研 究 集 会

第15回可換環論シンポジウム

1993年10月19～22日

於　大阪商工会議所・賢島研修センター

平成5年度文部省科学研究費総合A

（課題番号 04302003 代表　丸山　正樹）

序

この報告集に収録されている原稿は, 第 15 回可換環論シンポジウムの講演の記録です。この研究集会は京都大学の丸山正樹先生を代表とする科研費総合Aの援助の下に 1993 年 10 月 19 日から 22 日にかけて, 大阪商工会議所・賢島研修センター・プラージで開かれました。70 名あまりが参加し, 合計 24 の非常に興味深い講演が行なわれました。この 3 月に名古屋大学を定年退官される松村英之先生にも御講演を頂き, 極めて密度の濃い充実した研究集会であったことを御報告申し上げます。

今回は大阪大学・宮西正宜先生には Jacobian 予想について, 筑波大学・星野光男先生には中山の予想についてそれぞれ 2 時間をかけて解説をして頂きました。両先生の御尽力に深い謝意を表します。

1994 年 1 月

橋本光靖・吉田健一

プログラム

10月19日(火)

19:05～20:05 蔵野 和彦 (都立大・理)
ある種の局所環上での Riemann- Roch map の計算法について

20:15～21:00 石田 正典 (東北大・理)
トーリック多様体の交叉ホモロジー群

10月20日(水)

9:00～9:30 柳川 浩二 (名大・理)
Generic hyperplane section が Gorenstein になる斉次整域について

9:40～10:40 後藤 四郎 (明大・理工)
Cohen-Macaulay graded rings associated to ideals of analytic deviation 3.

10:50～11:50 宮西 正宜 (阪大・理)
Factorial Scheme 上のベクトル場と Jacobian 予想 (1)

13:10～14:10 宮西 正宜 (阪大・理)
Factorial Scheme 上のベクトル場と Jacobian 予想 (2)

14:20～15:05 吉野 雄二 (京大・総合人間)
On liftings of complexes.

15:15～16:00 川嵜 健 (都立大・理)
射影次元有限加群と入射次元有限加群の対応

16:10～17:10 中村 幸男 (都立大・理)
On graded rings associated to ideals of higher analytic deviation.

19:00～19:30 加藤 希理子 (京大・数理解析研究所)
On δ-invariants of modules over local rings.

19:40～20:20 吉田 憲一 (岡山理科大・理)
可換環の単純拡大について

20:30～21:00 神蔵 正, 衛藤 和文 (早大・教育)
Complete Intersection Monomial Curves の定義イデアルについて

10 月 21 日 (木)

9:00 ~ 9:30 青山 陽一 (島根大・教育)
Complete local (S_{n-1}) rings of type $n \geq 3$ are Cohen-Macaulay.

9:40 ~ 10:40 西田 康二 (千葉大・自然)
Powers of ideals in Cohen-Macaulay rings.

10:50 ~ 11:50 星野 光男 (筑波大・数学系)
中山の予想について (1)

13:00 ~ 13:50 宮崎 誓 (長野高専)
Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity.

14:00 ~ 14:30 鴨井 祐二 (都立大・理)
grade 3 の Gorenstein monomial ideal について

14:35 ~ 15:05 山岸 規久道 (姫路獨協大)
Betti number of parameter ideals over a Buchsbaum ring.

15:15 ~ 15:45 谷本 洋 (宮崎大・教育)
体上の多項式環の素イデアルによる局所環

15:50 ~ 16:20 鄭 相朝 (名大・理)
Modules of generalized fractions and complexes of Cousin type.

16:30 ~ 17:00 松村 英之 (名大・理)
Composite of local rings.

18:00 ~ 20:00 懇親会

10 月 22 日 (金)

9:00 ~ 9:55 尼崎 睦実 (広島大学・学校教育)
Height 3 の斉次イデアルの basic sequence について

10:05 ~ 11:05 星野 光男 (筑波大・数学系)
中山の予想について (2)

11:15 ~ 12:00 渡辺 敬一 (東海大・理)
F-regular and F-rational rings in dimension 2.

このページは参加者の一部のメールアドレスのリストでした。
現在でも使われているアドレスはほとんどない、と思われますが、
個人情報保護法の観点から、このページは公表致しません。
あしからずご了承下さい。
なお、この報告集が出版された当時（1994 年）は、個人情報保護法は存在しなかったことを申し添えます。

２０１３年６月

橋本光靖

目　次

ある種の局所環上での Riemann-Roch map の計算法について

蔵野 和彦

東京都立大学 理学部

1 Main Theorem

k を体とする。$R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ は、$R_0 = k$, $R = R_0[R_1]$ を充たす次数環とする。また、$\mathfrak{m} = R_+$ とおく。

さらに、$X = \mathrm{Proj}(R)$ は k 上 smooth な d 次元の射影多様体とする。

$\mathrm{A}_* X_{\mathbb{Q}} = \oplus_{i=0}^{d} \mathrm{A}_i X_{\mathbb{Q}}$ を、有理係数の Chow group とする。また、$\mathrm{CH}^i(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{A}_{d-i} X_{\mathbb{Q}}$ とおき、$\mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}} = \oplus_{i=0}^{d} \mathrm{CH}^i(X)_{\mathbb{Q}}$ を Chow ring とする。

このとき、次が成立する。

定理 1 $s = c_1(\mathcal{O}_X(1)) \cap [X] \in \mathrm{A}_{d-1} X_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}^1(X)_{\mathbb{Q}}$ とおく。このとき、同型射

$$\xi : \mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}}/(s) \to \mathrm{A}_*(\mathrm{Spec}\, R_{\mathfrak{m}})_{\mathbb{Q}}$$

が存在して、$\xi \circ \pi(\mathrm{td}(\Omega_X^\vee)) = \tau([R_{\mathfrak{m}}])$ が成立する。

$$\mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\pi} \mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}}/(s) \xrightarrow{\xi} \mathrm{A}_*(\mathrm{Spec}\, R_{\mathfrak{m}})_{\mathbb{Q}} \xleftarrow{\tau} \mathrm{K}_0 R_{\mathfrak{m}\mathbb{Q}}.$$

ここで、$c_1(\mathcal{O}_X(1))$ は、X 上のベクトル束 $\mathcal{O}_X(1)$ の first Chern class とする。つまり、s は line bundle $\mathcal{O}_X(1)$ に対応する Cartier divisor である。さらに、$\pi : \mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}}/(s)$ は、自然な全射。$\mathrm{K}_0 R_{\mathfrak{m}\mathbb{Q}}$ は、局所環 $R_{\mathfrak{m}}$ 上の有理係数の Grothendieck group であり、$\tau : \mathrm{K}_0 R_{\mathfrak{m}\mathbb{Q}} \to \mathrm{A}_*(\mathrm{Spec}\, R_{\mathfrak{m}})_{\mathbb{Q}}$ は、Riemann-Roch map とする。$[R_{\mathfrak{m}}]$ は、有限生成加群 $[R_{\mathfrak{m}}]$ に対応する $\mathrm{K}_0 R_{\mathfrak{m}\mathbb{Q}}$ の元で、$\mathrm{td}(\Omega_X^\vee) \in \mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}}$ は X 上のベクトル束 $\Omega_X^\vee$ の todd class を表すものとする。

また、ξ は graded module の同型であり、

$$\begin{aligned} [\mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}}/(s)]_i &\simeq \mathrm{A}_{d+1-i}(\mathrm{Spec}\, R_{\mathfrak{m}})_{\mathbb{Q}} \\ (0) &\simeq \mathrm{A}_0(\mathrm{Spec}\, R_{\mathfrak{m}})_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

となっている。

以下、section 2 では、この様なことを考えるに到った動機について話し、section 3 では、この Main Theorem の応用例として、ある例の計算をやることにする。ページ数の関係で、Main Theorem の証明は省略する ([10] 参照)。

2 Motivation

まず、以前、数理研のシンポジウムで話したことの復習から始める ([7] 参照)。

k を標数 $p\,(>0)$ の完全体、A を完備局所環で係数体が k であるものとする。$n = \dim A$ とおく。

$f : A \to A$ を Frobenius 射とする。(つまり、f は、$f(x) = x^p$ で定まる射) このとき、A の完備性と係数体が完全体であることより、f は finite 射となることに注意。Frobenius 射の e 回の合成射を $f^e : A \to A$ と書く。この右の A を f^e を通して左の A 上の加群とみたものを $[{}^eA]$ と書き表すことにする。

$\mathrm{K}_0\,A$ を、A 上の有限生成加群の Grothendieck group 、$\mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおく。有限生成 A-加群 M に対応する $\mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}}$ の元を $[M]$ と表す。

一般に、環準同型 $g : B \to C$ が finite 射 (C が B-加群として有限生成) であるとき、有限生成 C-加群は g によって有限生成 B-加群とみることができる。これによって、$g : B \to C$ は、$g^* : \mathrm{K}_0\,C_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{K}_0\,B_{\mathbb{Q}}$ を誘導する。今、Frobenuis 射 $f : A \to A$ は finite 射であったから、上の議論によって $f^* : \mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}}$ という $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}}$ の自己準同型写像が誘導される。このとき、$i = 0, 1, \ldots, n$ に対して、

$$\mathrm{L}_i\mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}} \mid f^*(c) = p^i c\}$$

とおく。定義より、$\mathrm{L}_i\mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}}$ は $\mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{Q}$-ベクトル部分空間であり、さらに、$f^* : \mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}}$ の固有値 p^i の固有空間である。このとき、非常に簡単な計算によって

$$\mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}} = \oplus_{i=0}^{n} \mathrm{L}_i\mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}}$$

となることが証明できる (サイクルの次元に関する帰納法を使う)。故に、$\mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}}$ の元 $[A]$ は、

$$[A] = q_n + q_{n-1} + \cdots + q_0 \quad (q_i \in \mathrm{L}_i\mathrm{K}_0\,A_{\mathbb{Q}}) \tag{1}$$

と分解される。環 A の様々な性質はこの分解に反映される。**我々の目的は、この分解を決定する方法を探すことである。**

$i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $(f^*)^e(q_i) = p^{ie}q_i$ であることに注意すれば、

$$(f^*)^e([A]) = [{}^eA] = p^{ne}q_n + p^{(n-1)e}q_{n-1} + \cdots + p^e q_1 + q_0$$

となることがわかる。このことより直ちに

$$q_n = \lim_{e \to \infty} \frac{1}{p^{ne}}[{}^e A] \quad \text{in } \mathrm{K}_0\, A_{\mathbb{Q}}$$

となることがわかる。

更に A が正則局所環であるときは、有名な Kunz の定理によって、$[{}^1 A]$ は階数 p^n の A-自由加群である。つまり、$f^*([A]) = [{}^1 A] = p^n[A]$ であり、$[A] \in \mathrm{L}_n\mathrm{K}_0\, A_{\mathbb{Q}}$ となることがわかる。つまり、このとき、$[A] = q_n$ で、$q_{n-1} = \cdots = q_0 = 0$ となっている。(A が正則局所環であることより、A の大域的次元は有限であり、$\mathrm{K}_0\, A_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\cdot[A]$ であることが容易にわかる。つまり、このとき、$\mathrm{K}_0\, A_{\mathbb{Q}} = \mathrm{L}_n\mathrm{K}_0\, A_{\mathbb{Q}}$ であり、$\mathrm{L}_i\mathrm{K}_0\, A_{\mathbb{Q}} = (0)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ となっている。)

以上は、A が完備局所環で係数体が標数 $p\ (>0)$ の完全体の場合の議論である。しかし、localized Chern character ([4] 参照) など代数幾何学的手法を使って、また Gillet-Soulé ([5], [6]) のように複体上で定義される Adams operation を使うことにより、今までの議論は、一般の Noether 局所環 A (正則局所環の像というのは仮定する) 上で展開できる。

つまり、アフィンスキーム $\mathrm{Spec}\, A$ 上の有理係数の Chow group (定義は [4] 参照) を $\mathrm{A}_*(\mathrm{Spec}\, A)_{\mathbb{Q}} = \oplus_{i=0}^{n} \mathrm{A}_i(\mathrm{Spec}\, A)_{\mathbb{Q}}$ とおいたとき、Riemann-Roch map と呼ばれる自然な射 $\tau : \mathrm{K}_0\, A_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{A}_*(\mathrm{Spec}\, A)_{\mathbb{Q}}$ が構成できて、τ は全単射となる。

そして、特に、A が完備局所環で係数体が標数 $p(>0)$ の完全体の場合、

$$\tau^{-1}(\mathrm{A}_i(\mathrm{Spec}\, A)_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{L}_i\mathrm{K}_0\, A_{\mathbb{Q}}$$

となっているのである。つまり、上の等式 (1) の形の $[A]$ の固有ベクトルへの分解を調べることは、一般の Noether 局所環 A 上では、$\tau([A])$ を $\mathrm{A}_*(\mathrm{Spec}\, A)_{\mathbb{Q}} = \oplus_{i=0}^{n} \mathrm{A}_i(\mathrm{Spec}\, A)_{\mathbb{Q}}$ の元として表すことに対応する。以下、等式 (1) の代わりに、

$$\tau([A]) = q_n + \cdots + q_0 \quad (q_i \in \mathrm{A}_i(\mathrm{Spec}\, A)_{\mathbb{Q}})$$

と書くことにする。**Main Theorem 及びこのノートの目的は、この $\tau([A])$ の分解を調べることである。**

以下、特に注意しない限り、A は単に正則局所環の準同型像という仮定だけで議論する。(この章の最初の様に A は完備局所環で係数体が標数 $p\ (>0)$ の完全体であるものだと思っていただいても全くさしつかえないが。)

$\tau([A]) = q_n + \cdots + q_0$ $(q_i \in \mathrm{A}_i(\mathrm{Spec}\, A)_{\mathbb{Q}})$ については例えば次のようなことがわかっている。

注意 2　*1.* 一般に $q_n \neq 0$. *(Fulton [4]* によれば、$q_n = [\operatorname{Spec} A] \in \mathrm{A}_n(\operatorname{Spec} A)_{\mathbb{Q}}$ となる。ただし、$[\operatorname{Spec} A]$ は、$\operatorname{Spec} A$ に対応するサイクル。*)*

2. A が *complete intersection* であれば、$q_{n-1} = \cdots = q_0 = 0$. *([4]* の *Cor 18.1.2* 参照。*)*

3. A の *Cohen-Macaulay locus* の次元が k であるとき、

$$\tau([K_A]) \equiv q_n - q_{n-1} + \cdots + (-1)^i q_{n-i} + \cdots \mod \oplus_{j=0}^{k} \mathrm{A}_j(\operatorname{Spec} A)_{\mathbb{Q}}$$

である。特に、A が *Cohen-Macaulay* なら $\tau([K_A]) = q_n - q_{n-1} + \cdots + (-1)^i q_{n-i} + \cdots$ であり、A が *Gorenstein* なら $q_{n-1} = q_{n-3} = \cdots = 0$ である。

4. A が整閉整域とする。このとき、自然な同型 $\phi : \mathrm{A}_{n-1}(\operatorname{Spec} A)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Cl}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が存在して、$\phi(q_{n-1}) = \frac{1}{2}\mathrm{cl}(K_A)$ が成立する *([8]* の *Lemma 3.5)* 。但し、$\mathrm{cl}(K_A)$ は *reflexive* A-加群 K_A が属する同型類を表すものとする。このことより、A が整閉整域で、$\mathrm{cl}(K_A)$ が $\mathrm{Cl}(A)$ の中で *torsion* でないならば $q_{n-1} \neq 0$ がわかる。

ここで、次のような問題を考えてみたいと思う。

問題 3 いつ $\tau([A]) = q_n$ が成立するか？*(*A は完備局所環で係数体が標数 p (> 0) の完全体であるとき、$\tau([A]) = q_n$ は、$\mathrm{K}_0 A_{\mathbb{Q}}$ の中で $[{}^1A] = p^n \cdot [A]$ であることと同値。*)*

注意 2 の 2 でみたように、A が complete intersection であるときは、$\tau([A]) = q_n$ が成立する。また、注意 2 の 4 よりわかるように、A が Cohen-Macaulay 環であったとしても、整閉整域で $\mathrm{cl}(K_A)$ が $\mathrm{Cl}(A)$ の中で torsion でないならば $q_{n-1} \neq 0$ がわかる。それ故に、まず、A が Gorenstein 環であるときに $\tau([A]) = q_n$ が成立するかどうかを考えるのが自然であると思われる。しかし、結論からいえば、一般には <u>NO</u> である。次の章で、Gorenstein 環でありながら $\tau([A]) \neq q_n$ となる環 A を、定理 1 を使って求める。

次の章へ進む前に、$\tau([A]) = q_n$ を充す局所環 A はどのような性質を持つのかを注意しておきたい。

注意 4　*1. P. Roberts [12]* によって指摘されているように、$\tau([A]) = q_n$ が成立すれば、*vanishing theorem* が成立する。つまり、M と N が有限生成 A-加群で、$\mathrm{pd}_A M < \infty$, $\mathrm{pd}_A N < \infty$, $\ell_A(M \otimes_A N) < \infty$, $\dim M + \dim N < \dim A$ を充たすものであるとき、$\sum_i (-1)^i \ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(M, N)) = 0$ が成立する。

故に、A が *complete intersection* であれば $\tau([A]) = q_n$ であるので、*vanishing theorem* が成立する *(P. Roberts [12])* 。*vanishing theorem* は、A が正則局所環であるときには *Gillet-Soulé [5]* によって独立に証明されている。

ここで注意しておくが、*vanishing theorem* が成立することと、$\tau([A]) = q_n$ となることは同値ではない。$\tau([A]) \neq q_n$ となる *Noether* 局所環 A の例はたくさんある *(次の章では、Gorenstein* 環 A で、$\tau([A]) \neq q_n$ となる例を構成する*)* が、*vanishing theorem* が成立しない例は知られていない。$\tau([A]) \neq q_n$ でも *vanishing theorem* が成立することはある *([12], [9]* 参照*)* 。

2. ここでは、A は完備局所環で係数体が標数 $p\,(>0)$ の完全体であるとする。$d : F \to G$ を A-自由加群の間の線型写像とする。適当に F, G の基底を固定して d を A-係数の行列で書いておく。その行列の各成分を p^e した行列に対応した写像を ${}^e d : F \to G$ と書くことにする。

$$\mathbb{F}. \ : \ 0 \to F_l \xrightarrow{d_l} F_{l-1} \xrightarrow{d_{l-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} F_0 \to 0$$

を有限生成自由 A-加群の複体で、任意の i に対して $\mathrm{H}_i(\mathbb{F}.)$ の長さは有限とする。このとき、$F_0, \ldots, F_l$ の基底を適当に固定して、複体 $\mathbb{F}.^{[e]}$ を

$$\mathbb{F}.^{[e]} \ : \ 0 \to F_l \xrightarrow{{}^e d_l} F_{l-1} \xrightarrow{{}^e d_{l-1}} \cdots \xrightarrow{{}^e d_1} F_0 \to 0$$

と定める。$\mathbb{F}.^{[e]}$ は確かに複体になり、$F_0, \ldots, F_l$ の基底の取り方に依らずに同型を除いて一意的に定まることに注意。また、任意の i に対して $\mathrm{H}_i(\mathbb{F}.^{[e]})$ の長さは有限となる。$\mathbb{F}.^{[e]}$ は、$\mathbb{F}. \otimes_A {}^e A$ を ${}^e A$-自由加群の複体と見たものである。

Szpiro は *[15]* の中で次の様な予想をした。

予想 5 $A, \mathbb{F}.$ を、上を充す環と複体とする。このとき、

$$\sum_i \ell_A(\mathrm{H}_i(\mathbb{F}.^{[e]})) = p^n e \sum_i \ell_A(\mathrm{H}_i(\mathbb{F}.))$$

であろう。*(n* は、A の次元*)*

この予想自身には反例がある。例えば、k を標数 $p\,(>0)$ の完全体で、

$$k[[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1]] \Big/ I_2 \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & y_0 \\ x_1 & x_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

という局所環を考えれば、ここでは、上の予想が成立しないような複体を構成することができる *(Dutta-Hochster-MacLaughlin [3]* の手法を使う*)*。上の環は、3 次元 *Cohen-Macaulay* 整閉整域であることに注意。

今、A は $\tau([A]) = q_n$ を充すと仮定してみよう。つまり、$\mathrm{K}_0 A_{\mathbb{Q}}$ で $[{}^eA] = p^{ne}[A]$ であるとする。このとき、簡単に、

$$\sum_i (-1)^i \ell_A(\mathrm{H}_i(\mathbb{F}.^{[e]})) = \sum_i (-1)^i \ell_A(\mathrm{H}_i(\mathbb{F}. \otimes_A {}^eA)) = p^{ne} \cdot \sum_i (-1)^i \ell_A(\mathrm{H}_i(\mathbb{F}.)) \quad (2)$$

となることがわかる。

故に、例えば、環 A が *complete intersection* であれば、注意 *2* の *2* により $\tau([A]) = q_n$ が成立しているので *Szpiro* の予想は、A が *complete intersection* であるときは成立する *([6]* の *Theorem B)*。

ちなみに、A は完備局所環で係数体が標数 $p\ (>0)$ の完全体であり、$\mathbb{F}.$ は、*homology* がすべて長さ有限であるような有限自由複体であるとき、

$$\mathbf{D}_A(\mathbb{F}.) = \lim_{e\to\infty} \frac{1}{p^{ne}} \sum_i (-1)^i \ell_A(\mathrm{H}_i(\mathbb{F}.^{[e]})) \quad (3)$$

は、有理数に収束することが知られていて *([2])* 、これは *Dutta multiplicity* と呼ばれている。一般には *Dutta multiplicity* $\mathbf{D}_A(\mathbb{F}.)$ は、複体の *homology* の長さの交代和 $\sum_i (-1)^i \ell_A(\mathrm{H}_i(\mathbb{F}.))$ と一致しない *([3])*。しかし、$\tau([A]) = q_n$ であれば、式 *(2)* と定義式 *(3)* により、$\mathbf{D}_A(\mathbb{F}.)$ は、交代和 $\sum_i (-1)^i \ell_A(\mathrm{H}_i(\mathbb{F}.))$ と一致するのである。*Dutta multiplicity* は、*(*幾何学的な言葉を使えば、*) localized Chern character* に他ならない *([4], [13])*。*localized Chern character* の計算は、*Serre* 予想等 *intersection multiplicity* の計算において非常に重要な役割を果たす。

3 応用 (具体例の計算)

この章では、定理 1 を使って、環 A が Gorenstein 環でありながら、問題 3 が成り立たない例を求める。

k を体。$\mathbb{P}^n$ を k 上の n 次元射影空間とする (つまり、$\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}(k[x_0, \ldots, x_n])$)。$n$, m $(n \leq m)$ を自然数とする。$X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ とし、$X \hookrightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m}$ を Segre embedding とする。

このとき、$X \hookrightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m}$ の affine cone の原点は Cohen-Macaulay 環であり、Gorenstein 環である必要充分条件は $n = m$ 、complete intersection である必要充分条件は $n = m = 1$ である (例えば、[1] 参照)。

射影空間の Chow ring ([4] 参照) はよく知られていて、

$$\mathrm{CH}(\mathbb{P}^n)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[a]/(a^{n+1})$$

となる。ただし、$a = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ である。a の degree を 1 とすれば、これは graded ring としての同型であることに注意。同様にして、

$$\mathrm{CH}(\mathbb{P}^m)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[b]/(b^{m+1})$$

となる。ただし、$b = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$ である。

代数多様体の直積の Chow ring は、片方が射影空間 (あるいはもっと一般に Grassmann 多様体) であれば Chow ring のテンソル積に同型になることが知られている ([4])。よって、

$$\mathrm{CH}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}(\mathbb{P}^n)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{CH}(\mathbb{P}^m)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[a,b]/(a^{n+1}, b^{m+1})$$

となる。

$p_1 : X \to \mathbb{P}^n$ (resp. $p_2 : X \to \mathbb{P}^m$) を第一成分への (resp. 第二成分への) 射影とする。このとき、埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m}$ に対応する line bundle $\mathcal{O}_X(1)$ は、$p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes_{\mathcal{O}_X} p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ と一致する。故に、

$$c_1(\mathcal{O}_X(1)) = a + b \in \mathbb{Q}[a,b]/(a^{n+1}, b^{m+1}) = \mathrm{CH}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)_{\mathbb{Q}}$$

が成立する。

ここで、定理 1 を使えば、

$$A = k[x_{ij} \mid i = 1, \ldots, n\ ;\ j = 1, \ldots, m]_{(0)}/I_2(x_{ij})$$

として、

$$\mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\pi} \mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}}/(a+b) \xrightarrow{\xi} \mathrm{A}_*(\mathrm{Spec}\, A)_{\mathbb{Q}} \xleftarrow{\tau} \mathrm{K}_0\, A_{\mathbb{Q}}$$

という写像の列があり、ξ は graded module としての同型である。

$\xi \circ \pi(\mathrm{td}(\Omega_X^{\vee})) = \tau([A])$ であるので、$\tau([A])$ の様子を調べる為に、$\pi(\mathrm{td}(\Omega_X^{\vee}))$ が graded ring $\mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}}/(a+b)$ の中でどの様に書けるかを見てみよう。

$n \leq m$ であるから、graded ring として、

$$\mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}}/(a+b) = \mathbb{Q}[a,b]/(a^{n+1}, b^{m+1}, a+b) = \mathbb{Q}[a]/(a^{n+1})$$

という同型があることに注意。

次に、X の tangent bundle の todd class $\mathrm{td}(\Omega_X^{\vee})$ の計算をする。

注意 6 ここで、*todd class* の性質として、次の二つに注意しておく。

1. $0 \to A \to B \to C \to 0$ が *locally free sheaf* の完全列であるとき、$\mathrm{td}(B) = \mathrm{td}(A)\cdot\mathrm{td}(C)$ が成立する。

2. L が *invertible sheaf*、$c = c_1(L) \in \mathrm{CH}^1(X)_{\mathbb{Q}}$ としたとき、

$$\mathrm{td}(L) = \frac{c}{1-e^{-c}} = 1 + \frac{1}{2}c + \cdots$$

となる。($\mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}} = \oplus_i \mathrm{CH}^i(X)_{\mathbb{Q}}$ で、i が充分大きければ $\mathrm{CH}^i(X)_{\mathbb{Q}} = (0)$ であるので、上の $\mathrm{td}(L)$ は $\mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}}$ の元である。また、$c = 0$ であれば、$\mathrm{td}(L) = 1 \in \mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}}$ に注意。)

$X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ であるので、$\Omega_X = p_1^*\Omega_{\mathbb{P}^n} \oplus p_2^*\Omega_{\mathbb{P}^m}$ が成立することに注意する。$\mathbb{P}^n$ 上の有名な locally free sheaf の完全列

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^m} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

を p_1 で引き戻して $\mathcal{O}_X$-dual をとると、

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1} \longrightarrow p_1^*\Omega_{\mathbb{P}^n}^{\vee} \longrightarrow 0$$

という $\mathcal{O}_X$ 上の locally free sheaf の完全列が作れる。同様にして

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)^{m+1} \longrightarrow p_2^*\Omega_{\mathbb{P}^m}^{\vee} \longrightarrow 0$$

が作れる。ここで、注意 6 の性質により、

$$\begin{aligned}
\mathrm{td}(\Omega_X^{\vee}) &= \mathrm{td}(p_1^*\Omega_{\mathbb{P}^n}^{\vee})\cdot\mathrm{td}(p_2^*\Omega_{\mathbb{P}^m}^{\vee}) \\
&= \mathrm{td}(p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{n+1}\cdot\mathrm{td}(p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))^{m+1} \\
&= \left(\frac{a}{1-e^{-a}}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{b}{1-e^{-b}}\right)^{m+1} \in \mathbb{Q}[a,b]/(a^{n+1}, b^{m+1}) = \mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}}.
\end{aligned}$$

故に、あと $\pi(a) = a$, $\pi(b) = -a$ によって定まる環準同型

$$\pi : \mathbb{Q}[a,b]/(a^{n+1}, b^{m+1}) \longrightarrow \mathbb{Q}[a]/(a^{n+1})$$

で、$\pi(\mathrm{td}(\Omega_X^{\vee}))$ を計算してやればよい。

$$\begin{aligned}
\pi(\mathrm{td}(\Omega_X^{\vee})) &= \left(\frac{a}{1-e^{-a}}\right)^{n+1}\left(\frac{-a}{1-e^{a}}\right)^{m+1} \\
&= \left(\frac{-a^2}{(1-e^{-a})(1-e^{a})}\right)^{n+1}\left(\frac{-a}{1-e^{a}}\right)^{m-n}
\end{aligned}$$

である。ここで、原点の近傍での解析関数の Taylor 展開をやってやれば、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-a}{1-e^a}\right)^{m-n} &= \left(\sum_{k\geq 0}\frac{a^k}{(k+1)!}\right)^{-(m-n)} \\
&= 1-\frac{m-n}{2}a+\cdots \in \mathbb{Q}[a]/(a^{n+1}), \\
\left(\frac{-a^2}{(1-e^{-a})(1-e^a)}\right)^{n+1} &= \left(\sum_{k\geq 0}\frac{2a^{2k}}{(2k+2)!}\right)^{-(n+1)} \\
&= 1-\frac{n+1}{12}a^2+\cdots \in \mathbb{Q}[a]/(a^{n+1})
\end{aligned}$$

となる。このことより、まず、$n \neq m$ であれば、$\pi(\mathrm{td}(\Omega_X^\vee))$ の a の係数は $-\frac{m-n}{2} \neq 0$ である。つまり、定理 1 の同型写像 $\xi : \mathbb{Q}[a]/(a^{n+1}) \to \mathrm{A}_*(\mathrm{Spec}\, A)_{\mathbb{Q}}$ での像を考えれば、$\xi(-\frac{m-n}{2}a) = q_{\dim A-1} \neq 0$ となる。これは、$n \neq m$ のときは、A は Cohen-Macaulay 整閉整域で $\mathrm{cl}(K_A)$ が $\mathrm{Cl}(A)$ のなかで torsion ではない (例えば、[1] 参照) ことより、注意 2 の 4 から $q_{\dim A-1} \neq 0$ となることと符合する。

次に $n = m$ の場合を考えよう。$n \geq 2$ であれば、a^2 の係数は $\frac{-(n+1)}{12} \neq 0$ である。これは、同型写像 $\xi : \mathbb{Q}[a]/(a^{n+1}) \to \mathrm{A}_*(\mathrm{Spec}\, A)_{\mathbb{Q}}$ での像を考えれば、$\xi(\frac{-(n+1)}{12}a^2) = q_{\dim A-2} \neq 0$ を意味する。**つまり、$n = m \geq 2$ の場合、A は Gorenstein 環でありながら $q_{\dim A-2} \neq 0$ となる例となっている。**($n = m = 1$ のときは、A は complete intersection であり、注意 2 の (2) で見たことであるが、$\mathrm{td}(\Omega_X^\vee) = 1 \in \mathbb{Q}[a]/(a^2)$ となっている。)

この手法で、$\tau([A])$ の分解の様子がもっといろいろな環で計算できることが期待される。しかし、定理 1 では、X は k 上 smooth としているため、当然 A は孤立特異点となってしまう。現在のところ、$\mathrm{Sing}(A)$ が大きい場合の $\tau([A])$ に関する研究は全くされていない。

文献

[1] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal rings*, Lect. Note in Math., vol. 1327, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1988.

[2] S. P. Dutta, Frobenius and multiplicities, *J. of Alg.*, **85** (1983), 424–448.

[3] S. P. Dutta, M. Hochster and J. E. MacLaughlin, Modules of finite projective dimension with negative intersection multiplicities, *Invent. Math.*, **79** (1985), 253–291.

[4] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1984.

[5] H. GILLET AND C. SOULÉ, K-théorie et nullité des multiplicites d'intersection, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **300** (1985), 71–74.

[6] H. GILLET AND C. SOULÉ, Intersection theory using Adams operations, *Invent. Math.*, **90** (1987), 243–278.

[7] 蔵野和彦, "Grothendieck group への Frobenius 写像の作用について", 短期共同研究「Frobenius 写像の可換環論への応用」, 数理解析研究所講究録 713, pp 45–52.

[8] K. KURANO, An appoarch to the characteristic free Dutta multiplicities, *J. Math. Soc. Japan*, **45** (1993) 369–390.

[9] K. KURANO, On the vanishing and the positivity of intersection multiplicities over local rings with small non complete intersection loci, *preprint.*

[10] K. KURANO, A calculation of the Riemann-Roch map over Spec A, *in preparation.*

[11] P. ROBERTS, The vanishing of intersection multiplicities and perfect complexes, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **13** (1985), 127–130.

[12] P. ROBERTS, Local Chern characters and intersection multiplicities, *Proc. of Symposia in Pure Math.*, **46** (1987), 389–400.

[13] P. ROBERTS, Intersection theorems, *Commutative algebra*, Proc. Microprogram, June 15-July 12, 1987, Math. Sci. Res. Inst. Publ., no. 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1989, 417–436.

[14] P. ROBERTS. Local Chern classes, multiplicities, and perfect complexes, *Société Mathématique de France Mémoire* no. 38 (1989), 145–161.

[15] L. SZPIRO, Sur la théorie des complexes parfaits, *Commutative Algebra : Durham 1981*. London Math. Soc. Lect. Note, vol. 72, pp. 83–90, Cambridge Univ. Press 1982.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY, MINAMI-OHSAWA 1-1, HACHIOJI, TOKYO, 192-03, JAPAN

e-mail address: kurano@math.metro-u.ac.jp

トーリック多様体の交叉ホモロジー群

東北大学理学部　　石田正典

序文

トーリック多様体は正規有理代数多様体の一種で実空間の錐体の集まりである扇で記述出来るという特性を持っている。

前回の可換環シンポジウムでトーリック多様体の交叉ホモロジー群が対応する扇から作られる次数つき加群の複体のコホモロジー群で表されることを話した。

交叉ホモロジー群は扇が単体的でないときは perversity の取り方に依って異なるが、そのうち middle perversity によるものが最も重要である。その場合について調べた結果、重心細分に対する交叉ホモロジー群の写像の分解定理が得られた。重心細分で得られた扇は単体的なので扱い易く、単体的扇に関するコホモロジー群の消滅定理に分解定理を適用することに依り、一般の完備扇についての対角線定理 I と、ある錐体のそれ自身を除く面全体の作る扇についての対角線定理 II が得られた。

スタンレーは単体的凸多面体の面に関する上限予想を代数幾何学の重要な定理である強レフシェッツ定理をトーリック多様体に適用することにより証明した [S1]。対角線定理 II はこの証明における強レフシェッツ定理を不要にしている。

またスタンレーが定義した一般化された h ベクトルとトーリック多様体の middle perversity に対する交叉ホモロジー群の次元との関係 [S2, Thm.3.1] についても別証明を与えたことになる。

ここでの議論の特徴は、トーリック多様体は一切持ち出さずに、有理数体 $\mathbf{Q}$ 上有限次元のベクトル空間とそれらの間の線形写像で、証明も含めてすべてを記述していることである。一方、これは有限集合である扇を空間と考えて、その上で層の理論を展開しているともいえる。

1　扇上の外積加群

r を非負整数、N を階数 r の自由 $\mathbf{Z}$ 加群とする。また A を $\mathbf{Q}$ 上の外積代数 $\bigwedge^\bullet N_{\mathbf{Q}}$ とし、その次数付けを $A_i := \bigwedge^{-i} N_{\mathbf{Q}}$ $(i = 0, -1, \cdots, -r)$ により定める。

C を A の斉次部分 $\mathbf{Q}$ 代数とするとき $\mathrm{GM}(C)$ により次数付き有限生成左 C 加群全体で、写像としては次数を保つ斉次 C 準同型のみを考えたアーベル圏を表す。次数付き左 C 加群 V は斉次元 $a \in A_p, x \in V_q$ に対し $xa := (-1)^{pq}ax$ と定めるこ

とにより右 C 加群とも考える。逆に、右 C 加群の構造から左 C 加群の構造も得られる。

$\mathrm{GM}(C)$ での有限複体全体のなすアーベル圏を $\mathrm{CGM}(C)$ とする。なお $\mathrm{CGM}(C)$ での準同型はホモトピー同値等による同一視は行なわずにすべて区別して考える。一般に X がカテゴリー $\mathcal{C}$ の対象であることを $X \in \mathcal{C}$ と書くことにする。

$V^\bullet \in \mathrm{CGM}(C)$ に対して各コホモロジー群 $\mathrm{H}^i(V^\bullet)$ は次数付き C 加群である。$\mathrm{CGM}(C)$ での準同型 $f: V^\bullet \to W^\bullet$ が各コホモロジー群の同型を引き起こすとき f を擬同型という。

有理錐体 $\sigma \subset N_{\mathbf{R}}$ に対して $r_\sigma := \dim \sigma$ と置く。このとき $N(\sigma) := N \cap (\sigma + (-\sigma))$ は階数 r_σ の自由 $\mathbf{Z}$ 加群である。$A(\sigma)$ を A の部分代数 $\bigwedge^\bullet N(\sigma)_{\mathbf{Q}}$ とする。

$\sigma \prec \tau$ のとき $A(\sigma) \subset A(\tau)$ である。$V \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ に対し $V_{A(\tau)} := V \otimes_{A(\sigma)} A(\tau)$ と置く。$A(\tau)$ が階数 $2^{r_\tau - r_\sigma}$ の自由 $A(\sigma)$ 加群であることから、この対応 $V \mapsto V_{A(\tau)}$ は $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ から $\mathrm{GM}(A(\tau))$ への完全関手である。

次数付き加群の複体を扱うための記号を導入しておく。一般に次数付き加群の次数は下付きで、複体の次数は上付きの添え字で書くことにする。$F = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} F_i$ を次数付き加群とするとき、整数 m に対して $F(m)$ を $F(m)_i := F_{i+m}$ $(i \in \mathbf{Z})$ で定義される次数付き加群とする。加群 E の自明な次数付けを $E_0 := E$ かつ $E_i := \{0\}$ $(i \neq 0)$ で定義する。特に E が自明な次数付けを持つとすると $E(m)$ は $E(m)_{-m} = E$ かつ $E(m)_i = \{0\}$ $(i \neq -m)$ である。

$(F^\bullet, d_F)$ を複体とするとき、整数 m に対して $F[m]^\bullet$ を $F[m]^i := F^{i+m}$ $(i \in \mathbf{Z})$ かつ $d^i_{F[m]} := (-1)^m d_F^{i+m}$ $(i \in \mathbf{Z})$ で定義される複体とする。加群 E に対して自明な複体 $E^\bullet$ を $E^0 := E$ かつ $E^i := \{0\}$ $(i \neq 0)$ で定義する。

$F^\bullet$ が次数付き加群の複体とするとき F^i_j をその (i,j) 成分と呼ぶ。

$\det(\sigma) := \bigwedge^{r_\sigma} N(\sigma) \simeq \mathbf{Z}$ とする。$\sigma \prec \tau$ かつ $r_\tau - r_\sigma = 1$ のとき $w \in N(\tau) \cap \tau$ を $N(\tau)/N(\sigma) \simeq \mathbf{Z}$ での類が生成元であるようにとり、結合係数写像 $q'_{\sigma/\tau} : \det(\sigma) \to \det(\tau)$ を $q'_{\sigma/\tau}(a) := w \wedge a$ で定義する。これは w の選び方に依らない。

$V \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ に対し $\mathrm{D}_\sigma(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(V, \det(\sigma)_{\mathbf{Q}}(r_\sigma))$ と定義する。V の次数付き左加群の構造から $\mathrm{D}_\sigma(V)$ は次数付き右加群となり、それにより $\mathrm{D}_\sigma(V) \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ と考える。D_σ は $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ からそれ自身への反変完全関手となる。$\sigma \prec \tau$ のとき $\mathrm{D}_\sigma(V)_{A(\tau)} = \mathrm{D}_\tau(V_{A(\tau)})$ となる。

$\det(\sigma)^2 := \det(\sigma) \otimes \det(\sigma)$ として $V^\bullet \in \mathrm{CGM}(A(\sigma))$ に対し

$$\mathbf{D}_\sigma(V)^\bullet := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(V, \det(\sigma)^2_{\mathbf{Q}}(r_\sigma)[-r_\sigma])^\bullet$$

と定義する。ここで $\det(\sigma)^2_{\mathbf{Q}}(r_\sigma)[-r_\sigma]^\bullet$ は $(r_\sigma, -r_\sigma)$ 成分が $\det(\sigma)^2_{\mathbf{Q}}$ で他の成分は $\{0\}$ である。この時 $\mathbf{D}_\sigma$ は $\mathrm{CGM}(A(\sigma))$ からそれ自身への反変完全関手となる。また、コホモロジー群について $\mathrm{H}^i(\mathbf{D}_\sigma(V)^\bullet) \simeq \mathrm{D}_\sigma(\mathrm{H}^{r_\sigma - i}(V^\bullet))$ が成り立つ。

なお $r_\pi = r$ のとき $A(\pi) = A$ で $\mathbf{D}_\pi : \mathrm{CGM}(A) \to \mathrm{CGM}(A)$ は π の選び方によらない。π を特定しないとき、この関手を $\mathbf{D}_N$ と書く。

Δ を $N_{\mathbf{R}}$ の有限扇とする。各 $\sigma \in \Delta$ についてのアーベル圏 $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ を合併したものとして、次の加法圏 $\mathrm{GEM}(\Delta)$ を考える。

$\mathrm{GEM}(\Delta)$ の対象は $L(\sigma) \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ の集まり $L = (L(\sigma)\ ;\ \sigma \in \Delta)$ で準同型 $f : L \to K$ は $\sigma \prec \tau$ なるすべての $\sigma, \tau \in \Delta$ についての $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ での準同型 $f(\sigma/\tau) : L(\sigma) \to K(\tau)$ の集まり $f = (f(\sigma/\tau))$ として定義する。但し、ここで $K(\tau)$ は包含関係 $A(\sigma) \subset A(\tau)$ により $K(\tau) \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ と考えている。$\sigma \neq \tau$ のとき常に $f(\sigma/\tau) = 0$ であるとき f を非混合という。非混合な準同型には核や余核が $\mathrm{GEM}(\Delta)$ の対象として存在する。

$\mathrm{GEM}(\Delta)$ の対象を Δ 上の外積加群と呼ぶ。外積加群の直和や準同型の結合は自然に定義される。また、各 $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ は自然に $\mathrm{GEM}(\Delta)$ の部分圏と考えられ、この意味で $L = (L(\sigma)\ ;\ \sigma \in \Delta) \in \mathrm{GEM}(\Delta)$ は外積加群の直和 $\bigoplus_{\sigma\in\Delta} L(\sigma)$ に等しい。

各 $\rho \in \Delta$ に対して共変関手 $\mathrm{i}_\rho^* : \mathrm{GEM}(\Delta) \to \mathrm{GM}(A(\rho))$ 及び $\mathrm{i}_\rho^! : \mathrm{GEM}(\Delta) \to \mathrm{GM}(A(\rho))$ を次のように定義する。

$L \in \mathrm{GEM}(\Delta)$ に対し

$$\mathrm{i}_\rho^*(L) := \bigoplus_{\sigma \in F(\rho)} L(\sigma)_{A(\rho)}$$

と定める。ここで $F(\rho)$ は ρ 自身も含めた ρ の面全体で、また $L(\sigma)_{A(\rho)} := L(\sigma) \otimes_{A(\sigma)} A(\rho)$ である。

$f : L \to K$ に対して $\mathrm{i}_\rho^*(f) : \mathrm{i}_\rho^*(L) \to \mathrm{i}_\rho^*(K)$ は、$\sigma \prec \tau$ なる $\sigma, \tau \in F(\rho)$ に対する (σ, τ) 成分を $f(\sigma/\tau)$ から引き起こされた準同型と定める。

一方、$\mathrm{i}_\rho^!$ の方は単に $\mathrm{i}_\rho^!(L) := L(\rho)$ と定義し $f : L \to K$ に対し $\mathrm{i}_\rho^!(f) := f(\rho/\rho)$ とする。

また、i_ρ^* と類似の関手 $\Gamma : \mathrm{GEM}(\Delta) \to \mathrm{GM}(A)$ を

$$\Gamma(L) := \bigoplus_{\sigma \in \Delta} L(\sigma)_A$$

で定義する。

$L^\bullet$ を $\mathrm{GEM}(\Delta)$ の有限複体とすると、$\rho \in \Delta$ に対する $\mathrm{i}_\rho^* L^\bullet$ は $\mathrm{GM}(A(\rho))$ の複体で $\Gamma(L)^\bullet$ は $\mathrm{GM}(A)$ の複体である。$\mathrm{GEM}(\Delta)$ での有限複体のなす加法圏を $\mathrm{CGEM}(\Delta)$ と書く。

$f : L^\bullet \to K^\bullet$ を $\mathrm{CGEM}(\Delta)$ での準同型とする。すべての $\rho \in \Delta$ に対して、アーベル圏 $\mathrm{GM}(A(\rho))$ での複体の準同型 $\mathrm{i}_\rho^!(f) : L(\rho)^\bullet \to K(\rho)^\bullet$ が擬同型であるときに f を擬同型と呼ぶ。

$f : L^\bullet \to K^\bullet$ が擬同型であれば$\Gamma(f) : \Gamma(L)^\bullet \to \Gamma(K)^\bullet$ はアーベル圏 $\mathrm{GM}(A)$ での複体の擬同型となる。また、任意の $\rho \in \Delta$ に対し $\mathrm{GM}(A(\rho))$ での複体の準同型 $\mathrm{i}_\rho^* : \mathrm{i}_\rho^* L \to \mathrm{i}_\rho^* K$ も擬同型となる。

また、$L^\bullet, K^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ に $J^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ と２つの擬同型 $L^\bullet \to J^\bullet$ 及び $K^\bullet \to J^\bullet$ が存在するとき $L^\bullet$ と $K^\bullet$ は擬同型であるという。

2 外積加群の複体としての交叉複体

Δ を $N_{\mathbf{R}}$ の有限扇とする。

写像 $\mathbf{p} : \Delta \setminus \{0\} \to \mathbf{Z}$ を Δ の perversity と呼ぶ。

次の条件を満たす $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ が存在する。

(1) $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)(\mathbf{0})^0 = \mathbf{Q}$ かつ $i \neq 0$ なら $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)(\mathbf{0})^i = \{0\}$.

