin\mathcal{F}$ で $\dim A/(I+(y))>0$. 故に $x_1\in\mathfrak{m}$ を $x_1\notin\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q$ かつ $x_1\notin\bigcup_{Q\in\mathrm{Ass}_A A/(I+(y))} Q$ ととることができる．これを繰り返して $x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}$ をとれば，$x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}$ は A/I^n-列 for all n, 従って G-列をなし，しかも $y, x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}$ は A/I のパラメーター系となる．

$L=(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1})$, $\overline{A}=A/L$, $\overline{I}=I\overline{A}$, $\overline{J}=J\overline{A}$ とおく．すると $G/LG\cong G(\overline{I})$, $\overline{A}$ は 1 次元 Cohen-Macaulay 環, $\mathrm{ht}_{\overline{A}}\overline{I}=0$, $\ell(\overline{I})=1$, $\overline{A}/\overline{I}$ は Cohen-Macaulay, $\overline{J}=b\overline{A}$ は $\overline{I}$

の minimal reduction で $\mathrm{r}_{\overline{J}}(\overline{I}) \leq 2$ がただちにわかる．また，補題 3.1(3) より $\overline{I}$ は $\overline{A}$ 内で generically complete intersecton であり，$y+b$ は $\overline{A}$ のパラメーター系となることから命題 2.4 より $y+bt$ は $G(\overline{I})$-正則となる．従って $x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, y+bt$ が G-列をなし G は Cohen-Macaulay 環となる．□

定理 3.4 と [7, Theorem 1.1] を合わせると次の事がわかる．

系 **3.6** *(cf. [2, Theorem 2.1])* $\dim A \geq 3$ で A/I は 1 次元 *Cohen-Macaulay* 環とする．もし $\mathrm{r}_J(I) \leq 2$ ならば R は *Cohen-Macaulay* 環である．特に $\dim A = 3$ であれば逆も正しい．

この他に $\mathrm{ht}_A I = 1$ のとき，R が Gorenstein である必要充分条件は $I = J$ かつ $K_A = \mathrm{Hom}_A(I, A)$ となることや，G が Gorenstein であればイデアル I の生成元の個数は $\ell_A(\mathrm{Ext}_A^{d-s-1}(A/\mathfrak{m}, A/I)) + s + 1$ となることなどがわかっているがここでは割愛する (cf. [3]).

本節の終わりに 3 次元正則局所環 A 上の高さ 2 の素イデアル $\mathfrak{p}$ の定める Rees 環について述べる．このとき $\mathfrak{p}$ は generically complete intersection であり，$A/\mathfrak{p}$ は 1 次元 Cohen-Macaulay 環となる．また，$2 \leq \ell(\mathfrak{p}) \leq 3$ であるが，$\ell(\mathfrak{p}) = 2$ のときは Cowsik-Nori [1] より $\mathfrak{p}$ は正則列で生成され，$R(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$ の symmetric algebra と同型で超曲面となる．$\ell(\mathfrak{p}) = 3$ のときは analytic deviation が 1 の場合であるから系 3.3 と系 3.6 を合わせて次を得る．

系 **3.7** A は 3 次元正則局所環で $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ は $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = 2$, J を $\mathfrak{p}$ の *minimal reduction* とする．このとき

(1) $R(\mathfrak{p})$ が *Cohen-Macaulay* 環 *if and only if* $\mathfrak{p}^3 = J\mathfrak{p}^2$.

(2) $R(\mathfrak{p})$ が *Gorenstein* 環 *if and only if* $\mathfrak{p} = J$.

特に $\mathfrak{p}^2 = J\mathfrak{p}$ であれば $\mu_A(\mathfrak{p}) \leq 3$ となる．

4 Analytic deviation 2 の場合

この節での目標は [2, Theorem 2.1] の analytic deviation 2 の version をつくることである．つまり G の a-invariant を I の reduction number の言葉で言い替え，R の Cohen-Macaulay 性についてある特徴付けを与える．ここでは次の設定のもとで議論する．$(A, \mathfrak{m})$ は d 次元 Gorenstein 局所環，イデアル I は $\mathrm{ht}_A I = s$, $\ell(I) = s+2$, A/I は Cohen-Macaulay 環であるとし，任意の $Q \in \mathcal{P}_1$ に対して IA_Q は長さ s の A_Q-列で生成されるものとする．

ここで $\mathcal{P}_i$は, $\mathcal{P}_i = \{Q \in V(I) \mid \mathrm{ht}_A Q = s+i\}$ で定義する. J を I の minimal reduction とすれば, J は $s+2$ 個の元で生成されているが, その生成元について次が成り立つ.

補題 4.1 $J = (a_1, a_2, ..., a_s, b, c)A$, $K = (a_1, a_2, ..., a_s)A$ で次を充すものが取れる.

(1) $a_1, a_2, ..., a_s$ は A-列.

(2) $IA_Q = KA_Q$ *for all* $Q \in \mathcal{P}_0$.

(3) $b \notin Q$ *for all* $Q \in \mathrm{Min}_A A/K \setminus \mathcal{P}_0$.

(4) $IA_Q = (K+(b))A_Q$ *for all* $Q \in V(I+[K:I]) \cap \mathcal{P}_1$.

証明 (概略) Swan [6] の basic element theory を用いて, $a_1, a_2, ..., a_{s-1} \in J$ を Jの極小生成系の一部であり, かつ任意の $Q \in \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$ に対して IA_Q $(= JA_Q)$ の極小生成系の一部でもあるように取る. これは必要なら更に取り直して, A-列となるように取ることができる. そこで a_s を (1),(2) を充すように取り, K が確定する. b の取り方についてはまず次の事に注意する. $Q \in \mathrm{Min}\, A/K \setminus \mathcal{P}_0$ に対して $Q \not\supseteq I$, 従って (i) $Q \not\supseteq J$, $\mathrm{ht}_A(I+[K:I]) > s$ なので (ii) $V(I+[K:I]) \cap \mathcal{P}_1$ は有限集合, 及び, (iii) $Q \in V(I+[K:I]) \cap \mathcal{P}_1$ に対して $(I/(a_1, ..., a_{s-1}))A_Q$ が単項生成である. これらのことから b を (3),(4) を充すように取ることができる. □

補題 4.1 で定めた J の生成系について次が確かめられる.

補題 4.2 *(1)* $A/[K:I]$ は $d-s$ 次元 *Cohen-Macaulay* 環.

(2) $K : I = K : b$.

(3) $[K:I] \cap I = K$.

(4) $A/(I+[K:I])$ は $d-s-1$ 次元 *Cohen-Macaulay* 環.

(5) $\mathrm{ht}_A(I+[(K+(b)):I]) \geq s+2$.

証明 (1) A/K が $d-s$ 次元 Gorenstein 環, A/I が $d-s$ 次元の Cohen-Macaulay 環であることから従う.

(2) $\mathrm{Ass}_A A/[K:I] = \mathrm{Min}_A A/[K:I] \subseteq \mathrm{Min}_A A/K \setminus \mathcal{P}_0$ より b は $A/[K:I]$-正則. 故に $[K:I] : b = K : I$.

(3) $[K:I] \cap I \neq K$ と仮定して, $Q \in \mathrm{Ass}_A([K:I] \cap I)/K$ を取る. このとき $Q \supseteq I$ であるが, $\mathrm{ht}_A Q = s$ であるので, $Q \in \mathcal{P}_0$. 故に $IA_Q = KA_Q$ となり矛盾.

(4) $\mathrm{ht}_A(I+[K:I]) \geq s+1$ であることと, 次の完全列より従う.

$$0 \to A/K \to A/I \oplus A/[K:I] \to A/(I+[K:I]) \to 0$$

(5) もし, $Q \in V(I+[(K+(b)):I])$ で $\mathrm{ht}_A Q \leq s+1$ ならば, $IA_Q = (K+(b))A_Q$ で矛盾. □

$y \in K:I$ を A/I-正則に, $z \in [(K+(b)):I]$ を $A/(I+(y))$-正則になるように取る. これが可能なのは補題 4.2 によって保証される. さらに $y, z, x_1, x_2, ..., x_{d-s-2}$ が A/I のパラメーター系となるように取れば次が成り立つ.

補題 4.3 *(1)* $a_1, ..., a_s, x_1, ..., x_{d-s-2}, y+b, z+c$ は A のパラメーター系.

(2) $a_1t, ..., a_st, x_1, ..., x_{d-s-2}, y+bt, z+ct$ は G_M のパラメーター系.

証明 (1) $Q \in \mathrm{Spec}\, A$ を $Q \supseteq K+(x_1, ..., x_{d-s-2}, y+b, z+c)$ ととる. $y^2 \equiv -yb \bmod Q$ で, $yb \in K$ より $y, b \in Q$. さらに, $z^2 \equiv -zc$ で $zc \in K+(b)$ より, $z, c \in Q$. 故に $J \subseteq Q$ で, $I \subseteq Q$ となり, $I+(y, z, x_1, x_2, ..., x_{d-s-2}) \subseteq Q$ となり $Q = \mathfrak{m}$ を得る.

(2) (1) と同様に確かめられる. □

$\mathrm{ad}(I) = 2$ のときの G の a-invariant は次の形で与えられる.

定理 4.4 G が *Cohen-Macaulay* 環ならば $\mathrm{a}(G) = \max\{\mathrm{r}_J(I) - s - 2, -s\}$.

$L = (x_1, x_2, ..., x_{d-s-2})$ とおく. $\overline{A} = A/(K+L)$ は 2 次元 Gorenstein 環であり, $\overline{I} = I\overline{A}$ は高さ $\dim A/(K+L) - \dim A/(I+L) = 0$. G が Cohen-Macaulay ならば, 同型 $G/(KtG+LG) \cong G(\overline{I})$ があるので, $\mathrm{a}(G) = \mathrm{a}(G(\overline{I})) - s$, $\ell(\overline{I}) = 2$ で $\overline{J} = J\overline{A}$ が $\overline{I}$ の minimal reduction となる. また, [8, Theorem 2.3] を用いて $\mathrm{r}_J(I) = \mathrm{r}_{\overline{J}}(\overline{I})$ も確かめられる. よって定理 4.4 の証明には $\mathrm{a}(G(\overline{I})) = \max\{\mathrm{r}_{\overline{J}}(\overline{I}) - 2, 0\}$ を示せば充分であり, $\overline{A}$ を通じて base ring が 2 次元の場合を議論すればよいことになる. しかしながら $\overline{I}$ を $Q \in \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$ ($\mathcal{P}_i$ は $\overline{I}$ に対して定まるもの) で局所化したときの状況は少し異なり, 次の様になる.

補題 4.5 *(1)* $Q \in \mathrm{Min}_A\, A/(I+L)$ に対し $(I+L)A_Q = (K+L)A_Q$.

(2) $Q \in V(I+L)$ かつ $\mathrm{ht}_A Q = d-1$ に対し $(I+L)A_Q = (K+(b)+L)A_Q$.

証明 (1) $Q \in \mathrm{Min}_A\, A/(I+L)$ ととれば, $y \notin Q$. よって $IA_Q = KA_Q$.

(2) $Q \in V(I+L)$ かつ $\mathrm{ht}_A Q = d-1$ ととる. もし $y \notin Q$ なら, (1) と同じ議論である. $y \in Q$ ならば $z \notin Q$ であり, このときは $IA_Q = (K+(b))A_Q$ となる. □

よって A が 2 次元の場合の命題として次のものを示せば, 定理 4.4 は証明されたことになる.

命題 4.6 $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元 *Gorenstein* 局所環, イデアル I は $\mathrm{ht}_A I = 0$, $\ell(I) = 2$, *generically complete intersection*, A/I は *Cohen-Macaulay* 環となるものとし, $J = (b, c)$ は I の *minimal reduction* で任意の $Q \in \mathcal{P}_1$ に対し $IA_Q = bA_Q$ と仮定する. このとき, もし G が *Cohen-Macaulay* 環ならば, $\mathrm{a}(G) = \max\{\mathrm{r}_J(I) - 2, 0\}$ である.

証明　まず, 補題 4.3 と同様にして次の事がいえる.

主張 1　$y \in (0) : I$, $z \in (b) : I$ で次を充すものが取れる.

(1) $y + b$, $z + c$ は A のパラメーター系である.

(2) $y + bt$, $z + ct$ は G_M のパラメーター系である.

さらに, 補題 4.2 と同様にして次のことがわかる.

主張 2　*(1)* $A/[(0) : I]$ は 2 次元 *Cohen-Macaulay* 環.

(2) $(0) : I = (0) : b$.

(3) $[(0) : I] \cap I = (0)$.

(4) $A/(I + [(0) : I])$ は 1 次元 *Cohen-Macaulay* 環.

今, G が Cohen-Macaulay 環なので $y + bt$ は G-正則となる. また, $\mathfrak{a} = (0) : I$ $(= (0) : b)$ とおくことにすれば, 2 節でみたように完全列

$$0 \to \mathfrak{a}G \to G \to G/\mathfrak{a}G \to 0 \tag{5}$$

がとれる. このとき graded G-加群としての同型 $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}G$ と $G/\mathfrak{a}G \cong G((I + \mathfrak{a})/\mathfrak{a})$ とが成り立つことに注意しておく.

主張 3　bt は $G/\mathfrak{a}G$-正則であり, 任意の n に対して $I^n \cap (b) = bI^{n-1}$.

証明　はじめに $I^2 \cap (b) = bI$ を示す. $Q \in \mathrm{Ass}_A(I^2 \cap (b))/bI$ が取れたと仮定すると, $Q \supseteq I + \mathfrak{a}$ なので $\mathrm{ht}_A Q \geq 1$ となる. もし $\mathrm{ht}_A Q = 1$ なら $IA_Q = bA_Q$ となるので, $Q = \mathfrak{m}$ でなければならない. すると完全列 $0 \to I \xrightarrow{b} A \to A/bI \to 0$ より $\mathrm{depth}_A I = 1$ となるが, これは $\mathrm{depth}\, A/I = 2$ に反する.

次に bt が $G/\mathfrak{a}G$-正則であることをいう. 完全列 (5) で現れる埋め込み $\mathfrak{a} \hookrightarrow G$ から導かれる準同型写像 $\mathfrak{a}/y\mathfrak{a} \to G/(y+bt)$ が単射であることを示せば充分である. そこで $h \in \mathfrak{a}$ と $g = \sum_{0 \le i \le n} g_i t^i \in R$ を $h \equiv_G (y+bt)g$ ととると, $h \equiv_G yg_0 + bg_0 t + bg_1 t^2 + \ldots + bg_n t^{n+1}$. すると $bg_0 \in I^2 \cap (b) = bI$ より $g_0 \in I + \mathfrak{a}$. 一方 $f - yg_0 \in I$ より $f \in (y(I+\mathfrak{a})+I) \cap I = y\mathfrak{a}$. 故に $\mathfrak{a}/y\mathfrak{a} \to G/(y+bt)$ は単射となる.

また, [8, Theorem 2.3] より $(I^n + \mathfrak{a}) \cap ((b) + \mathfrak{a}) = bI^{n-1} + \mathfrak{a}$ for all n. これより $I^n \cap (b) = bI^{n-1}$ for all n, であることが従う.

主張 4 $\mathrm{a}(G/\mathfrak{a}G) = \max\{r_J(I) - 2, -1\}$.

証明 $B = A/((b) + \mathfrak{a})$ とおけば B は 1 次元 Cohen-Macaulay 環である. $A/(I + \mathfrak{a})$ も 1 次元であり, 故に $\mathrm{ht}_B IB = 0$. 一方, 主張 4 より $G(IB) \cong G/((\mathfrak{a}+L)G + btG)$ であるから, $\ell(IB) = 1$ で JB が IB の minimal reduction となることがわかる. さらに, $Q \in \mathrm{Min}_A A/(I+\mathfrak{a})$ ととれば $z \notin Q$ より $IA_Q = bA_Q$, 従って IB は B 内で generically complete intersection である. 故に命題 2.3 より $\mathrm{a}(G(IB)) = \max\{\mathrm{r}_{JB}(IB) - 1, 0\}$ となり, $\mathrm{a}(G/\mathfrak{a}G) = \mathrm{a}(G(IB)) - 1 = \max\{r_{JB}(IB) - 2, -1\}$ を得る.

あとは $\mathrm{r}_J(I) = \mathrm{r}_{JB}(IB)$ を示せばよい. 今 $I^{n+1}B = JI^nB$ と仮定する. $I^{n+1} \subseteq (JI^n + (b) + \mathfrak{a}) \cap I$ より $I^{n+1} \subseteq JI^n + (b)$. 故に $I^{n+1} = (JI^n + (b)) \cap I^{n+1} = JI^n$. 逆の不等号は明かである.

命題 4.6 の証明 $r = \mathrm{r}_J(I)$ とおく. 完全列 (5) から導かれる local cohomology の長完全列

$$0 \to H^1_M(G/\mathfrak{a}G) \to H^2_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) \to H^2_M(G) \xrightarrow{\gamma} H^2_M(G/\mathfrak{a}G) \to 0$$

に着目する. $H^2_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$ は 0-次のみからなる G-加群である. もし $r \geq 2$ ならば主張 5 より $\mathrm{a}(G/\mathfrak{a}G) = r - 2 \geq 0$ であり, γ の全射性より $\mathrm{a}(G) = r - 2$ となる. $r \leq 1$ のときは $G(IB)$ は Cohen-Macaulay (e.g., 命題 2.4), 従って $G/\mathfrak{a}G$ は Cohen-Macaulay 環となる. 故に $H^2_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) \cong [H^2_M(G)]_0$ となり $\mathrm{a}(G) = 0$ を得る. □

最後に R の Cohen-Macaulay 性について述べてこの報告を終わりにする. 定理 4.4 と [7, Theorem 1.1] より R の Cohen-Macaulay 性について次の事がわかるが, 証明の詳細は省略する.

定理 4.7 次は同値である.

(1) R が Cohen-Macaulay 環.

(2) G が Cohen-Macaulay 環で, $s > 0$, $I^{s+2} = JI^{s+1}$.

参考文献

[1] R. C. Cowsik and M. V. Nori, On the fibres of blowing up, *J. Indian Math. Soc.*, **40** (1976), 217-222

[2] S. Goto and S. Huckaba, On graded rings associated to analytic deviation one ideals, to appear in *Amer. J. Math.*

[3] S. Goto and Y. Nakamura, On the Gorensteinness of graded rings associated to ideals of analytic deviation one, Preprint

[4] S. Huckaba and C. Huneke, Powers of ideals having small analytic deviation, *Amer. J. Math.*, **114** (1992), 367-403

[5] S. Ikeda, On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings, *Nagoya Math. J.*, **102** (1986), 135-154

[6] R. Swan, Serres Problem, in Conf. Comm. Algebra, Kingston 1975, *Queen's Papers Pure and Appl. Math.* **42**

[7] N. V. Trung and S. Ikeda, When is the Rees algebra Cohen-Macaulay, *Communications in Algebra*, **17** (1989), 2893-2922

[8] P. Valabrega and G. Valla, Form rings and regular sequences, *Nagoya Math. J.*, **72** (1978), 93-101

R[X,Y]のR-自己同型について

浅沼照雄
富山大 教育

序. 体K上の2変数多項式環 $K[X,Y]$ の K-自己同型写像はTame型 (i.e.、$(X,Y) \to (aX, bY+f(X))$, $a,b \in K^{\times} = K$ の unit group, $f(X) \in K[X]$) 及び置換 $\rho := (X,Y) \to (Y,X)$ の有限個の積で表わされることはよく知られている。本稿では体Kのかわりに D.V.R. (discrete valation ring) R について、$R[X,Y]$ の R-自己同型写像がどのような同型写像の積として表わされるかを考えてみたい。

§1. 準備

整域 A 上の2変数多項式環 $A[X,Y]$ について以下のように記号を定める。

$S(A) := \mathrm{End}_A A[X,Y] = A[X,Y]$ の A-自己準同型のなす半群

$S(A)$ の任意の元 ϕ について

$$\phi : (X,Y) \longrightarrow (f(X,Y), g(X,Y))$$

なるとき

$$\phi = \begin{bmatrix} f(X,Y) \\ g(X,Y) \end{bmatrix}$$

と書く。ゆえに

$$\psi = \begin{bmatrix} F(X,Y) \\ G(X,Y) \end{bmatrix} \in S(A) \text{ とすると } \phi\psi = \begin{bmatrix} F(f(X,Y), g(X,Y)) \\ G(f(X,Y), g(X,Y)) \end{bmatrix} \in S(A)$$

で ϕ と ψ の積が定義されていることに注意する。

$$S^0(A) := \left\{ \begin{bmatrix} f(X,Y) \\ g(X,Y) \end{bmatrix} \in S(A) \;\middle|\; f(0,0) = g(0,0) = 0 \right\}$$ とする。すなわち $S^0(A)$ は $S(A)$ の部分半群で constant がないものの全体である。

$G(A) := Aut_A A[X,Y] = A[X,Y]$ の A-自己同型群 ($\subset S(A)$ に注意。)

$G^0(A) := G(A) \cap S^0(A)$

$$J(A) := \left\{ \begin{bmatrix} aX \\ bY + f(X) \end{bmatrix} \in G(A) \;\middle|\; a b \in A^\times,\ f(X) \in A[X] \right\}$$

$J^0(A) := J(A) \cap G^0(A) = J(A) \cap S^0(A)$

$GL_2(A) :=$ 2次の general linear group

$GL_2(A) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} aX + cY \\ bX + dY \end{bmatrix} \in G^0(A)$$

とおくことにより $GL_2(A)$ は $G^0(A)$ の部分群となる。

与えられた群 G 及びその部分群，又は部分集合 M, N などに対して $M \vee N$ で M, N で生成された G の部分群を表わすことにする。

以上の定義の下で以下特に A が D.V.R、及び体のときを考える。以下 $(R, \pi R, k)$ を D.V.R とする。$K := R[\pi^{-1}]$ とおく。すると次の図がなりたつ。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & G^0(K) \arrow[d, dash, "(*)"] \arrow[rrr, dash] & & & \\
 & GL_2(K) \vee J^0(K) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & G^0(R) \arrow[d, dash, "(**)"] & \\
GL_2(K) \arrow[rrrd, dash] & & J^0(K) \arrow[rrrd, dash] & & GL_2(R) \vee J^0(R) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & & GL_2(R) & & J^0(R)
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

図(1)において(*)の部分のinclusionは等号となる。すなわち次の定理がなりたつ。

定理 1．（Jung, van der Kulk）

$$G^0(K) = GL_2(K) \vee J^0(K)$$

証明についてはいくつか知られている（たとえば[N]）．$GL_2(K)$ は三角行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ 及び置換 $\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成されることに注意すれば上の定理1より結局 $G^0(K)$ は ρ 及び $J^0(K)$ で生成されていることがわかる。

次に(**)の部分のinclusionについて考えてみよう。これについては次の例が知られている．

例 1．（Nagata [N]）

$$\phi = \begin{bmatrix} X + \pi^{-1}Y^2 \\ Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y + \pi^2 X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - \pi^{-1}Y^2 \\ Y \end{bmatrix}$$

とする。すると $\phi \in G^0(R)$ かつ $\phi \notin GL_2(R) \vee J^0(R)$ がなりたつ。ゆえに(**)は等号ではない。

§2．$G^0(R)$ について

この節では $G^0(R)$ の生成元について調べる．

$$\alpha = \begin{bmatrix} X \\ \pi Y \end{bmatrix} \in G^0(K) \cap S^0(R)$$

とおく。すると定理1を用いて次の補題が示される。

補題 1．$G^0(K) = GL_2(R) \vee J^0(R) \vee \{\alpha\}$

たとえば例1の ϕ は簡単な計算により $\phi = \rho\alpha\sigma\tau\sigma^{-1}\alpha^{-1}\rho$

$$\rho = \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} X + \pi Y \\ Y \end{bmatrix} \in GL_2(R), \quad \sigma = \begin{bmatrix} X \\ Y + X^2 \end{bmatrix} \in J^0(R)$$

のように $GL_2(R) \vee J^0(R) \vee \{\alpha\}$ の元として表わせる。

さて次に自然な map $R \to k = R/\pi R$ は $G^0(R)$ から $G^0(k)$ への surjective group hom. $\Delta : G^0(R) \to G^0(k)$ を induce する。$G^0(R) \ni \phi$ について Δ による ϕ の image $\Delta(\phi)$ を $\overline{\phi}$ で表わすことにする。

補題 2. 与えられた $G^0(R)$ の元 ϕ について $\overline{\phi} \in \rho J^0(k)\rho$ ならば $\alpha\phi\alpha^{-1} \in G^0(R)$ がなりたつ.

この補題 2 より $N = \Delta^{-1}(\rho J^0(k)\rho)$ とすれば, N 及び $\alpha N \alpha^{-1}$ は $G^0(R)$ の部分群となる。

ここで $G^0(R)$ の部分群の列

$$H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_i \subset \cdots \subset G^0(R)$$

を次のように帰納的に定義する。

(i) $H_0 = GL_2(R) \vee J^0(R)$

(ii) $H_{i+1} = GL_2(R) \vee J^0(R) \vee \alpha(N \cap H_i)\alpha^{-1} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$

すると次の定理 2 がなりたつ.

定理 2. $G^0(R) = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$

上の定理 2. より与えられた $G^0(R)$ の元 ϕ はある H_i の元となる。そこで $G^0(R)$ の構造を調べるためには H_i を考えればよい.

§3. $G^0(R)$ の元の例

本節では $G^0(R)$ の元の例を H_i を用いて構成する。

まず簡単のために $\alpha = \left[\begin{smallmatrix} X \\ \pi Y \end{smallmatrix}\right]$ を $\langle$, $\alpha^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} X \\ \pi^{-1} Y \end{smallmatrix}\right]$ を $\rangle$ で表わすことにする。たとえば

$\phi_1 \alpha\alpha \phi_2 \alpha^{-1} \phi_3 \alpha \phi_4 \alpha^{-1}\alpha^{-1}$ は $\phi_1 \langle\langle \phi_2 \rangle \phi_3 \langle \phi_4 \rangle\rangle$ と表わすことにする。

すると定義よりH_1の任意の元ϕは$H_0 = GL_2(R) \vee J^0(R)$の元を用いて

$$\phi = \phi_1 \langle \phi_2 \rangle \phi_3 \langle \phi_4 \rangle \phi_5 \quad \cdots \quad \phi_{n-2} \langle \phi_{n-1} \rangle \phi_n \qquad (2)$$

と表わされる。ここで$\phi_i \in H_0$ $(i = 1, \cdots, n)$，とくに$i \equiv 0 \pmod 2$のときは$\phi_i \in H_0 \cap N$である。

例2.　$f(X) = a_1 X + \cdots + a_n X^n$, $g(X) = b_1 X + \cdots + b_m X^m$
$(a_i, b_j \in R$, $a_n b_m \in R^\times$, $n \geq 2$, $m \geq 1)$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} X \\ Y + f(X) \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} X + \pi g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \quad \phi_3 = \phi_1^{-1}$$

とおく．すると明らかに

$$\phi_1 \phi_2 \phi_3 \in GL_2(R) \vee J^0(R) = H_0$$

かつ

$$\overline{\phi_1 \phi_2 \phi_3} = \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_3 = \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_1^{-1} = id \in \rho J(k) \rho$$

がなりたつから

$$\phi_1 \phi_2 \phi_3 \in H_0 \cap N$$

ゆえに

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle = \alpha \phi_1 \phi_2 \phi_3 \alpha^{-1} \in H_1$$

である。

ここで$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle$を具体的に求めてみよう。

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle = \begin{bmatrix} X \\ \pi Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y + f(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X + \pi g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y - f(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \pi^{-1} Y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X \\ \pi Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X + \pi g(Y + f(X)) \\ Y + f(X) - f(X \ \pi g(Y + f(X))) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \pi^{-1} Y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X + \pi g(\pi Y + f(X)) \\ Y + \pi^{-1} f(X) - \pi^{-1} f(X + \pi g(\pi Y + f(X))) \end{bmatrix}$$

テーラー展開を用いて

$$f(X+\pi g(\pi Y+f(X)))=f(X)+\pi f'(X)g(\pi Y+f(X))+\pi^2 \gamma(X)\quad(\gamma(X)\in R[X])$$

となるから

$$\langle \phi_1\phi_2\phi_3\rangle=\begin{bmatrix} X+\pi g(\pi Y+f(X)) \\ Y-f'(X)g(\pi Y+f(X))+\pi\gamma(X)\end{bmatrix}$$

と表わされている．とくに

$$\overline{\langle \phi_1\phi_2\phi_3\rangle}\equiv\begin{bmatrix} X \\ Y-\bar{f}'(X)\bar{g}(\bar{f}(X))\end{bmatrix}\in J^0(k)$$

に注意しておく．ここで $\bar{f}$, $\bar{g}$ 等は $R[X]$ から $k[X]$ への自然な map による $f(X)$, $g(X)$ 等の image を表わしている．

定理 3．　上の例 2 の $\langle \phi_1\phi_2\phi_3\rangle$ は $H_0=GL_2(R)\vee J^0(R)$ の元ではない．ゆえとくに $H_0 \subsetneq H_1$ がなりたつ．

次に H_2 の元について考える．定義より H_2 の任意の元 ψ は

$$\psi=\psi_1\langle\psi_2\rangle\psi_3\langle\psi_4\rangle\psi_5\cdots\cdot\psi_{n-2}\langle\psi_{n-1}\rangle\psi_n \quad (3)$$

と表わせる．　ここで　$\psi_i\in H_1$ $(i=1,\dots,n)$ でとくに $i\equiv 0 \pmod 2$ のとき $\psi_i\in H_1\cap N$ である．各 ψ_i は H_1 の元として生成元は与えられるから結局 ψ の生成元を上の式によって具体的に与えることができる．

例 3．　$\psi_1=\langle\phi_1\phi_2\phi_3\rangle\in H_1$ を例 2 のものとし，

$$\phi_4=\begin{bmatrix} X+\pi h(X) \\ Y\end{bmatrix}\quad(h(X)=c_1X+\cdots+c_\ell X^\ell,\ \ c_i\in R,\ c_\ell\in R^\times),$$

$$\phi_5=\begin{bmatrix} X \\ Y+f'(X)g(f(X))\end{bmatrix}$$

とする．すると $\phi_4,\phi_5\in H_0(\subset H_1)$ かつ

$$\overline{\psi_1\phi_4\phi_5}=id\in \rho J^0(k)\rho$$

がなりたつ．

ゆえに

$$\langle \psi_1 \psi_2 \psi_3 \rangle = \langle \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle \phi_4 \phi_5 \rangle$$

は H_2 の元である．

定理4．上の例3の $\langle \psi_1 \psi_2 \psi_3 \rangle$ は H_1 の元ではない．ゆえとくに $H_1 \subsetneqq H_2$ がなりたつ．

以後同様にして $H_3, H_4, \cdots$ 等の元の成生元を $GL_2(R)$, $J^0(R)$, $\{\alpha, \alpha^{-1}\}$ の各元を用いて具体的に与えることができる．ただし $H_i \subsetneqq H_{i+1}$ が $i>1$ についてもなりたつかどうかは不明である．

注意，1．　$G^0(K)$ の任意の元 ϕ は定理1より

$$\phi = \tau_1 \sigma_1 \tau_2 \sigma_2 \cdots \tau_n \sigma_n \tau_{n+1} \quad (\tau_i \in GL_2(K), \sigma_i \in J^0(K))$$

と表わせる．このような ϕ の表現の中で長さが最小なるときの n を ϕ の長さといい $\mu(\phi) = n$ とかく．又 $\phi_i \in G^0(K)$ $(i=1, \dots, m)$ について

$$\mu(\phi_1 \cdots \phi_m) = \mu(\phi_1) + \cdots + \mu(\phi_m)$$

がなりたつとき $\phi_1 \cdots \phi_m$ を $\phi_1, \cdots, \phi_n$ の direct product という．すると (2) 及び (3) の右辺の積はとくにそれぞれ

$$\phi_1, \langle, \phi_2, \rangle, \phi_3, \cdots, \phi_{n-2}, \langle, \phi_{n-1}, \rangle, \phi_n$$

及び

$$\psi_1, \langle, \psi_2, \rangle, \psi_3, \cdots, \psi_{n-2}, \langle, \psi_{n-1}, \rangle, \psi_n$$

$(\langle = \alpha, \ \rangle = \alpha^{-1}$ なることに注意$)$

の direct product なるように ϕ_i, ψ_i を選ぶことができる．
以下 H_i $(i=3, 4, \cdots)$ の元についても同様である．たとえば例3の $\langle \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle \phi_4 \phi_5 \rangle$ は $\langle, \langle, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \rangle, \phi_4, \phi_5, \rangle$

の direct product である.

注意, 2.

$$Af(R) := \left\{ \begin{bmatrix} X+a \\ Y+b \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in R \right\}$$

とおくと $Af(R)$ は $G(R)$ の部分群である. 任意の $G(R)$ の元 $\phi = \begin{bmatrix} f(X,Y) \\ g(X,Y) \end{bmatrix}$ について $\Phi = \begin{bmatrix} X - f(0,0) \\ Y - g(0,0) \end{bmatrix}$ とおくと $\Phi \in Af(R)$ で

$$\phi\Phi = \begin{bmatrix} f(X,Y) - f(0,0) \\ g(X,Y) - g(0,0) \end{bmatrix} \in G^0(R)$$

がなりたつ. ゆえ $G(R) = G^0(R)\,Af(R)$ である.