(2) $\Delta \setminus \{\mathbf{0}\}$ に含まれる任意の σ と $i+j \leq \mathbf{p}(\sigma)$ を満たす任意の $i, j \in \mathbf{Z}$ について $\mathrm{H}^i(\mathrm{i}_\sigma^!(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))^\bullet)_j = \{0\}$ となる。

(3) $\Delta \setminus \{\mathbf{0}\}$ に含まれる任意の σ と $i+j \geq \mathbf{p}(\sigma)$ を満たす任意の $i, j \in \mathbf{Z}$ について $\mathrm{H}^i(\mathrm{i}_\sigma^*(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))^\bullet)_j = \{0\}$ となる。

複体 $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet$ は次のように帰納的に構成される。

$\Delta = \{\mathbf{0}\}$ であれば (1) で確定するので$\Delta \neq \{\mathbf{0}\}$ とする。$\pi \in \Delta$ を極大元の一つとして、複体 $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta \setminus \{\pi\})^\bullet$ はすでに得られているとする。これを Δ に延長すればよいが $V^\bullet := \mathrm{i}_\pi^*(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta \setminus \{\pi\}))^\bullet$ と置き、$V[-1]^\bullet$ を (2) の条件を満たすように次数ごとに段階的に切断した複体を $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)(\pi)^\bullet$ と定義して $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet$ が得られる (cf.[I3, Thm.2.9])。

このように構成された複体を Δ の pervesity $\mathbf{p}$ の交叉複体と呼ぶ。恒等的に 0 である $\mathbf{p}$ を middle perversity といい、このとき $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet$ を単に $\mathrm{ic}(\Delta)^\bullet$ と書く。

なお、これら３つの条件を満たす複体は沢山あるが、いずれも $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet$ に擬同型である。

Theorem 2.1 (既約性定理) $\mathbf{p}$ を任意の *perversity* とし $f : L^\bullet \to K^\bullet$ を共に $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet$ に擬同型な $L^\bullet, K^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ の準同型とする。もし $f(\mathbf{0}/\mathbf{0}) : L(\mathbf{0})^\bullet \to K(\mathbf{0})^\bullet$ が擬同型であれば f は擬同型である。

任意の $\mathbf{p}$ について $\Gamma(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))^\bullet$ は $\mathrm{CGM}(A)$ の対象であるが $0 \leq i \leq r, -r \leq j \leq 0$ 以外の i, j については $\Gamma(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))_j^i = \{0\}$ である。従って、この範囲にない i, j については$\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))^\bullet)_j = \{0\}$ である。

任意の $\sigma \neq \mathbf{0}$ に対し $\mathbf{t}(\sigma) := r_\sigma - 1$ で定義される perversity $\mathbf{t}$ を top perversity と呼び、$\mathbf{b} := -\mathbf{t}$ を bottom perversity と呼ぶ。

(2.2) Δ が単体的扇であれば $\mathbf{b} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{t}$ なる任意の $\mathbf{p}$ について $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet$ は $\mathrm{ic}_{\mathbf{t}}(\Delta)^\bullet$ と擬同型である。

$L^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ が任意の $i \in \mathbf{Z}$ と $r_\tau - r_\sigma \geq 2$ となる $\sigma \prec \tau$ について $d_L^i(\sigma/\tau) = 0$ であるとき浅い対象と呼ぶ。

浅い対象 $L^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ を定義するためには次のようにすればよい。

(1) 各 $\sigma \in \Delta$ に対して $L(\sigma)^\bullet \in \mathrm{CGM}(A(\sigma))$ をとる。

(2) $r_\tau - r_\sigma = 1$ となるすべての $\sigma \prec \tau$ について複体の準同型 $d_L(\sigma/\tau) : L(\sigma)^\bullet \to L(\tau)[1]^\bullet$ を定める。

(3) $r_\rho - r_\sigma = 2$ となる $\sigma \prec \rho$ に対しては $\sigma \prec \tau \prec \rho$ かつ $r_\tau = r_\sigma + 1$ となる τ は丁度2つであるが、それらを τ_1, τ_2 とするとき常に

$$d(\tau_1/\rho) \cdot d(\sigma/\tau_1) + d(\tau_2/\rho) \cdot d(\sigma/\tau_2) = 0$$

となっていることを確認する。

浅い対象 $\mathrm{P}(\Delta)^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ を定義する。各 $\sigma \in \Delta$ について $\mathrm{P}(\Delta)(\sigma)^\bullet := (\det(\sigma) \otimes A(\sigma))[-r_\sigma]^\bullet$ とし $r_\tau - r_\sigma = 1$ なる $\sigma \prec \tau$ について

$$d_{\mathrm{P}(L)}(\sigma/\tau) : \mathrm{P}(\Delta)(\sigma)^\bullet \to \mathrm{P}(\Delta)(\tau)[1]^\bullet$$

は結合係数写像 $\det(\sigma) \to \det(\tau)$ と包含写像 $A(\sigma) \to A(\tau)$ のテンソル積として定義する。

top perversity $\mathbf{t}$ について自然な非混合全射 $\mathrm{P}(\Delta)^\bullet \to \mathrm{ic}_{\mathbf{t}}(\Delta)^\bullet$ が存在する。この全射の核を $K^\bullet$ と置くと $K(\sigma)^\bullet := (\det(\sigma) \otimes N(\sigma)A(\sigma))[-r_\sigma]^\bullet$ となる。但し $N(\sigma)A(\sigma)$ は $A(\sigma)$ の極大両側イデアル $\bigoplus_{i=-r_\sigma}^{-1} A(\sigma)_i$ である。

$f : \Delta' \to \Delta$ を扇の細分とする。つまり Δ' は同じ $N_{\mathbf{R}}$ の有限扇で $|\Delta'| = |\Delta|$ であり、各 $\sigma \in \Delta'$ は、ある錐体 $\tau \in \Delta$ に含まれるとする。なお、$\sigma \in \Delta'$ に対し $f(\sigma)$ は Δ の中で σ を含む最小の錐体を表すものとする。$L^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta')$ に対し、順像 $f_* L^\bullet$ を次のように定義する。

$i \in \mathbf{Z}$ と $\rho \in \Delta$ に対して

$$(f_* L)(\rho)^i := \bigoplus_{\sigma \in f^{-1}(\rho)} L(\sigma)^i_{A(\rho)}$$

と定義して $\rho \prec \mu$ なる $\rho, \mu \in \Delta$ と $\sigma \prec \tau$ となる $\sigma \in f^{-1}(\rho)$ と $\tau \in f^{-1}(\mu)$ に対する $d^i_{f_* L}(\rho/\mu)$ の (σ, τ) 成分は $d^i_L(\sigma/\tau)$ から得られるものとする。

(2.3) $h : L^\bullet \to K^\bullet$ が $\mathrm{CGEM}(\Delta')$ での擬同型とすると $f_* h : f_* L^\bullet \to f_* K^\bullet$ も擬同型となる。

$\sigma \in \Delta'$ と $\tau := f(\sigma) \in \Delta$ に対し、写像

$$(\det(\sigma) \otimes A(\sigma))[-r_\sigma]^\bullet \to (\det(\tau) \otimes A(\tau))[-r_\tau]^\bullet$$

を $r_\sigma < r_\tau$ であれば零で $r_\sigma = r_\tau$ であれば $\det(\sigma)=\det(\tau)$ かつ $A(\sigma)=A(\tau)$ なので恒等写像と定める。これにより非混合全射 $f_*\mathrm{P}(\Delta')^\bullet \to \mathrm{P}(\Delta)^\bullet$ が得られるが、これは擬同型である。また、これと可換な非混合準同型 $f_*\mathrm{ic_t}(\Delta')^\bullet \to \mathrm{ic_t}(\Delta)^\bullet$ が存在する。top perversity の交叉複体は位相幾何学でのホモロジー群を作りだすもので、この準同型は連続写像に対するホモロジー群の準同型に対応している。

$f:\Sigma\to\Delta$ をある重心細分とする。Σ の選び方にかかわらず $f_*\mathrm{P}(\Sigma)^\bullet$ はある $\mathrm{SdP}(\Delta)^\bullet\in\mathrm{CGEM}(\Delta)$ と同型となる。任意の perversity $\mathbf{p}$ に対し自然な非混合全射 $\mathrm{SdP}(\Delta)^\bullet\to\mathrm{ic_p}(\Delta)^\bullet$ が存在する。

3 双対化作用素

$L^\bullet\in\mathrm{CGEM}(\Delta)$ に対し $\mathrm{CGEM}(\Delta)$ の浅い対象 $\mathbf{D}(L)^\bullet$ を次のように定義する。

各 $\rho\in\Delta$ に対し $\mathbf{D}(L)(\rho)^\bullet := \mathbf{D}_\rho(\mathrm{i}_\rho^*(L))^\bullet$ と置く。$\rho,\mu\in\Delta$ が $\rho\prec\mu$ であるとする。$r_\mu - r_\rho = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\rho(\mathrm{i}_\rho^*L)^\bullet_{A(\mu)} &:= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{i}_\rho^*L,(\det(\rho)\otimes\det(\rho))_{\mathbf{Q}}(r_\rho)[-r_\rho])^\bullet_{A(\mu)}\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}((\mathrm{i}_\rho^*L)_{A(\mu)},(\det(\mu)\otimes\det(\rho))_{\mathbf{Q}}(r_\mu)[-r_\mu+1])^\bullet\end{aligned}$$

であるから、自然な全射 $\mathrm{i}_\mu^*(L)^\bullet\to\mathrm{i}_\rho^*(L)^\bullet_{A(\mu)}$ 及び結合係数写像 $\det(\rho)\to\det(\mu)$ により複体の準同型 $\mathbf{D}(L)(\rho)^\bullet_{A(\mu)}\to\mathbf{D}(L)(\mu)[1]^\bullet$ を得る。このような $\rho,\mu\in\Delta$ に対し

$$d_{\mathbf{D}(L)}(\rho/\mu):\mathbf{D}(L)(\rho)^\bullet\longrightarrow\mathbf{D}(L)(\mu)[1]^\bullet$$

を、単射 $\mathbf{D}(L)(\rho)^\bullet\to\mathbf{D}(L)(\rho)^\bullet_{A(\mu)}$ に上記の準同型を合成したものと定めることにより $\mathbf{D}(L))^\bullet$ が定義される。

この反変関手 $\mathbf{D}$ の重要な性質を列挙する。

(3.1) $f:L^\bullet\to K^\bullet$ が $\mathrm{CGEM}(\Delta)$ での擬同型とすると $\mathbf{D}(f):\mathbf{D}(K)^\bullet\to\mathbf{D}(L)^\bullet$ も擬同型である。

(3.2) 任意の $L^\bullet\in\mathrm{CGEM}(\Delta)$ に対し、自然な擬同型 $\varphi:L^\bullet\to\mathbf{D}(\mathbf{D}(L))^\bullet$ が存在する。

(3.3) Δ が完備であれば、任意の $L^\bullet\in\mathrm{CGEM}(\Delta)$ に対し $\Gamma(\mathbf{D}(L))^\bullet$ と $\mathbf{D}_N(\Gamma(L))^\bullet$ は擬同型である。特に

$$\dim_{\mathbf{Q}}\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathbf{D}(L))^\bullet)_j=\dim_{\mathbf{Q}}\mathrm{H}^{r-i}(L^\bullet)_{-r-j}$$

が任意の i,j に対し成立する。

(3.4) $|\Delta|$ が r 次元の凸多角錐の境界に等しければ $L^\bullet\in\mathrm{CGEM}(\Delta)$ に対し $\Gamma(\mathbf{D}(L))^\bullet$ と $\mathbf{D}_N(\Gamma(L))[1]^\bullet$ は擬同型である。特に

$$\dim_{\mathbf{Q}}\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathbf{D}(L))^\bullet)_j=\dim_{\mathbf{Q}}\mathrm{H}^{r-i-1}(L^\bullet)_{-r-j}$$

が任意の i, j について成立する。

(**3.5**) Δ を任意の有限扇とし $\mathbf{p}$ を perversity とすると $\mathbf{D}(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))^\bullet$ は $\mathrm{ic}_{-\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet$ と擬同型である。特に、$\mathbf{D}(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet$ は $\mathrm{ic}(\Delta)^\bullet$ と擬同型である。

(**3.6**) $f : \Delta' \to \Delta$ を有限扇の細分とする。任意の $L^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ に対して $f_*\mathbf{D}(L)^\bullet$ と $\mathbf{D}(f_*L)^\bullet$ は擬同型となる。

4 分解定理と対角線定理

$f : \Sigma \to \Delta$ を重心細分とし $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ をそれぞれ Δ 及び Σ の perversity とする。Σ をもう一度重心細分したものを $f' : \Sigma' \to \Sigma$ とすると、同様に自然な非混合全射擬同型

$$f'_*\,\mathrm{P}(\Sigma') \longrightarrow \mathrm{P}(\Sigma)$$

があるが、f によるこの擬同型の順像をとることにより非混合全射擬同型

$$f_*\,\mathrm{SdP}(\Sigma)^\bullet \to \mathrm{SdP}(\Delta)^\bullet$$

が得られる。この擬同型から非混合全射準同型

$$f_*\,\mathrm{ic}_{\mathbf{q}}(\Sigma)^\bullet \to \mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet$$

が引き起こされるための必要十分条件は $\forall\sigma \in \Sigma \setminus \{0\}$ に対し $\mathbf{q}(\sigma) \le \mathbf{p}(f(\sigma))$ となることである。特に

$$f_*\,\mathrm{ic}(\Sigma)^\bullet \to \mathrm{ic}(\Delta)^\bullet$$

は存在する。

この準同型に反変関手 $\mathbf{D}$ を使って

$$\mathbf{D}(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet \to \mathbf{D}(f_*\,\mathrm{ic}(\Sigma))^\bullet$$

を得るが $\mathbf{D}(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet$ は (3.5) により $\mathrm{ic}(\Delta)^\bullet$ に擬同型で $\mathbf{D}(f_*\,\mathrm{ic}(\Sigma))^\bullet$ は (3.6) と (3.5) により $f_*\,\mathrm{ic}(\Sigma)^\bullet$ に擬同型である。従って、これらはある意味で互いに逆向きの準同型である。このことと $\mathrm{ic}(\Delta)^\bullet$ の既約性 (定理 2.1) から次の重要な定理を得る。

Theorem 4.1 (**分解定理**) Δ を有限扇 $f : \Sigma \to \Delta$ を重心細分とすると自然な全射準同型

$$\Gamma(\mathrm{ic}(\Sigma))^\bullet \to \Gamma(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet$$

による A 加群の準同型

$$\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{ic}(\Sigma))^\bullet) \to \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet)$$

はすべての i について分裂する全射である。

完備な単体的扇に対する定理 [O2, Prop.4.1] の一般化として次の定理を得る。これは分解定理と (2.2) により単体的扇の定理に帰着することにより証明する。

Theorem 4.2 (対角線定理 I) Δ を完備扇とすると $i \neq j + r$ であれば

$$\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet)_j = \{0\}$$

となる。

さらに重心細分をうまく使って次の定理を得る。

Theorem 4.3 (対角線定理 II) π を r 次元の錐体とする。$i+j \geq 0$ かつ $i \neq j+r-1$ であるか $i+j \leq -1$ かつ $i \neq j+r$ であれば$\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{ic}(F(\pi)\backslash\{\pi\}))^\bullet)_j = \{0\}$ となる。

この定理で $F(\pi)\backslash\{\pi\}$ が単体的扇である場合は $\mathrm{ic}(F(\pi)\backslash\{\pi\})^\bullet$ は $\mathrm{ic}_{\mathrm{t}}(F(\pi)\backslash\{\pi\})^\bullet$ と擬同型であることから [O3, Cor.4.5] に与えられた g 予想を証明するための同値な条件に等しいことがわかる。

スタンレーによる g 予想の証明はこの同値な条件が代数幾何学の定理である強レフシェッツ定理の系であることに基づいているが、上の対角線定理 II により代数多様体の議論を経ずに直接証明されたことになる。

Corollary 4.4 ρ を有限扇 Δ の元とすると $i+j \geq 0$ かつ $i \neq j+r_\rho-1$ であるか $i+j \leq -1$ かつ $i \neq j+r_\rho$ であれば$\mathrm{H}^i(\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(F(\rho)\backslash\{\rho\}))^\bullet)_j = \{0\}$ となる。

これは ρ を $N(\rho)_{\mathbf{R}}$ の最大次元の錐体とみて定理 4.3を適用すればよい。

Corollary 4.5 ρ を有限扇 Δ の元とすると $i+j \geq 1$, $i = j+r_\rho$ でなければ $\mathrm{H}^i(\mathrm{ic}(\Delta)(\rho)^\bullet)_j = \{0\}$ であり、$i+j \leq -1$, $i = j+r_\rho$ でなければ$\mathrm{H}^i(\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet)_j = \{0\}$ となる。

これは $\mathrm{ic}(\Delta)(\rho)^\bullet$ は $\mathrm{gt}^{\geq 1}(\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(F(\rho)\backslash\{\rho\}))[-1])^\bullet$ に $\mathrm{CGM}(A(\rho))$ の中で同型で、$\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet$ は $\mathrm{gt}_{\leq -1}(\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(F(\rho)\backslash\{\rho\})))^\bullet$ に擬同型であるので系 4.4から得られる。

なお、$\mathrm{gt}^{\geq 1}$ や $\mathrm{gt}_{\leq -1}$ は次数つき加群の複体の切断で詳しくは [I3, §1] を見て下さい。

5　スタンレーによる一般化された h ベクトルとの関係

$V^\bullet$ を有限次元次数つき $\mathbf{Q}$ ベクトル空間の有限複体とする。各 $j \in \mathbf{Z}$ に対し $\chi(V_j) := \sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^{i+j}\dim_{\mathbf{Q}} V_j^i$ とし、整係数のローラン多項式 $\chi(V,t)$ を

$$\chi(V,t) := \sum_{j\in\mathbf{Z}} \chi(V_j)t^{-j}$$

と定義する。$\chi(V_j) = \sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^{i+j}\dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{H}^i(V^\bullet)_j$ なので$\chi(V,t)$ は $V^\bullet$ のコホモロジー群できまる。$V(1)^\bullet$ を $V(1)_j^i := V_{j+1}^i$ で定義される複体、つまり次数つきベクトル空間の次数を 1 ずつ下げた複体とすると$\chi(V(1),t) = -t\chi(V,t)$ となる。また $V[1]^\bullet$ を $V[1]^i := V^{i+1}$ かつ $d_{V[1]}^i := -d_V^{i+1}$ で定義された複体とすると$\chi(V[1],t) = -\chi(V,t)$ となる

$N_{\mathbf{R}}$ の錐体 σ, τ が $\sigma \prec \tau$ かつ $r_\tau - r_\sigma = 1$ であれば、次数つき $A(\sigma)$ 加群として $A(\tau) \simeq A(\sigma) \oplus A(\sigma)(1)$ である。$V^\bullet \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ であれば $V_{A(\tau)}^\bullet \simeq V^\bullet \oplus V^\bullet(1)$ であるから $\chi(V_{A(\tau)},t) = (1-t)\chi(V,t)$ となる。$r_\tau - r_\sigma > 1$ の場合もこれを繰り返せば$\chi(V_{A(\tau)},t) = (1-t)^{r_\tau - r_\sigma}\chi(V,t)$ を得る。

Δ を有限扇とし $L \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ とする。各 $\rho \in \Delta$ に対し

$$\chi(\mathrm{i}_\rho^*(L),t) = \sum_{\sigma\in F(\rho)} \chi(L(\sigma)_{A(\rho)},t) = \sum_{\sigma\in F(\rho)} (1-t)^{r_\rho - r_\sigma}\chi(L(\sigma),t) \tag{1}$$

となる。また $L^\bullet, K^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ が擬同型であれば各 $\rho \in \Delta$ に対し$\chi(\mathrm{i}_\rho^*(L),t) = \chi(\mathrm{i}_\rho^*(K),t)$ である。

Δ を $N_{\mathbf{R}}$ の完備扇とする。Δ の元全部を面とする仮想の錐体 α_Δ を考え $\tilde{\Delta} := \Delta \cup \{\alpha_\Delta\}$ と置く。$\tilde{\Delta}$ は順序関係 $\sigma \prec \tau$ によりオイラー (半) 順序集合 [S2, §2] となる。各 $\rho \in \tilde{\Delta}$ に対し $F[\mathbf{0},\rho) := F(\rho) \setminus \{\rho\}$ と置く。

[S2, §2] においてスタンレーがオイラー順序集合に対して定義した多項式 f, g を $\tilde{\Delta}$ について求めると、各 $\rho \in \Delta \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して

$$f(F[\mathbf{0},\rho),t) = (-1)^{r_\rho}(t-1)^{-1}\chi(\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(F(\rho)\setminus\{\rho\})),t)$$

及び

$$g(F[\mathbf{0},\rho),t) = (-1)^{r_\rho}\chi(\mathrm{ic}(\Delta)(\rho),t)$$

となる。

これは [S2, §2] にある帰納的な定義の条件である

$$f(F[\mathbf{0},\rho),t) = \sum_{\sigma\in F(\rho)} (t-1)^{r_\rho - r_\sigma - 1}g(F[\mathbf{0},\sigma),t)$$

及び $g(F[\mathbf{0},\rho),t)$ が $(t-1)f(F[\mathbf{0},\rho),t)$ の次数 $r_\rho/2$ 以下の部分に等しいことみればよいが、前者は (1) から容易に得られ、後者は系 4.4.4.5 から得られる。

結局、$\sum h_{r-i}t^i := f(F[\mathbf{0},\alpha_\Delta),t)$ で定義される h ベクトル $(h_0,\cdots,h_r)$ は各 $0 \leq i \leq r$ に対し $h_i = \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet)_j$ となる。

参考文献

[BBD] A.A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, Faisceaux pervers. Analyse et Topologie sur les Espaces Singuliers (I), Astérisque **100**, Soc. Math. France, 1982.

[DL] J. Denef and F. Loeser, Weights of exponential sums, intersection cohomology, and Newton polyhedra, preprint.

[GM2] M. Goresky and R. MacPherson, Intersection homology II. Invent. math. **72**, (1983), 77-129.

[I1] M.-N. Ishida, Torus embeddings and dualizing complexes, Tohoku Math. J. **32**, (1980), 111-146.

[I2] M.-N. Ishida, Torus embeddings and de Rham complexes, in Commutative Algebra and Combinatorics (M. Nagata and H. Matsumura, ed.), Adv. Studies in Pure Math. **11**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1987, 111-145.

[I3] M.-N. Ishida, Torus embeddings and algebraic intersection complexes, preprint.

[I4] M.-N. Ishida, Torus embeddings and algebraic intersection complexes, II, preprint.

[O1] T. Oda, Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to the Theory of Toric Varieties, Ergebnisse der Math. (3), **15**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1988.

[O2] T. Oda, The algebraic de Rham theorem for toric varieties, Tohoku Math. J. **45**, (1993), 231-247.

[O3] T. Oda, Simple convex polytopes and the strong Lefschetz theorem, J. of Pure and Appl. Alg. **71**, (1991), 265-286.

[O4] T. Oda, The intersection cohomology and toric varieties, 短期共同研究「凸多面体の幾何学」報告集, 1993, Kyoto.

[S1] R. Stanley, The number of faces of a simplicial convex polytope, Adv. in Math. **35**, (1980), 236-238.

[S2] R. Stanley, Generalized h-vectors, intesection cohomology of toric varieties, and related results, in Commutative Algebra and Combinatorics (M. Nagata and H. Matsumura, ed.), Adv. Studies in Pure Math. **11**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1987, 187-213.

Castelnuovo's Lemma and h-vectors of Cohen-Macaulay Homogeneous Domains

KOHJI YANAGAWA

Department of Mathematics, School of Science, Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464 JAPAN
e-mail: yanagawa@rabbit.math.nagoya-u.ac.jp

Introduction

In this paper, we will study a (not necessarily reduced) zero-dimensional subscheme of P^r and the Hilbert function of a Cohen-Macaulay homogeneous domain, focusing on "Castelnuovo's lemma" and related matters.

At the end of the last century Castelnuovo proved his well-known lemma on sets of points in P^r (the reduced case of Proposition 2.3), to construct a theory of "extremal curves". Lately, Eisenbud and Harris [5] gave a sufficient condition for a set of points to lie on a d-dimensional rational normal scroll, and used this result to study "nearly extremal curves".

On the other hand, for some reasons, it is desirable to extend results on a finite set of points to the non-reduced case. But arguments in classical works sometimes depend on reducedness of the coordinate ring, so some classical methods are not effective in the scheme case.

In this direction, Eisenbud and Harris [2] proved that Castelnuovo's lemma remains valid in the context of schemes (in Section 2, we will give a new proof of this theorem).

We will investigate these aspects of a zero-dimensional subscheme of a projective space, using M. Kreuzer's result on the canonical module of the projective coordinate ring. The main result of this paper is the following.

Main Theorem. *Let $X \subset \mathsf{P}^r$, $r \geq 2$ be a not necessarily reduced zero-*

dimensional subscheme in uniform position. Denote the h-vector of the projective coordinate ring of X (in other words, the first differences of the Hilbert function of X) by $(h_0, h_1, \ldots, h_s)$ *where* $h_s \neq 0$. *If there exists some* $2 \leq i \leq s-2$ *such that* $h_i \leq h_1 + d - 1$, *then there is a d-dimensional rational normal scroll containing* X. *If* $h_s \geq 2$ *and* $s \geq 3$, *then* $h_{s-1} \leq h_1 + d - 1$ *also implies the same assertion.*

Our theorem is stronger than Theorem 2.1 of [2] and Proposition 3.19 of [5] in some senses. For instance, their results concern only the number of conditions on quadrics (h_2, in our context).

In the latter half of this paper, we will give another approach to "Castelnuovo's lemma" from a view point of a recent result of Huneke and Ulrich [6]. And we will also study the h-vector of a homogeneous Cohen-Macaulay domain of arbitrary dimension, using the "uniform position theorem". For example, we will show the following.

Proposition 0.1 *Let* A *be a homogeneous Cohen-Macaulay domain over algebraically closed field of characteristic 0. Let* $(h_0, h_1, \ldots, h_s)$ *be the h-vector of* A. *If* $h_s \geq 2$ *and* $h_1 = h_i$ *for some* $2 \leq i \leq s-1$, *then we have* $h_1 = h_2 = \cdots = h_{s-1}$ *and* $h_s \leq h_1$. *In the case* $h_s = 1$, *if there is a* $2 \leq i \leq s-2$ *such that* $h_i = h_1$, *then* $h_1 = h_2 = \cdots = h_{s-1}$.

1 Notation and preliminary results

We work over an algebraically closed field k of arbitrary characteristic unless otherwise specified. By $\mathbf{P}^r$, we denote the projective r space over k. Let $S := k[X_0, \cdots X_r]$ be the homogeneous coordinate ring of $\mathbf{P}^r$.

Given a subscheme $V \subset \mathbf{P}^r$, we denote by I_V the saturated homogeneous ideal of V. We say that a subscheme $V \subset \mathbf{P}^r$ is *non-degenerate*, if no hyperplane contains V.

Let $X \subset \mathbf{P}^r$ be a zero-dimentional subscheme, and $R := S/I_X$ be the homogeneous coordinate ring of X. Unless otherwise specified, X and R are used in this meaning throughout this paper. R is a (not necessarily reduced) 1-dimensional Cohen-Macaulay homogeneous ring.

The Hilbert function of X is denoted by $H_X : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ $(n \longmapsto \dim_k R_n)$, while the *degree* of X is given by $\deg X = \sup\{H_X(n) | n \geq 0\}$. If X is reduced, then $\deg X$ is equal to the number of points contained in X.

Set $s = \min\{n | H_X(n) = \deg X\}$ and $h_i = H_X(i) - H_X(i-1)$. Then we have $h_0 = 1$, $h_i > 0$ for all $2 \leq i \leq s$, $h_0 + h_1 + \cdots + h_s = \deg X$, and

$$F(R, \lambda) := \sum_{i \geq 0} H_X(i)\lambda^i = \frac{h_0 + h_1\lambda + \cdots + h_s\lambda^s}{1 - \lambda}.$$

We call the vector $(h_0, h_1, \ldots, h_s)$ the *h-vector* of R.

Definition 1.1 The graded R-module $\omega_R := \mathrm{Ext}_S^r(R, S(-r-1))$ is called the *canonical module* of R.

The next fact is very important.

Proposition 1.2 **(Stanley [8])**

$$F(\omega_R, \lambda) := \sum_{i \in \mathbf{Z}} \dim_k(\omega_R)_i \lambda^i = \frac{\lambda^{-s+1}(h_s + h_{s-1}\lambda + \cdots + h_0\lambda^s)}{1 - \lambda}.$$

We now recall a few well-known geometric conditions on zero-dimensional schemes.

Definition 1.3 We say that X is *in linearly general position*, if every proper subspace $L \subset \mathbf{P}^r$ satisfies $\deg(L \cap X) \leq 1 + \dim L$, or equivalently, if every subscheme $Y \subset X$ satisfies $H_Y(1) = \min\{\deg Y, r+1\}$.

Definition 1.4 Let $X \subset \mathbf{P}^r$ be a zero-dimensional subscheme. We say that X is *in uniform position*, if X is in linearly general position and every subscheme $Y \subset X$ satisfies $H_Y(n) = \min\{H_X(n), \deg Y\}$ for all $n \in \mathbf{Z}$.

The next result is due to Kreuzer. We shall say that a map of k-vector spaces $\phi : U \otimes V \to W$ is *1-generic*, if $\phi(u \otimes v) \neq 0$ whenever $u, v \neq 0$, and *nondegenerate*, if $u \in U$ and $\phi(u \otimes V) = 0$ (resp. $v \in V$ and $\phi(U \otimes v) = 0$) imply $u = 0$ (resp. $v = 0$).

Proposition 1.5 **([7, Theorem 3.2. and 2.6.])** *Let $X \subset \mathbf{P}^r$ be a nondegenerate zero-dimensional subscheme in uniform position. Set $s = \min\{n | H_X(n) = \deg X\}$. If $s \geq 2$, then the multiplication map $S_1 \otimes (\omega_R)_{-s+1} \to (\omega_R)_{-s+2}$ is 1-generic, and the multiplication map $R_n \otimes (\omega_R)_{-s+1} \to (\omega_R)_{-s+n+1}$ is non-degenerate for all $n \geq 0$.*

Remark 1.6 (a) If $X \subset \mathbf{P}^r$ is in linearly general position (in particular, uniform position), then the h-vector $(h_0, h_1, \ldots, h_s)$ satisfies $h_i \geq h_1 = r$ for all $1 \leq i \leq s-1$. Hence we have $H_X(n) \geq \min\{1+nr, \deg X\}$ for all $n \geq 0$ (see for example [7]).

(b)For any non-reduced point $x \in X$, the local artinian ring $\mathcal{O}_{X,x}$ has a non-zero socle (note that k is algebraically closed). Since we have that $\dim_k \mathcal{O}_{X,x}/(a) = \dim_k \mathcal{O}_{X,x} - 1$ where $0 \neq a \in \mathrm{soc}(\mathcal{O}_{X,x})$, there is a subscheme $Y \subset X$ such that $\deg Y = \deg X - 1$ (if X is reduced, Y is nothing other than $X \setminus \{x\}$ for some point $x \in X$). Moreover for each integer $1 \leq n \leq \deg X$, there is a subscheme $Y \subset X$ such that $\deg Y = n$.

On the other hand, if X is in uniform position and has the h-vector $(h_0, h_1, \ldots, h_s)$, then every subschemes $Y \subset X$ is in uniform position again, and has the h-vector $(h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{i-1}, h_i')$ for some $i \leq s$ and $h_i' \leq h_i$.

To prove the Main Theorem, we need the following result from Eisenbud's "1-generic matrix" theory.

Proposition 1.7 *Let $\phi : U \otimes V \to W$ be a linear map of k-vector spaces and M be the linear form matrix with entries in W which corresponds to ϕ (the correspondance between a bilinear map and a linear form matrix is given in Introduction of [1]). If ϕ is 1-generic and $\dim_k V = 2$, then M is equivalent to a unique scrollar matrix $M(a_1, \cdots, a_d)$ with $1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_d$, $\sum_1^d a_i = \dim_k U$. That is,*

$$M \simeq M(a_1, \cdots, a_d)$$

$$:= \left(\begin{array}{cccc|ccc|cc} x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,a_1-1} & x_{2,0} & \cdots & x_{2,a_2-1} & \cdots & x_{d,a_d-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,a_1} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,a_2} & \cdots & x_{d,a_d} \end{array} \right)$$

Proof. From a well-known formula on determinantal ideals, the assumption of Theorem 5.1 of [1] is satisfied automatically in this case. □

For further information of a 1-generic matrix and the definition of a *rational normal scroll*, see [1] or [5].

2 Proof of the Main Theorem

If the assumption of the Main Theorem is satisfied, we have $h_{i+1} \geq 2$ (see Remark 1.6 (a)). Hence we can find a subscheme $Y \subset X$ whose h-vector forms $(h_0, h_1, \ldots, h_i, 2)$ by the argument in Remark 1.6 (b). Since $(I_Y)_2 = (I_X)_2$ and the defining ideal of a rational normal scroll is generated by quadrics, we can replace X by Y. So we may assume that $h_s = 2$, $s \geq 3$ and $h_{s-1} \leq h_1 + d - 1 = r + d - 1$. Then we have $\dim_k(\omega_R)_{-s+1} = 2$ by Proposition 1.2.

Let M be the matrix with entries in $(\omega_R)_{-s+2}$ which corresponds to the multiplication map $S_1 \otimes (\omega_R)_{-s+1} \to (\omega_R)_{-s+2}$. Since this map is 1-generic by Proposition 1.5, M is equivalent to a scrollar matrix $M(a_1, \cdots, a_{d'})$ with $1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{d'}$ and $\sum_1^{d'} a_i = r + 1$ by Proposition 1.7. We have $d' \leq d$, since $\dim_k M \leq \dim_k(\omega_R)_{-s+2} = 2 + h_{s-1} \leq r + 1 + d$ where $\dim_k M$ means the dimension of the linear span of the entries of M. Put $l := \min\{i | a_i \geq 2\}$ and $b_j := \sum_1^j a_i$ for each $j \geq 0$.

We can find a basis $x_0, \cdots, x_r$ of S_1 and α_0, α_1 of $(\omega_R)_{-s+1}$ respectively such that $x_i\alpha_0 = x_{i-1}\alpha_1$ for all $b_{j-1} < i < b_j$ and $l \leq j \leq d'$.

Set

$$M' := \left(\begin{array}{cccc|ccc|cc} x_{b_{l-1}} & x_{b_{l-1}+1} & \cdots & x_{b_l-2} & x_{b_l} & \cdots & x_{b_{l+1}-2} & \cdots & x_{r-1} \\ & & & & & & & & \\ x_{b_{l-1}+1} & x_{b_{l-1}+2} & \cdots & x_{b_l-1} & x_{b_l+1} & \cdots & x_{b_{l+1}-1} & \cdots & x_r \end{array} \right)$$

the scrollar matrix of type $M(a_l - 1, a_{l+1} - 1, \cdots, a_{d'} - 1)$ with entries in S_1.

An explicit calculation shows that $I_2(M') \cdot (\omega_R)_{-s+1} = 0$. In fact, we have

$$\begin{aligned} &(x_s x_{t-1} - x_{s-1}x_t) \cdot \alpha_0 \\ &= x_s x_{t-1}\alpha_0 - x_{s-1}(x_t\alpha_0) \\ &= x_s x_{t-1}\alpha_0 - x_{s-1}(x_{t-1}\alpha_1) \\ &= x_s x_{t-1}\alpha_0 - x_{t-1}(x_{s-1}\alpha_1) \\ &= x_s x_{t-1}\alpha_0 - x_{t-1}(x_s\alpha_0) = 0, \end{aligned}$$

$$(b_{i-1} < \forall s < b_i,\ b_{j-1} < \forall t < b_j,\ l \leq \forall i, j \leq d')$$

similarly,

$$(x_s x_{t-1} - x_{s-1}x_t) \cdot \alpha_1 = 0.$$

But, by Proposition 1.5, the multiplication map $R_2 \otimes (\omega_R)_{-s+1} \to (\omega_R)_{-s+3}$ is nondegenerate. So we have $I_2(M') \subset I_X$. That is, the d'-dimensional rational normal scroll defined by $I_2(M')$ contains X. Since $d \geq d'$, there is a d-dimensional rational normal scroll containing X. □

Remark 2.1 The essential idea of this proof is also used in the author's paper [9].

The next result is a special case of the Main Theorem. But even in the reduced case, it improves Proposition 3.19 of [5] which needs $2r+1+2d$ points for the same conclusion.

Corollary 2.2 (Yanagawa [9]) *Let $X \subset \mathbf{P}^r$ be a zero-dimensional subscheme in uniform position. If $\deg X \geq 2r+2+d$ and X imposes $2r+d$ conditions on quadrics, then there is a d-dimensional rational normal scroll containing X.*

The next proposition is the non-reduced version of Castelnuovo's lemma on finite set of points. This has been obtained in [2] and [3]. We will give a new proof of this. Our proof is more algebraic and elementary than theirs.

Corollary 2.3 *Suppose that X is a (not necessarily reduced) zero-dimensional subscheme of $\mathbf{P}^r$ in linearly general position.*

(a) If $\deg X = r+3$, then there is a unique rational normal curve containig X.

(b) If $\deg X \geq 2r+3$ but X imposes only $2r+1$ conditions on quadrics, then there is a unique rational normal curve containing X .

Proof. (a)The uniqueness statement follows from the fact that $\dim_k(I_X)_2 = \binom{r+2}{2} - H_X(2) = \binom{r+2}{2} - (2r+1) = \binom{r}{2}$ and that a rational normal curve is defined by $\binom{r}{2}$ quadrics.

We can prove the existence of the rational normal curve contaning X by the same arguments in our proof of the Main Theorem, since X is in uniform position and has the h-vector $(1, r, 2)$.

(b) Let Y be a subscheme of X with $\deg Y = 2r+3$. Then Y is in uniform position and has the h-vector (1, r, r, 2). Since $(I_X)_2 = (I_Y)_2$, the statement follows from the Main Theorem immediately. □

Corollary 2.4 *Let $X \subset \mathbf{P}^r$ be a zero-dimensional subscheme in uniform position and $(h_0, h_1, \ldots, h_s)$ be the h-vector of the projective coordinate ring of X. If $h_s \geq 2$ and $s \geq 3$, then the following are equivalent.*

i) $h_1 = h_i$ for some $2 \leq i \leq s-1$.

ii) $h_1 = h_2 = \cdots = h_{s-1}$ and $h_s \leq h_1$.

iii) There is a unique rational normal curve which contains X.

Proof. iii) $\Rightarrow$ ii): Well-known.

ii) $\Rightarrow$ i): Obvious.

i) $\Rightarrow$ iii): From the Main Theorem. □

Remark 2.5 Even in the case $h_s = 1$, if there is some $2 \leq i \leq s-2$ such that $h_i = h_1$, then $h_1 = h_2 = \cdots = h_{s-1}$.

Of course, the assumption $h_s \geq 2$ of Corollary 2.4 is necessary. There are many examples of a zero-dimensional subscheme in uniform position whose h-vector satisfies $s \geq 4$, $h_s = 1$, $h_1 = h_{s-1}$ but $h_2 \neq h_1$ (for example, an arithmetically Gorenstein zero-dimensional subscheme which is not contained in any rational normal curve).

3 Some related topics

The next result, which refines Huneke and Ulrich [6] in most cases, is not a direct consequence of the Main Theorem. But it may bring a new attention to "Castelnuovo's lemma".

Proposition 3.1 *Let k be an algebraically closed field of characteristic 0, and let $C \subset \mathbf{P}^r_k$, $r \geq 3$, be a reduced, irreducible and non-degenerate curve. Suppose that $\Gamma = C \cap H$ is arithmetically Gorenstein for a generic hyperplane H.*

(a) If $C \subset \mathbf{P}^r$ is not arithmetically Gorenstein, then $\Gamma \subset H \simeq \mathbf{P}^{r-1}$ is contained in a rational normal curve.

(b) If C is not arithmetically Gorenstein and $\deg C > r+1$, then the intersection of the quadrics containig C is a surface with minimal degree (i.e. a rational normal surface scroll or the Veronese surface in $\mathbf{P}^5$).

(c) Let $S = k[x_0, x_1, \ldots, x_r]$ be the projective coordinate ring of $\mathbf{P}^r$, and let $I_C \subset S$ be the saturated ideal of C. If $\dim_k (I_C)_2 < \binom{r-1}{2}$, then C itself is arithmetically Gorenstein.

Proof. (a) Let P be the projective coordinate ring of H (i.e. $P := S/(x)$ for some $x \in S_1$), and let $R = P/I_\Gamma$ be the projective coordinate ring of $\Gamma \subset H$. Corollary 3.24 of [6] implies that

$$\mathrm{Tor}_1^P(k,R)_s \neq 0 \qquad \text{where} \qquad s := \min\{n | H_\Gamma(n) = \deg \Gamma = \deg C\}.$$

Since R is Gorenstein, we have $\mathrm{Tor}_{r-2}^P(k,R)_{r-1} \simeq \mathrm{Tor}_1^P(k,R)_s \neq 0$. We may assume that $\Gamma \subset H$ is in linearly general position, hence Γ is contained in a rational normal curve by Corollary 3.c.6. of [4].

(b) Since $\Gamma \subset H \simeq \mathbf{P}^{r-1}$ is arithmetically Gorenstein and $\deg\Gamma = \deg C > r+1$, we have that $\deg\Gamma \geq 2(r-1)+2 = 2r$, $s \geq 3$ and $(I_\Gamma)_2 = (I_D)_2$ where $D \subset H$ is the rational normal curve containing Γ. On the other hand, Corollary 3.24 of [6] shows that $\dim_k(I_\Gamma)_2 = \dim_k(I_C)_2$ in this situation. So we see that the intersection of the quadrics containing C is a surface whose generic hyperplane section is a rational normal curve. Hence it is a surface with minimal degree.

(c) If $\deg C \neq r+1$ (equivalently, $\deg C > r+1$), the assertion follws from (b).

If $\deg C = r+1$ and C is not arithmetically Gorenstein, then easy observation shows that $\dim_k(I_\Gamma)_2 = \binom{r+1}{2} - H_\Gamma(2) = \binom{r+1}{2} - (r+1) \geq \binom{r-1}{2} + 1$. But Huneke and Ulrich proved that $\dim_k(I_C)_2 \geq \dim_k(I_\Gamma)_2 - 1$ (see p.497 of [6]). It contradicts the assumption $\dim_k(I_C)_2 < \binom{r-1}{2}$. $\square$

Example 3.2 Let $B = \mathbf{C}[x^8, x^7y, x^4y^4, x^3y^5, y^8]$ and $\mathrm{Proj}\, B = C \subset \mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$. The generic hyperplane section $C \cap H$ is arithmetically Gorenstein, but C is not arithmetically Cohen-Macaulay (see Example 3.26. of [6]). Easy calculation shows that the intersection of quadrics containig C is a rational normal surface scroll of type $S_{1,2}$.

Let $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ be a homogeneous ring over k (i.e. $A_0 \simeq k$ and $A = k[A_1]$) of Krull dimension d. If A is Cohen-Macaulay, there are certain positive integers $h_0, h_1, \ldots, h_s$ such that

$$F(A,\lambda) := \sum_{i\geq 0} \dim_k A_i \lambda^i = \frac{h_0 + h_1\lambda + \cdots + h_s\lambda^s}{(1-\lambda)^d}.$$

We call the vector $(h_0, h_1 \ldots h_s)$ the *h-vector* of A. If $\dim A = 1$, the above definition coincides with our previous definition in Section 1.

From now on in this section, we assume that char $k = 0$. The next theorem is J.Harris' famous result [5, Corollary 3.4].

Uniform Position Theorem *Let $C \subset \mathbf{P}^r_k$ be a reduced, irreducible and non-degenerate curve. Then a general hyperplane section $C \cap H$ is a set of points in uniform position.*

In virtue of this theorem, we can use our results on zero-dimensional schemes to study the Hilbert function of a homogeneous domain. The next fact is a key lemma.

Lemma 3.3 *Let A be a homogeneous Cohen-Macaulay domain over k of dimension d. Then the h-vector of A is the h-vector of the projective coordinate ring of a set of points in uniform position.*

Proof. By Bertini's theorem and the uniform position theorem, there is a linear regular sequence $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_{d-1}\} \subset A_1$ for which $A/(\mathbf{x})$ is the projective coordinate ring of a set of points in uniform position. It is well-known that A and $A/(\mathbf{x})$ have the same h-vector (see [8]). □

Proposition 3.4 *Let A be a homogeneous Cohen-Macaulay domain over algebraically closed field of characteristic 0. Let $(h_0, h_1, \ldots, h_s)$ be the h-vector of A.*

(a) If $h_s \geq 2$, and $h_1 = h_i$ for some $2 \leq i \leq s-1$, then we have $h_1 = h_2 = \cdots = h_{s-1}$ and $h_s \leq h_1$. In the case $h_s = 1$, if there is an integer $2 \leq i \leq s-2$ such that $h_i = h_1$, then $h_1 = h_2 = \cdots = h_{s-1}$.

(b) If there exists some $2 \leq i \leq s-2$ such that $h_i \leq h_1 + d - 1$, then $h_2 \leq \binom{h_1+1}{2} - \binom{h_1+1-d}{2}$. If $h_s \geq 2$ and $s \geq 3$, then $h_{s-1} \leq h_1 + d - 1$ also implies the same assertion.

Proof. From Lemma 3.3, the Main Theorem and Corollary 2.4. □

References

[1] D. Eisenbud, Linear sections of determinantal varieties, *Amer. J. Math.* **110** (1988), 541-575.

[2] D. Eisenbud and J. Harris, Finite projective schemes in linearly general position, *J. Algebraic Geometry* **1** (1992), 15-30.

[3] D. Eisenbud and J. Harris, An intersection bound for rank 1 loci, with applications to Castelnuovo and Clifford theory, *ibid.* **1** (1992), 31-60.

[4] M, Green, Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, *J. Differential Geom.* **19** (1984), 125-171.

[5] J. Harris "Curves in projective space" (Chapter III by Eisenbud and Harris), University of Montreal Press, 1982.

[6] C. Huneke and B. Ulrich, General hyperplane sections of algebraic varaieties, *J. Algebraic Geometry* **2** (1993), 487-505.

[7] M. Kreuzer, On the canonical module of a 0-dimensional scheme, *Can. J. Math.* (to appear).

[8] R. Stanley, Hilbert functions of graded algebras, *Adv. Math.* **28** (1978), 57-83.

[9] K. Yanagawa, Some generalizations of Castelnuovo's lemma on zero-dimensional schemes *J. Algebra* (to appear).

Cohen-Macaulay Rees algebras associated to ideals of analytic deviation 3

明大・理工　後藤四郎

この講演は、その発生の由来と問題意識の解説に力点を置きつつ、ここ2年位の間に急速な発展を示し始めた、ad Iが正のイデアル I に随伴する Rees 代数 R(I) の環構造の研究成果について報告を行うことにある。Huckaba-Huneke [HH1, HH2], Goto-Huckaba [GH], および Goto-Nakamura [GN1,GN2, GN3] の論文中で得られている ad I が高々2までのイデアル I に関する結果を拡張する形で、ad I = 3 の場合の結果を報告するが、一般のanalytic deviation を持つイデアルに関する結果は、本シンポジウムに於ける中村幸男氏と西田康二氏の講演に委ることにしたい。

1 問題の発生

Noether 環 A 内のイデアル $I = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ に対し代数 $A[a_1t, a_2t, \ldots, a_nt]$ (以下 t は A 上の不定元とする) を I の Rees 環と言い R(I) と書く。すなわち

$$\mathrm{R}(I) := A[It] \quad (\subseteq A[t]) \cong \oplus_{n\geq 0} I^n$$

である。Proj R(I) は I をセンターとする Aの blowing-up と呼ばれ、よく知られているように、blow-up することは特異点解消の主要な方法であり、Proj R(I) は原スキーム Spec Aと比べ何らかの点で改良されているものと考えられている。この意味で Proj R(I) は幾何学の研究者にとっては馴染み深いものであるかも知れないが、その affine cone である Spec R(I) の研究 (つまりは R(I) の環構造の研究) の歴史は実はさほど古いものではない。文献に現われた最初の研究は1973年のBarsahyの論文であろう。Barshay はその中で、イデアル I が A-正則列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ で生成されているならば、R(I) の定義イデアル $J \subseteq A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ は、行列 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{bmatrix}$ の2次の小行列式で生成される完全イデアルであること、従って、A が Cohen-Macaulay であれば、必ずR(I) もCohen-Macaulay となることを示している。Barshay は更にその続編の中で、AがCohen-Macaulay であれば I のすべての冪 I^n ($n \geq 1$) に対して $\mathrm{R}(I^n)$ はCohen-Macaulay となることを示そうとしているように見えるが、これには成功していない。不成功の原因の一つは、n = 1 のときと同様に $\mathrm{R}(I^n)$ の定義イデアルをまともに計算しその完全性を示そうという問題解決の方向が不適切であったためと思われるが、この点は Barshay 以前のRees 環の研究が「いつ自然な射 $\phi_I : \mathrm{Sym}_A(I) \to \mathrm{R}(I)$ が同型となるか?」(ここで、$\mathrm{Sym}_A(I)$ は A-加群としての I の対称代数を表す) という問いに主力を置いていたことを考えると、無理もないと思われる。上記の問題はおそらくは factorial rings の研究から派生したものであり、1964年の Micalliの論文辺りに研究の原点があると考えられるが、この方向の研究はやがてHuneke による (独立に下田にもよるが) d-sequences 概念の発明に繋がるものでもあって、いづれにしても R(I) の定義イデアルを定めることは今日でも研究上の基本的立場の一つであり決して Barsahy の研究方向を軽じるべきではないと思う。Vasconcelos にはこの方向で一連の優れた研究があり、後に本稿でも取り上げる Huckaba - Hunekeの作品 [HH1, HH2] のある意味での準備となっている。

ところで Barshay が残した「AがCohen-Macaulay であってイデアル I がA-正則列で生成されていれば、I のすべての冪 I^n（$n \geq 1$）に対して $\mathbf{R}(I^n)$ もCohen-Macaulay であるか？」と言う問題は、1976年に Valla によって肯定的に解決された。勿論、$\mathbf{R}(I^n) = \mathbf{R}(I)^{(n)}$（ここで $\mathbf{R}(I)^{(n)}$ は $\mathbf{R}(I)$ の n 次の Veronese 部分環を表す。）であり、環拡大 $\mathbf{R}(I)/\mathbf{R}(I)^{(n)}$ は pure でかつ integral であるから、Hochster - Eagon の有名な結果により、Valla の主張は Barshay のそれから直ちに導かれることを今日では我々はよく知っている。この Hochster - Eagon の結果は1971年にAmer. J.に発表された論文中の一命題であることを考えると、時間的経過からみて、この Valla の論文が受理されたことは、公平に見て何かの間違いであると思われる。但し、この評価はValla の論文に存在価値が無いということを意味しない。そこが数学の研究のいかにも不思議な点であって、Valla の論文はその後の研究の発展に大きく寄与したと考えられるからである。ここで少しValla の方法がいかなるものであったかを振り返ってみたい。簡単のために A は Cohen-Macaulay 局所環であると仮定し、$n = 1$ の場合つまり $\mathbf{R}(I)$ の場合にのみ触れることにする。Valla は、まずイデアル I がA-正則列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ で生成されているならば、$\mathbf{R}(I)$ 内の元の列 $a_1, a_2 - a_1t, \ldots, a_n - a_{n-1}t, -a_nt$ は、局所的にはパラメーター系の一部をなすことを示し、更に、この列が $\mathbf{R}(I)$-正則であることをイデアル商（コロン、：）をまともに計算することによって確かめている。この点が Barshay の採用した方法と根本的に異なる所であって、謂わば、Barshay は Rees 環 $\mathbf{R}(I)$ の下部構造に執着し続けたが、これに対しValla は Rees 環 $\mathbf{R}(I)$ の上部構造を調べて所期の目的を達成したと言うことができる。

下田君は Vallaのこの発想を逆手に取り、A が局所環であって $Q = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ が A のパラメーターイデアルであれば（列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が A-正則列であろうとなかろうと）列 $a_1, a_2 - a_1t, \ldots, a_n - a_{n-1}t, -a_nt$ は必ず局所的には Rees 環 $\mathbf{R}(Q)$ のパラメーター系であることに着目して、列 $a_1, a_2 - a_1t, \ldots, a_n - a_{n-1}t, -a_nt$ が $\mathbf{R}(Q)$ 内で正則列であることからもとのA 内の列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ にいかなる制約が生じるかを考察し、次の驚くべき結果を得た。

定理 (1.1)（下田保博　1979年）*2次元局所整域 A については次が成り立つ。*
(1) A が Buchsbaum 環 である ⇔ A のいかなるパラメーターイデアル Q に対しても Rees 環 $\mathbf{R}(Q)$ は Cohen-Macaulay である。
(2) A が Gorenstein 環 である ⇔ A のある（従って、任意の）パラメーターイデアル Q に対して Rees 環 $\mathbf{R}(Q)$ は Gorenstein である。

残念なことにその後の発展に埋もれて、今日ではこの下田の定理を知る人は少いが、この定理は Rees 環の環論的研究において非常に重要な先駆的役割を果したと思う。例えば、次の二つの Goto-Shimoda の定理も、上の結果の拡張・一般化をめざす過程で得られたものに他ならない：

定理 (1.2) （GS1 1980年） $(A,\mathfrak{m})$ を Noether 局所環で次元が $d\,(\geq 2)$ のものとすれば次の二つの条件は同値である。

(1) $R(Q)$ は、A のすべてのパラメーターイデアル Q に対して、Cohen-Macaulay である;

(2) $H_{\mathfrak{m}}^{i}(A) = (0)\ (i \neq 1, d)$ であって $\mathfrak{m} \cdot H_{\mathfrak{m}}^{1}(A) = (0)$.

このとき A は Buchsbaum 環であり、すべての整数 $n \geq 1$ と A のすべてのパラメーターイデアル Q に対して Rees 環 $R(Q^n)$ は Cohen-Macaulay となる。

定理 (1.3) （ GS2 1979年 ） $(A,\mathfrak{m})$ を Cohen-Macaulay 局所環で次元が $d \geq 1$ のものとし Q を $\mathfrak{m}$ の reduction で d 個の元で生成されるものとする。

(1) $R(\mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 環である ⇔ $G(\mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 環であってかつ $a(G(\mathfrak{m})) \leq -1$ （即ち $\mathfrak{m}^d = Q\mathfrak{m}^{d-1}$） である。

(2) $d \geq 2$ とする。このとき、$R(\mathfrak{m})$ が Gorenstein環である⇔ $G(\mathfrak{m})$ がGorenstein 環であってかつ $a(G(\mathfrak{m})) = -2$ （即ち $\mathfrak{m}^{d-1} = Q\mathfrak{m}^{d-2}$であって $\mathfrak{m}^{d-2} \not\subset Q$） である。

但し Q が $\mathfrak{m}$の reduction であるとは、Q は $\mathfrak{m}$に含まれる A のイデアルであってかつ等式 $\mathfrak{m}^{r+1} = Q\mathfrak{m}^r$ が適当な非負整数 r に対して成立つことを言う。また $G(\mathfrak{m}) := R(\mathfrak{m})/\mathfrak{m}R(\mathfrak{m})$ であって $a(G(\mathfrak{m}))$ は次数環 $G(\mathfrak{m})$ の a-不変量を表す。即ち

$$a(G(\mathfrak{m})) = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid [H_{M}^{d}(G(\mathfrak{m}))]_n \neq (0)\,\} \qquad (M = [G(\mathfrak{m})]_+).$$

なお、この定理(1.3)の証明は $\mathfrak{m}$ の代わりにA内の$\mathfrak{m}$-準素イデアル $\mathfrak{a}$ をとっても有効に稼働し、定理の主張はこれらのイデアル $\mathfrak{a}$ に対してもそのまま成り立つ。

2 その後の発展

定理(1.2)と(1.3)とはその後のRees 環の理論の発展の基本的な枠組みとなった。まず(1.2)は Buchsbaum 環の理論建設を加速した。次の結果はその自然な延長である。

定理 (2.1) (Goto 1981年) 正次元の Noether局所環 $(A, \mathfrak{m})$ ついては次の二つの条件は同値である。

(1) $A/H_{\mathfrak{m}}^{0}(A)$ が Buchsbaum 環である;

(2) Aのすべてのパラメーターイデアル Q に対してProj $R(Q)$ がCohen-Macaulay である。

Buchsbaum 環の理論は今日では様々な形でFLC rings (generalized Cohen-Macaulay rings とも呼ばれる。) のそれに拡張されている。そして、少し脱線するようではあるが、この方向の研究で今最も緊急度が高いものは、Cohen-Macaulay 化問題であると思う。Faltings はその初期の論文の中で dim Non-CM(X) ≤ 1のNoether scheme Xは適当なblow-upの後に Cohen-Macaulay となることを示している。(2.1)は dim Non-CM(X) = 0 の場合の彼の結果に対応していると思われるが、Cohen-Macaulay 化問題は dim Non-CM(X) ≥ 2 のときは一般には全く未解決のままである。最近 Cuong によって一般解の存在がアナウンスされ preprint

も配布されたが、彼の論文中の主結果には反例があり dim Non-CM(X) = 1 の場合でさへ正しくないことが確認されている。一方で Spivakovsky による正標数時の特異点解消も暗礁に乗り上げたと判断される現在、せめて dim Non-CM(X) = 2 の場合だけでも Cohen-Macaulay 化の存在が保証できるならば、それは非常に重要な前進であり、波及効果も少くはないのではないかと考えられる。

定理(1.3)の方は、Noether局所環 A がCohen-Macaulay であるという仮定を外すという方向と一般のイデアル I についての主張に改良するという二つの方向に発展した。例えば Huneke は A は Cohen-Macaulay であるとの仮定の下に「$\mathbf{R}(I)$ が Cohen-Macaulayである ⇒ $\mathbf{G}(I)$ も Cohen-Macaulay である」を証明しているし、池田は $\mathbf{R}(I)$ が Cohen-Macaulay であって grade I ≥ 2であれば、「$\mathbf{R}(I)$ が Gorenstein である ⇔ A と $\mathbf{G}(I)$ とはどちらも quasi-Gorenstein であってかつ $a(\mathbf{G}(I)) = -2$ である」を証明した。池田は更に $d = \dim A > 0$ のときは、「$\mathbf{R}(\mathfrak{m})$ が Cohen-Macaulayである⇔

$$H^i_{\mathsf{M}}(\mathbf{G}(\mathfrak{m})) = [H^i_{\mathsf{M}}(\mathbf{G}(\mathfrak{m}))]_{-1}\ (i \neq d)\ \text{ and }\ a(\mathbf{G}(\mathfrak{m})) < 0 \text{」}$$

であって「このときAは必ずBuchsbaum 環となる」を示しているが、最終的な決着は次の Trung-池田の結果による。

定理 (2.2) (Trung-池田 1989年) *I は Noether 局所環 A 内のイデアルで $I \not\subset \bigcap_{p \in \mathrm{Assh}\,A} p$ なるものとすれば次の条件は同値である。*

(1) $\mathbf{R}(I)$ *が Cohen-Macaulayである;*

(2) $H^i_{\mathsf{M}}(\mathbf{G}(I)) = [H^i_{\mathsf{M}}(\mathbf{G}(I))]_{-1}\ (i \neq d)$ and $a(\mathbf{G}(I)) < 0$.

このとき $[H^i_{\mathsf{M}}(\mathbf{G}(I))]_{-1} \cong H^i_{\mathfrak{m}}(A)\quad (i \neq d)$ *である。但し* $\mathsf{M} = \mathfrak{m}\mathbf{G}(I) + [\mathbf{G}(I)]_+$.

本来 Rees 環はA 内のイデアルの filtration に随伴するものである。$F = \{F_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ が A のイデアルの filtartion であるとは、まずF_nはすべてAのイデアルであって (1) $F_0 = A$, (2) $F_n \supseteq F_{n+1}$, (3) $F_nF_m \subseteq F_{n+m}$ が成り立つことをいう。Aのイデアルのfiltartion が与えられれば $\mathbf{R}(F) = \Sigma_{n \geq 0} F_n t^n \subseteq A[t]$ によって F の Rees 環が定義される。例えば $F_n = \mathfrak{p}^{(n)}$ ($\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A$) とおけば ideal-adic なものとは一味違った <u>symbolic Rees lagebra</u> $\mathbf{R}_s(\mathfrak{p}) = \Sigma_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} t^n$ が得られる。これらの代数は Hilbert の第14問題と関連していて、そもそも Noetherであるかどうかが明かではないが、一度その有限生成性が確認されれば、その環構造については ideal-adicの場合と平行な理論建設が可能となり、上のTrung-池田の定理 (2.2) 及びRees 環の Gorenstein 性に関する諸定理は一般の filtration F に随伴した Rees 環 $\mathbf{R}(F)$ に関する定理の形に既に拡張されている。このことは、このシンポジウムでも既に何回か報告した所であるから、ここでは繰り返さない。

Trung-池田の定理はアナウンスされてから実際に出版されるまでかなりの時間が経過している。その間の数年に渡って Rees 環の理論は Herrmannとその周辺の人々、あるいは

Vasconcelos-Herzog-Simis 等によって着々と整備され充実してきたが、本質的には殆ど発展がなかったと思う。例えば equi-multiple ideals（つまり $ht_A I = \lambda(I) := \dim G(I)/\mathfrak{m}G(I)$）なるイデアル I）については精力的な研究が行なわれ多くの精密な結果が得られているが、このケースは比較的容易に $\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合に帰着されるので、すべてがそうであると断言すべきではないが、さほど本質的ではないとの印象を持つ。Trung-池田の定理(2.2)の言わんとする所は、$R(I)$ の環論的性質は基本的に $G(I)$ のそれと a-不変量の振舞いによって定まると言うことなのであるから、本気でやるつもりなら、$G(I)$ の環構造を調べ a-不変量を計算し、$R(I)$ が Cohen-Macaulay あるいは Gorenstein であるかどうかを判定する実際的方法を提出すべきである。やはり、$\mathfrak{m}$-準素ケースを真に越える発展は最近の Huckaba-Huneke の研究によってやっと始まったといって言い過ぎではないと思う。

3 最近の発展

本論に入るので記号を整理する。以下$(A,\mathfrak{m})$はNoether局所環でその剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限のものとする。I を A のイデアルとし $s = ht_A I$とおく。$\lambda = \lambda(I) := \dim G(I)/\mathfrak{m}G(I)$ とおき、I の analytic spreadという。Aのイデアル J が I のreductionであるとは、(1) $J \subseteq I$ であってかつ (2) 等式 $I^{n+1} = JI^n$がある非負整数 n に対して成立つことをいう。J が I の reductionであるとき $r_J(I) = \min\{0 \leq n \in \mathbf{Z} \mid I^{n+1} = JI^n\}$とおき、I の J に関する reduction numberという。J が I のminimal reduction であるとは、J は I の reduction であってかつ包含関係について極小であることをいう。sとλ との関係については次のBurch の不等式が基本的である。

補題 (3.1) (Burch 1972年) $s \leq \lambda \leq d - \inf_{n>0} \operatorname{depth} A/I^n$.

従って I が $\mathfrak{m}$-準素であれば $\lambda = s\ (= d)$である。$\lambda = s$ であるイデアル I は equi-multiple であるという。一般に$\operatorname{ad} I = \lambda - s\ (\geq 0)$ とおき I の analytic deviation という。以上の記号によれば、定理 (1.3) (1) は

ad $I = 0$ であれば、Aは Cohen-Macaulay であって $s > 0$であるとの仮定の下に、$R(I)$が Cohen-Macaulay であるための必要十分条件は$G(I)$がCohen-Macaulay であってかつ $r_J(I) < \lambda$ なることである

と言い変えることができる。$\operatorname{ad} I > 0$ の場合にもこれに相当する定理を作ろうというのが本稿の主テーマであり主提案である。

最初に報告すべき結果はHuckaba-Huneke [HH2]に負う。実際には、彼らはまず[HH1]に於て $I^{(n)} = I^n, \forall n \geq 0$（ここで、$I^{(n)}$ は I のn-階の symbolic power を表す。）となる判定条件を求め、その結果のいわば副産物として [HH2]内で $R(I)$ の Cohen-Macaulay 性を論じているのであるが、ここでは彼らの二つの論文内の主張をまとめて述べておくことにしたい。まず次の二つの条件(*)と(**)とを考える：

(*) $\operatorname{ad} I = 1$であって、A は Cohen-Macaulay であり、$\forall \mathfrak{q} \in \operatorname{Min}_A A/I$ について $I_{\mathfrak{q}}$ は長さ s

の $A_{\mathfrak{q}}$-正則列で生成される。

(**) ad I = 2であって A は Gorenstein、A/I は Cohen-Macaulayであって 、更に、$\mathfrak{q} \in V(I)$ で $ht_A \mathfrak{q} \leq \lambda - 1$ のものについては $I_{\mathfrak{q}}$ は長さ s の $A_{\mathfrak{q}}$-正則列で生成される。

この記号を用いて

定理 (3.2) (HH1, HH2) *(*)又は(**)の仮定の下に次の三つの条件は同値である。*
(1) $I^{(n)} = I^n$, $\forall n \geq 0$.
(2) $Min_A A/I$ *には含まれずかつ* $ht_A \mathfrak{q} \leq \lambda$ *なる任意の* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *について不等式* $\lambda(I_{\mathfrak{q}}) <$ $ht_A \mathfrak{q}$ *が成り立つ。*
(3) $Min_A A/I$ *には含まれない任意の* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *について不等式* $\lambda(I_{\mathfrak{q}}) < ht_A \mathfrak{q}$ *が成り立つ。*
このとき I の任意の minimal reduction J に対して不等式 $r_J(I) \leq 1$ *が成り立つ。更に、もしも* $s > 0$ *であってかつ(*)のときは depth A/I* $\geq$ *dim A/I - 1 が成り立てば、*$\mathbf{R}(I)$ *は必ず Cohen-Macaulay である。*

この結果は1973年にHochsterが提起した次の問題：

問題 素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して等式 $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$ ($\forall n \geq 0$) が成り立つ条件を求めよ。

への一つの解であって、$\mathbf{R}$(I) のCohen-Macaulay 性についての主張はやや付録の感がある。

彼らのとは違った観点からこの(3.2)の証明を概説しておく。先に述べたBurchの不等式(3.1)によって(1)⇒(3)は自明に正しい。(2)⇒(1)の証明を工夫しなければならない。ところでここで(3.2)内の「おまけ」の方の主張をよく見ると、(1), (2), (3) の同値性よりも余程強い内容を主張しているように思える。実際、 J を I のminimal reduction とすれば、その生成元 $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$の取り方を十分に工夫すると、$a_1, a_2, \ldots, a_s$はA-正則列をなし $K = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ とおけば完全列

(3.3) $$0 \to (K : I)/K \to \mathbf{G}(I/K) \to \mathbf{G}(I') \to 0$$

が得られる。（ここで $I' = (I + (K : I))/(K : I)$ である。）更に、 $ad\, I' = ad\, I - 1$ であるように調整できるため、（かなり荒っぽい言い方で厳密には必ずしもそれほど単純ではない点もあるが）$\mathbf{G}$(I)の環論的性質は自然に$\mathbf{G}$(I/K) のそれに帰着され、上の完全列(3.3)を経由して更に$\mathbf{G}$(I') の性質に迄還元される。このことより、もしも $r_J(I) \leq 1$ が成りたって更に $s > 0$ であってかつ(*)のときは更に depth A/I $\geq$ dim A/I - 1 が成り立つならば、$\mathbf{G}$(I) がCohen-Macaulay 環となることを殆ど直ちに得る。一方で、誰が初めに言い出したのか出所が良く解からないのだが、次の比較的良く知られた補題：

補題 (3.4) $\mathbf{G}(I)$ *がCohen-Macaulay であってかつ* $\mathrm{Min}_A A/I$ *には含まれずかつ* $\mathrm{ht}_A \mathfrak{q} \leq \lambda$ *なる任意の* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *について 不等式* $\lambda(I_{\mathfrak{q}}) < \mathrm{ht}_A \mathfrak{q}$ *が成り立つならば、* $I^{(n)} = I^n \ (\forall n \geq 0)$ *である。*

を用いると、たちまち(3.2)内の(2)⇒(1)が示される。そこでもう少し頑張ってみると、[HH2]内で $\mathbf{R}(I)$ の Cohen-Macaulay 性を結論するために、彼らは $\mathbf{R}(I)$ のパラメーター系を持ち出してそれが正則列をなすことを相当長い計算の後に示しているが、次の定理と(2.2)とはこの計算を不要にする。

定理 (3.5) ([GH]) *(*)の下に* $\mathbf{G}(I)$ *がCohen-Macaulay であれば等式* $a(\mathbf{G}(I)) = \max\{-s, r_J(I) - \lambda\}$ *が成り立つ。*

そしてこの(3.5)は(**)の仮定の下でも成り立つことが完全列(3.3)を用いて簡単に示せるので[HH1, HH2] はこの時点で不要となる。以上の考察が(3.5)の一般化を経由してHuckaba-Hunekeの論文中の結果(3.2)を一般の analytic deviation を持つイデアルに拡張しようとする本研究の出発点であり動機である。

$\mathbf{G}(I)$のGorenstein 性（従って$\mathbf{R}(I)$ のGorenstein 性）について知られていることを纏めておくと、

定理 (3.6) ([GN1]) *(*)の下に簡単のためにA/IはCohen-Macaulayと仮定すると次の二つの条件は同値である。*

(1) $\mathbf{G}(I)$ *は Gorenstein 環である。*

(2) *Aは Gorenstein であってかつ* $r_J(I) = 0$ *である。*

定理 (3.7) ([GN2]) *(**)なら次の二つの条件は同値である。*

(1) $\mathbf{G}(I)$ *は Gorenstein 環である。*

(2) $r_J(I) \leq 1$ *である。*

さてここで $\mathrm{ad}\, I \geq 3$ の場合に入るために問題を整理しておく。

問題 上の結果を「A は Gorenstein、A/I は Cohen-Macaulayであって、更に、$\mathfrak{q} \in V(I)$ で $\mathrm{ht}_A \mathfrak{q} \leq \lambda - 1$ のものについては $I_{\mathfrak{q}}$ は長さ s の $A_{\mathfrak{q}}$-正則列で生成される」くらい仮定の下に一般化し拡張せよ。具体的には

(1) $\mathbf{G} = \mathbf{G}(I)$がCohen-Macaulayのとき $a(\mathbf{G})$を計算せよ。

(2) $I^{(n)} = I^n \ (\forall n \geq 0)$ となる判定条件を求めよ。

(3) $\mathbf{R}(I)$のCohen-Macaulay 性とGorenstein 性を$\mathbf{G}(I)$ のそれに帰着し$\mathbf{G}(I)$がCohen-Macaulay 環あるいはGorenstein 環となる判定法を見つけよ。

というものである。これらの問については中村幸男・西田康二両氏の努力によって最近急速な発展があって、とくにad I が4以上の場合は両氏の貢献が大きい。そこで本稿では、

今や実験的な結果に過ぎなくなってしまったが、ad I = 3 の場合の結果を記録しておきたいと思う。

4 ad I = 3の場合

さて以下 ad I = 3 であって、A は Gorenstein、A/I は Cohen-Macaulayであって、更に、$\mathfrak{q} \in V(I)$ で $\mathrm{ht}_A \mathfrak{q} \leq \lambda - 1$ のものについては $I_{\mathfrak{q}}$ は必ず長さ s の $A_{\mathfrak{q}}$-正則列で生成されるものと仮定する。J は I のminimal reduction とする。このとき、

定理 (4.1) A/I^2が Serreの条件(S_1)を満たすならば次の三つの条件は同値である。

(1) $I^{(n)} = I^n$, $\forall n \geq 0$.

(2) $\mathrm{Min}_A A/I$ には含まれずかつ $\mathrm{ht}_A \mathfrak{q} \leq \lambda$ なる任意の $\mathfrak{q} \in V(I)$ について不等式 $\lambda(I_{\mathfrak{q}}) < \mathrm{ht}_A \mathfrak{q}$ が成り立つ。

(3) $\mathrm{Min}_A A/I$ には含まれない任意の $\mathfrak{q} \in V(I)$ について不等式 $\lambda(I_{\mathfrak{q}}) < \mathrm{ht}_A \mathfrak{q}$ が成り立つ。

このとき $r_J(I) \leq 2$ である。

定理 (4.2) (1) $G(I)$がCohen-Macaulay であれば $a(G(I)) = \max\{-s, r_J(I) - \lambda\}$.

(2) $G(I)$がGorenstein環であれば $r_J(I) \leq 2$ であって$a(G(I)) = -s$.

定理 (4.3) $r_J(I) \leq 2$ ならば次の条件は同値である。

(1) $G(I)$がCohen-Macaulay 環である。

(2) 不等式 depth $A/I^2 \geq d - \lambda$ が成り立つ。

定理 (4.4) $r_J(I) \leq 2$ であってかつ depth $A/I^2 \geq d - \lambda + 1$ならば、$G(I)$ は Gorenstein 環である。（逆は一般には成立しない。）

系 (4.5) $r_J(I) \leq 1$ ならば次の条件は同値である。

(1) $G(I)$ が Gorenstein環である。

(2) 不等式 depth $A/I^2 \geq d - \lambda + 1$ が成り立つ。

が得られる。これらを定理(2.2)と組み合わせると

定理 (4.6) 次の二つの条件は同値である。

(1) $R(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

(2) $G(I)$ は Cohen-Macaulay 環であって $r_J(I) < \lambda$である。

定理 (4.7) 次の二つの条件は同値である。

(1) $R(I)$ は Gorenstein 環である。

(2) $\mathbf{G}(I)$ は *Gorensetin* 環であって $s=2$ である。

となる。以上の結果は中村幸男・西田康二両氏によってad I ≥ 4 の場合に拡張されていてこのシンポジウムでも報告（本報告集参照）がある。またシンポジウムの後に知ったことであるが、最近 Aberbach-Huneke-TrungとLipman等によってもこの方面の研究にかなりの前進がみられた模様である。関心のある方はコミュニケーションをお取りになることをお勧めする。

References

[AH] I. M. Aberbach and C. Huneke, *An improved Briancon-Skoda theorem with applications to the Cohen-Macaulayness of Rees algebras*, Preprint 1993.

[Ba] J. Barshay, *Graded algebras pf powers of ideals generated by* A-sequences, J. Alg., 25 (1973), 90-99.

[G1] S. Goto, *Blowing-up of Buchsbaum rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 72(1983), 140-162, Cambridge Univ. Press.

[G2] S. Goto, *The Cohen-Macaulay symbolic Rees algebras for curve singularities*, to appear in the Memoirs of Mathematics of the American Mathematical Society.

[GH] S. Goto and S. Huckaba, *On graded rings associated to analytic deviation one ideals*, to appear in Amer. J. Math.

[GN] S. Goto and K. Nishida, *Filtrations and the Gorenstein property of the associated Rees algebras*, to appear in the Memoirs of Mathematics of the American Mathematical Society.

[GN1] S. Goto and Y. Nakamura, *On the Gorensteinness of graded rings associated to ideals of analytic deviation one*, to appear in the Contemporary Mathematics of the American Mathematical Society.

[GN2] S. Goto and Y. Nakamura, *Cohen-Macaulay Rees algebras of ideals having analytic deviation two*, Preprint, 1993.

[GN3] S. Goto and Y. Nakamura, *Gorenstein graded rings associated to ideals of analytic deviation two*, Preprint, 1993

[GNS1] S. Goto, K. Nishida, and Y. Shimoda, *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space monomial curves*, J. Math. Soc. Japan, 43 (1991), 465-481.

[GNS2] S. Goto, K. Nishida, and Y. Shimoda, *The Gorensteinness of the symbolic blow-ups for certain space monomial curves*, to appear in Trans. A. M. S.

[GNS3] S. Goto, K. Nishida, and Y. Shimoda, *Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves*, Nagoya Math. J., 124(1991), 99-132.

[GNW] S. Goto, K. Nishida, and K. Watanabe, *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counter-examples to Cowsik's question*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[GS1] S. Goto and Y. Shimoda, *On Rees algebras over Buchsbaum rings*, J. Math. Kyoto Univ., 20(1980), 691-708.

[GS2] S. Goto and Y. Shimoda, *On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 68 (1982), 201-231.

[HIO] M. Herrmann, S. Ikeda, and U. Orbanz, *Equimultiplicity and Blowing-up*, Springer-Verlag, Berlin.Heidelberg.New York, 1988.

[HSV] J. Herzog, A. Simis, and W. V. Vasconcelos, *On the canonical module of the Rees algebra and the associated graded ring of an ideal*, J. Algebra, 105 (1987), 285-302.

[H] C. Huneke, *On the associated graded ring of an ideal*, Ill. J. Math., 26 (1982), 121-137.

[HE] M. Hochster and J. A. Eagon, *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci*, Amer. J. Math., 93 (1971), 1020-1058.

[HH1] S. Huckaba and C. Huneke, *Powers of ideals having small analytic deviation*, Amer. J. Math., 114 (1992), 367-403.

[HH2] S. Huckaba and C. Huneke, *Rees algebras of ideals having small analytic deviation*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[I1] S. Ikeda, *The Cohen-Macaulayness of the Rees algebras of local rings*, Nagoya Math. J., 89 (1983), 47-63.

[I2] S. Ikeda, *On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings*, Nagoya Math. J., 102 (1986), 135-154.

[R1] P. Roberts, *A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not Noetherian*, Proc. Amer. Math. Soc., 94 (1985), 589-592.

[R2] P. Roberts, *An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new conterexample to Hilbert's fourteenth problem*, J. Algebra, 132 (1990), 461-473.

[S] Y. Shimoda, *A note on Rees algebras of two dimensional local domains*, J. Math. Kyoto Univ., 19 (1979), 327-333.

[TI] N. V. Trung and S. Ikeda, *When is the Rees algebra Cohen-Macaulay?*, Communications in Algebra, 17 (1989), 2893-2922.

[Va] G. Valla, *Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay*, J. Alg., 42 (1976), 537-548.

[V] W. V. Vasconcelos, *On the equations of Rees algebras*, J. reine angew. Math., 418(1991), 189-218.

Various Approaches toward the Jacobian Conjectures

Masayoshi Miyanishi

1 Jacobian Conjecture

Let k be an algebraically closed field of characteristic zero and let $\mathbf{A}_k^n$ (or simply $\mathbf{A}^n$) be the affine space of dimension n over k.

Let us recall:

Jacobian Conjecture. *Let $f : \mathbf{A}_k^n \longrightarrow \mathbf{A}_k^n$ be an endomorphism defined by polynomials $f_1, \cdots, f_n \in k[x_1, \cdots, x_n]$. If the jacobian*

$$J\left(\frac{f_1, \cdots, f_n}{x_1, \cdots, x_n}\right) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

is everywhere nonzero on $\mathbf{A}_k^n$ then f is an automorphism.

More generally, we may ask whether or not the following holds:

Generalized Jacobian Conjecture. *Let $f : X \longrightarrow X$ be an étale endomorphism of a nonsingular algebraic variety X defined over k. Then f is an automorphism.*

Concerning the second conjecture, the following result is known.

Theorem 1.1 [5] *Let $f : X \longrightarrow X$ be the same as in the generalized jacobian conjecture. Let n be the dimension of X and let $\kappa(X)$ be the (logarithmic) Kodaira dimension.*

1. *If $\kappa(X) = n$ then f is an automorphism.*
2. *If $n = 1$, then f is an automorphism except for the case $\kappa(X) = 0$, i.e., the case where X is an elliptic curve or the multiplicative group G_m.*

3. *Suppose X is an affine surface and $\kappa(X) = -\infty$. Then f is an automorphism if one of the following conditions is satisfied:*

   (a) *X is irrational but not elliptic ruled,*

   (b) *$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* \neq k^*$ and $\operatorname{rank}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^*/k^*) \geq 2$ when X is rational.*

4. *There is a counter-example in the case where $n = 2, \kappa(X) = -\infty$, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* = k^*$ and $\operatorname{Pic}(X) = \mathbf{Z}$.*

A non-trivial example of an affine surface and an étale endomorphism for which the generalized jacobian conjecture does not hold is given by the following:

Example [5]. Let C be a nonsingular cubic curve on $\mathbf{P}_k^2$ and let $X = \mathbf{P}_k^2 - C$. Let $\pi : W \longrightarrow \mathbf{P}_k^2$ be a triple cyclic covering which ramifies totally over C. Then one can easily show that:

1. W is a del Pezzo surface of degree 3, which is obtained by blowing up 6 points on $\mathbf{P}_k^2$;

2. C has 9 flexes, and the inverse image by π of each of these inflectional tangents consists of three (-1) curves which meets in a single point on $\pi^{-1}(C)$. So, there are totally 27 (-1) curves on W.

Choose mutually disjoint 6 curves among these (-1) curves, and let $\sigma : W \longrightarrow \mathbf{P}_k^2$ be the contraction of these 6 curves. Then $\sigma(\pi^{-1}(C))$ is an elliptic curve isomorphic to C. Hence $\mathbf{P}_k^2 - \sigma(\pi^{-1}(C))$ is isomorphic to X, and the composite of rational mappings

$$\pi \cdot \sigma^{-1} : X \xrightarrow{\sigma^{-1}} \sigma^{-1}(X) \xrightarrow{\pi} X$$

is an étale endomorphism of degree 3 which is not finite. Note that $\kappa(X) = 0, \operatorname{Pic}(X) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ and $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* = k^*$.

The affine plane $\mathbf{A}_k^2$ is characterized as a nonsingular affine surface X satisfying the conditions that $\kappa(X) = -\infty, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* = k^*$ and $\operatorname{Pic}(X) = (0)$.

This remark together with Theorem 1.1, (4) suggests that even if the jacobian conjecture holds true in case $n = 2$ it must be a phenomenon fairly special to the affine plane.

2 Finite étale coverings

Let X be a nonsingular affine variety of dimension n defined over k. We assume that $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* = k^*$. Consider an equation

$$T^n + \xi_2 T^{n-2} + \cdots + \xi_{n-1} T + \xi_n = 0, \tag{1}$$

where $\xi_2, \cdots, \xi_n$ are indeterminates. Let $D_n(\xi)$ be the discriminant of this equation. For small values of n, $D_n(\xi)$ is given as follows up to signs:

$$\begin{aligned}
D_2(\xi) &= \xi_2 \\
D_3(\xi) &= 4\xi_2^3 + 27\xi_3^2 \\
D_4(\xi) &= 16\xi_2^4\xi_3 - 4\xi_2^3\xi_3^2 - 128\xi_2^2\xi_3^2 + \\
&\quad 144\xi_2\xi_3^2\xi_4 - 27\xi_3^4 + 256\xi_4^3 \\
D_5(\xi) &= 108\xi_2^5\xi_5^2 - 72\xi_2^4\xi_3\xi_4\xi_5 + 16\xi_2^4\xi_4^3 + \\
&\quad 16\xi_2^3\xi_3^3\xi_5 - 4\xi_2^3\xi_3^2\xi_4^2 - 900\xi_2^3\xi_4\xi_5^2 + \\
&\quad 825\xi_2^2\xi_3^2\xi_5^2 + 560\xi_2^2\xi_3\xi_4^2\xi_5 - 128\xi_2^2\xi_4^4 - \\
&\quad 630\xi_2\xi_3^3\xi_4\xi_5 + 144\xi_2\xi_3^2\xi_4^3 - 3750\xi_2\xi_3\xi_5^3 + \\
&\quad 2000\xi_2\xi_4^2\xi_5^2 + 108\xi_3^5\xi_5 - 27\xi_3^4\xi_4^2 + \\
&\quad 2250\xi_3^2\xi_4\xi_5^2 - 1600\xi_3\xi_4^3\xi_5 + 256\xi_4^5 + 3125\xi_5^4
\end{aligned}$$

We shall begin with the following:

Lemma 2.1 *With the following conditions on X, we have the implication (1) $\Longrightarrow$ (2):*

1. *Any finite étale covering $\pi : Y \longrightarrow X$ is trivial, i.e., Y is a direct sum $Y = Y_1 \coprod \cdots \coprod Y_n$ and the Y_i are isomorphic to X under π for $\forall i$, where $n = \deg \pi$.*

2. *For any $n \geq 1$, the diophantine equation*

   $$D_n(\xi) = 1 \tag{2}$$

   has only constant solutions in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

The condition (2) *implies that there exist no finite etale coverings of* X *defined by a single equation*

$$T^n + a_2T^{n-2} + \cdots + a_{n-1}T + a_n = 0, \quad a_2, \cdots, a_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2): Let $R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Suppose the diophantine equation (2) has a solution $(a_2, \cdots, a_n)$ in R. Consider an R-algebra

$$B = R[T]/(T^n + a_2T^{n-2} + \cdots + a_{n-2}).$$

Let $Y = \operatorname{Spec} B$ and let $\pi : Y \longrightarrow X$ be a finite morphism induced by the inclusion $R \hookrightarrow B$. Since $D_n(a_2, \cdots, a_n) = 1$, the morphism π is étale. So, by the hypothesis, π is trivial. Namely, the equation (1) decomposes into a product of linear factors,

$$T^n + a_2T^{n-2} + \cdots + a_n = (T - c_1) \cdots (T - c_n),$$

where $c_1, \cdots, c_n \in R$. Note that $c_i \neq c_j$ everywhere on X provided $i \neq j$, i.e., $c_i - c_j \in R^* = k^*$. So, we may write $c_i = c + \alpha_i$ with $c \in R$ and $\alpha_i \in k$. Since $c_1 + \cdots + c_n = nc + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = 0$, we have $c \in k$. Thus, the solution $(a_2, \cdots, a_n)$ must be constant because each c_i is expressed as a symmetric function of $c_1, \cdots, c_n$.

Suppose $\pi : Y \longrightarrow X$ be a finite étale covering such that $B = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ is given as

(3) $$B = R[T]/(T^n + a_2T^{n-2} + \cdots + a_{n-2}).$$

Suppose Y is connected. Since π is étale, the discriminant $D_n(a_2, \cdots, a_n)$ of the equation (3) is everywhere nonzero on X. Since $R^* = k^*$, we have $D_n(a_2, \cdots, a_n) \in k^*$. Replacing b by an element bc^{-1} with $c \in k^*$, we may assume that $D_n(a_2, \cdots, a_n) = 1$. Now, by the hypothesis (2), $a_2, \cdots, a_n \in k$. This implies that the equation (3) is a product of linear factors. Since the equation (3) is irreducible, we must have $n = 1$. So, π is an isomorphism.

Q.E.D.

We say that X is *algebraically simply connected* if X satisfies the conditions of Lemma 2.1. It is well-known that these conditions are equivalent to the condition that every finite étale Galois covering of X is trivial, i.e., $\pi_{1,alg}(X) = (e)$.

Let G be a finite group. A finite étale Galois covering $\pi : Y \longrightarrow X$ with Galois group G is synonimously a G-principal homogeneous space. The set of isomorphism classes of G-principal homogeneous spaces over X is $H^1_{ét}(X, G)$, which has an abelian group structure provided G is an abelian group.

Lemma 2.2 *If G is a cyclic group of order n, we have the following exact sequence:*

$$0 \longrightarrow R^*/(R^*)^{\times n} \longrightarrow H^1_{ét}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(X)_n \longrightarrow 0,$$

where $(R^*)^{\times n}$ is the image of the "multiplication by n" homomorphism of R^* and $\mathrm{Pic}\,(X)_n$ is the n-torsion subgroup of $\mathrm{Pic}\,(X)$.

Proof. It follows from an exact sequence of étale cohomologies:

$$H^0_{ét}(X, G_m) \xrightarrow{\times n} H^0_{ét}(X, G_m) \longrightarrow H^1_{ét}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \longrightarrow$$

$$H^1_{ét}(X, G_m) \xrightarrow{\times n} H^1_{ét}(X, G_m).$$

Q.E.D.

We have the following result.

Lemma 2.3 *The following conditions are equivalent:*

1. *The abelianization $\pi^{ab}_{1,alg}(X) = (0)$.*

2. *$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* = k^*$ and $\mathrm{Pic}\,(X)$ has no torsion.*

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2): The condition (1) implies $H^1_{ét}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = (0)$ for $\forall n > 0$. In view of Lemma 2.2, this implies $\mathrm{Pic}\,(X)_n = (0)$ for $\forall n > 0$. Namely, $\mathrm{Pic}\,(X)$ has no torsion. We shall show that $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* = k^*$. Suppose the contrary. Let $a_0 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* \backslash k^*$ and let p be a prime > 1. Consider an R-algebra $A_0 = R[T]/(T^p - a_0)$. Since a_0 is nonzero everywhere on X, $Y = \mathrm{Spec}\, A_0$ is a finite étale covering of X with degree p. Note that either Y_0 is connected or Y is a disjoint sum of p components isomorphic to X. Namely, either A_0 is irreducible or there exists $a_1 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^*$ such that $a_0 = a_1^p$. In the first case, Y_0 is a p-cyclic covering of X and this contradicts the hypothesis $H^1_{ét}(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = (0)$. In the second case, consider $A_1 = R[T]/(T^p - a_1)$ and $Y_1 = \mathrm{Spec}\, A_1$. By the same argument as above, there exists $a_2 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^*$ such that $a_1 = a_2^p$, and so forth. Meanwhile, X

is contained in a nonsingular projective variety V so that $V - X$ has pure codimension 1. Write $V - X = D_1 + \cdots + D_r$, where the D_i are irreducible components of $V - X$. Since $a_0 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^*$, $(a_0)_V = \sum_{i=1}^r \alpha_i D_i$ with $\alpha_i \in \mathbf{Z}$. Similarly, $(a_1)_V = \sum_{i=1}^r \beta_i D_i$ and $\alpha_i = p\beta_i$ $(\forall i)$ because $a_0 = a_1^p$. Thus, the α_i are divisible by p infinitely many times. This is a contradiction. Hence $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* = k^*$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Lemma 2.2 implies $H^1_{\acute{e}t}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = (0)$ for $\forall n > 0$. Since $\pi_{1,alg}^{ab}(X) = \varprojlim_n H^1_{\acute{e}t}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, we have $\pi_{1,alg}^{ab}(X) = (0)$. Q.E.D.

Since $\pi_1(\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}) = (e)$, Lemma 2.1 implies the following result.

Lemma 2.4 *Let $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ be a polynomial ring. Then the diophantine equation $D_n(\xi) = 1$ has only constant solutions in R.*

Proof. We shall here give an algebro-geometric proof.
(I) Case $n = 1$. Set $X = \mathbf{A}^1_k$, and let $\pi : Y \longrightarrow X$ be a connected finite étale covering. Then there exists a finite morphism $\rho : C \longrightarrow \mathbf{P}^1$ from a nonsingular projective curve C to the projective line $\mathbf{P}^1$ such that ρ extends the morphism π. Let P_∞ be the point at infinity on $\mathbf{P}^1$ and let $\rho^{-1}(P_\infty) = \{Q_1, \cdots, Q_s\}$. Let $d = \deg p$ and let ν_i be the ramification index of ρ at Q_i $(1 \le i \le s)$. By the Riemann-Hurwitz formula, we have

$$2g - 2 = -2d + \sum_{i=1}^{s} (\nu_i - 1) = -d - s,$$

where g is the genus of C. Since $g \ge 0$, we have $d + s \le 2$. This entails $d = s = 1$. Namely, π is an isomorphism.
(II) Case $n > 1$. Let $X = \mathbf{A}^n_k$ and let $\pi : Y \longrightarrow X$ be a connected finite étale covering of degree d. We shall prove by induction on n that π is an isomorphism. Let $q : X \longrightarrow D = \mathbf{A}^1_k$ be an $\mathbf{A}^{n-1}_k$- fibration given by a suitable coordinate system on $\mathbf{A}^n_k$. Let $\sigma : \widetilde{D} \longrightarrow D$ be the normalization of D in the function field $k(Y)$. For any point P of D, the inverse image $\pi^{-1}(q^{-1}(P))$ is a finite étale covering of $q^{-1}(P) \cong \mathbf{A}^{n-1}$ of degree d. By the induction hypothesis, $\pi^{-1}(q^{-1}(P))$ consists of d components, each of which is isomorphic to $\mathbf{A}^{n-1}_k$. Hence $\sigma^{-1}(P)$ consists of d points. Hence $\sigma : \widetilde{D} \longrightarrow D$ is a finite étale covering of degree d. Since $\widetilde{D}$ is irreducible, we must have $d = 1$. Thus, π is an isomorphism. Q.E.D.

In connection with the above results, we would like to pose the following:

Problem. Let X be a nonsingular affine variety such that $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* = k^*$ and $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ is factorial. Does this imply $\pi_{1,alg}(X) = (e)$?

One partial answer is:

Proposition 2.5 *Under the hypotheses of the above problem, X has no étale (simple) coverings of the type:*

$$T^n + a_1 T + a_2 = 0, \quad a_1, a_2 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X). \tag{4}$$

Proof. The discriminant of the equation (4) is

$$D = (n-1)^{n-1} a_1^n + (-1)^{n-1} n^n a_2^{n-1}.$$

In view of Lemma 2.1, it suffices to show that the diophantine equation $D = 1$ has only constant solutions in $R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. The equation $D = 1$ can be written as

$$(-1)^n n^n a_2^{n-1} = (b_1 - 1)(b_1 - \zeta) \cdots (b_1 - \zeta^{n-1}),$$

where $b_1 = (n-1)^{\frac{n-1}{n}} a_1$ and ζ is a primitive n-th root of 1. Then there are mutually prime elements $q_1, \cdots, q_n$ of R such that

$$(q_1 \cdots q_n)^{n-1} = (-1)^n n^n a_2^{n-1} \text{ and } b_1 - \zeta^{i-1} = q_i^{n-1} \quad (1 \le i \le n).$$

Then $q_1^{n-1} - q_2^{n-1} = (1 - \zeta)$. If ω is a primitive $(n-1)$-st root of 1, $q_1 - \omega^j q_2$ is invertible in R for $0 \le \forall j < n-1$. So, $q_1 - \omega^j q_2$ is in k for $0 \le \forall j < n-1$. Then it is easy to see that $q_1, q_2 \in k$. So, b_1 and hence a_1 and a_2 are in k. Thus the equation $D = 1$ has only constant solutions in R. Q.E.D.

3 Vector fields and the jacobian conjecture

Hereafter, we shall consider the jacobian conjecture in dimension 2. It is formulated as follows:

Let $R = k[x, y]$. Given $f, g \in R$, $J\left(\dfrac{f, g}{x, y}\right) = 1$ if and only if $k[x, y] = k[f, g]$.

Associated with the pair (f, g), consider a vector field on $\mathbf{A}_k^2$,

$$\delta = \delta_f := f_y \frac{\partial}{\partial x} - f_x \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{where } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ and } f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

The vector field is of course a k-derivation of $k[x, y]$. It is called *locally nilpotent* if $\delta^n(a) = 0$ $(n \gg 0)$ for any $a \in R$. If δ is locally nilpotent, one can define an algebraic G_a-action on $\mathbf{A}_k^2$ via a k-algebra homomorphism $\Delta : R \longrightarrow R \otimes k[t]$, which is defined as

$$\Delta(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n(a) t^n, \quad a \in R,$$

where G_a is the additive group. Conversely, we can show that any algebraic G_a-action on $\mathbf{A}_k^2$ is given by a locally nilpotent k-derivation δ on R.

Furthermore, we have the following result.

Proposition 3.1 *Let f, g be elements of R such that $J\left(\dfrac{f, g}{x, y}\right) = 1$. Then $k[x, y] = k[f, g]$ if and only if δ_f is locally nilpotent on R.*

Proof. "Only if" part: Let $\delta = \delta_f$. Since $\delta(f) = 0$ and $\delta(g) = 1$, we have $\delta = \dfrac{\partial}{\partial g}$, which is obviously locally nilpotent.