参考文献

[A] T. Asanuma, On R-automorphisms of $R[X,Y]$, 準備中

[N] M. Nagata, On automorphism group of $k[x,y]$, Lectures in Math. Kyoto Univ. 5 (1972)

Primary ideals の分類

吉田憲一　岡山理科大学

序

ある素イデアルに属する Primary ideals 全部を考える時，この Primary ideals の中には毛色の異なるものがある事に気がつく。

Primary ideal はその radical である素イデアルで局所化してもよいので，(R, m) local ring で考えることにする。

今 depth $R <$ dim R とすれば，Rees 環を利用する事によって（詳しい事は述べないが）

$1 =$ depth $R <$ dim R

という条件のもとで考えてよいことがわかる。

ここで R は integral domain とし，K を R の商体としましょう。

そこで研究目的は m-primary ideals にはどんな特徴をもつものが含まれているのでしょうか？という事になります。

まず depth $R = 1$ ですから $m \ni a$ $(a \neq 0)$ とすれば m は aR の prime divisor (embedded) になりますから，aR は

m-primary ideal を primary component に持ちます。
一方，R が次元公式（altitude formula）をみたすものとすれば

$$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ \alpha \in K \mid I_\alpha \supseteq m^\ell ,\ {}^\exists \ell > 0 \}$$

I_α は α の分母 ideal

は R 上 integral な over ring になります。そこで了-primary ideal で conductor ideal となるものも存在します。
この二種類の primary ideals 以外にも変わったものが存在することが本研究でわかってきました。

本論

この研究では次で定まる R 上の integral overring D が重要な役目を果たします。

$$D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ \alpha \in K \mid I_\alpha \supseteq m \}$$

$m \ni a\ (a \neq 0)$ とすれば $aD \subset m$ で
aD は R の ideal，R は Noetherian ですから finitely generated，従って $D/R \cong aD/aR$ より，

$$d = \dim D/R < +\infty$$

dim は R/m-vector space としての次元です。

次の結果はすでに知られているものです，

Proposition 1

$\mathfrak{m} \ni a$, $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{m}$-primary ideal で，$\mathfrak{q} \ni a$.
この時，

$\mathfrak{q}$ は aR の primary component

$\Leftrightarrow$ $D \cap \frac{1}{a}\mathfrak{q} = R$

Proposition 2

$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{m}$-primary ideal で，D の ideal Q があって $Q \cap R = \mathfrak{q}$ であれば，$\mathfrak{q}$ は D の ideal でもある。

Proof

$\mathfrak{q}D \subseteq \mathfrak{m}D \subseteq R$ $\quad\therefore\ \mathfrak{q}D \subseteq Q \cap R = \mathfrak{q}$

従って $\mathfrak{q}$ が principal ideal の primary component であることと，$\mathfrak{q}$ が D の ideal からおちてくる（$\mathfrak{q}$ が conductor ideal であればこの条件をみたす）という二つの条件は相入れない条件であるとわかる。この事は後で numerical な量を primary ideals に入れることではっきりしてくる。

Corollary

$\mathfrak{q}'$ を $\mathfrak{m}$-primary ideal, $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}\mathfrak{q}'$ とすれば $\mathfrak{q}$ は D の ideal，よって $\mathfrak{q}$ は principal ideal の primary component にはなれない。

Remark

簡単な計算で $aD = aR :_K \mathfrak{m}$ であることがわかる。

Definition

$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{m}$-primary ideal, $\mathfrak{q} \ni a$ $(a \neq 0)$ に対して、

$$d_{a,\mathfrak{q}} \overset{\mathrm{def}}{=} \dim aD \cap \mathfrak{q} / aR$$

と定める。

従って $d_{a,\mathfrak{q}} = 0 \Leftrightarrow aD \cap \mathfrak{q} = aR \Leftrightarrow$ $D \cap \frac{1}{a}\mathfrak{q} = R \Leftrightarrow$ $\mathfrak{q}$ は aR の primary component

$$aD \cap \mathfrak{q}/aR \subsetneqq aD/aR \cong D/R \text{ 故}$$

$$0 \leqq d_{a,\mathfrak{q}} \leqq d$$

である。

Remark $\mathfrak{m}$ のえ a を fixed するとき、

$0 \leqq {}^{\forall}l \leqq d$ に対して、${}^{\exists}\mathfrak{q} \ni a$ で

$$d_{a,\mathfrak{q}} = l$$

primary ideal が principal ideal の primary component となるためのもう一つの特徴付けを与えておこう。

Proposition 3

$\mathfrak{q}$ が aR の primary component である必要十分条件は $\mathfrak{q} :_D aR = R$

noetherian ring において、ideal は primary decomposition を持つという証明は、

1) ideal は irreducible ideals による decomposition をもつ

2) irreducible ideal は primary ideal である。

という二段によって構成されている。ここで primary ideal は irreducible ideal とは限らない。実際

$\mathfrak{q} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_t$, $\mathfrak{a}_i$: irreducible ideal, 自然数 t は最小のものとすれば

$$t = \dim \mathfrak{q}:\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$$

で与えられる。

そこで φ: $aR:\mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{q}:\mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{q}:\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$ より

$\mathfrak{q}$ が aR の primary component なら、$aR:\mathfrak{m}/aR \hookrightarrow \mathfrak{q}:\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$

よって、 $\dim \mathfrak{q}:\mathfrak{m}/\mathfrak{q} \geqq d$ 故

Proposition 4

m-primary ideal $\mathfrak{q}$ がある principal ideal の primary component であれば

$\mathfrak{q} = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_t$ $\mathfrak{a}_i$ は irreducible ideal, とすれば $t \geqq d$.

Definition

$\mathfrak{m}$-primary ideal $\mathfrak{q}$ に対して

$$d_{\mathfrak{q}} \overset{\text{def}}{=} \min \{ d_{a.\mathfrak{q}} \;/\; a \in \mathfrak{q} \}$$

と定める。

この時，$d_{\mathfrak{q}} = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{q}$ はある principal ideal の primary component

$$d_{\mathfrak{q}} = d \Leftrightarrow \mathfrak{q} \text{ は } D \text{ の ideal.}$$

$\mathfrak{q} \ni a$ とすれば，

$$aR : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{q} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{q} : \mathfrak{m}/\mathfrak{q}$$

より，$aR \subset \mathfrak{q}$ なので

$$\varphi_{a,} : aR : \mathfrak{m}/aR \longrightarrow \mathfrak{q} : \mathfrak{m}/\mathfrak{q}$$

なる map が得られるが，このとき

$$d_{a.\mathfrak{q}} = \dim \varphi_a$$

従って

Theorem 5

$$d \leqq d_{\mathfrak{q}} + \dim (\mathfrak{q} : \mathfrak{m}/\mathfrak{q})$$

Remark

等号の成り立つ primary ideal $\mathfrak{q}$ が存在する。

Definition

$$d = d_{\mathfrak{q}} + \dim(\mathfrak{q}:\mathfrak{m}/\mathfrak{q})$$

が成り立つとき，$\mathfrak{q}$ を reasonable な ideal と呼ぼう。D の ideal になるものは reasonable ではない。

$\mathfrak{q}$ が reasonable $\Leftrightarrow$ $^\exists a \in \mathfrak{q}$, φ_a は surjective

又 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{q}:\mathfrak{m} = aD + \mathfrak{q}$ であることがわかる。

reasonable な primary ideal は良い性質をもっている。以下では証明はつけずに述べておく。

Theorem 6

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}$ を共に reasonable な primary ideals そして

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{a}:\mathfrak{m}$$

とすれば，$d_{\mathfrak{q}} = d_{\mathfrak{a}} + \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{a})$

よって $d_{\mathfrak{q}} = d_{\mathfrak{a}}$ ならば $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}$

Theorem 7

$\mathfrak{q}$ を reasonable な primary ideal で $d_{\mathfrak{q}} = 0$ とする。$\mathfrak{q} \ni a$ に対して

$\mathfrak{q}$ は aR の primary component

$\Leftrightarrow$ $aD + \mathfrak{q} = \mathfrak{q}D$

Proposition 8

$\mathfrak{m}$ の元 $a\ (a \neq 0)$ を fixed するとき、
$0 \leqq {}^{\forall} l \lneqq d$ に対して、a を含む reasonable な ideal $\mathfrak{q}$ で $d_{\mathfrak{q}} = l$ となるものが存在する。

Proposition 9

$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{q} \lneqq \mathfrak{a} : \mathfrak{m}$ で $\mathfrak{a}D = \mathfrak{a} : \mathfrak{m}$ とする。
今 $\mathfrak{q}$ が reasonable な ideal で

$$d_{\mathfrak{a}} = d_{\mathfrak{q}} - \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{a})$$

が成り立てば $\mathfrak{a}$ は reasonable な ideal である。

Proposition 10

$\mathfrak{q}'$ を $\mathfrak{m}$-primary ideal, $\mathfrak{L} = \mathfrak{q}' : \mathfrak{m}$ として、

$$\mathfrak{m}\mathfrak{L} \lneqq \mathfrak{a} \lneqq \mathfrak{L}$$

とする。今、$\mathfrak{a}$ が reasonable な ideal であれば

$$\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{L}$$

又

$$\dim \mathfrak{L}/\mathfrak{m}\mathfrak{L} = d - d_{\mathfrak{a}} + \dim(\mathfrak{a}/\mathfrak{m}\mathfrak{L})$$

Theorem 11

上の命題の Notation のもとで

$$\mathfrak{m}\mathfrak{L} \lneqq \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{q} \lneqq \mathfrak{L}$$ で

$\mathfrak{a}$ が reasonable ならば $\mathfrak{q}$ もまた reasonable
そして

$$d_{\mathfrak{q}} - d_{\mathfrak{a}} = \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{a})$$

そして
$$\begin{cases} \mathfrak{q} : \mathfrak{m} = \mathfrak{a} : \mathfrak{m} = \mathfrak{L} \\ \mathfrak{m}\mathfrak{q} = \mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{L} \end{cases}$$
が成り立つ。

Remark

$\mathfrak{q}$ を primary ideal とするとき

$$\{\mathfrak{D} \,/\, \mathfrak{q} \supset \mathfrak{D} \text{ で } \mathfrak{D} \text{ は } D \text{ の ideal}\}$$

には最大の元が存在することは容易にわかる。

reasonable な ideal という定義をまえたことによって次の primary ideals の構造体がわかる。この証明は後日論文として発表する際にお知らせ出来るでしょう。

Theorem 12

$\mathfrak{q}'$: $\mathfrak{m}$-primary ideal, $\mathfrak{L} = \mathfrak{q}' : \mathfrak{m}$ とおく。今 $\mathfrak{m}\mathfrak{L} \subsetneqq \mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{L}$ で $\mathfrak{q}$ は reasonable な ideal で $d_{\mathfrak{q}} = 0$ とすれば、$\mathfrak{q}$ に含まれる最大の D の ideal を $\tilde{\mathfrak{D}}$ は

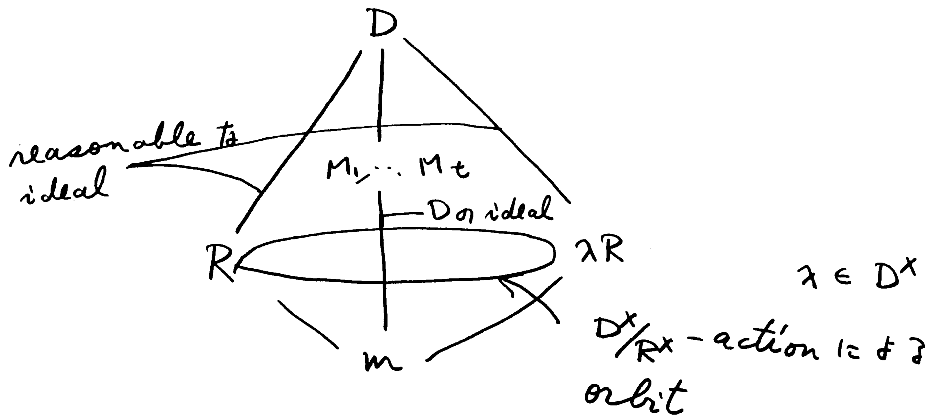
1) $\dim(\mathfrak{q}/\tilde{\mathfrak{D}}) = 1$

そして

2) $\mathfrak{L}/\tilde{\mathfrak{D}} \cong D/\mathfrak{m}$

すなわち、$\mathfrak{L}$ と $\tilde{\mathfrak{D}}$ の間に入る $\mathfrak{m}$-primary ideals は、D の maximal ideals を $M_1 \cdots M_t$ とすれば、

$D^{\times}$, $R^{\times}$ をそれぞれの units 全体の成す group



これを利用すれば、

$\widetilde{\mathfrak{D}} \subsetneq \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \subsetneq \mathfrak{L}_e$ で $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ は reasonable な ideals で $d_{\mathfrak{q}_1} = d_{\mathfrak{q}_2} = 0$ ならば、

$$\exists \lambda \in D^\times, \quad \mathfrak{q}_2 = \lambda \mathfrak{q}_1$$

Remark

$\mathfrak{L}_e \supset \exists \tilde{\mathfrak{q}}$, $d_{\tilde{\mathfrak{q}}} = 0$, であれば、
$\tilde{\mathfrak{q}} \subset \exists \mathfrak{q} \subset \mathfrak{L}_e$ $\mathfrak{q}$ は $d_{\mathfrak{q}} = 0$ なる reasonable な ideal なので定理が成り立つ。

References

1. On birational-integral extension of a rings and prime ideals of depth one, Japan. J. Math., vol. 8, 1982, 49-70.

2. Some properties of irreducible ideals, Bull., Aichi Univ., of Education, vol 35, 1986, 23-26.

3. Conductor ideals and embedded primary components of principal ideals, Kobe J. Math., vol 5, 1988, 193-208.

4. On embedded primary components, Osaka J. Math., vol. 26. 1989, 665-670.

ON AN AACDMZ QUESTION
(A characterization of v-domains)

茨大・理　松田隆輝 (Ryuki Matsuda)
小山高専　岡部　章 (Akira Okabe)

Let D be a (commutative) integral domain with quotient field K. Let $\mathrm{F}(D)$ denote the set of nonzero fractional ideals of D and let $\mathrm{f}(D)$ be the set of finitely generated members of $\mathrm{F}(D)$. For each $A, B \in F(D)$, we set $A :_K B = A : B$. For each $A \in \mathrm{F}(D)$, we set $D : A = A^{-1}$ and $(A^{-1})^{-1} = A^v$. The function on $\mathrm{F}(D)$ defined by $A \longmapsto A^v$ is called v-operation on D. If $(AA^{-1})^v = D$ for each $A \in \mathrm{f}(D)$, then D is called v-domain. If there is a set of prime ideals $\{P_i \mid i \in I\}$ of D such that $D = \bigcap_{i \in I} D_{P_i}$ and each D_{P_i} is a valuation domain, then D is called essential domain. Anderson -Anderson-Costa-Dobbs-Mott-Zafrullah ([1]) investigated characterizations of v-domains and related properties. Among other Theorems, they proved the following,

Theorem 1 ([1, Theorem 2]). For a domain D, the following conditions are equivalent:

(1) D is a v-domin.

(2) $(A^v : B) = (AB^{-1})^v$ for all $A \in f(D)$, $B \in F(D)$.

(3) $(A^v : B^{-1}) = (AB)^v$ for all $A \in f(D)$, $B \in F(D)$.

(4) $(A : B^v) = (AB^{-1})^v$ for all $A \in f(D)$, $B \in F(D)$.

(5) D is integrally closed and $(A : B)^v = (A^v : B^v)$ for all $A \in f(D)$, $B \in F(D)$.

Theorem 2 ([1, Theorem 7]). (1) If D is an essential domain, then

$$(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^v = (A_1)^v \cap \cdots \cap (A_n)^v$$

for all $A_1, \cdots, A_n \in f(D)$.

(2) If D is integrally closed and

$$(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^v = (A_1)^v \cap \cdots \cap (A_n)^v$$

for all $A_1, \cdots, A_n \in f(D)$, then D is a v-domain.

So, by Theorem 2 (2), an integrally closed domain D which is not a v-domain does not satisfy

$$(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^v = (A_1)^v \cap \cdots \cap (A_n)^v$$

for some $A_1, \cdots, A_n \in f(D)$. [2, § 34, Exercise 2] presents an example of an integrally closed domain that is not a v-domain. This raises naturally the following,

Question ([1, p.7]). Does a v-domain D satisfy
$(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^v = (A_1)^v \cap \cdots \cap (A_n)^v$
for all $A_i \in f(D)$?

The aim of this report is to answer the question in the affirmative.

For the proof , we use 'Kronecker function ring' of the v-operation. (We may perhaps be able to prove it without using the Kronecker function ring.) But it seems to the authors that 'Kronecker function ring' is not known much now. So we will take a little long circuit and begin with the definition of general Kronecker function ring.

We refer [2, §32] for Kronecker function rings for domains. Also we refer [4] for Kronecker function rings for rings.

Let R be a commutative ring (with zerodivisors). Let K be the total quotient ring of R. A non-zerodivisor of R is called regular element of R, and an ideal of R containing regular elements is called regular ideal. For $f \in K[X]$, the fractional ideal of R generated by the coefficients of f is denoted by $\mathrm{c}(f)$. If, for each regular element f of $R[X]$, $\mathrm{c}(f)$ is a regular ideal of R, then R is said to have property (C). If each regular ideal of R is generated by regular elements of R, then R is called Marot ring. An integral domain is a Marot ring with property (C). Let $\mathrm{F}(R)$ be the set of nonzero fractional ideals of R and let $\mathrm{f}(R)$ be the set of finitely generated members of $\mathrm{F}(R)$. If $I \longmapsto I^*$ is a mapping of $\mathrm{F}(R)$ into itself with the following properties, it is called a star-operation on R : (1) $(a)^* = (a)$ for each regular element a of K; (2) $(aI)^* = aI^*$ for each regular element a of K and for each $I \in F(R)$; (3) $I \subset I^*$ for each $I \in F(R)$; (4) $I \subset J$ implies $I^* \subset J^*$ for each $I, J \in F(R)$; (5) $(I^*)^* = I^*$ for each $I \in F(R)$. We set $(I^{-1})^{-1} = I^v$ for each $I \in F(R)$. The mapping $I \longmapsto I^v$ of $\mathrm{F}(R)$ is a star-operation. Let $*$ be a star-operation. If $(IJ)^* \subset (IK)^*$ implies $J^* \subset K^*$ for each $J, K \in f(R)$ and for each regular $I \in f(R)$, then $*$ is said to be e.a.b. star-operation. We set

$$R_* = \{f/g \mid f, g \in R[X] - \{0\},\ g \text{ is regular},\ c(f)^* \subset c(g)^*\} \cup \{0\}.$$

Lemma 3 (cf. [2, (32.7)]). Let $*$ be an e.a.b.star-operation on a Marot ring R with property (C). Then R_* is a subring of the total quotient ring of $R[X]$.

R_* is called Kronecker function ring of R with respect to $*$.

Theorem 4. Let $*$ be an e.a.b.star-operation on a Marot ring R with property (C). Assume that $(AA^{-1})^* = R$ for each regular $A \in f(R)$. Then we have

$(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^* = (A_1)^* \cap \cdots \cap (A_n)^*$

for all regular $A_i \in f(R)$.

Proof. Let R_* be the Kronecker function ring of R with respect to $*$. Choose elements $a_{i1}, \cdots, a_{ik(i)}$ of K such that $A_i = (a_{i1}, \cdots, a_{ik(i)})R$ for $1 \leq i \leq n$. We set

$f_i = a_{i1}X + a_{i2}X^2 + \cdots + a_{ik(i)}X^{k(i)}$

for $1 \leq i \leq n$. Since, for each $j, a_{ij}/f_i \in R_*$, we have $A_iR_* = f_iR_*$ for $1 \leq i \leq n$. Set $h_i = f_1 \cdots f_{i-1}f_{i+1} \cdots f_n$, and let d$(i)$ be the degree of h_i for $1 \leq i \leq n$. We set

$h_1 + h_2X^{d(1)} + h_3X^{d(1)+d(2)} + \cdots + h_nX^{d(1)+\cdots+d(n-1)} = g.$

Since, for each $j, h_j/g \in R_*$, we have $(h_1, \cdots, h_n)R_* = gR_*$. Hence we have

$(1/f_1, \cdots, 1/f_n)R_* = (g/(f_1 \cdots f_n))R_*.$

It follows

$f_1R_* \cap \cdots \cap f_nR_* = ((f_1 \cdots f_n)/g)R_*.$

Now let a be a regular element of K contained in

$(A_1)^* \cap \cdots \cap (A_n)^* = c(f_1)^* \cap \cdots \cap c(f_n)^*.$

Then, since $a/f_i \in R_*$ for each i, we have

$a \in f_1R_* \cap \cdots \cap f_nR_* = ((f_1 \cdots f_n)/g)R_*.$

It follows $ag/(f_1 \cdots f_n) \in R_*$. Hence we have $ac(g)^* \subset c(f_1 \cdots f_n)^*$. Then we have, for each i,

$a \in a(c(g)c(g)^{-1})^* \subset (c(f_1 \cdots f_n)c(g)^{-1})^* = (c(f_ih_i)c(h_1)$

$+ \cdots + c(h_n))^{-1})^* \subset (c(f_1) \cap \cdots \cap c(f_n))^* = (A_1 \cap \cdots \cap A_n)^*.$

Therefore $a \in (A_1 \cap \cdots \cap A_n)^*$. It follows

$(A_1)^* \cap \cdots \cap (A_n)^* = (A_1 \cap \cdots \cap A_n)^*.$

Lemma 5 ([3, Theorem 5]). The following conditions are equivalent for a Marot ring R with property (C). (1) The v-operation on R is e.a.b. (2) $A^v : A^v = R$ for each regular $A \in f(R)$. (3) $(AA^{-1})^v = R$ for each regular $A \in f(R)$.

If the v-operation on R is e.a.b., then R is called v-ring.

Theorem 6. Let R be a Marot ring with property (C). Then R is a v-ring if and only if R is integrally closed and
$(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^v = (A_1)^v \cap \cdots \cap (A_n)^v$
for all regular $A_i \in f(R)$.

Proof. The necessity follows by Theorem 4 and Lemma 5. The sufficiency: Let A be a finitely generated regular ideal of R. Choose regular elements b_i such that $A = (b_1, \cdots, b_n)R$. Easily we see the following two facts. 1 Since R is integrally closed, $A : A = R$. 2 For each regular $B \in F(R)$, B^v is the intersection of the principal fractional ideals of R containing B. Now, let (x) be a principal fractional ideal of R containing AA^{-1}. Then $x^{-1}A \subset A^v$, so that
$x^{-1} \in A^v : A = \bigcap_1^n (A^v : Rb_i) = \bigcap_1^n (1/b_i)A^v = (\bigcap_1^n (1/b_i)A)^v$
$= (A : A)^v = R.$
Therefore $R \subset Rx$, hence $(AA^{-1})^v = R$. By Lemma 5, R is a v-ring.

Corollary 7 (The answer to Question). Let D be a domain. Then D is a v-domain if and only if D is integrally closed and
$(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^v = (A_1)^v \cap \cdots \cap (A_n)^v$
for all $A_i \in f(D)$.

Finally we will note a Theorem on Kronecker function rings. For the definitions of terms we confer [4].

Theorem 8 ([4, Theorem 7])). Let R be a Marot ring with property (C). If $*$ is an e.a.b. star-operation on R, then the following conditions are equivalent: (1) R is a Prufer $*$-multiplication ring; (2) $R[X]_{U^*} = R_*$; (3) $R[X]_{U^*}$ is a Prufer ring; (4) R_* is a regular quotient ring of $R[X]$; (5) Each prime ideal of $R[X]_{U^*}$ is the contraction of a prime ideal of R_*; (5r) Each regular prime ideal of $R[X]_{U^*}$ is the contraction of a prime ideal of R_*; (6r) Each regular prime ideal of $R[X]_{U^*}$ is the extension of a prime ideal of R; (7) Each valuation overring of R_* is of the form $R[X]_{[PR[X]]}$, where P is a prime ideal of R such that $R_{[P]}$ is a valuation ring of K; (8) R_* is a flat $R[X]$-module.

REFERENCES

[1] D.D.Anderson,D.F.Anderson,D.L.Costa,D.E.Dobbs,J.L.Mott and M.Zafrullah: Some characterizations of v-domains and related properties, Colloquium Math. 58(1989),1-9.

[2] R. Gilmer: Multiplicative Ideal Theory, Marcel Dekker, New York, 1972.

[3] R.Matsuda, Notes on prufer v-multiplication rings, Bull.Fac.Sci., Ibaraki Univ. 12(1980), 9-15.

[4] R.Matsuda, On some open questions and related results in ideal theory, Proc. 7-th. Sympos on Commutative Ring Theory, 1985, 34-41.

Normal complete local rings with multiplicity 3 over a field of characteristic zero are Cohen-Macaulay

Shin Ikeda (岐阜教育大学教育)

Let (A,m) be a Noetherian local ring and let $e(A)$ be the multiplicity of A. Let us recall some results about the Cohen-Macaulay property of the normal rings with small multiplicity.

(1) A unmixed local rings A with $e(A) = 1$ is regular.

(2) A complete normal local ring A with $e(A) = 2$ is Cohen-Macaulay if it contains a regular local subring S such that A is a finite S-module and $\mathrm{rank}_S A = 2$. In particular, A is Cohen-Macaulay if it contains a field. The Cohen-Macaulay property of complete noraml local rings with multiplicity 2 is a consequence of the monomial conjecture.

(3) J. Koh constructed a non-Cohen-Macaulay complete normal local ring A with $e(A) = 3$ such that $ch(A) = 0$ and $ch(A/m) = 3$. A Noetherian ring is normal if and only if A satisfies S_2 and R_1 of Serre. M. Amasaki gave an example of non-Cohen-Macaulay Buchsbaum local domain A with $e(A) = 3$ and S_2. But his example is not normal and contains a field. The auther does not know if the Cohen-Macaulay property of normal local rings with multiplicity 3 is a consequence of the monomial conjecture.

(4) Let k be a field of $ch(k) = 0$ and let $A = k[[X,Y,Z,U,V,W]]/P$, where P is an ideal generated by $X^3 + Y^3 + Z^3$, $U^3 + V^3 + W^3$, $X^2U + Y^2V + Z^2W$, $XU^2 + YV^2 + ZW^2$, $XV - YU$, $XW - ZU$, $YW - ZV$. Then A is a normal ring with $e(A) = 6$, but A is not Cohen-Macaulay.

The aim of this note is to show that complete normal local rings with multiplicity 3 are Cohen-Macaulay if they contain a field of characteristic 0. We begin with recalling a property of Jacobian ideals.

Lemma 1. Let R be a normal ring and $f(X) \in R[X]$ be a monic polynomial. Let a be a root of $f(X) = 0$ in an extension of the quotient field of R and let R^* be the normalization of $R[a]$. Then $f'(a)R^* \subset R[a]$, where $f'(X) = df(X)/dX$.

Proof. See [N],(10.18).

Lemma 2. Let k be a field with $ch(k) = 0$, $S = k[[X_1,\ldots,X_n]]$ and f a prime element of S. Put $R = S/fS$. Let A be the normalization of R and $C_{A/R}$ the conductor. Then $(\partial f/\partial X_1,\ldots,\partial f/\partial X_n)R \subset C_{A/R}$.

Proof. By a coordinate change, we may assume that, for $i = 1,2,\ldots,n$,

$$f(0,\ldots,0,X_i,0,\ldots0) \neq 0,$$

Then, by Weierstrass preparation theorem, there is a unit u_i of S such that

$$u_i f = X_i^m + a_1 X_i^{m-1} + \ldots + a_m,$$

where $a_i \in k[[X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n]]$. Then, the assertion follows from Lemma 1.

The following result plays a key role in the sequel.

Lemma 3. Let k and S be the same as in Lemma 2. Let f be a non-unit and p a prime element of S. Suppose that p divides $\partial f/\partial X_i$ for all $0 \leq i \leq n$. Then p^2 divides f.

Proof. Let m be the maximal ideal of S and let $l = \max\{i;\ p \in m^i\}$. By a coordinate change we may assume that $p(0,\ldots,0,X_i,0,\ldots,0) = a_i X_i^l + \ldots$, $0 \neq a_i \in k$, for all i. By [SS],(8.11), f is integral over the Jacobian ideal $(\partial f/\partial X_1,\ldots,\partial f/\partial X_n)S$ and consequently f is integral over pS. Since S is normal, f is an element of pS. Set $f = pg$, for some $g \in S$. Then we have $\partial f/\partial X_i = (\partial p/\partial X_i)g + p(\partial g/\partial X_i)$.

For all i, p divides $(\partial p/\partial X_i)g$. Since p is a prime element of S, p

divides $\partial p/\partial X_1$ or g, but the former is impossible. Therefore f is divisible by p^2.

We now state the main result of this note.

Theorem 4. Let k be a field with $ch(k) = 0$ and $A = k[[x_1,..,x_n]]$ be a complete normal local domain with $e(A) = 3$. Then A is Cohen-Macaulay.

Proof. Let $n = emb(A)$, the embedding dimension of A, and m the maximal ideal of A. We may assume that $q = (x_1,..,x_d)$, $d = \dim A$, is a minimal reduction of m. Put $S = k[[x_1,..,x_d]]$. Then S is a regular local ring and A is a finite S-module such that $e(A) = [Q(A) : Q(S)]$, where $Q(A)$ denotes the quotient field of an integral domian A. We may assume that x_{d+1} does not belong to $Q(S)$. Then $Q(A) = Q(S)(x_{d+1})$. Let $R = S[x_{d+1}]$. Then A is the normalization of R. Let f be a defining equation of R in $S[X_{d+1}]$. We can write $f = X_{d+1}{}^3 + a_1X_{d+1}{}^2 + a_2X_{d+1} + a_3$, for some $a_i \in S$. Putting $y = x_{d+1} + a_1/3$, we have $y^3 + ay + b = 0$ for some $a, b \in S$. Note that $x_1,..,x_d,y$ form a part of a minimal set generators of m. If $R = A$ there is nothing to prove. Suppose tha $A \neq R$ and $C_{A/R} \neq R$. Put $I = C_{A/R}$. Then, I is a height 1 unmixed ideal of R and $I \cap S$ is also a height 1 unmixed ideal of S. Since S is factorial, $I \cap S$ is a principal ideal. Let $Ass_S(S/I \cap S) = \{p_1S,..,p_rS\}$, where p_i is a prime element of S. After a change of coordinate of S we can assume that

(*) $p_i(0,..,0,X_j,0,..,0) \neq 0$ for $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq d$.

Claim 1. $P \in Ass(R/I)$, $P \cap S = pS \Rightarrow p \mid a$ and $p^2 \mid b$.

The discriminant $4a^3 + 27b^2$ of $f(Y)$ belongs to I, so, $p \mid 4a^3 + 27b^2$. Then the image of $f(Y)$ in $Q(S/pS)[Y]$ has a multiple root and it is reducible. It is easy to see that $f(Y) \equiv (Y - \alpha)^2(Y + 2\alpha) \bmod (p)$, for some $\alpha \in S_{pS}$ Hence

(**) $(y - \alpha)^2(y + 2\alpha) \in PR_{pS}$.

Case 1. $y + 2\alpha \in PR_{PS}$.

Suppose $y - \alpha \in PR_{PS}$. Then both α and y belong to PR_{PS} . It follows that $a, b \in pS$. By Lemma 2 , $(\partial a/\partial X_i)y + \partial b/\partial X_i \in P$ for all i and hence $p \mid \partial b/\partial X_i$ for all i . By Lemma 3, we have $p^2 \mid b$. Suppose that $y - \alpha \notin PR_{PS}$. But, in this case $PR_{PS} = (y + 2\alpha, p)R_{PS}$. By (**) ,we get $y + 2\alpha \in pR_{PS}$. This shows that R_P is a DVR,which is impossible,because $I \subset P$.

Case 2. $y + 2\alpha \notin PR_{PS}$.

Suppose that $\partial a/\partial X_i \in P$ for $i = 1,2,..,d$. Since $\partial a/\partial X_i y + \partial b/\partial X_i$ belongs to P for $i = 1,2,..,d$, by Lemma 2 ,we get $\partial b/\partial X_i \in P$ for $i = 1,2,...,d$. This implies that $p^2 \mid b$,by Lemma 3 . So,we may assume that $\partial a/\partial X_1 \notin P$. Let $a_1 = \partial a/\partial X_1$ and $b_1 = \partial b/\partial X_1$. Then, $y - \alpha$ and $y + b_1/a_1$ belong to P and we have $\alpha + b_1/a_1 \in PR_{PS}$. Therefore,we get

(***) $\quad f(Y) \equiv (Y + b_1/a_1)^2(Y - 2b_1/a_1) \bmod (p)$.