"If" part: Let $R_0 = \{z \in R \mid \delta(z) = 0\}$, which is a k-subalgebra of R and contains the element f. Note that $\delta(g) = 1$. We claim that $R = R_0[g]$. For the proof, define the δ-length $\ell(z)$ of an element z of R by the smallest integer n such that $\delta^{n+1}(z) = 0$. Then $\delta(z) = 0$ if and only if $\ell(z) = 0$. If $\ell(z) = n > 0$, note that $\ell\left(z - \dfrac{1}{n!}\delta^n(z) g^n\right) < n$, where $\delta^n(z) \in R_0$. Hence by induction on $\ell(z)$, we have $z - \dfrac{1}{n!}\delta^n(z) g^n \in R_0[g]$. Thus, $\operatorname{Spec} R = \operatorname{Spec} R_0 \times \mathbf{A}_k^1$. It is then easy to show that $R_0 = k[u]$. Since f is written as a polynomial $\varphi(u)$ and $J\left(\dfrac{f, g}{x, y}\right) = 1$, $\varphi(u)$ is a linear polynomial and hence $k[x, y] = k[u, g] = k[f, g]$. Q.E.D.

4 Invariant theory for vector fields

Let K be a field of characteristic zero and let R be a noetherian K-algebra domain. Let δ be a K-derivation on R. We call an ideal I of R a *δ-integral ideal* if $\delta(I) \subseteq I$. We have the following result of Seidenberg.

Lemma 4.1 *Let I, J be δ-integral ideals. Then we have:*

1. *$I + J, IJ$ and $I \cap J$ are δ-integral ideals.*
2. *Every prime divisor $\underline{p}$ of I is a δ-integral ideal.*
3. *The radical $\sqrt{I}$ is a δ-integral ideal.*

We consider a principal ideal $I = fR$. If I is a δ-integral ideal, we say that f is a *δ-integral element.* Later, when we restrict ourselves to the case $R = K[x, y]$, we call f a *δ-integral curve.* If f is a δ-integral element, we can write $\delta(f) = f\chi(f)$ with $\chi(f) \in R$. An element t of R is called a *δ-integral factor* if there exists a δ-integral element f such that $t = \chi(f)$. The set of all δ-integral factors in R is denoted by $X_\delta(R)$ or simply by X_δ. We note that an invertible element of R is a δ-integral element. In fact, if $uv = 1$ with $u, v \in R$ then $\delta u = -(v^{-1}\delta v)u$ with $-v^{-1}\delta v \in R$.

Lemma 4.2

1. *Let t be a δ-integral factor, and let A_t be the set of δ-integral elements in R with the same δ-integral factor t. Then A_t is a K-vector space.*
2. *X_δ is an abelian monoid under the addition of R, i.e., X_δ is closed under the addition and contains the zero element.*
3. *Let A be the subalgebra of R generated by all δ-integral elements over K. Then $A = \sum_{t \in X_\delta} A_t$ and $A_s \cdot A_t \subseteq A_{s+t}$, while $\sum_{t \in X_\delta} A_t$ is not necessarily a direct sum. We call A the δ-integral ring of R.*

Let $L = Q(R)$ be the quotient field of R. Then the K-derivation δ on R is naturally extended to a K-derivation on L. An element ξ of L is, by definition, a δ-integral element in L if $\chi(\xi) = \delta(\xi)/\xi \in R$, and $\chi(\xi)$ is then a δ-integral factor. The set of all δ-integral factors in L is an abelian group under the addition, which we denote by $\widetilde{X_\delta}$. Clearly, $X_\delta \subseteq \widetilde{X_\delta}$ as monoids. The next lemma shows that $\widetilde{X_\delta} = X_\delta - X_\delta$, i.e., $\widetilde{X_\delta}$ is an abelian group generated by X_δ provided R is a factorial domain (= a unique factorization domain).

Lemma 4.3 *Assume that R is a factorial domain. Then we have:*

1. *Let ξ be a δ-integral element in L and write $\xi = fg^{-1}$ with mutually prime elements f, g of R. Then f and g are δ-integral elements in R, and $\chi(\xi) = \chi(f) - \chi(g)$.*

2. *Let f be a δ-integral element in R. Then any prime factor as well as any divisor of f is a δ-integral element in R. Furthermore, the δ-integral ring A is generated over K by invertible elements of R and δ-integral elements which are prime elements of R.*

It is an interesting problem to ask whether or not $\widetilde{X_\delta}$ *is a finitely generated abelian group provided R is finitely generated over K.*

Definition. Let X be an abelian monoid.

1. X is *positive* if X contains no abelian subgroups other than (0).

2. X is *finitely generated* if $\widetilde{X} := X - X$ is a finitely generated abelian group.

3. X is *good* if X is positive and if there exist elements $t_1, \cdots, t_r$ of X such that $X = \mathbf{Z}_+ t_1 + \cdots + \mathbf{Z}_+ t_r$ and $\widetilde{X}$ is a free abelian group with free basis $t_1, \cdots, t_r$, where $\mathbf{Z}_+$ is the set of non-negative integers. We then write $X = \mathbf{Z}_+ t_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_+ t_r$ and call r the rank of X.

We shall consider the subring $A_0 = \{x \in R; \delta(x) = 0\}$ of R and the subfield $L_0 = \{\xi \in L; \delta(\xi) = 0\}$ of L. We say that A_0 is an *inert* subring of R if $a \in A_0$ and $a = bc$ with $b, c \in R$ implies $b, c \in A_0$.

Lemma 4.4 *Let R be a factorial domain. Then we have:*

1. *X_δ is positive if and only if A_0 is an inert subring of R.*

2. *L_0 is algebraically closed in L. If A_0 is an inert subring of R then $Q(A_0)$ is algebraically closed in L.*

3. *Every element ξ of L_0 is written as $\xi = b/a$, where a and b are δ-integral elements in R with the same δ-integral factor. Conversely, if $a, b \in A_t$ with $t \in X_\delta$ and $a \neq 0$ then $b/a \in L_0$.*

4. *Let $R' = R \otimes_{A_0} Q(A_0)$. Then R' is a factorial domain and $X_\delta(R') = X_\delta(R)$.*

5. *Let $R'' = R \otimes_{A_0} L_0$. Then $X_\delta(R'') = X_\delta(R)$.*

We shall prove the following result.

Theorem 4.5 *Let R be a noetherian K-algebra domain and let δ be a K-derivation on R. Assume that R is a factorial domain and the monoid X_δ of δ-integral factors is good. Write $X_\delta = \mathbf{Z}_+ t_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_+ t_r$ with $t_1, \cdots, t_r \in R$. Let f_i $(1 \leq i \leq r)$ be a δ-integral element such that $\chi(f_i) = t_i$. Then the following assertions hold.*

1. *We may assume that $f_1, \cdots, f_r$ are prime elements of R.*

2. *$R^* \subseteq A_0$ and A_0 is an inert subring of R.*

3. *For the δ-integral ring A of R, we have $A \otimes_{A_0} L_0 = L_0[f_1, \cdots, f_r]$. If $f_1, \cdots, f_r$ are algebraically independent over L_0, $A = \sum_{t \in X_\delta} A_t$ is a graded ring. Namely, the decomposition $\sum_{t \in X_\delta} A_t$ is a direct sum.*

4. *$L_0 = Q(A_0)$ if and only if $A = A_0[f_1, \cdots, f_r]$. Furthermore, if $L_0 = Q(A_0)$ and $A = \sum_{t \in X_\delta} A_t$ is a graded ring, then $f_1, \cdots, f_r$ are algebraically independent over L_0.*

Proof. (1) Let $f = f_i$ for some i $(1 \leq i \leq r)$. If $f = gh$ with $g, h \in R$ then g and h are δ-integral elements. Write $\chi(g) = \sum_j \alpha_j t_j$ and $\chi(h) = \sum_j \beta_j t_j$ with $\alpha_j \geq 0$ and $\beta_j \geq 0$ $(\forall j)$. Since $t_i = \chi(f) = \chi(g) + \chi(h) = \sum_j (\alpha_j + \beta_j) t_j$ and since $t_1, \cdots, t_r$ constitute a free basis of X_δ, we have $\alpha_i + \beta_i = 1$ and

$\alpha_j = \beta_j = 0$ for $\forall j \neq i$. So, either g or h belongs to A_0. Suppose $g \in A_0$. We may then replace f by f/g. Since R is a factorial domain, we may assume by repeating this replacement finitely many times that f is a prime element.

(2) Let u be an invertible element of R. Then u and u^{-1} are δ-integral elements. Since $\chi(u), \chi(u^{-1}) \in X_\delta = \oplus_{i=1}^r \mathbf{Z}_+ t_i$ and $\chi(u) + \chi(u^{-1}) = 0$, we have $\chi(u) = \chi(u^{-1}) = 0$. So, $u, u^{-1} \in A_0$. By a similar argument, $a = bc$ with $a \in A_0$ and $b, c \in R$ implies $b, c \in A_0$. Furthermore, this implies that any prime factor of a belongs to A_0 and that any decomposition $a = bc$ with $a \in A_0$ implies $b, c \in A_0$. Hence A_0 is an inert subring of R.

(3) Let g be a δ-integral element. Write $\chi(g) = \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_r t_r$ with $\alpha_i \geq 0$. Let $f = f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$. Then $g/f \in L_0$. So, $g \in L_0[f_1, \cdots, f_r]$. From this it follows that $A \otimes_{A_0} L_0 = L_0[f_1, \cdots, f_r]$. Suppose $f_1, \cdots, f_r$ are algebraically independent over L_0. Given a relation $\sum_{t \in X_\delta} f_t = 0$ with $f_t \in A_t$, we can write $f_t = \gamma_t f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$ with $\gamma_t \in L_0$ if $t = \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_r t_r$, for $A_t \subseteq A_t \otimes_{A_0} L_0 = L_0 f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$. Then the relation $\sum_{t \in X_\delta} \gamma_t f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r} = 0$ implies $\gamma_t = 0$ ($\forall t \in X_\delta$). Hence $f_t = 0$ ($\forall t \in X_\delta$). Thus $A = \sum_{t \in X_\delta} A_t$ is a direct sum decomposition.

(4) Suppose $L_0 = Q(A_0)$. With the notations in (3) above, we can then write $g/f = b/a$ with $a, b \in A_0$. Since A_0 is an inert subring of R, we may assume that a and b are mutually prime. Since $ag = bf$, we have $f = ah$ and $g = bh$ for $h \in R$. Since $f = f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$ and $f = ah$, we have $a = u f_1^{\beta_1} \cdots f_r^{\beta_r}$ with $u \in R^*$ and $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ ($\forall i$). Since $\chi(a) = \beta_1 t_1 + \cdots + \beta_r t_r = 0$, we have $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$. Thus $a = u \in R^*$ and $g = ba^{-1} f \in A_0[f_1, \cdots, f_r]$. From this it follows that $A = A_0[f_1, \cdots, f_r]$. Conversely, suppose we have $A = A_0[f_1, \cdots, f_r]$. Take $\xi \in L_0$ and write $\xi = b/a$ with mutually prime elements $a, b \in R$. Then we deduce $b\delta(a) = a\delta(b)$. So, $\delta(a) = ca$ and $\delta(b) = cb$ for $c \in R$. Namely, c is a δ-integral factor and $c = \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_r t_r$ with $\alpha_i \geq 0$. Then $a = a_0 f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$ and $b = b_0 f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$ with $a_0, b_0 \in A_0$ because $a, b \in A_c$ and $A_c = A_0 f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$ by hypothesis. Hence $\xi = b/a = b_0/a_0 \in Q(A_0)$. It then follows that $L_0 = Q(A_0)$. Suppose $L_0 = Q(A_0)$ and $A = \sum_{t \in X_\delta} A_t$ is a graded ring. Suppose that $f_1, \cdots, f_r$ were algebraically dependent over L_0. Then there exists a nontrivial relation $\sum_\alpha a_\alpha f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r} = 0$ for $a_\alpha \in A_0$ and $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$. Note that $a_\alpha f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r} \in A_t$ with $t = \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_r t_r$

and $\alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_r t_r \neq \beta_1 t_1 + \cdots + \beta_r t_r$ whenever $\alpha \neq \beta$. So, we have $a_\alpha f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r} = 0$ because $A = \sum_{t \in X_\delta} A_t$ is a graded ring. Since R is an integral domain, we must have $a_\alpha = 0$. This is a contradiction. Thus $f_1, \cdots, f_r$ are algebraically independent over L_0. Q.E.D.

Remark. Let the notations and assumptions be the same as above. Since L_0 is algebraically closed in $L := Q(R)$, any one of $f_1, \cdots, f_r$ is algebraically independent over L_0. However, examples in the next section show that $f_1, \cdots, f_r$ are not necessarily algebraically independent if $r \geq 2$ and that $A = \sum_{t \in X_\delta} A_t$ is not necessarily a graded ring.

We shall now look into X_δ.

Lemma 4.6 *Assume that $L_0 = Q(A_0), X_\delta$ is positive and $\widetilde{X_\delta}$ is finitely generated. Then X_δ is good.*

We prove the following result.

Lemma 4.7 *Suppose δ is locally nilpotent. Then $X_\delta = (0), A = A_0$ and $L_0 = Q(A_0)$.*

Proof. Let f be a δ-integral element of R and let $c = \chi(f)$. If $\delta = 0$, we have nothing to show. Suppose $\delta \neq 0$. By [4, Lemma I.1.5], there exists an element $t \in R$ such that $R[a^{-1}] = A_0[a^{-1}][t]$, where $a = \delta(t) \neq 0$ and $a \in A_0$. The element t is algebraically independent over A_0. We then have $a^n f = \rho(t)$ and $a^m c = \sigma(t)$ with $n \geq 0, m \geq 0$ and $\rho(t), \sigma(t) \in A_0[t]$. Since $\delta(f) = cf$ and $a^n \delta(f) = \rho'(t)a$, an easy computation yields $a^{m+1}\rho'(t) = \rho(t) \cdot \sigma(t)$. This implies that $\sigma(t) = \rho'(t) = 0$. So, $c = 0$ and $\delta(f) = 0$. Thus, $X_\delta = (0)$ and hence $A = A_0$. Next, let $\xi \in L_0$. Write $\xi = f/g$ with mutually prime elements f, g of R. Then f and g are δ-integral elements of R by Lemma 4.4. Hence $f, g \in A_0$. Thus $\xi \in Q(A_0)$. Q.E.D.

5 Vector fields on the affine plane

In this section we assume that the ground field k is an algebraically closed field of characteristic zero and R is a factorial domain of dimension 2 which is finitely generated over k. We shall begin with the following:

Lemma 5.1 *The following assertions hold true:*

1. A_0 *is integrally closed in* R *and finitely generated over* k.
2. $\delta = 0$ *if and only if* $\mathrm{tr.deg}_k Q(A_0) = 2$.

For a k-derivation δ of R, the set $\delta(R) = \{\delta(x); x \in R\}$ generates an ideal $R\delta(R)$. The *divisorial part* (δ) of δ is the smallest principal ideal of R which contains $R\delta(R)$. Set $(\delta) = dR$ with $d \in R$. Then $\delta' = d^{-1}\delta$ is a k-derivation of R such that the ideal $R\delta'(R) = R$ or has height 2; we then say that δ' has *no divisorial part.*

Let $X = \mathrm{Spec}\,(R)$. The subset $V(R\delta(R))_{\mathrm{red}}$ is called the *zero set* of δ, which we denotes by $Z(\delta)$. If δ has no divisorial part, $Z(\delta)$ is a finite set.

Lemma 5.2 *Let* $k \subset k_1 \subset L := Q(R)$ *be a subfield such that* $\mathrm{tr.deg}_k k_1 = 1$. *Then there exists a non-trivial k-derivation* δ *of* R *determined uniquely up to an invertible element of* R *such that* δ *has no divisorial part and* $L_0 := \{\xi \in L; \delta(\xi) = 0\} \supset k_1$.

Let $\varphi : X = \mathrm{Spec}\, R \cdots\!\rightarrow C$ be a rational mapping onto a smooth algebraic curve C. Then φ is defined outside a (possibly empty) finite set Σ of X. Namely, $\varphi^0 := \varphi|_{X-\Sigma} : X - \Sigma \longrightarrow C$ is a morphism. For $P \in C$, the schematic closure [1] of the fiber $(\varphi^0)^{-1}(P)$ is called the fiber of φ over P and denoted by $\varphi^{-1}(P)$. We say that a rational mapping $\varphi : X \cdots\!\rightarrow C$ is an *irreducible pencil* parametrized by C if φ^0 is surjective and general fibers of φ are irreducible and reduced; we also call $\varphi : X \cdots\!\rightarrow C$ simply a *pencil.* A rational mapping $\varphi : X \cdots\!\rightarrow C$ is equivalently defined by giving a subfield $k(C)$ of $L := Q(R)$. Then φ is an irreducible pencil if and only if $k(C)$ is algebraically closed in L. Given a rational mapping $\varphi : X \cdots\!\rightarrow C$, we have a decomposition $\varphi : X \overset{\widetilde{\varphi}}{\cdots\!\rightarrow} \widetilde{C} \xrightarrow{\sigma} C$, where $\sigma : \widetilde{C} \longrightarrow C$ is the normalization of C in L and $\widetilde{\varphi} : X \cdots\!\rightarrow \widetilde{C}$ is an irreducible pencil parametrized by $\widetilde{C}$. The decomposition is called the Stein factorization of φ. An irreducible pencil $\varphi : X \cdots\!\rightarrow C$ is called a *fibration* if φ is a morphism.

[1] Let $\mathcal{I}_{(\varphi^0)^{-1}(P)}$ be the defining ideal of $(\varphi^0)^{-1}(P)$ in $X - \Sigma$. Let $\widetilde{I}$ be the inverse image of $\iota_* \mathcal{I}_{(\varphi^0)^{-1}(P)}$ by the canonical inclusion $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \iota_* \mathcal{O}_{X-\Sigma}$, where $\iota : X - \Sigma \longrightarrow X$ is the open immersion. Then I is an ideal of R and defines the schematic closure of $(\varphi^0)^{-1}(P)$ in X [3].

Let δ be a k-derivation of R. We say that δ is *composed* of a pencil $\varphi : X \cdots\longrightarrow C$ if $\delta(I_F) \subseteq I_F$ for every general fiber F of φ, where I_F signifies the defining ideal of F. We also say that δ is *of fibered type* if δ is composed of some pencil.

Lemma 5.3 *Let the notations be the same as above. Assume that $R^* = k^*$, where R^* is the group of invertible elements of R and that δ is composed of an irreducible pencil $\varphi : X \cdots\longrightarrow C$. Then the following assertions hold:*

1. *C is either $\mathbf{A}^1$ or $\mathbf{P}^1$.*

2. *In case $C = \mathbf{A}^1$, there exists an irreducible element f of R with $\delta(f) = 0$ such that $C = \operatorname{Spec} k[f]$ and φ is a morphism associated with the inclusion $k[f] \hookrightarrow R$. We then have $A_0 \supsetneq k$.*

3. *In case $C = \mathbf{P}^1$, there exists two irreducible elements f, g of R such that $\chi(f) = \chi(g), \gcd(f, g) = 1$ and $\varphi : X \cdots\longrightarrow \mathbf{P}^1$ is the natural extension of a fibration $D(g) \longrightarrow \operatorname{Spec} k[f/g] = \mathbf{A}^1$, where $\mathbf{P}^1 = \operatorname{Proj} k[f, g]$. We then have $L_0 \supsetneq A_0 = k$.*

As stated in the above lemma, the irreducible pencil $\varphi : X \cdots\longrightarrow C$ is a fibration if $C = \mathbf{A}^1$. Hence we write $\varphi : X \longrightarrow \mathbf{A}^1$ instead of $\varphi : X \cdots\longrightarrow \mathbf{A}^1$.

Lemma 5.4 *Assume that $R^* = k^*$. Let f be an irreducible element of R and let $\varphi : X \longrightarrow \mathbf{A}^1$ be a fibration defined by the inclusion $k[f] \hookrightarrow R$. Let δ be a k-derivation of R such that $L_0 \supseteq k(f)$ and δ has no divisorial parts (cf. Lemma 4.2). Then the following assertions hold:*

1. *δ is composed of the fibration φ.*

2. *The following conditions are equivalent to each other:*

   (i) $\operatorname{tr.deg}_k Q(A) = 1$.

   (ii) $A = A_0 = k[f]$.

   (iii) $X_\delta = (0)$.

   (iv) *X_δ is positive.*

   (v) *Every fiber of φ is irreducible.*

3. *Assume that R is a polynomial ring $k[x,y]$. Then δ $= d^{-1}\left(f_y\dfrac{\partial}{\partial x} - f_x\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, where $d = \gcd(f_x, f_y)$. Furthermore, if $d = 1$, the following conditions are equivalent to each other:*

   (i) *δ has no zeroes, i.e., $Z(\delta) = \emptyset$.*

   (ii) *Every fiber of φ is smooth.*

   Furthermore, if $X_\delta = (0)$ then $d = 1$.

Lemma 5.5 *Assume that $R^* = k^*$. Let f, g be two (distinct) irreducible elements of R such that $1 \notin kf + kg$ and $\gcd(f, g) = 1$, and let $\varphi : X \cdots\longrightarrow \mathbf{P}^1$ be a rational mapping defined by $P \longmapsto (f(P) : g(P))$. Let δ be a non-trivial k-derivation of R such that δ has no divisorial parts and $L_0 \supset k(f/g)$ (cf. Lemma 5.2). Then the following assertions hold:*

1. *δ is composed of the pencil φ.*

2. *$L_0 = k(f/g)$ and $A_0 = k$.*

3. *In the case where R is a polynomial ring $k[x,y]$, δ is determined, up to a constant multiple, as*

$$\delta = d^{-1}\left(g\left(f_y\frac{\partial}{\partial x} - f_x\frac{\partial}{\partial y}\right) - f\left(g_y\frac{\partial}{\partial x} - g_x\frac{\partial}{\partial y}\right)\right),$$

   where

$$d = \gcd(gf_y - fg_y, gf_x - fg_x).$$

   Furthermore, if $d = 1$ and $J(f,g) \in k^*$ then $Z(\delta) = V(f,g)$.

We say that a k-derivation δ of R is locally nilpotent along an irreducible pencil $\varphi : X \cdots\longrightarrow C$ if δ is composed of φ and if the restriction δ_F of δ onto F is a locally nilpotent k-derivation of R/I_F, where F is a general fiber of φ and I_F is the defining ideal of F.

We have the following:

Theorem 5.6 *Let R be a factorial domain of dimension two which is finitely generated over k and let δ be a non-trivial k-derivation. Assume that $R^* = k^*$. Then the following conditions are equivalent to each other:*

1. *$R = k[x,y]$, a polynomial ring, and $\delta(y) \in k[x]$.*

2. *δ is locally nilpotent.*

3. *There exists a fibration $\varphi : X \longrightarrow C$ such that δ is locally nilpotent along φ.*

Theorem 5.7 *Let $R = k[x,y]$ be a polynomial ring, let f be an irreducible polynomial in R and let $\delta = f_y \dfrac{\partial}{\partial x} - f_x \dfrac{\partial}{\partial y}$. Assume that δ has no divisorial parts. Then δ is locally nilpotent if and only if $X_\delta = (0)$ and there exists a curve C which is defined by $g = 0$ with a δ-integral element g of R and isomorphic to $\mathbf{A}^1$.*

As for the finite generation of $\widetilde{X_\delta}$, we have the following partial result.

Proposition 5.8 *Let R be a factorial domain of dimension two which is finitely generated over k and let δ be a non-trivial k-derivation of fibered type on R. Assume that $R^* = k^*$. Then $\widetilde{X_\delta}(= X_\delta - X_\delta)$ is finitely generated.*

If $A_0 \supsetneqq k$ or $L_0 \supsetneqq k$, a derivation δ is of fibered type. We say that a derivation δ is *of gneral type* if $A_0 = L_0 = k$. We shall observe several examples of derivations of general type.

Theorem 5.9 *Let $\delta = f(x)\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$ be a non-trivial derivation on a polynomial ring $R = k[x,y]$, where $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)^{r_i}$ with $\alpha_i \in k, \alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j)$. Then the following assertions hold:*

1. *δ is of fibered type if and only if $n = 1$ and $r_1 \geq 2$. Hence if $n \geq 2$ or $n = r_1 = 1$ then δ is of general type.*

2. *If $n \geq 2$ then $A = k[x - \alpha_1, \cdots, x - \alpha_n]$.*

3. *In the case $n = 1$, assume that $f(x) = x^r$. Then $A = k[x, x^{r-1}y + (r-1)^{-1}]$ if $r \geq 2$ and $A = k[x]$ if $r = 1$.*

In the proof of the above theorem, we make use of the following result.

Lemma 5.10 *Let* $f = \prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)^{r_i} \in \mathbf{C}[z]$ *and let* $F = f^{-1}$. *Then the residues of* F *at* $z = \alpha_i$ *are zero for* $1 \le \forall i \le n$ *if and only if* $n = 1$ *and* $r_1 \ge 2$.

Remark. Consider a k-derivation $\delta = f(x)\dfrac{\partial}{\partial x} + g(y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ with $f(x) \in k[x], g(y) \in k[y]$ and $f(x), g(y) \notin k$. By a linear change of variables x, y, we may assume that $x \mid f(x)$ and $y \mid g(y)$. Then x and y are δ-integral elements. Hence $A = k[x,y] = R$. For example, if $f(x) = x$ and $g(y) = -y$ then $A_0 = k[xy]$ and δ is composed of a fibration defined by the inclusion $k[xy] \hookrightarrow R$. If $f(x) = x$ and $g(y) = y$ then $A_0 = k$, $L_0 = k(x/y)$ and δ is composed of an irreducible pencil $\varphi : X \cdots\to \mathbf{P}^1$ defined by $P \longmapsto (x(P) : y(P))$.

Conversely, if $A_0 \supsetneq k$ then δ is equal to $x\dfrac{\partial}{\partial x} - y\dfrac{\partial}{\partial y}$ up to constant multiples of variables x, y.

It seems plausible that $f(x) = x$ and $g(y) = y$ up to constant multiples of variables x, y if $A_0 = k$ and $L_0 \supsetneq k$. If this is the case, we can say that $\delta = f(x)\dfrac{\partial}{\partial x} + g(y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ with $f(x), g(y) \notin k$ is of general type if either $\deg f(x) \ge 2$ or $\deg g(y) \ge 2$.

Remark. Consider a k-derivation $\delta = g(y)\dfrac{\partial}{\partial x} + f(x)\dfrac{\partial}{\partial y}$ with $f(x) \in k[x]$ and $g(y) \in k[y]$.Then $A_0 \supsetneq k$. In fact, set $F = \int f(x)dx - \int g(y)dy$. Then $F \in A_0$. Hence δ is of fibered type.

6 Affine étale curves

Let K be a field of characteristic zero which is not necessarily algebraically closed. Let $C = \operatorname{Spec} R$ be an affine normal algebraic curve defined over K. We call C an *affine étale curve* if the following two conditions are satisfied:

(1) there exist a K-derivation δ on R and an element x of R such that $\delta(x) = 1$,

(2) $R^* = K^*$.

Let $\pi : C \longrightarrow \mathbf{A}^1$ be the morphism defined by the inclusion $K[x] \hookrightarrow R$. Then the condition (1) is equivalent to saying that π is an étale morphism, while the condition (2) implies that π is surjective.

Lemma 6.1 *Let $\mathbf{C}[x, y]$ be a polynomial ring in two variables x, y and let f, g be elements of $\mathbf{C}[x, y]$ such that the Jacobian $J(f,g) = \left|\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right|$ is nowhere zero. Set $R = \mathbf{C}[x,y] \otimes_{\mathbf{C}[f]} \mathbf{C}(f), C = \mathrm{Spec}\, R$ and $K = \mathbf{C}(f)$. Then the following assertions hold:*

1. *With a K-derivation $\delta = f_y \dfrac{\partial}{\partial x} - f_x \dfrac{\partial}{\partial y}$ of R, the curve C is an affine étale curve over K such that R is factorial.*

2. *If the affine étale curve C is K-isomorphic to $\mathbf{A}^1$ then we have $\mathbf{C}[x, y] = \mathbf{C}[f, g]$.*

Proof. (1) Since R is the ring of quotients of $\mathbf{C}[x, y]$ with respect to a multiplicatively closed subset $\mathbf{C}[f] - (0)$, R is a factorial ring. Furthermore, it is easy to show that $R^* = K^*$. Meanwhile, since $J(f, g)$ is nowhere zero, we may assume that $J(f, g) = 1$. Then $\delta(g) = 1$. Hence $C = \mathrm{Spec}\, R$ is an affine étale curve over K.

(2) Suppose the curve C is K-isomorphic to $\mathbf{A}^1$. Write $R = K[t]$ and $g = \varphi(t)$. By hypothesis, $1 = \delta(g) = \varphi'(t)\delta(t)$, and hence $\varphi'(t), \delta(t) \in K^*$. This implies that g is a linear polynomial in t, $R = K[t] = K[g]$ and δ is locally nilpotent on R. Since $\mathbf{C}[x, y] \subset R$, δ is locally nilpotent as a $\mathbf{C}$-derivation of $\mathbf{C}[x, y]$. It then follows from Proposition 4.1 that $\mathbf{C}[x, y] = \mathbf{C}[f, g]$. Q.E.D.

Thus, the Jacobian problem will be affirmatively answered if every affine étale curve is isomorphic to $\mathbf{A}^1$. We have only a partial answer as given in the following result (cf. [1]).

Theorem 6.2 *Let $\pi : C = \mathrm{Spec}\, R \longrightarrow \mathbf{A}^1_K$ be an affine étale curve. Then π is an isomorphism if one of the next conditions is satisfied.*

1. *π is a finite morphism.*

2. *$K(C)$ is K-isomorphic to $K(\mathbf{A}^1) = K(x)$.*

3. *$[K(C) : K(x)] = 2$.*

4. $K(C)$ is a Galois extension of $K(x)$.

5. $C \otimes_K \overline{K}$ has at most two places at infinity, where $\overline{K}$ is an algebraic closure of K.

6. C is factorial and C has a K-rational point.

7. C is elliptic [2].

References

[1] S.S. Abhyankar, "Expansion techniques in algebraic geometry ", Tata Institute Fundamental Research, 1977.

[2] H. Bass, E.H. Connell and D. Wright, The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) **7** (1982), 287-330.

[3] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébriques, Chapitre **24**, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 1965.

[4] M. Miyanishi, "Curves on rational and unirational surfaces ", Tata Institute Fundamental Research, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1978.

[5] M. Miyanishi, Étale endomorphisms of algebraic varieties, Osaka J. Math. **22** (1985), 345-364.

[6] O. Zariski, Interprétations algébrico-geométriques du quatrizieme probleme de Hilbert, Bull. Sci. Math. **78** (1954), 1-14.

[2]This is due to J.G. Yang.

LIFTINGS OF COMPLEXES

京大総合人間学部　吉野雄二

§0. Introduction

最近 Auslander を中心として CM approximation の理論が展開され [**AB**], それに付随して現れる δ 不変量等に関してきわめて面白い現象が報告されつつある. (cf. [**D1**], [**D2**], [**H**], [**HM**], [**M1**], [**M2**]. この方面の概説が [**Y2**] にありますので参照して下さい.)

更に Auslander-Ding-Solberg [**ADS**] では加群の lifting と CM approximation との関係が詳細に議論され, 特に weak lifting に関して, 与えられた加群の CM approximation や δ 不変量の挙動が詳しく解析されている. ここで weak lifting とは lifting よりもかなり弱い条件で定まるもので, 上記の [**ADS**] の理論はきわめて豊富な例を持つことは重要である.

本稿では [**ADS**] において加群に対して展開された weak lifting の理論を, Eisenbud [**E**] の着想に基づいて complex の上で展開することを目標としている. 話しを module から complex に拡張することによって, 議論の筋道が透明になり議論自体が簡略化されるし, module だけからでは推論できなかった精密な議論も可能となった. 特に weak lifting の complex での議論が可能になったのは, (1.4) で定義される L-complex によってである. この L-complex が我々の議論では中心的な役割を果たす. 従って本稿は L-complex の理論であるといっても良い.

残念ながら紙数の関係で詳しい証明はすべて省かなくてはならなかった. 興味のある方は現在の所 [**Y3**] を参照して下されば良いと思います.

§1. Weak lifings of complexes

以下 S を local ring, x を S の非零因子とする. また, $R = S/xS$ とおく. $F_\bullet \in K_c^+(R)$ を考える. すなわち, $F_\bullet$ は R 上の有限生成加群の complex で $F_i = 0$ if $i \ll 0$ とする. 以下では $F_\bullet$ を次のように表す.

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow F_{\ell-1} \xrightarrow{\partial_{\ell-1}} F_\ell \longrightarrow 0$$

また $i(F_\bullet) = \inf\{i |\ H_i(F_\bullet) \neq 0\}$ とする. 更に特に断わらない限り $F_\bullet$ は minimal free complex とする. 従って $\ell = i(F_\bullet)$ である.

DEFINITION (1.1). (*a*) S 上の free complex $G_\bullet$ で $G_\bullet \otimes_S R = F_\bullet$ となるものが存在するとき, R 上の free complex $F_\bullet$ は liftable to S と言う.

(*b*) S 上の free complex $G_\bullet$ で $G_\bullet \otimes_S R$ が $F_\bullet$ を (complex としての) 直和因子として含む様なものが存在するとき, $F_\bullet$ は weakly liftable to S (w.l. と略す) と言う.

たとえば S が local ring で $x \in \mathfrak{m}_S - \mathfrak{m}_S^2$ であるときには, S の剰余体 $S/\mathfrak{m}_S$ の R-free resolution を $F_\bullet$ とすると, $F_\bullet$ はいつも w.l. である. 一方このとき S が 1 次元の domain なら,「$F_\bullet$ が liftable $\Longleftrightarrow$ S は regular」である.

$F_\bullet \in K_c^+(R)$ が与えられたとき, 各微分写像の S への持ち上げ $\tilde{\partial}_n : \tilde{F}_n \longrightarrow \tilde{F}_{n-1}$ を考える. すなわち $\tilde{\partial}_n \otimes R = \partial_n$ である. このとき写像の列:

$$\tilde{F}_\bullet : \cdots \longrightarrow \tilde{F}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} \tilde{F}_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{n-1}} \cdots \longrightarrow \tilde{F}_{\ell-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{\ell-1}} \tilde{F}_\ell \longrightarrow 0$$

がある. もちろんこれは complex に成るとは限らないが, $\tilde{F}_\bullet \otimes R = F_\bullet$ となるのだから, $\tilde{\partial}_{n-1}\tilde{\partial}_n = x\tilde{t}_n$ を満たす $\tilde{t}_n : \tilde{F}_n \longrightarrow \tilde{F}_{n-2}$ が存在する. 更に $t_n = \tilde{t}_n \otimes R$ とおく. この $\tilde{t}$ または t を $F_\bullet$ の Eisenbud operator と言う. 次の事柄は Eisenbud **[E]** によって示されているし, また確かめるのも容易である.

FACT (1.2). (*a*) $\tilde{t}$ は $\tilde{\partial}$ と可換である. 従って t は degree -2 の chain map $F \to F[-2]$ を定める.
(*b*) t は $(\tilde{F}_\bullet, \tilde{\partial})$ の取り方によらず up to chain homotopy で一意的に定まる.
特に t の class $e_{F_\bullet} \in \mathrm{Ext}_R^2(F_\bullet, F_\bullet)$ が一通りに定まる.

$e_{F_\bullet}$ を考えることで次の事を示すことができる.

LEMMA (1.3). (*a*) $\mathrm{Ext}_R^2(F_\bullet, F_\bullet) = 0$ ならば, $F_\bullet$ は liftable である.
(*b*) S が complete local ring のとき, $F_\bullet$ が liftable で更に $\mathrm{Ext}_R^1(F_\bullet, F_\bullet) = 0$ であるなら, $F_\bullet$ の S への lifting は unique である.

同じ事を w.l. について考えたい.

DEFINITION (1.4). (the L-complex) $L_\bullet = L_\bullet(F_\bullet)$ を次のように与える.

$$L_n = \tilde{F}_{n-1} \oplus \tilde{F}_n, \qquad \partial_n^L = \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_{n-1} & -\tilde{t}_n \\ x & -\tilde{\partial}_n \end{pmatrix}$$

この $L_\bullet$ は complex に成ることが容易に分かる.

LEMMA (1.5). $L_\bullet$ は chain isom. を除いて一意的に定まる. また, derived category $D_c^+(S)$ において, $L_\bullet(F_\bullet) \cong F_\bullet$ である.

$F_\bullet$ が minimal complex であるからといって, $L_\bullet(F_\bullet)$ は minimal であるとは限らない. $L_\bullet(F_\bullet) \otimes_S R$ は Eisenbud operator $t : F_\bullet \to F_\bullet[-2]$ の mapping cone になる.
定理のために一つ定義を与える.

DEFINITION (1.6). $G_\bullet$ が minimal free complex であるとき, $\Omega G_\bullet = (\tau_{i(G_\bullet)+1} G_\bullet)[1]$ とおき $G_\bullet$ の (first) syzygy complex という.

$F_\bullet$ が必ずしも minimal でない free complex のときには, $F_\bullet$ と quasi-isom. な minimal free complex $G_\bullet$ をとって $\Omega F_\bullet = \Omega G_\bullet$ とおく.

THEOREM (1.7). R 上の minimal free complex $F_\bullet$ について次の 5 条件は同値である.

(a) $F_\bullet$ は w.l. to S である.

(b) $e_{F_\bullet} = 0$ in $\mathrm{Ext}^2_R(F_\bullet, F_\bullet)$

(c) $F_\bullet$ は liftable to S/x^2S である.

(d) $L_\bullet(F_\bullet) \otimes_S R \cong F_\bullet[-1] \oplus F_\bullet$

(e) $\Omega L_\bullet(F_\bullet) \otimes_S R \cong F_\bullet \oplus \Omega F_\bullet$

特に $F_\bullet$ が R-module M の minimal free resolution のときを考えると, (e) は $\Omega^1_S(M) \otimes_S R \cong M \oplus \Omega^1_R(M)$ と同値である.

§2. The successive L-complex

以下 T を local ring, $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ を T 上の regular sequence とする. そして $I = (x_1, x_2, \ldots, x_r)T$ として, $R = T/I$ を考える. $F_\bullet \in K^+_c(R)$ が与えられたとき, 環の列

$$T \longrightarrow T/x_1T \longrightarrow T/(x_1, x_2)T \longrightarrow \cdots \longrightarrow R = T/(x_1, x_2, \ldots, x_r)T$$

に対して, §1 の方法を繰り返して T-free complex $L_\bullet(F_\bullet)$ を定義することができる. (1.5) の後半によって derived category $D^+_c(T)$ において $L_\bullet(F_\bullet) \cong F_\bullet$ であることが分かる. 更に次の事も示すことができる.

LEMMA (2.1). $L_\bullet(F_\bullet)$ は up to chain isom. で, $F_\bullet$ と ideal I によってのみ一意的に決まり, I の生成元 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ の取り方には無関係である.

(1.7) は次のように拡張される.

THEOREM (2.2). 上の状況の下で R 上の minimal free complex $F_\bullet$ について次の条件は同値である.

(a) $F_\bullet$ は w.l. to T である.

(b) $F_\bullet$ は liftable to T/I^2 である.

(c) $L_\bullet(F_\bullet) \otimes_T R \cong \oplus_{i=0}^r F_\bullet[-i]^{\binom{r}{i}}$

(d) $\{\Omega^r L_\bullet(F_\bullet)\} \otimes_T R \cong \oplus_{i=0}^r \Omega^i F_\bullet^{\binom{r}{i}}$

REMARK (2.3). 上記の定理は [**ADS; 3.6**] の精密化である.

§3. Marranda Theorem

§1 と同様 S は local ring, x は S 上の非零因子とする. また, $R = S/xS$ である. 今度は R 上の complex $G_\bullet$ が最初に与えられたとする.

DEFINITION (3.1). $n_x(G_\bullet) = \inf\{n \mid x^n \operatorname{Ext}^1_S(G_\bullet, \Omega G_\bullet) = 0\}$ ($\leq \infty$)

次の二つの定理によって表現論で重要な Marranda 定理の類似が成立することが分かる.

THEOREM (3.2). $G_\bullet$ と $H_\bullet$ が S 上の二つの minimal free complex であるとき, $n \geq n_x(G_\bullet)$ なる整数 n について

$$G_\bullet \otimes_S S/x^{n+1}S \cong H_\bullet \otimes_S S/x^{n+1}$$

が成立するならば $G_\bullet \cong H_\bullet$ である.

THEOREM (3.3). 上の仮定に付け加えて更に S が complete とする. もし $G_\bullet$ が S 上の minimal free complex で indecomposable であるとすると, $n \geq n_x(G_\bullet)$ なる n について $G \otimes_S S/x^{n+1}S$ もまた indecomposable である.

REMARK (3.4). S が complete のとき derived category $D^b_c(S)$ において Krull-Schmidt Theorem が成り立つことは容易に分かる.

一方 $D^+_c(S)$ では一般に可算個の indecomposable complex への分解ができるが, この分解が一意的かどうか知らない.

§4. Eisenbud resolution of complexes

S, x, R は §1 または §3 と同じとする. S 上の free complex $G_\bullet$ が与えられたとする.

DEFINITION (4.1). $\{s_i\}_{i\geq 0}$ が $G_\bullet$ の x に関する Shamash family of homomorphisms (Sh.f.h) であるとは, $s_i : G_\bullet \to G_\bullet$ (chain map というわけではない) であって次の条件を満たすときをいう.

(a) $s_0 = \partial^G_\bullet$
(b) $\deg(s_i) = 2i - 1$
(c) $s_0 s_1 + s_1 s_0 = x$
(d) $\sum_{i+j=n} s_i s_j = 0$ if $n \geq 2$

更に Sh.f.h. $\{s_i\}_{i\geq 0}$ が条件 $s_i \otimes_S S/\mathfrak{m}_S = 0$ $(i \geq 0)$ を満たすとき minimal であるという.

$G_\bullet$ が Sh.f.h. を持てば, $G_\bullet$ の全ての homology は R-module である. Shamash [S] によって $G_\bullet$ が R-module M の S-free resolution のときには, $G_\bullet$ は Sh.f.h. を持ち, 更に $x \in \mathfrak{m}_S \operatorname{Ann}_S(M)$ ならば minimal Sh.f.h. が存在する. 一般には,

LEMMA (4.2). $G_\bullet$ が次の条件を満たすときには Sh.f.h. を持つ.

$$x\,\mathrm{Ext}^0_S(G_\bullet, G_\bullet) = 0, \qquad \mathrm{Ext}^{2i}_S(G_\bullet, G_\bullet) = 0 \ \ (i \le -1)$$

また $G_\bullet$ が次の条件を満たすときには minimal Sh.f.h. を持つ.

$$x \in \mathfrak{m}_S \operatorname{Ann}_S(\mathrm{Ext}^0_S(G_\bullet, G_\bullet)), \qquad \mathrm{Ext}^{2i}_S(G_\bullet, G_\bullet) = 0 \ \ (i \le -1)$$

以下では $G_\bullet$ が Sh.f.h. $\{s_i\}$ を持つと仮定する. このとき $S[t]$ を $\deg t = -2$ とする多項式環, $S\langle\tau\rangle$ を $\deg\tau = 2$ とする divided power algebra とする. $S[t]$ は $t : \tau^{(i)} \to \tau^{(i-1)}$ によって $S\langle\tau\rangle$ に作用する.

DEFINITION (4.3). $\tilde{F}_\bullet = \tilde{F}_\bullet(G_\bullet, \{s_i\})$ を次のように与える.

$$\tilde{F}_\bullet = S\langle\tau\rangle \otimes_S G_\bullet, \qquad \partial^{\tilde{F}}_\bullet = \sum_{i\ge 0} t^i \otimes s_i$$

そして $F_\bullet(G_\bullet, \{s_i\}) = R \otimes_S \tilde{F}_\bullet(G_\bullet, \{s_i\})$ と定義する.

REMARK (4.4). $(\partial^{\tilde{F}}_\bullet)^2 = t\otimes x = xt\otimes 1$ となるので, $F_\bullet(G_\bullet, \{s_i\})$ は R 上の complex になる. 一方, $\tilde{F}_\bullet(G_\bullet, \{s_i\})$ は complex とは限らない. 上の等式から, t が $F_\bullet(G_\bullet, \{s_i\})$ の Eisenbud operator を与える事が分かる.

THEOREM (4.5). 自然な写像 $j : G_\bullet \to F_\bullet(G_\bullet, \{s_i\})$ $(g \mapsto 1 \otimes g)$ は quasi-isomorphism である.

$F_\bullet(G_\bullet, \{s_i\})$ には t 倍写像によっていつも degree -2 の chain endomap があることに注意しよう. 特に $G_\bullet$ が minimal complex で更に minimal Sh.f.h. を持つときには, 上の定理によって $G_\bullet$ 自信が degree -2 の chain endomap を持つことになる. このことから Ding [**D1**] の次の結果の非常に簡単な別証明が得られる.

COROLLARY (4.6). R-module M について $x \in \mathfrak{m}_S \operatorname{Ann}_S(M)$ が成立するとき, 任意の $n \ge 0$ に対して surjective homomorphism $\Omega^{n+2}_R(M) \to \Omega^n_R(M)$ が存在する. 特に R が Gorenstein のときに, デルタ不変量についての等式 $\delta^i_R(M) = 0$ $(i \ge 0)$ が成り立つ.

REFERENCES

[AB]. M.Auslander and R.O.Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations*, Soc. Math. de France Mem. **38** (1989), 5–37.

[ADS]. M.Auslander, S.Ding and Ø.Solberg, *Liftings and weak liftings of modules*, J. Algebra **156** (1993), 273–317.

[D1]. S.Ding, *Cohen-Macaulay approximation and multiplicity*, J. Algebra **153** (1992), 271–288.

[D2]. S.Ding, *A note on the index of Cohen-Macaulay rings*, Comm. in Algebra **21** (1993), 53–71.

[DS]. S.Ding and Ø.Solberg, *The Marranda theorem and liftings of moduels*, Comm. in Algebra **21** (1993), 1161–1187.

[E]. D.Eisenbud, *Homological algebra on a complete intersection with an application to group representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), 35–64.

[H]. J.Herzog, *On two dimensional quasihomogeneous singularities II*, Arch. Math. **59** (1992), 556–561.

[HM]. J.Herzog and A.Martsinkovsky, *Gluing Cohen-Macaulay modules with applications to quasihomogeneous complete intersections with isolated singularities*, Comment. Math. Helvetici **68** (1993), 365–384.

[M1]. A.Martsinkovsky, *Almost split sequences and Zariski differentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), 285–307.

[M2]. A.Martsinkovsky, *Maximal Cohen-Macaulay modules and the quasihomogeneity of isolated singularities*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 9–18.

[M3]. A.Martsinkovsky, *On two dimensional quasihomogeneous singularities I*, Arch. Math. **59** (1992), 550–555.

[S]. J.Shamash, *The Poincaré series of a local ring*, J. Algebra **12** (1969), 453–470.

[Y1]. Y.Yoshino, "Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings," Cambridge University Press (Lecture Notes of London Math. Soc.), 1990.

[Y2]. Y.Yoshino, *Cohen-Macaulay approximations*, 多元環の表現論シンポジウム報告集（伊豆）(1993).

[Y3]. Y.Yoshino, "明治大学集中講義ノート," 1993.

A RELATIONSHIP BETWEEN MODULES OF FINITE PROJECTIVE DIMENSION AND MODULES OF FINITE INJECTIVE DIMENSION

TAKESI KAWASAKI

Tokyo Metropolitan University

October 20, 1993

ABSTRACT. Let A be a Cohen-Macaulay local ring possessing the canonical module K_A and M a finitely generated A-module of finite projective dimension. Then M is Cohen-Macaulay if and only if so is $M \otimes_A K_A$. Furthermore if $M \otimes_A K_A$ is surjective-Buchsbaum, then so is M. But the converse is not true in general.

1. INTRODUCTION

Let A be a d-dimensional Noetherian local ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$. A finitely generated A-module K_A is said to be the canonical module of A if $K_A \otimes_A \hat{A} \cong H^d_{\mathfrak{m}}(A)^\vee$, where $(-)^\vee$ denotes the Matlis dual. If K_A exists, then it is unique up to isomorphisms and $\dim_A K_A = d$. Furthermore if A is Cohen-Macaulay, then we have the following facts:

Facts. *If A is Cohen-Macaulay and K_A exists, then*

(1) *A is Gorenstein if and only if $K_A \cong A$;*
(2) *K_A is a maximal Cohen-Macaulay module of finite injective dimension, furthermore the type of K_A is one—that is, $\mu^d_A(K_A) = 1$. Here a A-module said to be maximal if its dimension is equal to d and $\mu^i_A(-)$ denotes the i-th Bass number* [2];
(3) *arbitrary maximal Cohen-Macaulay module of finite injective dimension is a direct sum finite copies of K_A* [12].

The fact (3) is simular to the fact that, over a Cohen-Macaulay local ring, a maximal Cohen-Macaulay module of finite projective dimsnion is free [1]. *Do there exist other parallelism between modules of finite injective dimension and modules of finite projective dimension?* We shall give a one-to-one correspondence between isomorphism classes of finitely generated modules of finite injective dimension and isomorphism classes of finitely generated modules of finite projective dimension. And we explore the *surjective-Buchsbaum* property of modules. The main result of this report is the following.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 13C13, 13D05, Secondary: 13H10.

Key words and phrases. surjective-Buchsbaum modules, projective dimenision, injective dimension, Cohen-Macaulay ring, canonical module.

Theorem 3.3. *Let A be a Cohen-Macaulay local ring possessing the canonical module K_A and M a finitely generated A-module of finite projective dimension. Then $M \otimes_A K_A$ has finite injective dimension, and if $M \otimes_A K_A$ is a surjective-Buchsbaum A-module, then so is M.*

But the converse of Theorem 3.3 is not true in general. In section 4, we construct a counter example of the converse.

Throughout this report, A denotes a Cohen-Macaulay local ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$. We assume that there is the canonical module K_A of A and $d = \dim A > 0$.

2. The functor $(-) \otimes_A K_A$

In this section, we explore the functor $(-) \otimes_A K_A$. Let M be a finitely generated A-module of finite projective dimension and

$$\mathbb{F}_\bullet : 0 \to F_t \to F_{t-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to 0$$

be the minimal free resolution of M where $F_t \neq 0$. Then we have the following exact sequence:

$$0 \to F_t \otimes_A K_A \to \cdots \to F_0 \otimes_A K_A \to M \otimes_A K_A \to 0$$

by the following lemma which was given by Buchsbaum and Eisenbud [4], and so $M \otimes_A K_A$ has finite injective dimension. If A is Gorenstein, then the functor is naturally the identity functor.

Lemma 2.1. *Let M be a finitely generated module over a Noetherian ring R and*

$$\mathbb{F}_\bullet : 0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

be a complex of finitely generated free R-modules. Let $r_i = \sum_{j=i}^{n}(-1)^{j-i} \operatorname{rank} F_j$ and $I_{r_i}(\varphi_i)$ denotes the ideal of R generated by the r_i-th minors of φ_i. Then the following statements are equivalent:

(1) $\mathbb{F}_\bullet \otimes_R M$ *is acyclic;*
(2) $\operatorname{grade}(I_{r_i}(\varphi_i), M) \geq i$ *for all* $i \geq 1$.

In particular, $\mathbb{F}_\bullet \otimes_R M$ is acyclic if and only if $\mathbb{F}_\bullet$ is acyclic, when R is a Cohen-Macaulay local ring and M is a maximal Cohen-Macaulay R-module.

This functor gives a one-to-one correspondence between isomorphism classes of finitely generated modules of finite projective dimension and isomorphism classes of finitely generated modules of finite injective dimension. We have to state a definition of a dualizing complex to show univalentness of the functor.

Definition 2.2. Let $\mathbb{I}^\bullet$ be the minimal injective resolution of K_A. A dualizing complex ,denoted by $D_A^\bullet$, of a Cohen-Macaulay ring A is definited to be $\mathbb{I}^\bullet(d)$.

Let $D(-) := \operatorname{Hom}_A(-, D_A^\bullet)$. Then the following result is fundamental.

Lemma 2.3. ([10] and [13]) *Let M be a finitely generated A-module. Then*

(1) *the canonical morphism $M \to DD(M)$ is a quism;*
(2) $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = H^{-i}(D(M))^\vee$ *for all i;*
(3) $\beta_i^A(M) = \mu_A^i(D(M))$ *and* $\beta_i^A(D(M)) = \mu_A^i(M)$ *for all i, where $\beta_i^A(-)$ denotes the i-th Betti number.*

In above situation, we have the following diagram of quisms:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{F}^*_\bullet(-d) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\mathbb{F}_\bullet, D(D^\bullet_A)(-d)) \\ & & & & \downarrow \\ D(M \otimes_A K_A) & \longrightarrow & D(\mathbb{F}_\bullet \otimes_A K_A) & = & \mathrm{Hom}_A(\mathbb{F}_\bullet, D(K_A)), \end{array}$$

where $(-)^*$ denotes A-dual. And so $\mathbb{F}^*_\bullet(-d)$ is a minimal free resolution of $D(M \otimes_A K_A)$ and $\mu_A^i(M \otimes_A K_A) = \beta^A_{d-i}(M)$. Hence we have $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} M \otimes_A K_A = d - t$.

Next we consider the inverse functor of $(-) \otimes_A K_A$. Let N be a finitely generated A-module of finite injective dimenision and $\mathbb{G}_\bullet$ the minimal free resolution of $D(N)$ with differentiations $\partial_\bullet$. We put $t = \operatorname{depth} N$. Recall that $G_i = 0$ for all $i > d$. Because $(K_A)_\mathfrak{p} = K_{A_\mathfrak{p}}$, for any prime ideal $\mathfrak{p}$ we have $D_{A_\mathfrak{p}} = (D_A)_\mathfrak{p}(-\dim A/\mathfrak{p})$. And so let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of A such that $\dim A/\mathfrak{p} = s$. Then

$$(F_s)_\mathfrak{p} \to (F_{s-1}) \to \cdots \to (F_t)_\mathfrak{p} \to 0$$

is exact and sprit, hence $\dim A/I_{r_i}(\partial_i) \leq i - 1$ where $r_i = \sum_{j=t}^{i-1} (-1)^{j-i+1} \operatorname{rank} G_j$. Therefore $\mathbb{G}^*_\bullet$ is acyclic by Lemma 2.1. Let $M := \operatorname{Coker}(\partial_d)^*$. Then M has finite projective dimension and $\mathbb{G}^*_\bullet(d)$ is its minimal free resolution. Clearly the functor $N \mapsto M$ is the inverse functor of $(-) \otimes_A K_A$.

Theorem 2.4. *Let M be a finitely generated A-module of finite projective dimension. Then*

(1) *M is Cohen-Macaulay if and only if so is $M \otimes_A K_A$;*
(2) *M has finite local cohomologies if and only if so does $M \otimes_A K_A$.*

Proof.
(1) Since $\operatorname{Supp}_A K_A = \operatorname{Spec} A$, we have $\operatorname{Supp}_A M \otimes_A K_A = \operatorname{Supp}_A M$ and $\dim_A M = \dim_A M \otimes_A K_A$. On the other hand, we had shown that $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} M \otimes_A K_A$.

(2) Since there is a dualizing complex, M has finite local cohomologies if and only if M is equidimensional and $M_\mathfrak{p}$ is Cohen-Macaulay for all $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_A M \setminus \{\mathfrak{m}\}$ [11]. Passing to the localization, we have the assersion. □

3. Surjective-Buchsbaum modules

In this section, we explore surjective-Buchsbaum modules.

Definition 3.1. A finitely generated A-module M is said to be surjective-Buchsbaum if the canonical map

$$\mathrm{Ext}_A^i(A/\mathfrak{m}, M) \to H_\mathfrak{m}^i(M)$$

is surjective for all $i \neq \dim_A M$.

A surjective-Buchsbaum module is Buchsbaum [15] and has finite local cohomologies. Naturally, every Cohen-Macaulay module M is surjective-Buchsbaum, because $H_\mathfrak{m}^i(M) = 0$ for all $i \neq \dim_A M$.

The following lemma is called the Bass number criterion and due to Yamagishi [16]. Since it plays key role in our result, we give a brief proof.

Lemma 3.2. *Let M be a finitely generated A-module with finite local cohomolofies and assume that $s = \dim_A M > 0$. Then we have the following inequalities:*

$$\mu_A^i(M) \leq \sum_{j=0}^{i} \beta_j^A(A/\mathfrak{m}) \cdot \ell_A(H_\mathfrak{m}^{i-j}(M)) \quad \text{for all } i < s. \tag{3.2.1}$$

Furthermore the following statements are equivalent to each other:

(1) *M is surjective-Buchsbaum;*
(2) *the equalities in* (3.2.1) *hold for all $i < s$.*

Proof. Take the minimal injective resolution $\mathbb{I}^\bullet$ of M and the minimal free resolution $\mathbb{F}_\bullet$ of $A/\mathfrak{m}$. Then the double complex $C^{\bullet\bullet} = \mathrm{Hom}_A(\mathbb{F}_\bullet, H_\mathfrak{m}^0(\mathbb{I}^\bullet))$ gives rise to a spectral sequence (E_r^{pq}, d_r^{pq}) such that

$$E_1^{pq} = \mathrm{Hom}_A(F_p, H_\mathfrak{m}^q(M)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{p+q}(A/\mathfrak{m}, M),$$

and that the composition map

$$\mathrm{Ext}_A^q(A/\mathfrak{m}, M) \twoheadrightarrow E_\infty^{0q} \hookrightarrow E_1^{0q}$$

is equal to the canonical map $\mathrm{Ext}_A^q(A/\mathfrak{m}, M) \to H_\mathfrak{m}^q(M)$. Therefore we have the inequalities (3.2.1) and

$$\begin{aligned} \text{the equalities in (3.2.1) hold} &\iff d_r^{pq} = 0 \text{ for all } q \neq s \\ &\iff M \text{ is surjective-Buchsbaum.} \quad \square \end{aligned}$$

Next we state the main result of this report.

Theorem 3.3. *Let M be a finitely generated A-module of finite projective dimennsion. If $M \otimes_A K_A$ is surjective-Buchsbaum, then so is M.*

Proof. We may assume that A is complete. Let $\mathbb{F}_\bullet$ be the minimal free resolution of M and $\mathbb{G}_\bullet$ the minimal free resolution of K_A. Then we have the following quisms:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_\bullet^*(-d) \otimes_A \mathbb{G}_\bullet \arrow[r] & \mathbb{F}_\bullet^*(-d) \otimes_A K_A \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_A(\mathbb{F}_\bullet, K_A(-d)) \arrow[d] \\ & D(M) \arrow[r] & D(\mathbb{F}_\bullet), \end{tikzcd} \tag{3.3.1}$$

so that $\mathbb{F}_\bullet^*(-d) \otimes_A \mathbb{G}_\bullet$ is a minimal free resolution of $D(M)$ and

$$\mu_A^i(M) = \sum_{j=0}^{i} \operatorname{rank} G_j \cdot \operatorname{rank} F_{d+j-i}. \tag{3.3.2}$$

Furthermore the double complex $\mathbb{F}_\bullet^*(-d) \otimes_A \mathbb{G}_\bullet$ gives a spectral sequence

$$E_1^{pq} = H_{\mathfrak{m}}^p(M \otimes_A K_A)^\vee \otimes G_q \Longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{p+q}(M)^\vee,$$

where we used the fact that $\mathbb{F}_\bullet^*(-d)$ is the minimal free resolution of $D(M \otimes_A K_A)$ and A is complete. Hence we have

$$\ell_A(H_{\mathfrak{m}}^i(M)) \leq \sum_{j=0}^{i} \operatorname{rank} G_j \cdot \ell_A(H_{\mathfrak{m}}^{i-j}(M \otimes_A K_A)). \tag{3.3.3}$$

On the other hand, since $M \otimes_A K_A$ is surjective-Buchsbaum,

$$\mu_A^i(M \otimes_A K_A) = \sum_{j=0}^{i} \beta_j^A(A/\mathfrak{m}) \cdot \ell_A(H_{\mathfrak{m}}^{i-j}(M \otimes_A K_A)) \quad \text{for all } i < s. \tag{3.3.4}$$

By (3.3.2), (3.3.3) and (3.3.4), we find

$$\begin{aligned}
\mu_A^i(M) &= \sum_{j=0}^{i} \operatorname{rank} G_j \cdot \operatorname{rank} F_{d+j-i} \\
&= \sum_{\substack{0 \leq j,k \\ j+k \leq i}} \beta_k^A(A/\mathfrak{m}) \cdot \operatorname{rank} G_j \cdot \ell_A(H_{\mathfrak{m}}^{i-j-k}(M \otimes_A K_A)) \\
&\geq \sum_{k=0}^{i} \beta_k^A(A/\mathfrak{m}) \cdot \ell_A(H_{\mathfrak{m}}^{i-k}(M)) \quad \text{for all } i < s.
\end{aligned}$$

Thus M is surjective-Buchsbaum. □

4. A counter example

The converse of Theorem 3.3 is not true in general. We have the following example.

Example 4.1. Let A be a Cohen-Macaulay complete local ring which is not Gorenstein. Suppse that $d = \dim A \geq 2$ and $v = \operatorname{embdim} A = d + 2$. Let $(\mathbb{K}_\bullet, d_\bullet)$ be a Koszul complex generated by a minimal base of $\mathfrak{m}$ over A and $M := \operatorname{Coker} d_{v-1}$. Then M is a surjective-Buchsbaum module of finite projective dimension. But $M \otimes_A K_A$ is not surjective-Buchsbaum.

Proof. Since $\operatorname{depth} A \geq 2$,

$$0 \to A \to A^v \to A^{\binom{v}{2}} \to M \to 0$$

is exact and M has finite projective dimension. By localization at minimal prime of A, we find $\dim_A M = d$. Recall that $\chi(M) \neq 0$ means that M is faithful [8, Theorem 195]. We will show that M is surjective-Buchsbaum but $M \otimes_A K_A$ is not surjective-Buchsbaum. By the assumption, there is a regular local ring B with maximal ideal $\mathfrak{n}$ such that $\dim B = v$ and $A = B/\mathfrak{a}$, where $\mathfrak{a}$ is a perfect ideal of B of height two. Since we know the minimal free resolution of M, we can compute the local cohomology modules of M by (3.3.1), we have

$$\begin{aligned} H^i_{\mathfrak{m}}(M) &= H_{i-d+2}(\mathfrak{m}; K_A)^\vee \\ &= \operatorname{Tor}^B_{i-d+2}(B/\mathfrak{n}, K_A)^\vee, \quad \text{for all } i < d \end{aligned}$$

and

$$\ell_A(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \begin{cases} \beta_1^B(K_A) & i = d-1; \\ \beta_0^B(K_A) & i = d-2; \\ 0 & \text{for all } i < d-2. \end{cases}$$

Furthermore by (3.3.2), we have

$$\mu_A^i(M) = \begin{cases} \beta_1^A(K_A) + \beta_0^A(K_A) \cdot v & i = d-1; \\ \beta_0^A(K_A) & i = d-2; \\ 0 & \text{for all } i < d-2. \end{cases}$$

On the other hand, we have

$$\mu_A^i(M \otimes_A K_A) = \begin{cases} v & i = d-1; \\ 1 & i = d-2; \\ 0 & \text{for all } i < d-2, \end{cases}$$

and

$$\ell_A(H^i_{\mathfrak{m}}(M \otimes_A K_A)) = \begin{cases} \beta_1^B(A) & i = d-1; \\ 1 & i = d-2; \\ 0 & \text{for all } i < d-2. \end{cases}$$

Next we compute Betti numbers of K_A and $\beta_1^B(A)$. By Hilbert and Burch's theorem [3], there is the following exact sequence:

$$0 \to B^n \xrightarrow{f} B^{n+1} \xrightarrow{g} B \to A \to 0,$$

where $f = (f_{ij})$ is a $(n+1) \times n$ matrix and $g = (g_i)$ is a $1 \times (n+1)$ matrix such that g_j is the determinant of the matrix obtained from f by omitting the j-th row. Since $K_A = \operatorname{Ext}^2_B(A, B)$, we have $\beta_0^A(K_A) = \beta_0^B(K_A) = n$ and $\beta_1^B(K_A) = n+1 = \beta_1^B(A)$. A direct computation shows that $\mathfrak{a}B^n \subset \mathfrak{n} \operatorname{Im} f^*$; for example,

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = f^* \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n+1} \end{pmatrix}$$

where $(-)^*$ denotes B-dual and d_j is the determinant of the matrix obtained from f omitting the first and j-th rows and the first column for all $j > 1$. Hence we have $\beta_1^A(K_A) = n+1$, because $\beta_1^A(K_A) = \mu_A(\mathrm{Im}(f^* \otimes_B A))$. And so we have the assertion by the Bass number criterion. □

Furthermore we can construct infinitely many such modules if $A/\mathfrak{m}$ is infinite field [9].

References

1. Auslander, M. and Buchsbaum, D., *Homological dimension in local rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 390–405.
2. Bass, H., *On the ubiquity of Gorenstein rings*, Math. Z. **82** (1963), 8–28.
3. Burch, L., *On ideals of finite homological dimension in local rings*, Proc. Camb. Phil. Soc. **64** (1968), 941–948.
4. Buchsbaum, D. and Eisenbud, D., *What makes a complex exact?*, J. Algebra **25** (1973), 259–268.
5. Cartan, H. and Eilenberg, S., *Homological algebra*, Princeton, 1956.
6. Hall, J. E., *Fundamental dualizing complexes for commutative Noetherian rings*, Quart. J. Math. Oxford (2) **30** (1979), 21–32.
7. Herzog, J. and Kunz, E., *Der Kanonische Modul eine Cohen-Macaulay-Rings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 238, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1971.
8. Kaplansky, I., *Commutative Rings*, Univ. of Chicago Press, 1974.
9. Kawasaki, T., *Surjective-Buchsbaum modules over Cohen-Macaulay local rings* (to appear in Math. Z.).
10. Roberts, P., *Homological invariants of modules over commutative rings*, Séminaire de Math. Sup. no. 72, Les Press de l'Université de Montréal, 1980.
11. Schenzel, P., Trung, N. V. and Cuong, N. T., *Verallemeinerte Cohen-Macaulay-Moduln*, Math. Nachr. **85** (1978), 57–73.
12. Sharp, R. Y., *On Gorenstein modules over a complete Cohen-Macaulay local ring*, Quart. J. Math. Oxford (2) **22** (1971), 425–434.
13. Sharp, R. Y., *Dualizing complexes for commutative Noetherian rings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **78** (1975), 369–386.
14. Stückrad, J. and Vogel, W., *Buchsbaum Rings and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1986.
15. Stückrad, J. and Vogel, W., *Toward a theory of Buchsbaum singularities*, Amer. J. Math. **100** (1978), 727–746.
16. Yamagishi, K., *Bass number characterization of surjective-Buchsbaum modules*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **110** (1991), 261–279.

Department of Mathematics
Tokyo Metropolitan University
Hachioji-shi Minami-Ohsawa 1–1
Tokyo 192–03 Japan
E-mail address: kawasaki@math.metro-u.ac.jp

Graded rings associated to ideals of higher analytic deviation

中村幸男

東京都立大学

1 序

この研究は, 後藤四郎氏, 西田康二氏との共同研究によるものである. 可換な Noether 局所環 (A, m) 上のイデアル I に対して, Rees algebra $R(I) = \oplus_{n\geq 0} I^n t^n \subseteq A[t]$ (t は A 上の不定元) および associated graded algebra $G(I) = R(I)/IR(I)$ の Cohen-Macaulay 性, Gorenstein 性について考察する. $R(I)$ の性質と $G(I)$ の性質との相互関係については一般論が展開されており, $R(I)$ の性質は $G(I)$ の Cohen-Macaulay 性, Gorenstein 性, a-invariant 等で特徴付けられることが多い. 従って, 問題は $G(I)$ の性質がどのように局所環 A やイデアル I の性質で 言い表すことができるかということになる.

$G(I) \otimes_A A/\mathrm{m}$ のクルル次元を analytic spread と呼び, $\lambda(I)$ で表すことにする. これは I の minimal reduction を J としたときの, J の極小生成元の個数と等しいことが知られている (cf. [11]). 特に $J = (a_1, a_2, ..., a_{\lambda(I)})$ が次の性質を持つとき J は special reduction と呼ばれる.

$$I_Q = (a_1, a_2, ..., a_{\mathrm{ht}_A Q})A_Q \quad \text{for all} \quad Q \in V(I) \quad \text{with} \quad \mathrm{ht}_A Q < \lambda(I)$$

J は I の reduction であるから, ある自然数 n で $I^{n+1} = JI^n$ となるものが存在する. 特に $r_J(I) = \min\{n | I^{n+1} = JI^n\}$ とおき, これを J に関する I の reduction number と呼ぶ. $\mathrm{ad}(I) = \lambda(I) - \mathrm{ht}_A I$ とおくことにする. これは非負整数となり, I の analytic deviation と呼ばれる. analytic deviation が小さいイデアル I に関する, $G(I)$ の性質については, 次の事が知られている.

定理 1.1 *(cf. [1]). A は Cohen-Macaulay 環, I は special reduction J を持ち,* $\mathrm{ad}(I) = 1$, *$G(I)$ は Cohen-Macaulay とする. このとき* $a(G(I)) = \max\{r_J(I) - \lambda(I), \mathrm{ht}_A I\}$ である.

ここで $a(G(I))$ は $G(I)$ の a-invariant のこととし, これは M を $G(I)$ の graded な極大イデアル, $\dim G(I) = d$ としたとき, $a(G(I)) = \max\{n \mid [H_M^d(G(I))]_n \neq (0)\}$ で定まるものである. $G(I)$ の Cohen-Macaulay 性については,

定理 1.2 *(cf. [6]). A は Cohen-Macaulay 環, I は special reduction J を持ち,* $\mathrm{ad}(I) = 1$, $r_J(I) \leq 1$ とする. このとき次は同値である.

(1) $G(I)$ *が Cohen-Macaulay 環である.*

(2) $\operatorname{depth} A/I \geq \dim A/I - 1$.

定理 1.3 *(cf. [2]). A は Cohen-Macaulay 環, I は special reduction J を持ち,* $\mathrm{ad}(I) = 1$, $r_J(I) \leq 2$, *A/I は Cohen-Macaulay とする. このとき次は同値である.*

(1) $G(I)$ *が Cohen-Macaulay 環である.*

(2) $\operatorname{depth} A/I^2 \geq \dim A/I - 1$.

定理 1.4 *(cf. [3]). A は Gorenstein 環, I は special reduction J を持ち,* $\mathrm{ad}(I) = 2$, $r_J(I) \leq 2$, *A/I は Cohen-Macaulay とする. このとき次は同値である.*

(1) $G(I)$ *が Cohen-Macaulay 環である.*

(2) $\operatorname{depth} A/I^2 \geq \dim A/I - 2$.

さらにこのとき $a(G(I)) = \max\{r_J(I) - \lambda(I), \mathrm{ht}_A I\}$ である.

$G(I)$ の Gorenstein 性については,

定理 1.5 *(cf. [2]). A は Gorenstein 環, I は special reduction J を持ち,* $\mathrm{ad}(I) = 1$, *A/I は Cohen-Macaulay とする. このとき次は同値である.*

(1) $G(I)$ *が Gorenstein 環である.*

(2) $r_J(I) = 0$.

定理 1.6 *(cf. [4]). A は Gorenstein 環, I は special reduction J を持ち,* $\mathrm{ad}(I) = 2$, *A/I は Cohen-Macaulay とする. このとき次は同値である.*

(1) $G(I)$ *が Gorenstein 環である.*

(2) $r_J(I) \leq 1$.

今回報告したのは analytic deviation が一般の場合における結果である．まず $G(I)$ の a-invariant については，

定理 1.7 *I は special reduction J をもつものとする．もし，$G(I)$ が Cohen-Macaulay ならば，$a(G(I)) = \max\{r_J(I) - \lambda(I), \mathrm{ht}_A I\}$ である．*

$G(I)$ の Cohen-Macaulay 性については，

定理 1.8 *A は Cohen-Macaulay 環，I は special reduction J を持ち，次をみたすものとする．*

(a) $\mathrm{depth}(A/I^n)_Q \geq \min\{\mathrm{ad}(I) - n, \mathrm{ht}_A Q - \mathrm{ht}_A I - n\}$ *for* $Q \in V(I)$ *and* $1 \leq n \leq \mathrm{ad}(I)$.

(b) $\mathrm{depth}\, A/I^n \geq \dim A/I + 1 - n$ *for* $1 \leq n \leq \mathrm{ad}(I)$.

このとき，もし $r_J(I) \leq \mathrm{ad}(I)$ ならば $G(I)$ は Cohen-Macaulay 環である．

Gorenstein 性については，次の結果が得られた．

定理 1.9 *A は Gorenstein 環，I は special reduction J を持ち，A/I は Cohen-Macaulay 環で，次をみたすものとする．*

(a) $\mathrm{depth}(A/I^n)_Q \geq \min\{\mathrm{ad}(I) - n, \mathrm{ht}_A Q - \mathrm{ht}_A I - n\}$ *for* $Q \in V(I)$ *and* $1 \leq n \leq \mathrm{ad}(I)$.

(b) $\mathrm{depth}\, A/I^n \geq \dim A/I - n$ *for* $1 \leq n \leq \mathrm{ad}(I)$.

このとき次は同値である．

(1) $G(I)$ *は Gorenstein 環である．*

(2) $r_J(I) \leq \mathrm{ad}(I) - 1$.

analytic deviation が 3 の場合は更に詳しく次の事が得られた．

定理 1.10 ． *A は Gorenstein 環，I は special reduction J を持ち，A/I は Cohen-Macaulay 環で，$\mathrm{ad}(I) = 3$，$r_J(I) \leq 2$ とする．このとき次は同値である．*

(1) $G(I)$ *は Cohen-Macaulay 環である．*

(2) $\operatorname{depth} A/I^2 \geq \dim A/I - 3$.

系 1.11 . *A は Gorenstein 環, I は special reduction J を持ち, A/I は Cohen-Macaulay 環で,* $\operatorname{ad}(I) = 3$ *とする. もし* $\operatorname{depth} A/I^2 \geq \dim A/I - 2$ *ならば, 次は同値である.*

(1) $G(I)$ *は Gorenstein 環である.*

(2) $r_J(I) \leq 2$.

定理 1.12 . *A は Gorenstein 環, I は special reduction J を持ち, A/I は Cohen-Macaulay 環で,* $\operatorname{ad}(I) = 3$ *とする. もし* $r_J(I) \leq 1$ *ならば, つぎは同値である.*

(1) $G(I)$ *は Gorenstein 環である.*

(2) $\operatorname{depth} A/I^2 \geq \dim A/I - 2$.

以下, 本稿では定理 1.9 の証明を述べていくつもりである. 今回得られた結果は, 定理 1.9 も含め [5] にまとめてあるので, 参考にして頂ければ幸いである.

2 準備

A は剰余体が無限体の d-次元 Cohen-Macaulay 局所環で極大イデアル $\mathfrak{m}$ をもつものとする. I は A のイデアルで, $s = \operatorname{ht}_A I$, $\ell = \lambda(I)$ とおき, special reduction $J = (a_1, a_2, ..., a_\ell)A$ をもつものとする. 各 $i \leq \ell$ について, $J_i = (a_1, a_2, ..., a_i)A$ とおく.

補題 2.1 *(cf. [10, Lemma (3.2)]). J の生成系 $a_1, a_2, ..., a_\ell$ は, 各 i $(1 \leq i \leq \ell)$ について, $a_i \notin \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q$, 但し $\mathcal{F} = (\operatorname{Ass} A \cup \operatorname{Ass}_A A/J_{i-1}) \setminus V(I)$, と取ることができる.*

以下, 上を満足する様な J の生成系 $a_1, a_2, ..., a_\ell$ を一つ固定して考える.

系 2.2 . *(1)(cf. [10, Corollary (3.3)]) $s \geq 1$ なら, $a_1, a_2, ..., a_s$ は A-正則列をなす.*

(2) (cf. [10, Corollary (3.4)]) $\ell \geq 1$ なら, $1 \leq i \leq \ell$ に対して $((0) : a_i) \cap I = (0)$.

補題 2.3 *(cf. [10, Claim 1 in Proof of Lemma (3.5)]). 定理 1.9 の条件 (a) を仮定する. もし $0 \leq n < \operatorname{ad}(I)$ かつ $0 \leq i \leq n + s$ ならば, $(J_i : a_{i+1}) \cap I^{n+1} = J_i I^n$ である.*

系 2.4 . *定理 1.9 の条件 (a) を仮定し, n と i は 補題 2.3 の様にとったものとする. このとき $J_{i+1} I^{n+1} / J_i I^{n+1} \cong I^{n+1} / J_i I^n$ である.*

証明：補題 2.3 より, $J_iI^{n+1} \cap a_{i+1}I^{n+1} = a_{i+1}((J_i : a_{i+1}) \cap I^{n+1}) = a_{i+1}J_iI^n$ となるので, 次の同型が得られる.

$$\begin{aligned} J_{i+1}I^{n+1}/J_iI^{n+1} &\cong a_{i+1}I^{n+1}/J_iI^{n+1} \cap a_{i+1}I^{n+1} \\ &= a_{i+1}I^{n+1}/a_{i+1}J_iI^n \end{aligned}$$

自然な全射 $I^{n+1} \xrightarrow{a_{i+1}} a_{i+1}I^{n+1}/a_{i+1}J_iI^n$ の kernel の元 $x \in I^{n+1}$ をとる. このとき, $a_{i+1}x = a_{i+1}y$ となる $y \in J_iI^n$ が存在し, 系 2.2(2) より $x - y \in ((0) : a_{i+1}) \cap I = (0)$ となる. 故に $x \in J_iI^n$ であり, 求める同型 $J_{i+1}I^{n+1}/J_iI^{n+1} \cong I^{n+1}/J_iI^n$ が得られる.

系 2.5 . 定理 *1.9* の条件 *(a)* を仮定し, $r_J(I) \leq \mathrm{ad}(I)$ かつ $0 \leq i \leq \ell$ とする. このとき $n \geq i - s$ に対して, $J_i \cap I^{n+1} = J_iI^n$ となる.

証明：i に関する帰納法で示す. $i = \ell$ ならば, reduction number に関する条件から直ちに従う. $i < \ell$ とし $n \geq i + 1 - s$ のとき $J_{i+1} \cap I^{n+1} = J_{i+1}I^n$ が成り立つと仮定する. n に関する帰納法で求める等式を導こう. 補題 2.3 より $i - s \geq 0$ ならば, $J_i \cap I^{i-s+1} \subseteq (J_i : a_{i+1}) \cap I^{i-s+1} = J_iI^{i-s}$, よって $J_i \cap I^{i-s+1} = J_iI^{i-s}$. この等式は $i - s < 0$ のときも自明に正しい. 故に $n = i - s$ のとき主張は正しい. $n \geq i - s + 1$ とし $J_i \cap I^n = J_iI^{n-1}$ が成り立つと仮定する. すると i に関する帰納法の仮定を用いて,

$$\begin{aligned} J_i \cap I^{n+1} &\subseteq J_i \cap J_{i+1} \cap I^{n+1} = J_i \cap J_{i+1}I^n = J_i \cap (J_iI^n + a_{i+1}I^n) \\ &= \ J_iI^n + J_i \cap a_{i+1}I^n \subseteq J_iI^n + a_{i+1}((J_i : a_{i+1}) \cap I^{i-s+1} \cap I^n) \end{aligned}$$

更に補題 2.3 と n に関する帰納法の仮定を用いれば,

$$\text{最右辺} \ \subseteq \ J_iI^n + a_{i+1}(J_i \cap I^n) = J_iI^n + a_{i+1}J_iI^{n-1} = J_iI^n.$$

よって求める等式が得られる.

$a_1, a_2, \ldots, a_s$ は A-列をなすことに注意すれば, 系 2.5 と [12, Corollary 2.7] により次の系を得る.

系 2.6 . 定理 *1.9* の条件 *(a)* を仮定し, $r_J(I) \leq \mathrm{ad}(I)$ かつ $s \geq 1$ とする. このとき a_1t, $a_2t, \ldots, a_st$ は $G(I)$-正則列をなす.

A が Gorenstein であれば, 補題 2.3 に加えて次のことも言える.

補題 2.7 *(cf. [10, Claim in Proof of Lemma (3.11)]).* A は *Gorenstein* 環で, A/I は *Cohen-Mcaulay* であるとする. このとき, $s < i < \ell$ に対して, $(J_i : a_{i+1}) \cap I^{i-s} = J_iI^{i-s-1}$ である.

3　定理 1.9 の証明

記号および状況設定は, 前節のものを継承するものとする. 但し A は Gorenstein 環で, A/I は Cohen-Macaulay で $\mathrm{ad}(I)>0$ と仮定する. special reduction の定義から $\mathrm{ht}_A I+J_i:I>i$ となるので, $s+1\leq i\leq \ell$ について, $x_i\in J_i:I$ となる A/I の s.s.o.p. $x_{s+1},\ldots,x_\ell\in \mathrm{m}$ がとれる. さらに $x_{\ell+1},\ldots,x_d\in\mathrm{m}$ を $x_{s+1},\ldots,x_\ell,x_{\ell+1},\ldots,x_d$ が A/I の s.o.p. となるように取っておく.

補題 3.1 *$a_1t,\ldots,a_st,\ x_{s+1}-a_{s+1}t,\ldots,x_\ell-a_\ell t,\ x_{\ell+1},\ldots,x_d$ は $G(I)_M$ の s.o.p. をなす. 但し, M は $G(I)$ の graded な極大イデアルとする.*

証明 : N を $R(I)$ の graded な極大イデアルとする. $\mathrm{b}=(a_1t,\ldots,a_st,\ x_{s+1}-a_{s+1}t,\ \ldots,\ x_\ell-a_\ell t,\ x_{\ell+1},\ldots,x_d)R(I)+IR(I)$ とおく. $N=\sqrt{\mathrm{b}}$ を示せばよい. それには i に関する帰納法で, $1\leq i\leq\ell$ に対し $a_it\in\sqrt{\mathrm{b}}$ となることを言えばよい. $1\leq i\leq s$ に対しては, 明らかに $a_it\in\sqrt{\mathrm{b}}$ である. $i>s$ とし, $a_1t,\ldots,a_{i-1}t\in\sqrt{\mathrm{b}}$ と仮定する. $x_i^2\equiv x_ia_it \bmod \mathrm{b}$ であり, x_i の取り方より $x_i^2\in\mathrm{b}+(a_1t,\ldots,a_{i-1}t)R$ となり, 帰納法の仮定より $x_i\in\sqrt{\mathrm{b}}$ となり, その結果 $a_it\in\sqrt{\mathrm{b}}$ が得られる.

$S=G(I/J_s)$, $T=G(I+(J_s:I)/J_s:I)$ とおく. J が special reduction であるということから, 自然な全射 $S\to T$ の kernel は, 0-次のみからなり, しかも $J_s:I/J_s$ と同型になることが確かめられる. A は Gorenstein なので, これは A/I の canonical module $K_{A/I}$ と同型となり, 故に次の完全列を得る.

$$0\to K_{A/I}\to S\to T\to 0 \tag{1}$$

命題 3.2 *もし $G(I)$ が Gorenstein 環 ならば, $r_J(I)\leq \mathrm{ad}(I)-1$ である.*

証明 : 補題 3.1 より $a_1t,\ a_2t,\ \ldots,\ a_st$ は $G(I)$-列であるので, S は $d-s$ 次元 Gorenstein 環. $r=r_J(I)$ とおく. J/J_s は I/J_s の special reduction であり, $r_{J/J_s}(I/J_s)=r$, $\ell(I/J_s)=\ell-s$, $\mathrm{ht}_{A/J_s}I/J_s=0$ となる. 完全列 (1) の K_S-dual をとることにより, 次の完全列を得る:

$$0\to K_T\to K_S\to A/I\to \mathrm{Ext}_S^1(T,K_S)\to 0 \tag{2}$$

定理 1.7 より, $a(S)=\max\{r-(\ell-s),0\}\geq 0$ だが, 実は $a(S)=0$ となる. 実際, もし $a=a(S)>0$ ならば, 完全列 (2) より, $[K_T]_{-a}\cong[K_S]_{-a}$. 一方, S が Gorenstein 環なので, $[K_T]_{-a}\cong A/I$. 従って $J_s:I\subseteq I$, さらに J が special reduction ということから,

$J_s : I = J_s$ となるが, これは $\mathrm{ht}_{A/J_s} I/Js = 0$ に反する. よって $a(S) = 0$, 特に $K_S \cong S$ である.

次に T は $a(T) < 0$ となる Cohen-Macaulay 環であることを示そう. まず $E := \mathrm{Ext}^1_S(T, S)$ が消えることを言う. 今 $E \neq (0)$ と仮定すると, ある $\alpha \in \mathrm{m}$ によって $E \cong A/(\alpha + I)$ と書けるので, $\mathrm{ht}_A Q = s+1$ となる $Q \in \mathrm{Supp}_A E$ が存在する. $B = A/J_s : I$ とおく. J の定義より IB_Q は高々一つの元で生成されており, ($\ell = s+1$ のときは [2, Corollary (2.11)] より $I = J$ となる). また, $IB \cong K_B$ なので $\mathrm{ht}_B IB = 1$ となることから, IB_Q は B_Q-正則元で生成され, $T_Q = G(IB_Q)$ は一次元 Cohen-Macaulay 環となる. 一方 S_Q は一次元 Gorenstein 環であるから,

$$E_Q \cong \mathrm{Ext}^1_S(T, S) \otimes_S S_Q \cong \mathrm{Ext}^1_{S_Q}(T_Q, K_{(S_Q)}) = (0).$$

これは Q の取り方に矛盾. 故に $E = (0)$ で T は Cohen-Macaulay 環である. さらに完全列 (2) より次の完全列が得られる:

$$0 \to [K_T]_0 \to [K_S]_0 \to A/I \to 0. \tag{3}$$

ここで $[K_S]_0 \cong A/I$ を思い起こすと, $[K_T]_0 = (0)$ つまり $a(T) < 0$ が得られる.

$S \otimes_A A/\mathrm{m} \cong T \otimes_A A/\mathrm{m}$ であることに注意すれば, JB は IB の minimal reduction で, $\lambda(IB) = \ell - s$, $r = r_{JB}(IB)$ となることが確かめられる. また, $Q \in \mathrm{Spec}\, A$ に対し, $\mathrm{ht}_A Q = s + \mathrm{ht}_B QB$ であることに注意すれば, JB は IB の special reduction になることも確かめられる. よって, 定理 1.7 を $T = G(IB)$ に適用すれば, $a(T) = \max\{r - (\ell - s), -1\}$ となるが, 上で見た様にこれは負の数となる. 故に $r < \ell - s$ が従う.

定理 1.9 を示す前に, しばらくイデアル I の高さがゼロの状況で考えてみることにする.

補題 3.3 $s = 0$, $r_J(I) \leq \ell$ と 定理 *1.9 (a), (b)* の条件を仮定する. $1 \leq i \leq \ell$, $i-1 \leq n \leq \ell$ であれば,

$$\mathrm{depth}\, A/J_iI^n \geq \begin{cases} d-i & if\, n = i-1 \\ d-n & if\, n \geq i \end{cases}$$

証明: i についての帰納法で示す. 補題 2.3 より $((0) : a_1) \cap I = (0)$, これから $(0) : a_1 = (0) : I$ がいえる. $A/(0) : I$ は d-次元 Cohen-Macaulay 環であり, 完全列 $0 \to A/(0) : I \xrightarrow{a_1} A \to A/J_1 \to 0$ を見れば, $\mathrm{depth}\, A/J_1 \geq d-1$ を得る. よって $i = 1$ かつ $n = 0$ のとき主張は正しい. 次に 2 つの完全列

$$\begin{aligned} 0 &\to J_iI^n/J_{i-1}I^n \to A/J_{i-1}I^n \to A/J_iI^n \to 0 \\ 0 &\to I^n/J_{i-1}I^{n-1} \to A/J_{i-1}I^{n-1} \to A/I^n \to 0 \end{aligned}$$

を考える. $n \geq i$ であれば系 2.4 より左側の加群は同型である. $i = 1, 1 \leq n \leq \ell$ とすると, まん中の加群は共に A であり, 定理 1.9(b) の仮定と Depth Lemma より $\operatorname{depth} A/J_1I^n \geq d-n$ を得る. よって $i = 1$ のときは正しい.

次に $i \geq 2$ とする. もし $n = i-1$ であれば, 帰納法の仮定より $\operatorname{depth} A/J_{i-1}I^{i-1} \geq d-i+1$ と $\operatorname{depth} A/J_{i-1}I^{i-2} \geq d-i+1$, が言え, 一方 (b) の仮定より $\operatorname{depth} A/I^{i-1} \geq d-i+1$ である. よって Depth Lemma を上の完全列に適用すれば $\operatorname{depth} A/J_iI^{i-1} \geq d-i$ を得る. 故に主張は $n = i-1$ のとき正しい. $n \geq i$ であれば, 帰納法の仮定より $\operatorname{depth} A/J_{i-1}I^n \geq d-n$ と $\operatorname{depth} A/J_{i-1}I^{n-1} \geq d-n+1$ が従い, 再び (b) の仮定より $\operatorname{depth} A/I^n \geq d-n$ がいえるから, 再び Depth Lemma より $\operatorname{depth} A/J_iI^n \geq d-n$ が導かれる.

$s = 0$ として, $T = G(I + (0) : I/(0) : I)$ とおき, $i \leq \ell$ に対し, $T^{(i)} = T/(a_1t, ..., a_it)$ とおく. $U^{(i)} = \oplus_{n \geq i}[T^{(i)}]_n$ を $T^{(i)}$ の graded な $G(I)$-部分加群とする. このとき special reduction の性質から $n > 0$ の範囲で, $[T^{(i)}]_n = I^n/(I^{n+1} + J_iI^{n-1})$ が成り立つことに注意しておく. また $W^{(i)} = [U^{(i)}]_{i-s}$ とおくことにする.

補題 3.4 . $0 \leq i < \ell$ に対し $[U^{(i)}]_{i+1} \neq (0)$.

証明 : $0 \leq i < \ell$ かつ $[U^{(i)}]_{i+1} = (0)$ とする. このとき $I^{i+1} = J_iI^i + I^{i+2}$ となるので, 中山の補題から $I^{i+1} = J_iI^i$ となる. しかしこれは$\lambda(I) \leq i$ を意味し, $i < \ell$ に反する.

補題 3.5 . $r_J(I) \leq \ell$ と 定理 *1.9 (a)* の条件を仮定する. もし $i \leq \ell - 1$ ならば $a_{i+1}t$ は $U^{(i)}$-正則元である.

証明 : $0 \leq i < \ell, n \geq i$ とし, $x \in I^n$ を $(a_{i+1}t)(xt^n) \equiv 0$ in $U^{(i)}$ ととる. 上で見たように, $a_{i+1}x \in J_iI^n + I^{n+2}$ となるから, 系 2.5 を用いて,

$$\begin{aligned} a_{i+1}x \in (J_iI^n + I^{n+2}) \cap J_{i+1} &= J_iI^n + J_{i+1} \cap I^{n+2} \\ &= J_iI^n + J_{i+1}I^{n+1} = J_iI^n + a_{i+1}I^{n+1} \end{aligned}$$

を得る. $y \in I^{n+1}$ を $a_{i+1}x - a_{i+1}y \in J_iI^n$ ととると $x - y \in (J_i : a_{i+1}) \cap I^n$ である. $n > i$ であれば, 補題 2.3 と系 2.5 より, $x-y \in J_iI^{n-1}$ となり $x \in J_iI^{n-1}+I^{n+1}$ が得られる. これは $xt^n \equiv 0$ in $U^{(i)}$ を意味する. $n = i$ とする. $i > 0$ なら補題 2.7 より, $(J_i : a_{i+1}) \cap I^i = J_iI^{i-1}$ なので, 同様に $x \in J_iI^{i-1} + I^{i+1}$ が得られる. $n = i = 0$ ならば, $x - y \in (0) : a_1 = (0) : I$ より $x \equiv 0$ in $U^{(0)}$ となるのでよい.

補題 3.6 . $s = 0$, $r_J(I) \leq \ell$ と 定理 *1.9 (a), (b)* の条件を仮定する. もし $i < \ell$ ならば $\operatorname{depth} W^{(i)} \geq d - i - 1$ である.

証明 : $W^{(0)} = A/I + ((0):I)$ で $K_{A/I} \cong I + ((0):I)/I$ より, これは $d-1$ 次元 Gorenstein 環. よって $i=0$ のとき主張は正しい. $i>0$ とする. 次の完全列を考える.

$$0 \to W^{(i)} \to A/(J_iI^{i-1} + I^{i+1}) \to A/I^i \to 0$$

$$0 \to A/J_iI^i \to A/J_iI^{i-1} \oplus A/I^{i+1} \to A/(J_iI^{i-1} + I^{i+1}) \to 0$$

2 つ目の完全列は 系 2.5 より従う. 仮定より $1 \le i \le \ell$ に対して $\operatorname{depth} A/I^i \ge d-i$ が成立ち, $i \le \ell - 1$ に対して $\operatorname{depth} A/I^{i+1} \ge d-i-1$ が成り立つ. 一方, 補題 3.3 より $1 \le i \le \ell$ に対して, $\operatorname{depth} A/J_iI^i \ge d-i$ と $\operatorname{depth} A/J_iI^{i-1} \ge d-i$ が成り立つ. 上の完全列に Depth Lemma を適用すれば, 求める結果 $\operatorname{depth} W^{(i)} \ge d-i-1$ が得られる.

次の補題は $G(I)$ の Gorenstein 性を示すのに, イデアル I の高さはゼロとして議論してよいことを保証するものである.

補題 3.7 . *$s \ge 1$ とし, $\overline{A} = A/a_1A$, $\overline{I} = I\overline{A}$, $\overline{J} = J\overline{A}$ とおく. このとき定理 1.9 の条件 (a), (b) を仮定すれば, 次が成り立つ.*

(1) $\overline{A}$ は *Gorenstein* 環.

(2) $\operatorname{ht}_{\overline{A}} \overline{I} = s-1$, $\lambda(\overline{I}) = \ell - 1$ で $\operatorname{ad}(\overline{I}) = \operatorname{ad}(I)$ となる.