Let y_1, y_2, y_3 be the roots of $f(Y)$ in an algebraic extension of $Q(S)$. Then we can identify R with $S[y_1]$. Let $R^* = S[y_1, y_2, y_3]$. R^* is a finite module over R . Let P^* be a prime ideal of R^* such that $P = P^* \cap R$. By Case 1 ,we may assume that $y_i - 2b_1/a_1 \notin P^*R^*_{PS}$ for $i = 1,2,3$. By (***), we get $y_i + b_1/a_1 \in P^*R^*_{PS}$ for $i = 1,2,3$. Since $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, we get $b_1/a_1 \in P^*R^*_{PS}$ and we have $b_1/a_1 \in P^*R^*_{PS} \cap S_{PS} = pS_{PS}$. Therefore, $b_1 \in pS$. $a_1 \notin P$ and $a_1 y + b_1 \in P$ imply that $y \in P$. From $y^3 + ay + b = 0$,we get $b \in P$ and $p \mid b$.

Put $b = ps$ for some $s \in S$. Then $b_1 = (\partial p/\partial X_1)s + p(\partial s/\partial X_1)$ Since $p \mid b_1$,we get $p \mid s(\partial p/\partial X_1)$. By (*) , we get $p \mid s$. Therefore $p^2 \mid b$ and this completes the proof of the claim.

Now, $f(Y)$ can be written in the form

$$f(Y) = Y^3 + caY + c^2b ,$$

where a,b,c are elements of S which satisfy the following conditions:

(1) If $P \in \mathrm{Ass}(R/I)$ and $pS = P \cap S$ then $p \mid c$.

(2) There is no prime element p of S such that $p^2 \mid c$.

(3) There is no prime element p of S such that $p \mid a$, $p \mid b$ and $p \mid c$.

In fact, (1) is a consequence of Claim 1 . Suppose that (2) or (3) does not hold. Then, for some a' , b' $\in S$ we have $y^3 + p^2a'y + p^3b' = 0$. Since A is the normalization of R , we get $y/p \in A$. This implies that

$$y \in (x_1, \ldots, x_d)A$$

which is impossible, because $x_1, \ldots, x_d, y$ form a part of a minimal set generators of m . Putting $z = bc/y$, we get:

(4) $y^3 + acy + bc^2 = 0$,

(5) $z^2 + az + by = 0$,

(6) $yz = bc$,

(7) $y^2 + ac + cz = 0$.

Let $B = S[y,z]$ and $B' = S[Y,Z]/(Y^2 + ac + cZ, YZ - bc, Z^2 + aZ + bY)$, where Y , Z are indeterminates over S . There is a natural surjection $\phi : B' \to B$. Let $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$. Then it is easy to see that

$$3 = e(\underline{x} \ ; B) \le e(\underline{x} \ ; B') \le l(B'/\underline{x}B') \le 3 .$$

Therefore, B' is Cohen-Macaulay. Since $e(\underline{x} \ ; B) = e(\underline{x} \ ; B')$, $\dim \ker\phi < d$ and it follows that $\ker\phi = (0)$. Hence B is Cohen-Macaulay.

Claim 2. B is normal.

Clearly, this completes the proof of Theorem 4. In order to prove the claim, it is enough to show that B_P is a DVR for any height 1 prime ideal P of B . If I is not contained in P we have $B_P = A_P$. We may assume that P contains I and $3y^2 + ac \in P$. Let p be a prime element of S such that $pS = P \cap S$. Then, we have $p \mid c$ by (1) . Therefore $y \in P$. By (5), we get $z(z + a) \in P$.

Case I. z , $z + a$ $\in P$.

In this case, $P = (z,y,p)B$ and $p \mid a$. By (5), we get $z \in yB_P$. By (2) and (6), we get $p \in zB_P$. Hence, $PB_P = zB_P$

Case II. $z \in P$, $z + a \notin P$.

In this case, $P = (y,z,p)$ and $a \notin pS$ .By (5), we get $z \in yB_P$ .By (2) and (7) we get $p \in yB_P$ .Hence. $PB_P = yB_P$.

Case III. $z + a \in P$, $z \notin P$.

In this case, $P = (z + a,y,p)$ .By (5),we get $z + a \in yB_P$ and by (6), $y \in pB_P$,because $p \mid c$. Hence, $PB_P = pB_P$.

In any case, B_P is a DVR,as claimed.

Corollary 5. Let $R = k[[X_1,\ldots,X_n]]$ be a formal power series ring over a field k with $ch(k) = 0$. Let L be a Galois extension of $Q(R)$ whose Galois group is isomorphic to the symmetric group S_3 of degree 3 . Then the integral closure of R in L is Cohen-Macaulay.

Proof. Let A be the integral closure of R in L . Let H and K be the subgroups of S_3 generated by (12) and (123) ,respectively. Then the invariant subrings A^H and A^K are normal. $e(\underline{X} ; A^H) = [Q(A^H) : Q(R)] = 3$ and $e(\underline{X} ; A^K) = [Q(A^K) : Q(R)] = 2$,where $\underline{X} = (X_1,\ldots,X_n)$. Therefore, A^H and A^K are local rings whose muitiplicities are at most 3 . By Theorem 4, they are Cohen-Macaulay. S_3 acts on $A/\underline{X}A$ and hence we can regard it as a linear representation of S_3 over k . Let (ρ_i ,V_i) , $i = 1,2,3,$ be irreducible representation of S_3 given by $\rho_1(x) = 1$, $\rho_2(x) = \mathrm{sgn} x$ for all $x \in S_3$, and

$$\rho_3((12))e_1 = -e_1 , \quad \rho_3((12))e_2 = e_1 + e_2 , \quad \rho_3((23))e_1 = e_1 + e_2 ,$$
$$\rho_3((23))e_2 = -e_2 ,$$

where e_1 ,e_2 is a basis of V_3 . Then,as a linear representation of S_3, $A/\underline{X}A$ is equivalent to a direct sum of V_1,V_2,V_3 . Let n_1 , n_2 , n_3 be the multiplicity of V_1, V_2 , V_3 in $A/\underline{X}A$,respectively. Since A^H (resp. A^K) is a direct summand of A as A^H (resp. A^K)-module,we get $(A/\underline{X}A)^H = A^H/\underline{X}A^H$ and $(A/\underline{X}A)^K = A^K/\underline{X}A^K$. Since R is the invariant subring of A with respect to

S_3 ,we have $n_1 = 1$. It is easy to verify that $\dim_k V_2^H = 0$, $\dim_k V_2^K = 1$, $\dim_k V_3^H = 1$, $\dim_k V_3^K = 0$. From $l(A^H/\underline{X}A^H) = 3$ and $l(A^K/\underline{X}A^K) = 2$,we get $n_2 = 1$ and $n_3 = 2$. $l(A/\underline{X}A) = n_1 + n_2 + 2n_3 = 6 = e(\underline{X} ; A)$. Thus, A is Cohen-Macaulay.

References

[I] S. Ikeda, Conductor ideals of Gorenstein domains and local rings with multiplicity 2, preprint.

[N] M. Nagata, Local Rings, Interscience, 1962.

[SS] G. Scheja and U. Storch, Differentielle Eigenschaften der Localisierungen analytischer Algebren. Math. Ann. 197 (1972), 137-170.

正規可換半群環の交叉複体

東北大学理学部　　石田正典

序文

交叉ホモロジー群は１０年以上前にゴレスキーとマクファーソンによって導入された位相的な不変量である [GM2]。

X を正規な複素解析空間または $\mathbf{C}$ 上の正規代数多様体で x をその１点とする。X の点 x での交叉ホモロジー群の標準的な定義があるのかどうかは不明であるが、次のように定めるのが適当と思われる。

$n := \dim X$ とし、$\mathbf{p} = (\mathbf{p}(2), \mathbf{p}(4), \cdots, \mathbf{p}(2n-2))$ を perversity つまり $\mathbf{p}(2) = 0$ かつ $i = 1, 2, \cdots, n-2$ について $\mathbf{p}(2i) \leq \mathbf{p}(2i+2) \leq \mathbf{p}(2i) + 2$ を満たす数列とする。X の $\mathbf{C}$ 上の交叉複体 $\mathrm{IC}^\bullet_{\mathbf{p}}(X)$ ([GM2, 2.1] 参照) は $\mathbf{p}$ に $\mathbf{p}(2n)$ を追加することにより定義されるが $\mathbf{p}(2n)$ の値が関係しているのは X の古典的位相での離散的な点集合なので X を x の適当な開近傍で置き換えることにより $\mathrm{IC}^\bullet_{\mathbf{p}}(X \setminus \{x\})$ は $\mathbf{p}(2n)$ によらないと仮定出来る。このとき、開いた埋め込み $i : X \setminus \{x\} \to X$ での順像 $F^\bullet := Ri_* \mathrm{IC}^\bullet_{\mathbf{p}}(X \setminus \{x\})$ の x での茎の各コホモロジー群 $\mathrm{H}^i(F^\bullet_x)$ は $\mathbf{Q}$ 上有限次元のベクトル空間で $i \in [-2n, -1]$ 以外では $\{0\}$ となる。$\mathcal{O}_{X,x}$ を $x \in X$ の解析的または代数的局所環とする。X の x の近傍での位相的な構造は $\mathbf{C}$ 代数としての

局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ で決まるので、各 $i\in\mathbf{Z}$ について

$$\mathrm{IH}_i^{\mathbf{p}}(\mathcal{O}_{X,x}):=\mathrm{H}^{-i}(F_x^\bullet)$$

と定義する。[GM2, 2.1] では局所交叉ホモロジー $\mathrm{IH}_i^{\mathbf{p}}(X,X\setminus\{x\})$ が定義されているが

$$\mathrm{IH}_i^{\mathbf{p}}(\mathcal{O}_{X,x})=\mathrm{IH}_i^{\mathbf{p}}(X,X\setminus\{x\})\qquad i\geq 2n-\mathbf{p}(2n)$$

が成り立つ。$i<2n-\mathbf{p}(2n)$ の場合は $\mathrm{IH}_i^{\mathbf{p}}(X,X\setminus\{x\})=\{0\}$ であるが ([GM2, 2.4] 参照) $\mathrm{IH}_i^{\mathbf{p}}(\mathcal{O}_{X,x})$ はそうとは限らない。$\mathbf{m}(i):=i-1$ で定義される middle perversity $\mathbf{m}$ に対して 2 つの perversities $\mathbf{p},\mathbf{q}$ が $\mathbf{p}+\mathbf{q}=2\mathbf{m}$ を満たすとすると双対性定理により $\mathrm{IH}_i^{\mathbf{p}}(\mathcal{O}_{X,x})$ と $\mathrm{IH}_{2n+1-i}^{\mathbf{q}}(\mathcal{O}_{X,x})$ は互いに双対な $\mathbf{Q}$ ベクトル空間となる。

本来、位相的な不変量なので一般の正規 $\mathbf{C}$ 局所環に対して交叉ホモロジーを代数的に記述することは困難と思われる。

ここでは、x がトーリック多様体のトーラスの作用での固定点の場合、言い換えれば $\mathcal{O}_{X,x}$ がある正規可換半群環の斉次極大イデアルによる局所化である場合について、$\mathrm{IH}_i^{\mathbf{p}}(\mathcal{O}_{X,x})$ の代数的な記述を行なう。

このような点はある実空間 $N_{\mathbf{R}}$ の凸有理多角錐体に対応する。結果としては、$N_{\mathbf{Q}}$ の外積代数上の有限生成次数付き加群からなるある有限複体がこの錐体から一意的に定まり、そのコホモロジー群により局所環の交叉ホモロジー群が記述される (定理 3.1 参照)。

手法としては [BBD] の一般論を踏襲している訳であるが、外積代数上の次数付き加群という非常にコンパクトで代数的なカテゴリーの範囲で交叉ホモロジーの理論が展開されている所に注目して頂きたい。

なお、この話の詳細は [I3] を参照して下さい。

1　外積代数上の次数付き加群

r を負でない整数とし N と M を互いに双対な階数 r の自由 $\mathbf{Z}$ 加群とする。この時、自然な $\mathbf{Z}$ 上の双 1 次写像 $\langle\ ,\ \rangle : M \times N \longrightarrow \mathbf{Z}$ 及びその拡張である $\mathbf{R}$ 上の双 1 次写像 $\langle\ ,\ \rangle : M_{\mathbf{R}} \times N_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{R}$ が得られる。

ここでは $N_{\mathbf{R}}$ の錐体は特に断らない限り強凸有理多角錐体とする。つまり、錐体 σ は N のある有限部分集合 $\{n_1, \cdots, n_s\}$ により $\sigma = \mathbf{R}_0 n_1 + \cdots + \mathbf{R}_0 n_s$ と書け、しかも $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ となっている。原点だけからなる錐体 $\{0\}$ を $\mathbf{0}$ と書く。

錐体 $\sigma \subset N_{\mathbf{R}}$ に対して $N(\sigma) := N \cap (\sigma + (-\sigma))$ と置く。従って $N(\sigma)_{\mathbf{R}}$ は $\sigma + (-\sigma) \subset N_{\mathbf{R}}$ に等しい。また $\sigma^{\perp} := \{x \in M_{\mathbf{R}}\ ;\ \langle x, a\rangle = 0, \forall a \in \sigma\}$ 及び $M[\sigma] := M \cap \sigma^{\perp}$ と定める。その時 $N(\sigma)_{\mathbf{R}} \subset N_{\mathbf{R}}$ と $M[\sigma]_{\mathbf{R}} \subset M_{\mathbf{R}}$ は上記の双 1 次写像について互いに直交補空間になっている。

A を $\mathbf{Q}$ 上の外積代数 $\bigwedge^{\bullet} N_{\mathbf{Q}}$ とし A^* を $\bigwedge^{\bullet} M_{\mathbf{Q}}$ とする。A^* は $A^*_i := \bigwedge^i M_{\mathbf{Q}}$ により通常の次数付けをするが A は $A_i := \bigwedge^{-i} N_{\mathbf{Q}}$ で次数を定義する。

$N_{\mathbf{R}}$ の錐体 σ に対して $A(\sigma) := \bigwedge^{\bullet} N(\sigma)_{\mathbf{Q}}$ 及び $A^*[\sigma] := \bigwedge^{\bullet} M[\sigma]_{\mathbf{Q}}$ と定義する。これらは、それぞれ A と A^* の斉次部分 $\mathbf{Q}$ 代数である。

C を A または、ある σ についての $A(\sigma)$ とし $\mathrm{GM}(C)$ を有限生成次数つき C 加群のカテゴリーとする。但し写像は次数零の斉次準同型とする。なお $V \in \mathrm{GM}(C)$ は $p, q \in \mathbf{Z}$ 及び斉次元 $a \in C_p, x \in V_q$ に対して

$$xa = (-1)^{pq} ax$$

なる関係で両側加群となっていると考えられる。

反変関手 $\mathrm{D} : \mathrm{GM}(C) \to \mathrm{GM}(C)$ を次のように定義する。

$C = A$ のときは $c := r$ で、$C = A(\sigma)$ のときは $c := \dim \sigma$ とする。このとき

$C_{-c} \simeq \mathbf{Q}$ であるが、これを次数つき $\mathbf{Q}$ 加群と考え $V \in \mathrm{GM}(C)$ に対して

$$\mathrm{D}(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(V, C_{-c})$$

と定義する。但し、$\mathrm{D}(V)$ の左 C 加群の構造は V の右 C 加群の構造から引き起こされるものとする。

なお c が偶数の場合は $\mathrm{D}(V)$ の右 C 加群の構造は V の左 C 加群の構造から得られたものとは異なる。$\mathbf{Q}$ ベクトル空間としての自然な同型 $\varphi : V \to \mathrm{D}(\mathrm{D}(V))$ も c が偶数のときは C 同型でないので、このときは標準的な C 同型として $(-1)^i\varphi_i : V_i \to \mathrm{D}(\mathrm{D}(V))_i$ の直和を考える。

D が完全関手であることから次の補題を得る。これは双対定理の基本となるものである。

補題 1.1 $V^\bullet$ を $\mathrm{GM}(C)$ の有限複体とする。このとき $p \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{D}(V^\bullet)) = \mathrm{D}(\mathrm{H}^{-p}(V^\bullet))$$

が成り立つ。特に $p, q \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\dim \mathrm{H}^p(\mathrm{D}(V^\bullet)) = \dim \mathrm{H}^{-p}(V^\bullet)_{-q-c}$$

が成り立つ。

$V \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ に対して $V_A := V \otimes_{A(\sigma)} A$ と定義する。V_A は $\mathrm{GM}(A)$ の対象となる。また $N_{\mathbf{R}}$ の錐体 σ, ρ が $\sigma \prec \rho$ であるとき $V \in \mathrm{GM}(\sigma)$ に対して $V_{A(\rho)} := V \otimes_{A(\sigma)} A(\rho)$ と定める。このとき $V \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ に対して $\mathrm{D}(V_A) = \mathrm{D}(V)_A$ 及び $\mathrm{D}(V_{A(\rho)}) = \mathrm{D}(V)_{A(\rho)}$ が成り立つ。

$(V^\bullet, d_1)$ を $\mathrm{GM}(C)$ の加群の有限複体とし $V^i = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} V^i_j$ を V^i の次数付けとする。$i, j \in \mathbf{Z}$ に対して d^i_1 の次数 j の斉次成分を $d^{i,j}_1 : V^i_j \to V^{i+1}_j$ とする。各整数 k

に対して $V^\bullet$ の次数付き下方切断 $\mathrm{gt}_{\leq k} V^\bullet$ を

$$\mathrm{gt}_{\leq k} V^i_j := \begin{cases} V^i_j & \text{if} \quad i+j<k \\ \mathrm{Ker}\, d_1^{i,j} & \text{if} \quad i+j=k \\ \{0\} & \text{if} \quad i+j>k \end{cases}$$

で定義される $V^\bullet$ の部分複体、また次数付き上方切断 $\mathrm{gt}^{\geq k} V^\bullet$ を

$$\mathrm{gt}^{\geq k} V^i_j := \begin{cases} \{0\} & \text{if} \quad i+j<k \\ \mathrm{Coker}\, d_1^{i-1,j} & \text{if} \quad i+j=k \\ V^i_j & \text{if} \quad i+j>k \end{cases}.$$

で定義される $V^\bullet$ の商複体とする。C が負に次数付けされていることから $\mathrm{gt}_{\leq k} V^\bullet$ と $\mathrm{gt}^{\geq k} V^\bullet$ は $\mathrm{GM}(C)$ の有限複体となる。

定義より明らかに

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{gt}_{\leq k} V^\bullet)_q = \begin{cases} \mathrm{H}^p(V^\bullet)_q & \text{for } p+q \leq k \\ \{0\} & \text{for } p+q>k \end{cases}$$

及び

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{gt}^{\geq k} V^\bullet)_q = \begin{cases} \{0\} & \text{for } p+q<k \\ \mathrm{H}^p(V^\bullet)_q & \text{for } p+q \geq k \end{cases}$$

が成り立つ。

2 扇上の外積加群

N が階数 r の自由 Z 加群であるから、代数的トーラス $T_N := \mathbf{C}^* \otimes N$ は $(\mathbf{C}^*)^r$ と同型である。

T_N を開部分多様体として含み、しかも T_N が代数的に作用している正規代数多様体を T_N をトーラスとするトーリック多様体という。

トーリック多様体の一般論については [O] を参照して頂きたいが、次に述べる扇が重要な役目を果たす。

$N_{\mathbf{R}}$ の錐体の空でない集合 Δ が次の条件を満たす時、扇と呼ばれる。

(1) $\rho \in \Delta, \sigma \prec \rho \Rightarrow \sigma \in \Delta$

(2) $\sigma, \tau \in \Delta \Rightarrow \sigma \cap \tau \prec \sigma, \tau$

Δ を有限扇とする。

各 $\sigma \in \Delta$ に対して $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ はアーベル圏であるが、これらをすべて部分圏として含む加法圏 $\mathrm{GEM}(\Delta)$ を次のように定義する。

$\mathrm{GEM}(\Delta)$ の対象は $L(\sigma) \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ の$\sigma \in \Delta$ についての集まり $L = (L(\sigma))$ で、射 $f : L \to K$ は $\sigma \prec \rho$ であるすべての組 $(\sigma, \rho) \in \Delta \times \Delta$ についての $A(\sigma)$ 準同型 $f_{\sigma/\rho} : L(\sigma) \to K(\rho)$ の集まり $f = (f_{\sigma/\rho})$ とする。

ρ を Δ の元とする。$L \in \mathrm{GEM}(\Delta)$ に対して

$$i_\rho^*(L) := \bigoplus_{\sigma \in F(\rho)} L(\sigma)_{A(\rho)}$$

及び

$$i_\rho^!(L) := L(\rho)$$

と定義することにより共変関手

$$i_\rho^* : \mathrm{GEM}(\Delta) \longrightarrow \mathrm{GM}(A(\rho))$$

及び

$$i_\rho^! : \mathrm{GEM}(\Delta) \longrightarrow \mathrm{GM}(A(\rho))$$

が得られる。これらの関手は位相空間上の層の理論で用いられるものの類似である ([BBD, 1.4] 参照)。

$\Delta\setminus\{\mathbf{0}\}$ から $\mathbf{Z}$ への写像を Δ の perversity と呼ぶことにする。ここでは [GM2] で与えられているような条件はつけない。middle perversity に対応するのは $\Delta\setminus\{\mathbf{0}\}$ で常に零となる perversity である。

定理 2.1 $\mathbf{p}$ を Δ の perversity とする。このとき、次の条件を満たす GEM(Δ) での複体 $\mathrm{ic}^{\bullet}_{\mathbf{p}}(\Delta)$ が存在する。

(1) $\mathrm{ic}^{0}_{\mathbf{p}}(\mathbf{0})=\mathbf{Q}$ かつ $i\neq 0$ に対し $\mathrm{ic}^{i}_{\mathbf{p}}(\mathbf{0})=\{0\}$ となる。

(2) すべての $\sigma\in\Delta\setminus\{\mathbf{0}\}$ について $\mathrm{gt}_{\leq\mathbf{p}(\sigma)}\, i^{!}_{\sigma}(\mathrm{ic}^{\bullet}_{\mathbf{p}}(\Delta))$ は非輪状である。

(3) すべての $\sigma\in\Delta\setminus\{\mathbf{0}\}$ について $\mathrm{gt}_{\geq\mathbf{p}(\sigma)}\, i^{*}_{\sigma}(\mathrm{ic}^{\bullet}_{\mathbf{p}}(\Delta))$ は非輪状である。

ここで複体が非輪状とはコホモロジー群がすべて零になることである。

［構成法］$\Delta=\{\mathbf{0}\}$ であれば存在は明らかである。そうでない場合は最も次元の高い $\pi\in\Delta$ をとり、$\mathrm{ic}^{\bullet}_{\mathbf{p}}(\Delta\setminus\{\pi\})$ がすでに構成されていると仮定して $\mathrm{ic}^{\bullet}_{\mathbf{p}}(\Delta)$ を作ればよい。

GM($A(\pi)$) での複体 $V^{\bullet}$ を

$$V^{\bullet}:=(i^{*}_{\pi}\,\mathrm{ic}^{\bullet}_{\mathbf{p}}(\Delta\setminus\{\pi\}))[-1]$$

と定義する。ここで $[-1]$ は複体を右に 1 つシフトすることを意味し、境界作用素は -1 倍したもので置き換えられる。そして

$$\mathrm{ic}^{\bullet}_{\mathbf{p}}(\pi):=\mathrm{gt}^{\geq\mathbf{p}(\pi)+1}\,V^{\bullet}$$

と置いて、各 $i\in\mathbf{Z}$ について $\mathrm{ic}^{i}_{\mathbf{p}}(\Delta)\to\mathrm{ic}^{i+1}_{\mathbf{p}}(\Delta)$ を自然に定義すると $\mathrm{ic}^{\bullet}_{\mathbf{p}}(\Delta)$ が得られる。

一般の位相空間上の交叉複体は複体の順像と切断を繰り返し行なって構成される ([GM2, 3.1] または [BBD, Prop.2.1.11] 参照)。上記の $\mathrm{ic}^{\bullet}_{\mathbf{p}}(\Delta)$ の構成法は、このドゥリーニュによるものの類似である。

定理の $\mathrm{ic}^\bullet_{\mathbf{p}}(\Delta)$ は一意的ではないが、上記の構成法に従って出来たものは一意的である。また、$\mathrm{ic}^\bullet_{\mathbf{p}}(\Delta)$ は高々有限個の $\mathbf{Q}$ 上の有限次元ベクトル空間と線形写像からなるので、有限個の有理数で記述出来る対象である。従って、次元と錐体の数が少ない場合は計算機による処理も可能と思われる。

3 代数的交叉複体と交叉ホモロジー

π を $N_{\mathbf{R}}$ の最大次元つまり r 次元の錐体とする。正規半群環 $\mathbf{Q}[M\cap\pi^\vee]$ は唯1つの斉次極大イデアル $\mathbf{Q}[M\cap(\pi^\vee\setminus\{0\})]$ を持つ。Z をアフィントーリック多様体 $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Q}[M\cap\pi^\vee]$ とし x をその極大イデアルに対応する点とする。

この場合は $\Delta := F(\pi)\setminus\{\pi\}$ を考えればよい。

$X := Z\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$ とし $R(\pi) := \mathcal{O}_{X,x}$ とすると、最初に述べたように $R(\pi)$ の交叉ホモロジー群 $\mathrm{IH}^{\mathbf{p}}_i(R(\pi))$ が各 $i\in\mathbf{Z}$ に対して定義される。perversity $\mathbf{p}=(\mathbf{p}(2),\mathbf{p}(4),\cdots,\mathbf{p}(2r-2))$ に対し、Δ についての同じ記号の perversity $\mathbf{p}$ を各 $\sigma\in\Delta\setminus\{0\}$ に対し $\mathbf{p}(\sigma):=\mathbf{p}(2\,\mathrm{codim}\,\sigma)-\mathrm{codim}\,\sigma+1$ で定義する。

定理 3.1 任意の perversity $\mathbf{p}=(\mathbf{p}(2),\mathbf{p}(4),\cdots,\mathbf{p}(2r-2))$ に対して

$$\mathrm{IH}^{\mathbf{p}}_i(R(\pi)) = \bigoplus_{p+q=r-i} \mathrm{H}^p(i_\pi^*\,\mathrm{ic}^\bullet_{\mathbf{p}}(F(\pi)\setminus\{\pi\}))_q$$

となる。

なお、定理 2.1 の $\mathrm{ic}^\bullet_{\mathbf{p}}(\Delta)$ は一意的ではないが、選び方によらず $i_\pi^*\,\mathrm{ic}^\bullet_{\mathbf{p}}(F(\pi)\setminus\{\pi\})$ は A 加群の複体として擬同型である。

この定理は、序文で述べた $Ri_*\mathrm{IC}^\bullet_{\mathbf{p}}(X\setminus\{x\})$ が次のように代数的に構成できることから得られる。

V をある $\sigma \in F(\pi)$ についての $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ に属する加群とする。$m \in M[\sigma]$ に対して、次数付き $\mathbf{Q}$ ベクトル空間 V_A に複体の構造 $(V_A, d(m))$ を次のように入れる。

各 $i \in \mathbf{Z}$ に対して $(V_A)^i := (V_A)_i$ と置く。$A = \bigwedge^\bullet N_\mathbf{Q}$ 及び $A^* = \bigwedge^\bullet M_\mathbf{Q}$ であったから、A は右内部積により A^* 加群と考えられる。さらに A^* の部分代数 $A^*[\sigma]$ と A の部分代数 $A(\sigma)$ の A への左からの作用は可換であることが示されるので $V_A = V \otimes_{A(\sigma)} A$ は次数付き $A^*[\sigma]$ 加群となる。$m \in M[\sigma]$ は $A^*[\sigma]$ の次数 1 の元であるので、V_A への左からの作用を $d(m)$ と書けば、各 $i \in \mathbf{Z}$ に対し $d(m)((V_A)^i) \subset (V_A)^{i+1}$ となる。また、$m \wedge m = 0$ であるから $d(m)^2 = 0$ である。

$S(\pi) := \mathbf{Q}[M \cap \pi^\vee]$ と置く。各 $m \in M \cap \pi^\vee$ に対応する $S(\pi)$ の元を $\mathbf{e}(m)$ と書くことにする。つまり

$$S(\pi) = \bigoplus_{m \in M \cap \pi^\vee} \mathbf{Q}\mathbf{e}(m)$$

である。また、各 $\sigma \in F(\pi)$ に対して $P(\sigma)$ を素イデアル $\mathbf{Q}[M \cap (\pi^\vee \setminus \sigma^\perp)] \subset S(\pi)$ とする。$S(\pi;\sigma)$ を剰余環 $S(\pi)/P(\sigma)$ とする。$m \in M \cap \pi^\vee \cap \sigma^\perp$ についての $\mathbf{e}(m)$ の $S(\pi;\sigma)$ への像を同じ記号 $\mathbf{e}(m)$ で表わす。従って

$$S(\pi;\sigma) = \bigoplus_{m \in M \cap \pi^\vee \cap \sigma^\perp} \mathbf{Q}\mathbf{e}(m)$$

と書ける。

そこで各 i に対して$\Lambda^\rho_{S(\pi)}(V)^i := S(\pi;\rho) \otimes_\mathbf{Q} (V_A)^i$ と置き

$$\Lambda^\rho_{S(\pi)}(V)^\bullet := S(\pi;\rho) \otimes_\mathbf{Q} V_A = \bigoplus_{m \in M[\rho] \cap \pi^\vee} \mathbf{Q}\mathbf{e}(m) \otimes_\mathbf{Q} V_A$$

の M への次数付けについて斉次な境界作用素 d_2 をその次数 $m \in M[\rho] \cap \pi^\vee$ に対する成分が $1_{\mathbf{Q}\mathbf{e}(m)} \otimes d(m)$ となるように定義する。

$\mathrm{GEM}(F(\pi))$ に属する L に対して複体 $\Lambda_{S(\pi)}(L)^\bullet$ を複体の直和として

$$\Lambda_{S(\pi)}(L)^\bullet := \bigoplus_{\sigma \in F(\pi)} \Lambda^\rho_{S(\pi)}(L(\rho))^\bullet,$$

と定義する。

$\mathrm{GEM}(F(\pi))$ での準同型 $f: L \to K$ に対して、対応する複体の準同型$\Lambda_{S(\pi)}(f)$: $\Lambda_{S(\pi)}(L)^\bullet \to \Lambda_{S(\pi)}(K)^\bullet$ を次の様に定義する。

$\sigma, \rho \in F(\pi)$ に対する (σ, ρ) 成分

$$\begin{array}{cccc} \Lambda_{S(\pi)}(f) & : & \Lambda_{S(\pi)}(L)^\bullet & \longrightarrow & \Lambda_{S(\pi)}(K)^\bullet \\ & & \| & & \| \\ & & \bigoplus_{\sigma\in F(\pi)} \Lambda^\sigma_{S(\pi)}(L(\sigma))^\bullet & & \bigoplus_{\rho\in F(\pi)} \Lambda^\rho_{S(\pi)}(K(\rho))^\bullet \end{array}$$

を $\sigma \prec \rho$ の場合は自然な全射

$$\Lambda^\sigma_{S(\pi)}(L(\sigma))^\bullet \to \Lambda^\sigma_{S(\pi)}(L(\sigma))^\bullet \otimes_{S(\pi;\sigma)} S(\pi;\rho) = \Lambda^\rho_{S(\pi)}(L(\sigma)_{A(\rho)})^\bullet$$

と

$$1_{S(\pi;\rho)} \otimes (f_{\sigma/\rho})_A : \Lambda^\rho_{S(\pi)}(L(\sigma)_{A(\rho)})^\bullet \longrightarrow \Lambda^\rho_{S(\pi)}(K(\rho))^\bullet$$

の合成写像とし、それ以外は零写像とする。

$L^\bullet$ を $\mathrm{GEM}(F(\pi))$ での複体とすると$\Lambda_{S(\pi)}(L^\bullet)^\bullet$ は 2 重複体となる。これに付随した単複体を $\Lambda_{S(\pi)}(L)^\bullet$ と書くことにする。

このとき、次の定理が得られる。

定理 3.2 $\Lambda_{S(\pi)}(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(F(\pi)\setminus\{0\}))^\bullet$ は $S(\pi)$ 加群の複体、但し境界作用素は階数 1 の微分作用素となっている。そして、その $X = \mathrm{Spec}\, S(\pi) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ への引き戻しを解析層の複体と考えたものは $Ri_*\mathrm{IC}^\bullet_{\mathbf{p}}(X\setminus\{x\})$ と擬同型である。

定理 3.1 はこの定理と 2 重複体$\Lambda_{S(\pi)}(\mathrm{ic}^\bullet_{\mathbf{p}}(F(\pi)\setminus\{0\}))^\bullet \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ の $x \in X$ への制限が $i^*_\pi\, \mathrm{ic}^\bullet_{\mathbf{p}}(F(\pi)\setminus\{0\}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ に等しいことから得られる。但し、第二の複体構造は A 加群の次数付けによるものであり、その境界作用素 d_2 は零写像である。

第 1 節で定義した関手 D は交叉ホモロジー群の双対定理と関連が深いが、話が複雑になるのでここではこれ以上は述べない。

参考文献

[BBD] A.A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, Faisceaux pervers, Analyse et Topologie sur les Espaces Singuliers (I), Astérisque **100**, Soc. Math. France, 1982.