(3) $\overline{J}$ は $\overline{I}$ の *special reduction* であり, $r_{\overline{J}}(\overline{I}) \le \operatorname{ad}(\overline{I})$ を充す.

(4) $G(\overline{I}) \cong G/a_1tG$ であり, $G(\overline{I})$ が *Gorenstein* ならば G もそうである.

(5) $\overline{Q} \in V(\overline{I})$ と $1 \le n \le \operatorname{ad}(\overline{I})$ に対し, $\operatorname{depth}(\overline{A}/\overline{I}^n)_{\overline{Q}} \ge \min\{\operatorname{ad}(\overline{I}) - n, \operatorname{ht}_{\overline{A}}\overline{Q} - \operatorname{ht}_{\overline{A}}\overline{I} - n\}$

(6) $1 \le n \le \operatorname{ad}(\overline{I})$ に対し, $\operatorname{depth} \overline{A}/\overline{I}^n \ge \dim \overline{A} - \operatorname{ht}_{\overline{A}} \overline{I} - n$.

証明 : (1) a_1 は A-正則元ととれたのでよい.

(2) $\operatorname{ht}_{\overline{A}} \overline{I} = s-1$ となるのは明らか. [12, Theorem 1.1] と 系 2.6 により, $G(\overline{I}) \cong G/a_1t \cdot G$ であり, $A/\mathrm{m} \otimes_A G(\overline{I}) \cong A/\mathrm{m} \otimes_A G/a_1t \cdot G$. a_1t は $A/\mathrm{m} \otimes_A G$ の s.s.o.p. であったから (cf. [11]). $\lambda(\overline{I}) = \lambda(I) - 1$ となり, これより $\operatorname{ad}(\overline{I}) = \operatorname{ad}(I)$ も従う.

(3) 同型 $A/\mathrm{m} \otimes_A G(\overline{I}) \cong A/\mathrm{m} \otimes_A G/a_1t \cdot G$ より. $\overline{J}$ が $\overline{I}$ の minimal reduction で $r_{\overline{J}}(\overline{I}) \le \operatorname{ad}(\overline{I})$ が充されることは容易に確かめられる. $\overline{J}$ が special reduction であることを示そう. $\overline{Q} \in V(\overline{I})$ を $i = \operatorname{ht}_{\overline{A}} \overline{Q} < \ell - 1$ とし, $Q \in V(I)$ を $\overline{Q} = Q/a_1A$ ととる. $i+1 = \operatorname{ht}_A Q < \ell$, より I_Q は $a_1, a_2, \ldots, a_{i+1}$ で生成され, $\overline{I}_{\overline{Q}}$ は $a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}$ で生成される.

(4) 既に見たように a_1t が $G(I)$-正則元であることから従う.

(5) 全射 $A/I^n \to \overline{A}/\overline{I}^n$ の kernel $I^n + a_1A/I^n$ は, 系 2.5 を用いて,

$$I^n + a_1A/I^n \cong a_1A/a_1A \cap I^n \cong a_1A/a_1I^{n-1} \cong A/I^{n-1}$$

となり, 完全列

$$0 \to A/I^{n-1} \to A/I^n \to \overline{A}/\overline{I}^n \to 0$$

が得られる. $\overline{Q} \in V(\overline{I})$ と $Q \in V(I)$ を$\overline{Q} = Q/a_1A$ ととり. Q で上の完全列を局所化したものを考える. 仮定した (a) の条件, $\operatorname{depth}(A/I^n)_Q \geq \min\{\operatorname{ad}(I) - n, \operatorname{ht}_A Q - s - n\}$ と $\operatorname{depth}(A/I^{n-1})_Q \geq \min\{\operatorname{ad}(I) - n, \operatorname{ht}_A Q - s - n\} + 1$, に注意して Depth Lemma を適用すれば, $\operatorname{depth}(\overline{A}/\overline{I}^n)_{\overline{Q}} \geq \min\{\operatorname{ad}(I) - n, \operatorname{ht}_A Q - s - n\} = \min\{\operatorname{ad}(\overline{I}) - n, \operatorname{ht}_{\overline{A}} \overline{Q} - \operatorname{ht}_{\overline{A}} \overline{I} - n\}$. となり (5) が従う.

(6) これは (5) と同様にして示せる.

定理 1.9 の証明 : (1) ⇒ (2) 命題 3.2 より従う.

(2) ⇒ (1) 補題 3.7 より $s = 0$ と仮定してよい. 始めに $U^{(i)}$ $(i \leq \ell - 1)$ が $d - i$ 次元 Cohen-Macaulay 加群となることを i に関する帰納法で示す. 補題 3.4 より, 各 $U^{(i)}$ はゼロでない. $V^{(i)}$ を次の列が完全となる様な graded $G(I)$-加群とする.

$$0 \to U^{(i)}(-1) \stackrel{a_{i+1}t}{\to} U^{(i)} \to V^{(i)} \to 0. \tag{4}$$

左の単射性は補題 3.5 より従う. このとき $V^{(i)}|_{\geq i+1} = T^{(i)}/(a_{i+1}t)|_{\geq i+1} = U^{(i+1)}$ であり, $[V^{(i)}]_{i-s} = [U^{(i)}]_{i-s} = W^{(i)}$ となる. よって次の完全列を得る:

$$0 \to U^{(i+1)} \to V^{(i)} \to W^{(i)} \to 0. \tag{5}$$

$n \geq \ell$ に対して $I^n = JI^{n-1}$ であるから, $U^{(\ell)} = (0)$. よって $V^{(\ell-1)} \cong W^{(\ell-1)}$ となり, 補題 3.6 より $\operatorname{depth}_{G_M} V_M^{(\ell-1)} \geq d - \ell$ となる. ここで M は $G = G(I)$ の graded な極大イデアルとする. さらに完全列 (4) より $\operatorname{depth}_{G_M} U_M^{(\ell-1)} \geq d - \ell + 1$ が従う. この操作を繰り返すことによって, $\operatorname{depth}_{G_M} U_M^{(i)} \geq d - i$ が得られる. 一方, $T = U^{(0)}$ は d-次元であり, (4), (5) の完全列より $\dim U^{(i+1)} \leq \dim U^{(i)} - 1$ が従うので $\dim U^{(i)} = \operatorname{depth}_{G_M} U_M^{(i)} = d - i$ が得られる.

次に, $H_M^{d-i}(U^{(i)})$ $(s \leq i \leq \ell - 1)$ の socle は, $i - 1$ 次の部分のみにしか出現しないことを i に関する帰納法で示す. 実際, $V^{(\ell-1)} \cong W^{(\ell-1)}$ なので $H_M^{d-\ell}(V^{(\ell-1)})$ は $\ell - 1$ 次のみから成る. 完全列 (4) は $H_M^{d-\ell}(V^{(\ell-1)})$ の socle と $H_M^{d-\ell+1}(U^{(\ell-1)})(-1)$ の socle との同型を導くので, $H_M^{d-\ell+1}(U^{(\ell-1)})$ の socle は $\ell - 2$ 次のみから成る. よって我々の主張は $i = \ell - 1$ の

ときは正しい. $i < \ell - 1$ とする. $\mathrm{depth}_{G_M} W_M^{(i)} \geq d - i - 1$ で $U^{(i+1)}$ は Cohen-Macaulay であるから, (5) より次の完全列が従う:

$$0 \to H_M^{d-i-1}(U^{(i+1)}) \to H_M^{d-i-1}(V^{(i)}) \to H_M^{d-i-1}(W^{(i)}) \to 0.$$

ここで, 右端の加群は i 次のみから成り, 左端の加群の socle は帰納法の仮定より同じく i 次のみから成る. よって, 真中の加群 $H_M^{d-i-1}(V^{(i)})$ の socle は i 次のみから成る. 再び (4) を用いれば, $H_M^{d-i-1}(V^{(i)})$ の socle と $H_M^{d-i}(U^{(i)})(-1)$ の socle との同型が得られるので, $H_M^{d-i}(U^{(i)})$ の socle は $i-1$ 次のみに現れる.

$B = A/(0):I$ とおく. 以上の議論から $T = G(IB)$ は $a(T) = -1$ の Cohen-Macualay 環であり, 従って Rees 環 $R(IB)$ も Cohen-Macaualy 環である. さらに $H_M^d(T)$ の socle は -1 次のみに現れるので [9, Theorem 2.4] より T の canonical module K_T は K_B の filtration $\{I^n K_B\}$ によって定まる associated graded module $gr_{IB}(K_B)(-1)$ と同型となる. ところが $IB \cong K_B$ なので $gr_{IB}(K_B)(-1) \cong T_+$ となり, 完全列 (1) より $K_T \cong G_+$ となり, [8, Satz 6.1] より $T = \mathrm{Hom}_G(G_+, K_G)$ が従う. そこで完全列 $0 \to G_+ \to G \to A/I \to 0$ の K_G-dual をとれば, $0 \to K_{A/I} \to K_G \to T \to 0$ が得られ, このことから K_G は degree 0 次の元で生成されることが従う. さらに $[K_T]_0 = (0)$ であるから, 完全列 (3) より $[K_G]_0 \cong A/I$ となる. 故に K_G は単項生成で, G は Gorenstein 環となる.

参考文献

[1] S. Goto and S. Huckaba, On graded rings associated to analytic deviation one ideals to appear in *Amer. J. Math.*.

[2] S. Goto and Y. Nakamura, On the Gorensteinness of graded rings associated to ideals of analytic deviation one, to appear in the Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc.

[3] S. Goto and Y. Nakamura, Cohen-Macaulay Rees algebras of ideals having analytic deviation two, preprint

[4] S. Goto and Y. Nakamura, Gorenstein graded rings associated to ideals of analytic deviation two, preprint

[5] S. Goto, Y. Nakamura and K. Nishida, Graded rings of ideals of higher analytic deviation, in preparation

[6] S. Huckaba and C. Huneke, Powers of ideals having small analytic deviation, *Amer. J. Math.*, **114** (1992), 367-403

[7] S. Huckaba and C. Huneke, Rees algebras of ideals having small analytic deviation to appear in *jour Trans. Amer. Math. Soc.*

[8] J. Herzog and E. Kunz, Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings Springer L. N. M., **238**, Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. New York. Tokyo, 1971

[9] J. Herzog, A. Simis and W. V. Vasconcelos, On the canonical module of the Rees algebra and associated graded ring of an ideal, *J. Algebra*, **105** (1987), 285-302

[10] K. Nishida, Powers of ideals in Cohen-Macaulay rings, preprint

[11] D. G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **50** (1954), 145-158

[12] P. Valabrega and G. Valla, Form rings and regular sequences, *Nagoya Math. J.*, **72** (1978), 93-101

On delta-invariants of modules over local rings

京大 数理研 加藤希理子

1 Definitions and constructions

一般に、完備 Gorenstein 局所環 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 上の 有限生成加群 M に対し、次のような完全列 (minimal Cohen-Macaulay approximation) の存在と一意性が知られている。([AB] 参照。)

$$0 \to Y_M \to X_M \to M \to 0 \text{ (exact)},$$

(但し、$pd_R Y_M < \infty$ かつ X_M は maximal Cohen-Macaulay 加群 で X_M と Y_M は共通の直和因子をもたないものとする。)

ここで、X_M の 自由因子の rank を、$\delta(M)$ (δ-invariant) と表す。また M の n-th syzygy $\Omega^n(M)$ の δ-invariant を $\delta^n(M)$ と書く。定義により、$\Omega^n(M)$ の minimal Cohen-Macaulay approximation : $0 \to Y_{\Omega^n(M)} \to X_{\Omega^n(M)} \to \Omega^n(M)$ を、$X_{\Omega^n(M)} = C_n \oplus R^{\delta^n(M)}$ (但し C_n は stable , 即ち自由因子を持たない maximal Cohen-Macaulay 加群) のように書き表すことにする。

Auslander によるその構成の方法は次のとおりである。(その他の方法もいくつか知られている。[Y] にまとめて説明がある。) いま、M の minimal free resolution を、

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n+1}} E_n \xrightarrow{\varphi_n} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E_0 \to M \to 0,$$

と表す。$\mathrm{codepth}_R(M) = r$, 即ち、$\mathrm{depth}_R(M) = \dim R - r$ の時、$\Omega^{r+1}(M)$ は、stable maximal Cohen-Macaulay 加群 となるから、その coresolution :

$$0 \to \Omega^{r+1}(M) \to E'_r \xrightarrow{\theta_r} E'_{r-1} \xrightarrow{\theta_{r-1}} \cdots \xrightarrow{\theta_{n+1}} E'_n \xrightarrow{\theta_n} \cdots,$$

を、全ての sygyzy が stable maximal Cohen-Macaulay 加群となるようにとることができる。実際、$\Omega^{r+1}(M)^* = Hom_R(\Omega^{r+1}(M), R)$ の minimal free resolution $G. \to \Omega^{r+1}(M)^*$ に対し、R-dual $0 \to \Omega^{r+1}(M)^{**} \cong \Omega^{r+1}(M) \to G.^*$ は、全ての sygyzy が stable maximal Cohen-Macaulay 加群であるような完全列であるから、これを coresolution として取ればよい。

さらに $\Omega^{r+1}(M)$ の minimal free resolution $E.[r+1]$ とあわせて、$E'. := G.^*[-r] \oplus E.[r+1]$ とする。このとき、$f_{r+1} := id_{E_{r+1}}$ によって、以下のような可換図式が導かれる。詳しくいえば、$f.$ は、複体 $\tau_r E^*. \to \Omega^{r+1}(M)^*$ から完全列 $G. \to \Omega^{r+1}(M)^*$ へ $id_{\Omega^{r+1}(M)^*}$ によって導かれた鎖準同型写像の dual である。(ここで、τ_r は r-th truncate functor とする。)

$$
\begin{tikzcd}
E_{r+1} \arrow[r, "\varphi_{r+1}"] \arrow[d, equal] & E_r \arrow[r, "\varphi_r"] & E_{r-1} \arrow[r, "\varphi_{r-1}"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_1"] & E_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
E'_{r+1} \arrow[r, "\theta_{r+1}"] & E'_r \arrow[r, "\theta_r"] \arrow[u, "f_r"] & E'_{r-1} \arrow[r, "\theta_{r-1}"] \arrow[u, "f_{r-1}"] & \cdots \arrow[r, "\theta_1"] & E'_0 \arrow[r] \arrow[u, "f_0"] & C_0 \arrow[r] \arrow[u] & 0.
\end{tikzcd}
$$

ここで、$C_n := Coker\ \theta_{n+1}$ とおく。f_n は、写像 $\bar{f}_n : C_n \to \Omega^n(M)$ を導くが、全射とは限らない。そこで minimal free cover $R^{\delta^n(M)} \to Coker f_n \to 0$ と併せて、全射を構成し、その kernel を $Y_{\Omega^n(M)}$ とおいて、完全列 $0 \to Y_{\Omega^n(M)} \to C_n \oplus R^{\delta^n(M)} \to \Omega^n(M)$ が得られる。$Y_{\Omega^n(M)}$ の射影次元が有限であること、$C_n \oplus R^{\delta^n(M)}$ と直和因子を共有しないことは、帰納的に確かめられる。言い換えれば、$\delta^n(M) = \dim_k\ (Coker f_n \otimes k)$ である。

δ-invariant については、lifting との関係 ([ADS])、Gorenstein 性との関係 ([D2])、multiplicity との関係 ([D1]) などが既に知られているが、その性質は十分解明されているとはいい難い。本稿では、δ-invariant を計算していく上で判った基礎的な性質についていくつか述べる。

2 Residue by a regular element

ここで R の非零因子 $x \in \mathfrak{m}$ で M-regular なものをとり、$\bar{M} := M/xM$ とおく。$\bar{M}$ の minimal free resolution を

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\varphi}_{n+1}} \bar{E}_n \xrightarrow{\bar{\varphi}_n} \cdots \xrightarrow{\bar{\varphi}_2} \bar{E}_1 \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} \bar{E}_0 \to \bar{M} \to 0,$$

とする。対応する $X_{\Omega^n(\bar{M})} = \bar{C}_n \oplus R^{\delta^n(\bar{M})}$ も、$\Omega^{r+2}(\bar{M})$ の coresolution :

$$0 \to \Omega^{r+2}(\bar{M}) \to \bar{E}'_{r+1} \xrightarrow{\bar{\theta}_{r+1}} \bar{E}'_r \xrightarrow{\bar{\theta}_r} \cdots \xrightarrow{\bar{\theta}_{n+1}} \bar{E}'_n \xrightarrow{\bar{\theta}_n} \cdots,$$

により、$\bar{C}_n := Coker\ \bar{\theta}_n$ として構成される。

$$
\begin{tikzcd}
\bar{E}_{r+2} \arrow[r, "\bar{\varphi}_{r+2}"] \arrow[d, equal] & \bar{E}_{r+1} \arrow[r, "\bar{\varphi}_{r+1}"] & \bar{E}_r \arrow[r, "\bar{\varphi}_r"] & \cdots \arrow[r, "\bar{\varphi}_1"] & \bar{E}_0 \arrow[r] & \bar{M} \arrow[r] & 0 \\
\bar{E}'_{r+2} \arrow[r, "\bar{\theta}_{r+2}"] & \bar{E}'_{r+1} \arrow[r, "\bar{\theta}_{r+1}"] \arrow[u, "\bar{f}_{r+1}"] & \bar{E}'_r \arrow[r, "\bar{\theta}_r"] \arrow[u, "\bar{f}_r"] & \cdots \arrow[r, "\bar{\theta}_1"] & \bar{E}'_0 \arrow[r] \arrow[u, "\bar{f}_0"] & \bar{C}_0 \arrow[r] \arrow[u] & 0.
\end{tikzcd}
$$

このとき、$\bar{M}$ と M、各々の δ-invariants の関係について調べてみた。

Proposition 2.1 R,M,$\bar{M}$ は上述の通りとする。以下の等式が成り立つ。

$$\delta^n(\bar{M}) = \delta^{n-1}(M) + \delta^n(M).$$

proof)

$E.,\varphi.,E'.,\theta.,f.$ と $\bar{E}.,\bar{\varphi}.,\bar{E}'.,\bar{\theta}.,\bar{f}.$ との間の関係を調べればよい。

first step: $\tilde{E}.,\tilde{\varphi}$ について。 まず、

$$\tilde{E}_n \cong E_n \oplus E_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad \tilde{E}_0 \cong E_0,$$

$$\tilde{\varphi}_n = \begin{pmatrix} \varphi_n & 0 \\ x & -\varphi_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2), \quad \tilde{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ x \end{pmatrix}$$

が成り立つ。実際、鎖準同型写像 $E. \xrightarrow{x} E.$ の mapping cone, mapping cylinder をとって、以下の完全列を得る。

$$0 \to E. \to Cone(x) \to E.[-1] \to 0,$$

$$0 \to E. \to Cyl(x) \to Cone(x) \to 0.$$

$Cyl(x) \cong E.\oplus$(some trivial complex) であるから、$Cone(x)$ は $\bar{M}$ の free resolution をあたえ、$x \in \mathfrak{m}$ より、これが minimal であることも判る。

second step: $\tilde{E'}.,\tilde{\theta}$ について。

$$\tilde{E'}_n \cong E'_n \oplus E'_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad \tilde{E'}_0 \cong E'_0.$$

$$\tilde{\theta}_{n+1} = \begin{pmatrix} \theta_{n+1} & 0 \\ x & -\theta_n \end{pmatrix} \quad (n \geq 1), \quad \tilde{\theta}_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ x \end{pmatrix},$$

が成り立つ。これは、$\tilde{E_n} \cong \tilde{E'_n} \quad (n \geq r+2), \quad \tilde{\theta_{n+1}} \cong \tilde{\varphi_{n+1}} \quad (n \geq r+2)$ ゆえ、$r+2-n$ に関する帰納法で示される。

今、帰納法の仮定から、

$$\tilde{E'}_n \cong E'_n \oplus E'_{n-1}, \quad \tilde{\theta}^*_{n+1} = \begin{pmatrix} \theta^*_{n+1} & x \\ 0 & -\theta^*_n \end{pmatrix},$$

である。いっぽう coresolution の構成法から、

$$Ker\ \theta^*_{n+1} \cong Im\ \theta^*_n, \quad Ker\ \theta^*_n \cong Im\ \theta^*_{n-1},$$

を併せて、

$$\tilde{E'}_{n-1} \cong E'_{n-1} \oplus E'_{n-2}, \quad \tilde{\theta}^*_n = \begin{pmatrix} \theta^*_n & x \\ 0 & -\theta^*_{n-1} \end{pmatrix},$$

を得る。

third step: $\tilde{f}.$ について。

$$\tilde{f}_n = \begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & f_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1), \quad \tilde{f}_0 = f_0,$$

が成り立つ。実際、上記で与えられた $f.$ が

$$\tilde{\varphi}_n \tilde{f}_n = \tilde{f_{n-1}} \tilde{\theta}_n$$

をみたすことを確かめれば良い。(証明終)。

シンポジウムの後、吉野雄二先生のアドバイスにより、上記命題を次の形に拡張した。参考までに、ここに記す。

Theorem 2.2 完全列

$$0 \to L \xrightarrow{\gamma} M \to N \to 0$$

において、$\gamma \in \mathfrak{m}\ Hom_R(L,M)$ ならば、次が成り立つ。

$$\delta^n(N) = \delta^{n-1}(L) + \delta^n(M).$$

proof)

$(E.,d_E) \to L \to 0$, $(F.,d_F) \to M \to 0$ を M,N の *minimal free resolutions* とし、γ によって導かれる鎖準同型写像 $\gamma. : E. \to F.$ を考える。§*1* におけるように、十分高い *syzygy* $\Omega^r(L), \Omega^r(M)$ 各々の *coresolution* と *resolution* とを併せて、完全列 $(E.', d_{E'}), (F.', d_{F'})$ を構成し、$\Omega^r(L), \Omega^r(M)$ 上の恒等写像によって導かれる写像 $f. : E.' \to E.$, $g. : F.' \to F.$ を得る。また、$\gamma.$ は写像 $\overline{\gamma}_r : \Omega^r(L) \to \Omega^r(M)$ を作るから、$\overline{\gamma}_r^*$ によって導かれる写像の *dual:* $\gamma' : E.' \to F.'$ を考える。

上記と同様に、$(G.,d_G) \to N \to 0$ を N の *minimal free resolution,* 十分高い N の *syzygy* の *resolution* と *coresolution* を併せた完全列を $(G.', d_{G'})$, *higher syzygy* 上の恒等写像によって導かれる写像を $h. : G.' \to G.$ と表す。

<u>*first step*</u>: $G., d_G$ について。

$$G_n \cong F_n \oplus E_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad G_0 \cong F_0.$$

$$d_{Gn} = \begin{pmatrix} d_{Fn} & 0 \\ \gamma_{n-1} & -d_{En-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2), \quad d_{G1} = \begin{pmatrix} d_{F1} \\ \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

<u>*second step*</u>: $G.', d_{G'}$ について。

$$G'_n \cong F'_n \oplus E'_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad G'_0 \cong F'_0.$$

$$d_{G'n} = \begin{pmatrix} d_{F'n} & 0 \\ \gamma'_{n-1} & -d_{E'n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2), \quad d_{G'1} = \begin{pmatrix} d_{F'1} \\ \gamma'_0 \end{pmatrix}.$$

ここまでの証明は、仮定より $\gamma.(E.) \subset \mathfrak{m}F.$ に注意すれば、*2.1* と全く同様に行なうことができる。*third step* に関しては、若干の修正を要する。

<u>*third step*</u>: $h.$ について。

$$h_n = \begin{pmatrix} g_n & 0 \\ \zeta_n^* & f_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1), \quad h_0 = g_0.$$

但し $\zeta_n : F_n^* \to {E'_{n-1}}^*$ は、

$$\gamma_n'^* g_n^* - f_n^* \gamma_n^* = \zeta_{n+1} d_F^* + d_{E'}^* \zeta_n,$$

をみたすものとする。

実際、$n \geq r+1$ においては、$\gamma_n = \gamma'_n$ であるから、$\gamma'^*_. g'_.$ と $f^*_. \gamma^*_.$ とは *homotopic* であり、その *chain homotopy* を ζ としてとればよい。このとき直ちに、$h_{n-1} d_{G'n} = d_{Gn} h_n$ が判る。

仮定 $\gamma \in \mathfrak{m}\ Hom_R(M,N)$ より、$Im\ \zeta_n^* \subseteq \mathfrak{m}F_n$ である。というのは、$\gamma = \sum_i a_i \gamma_i$ $(a_i \in \mathfrak{m})$ とおけば、γ_i に対応する ζ_i について、$\zeta_n = \sum_i a_i \zeta_{in}$, $n \geq 0$ ととれるからである。$\delta^n(N) = \dim_k(Coker\ h_n \otimes k)$ から、結論を得る。（証明終。）

3 Some formulae

次に、Y_M に注目し、$\delta^n(M)$ によってその *minimal free resolution* を記述することに成功した。

Lemma 3.1 *R,M,E.,E'.* は§*1* における通りとする。このとき、

$$\Omega^n(Y_M) \cong Y_{\Omega^n(M)}.$$

更に、生成元の個数については、

$$\dim_k(Y_{\Omega^n(M)} \otimes k) = rank\ (E'_n) - rank\ (E_n) + \delta^n(M) + \delta^{n+1}(M).$$

proof)

$\alpha_n := rank\ (E'_n)$, $\beta_n := rank\ (E_n)$ とおく。次の可換図式が成り立つ。行および列はすべて完全列である。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & Y_{\Omega^{n+1}(M)} & \xrightarrow{\zeta_n} & R^{\alpha_n-\beta_n+\delta^n(M)+\delta^{n+1}(M)} & \rightarrow & Y_{\Omega^n(M)} & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & X_{\Omega^{n+1}(M)} & \rightarrow & R^{\alpha_n+\delta^n(M)+\delta^{n+1}(M)} & \rightarrow & X_{\Omega^n(M)} & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \Omega^{n+1}(M) & \rightarrow & R^{\beta_n} & \rightarrow & \Omega^n(M) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

$X_{\Omega^{n+1}(M)} \cong C_{n+1} \oplus R^{\delta^{n+1}(M)}$ から、完全列 $0 \rightarrow C_{n+1} \rightarrow R^{\alpha_n} \rightarrow C_n \rightarrow 0$ に *trivial complexes:* $0 \rightarrow R^{\delta^{n+1}(M)} \rightarrow R^{\delta^{n+1}(M)} \rightarrow 0 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 0 \rightarrow R^{\delta^n(M)} \rightarrow R^{\delta^n(M)} \rightarrow 0$ を付け加えて第 2 行は得られる。後は、写像 ζ_n の *minimality* を見ればよい。これは、完全列 $0 \rightarrow Y_{\Omega^{n+1}(M)} \rightarrow X_{\Omega^{n+1}(M)} \rightarrow \Omega^{n+1}(M) \rightarrow 0$ が *minimal Cohen-Macaulay approximation* であることから判る。（証明終。）

Corollary 3.2 *R,M* は上述の通りとする。以下の等式が成り立つ。

$$\delta^r(M) = rank\ E_r - rank\ E'_r.$$

proof)

$\mathrm{codepth}_R(M) = r$ ゆえ、$\Omega^r(M)$ は、*maximal Cohen-Macaulay* 加群なので、$Y_r = 0$ である。*(3.1)* より、$rank\ E_r - rank\ E'_r + \delta^r(M) + \delta^{r+1}(M) = 0$, かつ、$\Omega^{r+1}(M)$ は *stable maximal Cohen-Macaulay* 加群だから $\delta^{r+1}(M) = 0$ である。（証明終。）

References

[AB] *M.Auslander and R.O.Buchweitz*, The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations, *Soc. Math. de France, Mem* **38** *(1989), 5-37.*

[ADS] *M.Auslander, S.Ding, and Ø.Solberg*, Liftings and weak liftings of modules, *J.Algebra* **156** *(1993), 273-317.*

[D1] *S.Ding*, Cohen-Macaulay approximation and multiplicity, *J. Algebra* **153** *(1992), 271-288.*

[D2] *S.Ding*, A note on the index of Cohen-Macaulay local rings, *Comm.Alg.* **21** *(1993), 53-71.*

[Y] *Y.Yoshino*, Cohen-Macaulay approximations, 多元環の表現論シンポジウム報告集, 伊豆 *(1993).*

可換環の単純拡大とその一般化

岡山理科大学理学部応用数学科

吉田憲一

Let $A \supseteq R$ be integral domains and let P be a property for the extension A/R. Consider a set :

$$\mathcal{P}_R(A) := \{a \in R \mid A[1/a]/R[1/a] \text{ satisfies P}\} \cup \{0\}.$$

If this is an ideal of R and the following equivalence : for $p \in Spec(R)$

$$p \not\supseteq \mathcal{P}_R(A) \Leftrightarrow A_p/R_p \text{ satisfies } \mathbf{P}$$

holds, we call $\mathcal{P}_R(A)$ an obstruction ideal of P. It may not be known whether the property of faithful flatness has an obstruction ideal or not. It perhaps is not the case. So we consider in the first section, we investigate the ideal $\mathcal{G}_R(A)$ with respect to the faithful flatness. The second section is devoted to studying the relation between the blowing-ups and the ideal $\mathcal{G}_R(A)$. In the third section, we treat the case that A/R is anti-integral and the ideals $\mathcal{H}_R(A)$ and $\mathcal{E}_R(A)$, the second one is the obstruction ideal of unramifiedness.

In this paper, let $R \subseteq A$ denote integral domains unless otherwise specified.

1. Ideals $\mathcal{F}_R(A)$ and $\mathcal{G}_R(A)$

We start with the following definition.

Definition 1.1. Define :

$\mathcal{F}_R(A) := \{a \in R | a \neq 0, A[1/a] \text{ is flat over } R[1/a]\} \cup \{0\}$,

$\mathcal{G}_R(A) := \{a \in R | a \neq 0, A[1/a] \text{ is faithfully flat over } R[1/a]\} \cup \{0\}$,

$\mathcal{L}_R(A) := \{a \in R | \ Spec(A[1/a]) \to Spec(R[1/a]) \text{ is surjective}\} \cup \{0\}$.

Proposition 1.2.
(i) $\mathcal{F}_R(A), \mathcal{G}_R(A)$ and $\mathcal{L}_R(A)$ are ideals in R.
(ii) $\mathcal{G}_R(A) = \mathcal{F}_R(A) \cap \mathcal{L}_R(A)$.
(iii) If A is finitely generated over R, then $\mathcal{G}_R(A) \neq (0)$.

Proof. (ii) follows from [M,(7.3)].
(i) By [M,(7.8)], $\mathcal{F}_R(A) = \sqrt{\bigcap Ann_R Tor_1^R(A, R/I)}$, where I ranges over finitely generated ideals of R. Hence $\mathcal{F}_R(A)$ is an ideal of R. Next, it is obvious that if $a \in R$ and $x \in \mathcal{L}_R(A)$ then $ax \in \mathcal{L}_R(A)$. Take non-zero elements $a, b \in \mathcal{L}_R(A)$ with $a + b = t \neq 0$. Replacing R (resp. A) by $R[1/t]$ (resp. $A[1/t]$), we may assume that $t = 1$. Then the canonical morphisms : $Spec(A[1/a]) \to Spec(R[1/a])$ and $Spec(A[1/b]) \to Spec(R[1/b])$ are surjective by the assumption. Hence the canonical morphism : $Spec(A) = Spec(A[1/a]) \cup Spec(A[1/b]) \to Spec(R[1/a]) \cup Spec(R[1/b])$ is surjctive. So $a + b = 1 \in \mathcal{L}_R(A)$. Thus $\mathcal{L}_R(A)$ is an ideal of R. By (ii) $\mathcal{G}_R(A)$ is also an ideal of R.
(iii) There exist a non-zero element $a \in R$ and $x_1, \ldots, x_n \in A$ such that $x_1, \ldots, x_n$ are algebraiclly independent over R and that $A[1/a]$ is finite over $C := R[1/a][x_1, \ldots, x_n]$. In this case C is faithfully flat over $R[1/a]$ and there exists $d \in R$ such that $A[1/ad]$ is faithfully flat over $C[1/d]$ by [M,(7.8)(24.1)]. Thus $0 \neq ad \in \mathcal{G}_R(A)$. □

Remark 1.3. The following statements are known or easy to see:
(1) For $p \in Spec(R)$, $p \not\supseteq \mathcal{F}_R(A) \Rightarrow A_p$ is flat over R_p.
(2) For $p \in Spec(R)$, $p \not\supseteq \mathcal{G}_R(A) \Rightarrow A_p$ is faithfully flat over R_p.
(3) For $p \in Spec(R)$, $p \not\supseteq \mathcal{L}_R(A) \Rightarrow Spec(A_p) \to Spec(R_p)$ is surjective.
(4) If A is a finite R-algebra, the converde statements in (!),(2) and (3) hold.

We call $\mathcal{F}_R(A)$ the *obstruction ideal* of flatness if the converse of Remark 1.3(1) holds. When the converse of Remark 1.3(3)(resp. (4)) holds for each $p \in Spec(R)$, we say that the extension A/R has an *FF-obstruction ideal* (resp. *S-obstruction ideal*). By Proposition 1.2, the extension A/R has the FF-obstruction ideal if it has an S-obstruction ideal. It is not hard to see that if the image of $Spec(A) \to Spec(R)$ is open in $Spec(R)$, e.g. A/R is flat, then A/R has an S-obstruction ideal.

Remark 1.4. (1) If an extension A/R has the FF-obstruction ideal, so does A_p/R_p for each $p \in Spec(R)$.
(2) If the extension A/R has the FF-obstruction ideal, then $\mathcal{G}_R(A)_p = \mathcal{G}_{R_p}(A_p)$ for each $p \in Spec(R)$.

Lemma 1.5. *The extension has the FF-obstruction ideal and Let $p \in Spec(R)$. If $p \supseteq \mathcal{G}_R(A)$ and $p + \mathcal{F}_R(A) = R$, then $pA = A$.*

Proof. Suppose that $pA \neq A$. Then there exists a maximal ideal M of A such that $M \supseteq pA$ Put $M \cap R = m$. Since $m \supseteq p$ and $p + \mathcal{F}_R(A) = R$, we have $m \not\supseteq \mathcal{F}_R(A)$. Hence A_m/R_m is flat. But $MA_m \cap R_m = mR_m$ yields that A_m/R_m is faithfully flat. Since A/R has the FF-obstruction ideal, $m \not\supseteq \mathcal{G}_R(A)$. So $m \supseteq p \supseteq \mathcal{G}_R(A)$, a contradiction. □

Proposition 1.6. *Assume that R is a Noetherian domain and that A/R is finitely generated extension with the FF-obstruction ideal. Let I be an ideal of R. If $I + \mathcal{F}_R(A) = R$ and $\mathcal{G}_R(A) \subseteq p$ for all $p \in Ass_R(R/I)$, then $IA = A$.*

Proof. Note that $0 \neq \mathcal{G}_R(A) \subseteq p$ for each $p \in Ass_R(R/I)$ and $I + \mathcal{F}_R(A) = R$. So by Lemma 1.5, $pA = A$ for all $p \in Ass_R(A)$. Thus $IA = A$. □

Proposition 1.7. *Assume that R is a Noetherian domain. Let I be an ideal of R. If $p \not\supseteq \mathcal{G}_R(A)$ for every $p \in Ass_R(R/I)$, then $IA \cap R = I$.*

Proof. Let $I = q_1 \cap \cdots \cap q_n$ be the primary decomposition. The inclusion $IA \cap R \supseteq I$ is obvious. We have only to show that $IA \cap R \subseteq q_i$ for all i. Put $p_i = \sqrt{q_i}$. Since $p_i \not\supseteq \mathcal{G}_R(A)$, A_{p_i}/R_{p_i} is faithfully flat. So $IA_{p_i} \cap R_{p_i} = IR_{p_i} \subseteq q_i R_{p_i}$ and hence $IA \cap R \subseteq q_i R_{p_i} \cap R = q_i$. This completes the proof. □

Corollary 1.7.1. *The notation is the same as in Proposition 1.7. If $I +$*

$\mathcal{G}_R(A) = R$, *then* $IA \cap R = I$.

Proof. If $p \in Ass_R(A)$, then $p \supseteq I$ and $I + \mathcal{G}_R(A) = R$. So $p \not\supseteq \mathcal{G}_R(A)$. By Proposition 1.7, $IA \cap R = I$. □

Proposition 1.8. *Assume that R is a Noetherian domain and that A/R has the FF-obstruction ideal. Let I be an ideal of R. Assume that $p \in Ass_R(R/I)$ satisfies $p \supseteq \mathcal{G}_R(A)$ and $p \not\supseteq \mathcal{F}_R(A)$. Then p is not a prime divisor of $IA \cap R$ and hence $IA \cap R \neq I$.*

Proof. Take $P \in Ass_R(R/I)$ such that $p \supseteq \mathcal{G}_R(A)$ and $p \not\supseteq \mathcal{F}_R(A)$. Then the assumptions are satisfied for A_p/R_p. Since $pR_p \supseteq \mathcal{G}_R(A)R_p = \mathcal{G}_{R_p}(A_p)$ by Remark 1.4 and $R_p = \mathcal{F}_R(A)R_p \subseteq \mathcal{F}_{R_p}(A_p)$, we have $pA_p = A_p$ by Lemma 1.5. Let q be a p-primary component of I. Then $qA_p = A_p$. Thus $(IA \cap R)_p = IA_p \cap R_p = qA_p \cap R_p = A_p \cap R_p = R_p$. Hence p is not a prime divisor of $IA \cap R$. □

Proposition 1.9. *Assume that R is a Noetherian domain and that A/R has the FF-obstruction ideal. Let I be an ideal of R. Assume that $\mathcal{F}_R(A) = R$. Then $IA \cap R = I$ if and only if $\mathcal{G}_R(A) \not\subseteq p$ for all $p \in Ass_R(R/I)$.*

Proof. The 'If part' follows from Proposition 1.7 without the assumption $\mathcal{F}_R(A) = R$. The 'only if part' follows from Proposition 1.8. □

Theorem 1.10. *Assume that R is a Noetherian domain and that A/R has the FF-obstruction ideal. Let I be an ideal R. Then the following statements are equivalent :*

(1) $IA \cap R = I$ and $\mathcal{F}_R(A) \not\subseteq p$ for all $p \in Ass_R(R/I)$,

(2) $\mathcal{G}_R(A) \not\subseteq p$ for all $p \in Ass_R(R/I)$.

Proof. (1)$\Rightarrow$ (2) : Suppose $\mathcal{G}_R(A) \subseteq p$ for some $p \in Ass_R(R/I)$. Then $IA \cap R \neq I$ by Proposition 1.9, which is a contradiction.

(2) $\Rightarrow$ (1) : If $p \not\supseteq \mathcal{G}_R(A)$, then $p \not\supseteq \mathcal{F}_R(A)$. Thus the rest part follows from Proposition 1.7. □

Theorem 1.11. *Assume that R is a Noetherian domain and that A/R is a* *finitely generated extension. Let I be an ideal of R and let $a \notin I$. If $\mathcal{G}_R(A) \not\subseteq p$ for all $p \in Ass_R(R/(I :_R a))$, then $(I :_R a)A = IA :_A a$.*

Proof. The inclusion $(I :_R a)A \subseteq (IA :_A a)$ obviously holds. We show the converse. If $p \in Ass_R(R/(I :_R a))$, then $p \not\supseteq \mathcal{G}_R(A)$. Hence $(I :_R a)A \cap R = I :_R a$ by Proposition 1.7. So we have $Ass_R(A/(I :_R a)A) \subset Ass_R(R/(I :_R a))$. Take $P \in Ass_A(A/(I :_R a)A)$ and Put $p = P \cap R$. Then $p \in Ass_R(A/(I :_R a)A) \subseteq Ass_R(R/(I :_R a))$. So $p \not\supseteq \mathcal{G}_R(A)$, which shows that A_p/R_p is faithfully flat. Hence $IA_p :_A a = (I :_R a)A_p$. From this we have $IA :_A a \subseteq (I :_R a)A_p \cap A \subseteq (I :_R a)A_P \cap A$ for all $P \in Ass_A(A/(I :_R a)A)$, which means that $IA :_A a \subseteq (I :_R a)A$. □

Remark 1.12. If $\mathcal{G}_R(A) \not\subseteq p$ for all $p \in Ass_R(R/I)$ holds, then $IA \cap R = I$ and $(I :_R a)A = IA :_A a$ for all $a \in R$. Thus $Ass_R(R/I) = Ass_R(A/IA)$.

Proposition 1.13. *If $\mathcal{F}_R(A)A = A$, then $\mathcal{F}_R(A) = R$.*

Proof. Suppose that $\mathcal{F}_R(A) \neq R$. Then there exists $p \in Spec(R)$ such that $\mathcal{F}_R(A) \subseteq p$. Let P' be a prime ideal of A_p and put $P' \cap A = P$. In this case, $P \cap R \supseteq \mathcal{F}_R(A)A = A$. So $P \cap R \not\supseteq \mathcal{F}_R(A)$. Thus A_P/R_p is flat. Since this holds for all prime ideals of A_p, A_p/R_p is flat. But $p \supseteq \mathcal{F}_R(A)$ and hence $pR_p \supseteq \mathcal{F}_R(A)_p = R_p$. Thus $p = R$, a contradiction. □

Proposition 1.14. *If $\mathcal{F}_R(A) \subseteq p$ with $p \in Spec(R)$, then $P \cap R = p$ for some $P \in Spec(A)$.*

Proof. Consider the extension A_p/R_p. Then $\mathcal{F}_R(A)R_p \subseteq pR_p$, so that $\mathcal{F}_R(A)R_p \neq R_p$. Hence By Proposition 1.13, $\mathcal{F}_R(A)A \neq A$. Thus there exists a maximal ideal M' of A_p such that $\mathcal{F}_R(A)A_p \subseteq M'$. Put $m = M' \cap R_p$. Since A_p is flat over R_p, m is a maximal ideal of R_p. Hence $m = pR_p$. Put $P = M' \cap A$. Then $P \in Spec(A)$ and $P \cap R = p$. □

Let $\varphi : Spec(A) \to Spec(R)$ denote the canonical morphism obtained from the inclusion $R \subseteq A$.

and $grade\mathcal{G}_R(A) > 1$, it must hold that $aR = R$, which shows that $a \in R^*$. $\square$

2. Blowing-Ups.

We start this section by the following definition.

Definition 2.1. We say that $p \in Spec(R)$ is *blowing-up* (point) if $\dim A_p/pA_p \geq 1$. Define

$$B_R(A) := \{p \in Spec(R) | p \text{ is a blowing-up}\}$$

It is known that if A is finitely generated, algebraic over R then $B_R(A) \neq Spec(R)$.

Proposition 2.2. *Let k be a field. Assume that R is k-affine domain and that A is finitely generated, algebraic over R. If A_p is flat over R_p for a $p \in Spec(R)$, then $\dim A_p/pA_p = 0$ and there exist finitely many primes lying over p in A.*

Proof. Take $P \in Spec(A)$ and put $p = P \cap R$. Then $PA_p \in Spec(A_p)$. Since A_p/R_p is flat, the Going-Down theorem holds. So the maximal ideal in $Spec(A_p)$ correspond to the prime ideals in $Spec(A)$ lying over p in one-to-one. Since A_p/pA_p is 0-dimensional Noetherian domain, it is Artinian. Hence $\dim A_p/pA_p = 0$ and there exist finitely many primes lying over p in A. $\square$

Theorem 2.3. *Let k be a field. Assume that R is k-affine domain and that A is finitely generated, algebraic over R. Then*

$$B_R(A) \subseteq V(\mathcal{F}_R(A)).$$

Proof. Take $p \in B_R(A)$ with $p \notin V(\mathcal{F}_R(A)$. Then $p \not\supseteq \mathcal{F}_R(A)$ and hence A_p/R_p is flat. So by Proposition 2.2, p is not a blowing-up, a contradiction. $\square$

When $A := R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, put $I_i := \{f(X) \in R[X] | f(\alpha_i) = 0\}$ and $C(I_i) := \sum_{f(X) \in I_i} C(f(X))R$, where $C(f(X)))$ denotes the content of $f(X)$.

Theorem 2.4. *Let $A = R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ and $p \in Spec(R)$. Then $p \not\supseteq \bigcap_{i=1}^n C(I_i)$*

Remark 1.15. Let $\varphi : Spec(A) \to Spec(R)$ be the canonical morphism. Then $Im\ \varphi \supseteq V(\mathcal{F}_R(A))$ by Proposition 1.14.

Proposition 1.16. *If for $p \in Spec(R), pA = A$, then $p \not\supseteq \mathcal{F}_R(A)$.*

Proof. If $p \supseteq \mathcal{F}_R(A)$, then $p \in Im\varphi$. So $P \cap R = p$ for some $P \in Spec(A)$. But $P \supseteq pA = A$, a contradiction. Hence $p \not\supseteq \mathcal{F}_R(A)$. $\square$

Theorem 1.17. *Assume that R is a Noetherian domain and that A/R has the FF-obstruction ideal. Let I be an ideal of R. Then $IA = A$ if and only if $I + \mathcal{F}_R(A) = R$ and $\mathcal{G}_R(A) \subseteq p$ for all $p \in Ass_R(R/I)$.*

Proof. ($\Leftarrow$) follows from Proposition 1.6.
($\Rightarrow$) Let $I = q_1 \cap \cdots \cap q_n$ be the primary decomposition with $p_i = \sqrt{q_i}$. Then $IA = A$ implies that $p_iA = A$ for all i. So $p_i \not\supseteq \mathcal{F}_R(A)$ by Proposition 1.16. Suppose that $p_i \not\supseteq \mathcal{G}_R(A)$. Then $q_i = q_iA \cap R = R$ by Proposition 1.7, a contradiction. Thus $p_i \supseteq \mathcal{G}_R(A)$. Therefore $p_i \not\supseteq \mathcal{F}_R(A)$ and $p_i \supseteq \mathcal{G}_R(A)$. Put $p = p_i$. If $p + \mathcal{F}_R(A) \neq R$, then there exists a maximal ideal m of R such that $m \supseteq p + \mathcal{F}_R(A)$. We have that $m \supseteq \mathcal{F}_R(A)$ yields $m \in Im\varphi$ by Proposition 1.14. But $p \subseteq m$ and $pA = A$ implies that $mA = A$, a contradiction. Thus $p + \mathcal{F}_R(A) = R$. This implies that $I + \mathcal{F}_R(A) = R$. $\square$

Corollary 1.17.1. *Assume that R is a Noetherian domain and that A/R has the FF-obstruction ideal. For a non-zero $a \in R, aA = A$ if and only if $p \supseteq \mathcal{G}_R(A)$ for all $p \in Ass_R(R/aR)$ and $aR + \mathcal{F}_R(A) = R$.*

Theorem 1.18. *Assume that R is a Noetherian domain and that A/R has the FF-obstruction ideal. If grade $\mathcal{G}_R(A) > 1$, then $R \cap A^* = R^*$, where A^* (resp. R^*) denotes the group of the units in A (resp. R).*

Proof. The inclusion $R \cap A^* \supseteq R^*$ is obvious. Take $a \in R \cap A^*$. Then $aA = A$. So $p \supseteq \mathcal{G}_R(A)$ for all $p \in Ass_R(R/aR)$ by Corollary 17.1. But since $grade\ p = 1$

if and only if p is not blowing-up.

Proof. ($\Rightarrow$) $p \not\supseteq \bigcap_{i=1}^{n} C(I_i)$ means that $p \not\supseteq I_i$ for all i. So there exists $f(X) \in R[X]$ such that $f(\alpha_i) = 0$ for all i and $C(f) \not\subseteq p$. Thus the residue class α_i^* of α_i in A_p/pA_p is algebraic over $k(p) = R_p/pR_p$. Hence $\dim A_p/pA_p = 0$.
($\Leftarrow$) Since p is not blowing-up, α_i^* of $\alpha_i \in A_p/pA_p$ is algebraic over R_p/pR_p for all i. Hence $C(I_i) \not\subseteq p$. $\square$

Corollary 2.4.1. *Let $A = R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ Then $B_R(A) = V(\bigcap_{i=1}^{n} C(I_i))$.*

3. Anti-Integral Extensions

Let R be a Noetherian integral domain and $R[X]$ a polynomial ring. Let α be an element of an algebraic field extension L of the quotient field K of R and let $\pi : R[X] \longrightarrow R[\alpha]$ be the R-algebra homomorphism sending X to α. Let $\varphi_\alpha(X)$ be the monic minimal polynomial of α over K with $\deg \varphi_\alpha(X) = d$ and write $\varphi_\alpha(X) = X^d + \eta_1 X^{d-1} + \ldots + \eta_d$. Let $I_{[\alpha]} := \bigcap_{i=1}^{d}(R :_R \eta_i)$. For $f(X) \in R[X]$, let $C(f(X))$ denote the ideal generated by the coefficients of $f(X)$, that is, the content ideal of $f(X)$. Let $J_{[\alpha]} := I_{[\alpha]}C(\varphi_\alpha(X))$, which is an ideal of R and contains $I_{[\alpha]}$. The element α is called an *anti-integral* element of degree d over R if $Ker\,\pi = I_{[\alpha]}\varphi_\alpha(X)R[X]$. When α is an anti-integral element over R, $R[\alpha]$ is called an *anti-integral extension* of R. (See [OSY1] for details.)

In what follows, we use the following notations unless otherwise specified.

R : a Noetherian integral domain,
$K := K(R)$: ~~the quotient field~~ of R,
α : a non-zero element of a field extension of K,
$d = [K(\alpha) : K]$,
$\varphi_\alpha(X) = X^d + \eta_1 X^{d-1} + \ldots + \eta_d$, the minimal polynomial of α over K.
$I_{[\alpha]} := \bigcap_{i=1}^{d}(R :_R \eta_i)$, which is an ideal of R.
$I_a := R :_R aR$ for $a \in K$.

It is clear that for $a \in K, I_{[a]} = I_a$ by definition.

For $f(X) \in K[X]$,

$C(f(X))$:= the ideal generated by all coefficients of $f(X)$,
that is, $C(f(X))$ is the content ideal of $f(X)$.

Let $J_{[\alpha]} := I_{[\alpha]}C(\varphi_\alpha(X))$, which is an ideal of R and contains $I_{[\alpha]}$.

Proposition 3.1. *If $I_{[\alpha]} + \eta_d I_{[\alpha]} = R$, then $R[\alpha] \cap R[1/\alpha]$ is flat over R.*

Proof. Take $P \in Spec(R)$. Then $p \not\supseteq I_{[\alpha]}$ or $p \not\supseteq \eta_d I_{[\alpha]}$. If $p \not\supseteq I_{[\alpha]}$, then α is integral over R_p. So $R_p[\alpha]$ is free of *rank* d by [OSY1,(2.5)]. In this case, $R_p \subseteq R_p[\alpha] \subseteq R_p[1/\alpha]$ and hence $(R[\alpha] \cap R[1/\alpha])_p = R_p[\alpha]$. If $p \not\supseteq \eta_d I_{[\alpha]}$, then α^{-1} is integral over R_p by [OY2, Proposition 1]. Thus $R_p[\alpha^{-1}]$ is free over R_p. In this case, $R_p \subseteq R_p[1/\alpha] \subseteq R_p[\alpha]$ and hence $(R[\alpha] \cap R[1/\alpha])_p = R_p[1/\alpha]$. □

In the rest of this section, we use the following notation in addition to the above notation mentioned in the first paragraph :

$A = R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, where each α_i is an *anti-integral element* of degree d over R,

$L :=$ the quotient field of A.

We assume that $tr.deg_K L = d$.

Proposition 3.2. *Under the above notation, we have*

$$B_R(A) = V(\bigcap_{i=1}^{n} J_{[\alpha_i]}).$$

Proof. This follows from Corollary 2.4.1 because $C(I_i) = J_{[\alpha_i]}$. □

Proposition 3.3.

$$V(\bigcap_{i=1}^{n} I_{[\alpha_i]}) = \{p \in Spec(R) | A_p/R_p \text{ is not integral}\}.$$

Proof. If A_p/R_p is integral, then $R_p[\alpha_i]/R_p$ is integral. So we have $p \not\supseteq I_{[\alpha_i]}$. Conversely if $p \not\supseteq I_{[\alpha_i]}$ for all i, α_i is integral over R_p and hence A_p/R_p is integral.

□

By Proposition 3.3, the obstruction ideal of integralness is given by $\bigcap_{i=1}^{n}$.

Theorem 3.4. *Assume that $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ are integral over R and that $R[\alpha_i]/R$ is unramified for some i. Then A_p/R_p is flat if and only if $A_p = R_p[\alpha_i]$.*

Proof.($\Leftarrow$) α_i is anti-integral and integral, $A_p = R_p[\alpha_i]$ is free over R_p by [OSY2,(2.5)].
($\Rightarrow$) Note that $R_p \subseteq R_p[\alpha_i] \subseteq A_p$ and A_p is a free R_p-module of *rankd*. Since α_i is anti-integral over R and $R[\alpha_i]/R$ is unramified, $R_p[\alpha_i]$ is a free R_p-module of *rankd* ([KY1,Theorem 1]). Since $R[\alpha_i]/R$ is unramified, $pA_p \cap R_p[\alpha_i] = pR_p[\alpha_i]$. So we have $A_p/pA_p \supseteq R_p[\alpha_i]/pR_p[\alpha_i] \supseteq R_p/pR_p$. Hence $A_p/pA_p = R_p[\alpha_i]/pR_p[\alpha_i]$, that is, $A_p = R_p[\alpha_i] + pA_p$. By Nakayama's lemma, we obtain $A_p = R_p[\alpha_i]$. □

Notation 3.5. Put $B_i = R[\alpha_i]$. Noting that $\alpha_j \in L = K + K\alpha_i + \cdots + K\alpha_i^{d-1}$, we write :

$$\alpha_j = \zeta_{j0}^{(i)} + \zeta_{j1}^{(i)}\alpha_i + \cdots + \zeta_{jd-1}^{(i)}\alpha_i^{d-1}.$$

Lemma 3.5. *Assume that B_i/R is an integral extension and $a \in R$. Then $a\alpha_j \in B_i$ if and only if $a\zeta_{j\ell} \in R$ for all ℓ.*

Proof. By the assumption, $B_i = R + R\alpha_1 + \cdots + R\alpha_i^{d-1}$ is a free R-module by [OSY2,(2.5)]. Hence we have $a\alpha_j \in B_i \Leftrightarrow a\zeta_{j\ell} \in R$ for all ℓ. □

Corollary 3.5.1. *Let p be a prime ideal R. Then*
(i) $p \not\supset \bigcap_{\ell=0}^{d-1} I_{\zeta_{j\ell}^{(i)}} \Leftrightarrow \alpha_j \in (B_i)_p$,
(ii) $p \not\supset \bigcap_{j=1}^{n} \bigcap_{\ell=0}^{d-1} I_{\zeta_{j\ell}^{(i)}} \Leftrightarrow A_p = (B_i)_p$.

Theorem 3.6. *Assume that A is integral and unramified over R. Let $p \in Spec(R)$. Then A_p is flat over R_p if and only if $p \not\supset \sum_{i=1}^{n}(\bigcap_{j=1}^{n} \bigcap_{\ell=0}^{d} I_{\zeta_{j\ell}^{(i)}})$.*

Proof.($\Rightarrow$) By Theorem 3.4, $A_p = R_p[\alpha_i]$ for some $i > 1$. So $p \not\supset \bigcap_{j=1}^{n} \bigcap_{\ell=0}^{d} I_{\zeta_{j\ell}^{(i)}}$.
($\Leftarrow$) There exists i such that $p \not\supset \bigcap_{j=1}^{n} \bigcap_{\ell=0}^{d} I_{\zeta_{j\ell}^{(i)}}$. Thus $A_p = R_p[\alpha_i]$ and A_p is a free R_p-module. □

Definition 3.7. Define

$$\mathcal{H}_R(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\bigcap_{\ell=0}^{d-1} I_{\zeta_{j\ell}^{(i)}}\right)}.$$

Remark 3.8.(i) If for $p \in Spec(R)$, $p \not\supseteq \mathcal{H}_R(A)$, there exists i such that $A_p = R_p[\alpha_i]$. The converse statement is not necessarily valid. But the implication $\bigcap_{i=1}^{n} I_{[\alpha_i]} \cap \mathcal{H}_R(A) \subseteq \mathcal{F}_R(A)$ holds.
(ii) If A is integral and unramified over R, then $\mathcal{H}_R(A) = \mathcal{F}_R(A)$ by Theorem 3.6.
(iii) If $\mathcal{H}_R(A) = R$, then the extension A/R is a locally simple anti-integral extension. So many things are reduced to a simple anti-integral extension. In fact, for $p \in Spec(R)$, if $p \not\supseteq \bigcap_{j=1}^{n}\bigcap_{\ell=0}^{d-1} I_{\zeta_{j\ell}^{(i)}}$, we have $A_p = R_p[\alpha_i]$.

Theorem 3.9.

$$\sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} J_{[\alpha_i]}} \supseteq \mathcal{F}_R(A).$$

Proof. Take $p \not\supseteq \mathcal{F}_R(A)$. Then A_p/R_p is flat. By Proposition 2.2, A_p/R_p is not blowing-up. Thus $p \in B_R(A) = V(\bigcap_{i=1}^{n} J_{[\alpha_i]}$ by Proposition 2.2. So we have $p \not\supseteq \bigcap_{i=1}^{n} J_{[\alpha_i]}$. Therefore $\sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} J_{[\alpha_i]}} \supseteq \mathcal{F}_R(A)$. □

Theorem 3.10. *Assume that $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ are integral over R.*
(i) If $p \in Spec(R)$ satisfies $p \not\supseteq \mathcal{H}_R(A)$, then A_p/R_p is flat.
(ii) If there exists i such that $R_p[\alpha_i]/R_p$ is unramified, A_p/R_p is flat $\Rightarrow$ $p \not\supseteq \mathcal{H}_R(A)$.

Proof. (i) Since $p \not\supseteq \mathcal{H}_R(A)$, $A_p = R_p[\alpha_i]$ for some i. Since α_i is anti-integral and integral, $A_p = R_p[\alpha_i]$ is a free R_p-module. So the conclusion is obvious.
(ii) It is obvious that $pA_p \cap R_p[\alpha_i] \supseteq pR_p[\alpha_i]$. Since $R_p[\alpha_i]/R_p$ is unramified, $pR_p[\alpha_i]$ is a radical ideal. Let $pR_p[\alpha_i] = p_1 \cap \cdots \cap p_t$ with $p_i \in Spec(R[\alpha_i])$. Since $A_p/R_p[\alpha_i]$ is integral, there exists $P_i \in Spec(A_p)$ such that $P_i \cap R_p[\alpha_i] = p_i$ and $P_i \supseteq pA_p$. Thus $p_1 \cap \cdots \cap p_t = pR_p[\alpha_i] \supseteq pA_p \cap R_p[\alpha_i]$. Hence $pA_p \cap R_p[\alpha_i] = pR_p[\alpha_i]$. So $A_p/pA_p \supseteq R_p[\alpha_i]/pR_p[\alpha_i]$, both of which have the same dimension

as $k(p)$-vector space. Hence $A_p = R_p[\alpha_i]$ by Nakayama's lemma.

Definition 3.11.

$$\mathcal{E}_R(A) := \{a \in R | A[1/a] \text{ is unramified over } R[1/a]\} \cup \{0\} = \sqrt{Ann_R \Omega_R(A)}.$$

Corollary 3.10.1. *Assume that A/R is integral and that $\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_R(R[\alpha_i]) = R$. Then A_p/R_p is flat if and only if $p \not\supseteq \mathcal{H}_R(A)$.*

Theorem 3.12. *Assume that A/R is an integral extension.*
(i) If $p \not\supseteq \mathcal{H}_R(A)$ with $p \in Spec(R)$, then $A_p = R_p[\alpha_i]$ for some i and A_p/R_p is flat.
(ii) If for $p \in Spec(R)$, A_p/R_p is flat and $p \not\supseteq \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_R(R[\alpha_i])$, then $\mathcal{F}_R(A) \supseteq \mathcal{H}_R(A) \supseteq \mathcal{F}_R(A) \cap \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_R(R[\alpha_i])$

Proof. (i) Since $p \not\supseteq \mathcal{H}_R(A)$, $p \not\supseteq \bigcap_{j=1}^n \bigcap_{\ell=0}^{d-1} I_{\zeta_{j\ell}^{(i)}}$ for some i. Thus $\alpha_j \in R_p[\alpha_i]$ and hence $A_p = R_p[\alpha_i]$. Since α_i is anti-integral and integral, A_p/R_p is flat([OSY2,(2.5)]).
(ii)Take p such that $p \not\supseteq \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_R(R[\alpha_i])$. Then $p \not\supseteq Ann_R \Omega_R(R[\alpha_i])$ for some i. Thus $R_p[\alpha_i]/R_p$ is unramified. Hence the flatness of A_p/R_p yields $A_p = R_p[\alpha_i]$ by Theorem 3.10. Therefore $p \not\supseteq \mathcal{H}_R(A)$.

Remark 3.13. Assume that A is integral over R. If $\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_R(R[\alpha_i]) = R$, then $\mathcal{F}_R(A) = \mathcal{H}_R(A)$.

References

[KY1] M.Kanemitsu and K.Yoshida : Anti-integral extensions and unramified extensions, *Preprint.*

[KY2] M.Kanemitsu and K.Yoshida : Some remarks on the unit groups of the rings of an anti-integral extension,*The Bulletin of Aich University of Education*, Vol.XLII(Nature Science)(1993),1-5.

[M] H.Matsumura : *Commutative Ring Theory,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[N] M.Nagata : *Local Rings*, Interscience, 1962.

[OY1] S.Oda and K.Yoshida : Anti-integral extensions of Noetherian domains, *Kobe J. Math.*, 5 (1988),43-56.

[OY2] S.Oda and K.Yoshida : Remarks on an extension generated by a super-primitive element, *Preprint.*

[OSY1] S.Oda, J.Sato and K.Yoshida : High degree anti-integral extensions of Noetherian domains, *Osaka J. Math.*,30 (1993),119-135.

[OSY2] S.Oda, J.Sato and K.Yoshida : On exclusive extensions of Noetherian domains, *Preprint.*

[OSuY] S.Oda, T.Sugatani and K.Yoshida : On subrings of super-primitive extensions, *Preprint.*

Complete Intersection Monomial Curves の定義イデアルについて

衛藤　和文　　早大　理工
神蔵　正

Vを $\mathbf{Z}^N$の rank rの submodule とし、$\sigma_i(v)$ で $v \in V$の i番目の成分を表すことにする。$v \in V$に対し、次のように $k[X_1, \cdots, X_N]$ の多項式を対応させる (但し、kは体)。

$$F_+(v) := \prod_{\sigma_i(v)>0} X_i^{\sigma_i(v)} \quad (\text{もし、すべての } i \text{ に対し、} \sigma_i(v) \leq 0 \text{ なら } F_+(v) = 1)$$
$$F_-(v) := \prod_{\sigma_i(v)<0} X_i^{-\sigma_i(v)} \quad (\text{もし、すべての } i \text{ に対し、} \sigma_i(v) \geq 0 \text{ なら } F_-(v) = 1)$$
$$F(v) \ := F_-(v) - F_+(v)$$

$I(V)$ をすべての $F(v)(v \in V)$ で生成される ideal とする。このような形で表される ideal の例としては次のようなものがある。

1. monomial curve の定義 ideal

   $n_1, \cdots, n_r$を自然数とし、その最大公約数を 1 とする。$\phi : k[X_1, \cdots, X_r] \to k[t]$ で、X_iを t^{n_i}に写す ring homomorphism とする。このとき、$I = \mathrm{Ker}\,\phi$ は、$(n_1, \cdots, n_r)$ を $\mathbf{Z}^r$から $\mathbf{Z}$ への surjective homomorphism とみたときの kernel Vに対して $I(V)$ という形で表せる。

2. $\mathbf{Z}^N$ graded ring

   ring $k[\prod_i t_i^{n_{i1}}, \cdots, \prod_i t_i^{n_{iq}}] (\subset k[t_1^{\pm1}, \cdots, t_p^{\pm1}])$ を考える。
   $k[X_1, \cdots, X_q]$ からこの環への自然な全射を考えるとき、その kernel は $V = \mathrm{Ker}\,\phi$、但し、$\phi = (n_{ij}) : \mathbf{Z}^q \to \mathbf{Z}^p$を用いて、$I(V)$ という形で表せる。

3. $2 \times r$ matrix の 2×2 minors で生成された ideal

$M = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1r} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2r} \end{pmatrix}$ とし、
v_iを$\sigma_{1i}(v_i) = 1$, $\sigma_{2i}(v_i) = -1$, その他の成分は 0 の vector とする ($i = 1, \cdots, r$)。
$V = \langle v_2 - v_1, v_3 - v_1, \cdots, v_r - v_1 \rangle$ とすれば、Mの 2×2 minors で生成される ideal は $I(V)$ と表せる。
(一般に $p \times q$ matrix の 2×2 minors で生成された ideal も $I(V)$ の形で表される。)

まず、$\phi : \mathbf{Z}^N \to \mathbf{Z}^{r'}$を surjective homomorphism とする。$V = \mathrm{Ker}\ \phi$とし、$I(V)$ を $I(\phi)$ と表すことにすると、$I(\phi)$ は prime ideal になる。

Proof. まず最初に、$G \in I(\phi)$ となる必要十分条件は $G(\prod t_p^{n_{p1}}, \cdots, \prod t_p^{n_{pN}}) = 0$ であることに注意する、但し $\phi = (n_{pq})$。

そこで $G_1 G_2 \in I(\phi)$ とすると、

$$G_1(\prod t_p^{n_{p1}}, \cdots, \prod t_p^{n_{pN}}) G_2(\prod t_p^{n_{p1}}, \cdots, \prod t_p^{n_{pN}}) = 0.$$

ゆえに、

$$G_1(\prod t_p^{n_{p1}}, \cdots, \prod t_p^{n_{pN}}) = 0 \text{ または } G_2(\prod t_p^{n_{p1}}, \cdots, \prod t_p^{n_{pN}}) = 0.$$

すなわち $G_1 \in I(\phi)$ または $G_2 \in I(\phi)$。 Q.E.D.

$I(V)$ の height に関しては、

Proposition 0.1

$$ht\ I(V) = rank\ V.$$

Proof. 一般の場合は証明が technical なので、$V = \mathrm{Ker}\ \phi$ 但し、$\phi : \mathbf{Z}^N \to \mathbf{Z}^{r'}$:surjective homomorphism の場合だけを示す。$A = k[X_1, \cdots, X_N]$, $B = k[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_N^{\pm 1}]$ とおくと、

$$\begin{aligned} A/I(V) &\hookrightarrow k[t_1^{\pm 1}, \cdots, t_{r'}^{\pm 1}] \text{ で、} \\ A/I(V) \otimes B &\cong k[t_1^{\pm 1}, \cdots, t_{r'}^{\pm 1}] \text{ である。} \end{aligned}$$

ゆえに、$\dim A/I(V) = \dim A/I(V) \otimes B = r' = N - r$より、ht $I(V) = r$。 Q.E.D.

Corollary 0.2 *Vを $\mathbf{Z}^N$の rank rの subspace とする。このとき $I(V)$ が prime となる必要十分条件は、ある surjective homomorphism ϕが存在し $V = Ker\ \phi$となることである。*

Proof. $V = \mathrm{Ker}\ \phi$のときは明らかに prime。そこで、$I(V)$: prime とする。このとき、Coker $(V \hookrightarrow \mathbf{Z}^r)$ の rank は $r' = N - r$で、ゆえに $\mathbf{Z}^{r'} \oplus T$と表せる、但し Tは torsion module。$\mathbf{Z}^{r'} \oplus T$から $\mathbf{Z}^{r'}$への canonical な projection を考えると、次の可換図をえる

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \mathbf{Z}^N & \longrightarrow & \mathbf{Z}^{r'} \oplus T & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle pr} & & \\ 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & \mathbf{Z}^N & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{Z}^{r'} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

但し $V' = \mathrm{Ker}\ \phi$。ここで、$I(V')$ は prime で ht $I(V') = r$。ゆえに、$I(V) \subset I(V')$ より、$I(V) = I(V')$。すなわち、$V = V' = \mathrm{Ker}\ \phi$。 Q.E.D.

1 Complete Intersection Case

この節では、次を仮定する。

$$V \subset V' = \mathrm{Ker}\ \phi, \phi = (n_{pq}) \text{ で、} n_{pq} \geq 0, \sum_p n_{pq} > 0 \text{ for any } q$$

このとき、$I(V)$ は homogeneous ideal in multigraded ring $k[X_1, \cdots, X_N]$ (但し、$\deg X_i = (n_{1i}, \ldots, n_{r'i}), r' = N - r$) である。ゆえに、$I(V)$ は $F(v_j)$ からなる minimal generating system を常にもつ。

Theorem 1.1 *$I(V)$ が complete intersection となる必要十分条件は、$(*)$ をみたす Vの生成系 $v_1, \cdots, v_r$が存在することである。*

$$(*) \begin{cases} \text{任意の } s\ (2 \leq s \leq r) \text{ と} \\ \text{任意の } i_1, \cdots, i_s, j_1, \cdots, j_s\ (1 \leq i_k \leq N, 1 \leq j_l \leq r) \\ \text{に対し、ある } j_m \text{が存在し、} \\ \qquad \sigma_{i_k}(v_{j_m}) \geq 0 \quad for\ 1 \leq k \leq s \\ \text{または} \quad \sigma_{i_k}(v_{j_m}) \leq 0 \quad for\ 1 \leq k \leq s \end{cases}$$

このとき、$I(V)$ は $F(v_1), \cdots, F(v_r)$ で生成される。

まず、$(*)$ が必要条件であることを示す。$I(V)$ が $F(v_1), \cdots, F(v_r)$ で生成されていると仮定する。s を固定して、任意の $m\ (1 \leq m \leq s)$ に対し、必ず$\sigma_{i_m}(v_m) > 0$, $\sigma_{i'_m}(v_m) < 0$ をみたす i_m, i'_mが存在すると仮定する。$J = I(V) + (X_1, \cdots, X_s)$ とおく。このとき、ht $(I(V) + (X_1)) = r + 1$ となる。Jがこの ideal を含むので、ht $J \geq r + 1$ である。

一方、$F(v_m)$ は $X_1, \cdots, X_s$で生成されているので、$\mu(J) \leq r+s-s=r$である。しかし、これは ht $J \geq r+1$ に矛盾。

逆に、$(*)$ をみたす Vの base が存在するときは、次の key lemma により、$I(V)$ が生成されることがわかる。

Lemma 1.2 ([2, Lemma 1.2]) $v_1, v_2 \in V$とする。

もし。任意の i, i'に対して、

$$\begin{aligned} \sigma_i(v_1) < 0, \quad \sigma_i(v_2) > 0, \\ \sigma_{i'}(v_1) > 0, \quad \sigma_{i'}(v_2) < 0. \end{aligned}$$

が成り立たないならば、$F(v_1+v_2)$ は、$F(v_1), F(v_2)$ で生成される。

Proof. $\sigma_{i'}(v_1) > 0, \sigma_{i'}(v_2) < 0$ となる i'が存在するとき、仮定より、各 i に対して、$\sigma_i(v_1) < 0$ ならば、$\sigma_i(v_2) \leq 0$ である。ゆえに、

$$\begin{aligned} F(v_1+v_2) = & \prod_{\sigma_i(v_1)<0} X_i^{-\sigma_i(v_2)} \prod_{\substack{\sigma_i(v_1)\geq 0 \\ \sigma_i(v_1+v_2)<0}} X_i^{-\sigma_i(v_1+v_2)} F(v_1) \\ & + \prod_{\sigma_i(v_1)>0} X_i^{\sigma_i(v_1)} \prod_{\substack{\sigma_i(v_2)\leq 0 \\ \sigma_i(v_1+v_2)\geq 0}} X_i^{\sigma_i(v_1+v_2)} F(v_2). \end{aligned}$$

となる。もし、任意の i'に対し、$\sigma_{i'}(v_1) > 0, \sigma_{i'}(v_2) < 0$ ならば、すべての i'に対し、$\sigma_{i'}(v_1) > 0 \Rightarrow \sigma_{i'}(v_2) \geq 0$ が成り立つ。このときも前の場合と同様に、$F(v_1+v_2)$ は $F(v_1), F(v_2)$ で生成される。

この定理の Corollary として、次の Delorme の結果をえる。

Corollary 1.3 (Delorme[1, Lemma 6]) すべての *complete intersection monomial curve* は、それを定義する *unimodular* の長さより短い *unimodular* によって定義される *complete intersection monomial curve* から構成される。

また、rank $V < N-1$ のときは、

Theorem 1.4 $I(V)$ が *complete intersection* のときは、ある *rank* $V' = N-1$ で $I(V')$ が *complete intersection ideal* となるような V'が存在し、$I(V)$ はその *minimal generating system* の一部で生成される。

最後に、たとえ $I(V)$ が prime でも、上の定理をみたし、$I(V')$ が prime となるような V'がとれるとは限らないことを注意する。

例えば、$V = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$とすると、$V$ は$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$を base にもつので $I(V)$ は complete intersection。もちろん $I(V)$ は prime。そこで、$I(V)$ を定理をみたすような height 3 の complete intersection にひろげるには、$w = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 但し $a > 0$, $b > 0$ という形の vector を加えなければならない。しかし、このときどのような a, b に対しても、必ず $V + \langle w \rangle$ から $\mathbf{Z}^4$への injection の cokernel は torsion をもつので、$I(V + \langle w \rangle)$ は prime ではない。

参考文献

[1] C. Delorme. Sous-monoïdes d'intersection complète de N. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 9:145–154, (1976).

[2] K. Eto. Almost complete intersection monomial curves in A^4. (preprint).

Complete local (S_{n-1}) rings of type $n \geq 3$ are Cohen-Macaulay

青山 陽一（島根大・教育）

§1. Introduction

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を d 次元局所環とする。A の type $r(A)$ を $r(A) = \dim_k \mathrm{Ext}_A^d(k, A)$ で定義する。Gorenstein 環の特徴付の一つとして，

([B]) A Gorenstein $\iff$ A Cohen-Macaulay & $r(A) = 1$

が知られている。Vasconcelos は，A Cohen-Macaulay は不要，即ち，

([V, p.53]) $r(A) = 1 \implies$ A Cohen-Macaulay 従って Gorenstein

と予想した。Foxby が，$A \supset$ field の場合や $\mathrm{Ass}(\hat{A}) = \mathrm{Min}(\hat{A})$ （^ は $\mathfrak{m}$-adic completion を示す）の場合に，この予想が正しいことを証明し（[F, (3.7) and (4.3)]），Roberts が一般に証明した（[R_2]）。

では，$r(A) \geq 2$ のときはどうかと言うと，

([C, 1.1]) $\hat{A}$ domain, $r(A) = 2 \implies$ A Cohen-Macaulay

が証明され，non-Cohen-Macaulay equidimensional complete local ring of type two なる例（[C, 1.3]）と non-Cohen-Macaulay reduced complete local ring of type two なる例（[C, 1.4]）が示された。Marley は上の定理の一般化として，

([M]) $\mathrm{Ass}(\hat{A}) = \mathrm{Assh}(\hat{A})$, $r(A) = 2 \implies$ A Cohen-Macaulay

を証明し，

$r(A) = n \geq 3$, $\hat{A}$ が Serre の条件 (S_{n-1}) をみたす $\implies$ A Cohen-Macaulay ?

を提出した。これに対し，Kawasaki が $A \supset$ field の場合に正しいことを示した（[K, (3.4)]）。その証明には，rank の交代和を評価する Bruns の定理（[Br]）を使っている。ここでは，同様の手法により $A \supset$ field を仮定しなくても成立することを示す。即ち，Bruns の定理での評価は 1 悪くなるが，環に対してはその差が埋められることを示す。

Theorem (1.1) n 整数 ≥ 3, $r(A) \leq n$, $\hat{A}$ (S_{n-1}) $\implies$ A Cohen-Macaulay

加群についても同様のことが示せる。M を s 次元有限生成 A 加群とし，$r(M) = \dim_k \mathrm{Ext}_A^s(k, M)$ と定める。

Theorem (1.2) $r(M) \leq n$, $\hat{M}$ (S_n) & equidimensional $\implies$ M Cohen-Macaulay

$n = 1$ のときは，次の定理の特別な場合である。

Theorem (1.3) $\quad r(M)=1 \implies M,\ B=A/\mathrm{ann}M$ 共に Cohen-Macaulay で，
M は B の canonical module である

Foxby は「$r(M)=1$, M Cohen-Macaulay $\Rightarrow$ B Cohen-Macaulay, $M \cong K_B$」を証明し（[F, (3.1)]），上の定理の形で予想した。そして，$A \supset$ field の場合や $\dim M < \dim A$ の場合に証明した（[F, (3.7)]）。$A \supset$ field の仮定は New Intersection Theorem を使うために必要であった。現在は，New Intersection Theorem は一般に正しいことが判っている（[R3]）ので，[F]での論法は一般の場合にも正しい。但し，[R2] の方法で Theorem(1.3) は証明されるので，type 1 の場合の復習を兼ねて，§3で証明を記すことにする。

双対化複体，極小自由分解，ホモロジー不変量等については，[R1] を参照して下さい。

§2. Proof of Theorem(1.1)

A が dualizing complex を持つとしてよい。$d=\dim A$ についての帰納法で証明する。A が Cohen-Macaulay でないとし，$t=\operatorname{depth}A$ とおく。$d>t \geq n-1$ である。$D.$ を A の dualizing complex で，$D_i=\oplus\{E(A/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}(A), \dim A/\mathfrak{p}=i\}$ なるものとする。A は (S_2) で catenary であるから，$\dim A/\mathfrak{p}=d$ for $\forall \mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(A)$。従って，$D_d=\oplus\{E(A/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(A)\}$。$F.$ を $D.$ の minimal free resolution とする。(cf. [R1, II.2.4]) (cf. [0, p.38])

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
F. : & \cdots \longrightarrow & F_{d+1} & \xrightarrow{f_d} & F_d & \xrightarrow{f_{d-1}} & \cdots & \xrightarrow{f_t} & F_t & \longrightarrow & 0 & \cdots & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
D. : & \cdots\cdots & 0 & \longrightarrow & D_d & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & D_t & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & D_0 & \longrightarrow & 0 \ \cdots
\end{array}$$

このとき，$\operatorname{rank}F_i=\dim_k \operatorname{Ext}_A^i(k,A)$ for $\forall i$ である.（[R1, II.3.6]）特に $\operatorname{rank}F_d=r(A)$。$\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)$, $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{m}$ をとる。$\dim A_\mathfrak{p}=d-\dim A/\mathfrak{p}$ である。$D._\mathfrak{p}$ は $A_\mathfrak{p}$ の dualizing complex で，$F._\mathfrak{p}$ はその free resolution である。$D_{i\mathfrak{p}}=\oplus\{E(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(A), \mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}, \dim A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}=i-\dim A/\mathfrak{p}\}$ となっていて，$F._\mathfrak{p}$ の直和因子として $D._\mathfrak{p}$ の minimal free resolution が得られるから（cf. [R1, II.2.4]），$r(A_\mathfrak{p})=\dim_{k(\mathfrak{p})}\operatorname{Ext}_{A_\mathfrak{p}}^{\dim A_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}),A_\mathfrak{p})\leq \operatorname{rank}F_d=r(A)\leq n$。$A_\mathfrak{p}$ はもちろん (S_{n-1}) であるから，帰納法により $A_\mathfrak{p}$ は Cohen-Macaulay である。従って，$F_{d\mathfrak{p}}\to\cdots\to F_{t\mathfrak{p}}\to 0$ は exact, split である。

$G_i=\operatorname{Hom}_A(F_{d-i},A)$, $g_i={}^t f_{d-i}$ とおいて，complex

$$G. : \quad 0\longrightarrow G_{d-t}\xrightarrow{g_{d-t}} G_{d-t-1}\longrightarrow\cdots\xrightarrow{g_2} G_1\xrightarrow{g_1} G_0$$

を考える。$j=1,\dots,d-t$ に対し，$r_j=\sum_{i=j}^{d-t}(-1)^{i-j}\operatorname{rank}G_i=\sum_{i=t}^{d-j}(-1)^{d-j-i}\operatorname{rank}F_i$ とおき，I_j を g_j の r_j-minor 全部で生成される ideal とおく。$\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)$, $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{m}$ に対し，$G._\mathfrak{p}$ は exact, split であるから，$I_{j\mathfrak{p}}=A_\mathfrak{p}$ である。従って，I_j は $\mathfrak{m}$-primary で $\dim A/I_j=0\leq d-t-j$ for $j=1,\dots,d-t$。

$t<d-1$ のとき。[Br, Theorem 3, Remark(b)] より，$r_1\geq t$。$\operatorname{rank}F_d\geq r_1+1$

であるが，今 $\operatorname{rank} F_d = r_1+1$ と仮定する。$Z = \operatorname{Ker} f_{d-1}$，$B = \operatorname{Im} f_d$ とおく。$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A)$ をとる。$\dim A/\mathfrak{p} = d$ である。$0 \to Z_{\mathfrak{p}} \to F_{d\mathfrak{p}} \to \cdots \to F_{t\mathfrak{p}} \to 0$ は exact, split であるから，$Z_{\mathfrak{p}}$ は free で $\operatorname{rank} Z_{\mathfrak{p}} = \operatorname{rank} F_d - r_1 = 1$。$Z_{\mathfrak{p}}/B_{\mathfrak{p}} \cong H_d(F_\cdot)_{\mathfrak{p}} \cong E(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ であるから，$\ell(Z_{\mathfrak{p}}) - \ell(B_{\mathfrak{p}}) = \ell(E(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})) = \ell(A_{\mathfrak{p}})$ であり，$B_{\mathfrak{p}} = 0$ を得る。B は free module の submodule であるから，$B = 0$ となる。すると，$\cdots \longrightarrow F_{d+2} \longrightarrow F_{d+1} \longrightarrow 0$ は exact, split, minimal であるから，$F_i = 0$ for $i > d$。故に $\dim_k \operatorname{Ext}_A^i(k, A) = \operatorname{rank} F_i = 0$ for $i > d$ となり，これは A が Gorenstein であることを示す。矛盾。従って，$r(A) = \operatorname{rank} F_d > r_1+1 \geqq t+1 \geqq n$ で，矛盾。　$t = d-1$ のとき。I_1 は f_{d-1} の maximal minor 全部で生成される $\mathfrak{m}$-primary ideal であるから，$n \leqq d = \operatorname{ht} I_1 \leqq \operatorname{rank} F_d - \operatorname{rank} F_{d-1} + 1 \leqq n$。故に，$d = n$，$\operatorname{rank} F_d = n$，$\operatorname{rank} F_{d-1} = 1$。従って，$\exists\, x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ s.t. $H_{d-1}(F_\cdot) \cong A/(x_1, \dots, x_d)$。$\ell(H_{d-1}(F_\cdot)) < \infty$ だから，$x_1, \dots, x_d$ は system of parameters である。local duality により $H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A) \cong \operatorname{Hom}_A(H_{d-1}(D_\cdot), E(A/\mathfrak{m})) \cong \operatorname{Hom}_A(H_{d-1}(F_\cdot), E(A/\mathfrak{m}))$ であるから，$(x_1, \dots, x_d) H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A) = 0$ となる。これと A が (S_{d-1}) なることより，$(x_1, \dots, x_d) H_{\mathfrak{m}}^i(A/(x_1, \dots, x_j)) = 0$ for $i+j < d$ を得る。従って，[T, 2.5, 2.1, 1.5] より $\ell(A/(x_1, \dots, x_d)) - e(x_1, \dots, x_d; A) = \ell(H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A)) = \ell(A/(x_1, \dots, x_d))$ を得，$e(x_1, \dots, x_d; A) = 0$ となる。（e は multiplicity を表わす。）矛盾。　これで Theorem (1.1) の証明が終った。

Theorem (1.2) の証明も同様で，$\operatorname{Hom}_A(M, D_\cdot)$ とその minimal free resolution を考え，$\operatorname{depth} M < s-1$ ($s = \dim M$) のときは $n \geqq r(M) = \operatorname{rank} F_s > r_1 \geqq d - s + \operatorname{depth} M \geqq n$ で矛盾。$\operatorname{depth} M = s-1$ のときは $n < s \leqq d = \operatorname{ht} I_1 \leqq n$ で矛盾。

$A \supset$ field の場合は，$t < d-1$ の場合に $r_1 \geqq t+1$ であるから，次の定理を得る。

Theorem (2.1)　　n 正整数，$A \supset$ field とする。

(1)　(i) $r(A) \leqq n$，(ii) $\hat{A}$ (S_{n-2})（$n \leqq 3$ のときは，A unmixed も仮定する），
　(iii) $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ Cohen-Macaulay for $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\hat{A})$ with $\dim \hat{A}_{\mathfrak{p}} < n$
　$\Longrightarrow$ A Cohen-Macaulay

(2) ([K, (3.1) ii)])　　M 有限生成 A 加群とする。
　(i) $r(M) \leqq n$，(ii) $\hat{M}$ (S_{n-1}) かつ equidimensional，(iii) $\hat{M}_{\mathfrak{p}}$ Cohen-Macaulay for $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(\hat{M})$ with $\dim \hat{M}_{\mathfrak{p}} \leqq n$ $\Longrightarrow$ M Cohen-Macaulay

上の証明をみれば，$d-s$ に応じて (1.2) の仮定を弱く出来るが，それについては省略する。

§ 3. A Proof of Theorem(1.3)

A の dualizing complex $D_\cdot$, $D_i = \oplus\{E(A/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A),\ \dim A/\mathfrak{p} = i\}$, が存在するとしてよい。[F, (3.1)] により, M が Cohen-Macaulay であることを示せばよい。$M^\vee_\cdot = \mathrm{Hom}_A(M, D_\cdot)$ とおく。$M^\vee_i = 0$ for $i > s = \dim M$, $i<0$ である。$M^\vee_\cdot$ の minimal free resolution $F_\cdot$ をとる。

$$\begin{tikzcd}
F_\cdot : \cdots \arrow[r] & F_{s+1} \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d] & F_s \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"] & F_{s-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \cdots \arrow[d] \\
M^\vee_\cdot : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M^\vee_s \arrow[r, "\gamma"] & M^\vee_{s-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M^\vee_0 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{rank}\, F_i = \dim_k \mathrm{Ext}^i_A(k, M)$ for $\forall i$ である。([R₁, II.3.6]) 特に, $\mathrm{rank}\, F_s = 1$, 従って, $F_s \cong A$。

まず, $\beta = 0 \Rightarrow$ M Cohen-Macaulay を示す。

$\beta = 0$ とすると, $F_\cdot = F'_\cdot \oplus F''_\cdot$, $F'_\cdot : \cdots \to F_{s+1} \to F_s \to 0 \cdots$, $F''_\cdot : \cdots 0 \to F_{s-1} \to \cdots \to F_0 \to 0 \cdots$。$M \xrightarrow{q.i.} \mathrm{Hom}_A(M^\vee_\cdot, D_\cdot) \xrightarrow{q.i.} \mathrm{Hom}_A(F_\cdot, D_\cdot) \cong \mathrm{Hom}_A(F'_\cdot, D_\cdot) \oplus \mathrm{Hom}_A(F''_\cdot, D_\cdot)$ (q.i. は quasi-isomorphism を示す) $H_s(F_\cdot) \neq 0$ だから $H_s(F'_\cdot) \neq 0$ で, $\mathrm{Hom}_A(F'_\cdot, D_\cdot)$ は exact でなく $H_0(\mathrm{Hom}_A(F'_\cdot, D_\cdot)) \neq 0$ である。そして, $M \cong M' \oplus M''$, $M' = H_0(\mathrm{Hom}_A(F'_\cdot, D_\cdot))$, $M'' = H_0(\mathrm{Hom}_A(F''_\cdot, D_\cdot))$。

$\mathrm{Hom}_A(F'_\cdot, D_\cdot)$: $\cdots\cdots 0 \to \mathrm{Hom}_A(F_s, D_d) \cdots \to \bigoplus_{i\geq s} \mathrm{Hom}_A(F_i, D_i) \to \cdots$

$\mathrm{Hom}_A(F''_\cdot, D_\cdot)$: $\cdots 0 \to \mathrm{Hom}_A(F_0, D_d) \to \cdots\cdots \to \bigoplus_{0\leq i<s} \mathrm{Hom}_A(F_i, D_i) \to \cdots \mathrm{Hom}_A(F_{s-1}, D_0) \to 0$

各項は injective module. exact ← → exact

$0 \to B_0(\mathrm{Hom}_A(F'_\cdot, D_\cdot)) \to Z_0(\mathrm{Hom}_A(F'_\cdot, D_\cdot)) \to M' \to 0$ exact

injective module

$0 \to B_0(\mathrm{Hom}_A(F''_\cdot, D_\cdot)) \to Z_0(\mathrm{Hom}_A(F''_\cdot, D_\cdot)) \to M'' \to 0$ exact

$M' \xrightarrow{q.i.} \mathrm{Hom}_A(F'_\cdot, D_\cdot)$ より $F'_\cdot \xrightarrow{q.i.} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(F'_\cdot, D_\cdot), D_\cdot) \xrightarrow{q.i.} \mathrm{Hom}_A(M', D_\cdot)$ で, $\dim_k \mathrm{Ext}^i_A(k, M') = \mathrm{rank}\, F'_i = 0$ for $i < s$。従って, depth $M' \geq s$。

$M'' \xrightarrow{q.i.} \mathrm{Hom}_A(F''_\cdot, D_\cdot)$ より $F''_\cdot \xrightarrow{q.i.} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(F''_\cdot, D_\cdot), D_\cdot) \xrightarrow{q.i.} \mathrm{Hom}_A(M'', D_\cdot)$ で, $\dim_k \mathrm{Ext}^i_A(k, M'') = \mathrm{rank}\, F''_i = 0$ for $i \geq s$。従って, inj dim $M'' < s$。

もし $M'' \neq 0$ なら depth A = inj dim $M'' < s \leq$ depth $M' \leq$ depth A を得, 矛盾。故に, $M'' = 0$ 即ち $\mathrm{Hom}_A(F''_\cdot, D_\cdot)$ は exact である。従って, $F''_\cdot$ は exact, split, minimal となり $F''_\cdot = 0$。故に, $F_i = 0$ for $i < s$ で, これより $\mathrm{Ext}^i_A(k, M) = 0$ for $i < s$ を得, depth $M \geq s$ 即ち M Cohen-Macaulay となる。

M が Cohen-Macaulay でないとする。$\beta \neq 0$ である。$Z = \mathrm{Ker}\,\beta$ とおく。$Z \neq F_s$。$\varphi \neq 0$ だから $C = \mathrm{Ker}\,\varphi \neq F_s$。$F_s \cong A$ であるから $Z + C \neq F_s$。$Z + C \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi$ はよい。$x \in \mathrm{Ker}\,\psi$ をとる。$\varphi(x) \in \mathrm{Ker}\,\gamma$ で, $Z/\mathrm{Im}\,\alpha \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\,\gamma$ であるから, $\exists y \in Z$ s.t. $\varphi(y) = \varphi(x)$。故に, $x = y + (x - y) \in Z + C$。従って $Z + C = \mathrm{Ker}\,\psi$。$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(F_s/Z+C)$ をとる。$F_s/Z+C \hookrightarrow M^\vee_{s-1}$ だから, $\mathrm{Ass}(F_s/Z+C) \subseteq \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Ass}(D_{s-1})$ で, $M_\mathfrak{p} \neq 0$, $\dim A/\mathfrak{p} = s-1$ となる。$\mathfrak{p} \supseteq$ 呼

$\in \mathrm{Ass}(F_s/C)$ をとる。$F_s/C \hookrightarrow M_s^{\vee}$ だから，$\mathrm{Ass}(F_s/C) \subseteq \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Ass}(D_s)$ で，$M_{\mathfrak{q}} \neq 0$，$\dim A/\mathfrak{q} = s$ となる。故に，$\dim M_{\mathfrak{p}} = 1$。$\mathrm{depth}\, M_{\mathfrak{p}} = 1$ とすると，$(0 \to F_s/Z \to F_{s-1} \to \cdots \to F_0 \to 0) \otimes A_{\mathfrak{p}}$ は exact, split となり，$F_{s\mathfrak{p}}/Z_{\mathfrak{p}}$ は free。$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(F_s/Z+C)$ だから，$F_{s\mathfrak{p}}/Z_{\mathfrak{p}} \neq 0$。$F_{s\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$ ゆえ $Z_{\mathfrak{p}} = 0$。ところで $Z_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}\, \gamma_{\mathfrak{p}} \neq 0$ だから，矛盾。故に，$\mathrm{depth}\, M_{\mathfrak{p}} = 0$。また，$1 \leqq r(M_{\mathfrak{p}}) \leqq r(M) \leqq 1$。従って，次元 1 で Cohen-Macaulay でないものがある。M をそうとする。

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{\alpha} & F_1 \cong A & \xrightarrow{\beta} & F_0 & \longrightarrow & 0 & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\ \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M_1^{\vee} & \xrightarrow{r} & M_0^{\vee} & \longrightarrow & 0 & \cdots \end{array}$$

$\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(M)$ に対し，$\beta_{\mathfrak{q}}$ は surjection だから $\mathrm{rank}\, F_0 = 1$。故に，$\beta_{\mathfrak{q}}$ は isomorphism となり，$\mathrm{Ker}\, \beta_{\mathfrak{q}} = 0$。一方，$\mathrm{Ker}\, \beta_{\mathfrak{q}}/\mathrm{Im}\, \alpha_{\mathfrak{q}} \cong \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}, E(A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}})) \neq 0$ であるから，矛盾。

References

[B] H. Bass , On the ubiquity of Gorenstein rings , Math. Z. 82(1963) 8 - 28 .

[Br] W. Bruns , The Evans-Griffith syzygy theorem and Bass number , Proc. AMS 115(199 2) 939 - 946 .

[C] D. Costa, C. Huneke and M. Niller , Complete local domains of type two are Cohen -Macaulay , Bull. LMS 17(1985) 29 - 31 .

[F] H.-B. Foxby , On the μ^i in a minimal injective resolution II , Math. Scand. 41(19 77) 19 - 44 .

[K] T. Kawasaki , Local rings of relatively small type are Cohen-Macaulay , Proc. AMS to appear .

[M] T. Marley , Unmixed local rings of type two are Cohen-Macaulay , Bull. LMS 23(19 91) 43 - 45 .

[O] T. Ogoma , Existence of dualizing complexes , J. Math. Kyoto Univ. 24(1984) 27 - 48 .

[R_1] P. Roberts , Homological invariants of modules over commutative rings , Sém. Math. Sup., Univ. Montréal, 1980 .