[GM2] M. Goresky and R. MacPherson, Intersection homology II, Invent. math. **72**, (1983), 77-129.

[G] W.H. Grueb, Multilinear Algebra, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, **136**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[I2] M. Ishida, Torus embeddings and de Rham complexes, in Commutative Algebra and Combinatorics (M. Nagata and H Matsumura, ed.), Adv. Studies in Pure Math. **11**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1987, 111-145.

[I3] M. Ishida, Torus embeddings and algebraic intersection complexes, preprint.

[O] T. Oda, Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to the Theory of Toric Varieties, Ergebnisse der Math. (3), **15**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1988.

0 -次元射影スキーム に関するいくつかの結果

柳川 浩二

名古屋大学　理学部　数学教室

1　序

Castelnuovo は、射影曲線の超平面切断として得られる閉点の有限集合の性質を考察して、曲線の埋め込みの次数と算術種数とに関する不等式を示し、さらに等号成立の場合を詳しく研究した（ [6] の chapter III に 詳しいことが書かれている)。より一般に、 代数閉体上の斉次環（特に C -M整域）の graded な Betti 数や Hilbert 関数さらには Poisncore 数列 等を考察する際に、与えられた環を linear な正則列で割って 1 次元の斉次環に帰着させることが、しばしば有効である。

これにより、0 -次元射影スキーム（要は、1 次元 C -M斉次環）それ自身も 計算機による "実験" を含めて、様々な研究が行なわれている。

EIsenbud-Harris ([2]) は、reduced でない 0 -次元射影スキームを研究し、それが reduced な場合には見られなかった複雑さを持つ反面、古典的な事実である "Castelnuovo の補題" (射影空間上の有限個の閉点が、rational normal curve に含まれるための必要充分条件を与えるもので、 reduced な場合には自明に近い) が、reduced でない場合にも そのまま成り立っていることを示した（ [2 ,Theorem 2.1 及び [3] , Theorem 2.2)。その証明は reduced な時ほど単純ではなく、彼らは Hilbert スキームを使って reduced な場合の極限をとる議論を行なっている。

本稿では、上の定理に 座標環の標準加群を使った比較的簡単な別証明を与え、さらにそこで用いた議論を延長して得られる次の結果を紹介する（記号の定義等は 次節を参照)。

定理 1.　$X \subset \mathbf{P}^r$ を uniform な位置にある必ずしも reduced ではない 0 -次元射影スキームとする。この時、$\deg X \geq 2r+2+d$ かつ $H_X(2) = 2r+d$ ならば、X は d-次元 rational normal scroll に含まれる。

上の定理において X を reduced とし、かつ $\deg X \geq 2r+1+2d$ と置き換えたもの（つまり、我々の定理よりやや弱い形のもの）は、古典的な射影幾何の一事実としてかなり古くから知られていたらしい（この形での証明は [6] Proposition 3.19. を見よ)。

第 4 節では、少し話題を変えて、X の reduced 性を仮定した上で、その座標環の graded な Betti 数について考察し、([4] に述べられている形での) linear sygyzy 予想が、座標環の標準加群については 成り立っていることを示す。この結果の特別な場合として、射影空間上の点集合の N_P 条件に関する Green-Lazarsferd の定理（ [5] ）等を導く。

2 記号と定義

本稿を通じて 以下の記号を用いる。

k　任意標数の代数閉体。

V　k 上の $r+1$ 次元ベクトル空間（ただし $r \geq 2$）。

$S := \mathrm{sym}\, V$　k 上の $r+1$ 変数の多項式環。

$\mathbf{P}^r := \mathrm{Proj}\, S$　k 上の r 次元射影空間。

$X \subset \mathbf{P}^r$　0-次元射影スキーム。

R　X の斉次座標環（なお本稿では、斉次座標環と言えば depth が正のものを指す)。

$\omega_R := \mathrm{Ext}(R, S(-r-1))$　R の graded な標準加群。

さらに、M を graded な有限生成 S 加群としたとき、$H_M : n \mapsto \dim_k M_n$ を M の Hilbert 関数、$\beta_{i,j}(M) = \dim_k \mathrm{Tor}_i(k, M)_j$ を M の graded な Betti 数とする。また、H_R を H_X と書く。

R も ω_R も、1 次元 C-M であるが、ω_R の性質として 次のものが基本的。 これらは全て、graded ring の local duality から簡単に証明できる。

補題 2.

(1) 任意の $n \in \mathbf{Z}$ について $H_{\omega_R}(n) = \deg X - H_X(-n)$

(2) 任意の $i, j \in \mathbf{Z}$ について $\beta_{i,j}(R) = \beta_{r-i,r+1-j}(\omega_R)$

(3) Y を X の部分スキーム、R' を Y の座標環とする。 この時、自然な単射 $\omega_{R'} \hookrightarrow \omega_R$ が存在する。

以後しばらく、0-次元射影スキームの基本的な用語を いくつか紹介する。

定義.　0-次元射影スキーム $X \subset \mathbf{P}^r$ が linearly general な位置にある とは、任意の部分スキーム $Y \subset X$ に対し $H_Y(1) = \min\{r+1, \deg Y\}$ が成立していることである。

X が reduced な場合、上の定義が linearly general という言葉通りの簡明な射影幾何的な性質を意味していることは明らかであろう。一方、$\deg X = r+2$ なる reduced でない 0-次元スキーム $X \subset \mathbf{P}^r$ で、それ自身は linearly general であるにもかかわらず、X に新たな一点をどの様に付け加えても全体としては linearly general にならないものが構成できるので、reduced な場合とそうでない場合とでは やはり大きな違いもあるようである。なお、reduced でない場合に一般化して考える一つの動機であるが、Eisenbud らのグループは、"ribbon" と呼ばれる reduced ではない特種な射影曲線の研究を行っており、これの超平面切断として得られる 0-次元スキームが、上に定義した意味での linearly general にはなっても、一般には reduced にできない事による。

定義.　0-次元射影スキーム $X \subset \mathbf{P}^r$ が Caylay-Bacharach であるとは、$\deg Y = \deg X - 1$ なる任意の部分スキームと、任意の整数 n に対し、$H_Y(n) = \min\{H_X(n), \deg Y\}$ が成り立っていることである。

定義.　0-次元射影スキーム $X \subset \mathbb{P}^r$ が uniform な位置にある とは、X が非退化（すなわち、$H_X(1) = r+1$）であって、なおかつ 任意の部分スキーム $Y \subset X$ と 任意の整数 n に対して、$H_Y(n) = \min\{H_X(n), \deg Y\}$ が成立していることである。

$X \subset \mathbb{P}^r$ が uniform な位置にあれば、X は Caylay Bachalach であり、linearly general な位置にあることは明らかであろう。Harris は、k の標数が 0 の場合、射影空間に non degenerate に埋め込まれた（reduced かつ irreducible な）曲線の一般の超平面による切断が、uniform な位置にある（reduced な）0-次元スキームになることを証明している。これによって、0-次元射影スキームが、homogeneous C-M domain の Hilbert 関数等の研究に際して、有効な武器になり得るのである。

最近、M.Kreuzer は、上で定義した 0-次元射影スキームの性質は全て、標準加群 ω_R の言葉で自然に記述できることを示した。彼の結果のうち、本稿で直接使うのは次のものである。

定義　$\sigma_X := \max\{n | H_X(n) < \deg X\} = -\min\{n | H_{\omega_R}(n) > 0\}$

定理 A（Kreuzer [7]）　X が linearly general な位置にあれば、任意の $0 \neq x \in S_1 = V$, $0 \neq y \in (\omega_R)_{-\sigma_X}$ に対し $xy \neq 0$ である（このような状態を、multiplication map $V \otimes (\omega_R)_{-\sigma_X} \to (\omega_R)_{-\sigma_X+1}$ が "1-generic" であると言う）。さらに、X が uniform な位置にあれば、任意の $n \leq \sigma_X$ に対して、$R_n \otimes (\omega_R)_{-\sigma_X} \to (\omega_R)_{-\sigma_X+n}$ も 1-generic である。

最後になったが、"rational normal scroll" 及び これと密接な関係をもつ "scroll 型の行列" については、ここで紹介する余裕がないので、[1]、[6] を参照されたい。

3　定理 1. の証明

まず、$\deg X = 2r+2+d$ としてよいことを言う。実際、$Y \subset X$ を $\deg Y = 2r+2+d$ なる部分スキームとすると（今、k は代数閉体としているので このような Y は必ず存在する）、X の uniform 性から $H_Y(2) = H_X(2) = 2r+d$、つまり X の定義イデアルと Y の定義イデアルは、2 次式のところでは 一致している。一方、rational normal scroll の定義イデアル は、2 次式で生成されているので、Y が d-次元 rational normal scroll に含まれることを示せば充分（Y も uniform な位置にあることに注意）。よって 以後 $\deg X = 2r+2+d$ とする。

$x_1, \cdots, x_{r+1}$ を V の基底、α_1, α_2 を $(\omega_R)_{-2}$の基底とし、$m_{i,j} := x_i\alpha_j$ とおく。M は $(\omega_R)_{-1}$ の元を成分に持つ $(r+1) \times 2$ 次の行列であるが、定理 A から、[1] の意味での "1-generic な行列" になっている。ところが、$n \times 2$ 次の 1-generic な行列 は、基底をうまく選べば scroll 型の行列になる事が知られている（Eisenbud [1]）。さらにこの場合、M の成分全体が張る V の部分空間の次元は $H_{\omega_R}(-1) = \deg X - (r+1) = r+1+d$ 以下であるから、M は d' ($\leq d$) 次元の scroll 型行列となる。言い替えれば、ある整数列 $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_l = r+1$（$l$ は d' 以下の自然数）があって、V と $(\omega_R)_{-2}$ の基底を適当に選び直せば、$a_{j-1} \leq \forall i < a_j$, $1 \leq \forall j \leq l$ について、$m_{i,2} = m_{i+1,1}$ つまり $x_i\alpha_2 = x_{i+1}\alpha_1$ が成り立つようにできる。

ここで、V の元を成分とする scroll 型行列 M を以下のように定義する。

$$M' := \left(\begin{array}{cccc|ccc|cc} x_{a_0+1} & x_{a_0+2} & \cdots & x_{a_1-1} & x_{a_1+1} & \cdots & x_{a_2-1} & \cdots & x_{r-1} \\ & & & & & & & & \\ x_{a_0+2} & x_{a_0+3} & \cdots & x_{a_1} & x_{a_1+2} & \cdots & x_{a_2} & \cdots & x_r \end{array}\right)$$

この時、$I_2(M')\cdot(\omega_R)_{-2}=0$ となる。実際、

$$\begin{aligned}
&(x_{s+1}x_t - x_s x_{t+1})\cdot\alpha_1 \\
&= x_{s+1}x_t\alpha_1 - x_s(x_{t+1}\alpha_1) \\
&= x_{s+1}x_t\alpha_1 - x_s(x_t\alpha_2) \\
&= x_{s+1}x_t\alpha_1 - x_t(x_s\alpha_2) \\
&= x_{s+1}x_t\alpha_1 - x_t(x_{s+1}\alpha_1) = 0,
\end{aligned}$$

$$(\ a_{i-1} \leq \forall s < a_i,\ a_{j-1} \leq \forall t < a_j,\ 1 \leq \forall i, j \leq l)$$

であり、同様にして $(x_{s+1}x_t - x_s x_{t+1})\cdot\alpha_2 = 0$ も示せる。ところが、multiplication map $R_2\otimes(\omega_R)_{-2}\to(\omega_R)_0$ は やはり 1-generic であるから、$I_2(M')$ は X の定義イデアルに含まれる。$I_2(M')$ は d' $(\leq d)$ -次元 rational normal scroll の定義イデアルである。 □

注意. $X\subset\mathbf{P}^r$ が linearly general であれば、(X が reduced でない場合でも) $H_X(n)\geq\min\{nr+1,\deg X\}$ が任意の $n\in\mathbf{Z}$ について成り立つことが知られているので([2])、上の定理において $d=1$ の時には、"uniform" という条件を "linearly general" に弱めてよいことが分かる。つまり、[2, Theorem 2.2] は我々の定理の特別な場合である。[3, Theorem 2.1] も上の証明と同様にして示せる。

4 ω_R と Linear sygyzy 予想

Linear sygyzy 予想 (Eisenbud-Koh-Stilman [4]) $M=\bigoplus_{n\geq 0}M_n$ を、multiplication map $S_1\otimes M_0\to M_1$ が 1-generic であるような有限生成次数付き S 加群とする。この時、$\forall i\geq\dim_k M_0$ に対して$\beta_{i,i}(M)=0$ であろう。

この節の主結果は、X が reduced な場合(つまり、$\mathbf{P}^r$ の有限個の閉点の場合)、ω_R に関して(上の形での) linear sygyzy 予想が成立していることである。

定理 3. $X\subset\mathbf{P}^r$ を有限個の閉点とする。この時、multiplication map $V\otimes(\omega_R)_{-\sigma_X}\to(\omega_R)_{-\sigma_X+1}$ が 1-generic であれば、(特に、X が linearly general な位置にあれば) 任意の $i\geq H_{\omega_R}(-\sigma_X)=\deg X-H_X(\sigma_X)$ に対して、$\beta_{i,i-\sigma_X}(\omega)=\beta_{r-i,r-i+1+\sigma_X}(R)=0$

次の補題を用意する。

補題 4. $X\subset\mathbb{P}^r$ を有限個の閉点、P を X に属する任意の一点、p を 点 P に対応する S の斉次素イデアル、R' を $X\setminus P$ の座標環とする。この時、次の完全列が存在（ただし n は適当な整数とする)。

$$0\to\omega_{R'}\to\omega_R\to(S/p)(n)\to 0$$

証明: 一般に、任意の 0 -次元射影スキーム $Y\subset\mathbb{P}^r$ とその部分スキーム $Z\subset Y$ に対し、$0\le H_Y(n)-H_Z(n)\le\deg Y-\deg Z$ が 任意の $n\in\mathbb{Z}$ について成立していることに注意。よって この場合、$I\subset R$ を $R'=R/I$ なるイデアルとすると、任意の $n\in\mathbb{Z}$ について $H_I(n)\le 1$ である。さらに、I は 1 次元 C-M S-module であることから、I は S-module として 1 個の元で生成されていることが分かる。一方、$p\in\operatorname{Ass}R$ かつ $p\notin\operatorname{Ass}R'$ であるから $p\in\operatorname{Ass}I$（もちろん I を単なる S-module と見ている)。 $H_I(n)\le 1$ と合わせて考えれば、適当な整数 m が存在して、$I\simeq(S/p)(m)$ とならざるを得ない。

よって、$0\to(S/p)(m)\to R\to R'\to 0$ (exact) となる。この完全列の $\operatorname{Ext}^r_s(\_,S(-r-1))$ をとれば、求める完全列が得られる。

定理 3. の証明: まず、X を Caylay-Bachalach としてよいことを言う。実際、X の部分スキーム Y（Y の座標環を R' とする）であって $(\omega_{R'})_{-\sigma_X}=(\omega_R)_{-\sigma_X}$ となるようなもののうちで、$\deg Y$ が最小なものを改めて Y とおく。この時、補題 2. から Y は Caylay-Bachalach である。また、$S_1=V$ の任意の nonzero element x に対し $x\cdot(\omega_{R'})_{-\sigma X}=x\cdot(\omega_R)_{-\sigma X}\neq 0$ であるから、Y は 非退化。さらに ω_R の linear sygyzy は V と $(\omega_R)_{-\sigma_X}$ の multiplication のみによって定まるのであるが、$(\omega_R)_{-\sigma_X}=(\omega_{R'})_{-\sigma_Y}$ であるから、(ω_R) と $\omega_{R'}$ の linear sygyzy は同じものである。よって、以後 X を Caylay-Bachalach と仮定する。

P を X の一点とし、$X\setminus P$ の座標環を R' と書く。X の Caylay-Bachalach 性から $H_{\omega_{R'}}(-\sigma_X)=H_{\omega_R}(-\sigma_X)-1$ 。p を P を定義する S の斉次素イデアルとする。 p_1 の k-ベクトル空間としての基底 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ をとり、さらにこれを延長して V の基底 $x_0,x_1,\cdots,x_r$ を得る。同様にして、$(\omega_{R'})_{-\sigma_X}$ の基底 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ をとり、 これを延長して $(\omega_R)_{-\sigma_X}$ の基底 $y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}$ を得る。補題より $(\omega_{R'}:y_0)=p$ だから、$x_iy_j\notin\omega_{R'}$ であるための必要充分条件は $i=0$ かつ $j=0$ である。 特に、$\sum a_{i,j}x_iy_j=0\Rightarrow a_{0,0}=0$ 。

以後、定理の主張を $n=H_{\omega_R}(-\sigma_X)$ に関する帰納法で証明する。linear sygyzy を考えているのだから、$\beta_{n,n-\sigma_X}(\omega_R)=0$ を言えば充分。

$n=1$ の時は明らか（ multiplication map $V\otimes(\omega_R)_{-\sigma_X}\to(\omega_R)_{-\sigma_X+1}$ は単射)。

$n\ge 2$ の時。$\beta_{n,n-\sigma_X}(\omega_R)\neq 0$ ならば Kosuzul complex の non-zero cycle $0\neq f\in\wedge^nV\otimes(\omega_R)_{-\sigma_X}$ がとれる。ここで、線型写像 $\Phi:\wedge^nV\to\wedge^{n-1}V$ を 以下のように定める。

$z=x_{i_1}\wedge x_{i_2}\wedge\cdots\wedge x_{i_n}$（$i_1<i_2<\cdots<i_n$）に対し

$$\Phi(z)=\begin{cases}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge x_{i_n} & \text{if } i_0=0\\ 0 & \text{if } i_0\neq 0\end{cases}$$

さらに、$\Phi':=\Phi\otimes\mathrm{id}:\wedge^nV\otimes(\omega_R)_{-\sigma_X}\to\wedge^{n-1}V\otimes(\omega_R)_{-\sigma_X}$ とおく。前半の注意と f が cycle の元であることから、$\Phi'(f)\in\wedge^{n-1}V\otimes(\omega_{R'})_{-\sigma_X}$ 、かつ $\Phi'(f)$ は Kosuzul complex の

$n-1$ 次の cycle であることが分かる。一方、定義から $\mathrm{Ker}\,\phi' = \wedge^n p_1 \otimes (\omega_R)_{-\sigma_X}$。ところが、$X$ は reduced かつ 非退化なので、$\Phi'(f) \neq 0$ としてよい。よって $\beta_{n-1,n-1-\sigma_X}(\omega'_R) \neq 0$ となって、$X \setminus p$ に関して 帰納法の仮定に矛盾。 □

これの特別な場合として、次のことが成り立つ。

系 5. (Green-Lazarsfeld [5]) $X \subset \mathbf{P}^r$ を、$\deg X = 2r+1-p$ なる linearly general な位置にある有限個の点集合 とする。この時、$j \geq 2+i$ かつ $i \leq p$ ならば、$\beta_{i,j}(R) = 0$。

なお、linear sygyzy 予想は、multiplication が 必ずしも 1-generic でない場合も含めて (multiplication の kernel を表す linear form matrix の deteminantal ring の 次元によって 評価する形に) 一般化 、精密化されており、$omega_R$ について 強い形の linear sygyzy 予想が成り立っていれば、 Green-Lazaresferd の 0 -次元射影スキームに関する予想 ([5]) も正しくなる事が知られていて、良いことなのであるが、こちらに関しては 歯が立たなかった。

参考文献

[1] D. Eisenbud, Linear sections of determinantal varieties, *Amer. J. Math.* **110** (1988), 541-575.

[2] D. Eisenbud and J. Harris, Finite projective schemes in linearly general position, *J. Algebraic Geometry* **1** (1992), 15-30.

[3] D. Eisenbud and J. Harris, An intersection bound for rank 1 loci, with applications to Castelnuovo and Clifford theory, *ibid.* **1** (1992), 31-60.

[4] D.Eisenbud J. Koh and M.Stillman, Determinantal equation for curves of high degree, *Amer. J. Math.* **110** (1988), 513-539.

[5] M. Green and R. Lazarsfeld, Some result on the syzygies of finite sets and algebraic curves, *Comp.Math.* **75** (1988), 301-314.

[6] J. Harris, Curves in projective space (Chapter III by Eisenbud and Harris), University of Montreal Press, 1982.

[7] M. Kreuzer, On the canonical module of a 0-dimensional scheme, Preprint.

Some remarks on algebras with straightening laws

NAOKI TERAI

Department of Mathematics

Osaka University

Toyonaka, Osaka 560, Japan

Abstract

First in order to investigate deformation of ASL's, we define the moduli space of ASL's on a given poset. And we give an inequality between the depth of general ASL's and that of the corresponding Stanley-Reisner ring, which includes the fundamental theorem on ASL's by De Concini-Eisenbud-Procesi [3].

Secondly we give a counter-example of the following conjecture of Hibi [7]: If there exists an ASL on a finite poset H over a field k which is an integral domain then H is Cohen-Macaulay over k, i.e., the Stanlay-Reisner ring $k[H]$ of H is Cohen-Macaulay.

Introduction

The purpose of the present paper is twofold. First of all, given a poset H, what kind of ASL's or how many ASL's exist on H? In order to investigate these problems, we define in this article the moduli space of ASL's on H as an algebraic scheme defined over an algebraically closed field k whose closed points correspond to ASL's on H over k. In the case where rank $H = 2$, we can write down explicitly the structure of this moduli space (in §2). In §3, we look into a lifting property of a coefficient ring of ASL's. In §4, we give an inequality between the depth of general ASL's and that of the corresponding Stanley-Reisner ring, which includes the fundamental theorem on ASL's by De Concini-Eisenbud-Procesi [3].

Secondly we consider the following conjecture of Hibi [7]: If there exists an ASL on a finite poset H over a field k which is an integral domain then H is Cohen-Macaulay over k, i.e., the Stanlay-Reisner ring $k[H]$ of H is Cohen-Macaulay. It is true if the dimension of an ASL is less than 4 (See Hibi-Watanabe [8]). In §5, we consider a special class of posets with a unique minimal element which do not contain any cycles. We call such a poset a tree. We show that the above conjecture is true if H is a tree. But in §6 we give a counter-example H to the above conjecture, which is a poset of rank 4 over a field of characteristic 2. In order to show that an ASL on H is an integral domain, we used the computer software "Macaulay"

The author would like to express his gratitude to Professors M. Miyanishi and S. Tsunoda for their advice and encouragement.

1. Preliminaries

Let $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ be a graded ring which is finitely generated over a ring $R = A_0$. Let H be a finite partially ordered set (poset, for short). We assume that an injection $i\colon H \to A_1$ is given and therewith identify H with $i(H)$. Suppose A is generated by H over R. A (formal) product $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ of elements of H is called a *monomial* and it is called a *standard monomial* if $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$ in H. We denote by M_n the set of monomials in A_n, by SM_n the set of standard monomials in M_n and $NSM_n = M_n \setminus SM_n$. Set $M = \bigcup_{n\geq 0} M_n$, $SM = \bigcup_{n\geq 0} SM_n$, and $NSM = \bigcup_{n\geq 0} NSM_n$. The algebra A is an *algebra with straightening laws* (*ASL*, for short) on H over R if

(ASL-1) A is a free R-module admitting SM as a free basis over R,

(ASL-2) if $\alpha \nsim \beta$ (i.e. α and β are incomparable in H) then there is a unique expression

$$(*) \qquad \alpha\beta = \sum_{\gamma\delta \in SM_2, \gamma < \alpha,\beta} c_{\gamma\delta}\gamma\delta \quad \text{with } c_{\gamma\delta} \in R,$$

where we understand $\alpha\beta = 0$ provided there is no γ with $\gamma < \alpha, \beta$. We call (*) the *straightening relations* for A. If the right-hand side of all the straightening relations are 0, then we call A a *Stanley-Reisner ring* of H and denote it by $R[H]$. And we call A a *quasi-ASL* on H over R if A is generated by H over R and A satisfies (ASL-2).

Let A be a quasi-ASL on H over R. Given a monomial $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ in A, we can employ the condition (ASL-2) to write $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ as a linear combination of standard monomials. A straightened expression of the non-standard monomial $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ is found as follows (cf. Baclawski[1]):

A violation for $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ to be standard is a quadratic factor $\alpha_i\alpha_j$ such that α_i and α_j are incomparable in H. Substituting the straightening relation $\alpha_i\alpha_j = \sum_l c_l\gamma_{l1}\gamma_{l2}$ for $\alpha_i\alpha_j$, we obtain the sum

$$\alpha_1 \ldots \alpha_n = \sum_l c_l\alpha_1 \ldots \check{\alpha}_i \ldots \check{\alpha}_j \ldots \alpha_n\gamma_{l1}\gamma_{l2}.$$

Next, we look for a violation in each of the resulting terms and straighten them. We repeat this process. By (ASL-2), this process eventually terminates and we obtain a linear combination $\alpha_1 \ldots \alpha_n = \sum_l d_l\gamma_{l1} \ldots \alpha_{ln}$ of standard monomials. We call this sum $\sum_l d_l\gamma_{l1} \ldots \alpha_{ln}$ a *standardization* for $\alpha_1 \ldots \alpha_n$. Note that a standardization for $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ is not necessarily unique unless (ASL-1) is assumed. We mean by a standardization for $(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3$ the one obtained by applying (ASL-2) first to the pair $\alpha_1\alpha_2$ in the bracket.

The following lemma is fundamental:

Lemma 1 (Bergman [2, Th. 1.2]). *Let A be a quasi-ASL on a poset H over a ring R written in the form*

$$A = R[X_\alpha; \quad \alpha \in H] \Big/ (X_\alpha X_\beta - \sum_{\gamma\delta \in SM_2, \gamma < \alpha,\beta} c_{\gamma\delta} X_\gamma X_\delta;\ \alpha\beta \in NSM_2).$$

Then A is an ASL if and only if an arbitrary element in NSM_3 has a unique standardization.

To consider all ASL's on a finite poset H over a ring R in a universal way we define the following rings:

$$C_0 = R[c_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}\ ; \quad \alpha\beta \in NSM_2, \gamma\delta \in SM_2, \gamma < \alpha, \beta],$$

where $c_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$ are variables, and

$$U_0 = C_0[\epsilon\ ; \epsilon \in H]/(\alpha\beta - \sum_{\gamma\delta \in SM_2, \gamma < \alpha,\beta} c_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \gamma\delta\ ;\ \alpha\beta \in NSM_2).$$

U_0 is a quasi-ASL on H over C_0. But U_0 is not in general an ASL on H over C_0. By Lemma 1, the minimal ideal I in C_0 such that U_0/IU_0 is an ASL on H over C_0/I is uniquely determined as follows:
Let $(\alpha\beta_1)\beta_2 = \sum_{m \in SM_3} c_m^{(\alpha\beta_1)\beta_2} m$ (resp. $(\alpha\beta_2)\beta_1 = \sum_{m \in SM_3} c_m^{(\alpha\beta_2)\beta_1} m$) be a standardization for $(\alpha\beta_1)\beta_2$ (resp. $(\alpha\beta_1)\beta_2$) for $\alpha \not\sim \beta_1, \beta_2$ in H. Then we have as the unique minimal ideal

$$I(H) = (c_m^{(\alpha\beta_1)\beta_2} - c_m^{(\alpha\beta_2)\beta_1};\ \alpha \not\sim \beta_1, \beta_2 \text{ in } H),$$

Note that $I(H)$ is uniquely determined, though each $c_m^{(\alpha\beta_1)\beta_2} - c_m^{(\alpha\beta_2)\beta_1}$ depends on the choice of standardizations. We define

$$C_R(H)(= C(H)) = C_0/I(H),$$

and

$$U_R(H)(=U(H)) = U_0/I(H)U_0.$$

If k is an algebraically closed field, each closed fibre ring $U_k(H)\bigotimes_{C_k(H)} C_k(H)/\mathfrak{m}$, where $\mathfrak{m}$ is a maximal ideal of $C_k(H)$, is an ASL on H over k, then the closed points of Spec $C_k(H)$ correspond to ASL's on H over k.

If $k[H]$ is a complete intersection, then $I(H) = (0)$ and $C_k(H)(=C_0)$ is a polynomial ring.

2. The case dim A=2

We define rank $H = \max\{n \in \mathbb{N};\ \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n \text{ for some } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in H\}$. In this section we investigate $C(H)$, where rank $H = 2$. First we define the "gluing" according to Watanabe [12]. Let H_1, H_2 be two finite posets and let I_1, I_2 be poset ideals of H_1, H_2 respectively. If there is an isomorphism ϕ: $H_1 \setminus I_1 \xrightarrow{\sim} H_2 \setminus I_2$ of posets, we define a new poset $H_1 \cup_\phi H_2$ as the disjoint union of H_1 and I_2 with the order relation defined as follows:
Suppose $\alpha \in H_1$ and $\beta \in H_2$. If $\alpha \in I_1$, then $\alpha \not> \beta$. If $\alpha \in H_1 \setminus I_1$, then $\alpha \not> \beta$ if and only if $\phi(\alpha) \geq \beta$.
Note that I_1, I_2 and $I_1 \cup I_2$ are poset ideals of $H_1 \cup_\phi H_2$.

Lemma 2 [12, Prop. 3.2]. *Let H_i and I_i $(i = 1, 2)$ be as above, and let $H = H_1 \cup_\phi H_2$. If A is an ASL on H over R, then A is isomorphic to the fibre product $A_1 \times_S A_2$, where $A_1 = A/I_2A$, $A_2 = A/I_1A$, $S = A/(I_1 \cup I_2)A$, and $A_i \to S$ $(i = 1, 2)$ is the canonical residue homomorphism.*

Let H, H_i and I_i $(i = 1, 2)$ be as above. If A_i is an ASL on H_i over R and if $\Phi : A_1/I_1A_1 \to A_2/I_2A_1$ is an isomorphism as ASL, which is compatible with the isomorphism $\phi : H_1 \setminus I_1 \xrightarrow{\sim} H_2 \setminus I_2$, then the fiber product

$$A = A_1 \times_\Phi A_2 = \{(x, y) \in A_1 \times A_2; \Phi(x \pmod{I_1 A_1}) = y \pmod{I_2 A_2}\}$$

is an ASL on H over R and $A/I_i A \cong A_i \quad (i = 1, 2)$. We call this process the "gluing of A_1 and A_2 along Φ."

Lemma 3. *Let H, H_i and I_i $(i = 1, 2)$ be as above. We assume rank $(H \setminus (I_1 \cup I_2)) = 1$.*

Then we have

$$C(H) \cong C(H_1) \otimes_R C(H_2).$$

Proof. In $U(H)$ (resp. $U(H_i)$) the straightening relations are given as follows:

$$\alpha\beta = \sum_{\gamma\delta \in SM_2, \gamma \in I_1, \gamma < \alpha, \beta} c_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \gamma\delta + \sum_{\gamma\delta \in SM_2, \gamma \in I_2, \gamma < \alpha, \beta} c_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \gamma\delta$$

$$(\text{resp. } \alpha\beta = \sum_{\gamma\delta \in SM_2, \gamma \in I_i, \gamma < \alpha, \beta} c_{i\gamma\delta}^{\alpha\beta} \gamma\delta).$$

So we define the map $R[\{c_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}\}] \to R[\{c_{1\gamma\delta}^{\alpha\beta}\} \cup \{c_{2\gamma\delta}^{\alpha\beta}\}]$ by $c_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \mapsto c_{i\gamma\delta}^{\alpha\beta}$ provided $\gamma \in I_i$. This map is well-defined and an isomorphism. By virtue of the construction of $I(H)$ and $I(H_i)$ $(i = 1, 2)$ and the fact that the standardization of the monomial $\alpha\beta\gamma$ is zero unless $\alpha, \beta, \gamma \in H_1$ or $\alpha, \beta, \gamma \in H_2$, it is easy to see that

$$C(H) \cong C(H_1) \otimes_R C(H_2). \quad \blacksquare$$

From now on, we consider to determine $C(H)$ in the case rank $H = 2$. By Lemmas 2 and 3 we consider the case where H has a unique minimal element.

Proposition 4. *Let H be a poset of rank two as follows: where $n \geq 3$. Then we have*

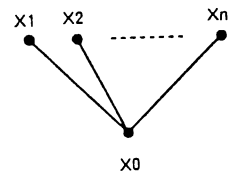


figure 1

$$C(H) \cong R[c_{ij}, c_{iji}, c_{ijj}; 1 \leq i, j \leq n]/I$$

where

$$I = (c_{ij} + c_{iji}c_{ill} + c_{ijj}c_{jll} - c_{ill}c_{jll}\ , c_{ijj} - c_{jij}\ ;\ l \neq i, j,\ i < j)$$

and the straightening relations for $U(H)$ are given by

$$x_i x_j = c_{ij}x_0^2 + c_{iji}x_0 x_l + c_{ijj}x_0 x_j \ (1 \leq i < j \leq n).$$

Proof. Let H be as given as above. The straightening relations for $U(H)$ are written as

$$x_i x_j = \sum_{l=0}^{n} c_l^{ij} x_0 x_l, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Comparing the coefficients of $x_0 x_l^2$ in the standardizations of $(x_i x_j)x_l$ and $(x_i x_l)x_j$ where $1 \leq l \leq n,\ l \neq 0, i, j,\ i < j$, we obtain $c_l^{ij} = 0$. Therefore we may rewrite the above relations

$$x_i x_j = c_{ij}x_0^2 + c_{iji}x_0 x_i + c_{ijj}x_0 x_j.$$

Similarly comparing the other coefficients in $(x_i x_j)x_l$ and $(x_i x_l)x_j$, we get the relations in I. Note that the relation $c_{ilj}c_{ij} - c_{iji}c_{il} + c_{jl}(c_{ill} - c_{ijj})$ obtained by comparing the coefficients of x_0^3 in $(x_i x_j)x_l$ and in $(x_i x_l)x_j$ belong to the ideal I. ∎

Corollary 5. *Let H be a poset of rank 2. Then $C(H)$ is isomorphic to a polynomial ring if and only if every minimal element in H has at most three elements greater than it.*

Proof. By Lemma 3, we have only to consider the case where H has the minimal unique element. Then the result follows from Lemma 4. ∎

We only know that the following conjecture is valid if $1 \leq n \leq 4$.

Conjecture 6. *In the same situation as in Lemma 4 we have*

$$dim\, C(H) = 3(n-1) + dim\, R \quad for \quad n \geq 1.$$

3. The moduli space of ASL's

From the construction of $C_R(H)$, we may consider Spec $C_R(H)$ as the moduli space of the ASL's on H over R in the following sense. Let

$$ASL_H \colon R\text{-}\boldsymbol{Alg} \to \boldsymbol{Set},\ S \mapsto \{ASL \text{ on } H \text{ over } S\}$$

be a functor from the category of R-algebras R-***Alg***, to the category of sets ***Set***. Then ASL_H is represented by $C_R(H)$. Namely, for an arbitrary R-algebra S and for an arbitrary ASL A on H over S, we have $A = U_R(H) \otimes_{C_R(H)} (S, \phi)$ for a uniquely determined $\phi \in \mathrm{Hom}_{R\text{-}alg}(C_R(H), S)$ i.e., $ASL_H(S) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}alg}(C_R(H), S)$ where (S, ϕ) is the $C_R(H)$-algebra S via an R-algebra homomorphism ϕ. We denote Spec $C_R(H)$ also by $ASL_{H,R}$.

Moreover, $C_R(H)$ has the following property:

Theorem 7. *Let H be a finite poset. Let k be an algebraically closed field, A a finitely generated reduced k-algebra and B a finitely generated A-algebra with an inclusion $i \colon H \hookrightarrow B$ such that B is generated by H over A. Suppose the residue ring $B/\mathfrak{m}B$ is an ASL on H over k, for every maximal ideal $\mathfrak{m}$ of A. Then there exists a ring homomorphism $\psi \colon C_k(H) \to A$ (which is independent of $\mathfrak{m}$) such that the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} C_k(H) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr] & A \arrow[d] \\ & A/\mathfrak{m} \end{tikzcd}$$

where $C_k(H) \to A/\mathfrak{m}$ is the k-algebra homomorphism corresponding to $B/\mathfrak{m}B$ by the isomorphism $ASL_H(A/\mathfrak{m}) \cong Hom_{k\text{-}alg}(C_k(H), A/\mathfrak{m})$.

Proof. First, note that $\bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}\,(A)} \mathfrak{m}B = \sqrt{(0)}$, where Max$(A)$ is the set of maximal ideal of A. In fact, "$\subset$" follows from the Hilbert Nullstellensatz, while "$\supset$" follows from the fact that the ASL's $B/\mathfrak{m}B$ over the field k are reduced (see, for example, [1]). We put $B' = B/\sqrt{(0)}$. We shall show that B' is a graded A-algebra generated by $H \subset B'_1$ with $B'_0 = A$. Suppose we have a relation $f_0 + f_1 + \cdots + f_l = 0$ in B', where $\deg f_i = i$. By the hypothesis, $B'/\mathfrak{m}B'(\cong B/\mathfrak{m}B)$ is a graded ASL over k, whence we have $f_i \equiv 0 \mod \mathfrak{m}B'$. Since $\bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}\, A} \mathfrak{m}B' = (0)$, we have $f_i = 0$.

Hence B' is a graded A-algebra. Next we claim that B' is an ASL on H over A. First we shall show the linear independence of standard monomials. Suppose we have a relation

$\sum_i a_i M_i = 0$, where $a_i \in A$ and $M_i \in SM$. For each $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A$ we have $\sum_i \bar{a}_i \overline{M}_i = 0$ in $B'/\mathfrak{m}B'$. Since $\overline{M}_i$ are the standard monomials of $B'/\mathfrak{m}B'$, we have $\bar{a}_i = 0$ in $A/\mathfrak{m}(\cong k)$ by (ASL-1) for $B'/\mathfrak{m}B'$. Then $a_i \in \mathfrak{m}$. Therefore we have $a_i \in \bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}\,(A)} \mathfrak{m} = (0)$.

Secondly we verify (ASL-2). Let N be the A-submodule of B'_2 which is generated by SM_2 over A. We claim $B'_2/N = 0$. In fact, for each $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\,(A)$, we have

$$(B'_2/N)_{\mathfrak{m}}\Big/\mathfrak{m}(B'_2/N)_{\mathfrak{m}} = B'_2/N \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0.$$

Hence we have $(B'_2/N)_{\mathfrak{m}} = (0)$ by Nakayama's lemma. Therefore we have $B'_2/N = 0$ (cf. Matsumura[9, Ths. 4.8, 4.9]). Then every non-standard monomials in B'_2 can be expressed as an A-linear combination of SM_2. We can prove that this expression is as required in the condition (ASL-2) by the arguments as we show that B' is a graded A-algebra.

Thus we see that B' is an ASL on H over A by [3, Prop.1.1]. Therefore we have a ring homomorphism

$$\psi\colon C_k(H) \to A\ , c_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \mapsto c_{0\gamma\delta}^{\alpha\beta}$$

where $c_{0\gamma\delta}^{\alpha\beta}$ is the coefficient of $\gamma\delta$ in the straightening relation for $\alpha\beta$ in B'. We can check easily that this map makes the diagram in question commutative. ∎

Corollary 8. *In the situation of the theorem we assume, moreover, that B is reduced. Then B is an ASL on H over A.*

Proof. Clear from the proof of Theorem 7.

4. A relation of the depth between general ASL's and the Stanley-Reisner ring

Let A be an ASL on a finite poset H over a ring R with straightening relations

$$\alpha\beta = \sum_{\gamma\delta\in SM_2, \gamma<\alpha,\beta} c_{\gamma\delta}\gamma\delta \quad \text{with } c_{\gamma\delta} \in R$$

for incomparable elements α and β in H.

We choose a map $w\colon H \to \mathbb{N}$ such that

$$(**) \qquad w(\alpha) + w(\beta) > w(\gamma) + w(\delta)$$

for each $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ with $\alpha \not\sim \beta$, $\gamma \le \delta$ and $\gamma < \alpha,\ \beta$. We call this map w a *weight* on H.

Let S be an R-algebra and $t \in S$. Then we define an S-algebra $A_{(S,t)}$ as follows:

$$A_{(S,t)} = S[X_\alpha;\ \alpha \in H]/(X_\alpha X_\beta - \sum_{\gamma\delta\in SM_2, \gamma<\alpha,\beta} c_{\gamma\delta} t^{w(\alpha)+w(\beta)-w(\gamma)-w(\delta)} X_\gamma X_\delta;\ \alpha \not\sim \beta)$$

With the inclusion map $i\colon H \hookrightarrow A_{(S,t)}$ given by $\alpha \mapsto \overline{X_\alpha}$ = the residue class of X_α, $A_{(S,t)}$ is an ASL on H over S by Lemma 1. In fact, if we extend w onto $\mathbb{N} \times H \times H$ by $w(t^n X_\gamma X_\delta) = n + w(\gamma) + w(\delta)$, the weights of all terms appearing in the expression

$$X_\alpha X_\beta - \sum_{\gamma\delta \in SM_2, \gamma < \alpha,\beta} c_{\gamma\delta} t^{w(\alpha)+w(\beta)-w(\gamma)-w(\delta)} X_\gamma X_\delta$$

are the same. Therefore, on comparing the coefficients of the standard monomials in two standardizations of non-standard monomials , e.g. $(\alpha\beta)\gamma$ and $(\alpha\gamma)\beta$ for $\alpha \not\sim \beta, \gamma$, the weights (or degrees in t) are equal for all standard monomials.

Remark. Let H be a finite poset. First, we recall the definition of rank r on H. Define a function

$$r\colon H \to \mathbb{N} \quad \text{by}$$
$$\alpha \mapsto \begin{cases} 1, & \alpha \text{ is minimal} \\ \max\{n \in \mathbb{N};\ \alpha = \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n \text{ for some } \alpha_2, \ldots \alpha_n\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then the rank of H is

$$\operatorname{rank} H = \max\{r(\alpha);\ \alpha \in H\},$$

which we abbreviate as $r(H)$. Then we define a weight w as follows:

$$w\colon H \to \mathbb{N}$$
$$\alpha \mapsto \begin{cases} 1, & \alpha \text{ is minimal} \\ 1 + 2^{r(H)-2} + 2^{r(H)-3} + \cdots + 2^{r(H)-r(\alpha)}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then the weight w satisfies the condition (**).

Proof. Without loss of generality we may assume $r(\alpha) \leq r(\beta)$. We have

$$
\begin{aligned}
& w(\alpha) + w(\beta) - w(\gamma) - w(\delta) \\
\geq\ & (1 + 2^{r(H)-2} + 2^{r(H)-3} + \cdots + 2^{r(H)-r(\alpha)}) \\
& + (1 + 2^{r(H)-2} + 2^{r(H)-3} + \cdots + 2^{r(H)-r(\beta)}) \\
& - (1 + 2^{r(H)-2} + 2^{r(H)-3} + \cdots + 2^{r(H)-r(\gamma)}) \\
& - (1 + 2^{r(H)-2} + 2^{r(H)-3} + \cdots + 2 + 1) \\
=\ & (2^{r(H)-r(\gamma)-1} + \cdots + 2^{r(H)-r(\alpha)}) \\
& - (2^{r(H)-r(\beta)-1} + \cdots + 2 + 1) \\
>\ & 2^{r(H)-r(\alpha)} - 2^{r(H)-r(\beta)} \geq 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

We state a relation of the depth between general ASL's and the Stanley-Reisner ring

Theorem 9. *Let A be an ASL on a finite poset H over a field k. Then*

$$\mathit{depth}\ k[H] + 1 \geq \mathit{depth}\ A \geq \mathit{depth}\ k[H].$$

Proof. Note that $B = A_{(k[t],t)}$ has the non-zero divisor t and $B/(t) \cong k[H]$. We first prove the right inequality. Let $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_p$ be a homogeneous regular sequence in $k[H]$. Then its inverse image $y_1, \ldots, y_p$ is also a regular sequence in B , where we take $y_1, \ldots,\ y_p$ as homogeneous with respect to the weight introduced at the beginning of this section. We can easily prove that $y_1, \ldots, y_p, t-1$ is a regular sequence in B. Hence so is its image in the localization $B_{(H,t-1)}$. Since $B_{(H,t-1)}/(t-1)B_{(H,t-1)} \cong A_{(H)}$, the image of $y_1, \ldots, y_p$ is a regular sequence in $A_{(H)}$. Since depth$A_{(H)}$ = depth$A$, the right inequality holds. Next we prove the left inequality. Let $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_p$ be a homogeneous regular sequence in A. We have the isomorphism $B/(t-1) \cong A$. Then we can easily prove that its homogeneous inverse image $y_1, \ldots, y_p$ is also a regular sequence in B. Since depth $B =$ depth $k[H] + 1$, the left inequality holds. ∎

The right inequality is known as the fundamental theorem on ASL's in [3, Cor. 7.2]. From the moduli-theoretic point of view, we have a morphism $\sigma\colon \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\ k[t] \to ASL_{H,k}$ such that the point $\sigma(0)$ corresponds to the Stanley-Reisner ring $k[H]$ and the point $\sigma(1)$ corresponds to the given A.

We call a poset H Cohen-Macaulay (resp. Buchsbaum) over a field k if the Stanlay-Reisner ring k[H] is Cohen-Macaulay (resp. Buchsbaum). We call a poset H weakly Cohen-Macaulay over a field k if there exists a Cohen-Macaulay ASL on H over k.

Corollary 10. *Let H be a weakly Cohen-Macaulay poset over k of rank d. Then $\tilde{H}_i(\Delta(H), k) = 0$ for $i = 0, \ldots, d-3$, and dim $\tilde{H}_{d-1}(\Delta(H), k) \geq$ dim $\tilde{H}_{d-2}(\Delta(H), k)$, where $\tilde{H}_i(\Delta(H), k)$ is the i-th reduced homology group of the order complex $\Delta(H)$ of H.*

Proof. It follows from Hochster's formula (See [11, Th. 4.1 p70])

$$F(H^i_{\mathfrak{m}}(k[H]),\ t\ ) \ = \sum_{F \in \Delta(H)} \dim{}_k \tilde{H}_{i-\sharp(F)-1}(\mathrm{lk} F; k)(t^{-1}/(1-t^{-1}))^{\sharp(F)}$$

where $H^i_{\mathfrak{m}}(k[H])$ is the i-th local cohomology group of $k[H]$ with support $\mathfrak{m} = (H)$ and lk $F = \{G \in \Delta;\ G \cup F \in \Delta,\ G \cap F = \phi\}$ and the fact that if H is weakly Cohen-Macaulay then $(-1)^{d-1}\tilde{\chi}(\Delta(H)) \geq 0$, where $\tilde{\chi}(\Delta(H))$ is the reduced Euler characteristic of $\Delta(H)$. ∎

T. Hibi conjectures that weak Cohen-Macaulayness implies Cohen-Macaulayness. Now we give a partial result on this conjecture:

Proposition 11. *Let H be a Buchsbaum poset over a field k of rank 3 with just two minimal elements. If the poset H is weakly Cohen-Macaulay over k, then H is Cohen-Macaulay over k.*

Proof. Let x, y be the minimal elements of H. Let I (resp. J) be the poset ideal $H \setminus \{z \in H; z \geq x \text{ (resp. } z \geq y)\}$. Let A be a 3-dimensional Cohen-Macaulay ASL on H. We consider the long exact sequence of the local cohomology groups with support $\mathfrak{m} = (H)$ associated the exact sequence

$$(0) \to A \to A/IA \oplus A/JA \to A/(IA + JA) \to (0).$$

Since $H^2_{\mathfrak{m}}(A) = H^1_{\mathfrak{m}}(A/IA) = H^1_{\mathfrak{m}}(A/JA) = 0$, we have $H^1_{\mathfrak{m}}(A/(IA + JA)) = 0$. Then $A/(IA + JA)$ is a 2-dimensional Cohen-Macaulay ASL on $H \setminus (I \cup J)$. Since a weakly Cohen-Macaulay poset of rank 2 is Cohen-Macaulay, $k[H \setminus (I \cup J)]$ is Cohen-Macaulay. We consider the long exact sequence of the local cohomology groups arising from the exact sequence

$$(0) \to k[H] \to k[H \setminus I] \oplus k[H \setminus J] \to k[H \setminus (I \cup J)] \to (0).$$

We have $H \setminus I = \{z \in H; z \geq x\} = \mathrm{star}_H(x)$ and $H \setminus J = \{z \in H; z \geq y\} = \mathrm{star}_H(y)$ (See [6, p99]). Since H is Buchsbaum, $k[H \setminus I]$ and $k[H \setminus J]$ are Cohen-Macaulay. Then we have $H^2_{\mathfrak{m}}(k[H \setminus I]) = H^2_{\mathfrak{m}}(k[H \setminus J]) = H^1_{\mathfrak{m}}(k[H \setminus (I \cup J)]) = 0$. Hence $H^2_{\mathfrak{m}}(k[H]) = 0$. ∎

5. ASL's on trees

In this section we treat a special class of posets which are called trees. We begin with the definition. Let T be a finite poset with a unique minimal element. Then T is a tree if the Hasse diagram of T is tree in the sense of graph theory. Let $F_{r,s}$ be the poset $C_s \oplus A_r$, where C_s is the chain (i.e., totally ordered set) with cardinality s, and A_r is the antichain (i.e., any two elements are incomparable in A_r) with cardinality r, and $C_s \oplus A_r$ is the disjoint union of C_s and A_r with an order as follows: $x < y$ in $C_s \oplus A_r$ if $x < y$ in C_s or if $x \in C_s$ and $y \in A_r$. We call $F_{r,s}$ a flower of type (r, s).

The following theorem is more or less obvious, but we cannot find it in the literature.

Theorem 12. *Let T be a tree such that rank $T \geq 2$, and let k be a field. Then the following conditions are equivalent:*

(1) T is integral over k, i.e., there exists an ASL on T over k which is an integral domain.

(2) T is weakly Cohen-Macaulay over k.

(3) T is Cohen-Macaulay over k.

(4) $(1-t)^{s+1}F(k[T],t) = 1 + (r-1)t$ for some $r,\ s \geq 1$, where $F(k[T],t)$ is the Hilbert series of $k[T]$.

(5) $T = F_{r,s}$ for some $r,\ s \geq 1$.

Proof. (1)⇒(5): This can be proved similarly as in [S, Prop. A].

(5)⇒(1): Since $F(r,1)$ is integral (see [12, Th. 2.4]), then $F(r,s)$ $(s \geq 1)$ is also integral.

(2)⇒(5): If T is not a flower, there exist three elements $x,\ y,\ z \in T$ with $x > y$, $x \not> z$, $y \not> z$, such that $S = \{t \in T;\ t < y\} = \{t \in T;\ t < z\}$ is a chain and that for all $t \in S$ and for all $w \in T \setminus S$, $t < w$ holds. Let A be an ASL on H over k. We may show that $B = A/(S)$ is not Cohen-Macaulay. But it is clear, since B is an ASL on $T \setminus S$, which is not connected, and dim $B \geq 2$.

(5)⇒(3): Clear.

(3)⇒(2): Clear.

(4)⇒(5): If T is not a flower, let S be as in the proof of (2)⇒(5). We put $U = T \setminus S$. U is not connected, and every connected component of U is a tree. Let V be a connected component of U. Since the order complex $\Delta(V)$ is contractible, the reduced Euler characteristic is written as

$$\tilde{\chi}(\Delta(U)) = (\text{the number of connected components of } U) - 1 \geq 1.$$

Now if the Hilbert series of $k[U]$ is given by

$$F(k[U], t) = (1-t)^{-d}(1 + a_1 t + \cdots + a_d t^d),$$

where $d = \dim k[U]$, then we have

$$| a_d | = | \tilde{\chi}(\Delta(U)) | \geq 1.$$

Since we have $d \geq 2$, U does not satisfy the condition (4).

(5)$\Rightarrow$(4): A straightforward computation. ∎

6. An example of non-Cohen-Macaulay ASL domain

Let K be a field, Let R be the polynomial ring $K[x_1, \ldots, x_n]$, and let I be a homogeneous ideal. We give an algorithm which determines the primeness of I. We follow basically the primeness test given in Giatini-Trager-Zacharias[5], where it is called the primality test. But we partially improve it by making use of the property that I is homogeneous to economize time and memory on computing with a computer.

We prepare several lemmas. See, for example, [5] for the definition and properties of Gröbner basis (G-basis, for short).

Lemma 13 [5, Prop. 3.1]. *Let R be a ring and let I be an ideal in $R[y, x] = R[y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m]$. Let $>_1$ (resp. $>_2$) be an order on the set of monomials in x (resp. y). Define an order $>$ on the set of monomials in x and y as follows:*

$$x^A y^B > x^C y^D$$

if $x^A >_1 x^C$, or $x^A = x^C$ and $y^B >_2 y^D$. Let G be a G-basis for I with respect to $>$. Then we have:

(1) G is a G-basis for I with respect to the order $>_1$ on $(R[y])[x]$, a polynomial ring in x with coefficients in $R[y]$.

(2)$G \cap R[y]$ is a G-basis for $I \cap R[y]$ with respect to the order $>_2$.

Lemma 14 [5, Prop. 3.7]. *Let R be an integral domain, and K its quotient field. For any given ideal $I \subset R[x]$, we have*

$$IK[x] \cap R[x] = IR_s[x] \cap R[x]$$

where s is the product of the leading coefficients of a G-basis for I.

Lemma 15. *Let R be an integral domain, I an ideal of R, and s an element of R. Then we have $IR_s \cap R = I$ if and only if s is a non-zero divisor on the residue ring R/I.*

Proof. Obvious.

Lemma 16 (e.g. Stanley [11, Lemma 2.2]). *Let $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ be a Noetherian graded ring with $R_0 = K$, a field. Then a homogeneous element $s \in R_d$ is a non-zero divisor of R if and only if*

$$(1 - t^d)F(R, t) = F(R/(s), t)$$

holds, where $F(R, t)$ (resp. $F(R/(s), t)$) is the Hilbert series of R (resp. $R/(s)$).

Lemma 17 [5, Lemma 4.1]. *Let R be a ring. Then an ideal $I \subset R[x]$ is prime if and only if $I \cap R$ is prime and the image of I in $R/(I \cap R)[x]$ is prime.*

Lemma 18 [5, Lemma 4.2]. *Let R be an integral domain, and K its quotient field. If I is an ideal of $R[x]$ such that $I \cap R = (0)$, then I is prime if and only if $IK[x]$ is prime and $IK[x] \cap R[x] = I$.*

Proposition 19 (cf. [5, Prop. 4.3]). *We assume that we can test the irreducibility of one-variable polynomials over the quotient field of the residue rings of $K[x]$, where K is a field. Then it is possible to determine the primeness of homogeneous ideals of $K[x]$.*

Proof. We proceed by induction on the number of variables. Let I be a homogeneous ideal of $K[x_1, \ldots, x_n]$ ($n \geq 1$). Put $I_1 = I \cap K[x_2, \ldots, x_n]$. Since we can take a set of homogeneous elements of $K[x_1, \ldots, x_n]$ as a G-basis of I, we can find a homogeneous G-basis of I_1 by Lemma 13 (2). By the induction hypothesis, we can determine the primeness of I_1. If I_1 is not prime then I is not prime and we are done. Otherwise, by Lemma 17, we have only to test the primeness of the image J of I in $R[x_1]$, where $R = K[x_2, \ldots, x_n]/I_1$. Note that $J \cap R = (0)$. Let L be the quotient field of R. Then $JL[x_1]$ is a principal ideal and hence we can test its primeness by checking the irreducibility of its generator. If $JL[x_1]$ is not prime then nor is I. Otherwise we must determine whether or not $JL[x_1] \cap R[x_1] = J$ holds by Lemma 18. We can take the image of a G-basis for I in $R[x_1]$ as a G-basis for J (cf. [5, Prop. 3.3]). We have only to determine whether or not $JR_s[x_1] \cap R[x_1] = J$ holds by Lemma 14, where s is the product of the leading coefficients of the G-basis for J. For that purpose, by Lemma 15, we have only to determine whether or not s is a non-zero divisor on the residue ring $R[x_1]/J \simeq K[x_1, \ldots, x_n]/I$. This can be done by Lemma 16. ∎

Now we give an algorithm which determines the primeness of homogeneous ideals:

Algorithm PTH (K; x; I). Primeness test for homogeneous ideal.

Input: Field K; variables $x = x_1, \ldots, x_n$; homogeneous ideal $I \subset K[x]$.

Assumptions: (none)

Output: TRUE if I is prime, otherwise FALSE.

Step 1: If $n = 0$: if $I \subset K$ is (0), return TRUE, otherwise return FALSE.

Step 2: Compute $I_1 = I \cap K[x_2, \ldots, x_n]$(or find a G-basis of I_1).

Step 3: If PTH $(K; x_2, \ldots, x_n; I_1)$=FALSE then return FALSE.

Step 4: Let $R = K[x_2, \ldots, x_n]/I_1$, $J = IR[x_1]$, L =the quotient field of R.

Step 5: Compute $JK[x_1] = (f)$ (or find such f).

Step 6: If f is reducible over L then return FALSE.

Step 7: Let s be the product of the leading coefficients of a G-basis for J and put d =deg s.

Step 8: Compute $\mathrm{F}(R[x_1]/J, t)$ and $\mathrm{F}(R[x_1]/(J, s), t)$.

Step 9: If $\mathrm{F}(R[x_1]/J, t)(1 - t^d)$= $\mathrm{F}(R[x_1]/(J, s), t)$, then return TRUE, otherwise return FALSE.

Remark. In [5], in order to determine whether or not $JR_s[x_1] \cap R[x_1] = J$ holds, the isomorphism $JR_s[x_1] \cap R[x_1] \cong (J, ts - 1)R[x_1, t] \cap R[x_1]$ is used, where t is a new indeterminate. It is therefore necessary to find a G-basis of the ideal $(J, ts - 1)$, which uses up enormous memory. To avoid this ineffectiveness we compute the Hilbert series of $R[x_1]/J$ and $R[x_1]/(J, s)$ in our algorithm. For the computation, we must find G-basis of J and (J, s), which uses up less memory in general.

Now we give a concrete example of a non-Cohen-Macaulay ASL domain.

Theorem 20. *Let K be a field of characteristic 2, and let H be a poset given as follows:*

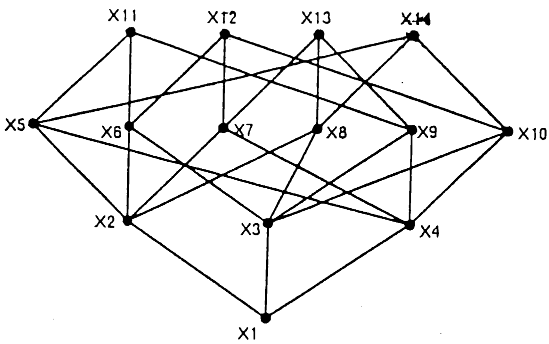


figure 2

Let A be the ring R/I, where R is a polynomial ring $K[x_1, \ldots, x_{14}]$, and I is the ideal of R generated by the following 42 elements:

$x_2x_3 + x_1x_6 + x_1x_8,\ x_3x_4 + x_1x_9 + x_1x_{10},\ x_2x_4 + x_1x_5 + x_1x_7,$

$x_4x_6 + x_1x_{11} + x_1x_{12},\ x_4x_8 + x_1x_{13} + x_1x_{14},\ x_2x_9 + x_1x_{11} + x_1x_{13},$

$x_2x_{10} + x_1x_{12} + x_1x_{14},\ x_3x_5 + x_1x_{11} + x_1x_{14},\ x_3x_7 + x_1x_{12} + x_1x_{13},$

$x_5x_6 + x_1x_9 + x_1x_{10} + x_2x_{11},\ x_5x_7 + x_2^2 + x_4^2,\ x_5x_8 + x_1x_9 + x_1x_{10} + x_2x_{14},$

$x_5x_9 + x_1x_6 + x_1x_8 + x_4x_{11},\ x_5x_{10} + x_1x_6 + x_1x_8 + x_4x_{14},\ x_6x_7 + x_1x_9 + x_1x_{10} + x_2x_{12},$

$x_6x_8 + x_2^2 + x_3^2,\ x_6x_9 + x_1x_5 + x_1x_7 + x_3x_{11},\ x_6x_{10} + x_1x_5 + x_1x_7 + x_3x_{12},$

$x_7x_8 + x_1x_9 + x_1x_{10} + x_2x_{13},\ x_7x_9 + x_1x_6 + x_1x_8 + x_4x_{13},\ x_7x_{10} + x_1x_6 + x_1x_8 + x_4x_{12},$

$x_8x_9 + x_1x_5 + x_1x_7 + x_3x_{13},\ x_8x_{10} + x_1x_5 + x_1x_7 + x_3x_{14},\ x_9x_{10} + x_3^2 + x_4^2,$

$x_5x_{12} + x_2x_6 + x_4x_{10},\ x_5x_{13} + x_2x_8 + x_4x_9,\ x_6x_{13} + x_2x_7 + x_3x_9,$

$x_6x_{14} + x_2x_5 + x_3x_{10},\ x_7x_{11} + x_2x_6 + x_4x_9,\ x_7x_{14} + x_2x_8 + x_4x_{10},$

$x_8x_{11} + x_2x_5 + x_3x_9,\ x_8x_{12} + x_2x_7 + x_3x_{10},\ x_9x_{12} + x_3x_6 + x_4x_7,$

$x_9x_{14} + x_3x_8 + x_4x_5,\ x_{10}x_{11} + x_3x_6 + x_4x_5,\ x_{10}x_{13} + x_3x_8 + x_4x_7,$

$x_{11}x_{12} + x_4^2 + x_6^2,\ x_{11}x_{13} + x_2^2 + x_9^2,\ x_{11}x_{14} + x_3^2 + x_5^2,$

$x_{12}x_{13} + x_3^2 + x_7^2,\ x_{12}x_{14} + x_2^2 + x_{10}^2,\ x_{13}x_{14} + x_4^2 + x_8^2.$

Then A is a non-Cohen-Macaulay ASL domain on H over K.

Proof. We can check that A is an ASL on H by Lemma 1. We have $P = \{x_1, x_2 + x_3 + x_4, x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}, x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}\}$ as a homogeneous system of parameters of A. Since we have

$$\mathrm{F}(A/(P),t) = 1 + 10t + 13t^2 + t^3 \neq 1 + 10t + 13t^2 = (1-t)^4 \mathrm{F}(A,t),$$

A is not Cohen-Macaulay. We can check the primeness of I by the algorithm given in this section. Then A is an integral domain. ∎

Corollary 21. *Let K be a field of characteristic 2. Then an integral poset over K is not necessarily Cohen-Macaulay over K.*

Proof. Let H be the poset in Theorem 20. Then H is not Cohen-Macaulay over K, since the geometric realization $\mid \Delta(H \setminus \{x_1\}) \mid$ of the order complex $\Delta(H \setminus \{x_1\})$ is the real projective plane $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (cf. [10, Remark 3]). ∎

References

[1] K. Baclawski, Rings with lexicographic straightening law, Adv. in Math. 39 (1981), 185–213.

[2] G. M. Bergman, The diamond lemma for ring theory, Adv. in Math. 29 (1978), 178–218.

[3] C. De Concini, D. Eisenbud and C. Procesi, Hodge algebras, Astérisque 91 (1982).

[4] D. Eisenbud, Introduction to algebras with straightening laws, in: B. R. McDonald ed., Ring Theory and Algebra III, Proceedings of the third Oklahoma conference (Marcel Dekker, New York, 1980) 243–268 .

[5] P. Giatini, B. Trager and G. Zacharias, Gröbner bases and primary decomposition of polynomial ideals in: L. Robbiano ed., Computational aspects of commutative algebra (Academic Press, London, 1989) 15–33.

[6] T. Hibi, Union and gluing of a family of Cohen-Macaulay partially ordered sets, Nagoya Math. J. 107 (1987), 91–119.

[7] —, An invitation to enumerative combinatorics via commutative algebra, in: Kumiawaseron to sono shūhen no kenkyū, RIMS-kōkyūroku 641.

[8] T. Hibi. and. K.-i. Watanabe, Study of three dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains I, Hiroshima Math. J. 15 (1985), 27–54.

[9] H. Matsumura, Commutative ring theory (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).

[10] G. Reisner , Cohen-Macaulay quotient of polynomial rings, Adv. in Math. 21 (1976), 30–49.

[11] R. Stanley, Combinatorics and commutative algebra (Birkhäuser, Boston, 1983).

[12] K.-i. Watanabe, Study of algebras with straightening laws of dimension 2, in: M. Nagata et al. eds., Algebraic and Topological Theories —to the memory of Dr. Takehiko Miyata (Kinokuniya, Tokyo, 1985) 622–639.

Ulrich module とその一般化について

吉田　健一　(ken-ichi Yoshida)

名古屋大学理学部

§0 Introduction

この報告の目的は、Linear maximal CM A-module の一般化としての Ulrich A－module を定義し、その性質を調べることにある。
以下、(A, m, k)を local ring とし、$\# k=\infty$ とする。
Mを finitely generated A-module で、$\dim M=\dim A=d \geqq 1$ とする。
$e_A(M)$をMのmに関する multiplicity とし、$\mu_A(M)$をMの minimal number of generators とする。また、Mの parameter ideal qに対して、$I(q ; M)=\lambda_A(M/qM)-e_q(M)$ とおき、$I_A(M)=\sup\{I(q ; M) \mid q : M\text{の parameter ideal}\}$ と定義する。

このとき、一般には

$$\mu_A(M) \leqq e_A(M)+I_A(M)$$

が成立する。

次の定理により、Ulrich A－module を定義しよう。

<u>Theorem</u>(0.1)(c. f. [O2]<u>Proposition</u>(1.1), [BHV]<u>Proposition</u>(1.5))

このとき、次の条件は同値である。

(1) $\mu_A(M)=e_A(M)+I_A(M)$.

(2) M : Buchsbaum A-module, $mM=qM$ ($\forall q$: mの minimal M-reduction)

(2)′ M : Buchsbaum A-module, $mM=qM$ ($\forall q$: mの minimal reduction).

(2)″ M : Buchsbaum A-module, $mM=qM$ ($\exists q$: mの parameter ideal).

(3) $\mu(M_G)=e(M_G)+I(M_G)$.

(4) $H_p^i(M_G)=H_m^i(M)(i)$ $(0 \leqq \forall i \leqq d-1)$, $[H_p^d(M_G)]_n=0$ $(\forall n>-d)$.

(5) $[H^i_p(M_G)]_n=0$ $(n\neq -i, 0\leqq\forall i\leqq d-1)$, $[H^d_p(M_G)]_n=0$ $(\forall n>-d)$.

(6) M_G : graded Buchsbaum A_G-module, $\mathrm{Reg}(M_G)=0$.

$S=k[X_1,\cdots,X_v]\twoheadrightarrow A_G$ $(v=\mathrm{emb}(A))$を考えるとき、次の条件とも同値である。

(7) M_Gは graded Buchsbaum S-module で、M_Gは linear resoltion を持つ。

i.e. $0\longrightarrow F_p(-p)\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1(-1)\longrightarrow F_0\longrightarrow M_G\longrightarrow 0$ (ex)

F_iはSの direct sum.

この条件を満すA-module M を <u>Ulrich A-module</u> と呼ぶ。

また、AがMCM A-module のときは、この定義は Linear MCM A-module と一致し、Aが Regular local ring のときには、maximal Buchsbaum A-module と一致する。また、$\dim M=0$ のときは、Ulrich module はkの有限直和と解釈できる。

(※M_Gは filtration $\{m^nM\}$に関するMの associated graded module.)

<u>Example</u>(0.2)

Mを Ulrich A-module とする。$2\leqq \mathrm{depth}M<d=\dim M$ と仮定。

$N=mM$ とおくと、$mN=qN$ ($\forall q$: mの minimal N-reduction)

を満たすが、Nは Buchsbaum でない quasi Buchsbaum A-module.

§1. canonical module, syzygy module

この section では、canonical module, syzygy module など特殊な module がいつ Ulrich module になるかを扱ってみたい。

この section ではつねに、(A, m, k)を d次元 local ring とし、

Aは canonical module $K=K_A$ を持つと仮定する。

また、$\# k=\infty$ とする。

Mは f.g. A-module で、$\dim M=d$ とする。

$K_M\otimes_A\hat{A}\cong \mathrm{Hom}_A(H^d_m(M), E_A)$ を満たす A-module K_M が存在するとき、

K_M をMの canonical module と言う。

K_A が存在するとき、K_M も存在し、$K_M\cong \mathrm{Hom}_A(M,K)$. K_M は、M^D とも表す。

Remark(1.1)(c.f.[A],[SV],[Y2])

(1)M : (S_2), $\dim(A/p)=\dim_A M$ $(\forall p\in \mathrm{Min}_A(M))$

$\Longleftrightarrow$(natural map を通して)$M\cong M^{DD}$.

(2)K_M はつねに(S_2)を満たす。

(3)Mが generalized CM A-module のとき、

$$0\longrightarrow H^0_m(M)\longrightarrow M\longrightarrow M^{DD}\longrightarrow H^1_m(M)\longrightarrow 0\ (ex)$$

$$H^i_m(K_M)\cong \mathrm{Hom}_A(H^{d-i+1}_m(M),E_A)\quad (2\leqq i<d).$$

(4)M : Buchsbaum A-module, $q=(a_1,\cdots,a_d)A$: Aの parameter ideal.

$$\underline{a}^2=(a_1{}^2,\cdots,a_d{}^2)A.\quad L=\Sigma(\underline{a}^2;M):=\sum_{i=1}^{d}(a_1{}^2,\cdots,\hat{a_i}^2,\cdots,a_d{}^2):a_i{}^2.$$

このとき、$\mu_A(K_M)=\ell(L:m/L)$, $\ell(K_M/qK_M)=\ell(L:q/L)$.

まず、Syzygy module を扱う。

$k=A/m$ の minimal free resolution を

$$\cdots\ A^{b_{i-1}}\longrightarrow A^{b_{i-2}}\longrightarrow\cdots\longrightarrow A^{b_1}\longrightarrow A^{b_0}=A\longrightarrow k\longrightarrow 0\ (ex)$$

とする。

$E_i=\Omega^{\wedge}_i(k)=\mathrm{Syz}^{\wedge}_i(k)$ $(i\geqq 0)$ と書く。

特に、$E_1=m$, $E_0=k$.

Question

(A,m,k)を Buchusbaum local ring とするとき、

(1)E_iは、いつ Buchusbaum A－module か？

(2)E_iは、いつ Ulrich A－module か？

(3)$E_i{}^D=\mathrm{Hom}_A(E_i,K_A)$は、いつ Ulrich A－module か？

Remark(1.2)

Aを Buchusbaum local ring で、$\dim A>0$ とするとき、

(一般に、Aが quasi unmixed で、$mH^0_m(A)=0$ のとき、) $\dim E_i=d$ $(\forall i\geqq 1)$.

Conjecture

(A,m,k)をd次元 surjective Buchsbaum local ring とするとき、

(特に、Aが maximal embedding dimension を持つ場合)

E_iも surjective Buchsbaum A－module.

上の Conjecture が肯定的に解けることを期待して、次の定理を証明する。

Theorem(1.3)

(A, m, k)をd次元 Buchsbaum local ring とするとき、次が成り立つ。

(1) Aが maximal embedding dimension を持つとき、

E_iが Buchsbaum A-module ならば、Ulrich A-module.

さらに、$d>0$, $\operatorname{depth} A=0$, $i \geqq 2$ ならば、$E_1, \cdots, E_{i-1}$も Ulrich A-module.

(2)(i) $\operatorname{depth} A>0$ のとき、

E_iが Ulrich A-module ならば、Aは maximal embedding dimension を持つ.

(ii) $\operatorname{depth} A=0$ のとき、

E_i, E_{i+1}が Ulrich A-module ならば、Aは maximal embedding dimension を持つ.

<Theorem(1.3)の証明>

(1) $i=1$のとき、Aが maximal embedding dimension を持つことは、mが Ulrich A-module になることと同値であるからよい。

$i \geqq 2$としてよい。

$d=\dim A$についての induction を用いる。

$d=0$ のとき、$m^2=0$ だから、$m \cong k^v$. よって、このときは明らか。

$d>0$ として、$d-1$次元以下の Buchsbaum local ring に対して言えたと仮定しよう。

Case1 : $\operatorname{depth} A>0$ のとき、$x \in m$をmの minimal reduction の一部にとる。

このとき、$E_i/xE_i \cong \mathrm{Syz}_i^R(k) \oplus \mathrm{Syz}_{i-1}^R(k)$.　　$R=A/xA$.

([Y2]Lemma(3.3))

E_iが Buchsbaum A-module ゆえ、E_i/xE_iは Buchsbaum R-module.

よって、$\mathrm{Syz}_i^R(k)$, $\mathrm{Syz}_{i-1}^R(k)$ もそう。

さらに、Rも maximal embedding dimension を持つ $d-1$次元の Buchsbaum local ring だから、induction の仮定から、これらの module は Ulrich R-module.

従って、E_iも Ulrich A-module.

Case2 : $\operatorname{depth} A=0$ のとき、(Case1 と i についての induction の仮定を用いる。)

$H=H_m^0(A)$, $B=A/H$ とおくと、Bも maximal embedding dimension を持つ Buchsbaum local ring で、$m^2 \cap H=0$.

$0 \longrightarrow H \longrightarrow m \longrightarrow m/H=m_B \longrightarrow 0$ (ex) を考える。

$\iota : H \longrightarrow m \longrightarrow m/m^2$ は injective ゆえ、split injective.

$\therefore m \cong m_B \oplus H \cong m_B \oplus k^{h^0(A)}$.

$\Omega_i^A=\mathrm{Syz}_i^A(k)$, $\Omega_i^B=\mathrm{Syz}_i^B(k)$ $(i \geqq 0)$ とおく。

Claim 1 :

$$\Omega_1^{\wedge}(\Omega_i^{B}(m_B)) \cong \Omega_{i+1}^{B}(m_B) \oplus H^{b_i^{B}(m_B)} \qquad (\forall i \geqq 0)$$

＜Claim 1 の証明＞(E_iが Buchsbaum A-module であることは用いていない。)

$j=0$ のとき、

$$\Omega_1^{\wedge}(m_B) \cong (\Omega_1^{B}(m_B)) \oplus H^{b_1^{B}(k)}.$$

を示せばよい。$v = b_1^{B}(k)$ とおく。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega_1^{\wedge}(m_B) & \longrightarrow & A^{v} & \longrightarrow & m_B & \longrightarrow & 0 \quad (ex) \\
 & & \exists f \downarrow & & \downarrow nat & & \| \ id & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_1^{B}(m_B) & \longrightarrow & B^{v} & \longrightarrow & m_B & \longrightarrow & 0 \quad (ex)
\end{array}$$

Snake Lemma から、$\mathrm{Cok}\, f = 0$, $H^{v} = \mathrm{Ker}\, f$.

$$\therefore 0 \longrightarrow H^{v} \longrightarrow \Omega_1^{\wedge}(m_B) \longrightarrow \Omega_1^{B}(m_B) \longrightarrow 0 \ (ex)$$

なるA-module の exact sequence が得られる。

$\Omega_1^{\wedge}(m_B) \subseteq mA^{v}$ ゆえ、$m^2 \cap H = 0$ に注意して、$H^{v} \cap m\Omega_1^{\wedge}(m_B) = 0$ を得る。

よって、$H^{v} \longrightarrow \Omega_1^{\wedge}(m_B) \longrightarrow \Omega_1^{\wedge}(m_B)/m\Omega_1^{\wedge}(m_B)$ は、split injective.

従って、$\Omega_1^{\wedge}(m_B) \cong H^{v} \oplus \Omega_1^{B}(m_B)$.

$j>0$ のとき、

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega_1^{\wedge}(\Omega_j^{B}(m_B)) & \longrightarrow & A^{b_j^{B}(m_B)} & \longrightarrow & \Omega_j^{B}(m_B) & \longrightarrow & 0. \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_1^{B}(\Omega_j^{i}(m_B)) & \longrightarrow & B^{b_j^{B}(m_B)} & \longrightarrow & \Omega_j^{B}(m_B) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

$j=0$ の場合と同様にして、

$$\Omega_1^{\wedge}(\Omega_i^{B}(m_B)) \cong \Omega_1^{B}(\Omega_j^{B}(m_B)) \oplus H^{b_j^{B}(m_B)}$$ を得る。

Claim 1 より、$\Omega_1^{\wedge}(\Omega_{j+1}^{B}) \cong \Omega_{j+2}^{B} \oplus k^{h^0(A) b_{j+1}^{B}(k)} \qquad (\forall j \geqq 0)$ を得た。

Claim 2 :

$$\Omega_{j+1}^{\wedge} \cong \Omega_{j+1}^{B} \oplus \bigoplus_{r=0}^{j-1} (\Omega_r^{\wedge})^{h \cdot b_{j-r}(k)} \oplus (\Omega_j^{\wedge})^{h} \qquad h = h^0(A),\ b_r = b_r^{B}(k).$$

$(\forall j \geqq 1)$

＜Claim 2 の証明＞

$j=1$ のとき、

$$\Omega_2^{\wedge}(k) = \Omega_1^{\wedge}(m) = \Omega_1^{\wedge}(m_B) \oplus \Omega_1^{\wedge}(k)^{h}.$$

$$\therefore \Omega_2^{A}(k) = \Omega_2^{B}(k) \oplus k^{h\cdot b_1} \oplus \Omega_1^{A}(k)^h.$$

$j \geqq 2$ に対して、$j-1$ までは正しいと仮定。

$$\Omega_j^{A}(k) \cong \Omega_j^{B}(k) \oplus \bigoplus_{r=0}^{j-2} \Omega_r^{A}(k)^{h\cdot b_{j-k-1}} \oplus \Omega_{A}^{i-1}(k)^h$$

$\Omega_1^{A}(\cdot)$を施して、

$\Omega_1^{A}(\Omega_i^{B}) = \Omega_{j+1}^{B} \oplus k^{h\cdot b_j}$　に注意すると、

$$\Omega_{j+1}^{A}(k) \cong \Omega_{j+1}^{B}(k) \oplus \bigoplus_{r=0}^{i-1} \Omega_r^{A}(k)^{h\cdot b_{j-r}} \oplus \Omega_j^{A}(k)^h$$ を得る。

ゆえに、Claim 2が言えた。

E_iが Buchsbaum A-module と仮定すれば、

Claim 2から、Ω_i^{B}, $\Omega_1^{A}, \cdots, \Omega_{i-1}^{A}$ は、その direct summand ゆえ、

Buchsbaum A-module.

Case 1から、Ω_i^{B}は Ulrich B-module. よって、Ulrich A－module.

i についての induction の仮定から、$E_1, E_2, \cdots, E_{i-1}$は Ulrich A－module.

E_iはこれらの Ulrich A－module と k の direct sum ゆえ、Ulrich A－module である。

(2) d についての induction を用いる。(d＝0 の証明は, depth A＝0 の場合の証明に含まれる。)

ある $i \geqq 2$があって、E_i, E_{i+1}が Ulrich A－module であると仮定。

i＝0, 1 のときは、mが Ulrich A－module だから、Aは maximal embedding dimension になる。

Case1 : depth A＝0 のとき、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_i \arrow[r] & F_{i-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & F_{i-2} \\
& & & E_{i-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

なる diagram に$H_m(\cdot)$ を施して、$F_{i-1} \longrightarrow F_{i-2}$ がmの元を成分にもつ行列で表現されることから、$mH_m^0(A)=0$ を用いて、

$H_m^0(F_{i-1}) \longrightarrow H_m^0(F_{i-2})$ は 0－map であることが分かる。

よって、$H_m^0(E_i) \cong H_m^0(F_{i-1}) \neq 0$. 特に、depth $E_i = 0$.

E_iが Ulrich A－module だから、E_iはkをその direct summand に持つ。

よって、E_{i+1}はmを direct summand に持ち、mも Ulrich A-module.

即ち、Aは maximal embedding dimension を持つ。

Case2 : depth$A>0$ のとき、

ある$i\geqq 2$があって、E_iが Ulrich A−module であると仮定。

このとき、depth$E_i>0$.

$x\in m$を mの minimal reduction の一部で、かつ E_i-regular に選ぶと、

$E_i/xE_i\cong Syz_i^B(k)\oplus Syz_{i-1}^B(k)$.　　　ここに、$B=A/xA$.

E_iが Ulrich A−module ゆえ、E_i/xE_iも Ulrich B−module.

よって、$Syz_i^B(k)$, $Syz_{i-1}^B(k)$もそう。

dについての induction の仮定から、A/xAは maximal embedding dimension を持ち、Aもそう。　QED

Remark(1.4)

(A,m,k)を Buchsbaum local ring とし、$d=\dim A>0$, depth$A=0$ とする。

あるi, j $(i\neq j)$があって、E_i, E_jが Ulrich A−module.

$\Longrightarrow$ Aは maximal embedding dimension を持つ。

しかし、これは一般には $d=0$ のときには成り立たない。

例えば、Aを 0次元 hypersurface, $e\geqq 3$ とすると、E_iは Ulrich A−module. $(i=\text{even})$ しかし、Aは maximal embedding dimension を持たない。

次に、K_A が Ulrich A-module となる Buchsbaum local ring を決定する。

Lemma(1.5)

M は Buchsbaum A-module と仮定。

このとき、K_M が Ulrich A-module ならば、

$mM\subseteq\Sigma(q;M)$　($\forall q$: mの minimal M-reduction).

特に、$M=A$の場合を考えて、次の結果を得る。

Proposition(1.6)(c.f. [Y1])

(A,m,k) : a Buchsbaum local ring.　$\exists K=K_A$.

このとき、次は同値。

(1) Aは minimal multiplicity を持つ. (i.e. $e(A)=1+\sum_{i=1}^{d-1}{}_{d-1}C_{i-1}\cdot h^i(A)$.)

(2) $m=\Sigma(q)$, ($\forall q:m$ の minimal reduction).

(3) $\mu_A(K_A)=e_A(K_A)+I_A(K_A)$.

(4) $A\ltimes K_A$: Buchsbaum local ring with maximal embedding dimension.

Corollary(1.7)

Aは (S_2)をみたすとし、canonical module を持つとする。

このとき、次は同値。

(1) $\mu_A(K_A) = e_A(K_A) + I_A(K_A)$.

(2) A : Buchsbaum local ring with minimal multiplicity.

他方、Mが MCM の場合には、次の duality を得る。

Corollary(1.8)

Mが MCM A-module のとき、

M : Ulrich A-module $\Longleftrightarrow$ K_M : Ulrich A-module.

Remark(1.9)

一般に、Mが (S_2)でも(1.8)は成立しない。

例えば、Aを Buchsbaum local ring with minimal multiplicuty とするとき、

もし、Aが (S_2)を満すがCMでなければ、K_A は Ulrich A-module だが、

$A \cong (K_A)^D$ は Ulrich A-module ではない。

Theorem と次の Proposition を用いて、CM local ring の Syzygy module

についての求める答えを得る。

Proposition(1.10)

(A, m, k)を local ring とするとき、次の条件は同値である。

(1) Aは Regular local ring.

(2) $\exists M$: Ulrich A-module ; $\mathrm{pd}_A M < \infty$.

(3) $\exists M$: Ulrich A-module ; $\mathrm{id}_A M < \infty$.

Corollary(1.11)(c.f. [BHU]Proposition(2.5))

(A, m, k)を CM local ring with $d = \dim A > 0$ とする。

$E_i = \mathrm{Syz}_i^A(k)$ $(i \geqq 1)$とおくとき、次が成立する。

(1) E_iは maximal surjective Buchsbaum A-module.

(2) A はCM with MED $\Longleftrightarrow$ $\exists i \geqq 1$; E_i は Ulrich A-module.

(3) E_i^D は maximal surjective Buchsbaum A-module.

(4) Aは Regular $\Longleftrightarrow$ $\exists i$; E_i は Ulrich A-module. $(1 \leqq i < d)$.

＜(1.10)の証明＞

(1)$\Longrightarrow$(2).(3)は明らか。

(2)$\Longrightarrow$(1)：$\# k=\infty$ としてよい。

$d=\dim A$についての induction を用いる。

$d=0$ のとき、$M\cong k^n$ と書けるから、$\mathrm{pd}_A k<\infty$ となり、Aは体.

$d>0$ とし、$d-1$ までは正しいと仮定。

Mは Ulrich A-module ゆえ、M/Hを direct summamd に含み、$(H=H^0_m(M))$

Mの代わりに M/H を考えて、$\mathrm{depth} M>0$ としてよい。

$\mathrm{depth} A=\mathrm{depth} M+\mathrm{pd}_A M<\infty$ だから、$\mathrm{depth} A>0$.

このとき、$\mathrm{Ass}_A(M)=\mathrm{Assh}_A(M)\subseteq \mathrm{Assh}_A(A)$.

$\mathrm{Ass}(A)=\{P_1,\cdots,P_k\}$ とおき、$a\in m\setminus(m^2\cup P_1\cup\cdots\cup P_k)$ を

aのA_Gにおける initial form $f=a \bmod m^2$ がA_Gの parameter になるように

選ぶと、aはmの minimal reduction の一部で、M−regular.

$B=A/aA$ とおく。

$\mathrm{pd}_A(M/aM)<\infty$ で、M/aM も Ulrich B-module.

従って、induction の仮定から、A/aAも Regular local ring. ゆえに、Aもそう。

(3)$\Longrightarrow$(1):

$\mathrm{id}_A k<\infty \Longrightarrow$ Aは Regular と $\mathrm{id}_A M<\infty \Longrightarrow \mathrm{depth} M\leqq \mathrm{id}_A M=\mathrm{depth} A$.

を用いれば、(2)$\Longrightarrow$(1)と同様に証明できる。　　QED

＜(1.11)の証明＞

(1)は i についての induction と surjective criterion から容易に従う。

(2)(1)と Theorem(1.3)から従う。

(3)$i\geqq d$ のときは、E_iはMCMだから、E_i^Dもそう。

$1\leqq i<d$とする。

$$0\longrightarrow E_d\longrightarrow F_{d-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0=A\longrightarrow k\longrightarrow 0\ (\mathrm{ex})$$

$k=A/m$のA上の minimal free resolution に、$\mathrm{Hom}_A(\ ,K)=(\ )^D$を施して、

$$0\longrightarrow K\longrightarrow K^{b_1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow K^{b_{d-1}}\longrightarrow E_d^D\longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(k,K)\cong k\longrightarrow 0\ (\mathrm{ex})$$

を得る。

特に、$E_i^D=\mathrm{Cok}(K^{b_{i-2}}\longrightarrow K^{b_{i-1}})$ で、$\mathrm{id}_A K<\infty$ だから、$\mathrm{id}_A E_i<\infty$.

また、$X=E_d^D$, KがMCMだから、$Y=\mathrm{Ker}(E_d^D\to k)$, $E_1^D,\cdots,E_{d-1}^D$の順に

これらが maximal surjective Buchsbaum A−module であることを得る。

(4)(3)から $\mathrm{id}_A(E_i^D)<\infty$だから、(1.8)より従う。　　QED

さて、“AがCM”であるという条件をすこしゆるめて、“K_AがCM”である場合に考えてみる。

(1.3)の証明から、Aが maximal embedding dimension を持つとき、$B=A/H_m^0(A)$上のkの syzygy が (surjective) Buchsbaum A-module ならば、$Syz_i^A(k)$も (surjective) Buchsbaum A-module になる。

また、$H_m^i(A)=0$ $(i \neq 1,d)$ を満す Buchsbaum local ring 上の剰余体の syzygy は、すべて(surjective) Buchsbaum A-module になる(Yamagishi).

従って、(1.3)から次を得る。

Corollary(1.12)(c.f. [Y1](2.9))

(A, m, k) : a Buchsbaum local ring. $d=\dim A \geqq 2$.

Aの completion の canonical module はCM であると仮定する。

このとき、次が成立する。

(1) depth$A>0$ のとき、次の条件は同値。

(i) Aは maximal embedding dimension を持つ.

(ii) E_iは Ulrich A-module である. $(\forall i \geqq 1)$

(iii) E_iは Ulrich A-module である. $(\exists i \geqq 1)$

(2) depth$A=0$ のとき、次の条件は同値。

(i) Aは maximal embedding dimension を持つ.

(ii) E_iは Ulrich A-module である. $(\forall i \geqq 1)$

(iii) E_i, E_{i+1}は Ulrich A-module である. $(\exists i \geqq 1)$

§2. Ulrich module の例

duality と関連して、Ulrich A-module Mに対して、Mの multiplicity の評価を与えておく。

Lemma(2.1)

Mを Ulrich A-module とする。 このとき、

$$\sum_{i=1}^{d-1} {}_{d-1}C_{i-1} \cdot h^i(M) \leqq e_A(M) \leqq r_A(M) - I_A(M).$$

が成り立つ。さらに、両辺の等号は同時には成立しない。

ただし、$h^i(M)=\lambda_A(H_m^i(M))$.

$r_A(M) = \sup\{\dim_k \mathrm{Hom}_A(k, M/qM) \mid q : M$の parameter ideal$\}$.

$I_A(M) = \sum_{i=1}^{d-1} {}_{d-1}C_i \cdot h^i(M)$.

<(2.1)の証明>

左辺の不等式は、一般の maximal Buchsbaum A－module に対して成立する。

また、右側の不等式について考える。

$r_A(M) = \sum_{i=1}^{d-1} {}_dC_i \cdot h^i(M) + \mu(M^D) \qquad M^D = K_M = \mathrm{Hom}_A(M, K_A)$

$= \lambda_A(\Sigma(q;M)/qM) + \mu(M^D)$

（ここに、qはmの minimal M－reduction）

他方、$e_A(M) + I_A(M) = \lambda(M/qM)$ だから、

$r_A(M) = e_A(M) + I_A(M) + \mu(M^D) - \lambda_A(M/\Sigma(q;M))$

$\mu(M^D) = \dim_k \mathrm{Hom}_A(k, H^d_m(M))$で、

自然な写像 $M/qM \longrightarrow H^d_m(M)$ は、単射 $M/\Sigma(q;M) \longrightarrow H^d_m(M)$ を引き起こし、

$mM = qM \subseteq \Sigma(q;M)$ に注意すると、この単射の像は $H^d_m(M)$の socle 内に入る。

よって、$\mu(M^D) - \lambda_A(M/\Sigma(q;M)) \geqq 0$.

$\therefore r_A(M) \geqq e_A(M) + I_A(M)$. QED

Definition(2.2)

Mを Ulrich A－module とするとき、次のように定める。

M : type I $\Longleftrightarrow$ $e_A(M) = \sum_{i=1}^{d-1} {}_{d-1}C_{i-1} \cdot h^i(M)$.

M : type II $\Longleftrightarrow$ $e_A(M) = r_A(M) - I_A(M)$.

M : type III $\Longleftrightarrow$ Mは type I でも type II でもない。

Proposition(2.3)

Mを Ulrich A-module で、depth$M \geqq 2$とする。(i.e. Mは(S_2)を満す。)

このとき、次が成立する。

(1)Mが type I ならば、M^Dも type I の Ulrich A-module.

(2)Mが type II の Ulrich A-module のとき、

M^D : Ulrich A-module $\Longleftrightarrow$ M : MCM.(ゆえに、Linear MCM)

(※(2)については、depthM＝1 でもよい。また、(1)でもM^DがMCMのときは Mが Ulrich ならば、M^Dもそう。)

Example(2.4)

(1) Aを Buchsbaum local ring とするとき、K_Aが Ulrich A-module ならば、typeIIである。

(2) AをCM local ring with MED とする。
このとき、$E_i = \mathrm{Syz}_i(k)$ ($i \geqq 1$)は Ulrich A-module であったが、その type は、次のようになる。
$i \geqq d$ ならば、つねに typeII.
$1 \leqq i < d$ のときは、(i) Aが Regular のときは typeI.
(ii) Aが Regular でないときは typeII.

Example(2.5)

(A, m, k)を local ring とし、$d = \dim A \geqq 2$ とする。
Mを Linear MCM A-module とする。
$q = (x_1, \cdots, x_d)A$ をmの minimal M-reduction とし、$K.(\underline{x}; M)$を$\underline{x}$に関する Koszul complex とすれば、これは acyclic で、$H_0(\underline{x}; M) = M/mM$.
また、$M_i = B_{i-1}(\underline{x}; M)$ ($1 \leqq i \leqq d$), 特に、$M_d = M$ とおけば、各M_iは typeIの Ulrich A-module で、$\mathrm{depth} M_i = i$ ($1 \leqq i < d$).

References

[A] Y. Aoyama, Some basic results on canonical modules. J. Math. Kyoto Univ. 23-1 (1983) 85-94.

[AG] Y. Aoyama and S. Goto, On the endomorphism rings of the canonical modules. J. Math. Kyoto Univ. 25-1 (1985) 21-30.

[BHU] J. Brennan, J. Herzog and B. Ulrich, Maximally generated Cohen-Macaulay modules, Math. Scand. 61 (1987) 181-203.

[G1] S. Goto, Buchsbaum rings of maximal embedding dimension, J. of alg. 76 (1982) 383-399.

[G2] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, J. of alg. 85 (1983) 490-534.

[G3] S. Goto, Noetherian local rings with Buchsbaum associated graded rings. J. of Alg. 86 (1984) 336-384.

[G4] S. Goto, A note on quasi-Buchsbaum rings, Proc. Amer. Math. Soc. 90 (1984) 511-516.

[G5]S.Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen Macaulay Modules. Adv.Studies in pure Mathematics 11 (1987)39-64.

[G6]S.Goto, On Buchsbaum rings. J.of Alg.67 (1980)272-279.

[HSV]J.Herzog, A.Simis and W.V.Vasconcelos, Approximation Complexes of Blowing—up rings, II. J.of Alg.82 (1983)53-83.

[O1]A.Ooishi, Castelnuovo's regularity of graded rings and modules. Hiroshima Math.J.12 (1982)627-644.

[O2]A.Ooishi, On the Associated Graded Modules of Canonical Modules. J.of Alg.141 (1991)143-157.

[Tr1]N.V.Trung, Toward a theory of a generalized CM modules. N.M.J.102 (1986)1-49.

[Tr2]N.V.Trung, From associated graded modules to blowing-ups of generalized Cohen-Macaulay modules. J.Math.Kyoto Univ.24-4 (1984)611-622.

[Tr3]N.V.Trung, Absolutely superficial sequences. Math.Proc.camb.Phil.Soc. 93 (1983)35-47.

[Y1]K.Yamagishi, Idealizations of maximal Buchsbaum modules over Buchsbaum rings. Math.Proc.camb.Phil.Soc.104 (1988)451-478.

[Y2]K.Yamagishi, Bass number characterization of surjective Buchsbaum modules. Math.Proc.camb.Phil.Soc.110 (1991)261-279.

[SV]J.Stückrad and W.Vogel, Buchsbaum Rings and Applications, Springer-Verlag.

On the type of local rings

Kawasaki,Takesi

Tokyo Metropolitan University

Introduction.

Let A be a Noetherian local ring with maximal ideal m of dimension d. The type of A defined to be the length of $\mathrm{Ext}_A^d(A/m, A)$. It is well known that Gorenstein rings are characterized as Cohen-Macaulay rings of type one. But Roberts showed that local rings of type one are Cohen-Macaulay, hence Gorenstein. Modifying his argument, Costa, Huneke and Miller proved that complete local domains of type two are Cohen-Macaulay. Moreover Marley improved their result and proved that unmixed local rings of type two are Cohen-Macaulay.

And so Marley asked if complete local ring of type n which is (S_{n-1}) are Cohen-Macaulay. We answer this question in the affirmative when A contains a field and $n \geq 3$. We shall prove the following theorem and corollary.

Theorem A.

Let A be a Noetherian local ring of type n. If A satisfies the following conditions:

i) A contains a field;

ii) A is a homomorphic image of a Cohen-Macaulay ring;

iii) A is equidimensional;

iv) A is (S_{n-1}),

then A is Cohen-Macaulay.

Corollary B.

Let A be a Noetherian local ring of type $n \geq 3$. If A contains a field and $\hat{A}$ is (S_{n-1}), then A is Cohen-Macaulay.

Preliminary.

First, we recall some definitions and results on a dualizing complex and on a (FLC) module. We refer the reader to [R1] and [HIO] for detail. Throughout this paper, A denotes a Noetherian local ring with maximal ideal m. Let M be a finitely generated A-module. M is said to be equidimensional if $\dim A/p = \dim M$ for every minimal prime p of M. Let t be an integer. We say that M is (S_t) if depth $M \geq \min\{t, \dim M_p\}$ for every prime ideal p in Supp M. Suppose that A is a homomorphic image of a Cohen-Macaulay ring. Then M is equidimensional if and only if so is $\hat{M}$, and M is (S_t) if and only if so is $\hat{M}$.

Let T be an A-module. $E_A(T)$ denotes the injective envelope of T and $H^i_m(T)$ denotes the i-th local cohomology module of T with respect to m.

A map of complex $\phi^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ is called a *quism* if $\phi^\bullet$ induces an isomorphism in homology. A quism $F^\bullet \to X^\bullet$ is called a *free resolution* of $X^\bullet$ if $F^\bullet$ is a bounded below complex of finitely generated free modules. The resolution $(F^\bullet, d^\bullet)$ is called *minimal* if $d^i \otimes A/m$ is zero map for all i. Every bounded below complex with finitely generated cohomology modules possesses a unique minimal free resolution.

Definition. A complex $D^\bullet$ is called a dualizing complex of A if it satisfies the following conditions:

a) $D^i = \bigoplus_{p \in \mathrm{Spec}\, A, \dim A/p = -i} E_A(A/p)$;

b) $H^i(D^\bullet)$ is finitely generated for all i.

The dualizing complex of A usually denoted by $D^\bullet_A$ if it exists.

We need the following facts about dualizing complexes.

c) If A is complete, then A has a dualizing complex.

d) For any prime ideal p, $(D^\bullet_A)_p[-\dim A/p]$ is a dualizing complex of A_p.

e) For any finitely generated A-module M,

$$H^i_m(M) \cong \mathrm{Hom}_A(H^{-i}(\mathrm{Hom}_A(M, D^\bullet_A)), E_A(A/m)).$$

f) If $F^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, D^\bullet_A)$ is a minimal free resolution, then

$$\ell_A(\mathrm{Ext}^i_A(A/m, M)) = \mathrm{rank}\, F^{-i}.$$

Finally we state the definition and the characterization of (FLC) modules.

Definition. A finitely generated A-module M is said to be (FLC) if $H^i_m(M)$ has finite length for all $i \neq \dim M$.

It is obvious that M is (FLC) if and only if so is $\hat{M}$.

Lemma. Let A be a local ring which has a dualizing complex and M be a finitely generated A-module. Then the following statements are equivalent.

i) M is (FLC).

ii) M is equidimensional and M_p is a Cohen-Macaulay A_p-module for all $p \in \operatorname{Supp} M \backslash \{m\}$.

Lemma. Let M be a d-dimensional (FLC) module. Then for any system of parameters $\mathbf{x}$ for M,

$$\ell_A(M/\mathbf{x}M) - e_{\mathbf{x}A}(M) \leq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell_A(H^i_m(M)),$$

where $\ell_A(N)$ denotes the length of an A-module N and $e_{\mathbf{x}}(M)$ denotes the multiplicity of M with respect to $\mathbf{x}A$. Moreover if $\mathbf{x}H^i_m(M/(x_1, \ldots, x_j)) = 0$ for any $i + j < d$, then the equality holds above. A system of parameters is called a standard system if it satisfies this condition.

Proof of Theorem A.

We need the following theorem to prove Theorem A. For any matrix φ, $I_r(\varphi)$ denotes the ideal generated by the r-minors of φ.

Theorem C.

Let A be a Noetherian local ring containing a field, and m be the maximal ideal of A. We consider a complex

$$F_\bullet : 0 \longrightarrow F_p \xrightarrow{\varphi_p} F_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0,$$

of finitely generated free modules with $F_p \neq 0$ and $\varphi_i(F_i) \subseteq mF_{i-1}$ for $i = 1, \ldots, p$. Suppose that there is some integer $q \geq 0$ and the following inequalities hold

$$\dim A/I_{r_i}(\varphi_i) \leq \dim A - q - i, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

where $r_i = \sum_{j=i}^{p}(-1)^{j-i}\text{rank } F_j$. Then $r_i \geq q+i$ for $i = 1, \ldots, p-1$.

Proof: See [B].

Before proving Theorem A, we prove the following theorem.

Theorem D.

Let A be a local ring containing a field, which is a homomorphic image of a Cohen-Macaulay ring and let n be an integer. If a finitely generated A-module M satisfies the following conditions:

i) $\ell_A(\operatorname{Ext}_A^d(A/m, M)) \leq n$, where $d = \dim M$;

ii) M is equidimensional;

iii) M is (S_{n-1});

iv) M_p is a Cohen-Macaulay A_p-module for all p in $\operatorname{Supp} M$ such that $\dim M_p \leq n$,

then M is Cohen-Macaulay.

Proof: Without loss of generality, we may assume A has a dualizing complex $D_A^\bullet$. We work by induction on d. There is nothing to prove if $d \leq n$. Assume $d > n$. Let $(F^\bullet, \varphi^\bullet)$ be a minimal free resolution of $\operatorname{Hom}_A(M, D_A^\bullet)$. Let p is a prime ideal in $\operatorname{Supp} M \backslash \{m\}$. $(F^\bullet)_p[-\dim A/p]$ is a free resolution of $\operatorname{Hom}_{A_p}(M_p, D_{A_p}^\bullet)$. But this is not necessary minimal. Therefore

$$\ell_A(\operatorname{Ext}_A^d(A/m, M)) \geq \ell_{A_p}(\operatorname{Ext}_{A_p}^{\dim M_p}(A_p/pA_p, M_p)).$$

And so, M_p is Cohen-Macaulay by induction hypothesis. Hence M is (FLC). Assume that M is not Cohen-Macaulay. We put $t = \operatorname{depth} M$. We consider the following complex:

$$G^\bullet : 0 \longrightarrow F^{-t} \xrightarrow{{}^t\varphi^{-t-1}} F^{-t-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F^{-d+1} \xrightarrow{{}^t\varphi^{-d}} F^{-d}.$$

Since M is (FLC), $G_p^\bullet$ is exact for any p in $\operatorname{Supp} M \backslash \{m\}$. Hence $I_{r_i}(\varphi^i)$ is an m-primary ideal for $i = -d, \ldots, -t-1$, where $r_i = \sum_{j=i}^{-t}(-1)^{j-i}\text{rank } F^j$. If $t < d-1$, then applying Proposition C to $G^\bullet$, we have $\text{rank } F^{-d} \geq \dim A + t - d + 2$. On the other hand, if $t = d-1$, then the ideal generated by the maximal minors of φ^{-d} is m-primary. Hence $\text{rank} F^{-d} - \text{rank} F^{-d+1} + 1 \geq \dim A \geq d$. This contradicts assumptions $t \geq n-1$ and $d > n$. ∎

Proof of Theorem A: Suppose that there is a non-Cohen-Macaulay ring A which satisfies the assumption of Theorem A. Investigating the proof of

Theorem D, we may assume that A is (FLC) by localization. Then the dimension of A must be n and the depth of A must be $n-1$. Moreover there are elements $x_1, \ldots, x_n$ of A such that $H^{n-1}(D_A^\bullet) \cong A/(x_1, \ldots, x_n)$. Since $H^{n-1}(D_A^\bullet)$ has finite length, $x_1, \ldots, x_n$ is a system of parameters for A, Furthermore it is a standard system for A. Hence

$$\begin{aligned}\ell_A(A/(x_1, \ldots, x_n)A) - & e_{(x_1,\ldots,x_n)A}(A) \\ & = \ell_A(\mathrm{Hom}_A(A/(x_1, \ldots, x_n)A, E_A(A/m)).\end{aligned}$$

This implies that $e_{(x_1,\ldots,x_n)A}(A) = 0$, which is a contradiction. ▌

Proof of Corollary B: Let A be a complete local ring which is (S_2). Then A is equidimensional [AG]. Therefore Corollary B is directly derived from Theorem A. ▌

Examples.

These results is the best possible in a sense. In this section, we explain it.

Example 1.

Let k be a field and $A = k[\![x, y, z]\!]/(xy, xz)$. Then A is a ring of type two and (S_1) [CHM]. But A is not Cohen-Macaulay. This example shows that we can not omit condition iii) from Theorem A.

Let k be a field and $A = k[\![x, y]\!]/(xy, y^2)$. Then A is a non-Cohen-Macaulay (FLC) local ring of type two. Hence we can not weaken condition iv) of Theorem A. But A is not domain. Does there exists a (FLC) domain of type three which is not Cohen-Macaulay?

Example 2.

Let k be a field and $A = k[\![s^2, s^3, st, t]\!]$. Then A is a (FLC) ring of type four . Because we put $B = A/tA$. Then

$$B \cong k[\![a, b, c]\!]/(a^3 - b^2, c^2, ac, bc).$$

The resolution of k over B begins

$$0 \longleftarrow B \xleftarrow{\alpha} B^3 \xleftarrow{\beta} B^7$$

where $\alpha = (a\ b\ c)$ and $\beta = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & b \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & -b & -a \\ 0 & 0 & c & a & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hence $\mathrm{Ext}_B^1(k, B)$ is the cohomology module of

$$B^7 \xleftarrow{{}^t\beta} B^3 \xleftarrow{{}^t\alpha} B.$$

This is minimally generated by classes $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Finally we remark the *"classical type"* (that is the supremum of the index of reducibility of parameter ideals). Northcott and Rees proved that local rings of classical type one are Cohen-Macaulay [NR]. The author proved similar results like Marley's theorem, Theorem A and Corrolary B on classical type.

References.

[AG] Aoyama,Y. and Goto,S. " *On the endmorphism ring of the canonical module,*" J. Math. Kyoto Univ. 25 (1985), 21-30.

[B] Bruns,W. " *The Evans-Griffith syzygy theorem and Bass numbers,*" Proc. AMS 115 (1992), 939-946.

[CHM] Costa,D., Huneke,C. and Miller,M. " *Complete local domains of type two are Cohen-Macaulay,*" Bull. LMS 17 (1985), 29-31.

[HIO] Herrmann,M., Ikeda,S. and Orbanz,U. *Equimultiplicity and Blowing up,* Springer - Verlag, (1988).

[K1] Kawasaki,T. " *On the index of reducibility of parameter ideals and Cohen-Macaulayness in a local ring,*" preprint.

[K2] Kawasaki,T. " *Local rings of relatively small type are Cohen-Macaulay,*" preprint.

[Mr] Marley,T. " *Unmiced local rings of type two are Cohen-Macaulay,*" Bull. LMS 23 (1991), 43-45.

[Mt] Matsumura,H. *Commutative ring thoery,* (Cambredge Univ. Press, New york, 1976).

[NR] Northcott,D.G. and Rees,D. " *Principal systems,*" Quart. J. Math. Oxford 8 (2) (1957), 119-127.

[R1] Roberts,P. '*Homological invariants of modules over commutative rings,* Séminaire de Mathématiques Supérieures (Montreal Univ. Press, 1980).

[R2] Roberts,P. " *Rings of type 1 are Gorenstein,*" Bull.LMS 15 (1983), 48- 50.

デデキント和の初等的性質とMordellの公式の一般化

東海大学理学部 渡辺純三

§1. Dedekind sums

We want to prove some formulas on Dedekind sums which we use in the next section.

The symbol $((x))$ is defined by

$$((x)) = \begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2} & \text{if } x \text{ is not an integer,} \\ 0 & \text{if } x \text{ is an integer.} \end{cases}$$

Note that $((x))$ is periodic with period 1, also that it is an odd function: $((-x)) = -((x))$.

Lemma 1. Let a be an integer. Then

$$\sum_{j \bmod a} \left(\left(\frac{j+x}{a}\right)\right) = ((x)).$$

Proof. See [3] p.4, Lemma 1.

Let a, b be coprime integers with a>0. The Dedekind sum s(h,k) is defined by

$$s(b,a) = \sum_{i \bmod a} \left(\left(\frac{i}{a}\right)\right)\left(\left(\frac{bi}{a}\right)\right).$$

Lemma 2. Let a, b be coprime integers, a>0. Then

$$\sum_{i=1}^{a-1} \frac{i}{a}\left(\left(\frac{ib}{a}\right)\right) = s(b,a).$$

Proof. See [3] p.8, the first paragraph of "Second proof."

Proposition 3. Let a, b be integers such that (a,b)=1.

(1) $$\sum_{i=1}^{a-1} \left(\left(\frac{bi}{a}\right)\right) = 0.$$

(2) $$\sum_{i=1}^{a-1} \left(\left(\frac{bi}{a}\right)\right)^3 = 0.$$

(3) $$\sum_{i=1}^{a-1}((\frac{i}{a}))^2((\frac{bi}{a}))=0.$$

Proof. Put $z(i)=((\frac{bi}{a}))$. One sees that $z(a-i)=-z(i)$ for any i. Hence $\sum_{i=1}^{a-1} z(i)=0$. This proves (1). (2) and (3) are proved similarly.

Corollary 4. Let a, b be as above and set $S=\{(i,j) \mid 0 \le i < a,\ 0 \le j < b\}$, $E=i/a+j/b$. Then

(4) $$\sum_S ((cE))=0.$$

(5) $$\sum_S ((cE))^3=0.$$

(6) $$\sum_S ((E))^2((cE))=0.$$

Proof. One sees easily that the set $\{((E)) \mid (i,j)\in S\}$ is the same as $\left\{((\frac{t}{ab})) \mid 0 \le t < ab\right\}$. Hence (4) and (5) and (6) follow from Proposition 3.

Proposition 5. Let a, b, c be positive integers, coprime in pairs. Set $S=\{(i,j) \mid 0 \le i < a,\ 0 \le j < b\}$, $E=i/a+j/b$. Then

(7) $$\sum_S E((cE))=s(bc,a)+s(ac,b).$$

(8) $$\sum_S ((E))((cE)) = s(c,ab).$$

(9) $$\sum_S [E]((cE)) = s(bc,a) + s(ac,b) - s(c,ab).$$

Proof. By Lemma 1, we have $\sum_j ((\frac{ci}{a} + \frac{cj}{b})) = ((\frac{cbi}{a}))$. Now $\sum_{i,j} \frac{i}{a}((cE)) = \sum_i \frac{i}{a} \sum_j ((\frac{ci}{a} + \frac{cj}{b})) = \sum_i \frac{i}{a}((\frac{cbi}{a}))$ which is equal to s(cb,a) by Lemma 2. By symmetry we get (7). As was noticed in the proof of Corollary 4, the left hand side of (8) may be transformed as $\sum_{t=1}^{ab-1} ((\frac{t}{ab}))((\frac{ct}{ab}))$ which is equal to s(c,ab) by definition. To prove (9) notice that $[E] = E - ((E)) - \frac{1}{2}$, except when a=b=0, and when a=b=0, $((cE)) = 0$. Thus the left hand side of (9) is equal to $\sum_S (E - ((E)) - \frac{1}{2})((cE))$. Now the desired equality follows from (4), (7) and (8).

Proposition 6. Let a, b, c, E, S be as above.

(10) $$\sum_S [E]E((cE)) = \frac{3}{2}\{s(bc,a) + s(ac,b)\} - \frac{1}{2}\{s(c,a) + s(c,b)\} - s(c,ab).$$

(11) $$\sum_S [E]((cE))^2 = \frac{1}{2}\{s(1,ab) - s(1,a) - s(1,b)\}.$$

Proof. Put $S_1 = \left\{(i,j) \in S \,\middle|\, 0 < i < a,\ 0 < j < b,\ \frac{i}{a} + \frac{j}{b} < 1\right\}$,

$$S_2 = \left\{(i,j) \in S \,\middle|\, 0 < i < a,\ 0 < j < b,\ \frac{i}{a} + \frac{j}{b} > 1\right\}.$$

Notice that no pairs (i,j) in S can satisfy $\frac{i}{a} + \frac{j}{b} = 1$, since a and b are coprime. So the set $S \setminus S_1 \cup S_2$ consists of pairs (i,j) such that $i=0$ or $j=0$. Now to prove (10) consider

$$\sum_S E((cE)) = \sum_{S_1} E((cE)) + \sum_{S_2} E((cE)) + \sum_{0 \le i < a} \left(\frac{i}{a}\right)\left(\left(\frac{ci}{a}\right)\right) + \sum_{0 < j < b} \left(\frac{j}{b}\right)\left(\left(\frac{cj}{b}\right)\right).$$

The last two sums are $s(c,a)+s(c,b)$ by Lemma 2. We consider the first two sums. Notice that the map $(i,j) \to (a-i, b-j)$ gives a bijection $S_1 \to S_2$. Hence we have

$$\begin{aligned}\sum_{S_1} E((cE)) + \sum_{S_2} E((cE)) &= \sum_{S_2} (2 - E)((-cE)) + \sum_{S_2} E((cE)) = \sum_{S_2} -2((cE)) + 2\sum_{S_2} E((cE)) \\ &= \sum_S -2[E]((cE)) + 2\sum_S [E]E((cE)).\end{aligned}$$

Thus we have proved that

$$2\sum_S [E]E((cE)) = \sum_S E((cE)) + \sum_S 2[E]((cE)) - s(c,a) - s(c,b).$$

Now the proof of (10) is complete by (7) and (9).

To prove (11) we start with

$$\sum_S ((cE))^2 = \sum_{S_1} ((cE))^2 + \sum_{S_2} ((cE))^2 + \sum_{0 \le i < a} \left(\left(\frac{ci}{a}\right)\right)^2 + \sum_{0 < j < b} \left(\left(\frac{cj}{b}\right)\right)^2.$$

The left hand side of this equality does not depend on c and is equal to $s(1,ab)$ by (8), and similarly the last two sums of the right hand side are equal to s(1,a)+s(1,b) by the definition of Dedekind sum. By the bijection $S_1 \to S_2$, $(i,j)\to(a-i,b-j)$ the first two sums of the right hand side are equal to

$$\sum_{S_2}((2c-cE))^2+\sum_{S_2}((cE))^2=2\sum_{S_2}((cE))^2=2\sum_{S}[E]((cE))^2.$$ Now we get (11) easily.

Proposition 7. Let a, b be coprime integers, with a>0.

$$\sum_{i=0}^{a-1}\left(\frac{i}{a}\right)^2\left(\left(\frac{bi}{a}\right)\right)=s(b,a). \tag{12}$$

Proof. By Lemma 2, it suffices to prove that

$$\sum_{i}\left(\left(\frac{i}{a}\right)^2-\left(\frac{i}{a}\right)\right)\left(\left(\frac{bi}{a}\right)\right)=0.$$

Put $z(i)=\left(\left(\frac{i}{a}\right)^2-\left(\frac{i}{a}\right)\right)\left(\left(\frac{bi}{a}\right)\right)$. Then notice that $z(a-i)=-z(i), \forall i$, which implies $\sum z(i)=0$.

Proposition 8. In addition to the notation of Proposition 5 let E'=i/a-j/b.

$$\sum_{S}E((cE))^2=s(1,ab)-\frac{1}{2}\{s(1,a)+s(1,b)\}. \tag{13}$$

$$\sum E'((cE'))^2 = s(1,ab) - \frac{1}{2}\{s(1,a) - s(1,b)\}.$$

Furthermore, taking into consideration the formula (3), we see that

$$\sum_{i=0}^{a-1}\sum_{j=0}^{b-1}\frac{i}{a}((cE'))^2 = \sum_{i=0}^{a-1}\frac{i}{a}\sum_{j=0}^{b}((\frac{ci}{a}-\frac{cj}{b}))^2$$

$$= \sum_{i=0}^{a-1}\frac{i}{a}\sum_{j=0}^{b}((\frac{ci}{a}+\frac{c(b-j)}{b}))^2 = \sum_{i=0}^{a-1}\frac{i}{a}\sum_{j=0}^{b}((\frac{ci}{a}+\frac{cj}{b}))^2 = \sum_{i=0}^{a-1}\sum_{j=0}^{b-1}\frac{i}{a}((\frac{ci}{a}+\frac{cj}{b}))^2.$$

And similarly

$$\sum_{i,j}\frac{j}{b}((cE'))^2 = \sum_{j}\frac{j}{b}\sum_{i}((\frac{ci}{a}-\frac{cj}{b}))^2 = \sum_{j}\frac{j}{b}\sum_{i}((-\frac{ci}{a}-\frac{cj}{b}))^2 = \sum_{j}\frac{j}{b}\sum_{i}((\frac{ci}{a}+\frac{cj}{b}))^2.$$

After all we have proved that $\sum E'((cE'))^2 = \sum E'((cE))^2$, hence (14) as desired. (15) is an immediate consequence of (13) and (14).

Proposition 9. With the same notation as before we have

(16) $$\sum_{i,j}(\frac{ij}{ab})((cE)) = \frac{1}{2}\{s(bc,a)+s(ac,b)-s(c,a)-s(c,b)\}.$$

Proof. Let S1 and S2 be as in the proof of Proposition 6. Then the indeces in $S\setminus S_1\cup S_2$ are such that either i=0 or

$j=0$. Hence we have $\sum_S \frac{ij}{ab}((cE)) = \sum_{S_1} \frac{ij}{ab}((cE)) + \sum_{S_2} \frac{ij}{ab}((cE))$. Using the bijection $S_1 \to S_2$ given by $(i,j) \to (a-i, b-j)$ one sees that

$$\sum_{S_1} \frac{ij}{ab}((cE)) = \sum_{S_2} \frac{(a-i)(b-j)}{ab}((2c-cE)).$$

Now it follows that

$$\sum_S \frac{ij}{ab}((cE)) = \sum_{S_1} \frac{ij}{ab}((cE)) + \sum_{S_2} \frac{ij}{ab}((cE))$$

$$= \sum_{S_2}((-cE)) + \sum_{S_2} E((cE)) = \sum_S [E]((-cE)) + \sum_S [E]E((cE)).$$

By (9) and (10) we get the desired result.

§2. The number of lattice points

Let a, b, c and d be positive integers. We consider the number of lattice points (i,j,k,h) which satisfy the inequalities:

$$0<\frac{i}{a}+\frac{j}{b}+\frac{k}{c}+\frac{h}{d}<1,$$

$$0\le i<a,\ 0\le j<b,\ 0\le k<c,\ 0\le h<d.$$

After [3] we will denote this number by $N_4(a,b,c,d)=N_4$. In the three dimensional case the number $N_3(a,b,c)$ has been expressed in [3] when a, b, c are pairwise coprime.

Let $E=\frac{i}{a}+\frac{j}{b}+\frac{k}{c}+\frac{h}{d}$. Then as in the three dimensional case one sees easily that

$$-6(N_4+1)=\sum_{i,j,k,h}([E]-1)([E]-2)([E]-3), \tag{17}$$

where the indices run $0\le i<a$, $0\le j<b$, $0\le k<c$, $0\le h<d$. Indeed the points (i,j,k,h) with $0\le[E]<1$ increase the sum by -6 while those with $1\le[E]<4$ contribute none to the sum. Observe that if E is not an integer then by definition $[E]=E-((E))-\frac{1}{2}$, and if E is an integer then $[E]=E$ is greater than $E-((E))-\frac{1}{2}$ by $\frac{1}{2}$. Hence we may replace $[E]$ in the right hand side of (17) by $E-((E))-\frac{1}{2}$ with the correcting terms as follows:

$$(18)\qquad -6(N_4+1)=\sum_{i,j,k,h}(E-((E))-\frac{3}{2})(E-((E))-\frac{5}{2})(E-((E))-\frac{7}{2})$$
$$+\frac{105}{8}C_0+\frac{15}{8}C_1-\frac{3}{8}C_2+\frac{3}{8}C_3,$$

where C_λ are the number of points (i,j,k,h) such that $E=\lambda$. Note that $C_0=1$ and if a,b,c,d are coprime in pairs then $C_1=C_2=C_3=0$.

The summand on the right hand side of (18) is

$$(19)\qquad (E-((E))-\frac{3}{2})(E-((E))-\frac{5}{2})(E-((E))-\frac{7}{2})$$
$$=-\frac{105}{8}+\frac{71}{4}E-\frac{15}{2}E^2+E^3-\frac{71}{4}((E))+15E((E))-3E^2((E))-\frac{15}{2}((E))^2+3E((E))^2-((E))^3,$$

a cubic polynomial in E and ((E)) of degree three. Thus N_4 is actually computed if we know the sums of the form $\sum E^p((E))^q$, with p+q at most three.

As in the three dimensional case the sums $\sum E^1$, $\sum E^2$, $\sum E^3$ are lengthy but can be elementarily computed using the power sum formulas. (For details we refer to [3] Note 4.) We confine ourselves just by recording the results.

$$(20)\qquad \sum E=2abcd-\frac{1}{2}\{abc+abd+acd+bcd\}.$$

$$(21)\ \sum E^2$$
$$=\frac{13}{3}abcd-2(abc+abd+acd+bcd)+\frac{1}{2}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$+\frac{1}{6}(\frac{bcd}{a}+\frac{acd}{b}+\frac{abd}{c}+\frac{abc}{d}).$$

$$(22)\qquad \sum E^3=10abcd-\frac{13}{2}(abc+abd+acd+bcd)$$

$$+3(ab+ac+ad+bc+bd+cd)-\frac{3}{4}(a+b+c+d)+\frac{bcd}{a}+\frac{acd}{b}+\frac{abd}{c}+\frac{abc}{d}$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{bc+cd+db}{a}+\frac{ac+cd+da}{b}+\frac{ab+bd+da}{c}+\frac{ab+bc+ca}{d}\right).$$

It remains to compute the sums $\sum E^p((E))^q$, with $q>0$. Notice that the set $\{((E)) \mid 0\le i<a, 0\le j<b, 0\le k<c, 0\le h<d\}$ coincides with $\{t/abcd \mid 0\le t<0\}$ as a,b,c,d are coprime in pairs and $((E))$ is periodic with period 1. Hence we have $\sum((E))=\sum((E))^3=0$ by Proposition 3. Moreover $\sum((E))^2=s(1,abcd)$ by definition. Now the remaining sums are $\sum E((E))$, $\sum E((E))^2$ and $\sum E^2((E))$. These are computed as follows:

(23) $\sum E((E))=s(bcd,a)+s(cda,b)+s(dab,c)+s(abc,d)$.

(24) $\sum E((E))^2=2s(1,abcd)$

$$-1/2\{s(1,bcd)+s(1,cda)+s(1,dab)+s(1,abc)\}.$$

(25) $\sum E^2((E))=4\{s(bcd,a)+s(cda,b)+s(dab,c)+s(abc,d)\}$

$$-\{s(ab,c)+s(bc,a)+s(ca,b)\}$$
$$-\{s(ab,d)+s(bd,a)+s(da,b)\}$$
$$-\{s(ac,d)+s(cd,a)+s(da,c)\}$$
$$-\{s(bc,d)+s(cd,b)+s(db,c)\}.$$

Proof of (23). Recall that $\displaystyle\sum_{j,k,h}((E))=\sum_{t=0}^{bcd-1}\left(\left(\frac{i}{a}+\frac{t}{bcd}\right)\right)$, which is further equal to $\left(\left(\frac{bcdi}{a}\right)\right)$ by Lemma 1. Thus we get $\displaystyle\sum_{i,j,k,h}\frac{i}{a}((E))=\sum_{i=0}^{a-1}\frac{i}{a}\left(\left(\frac{bcdi}{a}\right)\right)=s(bcd,a)$ by Lemma 2. By cyclic permutation of the letters we get the desired result. (This is a direct generalization of the three dimensional case. See [3] p.42.)

Proof of (24). Recall that $\sum_{j,k,h} \frac{i}{a}((E))^2 = \frac{i}{a} \sum_{j,k,h}((E))^2 = \frac{i}{a} \sum_{t=0}^{bcd-1} ((\frac{i}{a} + \frac{t}{bcd}))^2$. Thus by (15) we have $\sum_{i,j,k,h} \frac{i}{a}((E))^2 = \frac{1}{2}\{s(1, abcd) - s(1, bcd)\}$.

By cyclic permutation we have the desired result.

Proof of (25). As in the argument of the previous formula we have

$$\sum_{i,j,k,h} (\frac{i}{a})^2((E)) = \sum_{i}(\frac{i}{a})^2 \sum_{j,k,h}((E)) = \sum_{i}(\frac{i}{a})^2 \sum_{t=0}^{bcd-1} ((\frac{i}{a} + \frac{t}{bcd}))$$

By Lemma 2 and by Proposition 7 this is equal to

$$\sum_{i}(\frac{i}{a})^2((\frac{bcdi}{a})) = s(bcd, a).$$

Thus we have proved that

$$\sum_{i,j,k,h} (\frac{i}{a})^2((E)) = s(bcd, a). \tag{26}$$

Next we consider

$$\sum_{k,h} \frac{ij}{ab}((E)) = \frac{ij}{ab} \sum_{k,h} ((\frac{i}{a} + \frac{j}{b} + \frac{hc + kd}{cd})) = \frac{ij}{ab} \sum_{t=0}^{cd-1}((\frac{i}{a} + \frac{j}{b} + \frac{t}{cd})).$$

By Lemma 2 $\sum_{t=0}^{cd-1}((\frac{i}{a} + \frac{j}{b} + \frac{t}{cd})) = ((\frac{cdi}{a} + \frac{cdj}{b}))$. Now we apply Proposition 9 to get

$$(27)\qquad \sum_{i,j,k,h} 2\frac{ij}{ab}((E)) = \{s(acd,b)+s(bcd,a)-s(cd,a)-s(cd,b).$$

Now since

$$E^2=\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{j}{b}\right)^2+\left(\frac{k}{c}\right)^2+\left(\frac{h}{d}\right)^2+2\left\{\left(\frac{ij}{ab}\right)+\left(\frac{ik}{ac}\right)+\left(\frac{ih}{ad}\right)+\left(\frac{jk}{bc}\right)+\left(\frac{jh}{bd}\right)+\left(\frac{kh}{cd}\right)\right\},$$ we

obtain the desired formula (25) by permuting the letters a,b,c,d, in the formulas (26) and (27).

Remark 10. By direct computation (cf. [3] Lemma 2) we have

$$(28)\qquad s(1,a)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{6a}+\frac{a}{12}.$$

Hence the formula (24) above is a rational function in a, b, c, d. This converted form will be used in the expression of N_4 in the next paragraph.

Now we go back to the computation of N_4. Let a, b, c, d be positive integers, pairwise coprime, so $C_0=1$ and $C_1=C_2=C_3=0$ in the right hand side of (18). We have collected all necessary information to compute the sum in (19). The result is lengthy to write down without grouping appropriate terms. Since the result is obviously symmetric in the letters in a, b, c, d, we introduce the partial sum $\tilde{N}_3(a,b,c)$ as follows:

$$\tilde{N}_3(a,b,c)=-\{s(bc,a)+s(ca,b)+s(ab,c)\}+\frac{1}{6}abc+\frac{1}{12abc}$$
$$+\frac{1}{12}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\frac{1}{8}(bc+ca+ab)+\frac{1}{12}(a+b+c).$$

Now we can state our result.

Theorem 11. Let a, b, c, d be positive integers, coprime in pairs. Let $N_4=N_4(a,b,c,d)$ be the number of integral solutions of the inequalities:

$$0<\frac{i}{a}+\frac{j}{b}+\frac{k}{c}+\frac{h}{d}<1,$$

$$0\le i<a,\ 0\le j<b,\ 0\le k<c,\ 0\le h<d.$$

Then

$$\begin{aligned}N_4(a,b,c,d)=&\frac{1}{2}\{\tilde{N}_3(a,b,c)+\tilde{N}_3(a,b,d)+\tilde{N}_3(a,c,d)+\tilde{N}_3(b,c,d)\}\\&-\frac{1}{2}(s(bcd,a)+s(acd,b)+s(abd,c)+s(abc,d))\\&+\frac{1}{24}\left(\frac{bcd}{a}+\frac{acd}{b}+\frac{abd}{c}+\frac{abc}{d}\right)+\frac{1}{24}abcd+\frac{1}{24abcd}+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Remark 12. $\tilde{N}_3(a,b,c)$ is a slight modification of $N_3(a,b,c)$, which is given by [3] as follows:

$$\begin{aligned}N_3(a,b,c)=&-\{s(bc,a)+s(ca,b)+s(ab,c)\}+\frac{1}{6}abc+\frac{1}{12abc}\\&+\frac{1}{12}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\frac{1}{4}(bc+ca+ab)+\frac{1}{4}(a+b+c)-2.\end{aligned}$$

Remark 13. In [3] there is a conjecture which says

$$N_4(a,b,c,d)\equiv\frac{1}{8}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

This is plain wrong as can be seen by the examples $N_4(2,5,9,13)=195$ and $N_4(3,4,5,7)=73$. In the three dimensional case it is true that

$$N_3(a,b,c) \equiv \frac{1}{4}(a+1)(b+1)(c+1) \pmod 2,$$

which follows from the fact:

$$\left(s(bc,a)-\frac{bc}{12a}\right)+\left(s(ca,b)-\frac{ca}{12b}\right)+\left(s(ab,c)-\frac{ab}{12c}\right) \equiv -\frac{1}{4}-\frac{abc}{12}+\frac{1}{12abc} \pmod 2.$$

This last formula itself can be generalized as follows:

$$\left(s(bcd,a)-\frac{bcd}{12a}\right)+\left(s(cda,b)-\frac{cda}{12b}\right)+\left(s(dab,c)-\frac{dab}{12c}\right)+\left(s(abc,d)-\frac{abc}{12d}\right) \equiv -\frac{1}{4}-\frac{abcd}{6}+\frac{1}{12abcd} \pmod 2$$

Proof is carried out along the same line with the three dimensional case. Details are let to the reader.

曲線と曲面の特異点の接錐について

横浜国立大学教育学部　　大石　彰

(Akira Ooishi)

0．序．（R，m，k）がネーター局所環でIがRのm－準素イデアルとする．次数付き環 $G(I)=\oplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ をIの associated graded ring または接錐（tangent cone）と言う．これは可換環論，代数幾何および特異点の理論などにおいて重要な次数付き環である．G（I）が Cohen-Macaulay 環または Gorenstein 環になるための条件については多くの人々により研究されている．この論文は［13］，［14］，［15］の続きである．即ち，「イデアルの種数」と「還元指数」の概念を用いて，上の問題を研究することが目的である．特に，Rが曲線及び曲面の「有理型特異点」，「楕円型特異点」などの場合にG（I）が Cohen-Macaulay 環または Gorenstein 環になるようなイデアルIを決定する．

1．一般論．この論文を通じて（R，m，k）はd次元 Cohen-Macaulay 局所環で剰余体kは無限体，IはRのm－準素イデアルであるとする．Iの整閉包 $\overline{I}$ とは

$$\overline{I}=\{x\in R \mid x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0,\ a_i\in I^i\}$$

で定義されるRのイデアルである．$\overline{I}=I$ のときIが整閉であると言う．任意の自然数nに対して I^n が整閉であるときIが正規（normal）であると言う．Rのm－準素イデアルJがIの還元（reduction)であるとは $J\subset I$ かつ $\overline{J}=\overline{I}$ であること，言い換えれば，ある自然数nに対して $JI^n=I^{n+1}$ が成り立つことである（［10］参照）．Iの還元指数（reduction exponent）$\delta(I)$ とは $JI^n=I^{n+1}$ が成り立つパラメーター・イデアル $J\subset I$ が存在するような最小の非負整数nのことである．$\delta(I)\leq 1$ のときIが安定（stable）であると言う（同値な条件については［11］，［12］参照）．Valla［21］によりIが安定ならば次数付き環G（I）は Cohen-Macaulay 環である．

$$F(G(I),t)=\Sigma_{n\geq 0}\,\mathrm{length}(I^n/I^{n+1})\,t^n$$

をG（I）の Hilbert級数として

$$(1-t)^dF(G(I),t)=a_0+a_1t+\cdots+a_st^s,\quad a_s\neq 0$$

とおく．G（I）が Cohen-Macaulay 環ならば $s=\delta(I)$ が成り立つ．等式 $a_i=a_{s-i}$

（$0 \leqq i \leqq s$）が成り立つとき，G（I）が（Hilbert 級数の意味で）対称的（symmetric）であると言う．

定理 1.1（[16]）．G（I）が Gorenstein 環であるためには，R が Gorenstein 環で G（I）が Cohen-Macaulay 環かつ対称的であることが必要十分である．

命題 1.2．R が Gorenstein 局所環として

$$(1-t)^d F(G(I),\ t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_s t^s,\quad a_s \neq 0$$

とおく．G（I）が Cohen-Macaulay 環ならば

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_i \geqq a_s + a_{s-1} + \cdots + a_{s-i},\quad 0 \leqq i \leqq s$$

が成り立つ．

［証明］J を I の極小還元として R／J のイデアル I／J を考えることにより $d=0$ と仮定して良い．このとき

$$G(I) = R/I \oplus I/I^2 \oplus \cdots \oplus I^s/I^{s+1},\quad I^{s+1} = 0,$$

$$a_i = \mathrm{length}(I^i/I^{i+1}),\quad 0 \leqq i \leqq s.$$

よって

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \cdots + a_i &= \mathrm{length}(R/I^{i+1}) \\ &= \mathrm{length}((R/I^{i+1})^*) \\ &= \mathrm{length}(\mathrm{ann}(I^{i+1})) \\ &\geqq \mathrm{length}(I^{s-i}) \\ &= a_s + a_{s-1} + \cdots + a_{s-i}. \end{aligned}$$

命題 1.3（[15]）．R が Gorenstein 局所環で I が安定とする．このとき

（1）一般に，不等式 $e(I) \leqq 2\,\mathrm{length}(R/I)$ が成り立つ，

（2）G（I）が Gorenstein 環であるためには，I がパラメーター・イデアルであるか $e(I) = 2\,\mathrm{length}(R/I)$ であることが必要十分である．

I の Δ－種数 $g_\Delta(I)$ を

$$g_\Delta(I) = e(I) + (d-1)\,\mathrm{length}(R/I) - \mathrm{length}(I/I^2)$$

で定義する（[12]）．常に$g_\Delta(I)\geqq 0$であり，$g_\Delta(I)=0$であるためにはIが安定であることが必要十分である．$g_\Delta(m)=g_\Delta(R)$とおく．

命題 1.4. Rが Gorenstein 局所環で，$G(I)$が Cohen-Macaulay 環かつ$\delta(I)=2$とする．このとき

（1）一般に，不等式$g_\Delta(I)\leqq \mathrm{length}(R/I)$が成り立つ，

（2）$G(I)$が Gorenstein 環であるためには，$g_\Delta(I)=\mathrm{length}(R/I)$であることが必要十分である．

［証明］$(1-t)^d F(G(I),\ t)=a_0+a_1t+a_2t^2$とおくと

$$
\begin{aligned}
a_0&=\mathrm{length}(R/I),\\
a_1&=\mathrm{length}(I/I^2)-d\,\mathrm{length}(R/I),\\
a_2&=e(I)-(a_0+a_1)\\
&=e(I)-(d-1)\,\mathrm{length}(R/I)-\mathrm{length}(I/I^2)\\
&=g_\Delta(I).
\end{aligned}
$$

命題 1.2から$g_\Delta(I)=a_2\leqq a_0=\mathrm{length}(R/I)$．定理 1.1より$G(I)$が Gorenstein 環であるためには，$G(I)$が対称的であること，即ち，$a_0=a_2$であることが必要十分である．

以下，Rが解析的不分岐，即ち，完備化$\hat{R}$が被約で$d\geqq 1$と仮定する．このとき，次の条件を満たす整数$e_i=e_i(I)$，$\overline{e}_i=\overline{e}_i(I)$（$0\leqq i\leqq d$）が一意的に定まる：$n$が十分大な整数のとき

$$
\mathrm{length}(R/I^{n+1})=e_0\begin{bmatrix} n+d\\ d\end{bmatrix}-e_1\begin{bmatrix} n+d-1\\ d-1\end{bmatrix}+\cdots+(-1)^d e_d,
$$

$$
\mathrm{length}(R/\overline{I^{n+1}})=\overline{e}_0\begin{bmatrix} n+d\\ d\end{bmatrix}-\overline{e}_1\begin{bmatrix} n+d-1\\ d-1\end{bmatrix}+\cdots+(-1)^d \overline{e}_d.
$$

Iの切断種数（sectional genus）$g_s(I)$，正規切断種数（normal sectional genus）$\overline{g}_s(I)$を

$$
\begin{aligned}
g_s(I)&=e_1(I)-e(I)+\mathrm{length}(R/I),\\
\overline{g}_s(I)&=\overline{e}_1(I)-e(I)+\mathrm{length}(R/\overline{I})
\end{aligned}
$$

で定義する．$g_s(\mathfrak{m})=g_s(R)$，$\overline{g}_s(\mathfrak{m})=\overline{g}_s(R)$とおく（[12] 参照）．

例 1.5. （1）$d=1$のとき，$B(I)=\cup_{n\geq 0}(I^n:I^n)$をIの blowing-up，$\overline{R}$をRの整閉包とすると，

$$e_1(I)=\mathrm{length}(B(I)/R),$$
$$g_s(I)=\mathrm{length}(IB(I)/I),$$
$$\overline{e}_1(I)=\mathrm{length}(\overline{R}/R),$$
$$\overline{g}_s(I)=\mathrm{length}(I\overline{R}/\overline{I}).$$

（2）$d=2$のとき，$X=\mathrm{Proj}(\oplus_{n\geq 0}\overline{I^n})$をRのIに沿ったnormalized blowing-up とすると，Iの正規種数（normal genus）$\overline{g}(I)$を

$$\overline{g}(I):=\overline{e}_2(I)=\mathrm{length}(H^1(X,\mathcal{O}_X))$$

で定義する．JをIの極小還元として

$$v_n=\mathrm{length}(\overline{I^{n+1}}/J\overline{I^n})$$

とおくと

$$\overline{g}(I)=\Sigma_{n\geq 1}nv_n$$
$$\overline{g}_s(I)=\Sigma_{n\geq 1}v_n$$
$$\overline{p}_a(I):=\overline{g}(I)-\overline{g}_s(I)=\Sigma_{n\geq 2}(n-1)v_n$$

が成り立つ（[3]，[5] 参照）．

（3）常に$g_s(I)\geq 0$であり，$g_s(I)=0$であるためにはIが安定であることが必要十分である．その他$g_s(I)$の性質については [12] 参照.

定理 1.6（伊藤史朗）．Rが解析的不分岐でIが整閉とする．

（1）一般に$\overline{g}_s(I)\geq g_\Delta(I)\geq 0$，

（2）$\overline{g}_s(I)=0$であるためにはIが安定かつ正規であることが必要十分である．

（3）$\overline{g}_s(I)=g_\Delta(I)$であるためには$\delta(I)\leq 2$かつIが正規であることが必要十分である．更にこのときG（I）は Cohen-Macaulay 環である．

[証明] $d=1$のとき：（1），（2）は [12] 参照．（3）$\overline{g}_s(I)-g_s(I)=\mathrm{length}(\overline{R}/B(I))$，$g_\Delta(I)\leq g_s(I)\leq\overline{g}_s(I)$より$\overline{g}_s(I)=g_\Delta(I)$であるためには$\overline{R}=B(I)$かつ$g_s(I)=g_\Delta(I)$，即ち，$\overline{R}=B(I)$かつ$\delta(I)$

$\leqq 2$であることが必要十分である（[13, Proposition 3.1]）．これは [13, Lemma 5.1]と同様に$\delta(I) \leqq 2$かつIが正規であることと同値である．よってIは安定であるか正規であるから$G(I)$は Cohen-Macaulay 環である（[13, Lemma 5.1] 参照）．次に$d \geqq 2$として，JをIの極小還元とする．（1）[5, Theorem 2]から

$$\overline{g}_s(I) \geqq \mathrm{length}(\overline{I^2}/JI) \geqq \mathrm{length}(I^2/JI) = g_\Delta(I).$$

（2）は [5, Corollary 6]から従う．（3）$\overline{g}_s(I) = g_\Delta(I)$であるためには，$\overline{g}_s(I) = \mathrm{length}(\overline{I^2}/JI)$かつ$I^2$が整閉であることが必要十分である．[5, Theorem 2]より等式$\overline{g}_s(I) = \mathrm{length}(\overline{I^2}/JI)$は，任意の$n \geqq 0$に対して$\overline{I^{n+2}} = J^n\overline{I^2}$が成り立つことと同値で，$I^2$が整閉のとき，これは$\delta(I) \leqq 2$かつ$I$が正規であることと同値である．最後の主張は [4, Proposition 3]から従う．

例 1.7. 自然数r，eが$1 \leqq r \leqq (e-1)/2$を満たすとき

$$R = k[[t^e, t^{e+1}, \cdots, t^{2e-r-1}]]$$

とおくと$\overline{g}_s(R) = g_\Delta(R) = r$が成り立つ．$R$が Gorenstein 環であるためには$r = 1$であることが必要十分である．

系 1.8. Iが整閉で$\overline{g}_s(I) \leqq 1$ならば$G(I)$は Cohen-Macaulay 環である．

系 1.9. $\overline{g}_s(R) = 1$とすると，$\mathrm{emb}(R) = e(R) + d - 1$または$\mathrm{emb}(R) = e(R) + d - 2$かつ$\mathfrak{m}$が正規である．

［証明］$\mathrm{emb}(R) = e(R) + d - 1$でなければ，$1 \leqq g_\Delta(R) \leqq \overline{g}_s(R) = 1$より$\overline{g}_s(R) = g_\Delta(R) = 1$．よって$\mathrm{emb}(R) = e(R) + d - 2$かつ定理 1.6より$\mathfrak{m}$は正規である．

命題 1.10. Rが Gorenstein 環，Iが整閉で$\overline{g}_s(I) = 1$のとき次は同値である：

（1）$G(I)$が Gorenstein 環，

（2）$I = \mathfrak{m}$またはIが安定で$e(I) = 2\,\mathrm{length}(R/I)$．

［証明］Iはパラメーター・イデアルでない．実際，もしIがパラメーター・イデアルならば [1, Theorem 1.1] により（Rは正則局所環で）Iは正規になるので$\overline{g}_s(I) =$

$g_s(I)=0$となり矛盾. (1) ⇒ (2) : Iが安定でないとすると$1\leq g_\Delta(I)\leq\overline{g}_s(I)=1$より$g_\Delta(I)=\overline{g}_s(I)=1$. よって定理 1.6より$\delta(I)=2$, Iは正規, $G(I)$は Cohen-Macaulay 環で命題 1.4より$\mathrm{length}(R/I)=g_\Delta(I)=1$となり$I=m$が成り立つ. (2) ⇒ (1) : Iが安定のときは命題 1.3による. $I=m$とすると$g_\Delta(R)\leq\overline{g}_s(R)=1$. よって [11] から$G(m)$が Gorenstein 環である.

命題 1.11. Rが Gorenstein 環で$\overline{g}_s(R)\leq 2$ならば$G(m)$が Gorenstein 環である.
[証明] $g_s(R)\leq\overline{g}_s(R)\leq 2$, $g_s(R)\neq 2$ ([12, Theorem 3.6, (3)]) より$g_s(R)\leq 1$. よって ([12, Theorem 3.6]) より$G(m)$は Gorenstein 環である.

補題 1.12. $J\subset I$がRのm－準素イデアルでJがIの還元であるとする. $G(J)$が Cohen-Macaulay環で$\delta(I)$がIの極小還元の取り方に依らなければ, $\delta(J)\leq\delta(I)$が成り立つ.
[証明] $\delta(I)=n$としてKをJの極小還元とすると, KはIの極小還元で仮定より$KI^n=I^{n+1}$. $J^{n+1}\subset I^{n+1}\subset K$かつ$G(J)$が Cohen-Macaulay 環なので$KJ^n=K\cap J^{n+1}=J^{n+1}$. 故に$\delta(J)\leq n$.

例 1.13. $\mathrm{depth}(G(I))\geq\dim(R)-1$ならば$\delta(I)$は$I$の極小還元の取り方に依らない ([2, Theorem 2.1]参照). 例えば, $G(I)$が Cohen-Macaulay 環, $\dim(R)=1$, または$\dim(R)=2$, $I=m$でmが正規ならば$\delta(I)$はIの極小還元の取り方に依らない.

2. 曲線の特異点. この節ではRは解析的不分岐な1次元ネーター局所環として, $\overline{R}$をその整閉包とする. Rの任意の整閉イデアルが安定であるとき, RがArf 環であると言う. RがArf 環ならば$\mathrm{emb}(R)=e(R)$が成り立つ. 更に, RがArf 環であるためには, Rの全ての無限近点 (infinitely near point) Sが条件$\mathrm{emb}(S)=e(S)$を満たすことが必要十分である ([8] 参照).

例 2.1. （1）半正規環（seminormal ring）はArf 環である（[13]）. 従って曲線の通常特異点（ordinary singularity）はArf 環である.

（2）非負整数の数値的半群（numerical semigroup）Hに対して，$k[[H]]$が Arf環であるためには，Hが次の条件を満たすことが必要十分である：

$$a, b, n \in H, n < a \leqq b < c(H) \text{ ならば } a+b-n \in H.$$

但し，$c(H) = \min\{n \in H \mid n + \mathbf{N} \subset H\}$ はHの導手を表す. 例えば$2 \leqq e < c$のとき，

$$H = e\mathbf{N} \cup (c + \mathbf{N}) = \{0, e, 2e, \cdots, c, c+1, c+2, \cdots\}$$

とおくと$k[[H]]$は Arf環である. 実際，$n < a \leqq b < c(H)$ ならば$n = ie$，$b = je$，$a = ke$，$i < j \leqq k$となり$a + b - n = (k + j - i)e \in e\mathbf{N} \subset H$.

（3）$e(R) = 2$ならば任意のm－準素イデアルが安定なのでRはArf 環である.

命題 2.2. RがArf 環のとき，$G(I)$が Cohen-Macaulay 環であるためにはIが安定であることが必要十分である.

［証明］十分性はValla ［21］により従う. 逆に$G(I)$が Cohen-Macaulay 環とすると，仮定からIの整閉包Jは安定である. 従って補題 1.12 よりIも安定である.

命題 2.3. $e(R) = 2$とする. Iが主イデアルでないとき，次の条件は同値である：

（1）$G(I)$は Gorenstein 環，

（2）$e(I) = 2\,\mathrm{length}(R/I)$が成り立つ.

更に，このときIは整閉である.

［証明］仮定によりIは安定である. 従って$G(I)$は Cohen-Macaulay 環で同値性は命題 1.3から従う. またI，$\overline{I}$が安定であることから命題 1.3より

$$2\,\mathrm{length}(R/\overline{I}) \leqq 2\,\mathrm{length}(R/I) = e(I) = e(\overline{I}) \leqq 2\,\mathrm{length}(R/\overline{I})$$

故に$\mathrm{length}(R/\overline{I}) = \mathrm{length}(R/I)$となり$\overline{I} = I$が成り立つ.

例 2.4. $R = k[[t^2, t^{2r+1}]]$のとき，$G(I)$が Gorenstein 環であるようなRの主イデアルでないm－準素イデアルIはmと(t^{2r}, t^{2r+1})のみである（［13, Example 3.4］参照）.

$\overline{g}_s$ (R) = 0, 1 なる環の性質・構造については [13] を参照. 特に, $\overline{g}_s$ (R) = 0 ならばRは Arf環である.

命題 2.5. Rが離散付値環でないとき次の条件は同値である:

(1) G (I) が Gorenstein 環であるようなRのm－準素イデアルIはmと主イデアルのみである.

(2) Rは Gorenstein 環で $\overline{g}_s$ (R) = 0,

(3) e (R) = 2 かつmが正規である,

Rが離散付値環でなく, 剰余体kが代数的閉体でRに含まれるとき, これらは次とも同値である:

(4) Rは結節点 (ノード) $\hat{R} \cong k[[X, Y]]/(XY)$ であるか, または単純カスプ特異点 $\hat{R} \cong k[[X, Y]]/(Y^2 - X^3)$ である.

[証明] (1) ⇒ (3) は [15, Example 3.6]の証明から従う. (3) ⇒ (1) : G (I) が Gorenstein 環でIが主イデアルでないとすると命題 2.3よりIは整閉である. よって主張は [15, Example 3.6]の証明から従う. (2) と (3) の同値性は [13, Theorem 3.3] による.

定理 2.6. $\overline{g}_s$ (R) = 1 とする. このとき

(1) ([13, Theorem 4.1]). emb (R) = e (R) であるか, またはemb (R) = e (R) － 1 かつmが正規である.

(2) 任意の整閉m－準素イデアルIに対してG (I) は Cohen-Macaulay 環で, δ (I) = 1 または δ (I) = 2 でIは正規である.

[証明] (1) emb (R) = e (R) でなければ, $1 \leq g_\Delta(R) \leq \overline{g}_s(R) = 1$ より $\overline{g}_s(R) = g_\Delta(R) = 1$. よってemb (R) = e (R) － 1 かつ定理 1.6よりmは正規である. (2) は $\overline{g}_s(I) \leq \overline{g}_s(R) = 1$ より定理 1.6から従う.

例 2.7. 任意の自然数 $e \geq 3$ に対して

$R_1 = k[[t^e, t^{e+1}, \cdots, t^{2e-2}]]$, $R_2 = k[[t^e, t^{e+2}, \cdots, t^{2e-1}, t^{2e+1}]]$

とおくと$\overline{g}_s(m_1)=\overline{g}_s(m_2)=1$で，$R_1$は Gorenstein 環，$R_2$は Gorenstein 環ではない．

CでRの導手（conductor）$(R:\overline{R})$を表す．

命題 2.8（導手の特徴付け）．Rが Gorenstein 環で離散付値環でないとする．Rの整閉m－準素イデアルＩに対して次は同値である：

（1）Ｉは安定，正規かつ$G(I)$が Gorenstein 環である．

（2）$I=C$．

［証明］（2）⇒（1）：［15, Proposition 3.3］参照．（1）⇒（2）：$0=\overline{g}_s(I)=\mathrm{length}(I\overline{R}/I)$より$I\overline{R}=I$．故に$I\subset(R:\overline{R})=C$．一方，命題 1.3より$e(I)=2\,\mathrm{length}(R/I)$だから

$$
\begin{aligned}
0=\overline{g}_s(I)&=\overline{g}(I)-e(I)+\mathrm{length}(R/I)\\
&=\mathrm{length}(R/C)-\mathrm{length}(R/I).
\end{aligned}
$$

故に$I=C$．

命題 2.9．Rが Gorenstein 環で$\overline{g}_s(R)=1$，ＩがRの整閉m－準素イデアルとする．

（1）$e(R)=2$とする．$G(I)$が Gorenstein 環であるためには，$I=m$または$I=C$であることが必要十分である．

（2）$e(R)\geqq 3$とする．$G(I)$が Gorenstein 環であるためには，$I=m$，$I=C$またはＩが安定で$\mathrm{length}(R/I)=e(R)-1$であることが必要十分である．

［証明］（1）十分性は良い．必要性：$\overline{g}_s(I)\leqq\overline{g}_s(R)=1$．$\overline{g}_s(I)=0$とすると命題 2.8より$I=C$．$\overline{g}_s(I)=1$とすると命題 1.10 より$I=m$またはＩは安定で$e(I)=2\,\mathrm{length}(R/I)$．後者のとき

$$
\begin{aligned}
1=\overline{g}_s(I)&=\overline{g}(I)-e(I)+\mathrm{length}(R/I)\\
&=2-e(I)+\mathrm{length}(R/I)\\
&=2-\mathrm{length}(R/I)
\end{aligned}
$$

より$\mathrm{length}(R/I)=1$より$I=m$．

（2）十分性：$I=m$ または $I=C$ のときは良い．I が安定で $\mathrm{length}(R/I)=e(R)-1$ とすると

$$
\begin{aligned}
1=\bar{g}_s(R) \geqq \bar{g}_s(I) &= \bar{g}(I)-e(I)+\mathrm{length}(R/I)\\
&= e(R)-e(I)+\mathrm{length}(R/I)\\
&= \mathrm{length}(R/I)+1-e(I)+\mathrm{length}(R/I)
\end{aligned}
$$

より $e(I) \geqq 2\,\mathrm{length}(R/I)$．これと命題 1.3より $G(I)$ が Gorenstein 環である．

必要性：$\bar{g}_s(I)=0$ とすると命題 2.8より $I=C$．$\bar{g}_s(I)=1$ とすると命題 1.10より $I=m$ または I は安定で $e(I)=2\,\mathrm{length}(R/I)$．後者のとき

$$
\begin{aligned}
1=\bar{g}_s(I) &= \bar{g}(I)-e(I)+\mathrm{length}(R/I)\\
&= e(R)-e(I)+\mathrm{length}(R/I)\\
&= e(R)-2\,\mathrm{length}(R/I)+\mathrm{length}(R/I)\\
&= e(R)-\mathrm{length}(R/I)
\end{aligned}
$$

より $\mathrm{length}(R/I)=e(R)-1$．

例 2.10.（1）$R=k[[t^2, t^5]]$ のとき，$G(I)$ が Gorenstein 環であるような整閉 m－準素イデアルは $I=m$ または $I=C=(t^4, t^5)$ である．

（2）$R=k[[t^e, t^{e+1}, \cdots, t^{2e-2}]]$，$e \geqq 3$，のとき，$G(I)$ が Gorenstein 環であるような整閉 m－準素イデアルは $I=m$，$I=(t^{2e-2}, t^{2e}, t^{2e+1}, \cdots, t^{3e-3})$ または $I=(t^{2e}, t^{2e+1}, \cdots, t^{3e-3})$ である（[15, Example 3.5]）．

3．曲面の特異点．この節では R は解析的不分岐な2次元局所整閉整域とする．R の m－準素イデアル I に対して $Y \to \mathrm{Spec}(R)$ を I に沿った normalized blowing-up として，I の正規種数 $\bar{g}(I)$ は $\bar{g}(I)=\mathrm{length}(H^1(Y, O_Y))$ で定義された（例 1.5参照）．R の幾何種数（geometric genus）$p_g(R)$ を

$$p_g(R)=\sup\{\bar{g}(I) \mid I \text{ は } R \text{ の } m\text{－準素イデアル}\}$$

で定義する．R が解析的に正規ならば特異点の解消 $X \to \mathrm{Spec}(R)$ が存在して $p_g(R)=\mathrm{length}(H^1(X, O_X))$ が成り立つ（[14]）．一般に不等式 $p_g(R)$

$\geqq e(R)-emb(R)+1$が成り立ち，Rが超曲面のときは［12, Theorem 3.4(6)］より$p_g(R) \geqq (e(R)-1)(e(R)-2)/2$が成り立つ．$p_g(R)=0$であるためには，任意の整閉m－準素イデアルが正規かつ安定であることが必要十分である．このときRが擬有理的（pseudo-rational)であると言う．例えば２次元正則局所環は擬有理的である（［17］参照）．

定理 3.1. Rが擬有理的局所環とする．

（１）（［20, Corollary 4(f)］，［6, Theorem 4.1］）G（I）が Cohen- Macaulay環であるためには，Ｉが安定であることが必要十分である．

（２）Rが Gorenstein 局所環（特に$e(R) \leqq 2$）で，Ｉがパラメーター・イデアルでないとする．このとき次の条件は同値である：

（ａ）G（I）が Gorenstein 環である，

（ｂ）Ｉは安定かつ$e(I)=2\,\mathrm{length}(R/I)$，

（ｃ）Ｉが整閉（resp. 正規）で$e(I)=2\,\mathrm{length}(R/I)$．

［証明］（１）十分性は Valla［21］から従う．必要性：仮定によりＩの整閉包$\overline{I}$は安定だから，補題 1.12 により$\delta(I) \leqq \delta(\overline{I}) \leqq 1$となりＩは安定である．

（２）（ａ）と（ｂ）の同値性は命題 1.3から従う．（ｃ）⇒（ｂ）は明白．

（ｂ）⇒（ｃ）：$\overline{I}$が安定だから命題 1.3により

$$2\,\mathrm{length}(R/\overline{I}) \leqq 2\,\mathrm{length}(R/I) = e(I) = e(\overline{I}) \leqq 2\,\mathrm{length}(R/\overline{I})$$

より$\overline{I}=I$．

系 3.2（［6, Theorem 4.1]）．Rが正則局所環とする．G（I）が Gorenstein 環であるためには，Ｉがパラメーター・イデアルであることが必要十分である．

［証明］必要性のみ示せば良い．G（I）が Gorenstein 環でＩがパラメーター・イデアルでないとするとＩは整閉で$e(I)=2\,\mathrm{length}(R/I)$が成り立つ．ところがこれは［17, Theorem 3.4］（または［6, Proof of Theorem 4.1］）によりＩが整閉ならば$e(I) < 2\,\mathrm{length}(R/I)$であることに矛盾する．

系 3.3. Rが擬有理二重点，I，JがRのm－準素イデアルでパラメーター・イデアルでないとする．G（I），G（J）が Gorenstein 環ならばG（I J）も Gorenstein 環である．I，Jが整閉ならば逆も正しい．

［証明］定理 3.1によりI，Jは整閉だから，I Jも整閉（［9，P.213］参照）で，従って安定である．故にG（I J）はCohen-Macaulay環である．［17，Theorem 2.7］より

$$\theta(I) = 2\,\mathrm{length}\,(R/\bar{I}) - e(I)$$

とおくと$\theta(IJ) = \theta(I) + \theta(J)$．定理により$\theta(I) = \theta(J) = 0$だから$\theta(IJ) = 0$となり，再び定理によりG（I J）は Gorenstein 環である．

逆にI，Jが整閉でG（I J）が Gorenstein 環とするとI Jも整閉でI，J，I Jは安定だから$\theta(I)$，$\theta(J) \geqq 0$かつ$\theta(I) + \theta(J) = \theta(IJ) = 0$．よって$\theta(I) = \theta(J) = 0$よりG（I），G（J）が Gorenstein 環である．

系 3.4. Rが擬有理二重点でIがRの整閉m－準素イデアルのとき次の条件は同値である：

（1）G（I）が Gorenstein 環である，

（2）任意の自然数nについて$G(I^n)$が Gorenstein 環である，

（3）ある自然数nについて$G(I^n)$が Gorenstein 環である．

$p_g(R) = 1$のとき，Rが楕円的特異点（elliptic singularity）であると言う．Gorenstein楕円的特異点を最小楕円的特異点（minimally elliptic singularity）と言う（［7］参照）．

定理 3.5. Rが楕円的特異点でIが整閉であるとする．このとき

（1）（［14］）G（I）は Cohen-Macaulay 環で，$\delta(I) = 1$あるか，または$\delta(I) = 2$かつIが正規である．

（2）Rが最小楕円的特異点のとき，G（I）が Gorenstein 環であるためには，$I = m$であるか，またはIが安定で$e(I) = 2\,\mathrm{length}\,(R/I)$が成り立つことが必要十分である．更に，後者のとき，任意の自然数nについて$G(I^n)$が Gorenstein 環である．

［証明］（1）$\bar{g}_s(I) \leqq \bar{g}(I) \leqq p_g(R) = 1$より定理 1.6から明らか．

(2) Rは正則局所環でないからIはパラメーター・イデアルでない. $\overline{g}_s(I) \leqq \overline{g}(I) \leqq p_g(R) = 1$. $\overline{g}_s(I) = 0$のときはIが安定だから命題 1.2より主張が従う. $\overline{g}_s(I) = 1$のときは定理 1.10 より主張が従う. 最後の主張は [15, Corollary 4.6]から分かる.

系 3.6. Rが楕円的特異点とすると$emb(R) = e(R) + 1$または$emb(R) = e(R)$かつmが正規である. 特に, Rが超曲面でない最小楕円的特異点ならば$emb(R) = e(R)$が成り立つ.

[証明] $emb(R) = e(R) + 1$でないと仮定すると

$$1 \leqq g_{\Delta}(R) \leqq g_s(R) \leqq \overline{g}_s(R) \leqq p_g(R) = 1$$

より$\overline{g}_s(R) = g_s(R) = g_{\Delta}(R) = 1$より$emb(R) = e(R)$かつmが正規である.

系 3.7. Rが楕円的特異点のとき, $G(I)$が Cohen- Macaulay環ならば$\delta(I) \leqq 2$である.

[証明] $G(\overline{I})$が Cohen-Macaulay 環だから, 定理 3.5, 補題 1.12 より$\delta(I) \leqq \delta(\overline{I}) \leqq 2$.

命題 3.8. $p_g(R) \leqq 2$とする.

(1) Iが安定でない整閉m−準素イデアルならば, $\overline{G}(I) = \oplus_{n\geq 0} \overline{I^n} / \overline{I^{n+1}}$は Cohen-Macaulay 環である. I^2が整閉ならばIは正規で, 従って$G(I)$が Cohen-Macaulay環である.

(2) Rが Gorenstein 環ならば$e(R) = 2$または$emb(R) = e(R)$で, 従って$G(m)$は Gorenstein 環である.

[証明] (1) $\overline{g}_s(I) \leqq 1$のときは$\overline{g}_s(I) = g_{\Delta}(I) = 1$より定理 1.6により$\overline{G}(I) = G(I)$は Cohen-Macaulay 環である. $\overline{g}_s(I) \geqq 2$ならば$2 \leqq \overline{g}_s(I) \leqq \overline{g}(I) \leqq p_g(R) \leqq 2$よりIの正規算術種数$\overline{p}_a(I) = \overline{g}(I) - \overline{g}_s(I) = 0$. よって [14, p.1373] により$\overline{G}(I)$は Cohen-Macaulay 環である. 更にJをIの極小還元とすると$J\overline{I^n} = \overline{I^{n+1}}$ $(n \geqq 2)$が成り立つのでI^{2}が整閉ならばIは正規である.

（2）$\overline{g}_s$（R）$\leqq p_g$（R）$\leqq 2$ より命題 1.11 から主張が従う.

命題 3.9. Rが Gorenstein 環で p_g（R）＝3とする.

（1）G（m）は Cohen-Macaulay 環である.

（2）G（m）が Gorenstein 環であるためには，Rが2次超曲面，4次超曲面または emb（R）＝e（R）であることが必要十分である.

[証明] g_Δ（R）$\leqq 1$ ならばG（m）は Gorenstein 環である（[11, Theorem 3.6]）. g_Δ（R）＝2とすると, Sally [19] よりG（m）は Cohen-Macaulay 環で，G（m）が Gorenstein 環であるためには，Rが4次超曲面であることが必要十分である. g_Δ（R）$\geqq 3$ とすると，$3 \leqq g_\Delta$（R）$\leqq \overline{g}_s$（R）$\leqq p_g$（R）＝3より $\overline{g}_s$（R）＝g_Δ（R）＝3. よって δ（m）＝2. これは [12, Theorem 3.6] に矛盾.

参考文献

[1] S.Goto, Integral closedness of complete intersection ideals, J.Algebra 108 (1987), 151-160.

[2] s.Huckaba, Reduction numbers for ideals of higher analytic spread, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 102 (1987), 49-57.

[3] C.Huneke, Hilbert functions and symbolic powers, Michigan Math. J. 34 (1987) 293-318.

[4] S.Itoh, Coefficients of normal Hilbert polynomials, preprint (1989)

[5] S.Itoh, Integral closure of ideals generated by regular sequences, J. Algebra 117 (1988), 390-401.

[6] B.L.Johnston and J.Verma, On the length formula of Hoskin and Deligne and associated graded rings of two-dimensional regular local rings, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 111 (1992), 423-432.

[7] H.Laufer, On minimally elliptic singularities, Amer. J.Math. 99 (1977), 1257-1295.

[8] J. Lipman, Stable ideals and Arf rings, Amer. J. Math. 93 (1971), 649-685.

[9] J. Lipman, Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization, Publ. Math. IHES, 36 (1969), 195-279.

[10] D. G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, Proc. Camb. Phil. Soc. 50 (1954), 145-158.

[11] A. Ooishi, Genera and arithmetic genera of commutative rings, Hiroshima Math. J. 17 (1987), 47-66.

[12] A. Ooishi, Δ-genera and sectional genera of commutative rings, Hiroshima Math. J. 17 (1987), 361-372.

[13] A. Ooishi, Genera of curve singularities, J. Pure Appl. Algebra 61 (1989), 283-293.

[14] A. Ooishi, Normal genera of two-dimensional local rings, Comm. in Algebra. 18 (1990), 1371-1377.

[15] A. Ooishi, Stable ideals in Gorenstein local rings, J. Pure Appl. Algebra 69 69 (1990), 185-191.

[16] A. Ooishi, On the Gorenstein property of the associated graded ring and the Rees algebra of an ideal, J. Algebra, to appear.

[17] D. Rees, Hilbert functions and pseudo-rational local rings of dimension two, J. London Math. Soc. 24 (1981), 467-479.

[18] J. D. Sally, Tangent cones at Gorenstein singularities, Compositio Math. 40 (1980), 165-175.

[19] J. D. Sally, Good embedding dimensions for Gorenstein singularities, Math. Ann. 249 (1980), 156-172.

[20] K. Shah, On the Cohen-Macaulayness of the fiber cone of an ideal, J. Algebra 143 (1991), 156-172.

[21] G. Valla, On form rings which are Cohen-Macaulay, J. Algebra 58 (1979), 247-250.

(1992年12月,)