[R_2] __________ , Rings of type 1 are Gorenstein , Bull. LMS 15(1983) 48 - 50 .

[R_3] __________ , Le théorème d'intersection , C. R. Acad. Sc. Paris 304 Ser.I no.7 (1987) 177 - 180 .

[T] N. V. Trung , Toward a theory of generalized Cohen-Macaulay modules , Nagoya Math. J. 102(1986) 1 - 49 .

[V] W. V. Vasconcelos , Divisor theory in module categories , Math. Studies 14, North Holland Publ. Co. 1975 .

Powers of Ideals in Cohen-Macaulay Rings

KOJI NISHIDA
School of Science and Technology, Chiba University

1. INTRODUCTION

Let I be an ideal in a Noetherian local ring A with maximal ideal $\mathbf{m}$ and assume that the field $A/\mathbf{m}$ is infinite. For each integer $n \geq 1$, let $I^{(n)} = \{a \in A \mid sa \in I^n$ for some $s \in \bigcup_{p \in \mathrm{Min}_A A/I} p\}$ and call it the n-th symbolic power of I. In this report we are going to investigate the conditions under which $I^{(n)} = I^n$ for all n.

At first let us recall some basic definitions. We put $\lambda(I) = \dim A/\mathbf{m} \otimes_A G(I)$ and call it the analytic spread of I (cf. [**NR**]). Then we have Burch's inequalities $\mathrm{ht}\, I \leq \lambda(I) \leq \dim A - \inf_{n \geq 1}\{\mathrm{depth}\ A/I^n\}$ (cf. [**Bu**]). An ideal J of A is said to be a reduction of I, if $J \subseteq I$ and $I^{n+1} = JI^n$ for some $n \geq 0$. For each reduction J of I we put $\mathrm{r}_J(I) = \min\{n \geq 0 \mid I^{n+1} = JI^n\}$ and call it the reduction number of I with respect to J. A reduction J of I is said to be minimal, if it is minimal among the reductions of I. As is well-known, this is equivalent to saying that J is generated by $\lambda(I)$ elements ([**NR**]). Following [**HH1**], we define $ad(I) = \lambda(I) - \mathrm{ht}_A I$ and call it the analytic deviation of I. With this notation the main result of this report can be stated as follows, which is a natural generalization of Huckaba and Huneke's result in [**HH1**] to the case of $\mathrm{ad}(I)$ arbitrary.

THEOREM (1.1). *Let I be an unmixed ideal in a d-dimensional Cohen-Macaualy local ring A with infinite residue field. Let $s = \mathrm{ht}_A I$ and assume that for all $Q \in \mathrm{V}(I)$ with $\mathrm{ht}\, Q < \max\{s+1, \lambda(I)\}$, the ideal I_Q of A_Q is generated by $\mathrm{ht}\, Q$ elements. Let $\alpha \in \mathbf{Z}$ with $\alpha > \mathrm{ad}(I)$ and assume that $\mathrm{depth}\,(A/I^n)_Q \geq \min\{\alpha - n, \mathrm{ht}\, Q - s - n\}$ for all $Q \in \mathrm{V}(I)$ and $1 \leq n \leq \mathrm{ad}(I)$. Then the following conditions are equivalent.*

(1) $I^{(n)} = I^n$ *for all* $n \geq 1$.

(2) $\lambda(I_Q) < \dim A_Q$ *for any* $Q \in \mathrm{V}(I) \setminus \mathrm{Min}_A A/I$ *with* $\mathrm{ht}\, Q \le \lambda(I)$.

(3) $\lambda(I_Q) < \dim A_Q$ *for any* $Q \in \mathrm{V}(I) \setminus \mathrm{Min}_A A/I$.

When this is the case, we have $\mathrm{r}_J(I) \le \mathrm{ad}(I)$ *for any special reduction* J *of* I *(see (2.1) for the definition of special reductions) and* depth $A/I^n \ge \min\{\alpha - \mathrm{ad}(I), d - \lambda(I)\}$ *for all* $n \ge 1$.

Throughout this report let $(A, \mathbf{m})$ denote a Noetherian local ring with infinite residue class field. For an ideal I of A we denote by $\mathrm{V}(I)$ the set of prime ideals in A containing I. Let $\mathrm{Min}_A A/I$ be the set of minimal elements in $\mathrm{V}(I)$. We put $\mathrm{Assh}_A A/I = \{Q \in \mathrm{Min}_A A/I \mid \dim A/I = \dim A/Q\}$. The number of a minimal system of generators for an A-module M shall be denoted by $\mu_A(M)$ and for a prime ideal Q in A, we write $\mu_Q(M) = \mu_{A_Q}(M_Q)$.

2. Special reductions

Let $(A, \mathbf{m})$ be a Noetherian local ring having infinite residue field and let I be an ideal of A. We put $s = \mathrm{ht}_A I$ and $\ell = \lambda(I)$.

Definition (2.1). (cf. [**AH**, Definition 5.1]) *We say that* J *is a special reduction of* I *if* J *is a minimal reduction of* I *and if there exists a system of generators* $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ *of* J *such that* $I_Q = (a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{ht}_A Q})A_Q$ *for all* $Q \in \mathrm{V}(I)$ *with* $\mathrm{ht}_A Q < \ell$ *(In the case where* $\mathrm{ht}_A Q = 0$*, this equality reads that* $I_Q = (0)$*). In particular, if* $s = \ell$*, then any minimal reduction is a special reduction.*

Let K be an ideal contained in I and let $Q \in \mathrm{V}(I)$. Then the equality $K_Q = I_Q$ holds if and only if $K : I \not\subseteq Q$. Hence a minimal reduction J of I is special if and only if we can choose a system of generators $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ of J so that $\mathrm{ht}_A I + (a_1, \ldots, a_i)A : I > i$ for all $s \le i < \ell$. Thus our definition of special reduction is same as that in [**AH**]. As is guaranteed by the following proposition, there exists a special reduction of I if and only if I satisfies the condition G_ℓ in the sense of Artin and Nagata [**AN**].

Proposition (2.2). (cf. [N, Proposition (2.2)]) *The following conditions are equivalent.*

(1) *I has a special reduction.*

(2) $\mu_Q(I) \leq \mathrm{ht}_A Q$ *for all* $Q \in \mathrm{V}(I)$ *with* $\mathrm{ht}_A Q < \ell$.

Corollary (2.3). *Let $Q \in \mathrm{V}(I)$. If I has a special reduction, then so does I_Q.*

The author doesn't know whether any reduction of I contains a special reduction of I or not when the condition (2) of (2.2) is satisfied. However if a reduction J has the property that $J_Q = I_Q$ for any $Q \in \mathrm{V}(I)$ with $\mathrm{ht}_A Q < \ell$ (this is equivalent to saying that $\mathrm{ht}_A I + J : I \geq \ell$), then J contains a special reduction of I under the condition (2) of (2.2). Actually, in this case we have $\mu_Q(J) = \mu_Q(I) \leq \mathrm{ht}_A Q$ for any $Q \in \mathrm{V}(J)$ such that $\mathrm{ht}_A Q < \ell = \lambda(J)$, so J has a special reduction by (2.2) and it is a special reduction of I as well. In particular we have the following Corollary, which will be used in the proof of Theorem (1.1).

Corollary (2.4). *Let J be a special reduction of I. Then, for any $Q \in \mathrm{V}(I)$, there is a special reduction of I_Q contained in J_Q.*

3. The depth of $(A/J^m I^{\mathrm{ad}(I)})_Q$ for $Q \in \mathrm{V}(I)$

In this section let $(A, \mathbf{m})$ be a Cohen-Macaulay local ring with infinite residue field and I an ideal in A having a special reduction J. We put $s = \mathrm{ht}_A I$, $\ell = \lambda(I)$ and assume that $a_1, a_2, ..., a_\ell$ is a system of generators of J such that

$$(3.1) \qquad J_Q = (a_1, a_2, ..., a_{\mathrm{ht}_A Q})A_Q \text{ for all } Q \in \mathrm{V}(I) \text{ with } \mathrm{ht}_A Q < \ell.$$

For $1 \leq i \leq \ell$ we write $J_i = (a_1, a_2, ..., a_i)A$. In particular $J_0 = (0)$.

We begin with modifying $a_1, a_2, ..., a_\ell$ so that they enjoy the property in the following lemma and (3.1) is still satisfied after the modification.

LEMMA (3.2). *We may assume that, for any* $1 \le i \le \ell$, $a_i \notin Q$ *if* $Q \in (\operatorname{Ass} A \cup (\bigcup_{m \ge 1} \operatorname{Ass}_A A/J_{i-1}^m)) \setminus \mathrm{V}(I)$.

PROOF: Let $a_i' \in J^2$ for $i = 1, 2, ..., \ell$. Notice that when we replace a_i by $a_i + a_i'$, the elements $a_1, ..., a_\ell$ again forms a minimal system of generators of J and moreover they still enjoy the property of (3.1). Actually, if $Q \in \mathrm{V}(I)$, then $J^2 \subseteq QI$ and so, in I_Q, we have $a_i \equiv a_i + a_i' \mod QI_Q$ for $i = 1, 2, ..., \ell$, which means $I_Q = (a_1 + a_1', ..., a_{\operatorname{ht}_A Q} + a'_{\operatorname{ht}_A Q})A_Q$ when $\operatorname{ht}_A Q < \ell$. Therefore we will inductively choose adequate elements a_i' in J^2 for $1 \le i \le \ell$ so that after the replacing the required conditions are satisfied.

Now suppose $1 \le i \le n$ and assume that we have already modified $a_1, ..., a_{i-1}$ (If $i = 1$, this insists nothing). We put $\mathcal{F} = \operatorname{Ass} A \cup (\bigcup_{m \ge 1} \operatorname{Ass}_A A/J_{i-1}^m) \setminus \mathrm{V}(I)$. By **[Br]** we see that $\mathcal{F}$ is finite. If $a_i \notin Q$ for any $Q \in \mathcal{F}$, we don't change a_i. So let us consider the case where $a_i \in Q$ for some $Q \in \mathcal{F}$. Let $\{Q_1, Q_2, ..., Q_q\}$ be the set derived from $\mathcal{F}$ by deleting the smaller elements when there exist relations of inclusions. We may assume $a_i \in Q_1 \cap \cdots \cap Q_p$ $(1 \le p \le q)$ and $a_i \notin Q_{p+1} \cup \cdots \cup Q_q$. Because all of $J^2, Q_{p+1}, ..., Q_q$ is not contained in any of $Q_1, ..., Q_p$, there exists $a_i' \in J^2 \cap Q_{p+1} \cap \cdots \cap Q_q$ such that $a_i' \notin Q_1 \cup \cdots \cup Q_p$. Then we easily see that $a_i + a_i' \notin Q_1 \cup \cdots \cup Q_q$. Thus replacing a_i by $a_i + a_i'$ we have $a_i \notin Q$ for any $Q \in \mathcal{F}$. Repeating this procedure until $i = \ell$ we get the required assertion.

In the rest of this section we assume that $a_1, a_2, ..., a_\ell$ is a system of generators of J having the property of (3.1) and (3.2).

COROLLARY (3.3). *Let* $s \ge 1$. *Then* $a_1, a_2, ..., a_s$ *is an* A*-regular sequence.*

PROOF: Suppose $1 \le i \le s$ and assume that $a_1, ..., a_{i-1}$ is an A-regular sequence. Let $Q \in \operatorname{Ass}_A A/J_{i-1}$. Then we have $\operatorname{ht}_A Q = i - 1 < s$ as A/J_{i-1} is Cohen-Macaulay, and so $Q \not\supseteq I$. Hence $a_i \notin Q$ by (3.2). Therefore a_i is a non-zero-divisor on A/J_{i-1}. Thus we can prove that $a_1, ..., a_i$ is an A-regular sequence for $1 \le i \le s$

by induction on i.

COROLLARY (3.4). *Let* $\ell \geq 1$. *Then* $((0):a_i)\cap I = (0)$ *for any* $1 \leq i \leq \ell$.

PROOF: It is enough to show that $((0):a_i)A_Q \cap I_Q = (0)$ for any $Q \in \operatorname{Ass} A$. If $I \subseteq Q$, then $I_Q = (0)$ as $\operatorname{ht}_A Q = 0$ (See Definition (2.1)). And if $I \not\subseteq Q$, then $a_i \notin Q$ by (3.2) and so $((0):a_i)A_Q = (0)$ as a_i is a unit in A_Q. Thus in any case we get the required assertion.

Our purpose of this section is to prove the following lemma, which is the most important result in this paper from the technical point of view.

LEMMA (3.5). *Suppose* $\alpha \geq \operatorname{ad}(I)$ *and* $\operatorname{depth}(A/I^n)_Q \geq \min\{\alpha - n, \operatorname{ht}_A Q - s - n\}$ *for any* $Q \in \mathrm{V}(I)$ *and* $1 \leq n \leq \operatorname{ad}(I)$. *Then we have*

$$(3.6) \qquad \operatorname{depth}(A/J_i^m I^n)_Q \geq \min\{\alpha - n, \operatorname{ht}_A Q - s - n\},$$

where $Q \in \mathrm{V}(I)$, $m \geq 0$, $0 \leq n \leq \operatorname{ad}(I)$ *and* $0 \leq i \leq n+s$.

PROOF: We prove Lemma (3.5) by "triple" induction on m, n and i. We begin with induction on m. But if $m = 0$, the required inequality (3.6) is just the hypothesis since $J_i^0 I^n = I^n$ for all i and n. So we fix $m \geq 0$ and assuming that (3.6) holds for this m we will prove

$$(3.7) \qquad \operatorname{depth}(A/J_i^{m+1} I^n)_Q \geq \min\{\alpha - n, \operatorname{ht}_A Q - s - n\}$$

for any $Q \in \mathrm{V}(I)$, $0 \leq n \leq \operatorname{ad}(I)$ and $0 \leq i \leq n+s$ by induction on n. For that, in the case where $n = 0$, it is enough to check $\operatorname{depth}(A/J_i^{m+1})_Q$ for any $Q \in \mathrm{V}(I)$ and $1 \leq i \leq s$. However if $1 \leq i \leq s$, A/J_i^{m+1} is a $d-i$ dimensional Cohen-Macaulay ring since $a_1, \ldots, a_i$ is an A-regular sequence by (3.3), and so we get, for any $Q \in \mathrm{V}(I)$, $\operatorname{depth}(A/J_i^{m+1})_Q = \operatorname{ht}_A Q - i \geq \min\{\alpha, \operatorname{ht}_A Q - s\}$, which is the inequality derived from (3.7) substituting $n = 0$. Now we fix $0 \leq n < \operatorname{ad}(I)$ and assuming that (3.7) holds for this n we will prove

$$\text{(3.8)} \qquad \operatorname{depth}(A/J_i^{m+1}I^{n+1})_Q \geq \min\{\alpha - n - 1, \operatorname{ht}_A Q - s - n - 1\}$$

for any $Q \in \mathrm{V}(I)$ and $0 \leq i \leq n+s+1$ by induction on i. But again this is obvious if $i = 0$ as $J_0^{m+1}I^{n+1} = (0)$ and as depth $A_Q = \operatorname{ht}_A Q$. Therefore in the following we consider $\operatorname{depth}(A/J_{i+1}^{m+1}I^{n+1})_Q$ assuming the inequality (3.8) for a fixed integer $0 \leq i < n+s+1$.

Here we need the following

Claim 1. $(J_i^{m+1} : a_{i+1}) \cap J_{i+1}^m I^{n+1} = J_i^{m+1}I^n$.

Suppose this is true. Then we can determine the Kernel of the natural surjection $\varphi\colon A/J_i^{m+1}I^{n+1} \to A/J_{i+1}^{m+1}I^{n+1}$ as follows: First notice $J_{i+1}^{m+1} = J_i^{m+1} + a_{i+1}J_{i+1}^m$ and so

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\varphi &\cong a_{i+1}J_{i+1}^m I^{n+1}/J_i^{m+1}I^{n+1} \cap a_{i+1}J_{i+1}^m I^{n+1}\\ &= a_{i+1}J_{i+1}^m I^{n+1}/a_{i+1}J_i^{m+1}I^n\end{aligned}$$

since $J_i^{m+1}I^{n+1} \cap a_{i+1}J_{i+1}^m I^{n+1} \subseteq a_{i+1}((J_i^{m+1} : a_{i+1}) \cap J_{i+1}^m I^{n+1}) = a_{i+1}J_i^{m+1}I^n$ by Claim 1. Next let $x \in J_{i+1}^m I^{n+1}$ be an element in the kernel of the surjection

$$J_{i+1}^m I^{n+1} \xrightarrow{a_{i+1}} a_{i+1}J_{i+1}^m I^{n+1}/a_{i+1}J_i^{m+1}I^n.$$

Then there exists $y \in J_i^{m+1}I^n$ such that $a_{i+1}x = a_{i+1}y$. This means $x = y$ since $x - y \in ((0) : a_{i+1}) \cap J_{i+1}^m I^{n+1} \subseteq ((0) : a_{i+1}) \cap I = (0)$ by (3.4), and so $x \in J_i^{m+1}I^n$. Hence we have an isomorphism $\operatorname{Ker}\varphi \cong J_{i+1}^m I^{n+1}/J_i^{m+1}I^n$. Thus we get an exact sequence

$$\text{(3.9)} \qquad 0 \to J_{i+1}^m I^{n+1}/J_i^{m+1}I^n \to A/J_i^{m+1}I^{n+1} \to A/J_{i+1}^{m+1}I^{n+1} \to 0,$$

which plays a key role in our proof together with the natural exact sequence

$$(3.10)\qquad 0 \to J_{i+1}^{m} I^{n+1}/J_{i}^{m+1} I^{n} \to A/J_{i}^{m+1} I^{n} \to A/J_{i+1}^{m} I^{n+1} \to 0.$$

Let us recall our hypothesis of induction on m and n respectively insisting

$$\operatorname{depth}(A/J_{i+1}^{m} I^{n+1})_Q \geq \min\{\alpha - n - 1, \operatorname{ht}_A Q - s - n - 1\} \text{ and}$$

$$\operatorname{depth}(A/J_{i}^{m+1} I^{n})_Q \geq \min\{\alpha - n, \operatorname{ht}_A Q - s - n\}.$$

Then applying the depth lemma (cf. [**HH**, Remark 1]) to the exact sequence derived from (3.10) by localization at Q, we get

$$\operatorname{depth}(J_{i+1}^{m} I^{n+1}/J_{i}^{m+1} I^{n})_Q \geq \min\{\alpha - n, \operatorname{ht}_A Q - s - n\}.$$

This fact and the hypothesis of induction on i that

$$\operatorname{depth}(A/J_{i}^{m+1} I^{n+1})_Q \geq \min\{\alpha - n - 1, \operatorname{ht}_A Q - s - n - 1\}$$

imply the required inequality

$$\operatorname{depth}(A/J_{i+1}^{m+1} I^{n+1})_Q \geq \min\{\alpha - n - 1, \operatorname{ht}_A Q - s - n - 1\}$$

by the depth lemma applied to the exact sequence derived from (3.9) localizing at Q. In order to prove Claim 1 we need some preparations. In the following arguments m, n and i denotes the integers fixed above.

Claim 2. *Let $0 \leq j \leq n + s$. Then*

$$(J_j^{m+1} : a_{j+1}) \cap J_{j+1}^{m} I^{j-s+1} = J_j^{m+1} I^{j-s}.$$

Proof of Claim 2: If $j < s$, then as a_{j+1} is a non-zero-divisor over A/J_j^{m+1} (cf. Proof of Corollary (3.3)) and as $I^{j-s} = I^{j-s+1} = A$ we have

$$\begin{aligned}(J_j^{m+1} : a_{j+1}) \cap J_{j+1}^{m} I^{j-s+1} &= J_j^{m+1} \cap J_{j+1}^{m}\\ &= J_j^{m+1}\\ &= J_j^{m+1} I^{j-s}.\end{aligned}$$

So let us consider the case where $j \geq s$. We take any $Q \in \mathrm{Ass}_A A/J_j^{m+1}I^{j-s}$. It is enough to show $((J_j)_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+1}) \cap (J_{j+1})_Q^m I_Q^{j-s+1} = (J_j)_Q^{m+1} I_Q^{j-s}$ since $(J_j^{m+1} : a_{j+1}) \cap J_{j+1}^m I^{j-s+1} \supseteq J_j^{m+1} I^{j-s}$. If $I \not\subseteq Q$, then $Q \in \mathrm{Ass}_A A/J_j^{m+1}$ and so $a_{j+1} \notin Q$ by (3.2), which means that a_{j+1} is a unit in A_Q. Hence we have

$$\begin{aligned} ((J_j)_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+1}) \cap (J_{j+1})_Q^m I_Q^{j-s} &= (J_j)_Q^{m+1} \cap (J_{j+1})_Q^m \\ &= (J_j)_Q^{m+1} \\ &= (J_j)_Q^{m+1} I_Q^{j-s}. \end{aligned}$$

In the case where $I \subseteq Q$, by the hypothesis of induction on n (notice $0 \leq j - s \leq n$) we get

$$0 = \mathrm{depth}_A(J_j^{m+1}I^{j-s})_Q \geq \min\{\alpha - j + s, \mathrm{ht}_A Q - j\},$$

which implies $\mathrm{ht}_A Q - j \leq 0$ as $\alpha - j + s \geq \alpha - (n+s) + s = \alpha - n \geq \mathrm{ad}(I) - n > 0$. Then as $\mathrm{ht}_A Q \leq j \leq n + s < \mathrm{ad}(I) + s = \ell$ we see $(J_j)_Q = (J_{j+1})_Q = I_Q$ (cf. (2.1)) and so we have

$$\begin{aligned} ((J_j)_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+1}) \cap (J_{j+1})_Q^m I_Q^{j-s+1} &= (I_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+1}) \cap I_Q^{m+j-s+1} \\ &= I_Q^{m+j-s+1} \\ &= (J_{j+1})_Q^{m+1} I_Q^{j-s}, \end{aligned}$$

which completes the proof of Claim 2.

Claim 3. *Let $Q \in \mathrm{V}(I)$ such that $\mathrm{ht}_A Q \leq n + s$ and let $j \leq n + s$. Then, for any $q \geq j - s$, we have*

$$((J_j)_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+1}) \cap (J_{j+1})_Q^m I_Q^{q+1} = (J_j)_Q^{m+1} I_Q^q.$$

Proof of Claim 3: We take any $Q \in \mathrm{V}(I)$ such that $\mathrm{ht}_A Q \leq n+s$ and fix it. We will prove the equality above by descending induction on j. Let $j = n + s$. Then

$(J_j)_Q = (J_{j+1})_Q = I_Q$. Hence, for any $q \geq j - s = n \geq 0$, we have

$$\begin{aligned}((J_j)_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+1}) \cap (J_{j+1})_Q^m I_Q^{q+1} &= (I_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+1}) \cap I_Q^{m+q+1} \\ &= I_Q^{m+q+1} \\ &= (J_j)_Q^{m+1} I_Q^q.\end{aligned}$$

Now we suppose $j < n + s$ and assume $((J_{j+1})_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+2}) \cap (J_{j+2})_Q^m I_Q^{q+1} = (J_{j+1})_Q^{m+1} I_Q^q$ for any $q \geq j + 1 - s$. We will show the required equality for $q \geq j - s$ by induction on q. But in Claim 2 we have already seen that it holds if $q = j - s$. So we suppose $q \geq j - s + 1$ and assume $((J_j)_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+1}) \cap (J_{j+1})_Q^m I_Q^q = (J_j)_Q^{m+1} I_Q^{q-1}$. Then we have

$$\begin{aligned}&((J_j)_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+1}) \cap (J_{j+1})_Q^m I_Q^{q+1} \\ &= ((J_j)_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+1}) \cap (J_{j+1})_Q^m I_Q^q \cap (J_{j+1})_Q^m I_Q^{q+1}\end{aligned}$$

by the induction hypothesis on q

$$\begin{aligned}&= (J_j)_Q^{m+1} I_Q^{q-1} \cap (J_{j+1})_Q^m I_Q^{q+1} \\ &\subseteq (J_j)_Q^{m+1} \cap (J_{j+1})_Q^{m+1} \cap (J_{j+2})_Q^m I_Q^{q+1} \\ &\subseteq (J_j)_Q^{m+1} \cap ((J_{j+1})_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+2}) \cap (J_{j+2})_Q^m I_Q^{q+1}\end{aligned}$$

by the induction hypothesis on j

$$\begin{aligned}&= (J_j)_Q^{m+1} \cap (J_{j+1})_Q^{m+1} I_Q^q \\ &= (J_j)_Q^{m+1} \cap ((J_j)_Q^{m+1} + a_{j+1}(J_{j+1})_Q^m) I_Q^q \\ &= (J_j)_Q^{m+1} I_Q^q + a_{j+1}(((J_j)_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{j+1}) \cap (J_{j+1})_Q^m I_Q^q)\end{aligned}$$

by the induction hypothesis on q

$$= (J_j)_Q^{m+1} I_Q^q + a_{j+1}(J_j)_Q^{m+1} I_Q^{q-1}$$
$$= (J_j)_Q^{m+1} I_Q^q.$$

Hence we get the required equality and the proof of Claim 3 is completed.

PROOF OF CLAIM 1: Let us take any $Q \in \mathrm{Ass}_A A/J_i^{m+1}I^n$. It is enough to show $((J_i)_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{i+1}) \cap (J_{i+1})_Q^m I_Q^{n+1} = (J_i)_Q^{m+1} I_Q^n$ since the inclusion $(J_i^{m+1} : a_{i+1}) \cap J_{i+1}^m I^{n+1} \supseteq J_i^{m+1} I^n$ is obvious. If $I \not\subseteq Q$, then $Q \in \mathrm{Ass}_A A/J_i^{m+1}$ and so $a_{i+1} \notin Q$ by (3.2), which means a_{i+1} is a unit in A_Q. Hence we have

$$\begin{aligned} ((J_i)_Q^{m+1} :_{A_Q} a_{i+1}) \cap (J_{i+1})_Q^m I_Q^{n+1} &= (J_i)_Q^{m+1} \cap (J_{i+1})_Q^m \\ &= (J_i)_Q^{m+1} \\ &= (J_i)_Q^{m+1} I_Q^n. \end{aligned}$$

In the case where $I \subseteq Q$, by the hypothesis of induction on n we see

$$0 = \mathrm{depth}\,(A/J_i^{m+1}I^n)_Q \geq \min\{\alpha - n, \mathrm{ht}_A\, Q - s - n\}.$$

This implies $\mathrm{ht}_A\, Q - s - n \leq 0$ as $\alpha - n \geq \mathrm{ad}(I) - n > 0$, and so $\mathrm{ht}_A\, Q \leq n + s$. Then we have already seen in Claim 3 the required equality. Thus we have seen Claim 1 and Proof of Lemma (3.2) is completed

4. PROOF OF THEOREM (1.1)

Throughout this section we put $s = \mathrm{ht}_A\, I$ and $\ell = \lambda(I)$.

PROOF OF THEOREM (1.1): It is easy to see (1) $\Rightarrow$ (3) by Burch's inequality and the implication (3) $\Rightarrow$ (2) is obvious. So we assume the condition (2) and prove (1) together with the last assertions by induction on $\mathrm{ad}(I)$. If $\mathrm{ad}(I) = 0$, then I must be a complete intersection (cf. [CN, Theorem]). Actually, in this case a minimal reduction J of I is a complete intersection. Then, for any $Q \in \mathrm{Ass}_A A/J$, we have $Q \in \mathrm{V}(I)$ and $\mathrm{ht}_A Q = s$, which implies $\mu_Q(I) = s$ by the assumption, and so $I_Q = J_Q$ since a complete intersection ideal has no proper reduction. Thus we see $I = J$, whence $\mathrm{r}_J(I) = 0$ and I is a complete intersection. This means, for all $n \geq 1$, $I^{(n)} = I^n$ as A/I^n is Cohen-Macaulay. Now suppose $\mathrm{ad}(I) > 0$ and assume that Theorem (1.1) is true for ideals with smaller analytic deviation than I. By (2.2) there exists a special reduction J of I and we can choose a minimal system of generators of J so that (3.1) and (3.2) are satisfied. Let $Q \in \mathrm{Ass}_A A/JI^{\mathrm{ad}(I)}$. Then by Lemma (3.5) we have

$$0 = \operatorname{depth}(A/JI^{\mathrm{ad}(I)})_Q \geq \min\{\alpha - \mathrm{ad}(I), \mathrm{ht}_A Q - \ell\},$$

which means $\mathrm{ht}_A Q \leq \ell$ as $\alpha > \mathrm{ad}(I)$. Suppose $Q \notin \mathrm{Min}_A A/I$. Then $\lambda(I_Q) < \dim A_Q = \mathrm{ht}_A Q$ by the condition (2). Hence $\mathrm{ad}(I_Q) = \lambda(I_Q) - \mathrm{ht}_{A_Q} I_Q < \mathrm{ht}_A Q - \mathrm{ht}_{A_Q} I_Q \leq \ell - s = \mathrm{ad}(I)$. Thus we get $\mathrm{ad}(I_Q) < \mathrm{ad}(I)$, which holds even if $Q \in \mathrm{Min}_A A/I$. We would like to apply the induction hypothesis to I_Q. So, we have to verify that I_Q satisfies the assumptions of Theorem (1.1). In fact, of course, $\alpha > \mathrm{ad}(I_Q)$ and if $pA_Q \in \mathrm{V}(I_Q)$ ($p \in \operatorname{Spec} A$), then, for all $1 \leq n \leq \mathrm{ad}(I)$, we have $\operatorname{depth}(A_Q/I_Q^n)_{pA_Q} = \operatorname{depth}(A/I^n)_p \geq \min\{\alpha - n, \mathrm{ht}_A p - s - n\} = \min\{\alpha - n, \mathrm{ht}_{A_Q} pA_Q - \mathrm{ht}_{A_Q} I_Q - n\}$ (Here we used the assumption that I is unmixed, which guarantee $s = \mathrm{ht}_{A_Q} I_Q$ in our situation). Moreover it is quite easy to see that I_Q has the property $G_{\lambda(I_Q)}$ in the sense of Artin and Nagata and it satisfies the condition (2). Therefore by the induction hypothesis, for any special reduction J' of I_Q, we have $\mathrm{r}_{J'}(I_Q) \leq \mathrm{ad}(I_Q)$, i.e., $I_Q^{\mathrm{ad}(I_Q)+1} = J' I_Q^{\mathrm{ad}(I_Q)}$. Recall that by Corollary (2.4) there exists a special reduction of I_Q contained in J_Q. Hence we have $I_Q^{\mathrm{ad}(I_Q)+1} = J_Q I_Q^{\mathrm{ad}(I_Q)}$, and so $I_Q^{\mathrm{ad}(I)+1} = J_Q I_Q^{\mathrm{ad}(I)}$. This implies $I^{\mathrm{ad}(I)+1} = JI^{\mathrm{ad}(I)}$ since we took $Q \in \mathrm{Ass}_A A/JI^{\mathrm{ad}(I)}$ arbitrary. Thus we see $\mathrm{r}_J(I) \leq \mathrm{ad}(I)$. Moreover we have

$$\operatorname{depth}(A/I^n)_Q \geq \min\{\alpha - \mathrm{ad}(I), \mathrm{ht}_A Q - \ell\} \tag{4.1}$$

for all $n \geq 1$. In fact, if $n \leq \mathrm{ad}(I)$, it is trivial by the assumption, and if $n > \mathrm{ad}(I)$, we get the inequality above by Lemma (3.5) since $I^n = J^{n-\mathrm{ad}(I)} I^{\mathrm{ad}(I)}$. Let $n \geq 1$ and $Q \in \mathrm{Ass}_A A/I^n$. By (4.1) we have $\mathrm{ht}_A Q \leq \ell$. Then again by the induction hypothesis we see $(I_Q)^{(n)} = I_Q^n$, and so $(I^{(n)})_Q = I_Q^n$ since $(I_Q)^{(n)} = (I^{(n)})_Q$ by the definition of symbolic powers. Therefore $I^{(n)} = I^n$. We get the last assertion of this theorem from (4.1) substituting $Q = \mathfrak{m}$ and the proof is completed.

5. Gorenstein case

When A is a Gorenstein ring and A/I is Cohen-Macaulay, we can improve Theorem (1.1) and have the following.

THEOREM (5.1). *Assume that A is a d-dimensional Gorenstein ring with infinite residue class field and let I be an ideal in A of height s. Assume that A/I is a Cohen-Macaulay ring and that for all $Q \in \mathrm{V}(I)$ with $\mathrm{ht}\, Q < \max\{s+1, \lambda(I)\}$, I_Q is generated by $\mathrm{ht}\, Q$ elements. Suppose $\alpha \geq \mathrm{ad}(I)$ and assume that $\mathrm{depth}\,(A/I^n)_Q \geq \min\{\alpha - n, \mathrm{ht}\, Q - s - n\}$ for all $Q \in \mathrm{V}(I)$ and $1 \leq n \leq \mathrm{ad}(I) - 1$. Then the conditions (1), (2) and (3) stated in Theorem (1.1) are equivalent to each other. And when this is the case, we have $\mathrm{r}_J(I) \leq \max\{0, \mathrm{ad}(I) - 1\}$ for any special reduction J of I and $\mathrm{depth}\ A/I^n \geq \min\{\alpha - \mathrm{ad}(I), d - \lambda(I)\}$ for all $n \geq 1$.*

We can prove the theorem above similarly as Thoorem (1.1) by the following lemma.

LEMMA (5.2). *Let A be Gorenstein and A/I Cohen-Macaulay. Suppose $\alpha \geq \mathrm{ad}(I)$ and $\mathrm{depth}\,(A/I^n)_Q \geq \min\{\alpha - n, \mathrm{ht}_A\, Q - s - n\}$ for any $Q \in \mathrm{V}(I)$ and $1 \leq n \leq \mathrm{ad}(I)$. Then we have*

$$\mathrm{depth}\,(A/J_i^m I^{i-s-1})_Q \geq \min\{\alpha - i + s + 1, \mathrm{ht}_A\, Q - i\} \tag{3.12}$$

for any $m \geq 0$, $s + 1 \leq i \leq \ell$ and $Q \in \mathrm{V}(I)$.

References

[AN] M. Artin and M. Nagata, *Residual intersections in Cohen-Macaulay rings*, J. Math. Kyoto Univ. **12** (1972), 307–323.

[AH] I. M. Aberbach and C. Huneke, *An improved Briançon-Skoda theorem with applications to the Cohen-Macaulayness of Rees algebras*, to appear.

[Br] M. Brodmann, *Asymptotic stability of* $\mathrm{Ass}(M/I^nM)$, Proc. Amer. Math. Soc. **74** (1979), 16–18.

[Bu] L. Burch, *Codimension and analytic spread*, Proc. Camb. Phil. Soc. **72** (1972), 369–373.

[CN] R. Cowsik and S. Nori, *On the fibres of blowing up*, J. Indian Math. Soc. **40** (1976), 217–222.

[GN1] S. Goto and Y. Nakamura, *On the Gorensteinness of graded rings associated to ideals of analytic deviation one*, to appear.

[GN2] S. Goto and Y. Nakamura, *Gorenstein graded rings associated to ideals of analytic deviation two*, Preprint.

[GNN] S. Goto, Y. Nakamura and K. Nishida, *On graded rings associated to ideals of higher analytic deviation*, Preprint.

[Ho] M. Hochster, *Criteria for equality of ordinary and symbolic powers of primes*, Math. Z. **133** (1973), 53–65.

[HH1] S. Huckaba and C. Huneke, *Powers of ideals having small analytic deviation*, Amer. J. Math. **114** (1992), 367–403.

[HH2] S. Huckaba and C. Huneke, *Rees algebras of ideals having small analytic deviation*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[Hu1] C. Huneke, *Symbolic powers of prime ideals and special graded algebras*, Comm. Algebra **9** (1981), 339–366.

[Hu2] C. Huneke, *Powers of ideals generated by weak d-sequences*, J. Alg. **68** (1981), 471–509.

[Hu3] C. Huneke, *The theory of d-sequences and powers of ideals*, Adv. in Math. **46** (1982), 249–279.

[Hu4] C. Huneke, *On the associated graded ring of an ideal*, Illinois J. Math. **26** (1982), 121–137.

[Hu5] C. Huneke, *On the symmetric and Rees algebra of an ideal generated by d-sequences*, J. Alg. **62** (1980), 268–275.

[HU] C. Huneke and B. Ulrich, *Residual intersections*, J. reine angew. Math. **390** (1988), 1–20.

[N] K.Nishida, *Powers of ideals in Cohen-Macaulay rings*, preprint (1993).

[NR] D. G. Northcott and D. Rees, *Reductions of ideals in local rings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **50** (1954), 145–158.

[PS] C. Peskine and L. Szpiro, *Liaisons des variétes algebriques*, Invent. Math. **26** (1974), 271–302.

[RV] L. Robbiano and G. Valla, *Primary powers of a prime ideal*, Pacific J. Math. **63** (1976), 491–498.

[SV] A. Simis and W. Vasconcelos, *The syzygies of conormal module*, Amer. J. Math. **103** (1981), 203–224.

[T] N. V. Trung, *On the symbolic powers of determinantal ideals*, J. Alg. **58** (1979), 361–369.

[U] B. Ulrich, *Artin-Nagata properties and reductions of ideals*, to appear.

[V] W. Vasconcelos, *Koszul homology and the structure of low codimension Cohen-Macaulay ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987), 591–613.

1-33 Yayoi-cho Inage-ku Chiba-shi, 263, Japan

中山の予想について

筑波大学数学系　　星野光男

1. 中山の予想

体上有限次元の多元環に対する中山予想と呼ばれる未解決の問題がある([11])。

<u>Notation</u>

k : 可換体

$D := \mathrm{Hom}_k(-, k)$

A : k上有限次元の多元環

$\mathrm{mod}\,A$: 有限生成左A-加群の category

$0 \to {}_AA \to E_0 \to E_1 \to \cdots$: min. inj. resol.

<u>Def</u> (1) $X \in \mathrm{mod}\,A$ が generator $\Leftrightarrow$ $\exists n \geq 1$ s.t. ${}_AA <_\oplus X^{(n)}$

(2) $X \in \mathrm{mod}\,A$ が cogenerator $\Leftrightarrow$ $\exists n \geq 1$ s.t. $D(A_A) <_\oplus X^{(n)}$

次の主張(a)〜(f)を考える。

(a) E_i $(\forall i \geq 0)$ が proj. $\Rightarrow$ $E_i = 0$ $(\forall i \geq 1)$, i.e., A は self-inj.

(b) $X \in \mathrm{mod}\,A$ を generator かつ cogenerator とするとき
$\mathrm{Ext}^i_A(X, X) = 0$ $(\forall i \geq 1)$ $\Rightarrow$ X は proj.

(c) $\mathrm{Ext}^i_A(D(A_A), {}_AA) = 0$ $(\forall i \geq 1)$ $\Rightarrow$ A は self-inj.

(d) A を self-inj., $X \in \mathrm{mod}\, A$ とするとき
$\mathrm{Ext}^i_A(X, X) = 0 \ (\forall i \geq 1) \Rightarrow X$ は proj.

(e) $\bigcap_{i \geq 0} \mathrm{Ker}\, \mathrm{Hom}_A(-, E_i) = \{0\}$

(f) $X \in \mathrm{mod}\, A$ を generator とするとき
$\mathrm{Ext}^i_A(X, X) = 0 \ (\forall i \geq 1) \Rightarrow X$ は proj.

(注) (1) (a) は Müller [10] による。
(2) (b), (c), (d) は太刀川 [14] による。
(3) (e), (f) は Auslander-Reiten [3] による。
(4) (b), (f) において、X が proj. $\Leftrightarrow$ A と $\mathrm{End}({}_AX)^{op}$ とが森田同値。

上の (a) ~ (f) の間に次の関係がある。

Prop 1 ([14]) 次は同値
(1) 任意の多元環 A に対して (a) が成立(中山予想)。
(2) ―――― 〃 ―――― (b) ―〃―

Prop 2 各多元環 A に対して次は同値
(1) (b) が成立
(2) (c), (d) が共に成立

Prop 3 ([3]) 次は同値
(1) 任意の多元環 A に対して (e) が成立
(2) ―――― 〃 ―――― (f) ―〃―

Prop 4 各多元環 A に対して
(1) (e) が成立 $\Rightarrow$ (a) が成立
(2) (f) ―〃― $\Rightarrow$ (b) ―〃―

(注) A が多元環でなく artin 環のとき、$X \in \mathrm{mod}\, A$ に対して $\mathrm{End}({}_AX)^{op}$ は必ずしも artin 環にならない。従って上の Prop 1, Prop 3 は artin 環に対しては成立しない(§2 を参照)。

2. 森田同値

§1 の Prop 1、Prop 3 は森田の理論の一部と考えられる。この観点からの証明を与える。Prop 2、Prop 4 はほとんど自明と思われるので証明は略す。

(2.1) 局所化

<u>Notation</u>

$\mathcal{A}$、$\mathcal{X}$: abelian categories

$Q : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$、$J : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$: additive covariant functors

$\varepsilon : 1\!\!1_{\mathcal{A}} \to JQ$、$\delta : QJ \to 1\!\!1_{\mathcal{X}}$: natural transformations

次の 1) ~ 4) を仮定する.

1) $\delta_Q \circ Q\varepsilon = id_Q$

2) $J\delta \circ \varepsilon_J = id_J$

3) Q は exact

4) δ は iso

(注) (1) 1) かつ 2) $\Leftrightarrow$ $Q \dashv J$

(2) J は fully faithful かつ left exact

(3) ε_J、$Q\varepsilon$ は iso

(4) $Q\,\mathrm{Cok}\,\varepsilon \cong \mathrm{Cok}\,Q\varepsilon = 0$、$Q\,\mathrm{Ker}\,\varepsilon \cong \mathrm{Ker}\,Q\varepsilon = 0$

<u>Lem 1</u> $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})$ が inj. $\Leftrightarrow$ $JI \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が inj.

(証) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, JI) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(-, I) \circ Q$.□

<u>Lem 2</u> $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が inj. で ε_E が monic ならば

(1) ε_E は iso

(2) $QE \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})$ は inj.

(証) $\varepsilon_E : E \to JQE$ は split mono。故に $\mathrm{Cok}\,\varepsilon_E <_{\oplus} JQE$。ところが $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Cok}\,\varepsilon_E, JQE) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(Q\,\mathrm{Cok}\,\varepsilon_E, QE) = 0$。従って $\mathrm{Cok}\,\varepsilon_E = 0$. 次に $JQE \cong E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ は inj. であるから Lem 1 により $QE \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})$ は inj.。□

<u>Def</u> $f : X \to Y$ が essential mono

$\Leftrightarrow$ (1) f は monic

(2) $g : Y \to Z$、$g \circ f$ が monic $\Rightarrow$ g は monic

Lem 3　$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(X, Y)$ が essential mono

$\Rightarrow$ $Jf \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(JX, JY)$ ——— 〃 ———

(証) $\delta : QJ \xrightarrow{\sim} 1\!\!1_{\mathcal{X}}$ より QJf は essential mono。$g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(JY, M)$ に対し $g \circ Jf$ が monic とする。$Qg \circ QJf = Q(g \circ Jf)$ は monic であるから Qg は monic。故に JQg は monic。従って $\varepsilon_M \circ g = JQg \circ \varepsilon_{JY}$ が monic となり g は monic である。□

(2、2) Prop 1、Prop 3 における (1) $\Rightarrow$ (2)

Notation

$X \in \mathrm{mod}\, A$: generator

$R := \mathrm{End}({}_A X)^{op}$

$0 \to {}_A X \to I_0 \to I_1 \to \cdots$: min. inj. resol.

$\mathcal{A} := \mathrm{mod}\, R$、$\mathcal{X} := \mathrm{mod}\, A$

$Q := {}_A X \otimes_R -$、$J := \mathrm{Hom}_A({}_A X_R, -)$

$\varepsilon : 1\!\!1_{\mathcal{A}} \to JQ$、$\delta : QJ \to 1\!\!1_{\mathcal{X}}$: $Q \dashv J$ の unit、counit

(注) (1) $M \in \mathrm{mod}\, R$、$m \in M$、$x \in X$ のとき $\varepsilon_M(m)(x) = x \otimes m$

(2) $Y \in \mathrm{mod}\, A$、$x \in X$、$f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ のとき $\delta_Y(x \otimes f) = f(x)$

(3) δ は epic ($\because$ ${}_A X$ は generator)

1° δ は iso

(証) $Y \in \mathrm{mod}\, A$ とする。$\pi_1, \cdots, \pi_n \in {}_R\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ を generators とし、$\pi := (\pi_1, \cdots, \pi_n) : X^{(n)} \to Y$、$K := \mathrm{Ker}\, \pi$ とおく。$\mathrm{Hom}_A(X, \pi)$ は epic である。可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & QJK & \to & QJX^{(n)} & \to & QJY \to 0 \\
 & & \downarrow \delta_K & & \wr\downarrow \delta_{X^{(n)}} & & \downarrow \delta_Y \\
0 & \to & K & \to & X^{(n)} & \to & Y
\end{array}$$

において $\delta_{X^{(n)}} \cong \mathrm{diag}(\delta_X, \cdots, \delta_X)$ は iso であるから $\mathrm{Ker}\, \delta_Y \cong \mathrm{Cok}\, \delta_K = 0$。□

2° Q は exact

(証) $X \in \mathrm{mod}\, A$ は generator であるから $\exists \pi : X^{(n)} \to {}_AA$ split epi. 故に、$\mathrm{Hom}_A(\pi, X) : X_R \to R_R^{(n)}$ は split mono であり X_R は proj. □

以下において次を仮定する

(＊) $\mathrm{Ext}_A^i(X, X) = 0$ $(\forall i \geq 1)$

3° $0 \to {}_RR \to JI_0 \to JI_1 \to \cdots$ は min. inj. resol.

(証) Lem 2、Lem 3 による。□

(注) $X \in \mathrm{mod}\, A$ が generator かつ cogenerator $\Rightarrow$ JI_i $(\forall i \geq 0)$ は proj.

4° $\bigcap_{i \geq 0} \mathrm{Ker}\, \mathrm{Hom}_R(-, JI_i) = \{0\}$ $\Rightarrow$ ${}_AX$ は proj.

(証) $M \in \mathrm{mod}\, R$、$X \otimes_R M = 0$ とする。$\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_A(X, I_i)) \cong \mathrm{Hom}_A(X \otimes_R M, I_i) = 0$ $(\forall i \geq 0)$ より $M = 0$ である。故に $Q = X \otimes_R -$ は equivalance。${}_AX \cong {}_AX \otimes_R R$ であるから ${}_AX$ は proj. □

以上により Prop 1、Prop 3 における (1) $\Rightarrow$ (2) が示された。

(2.3) Prop 1、Prop 3 における (2) $\Rightarrow$ (1)

(注) $e = e^2 \in A$ $\Rightarrow$ $eA \otimes_A - \cong D\,\mathrm{Hom}_A(-, D(eA_A))$

1° $\exists e = e^2 \in A$ s.t. $\bigcap_{i \geq 0} \mathrm{Ker}\, \mathrm{Hom}_A(-, E_i) = \mathrm{Ker}(eA \otimes_A -)$

(証) $1 := e_1 + \cdots + e_n$、$e_i e_j = \delta_{ij} e_i$、$e_i A e_i$ $(1 \leq \forall i \leq n)$ は local、とする。$\Lambda := \{ i : \exists j \geq 0 \text{ s.t. } D(e_i A_A) \langle\oplus E_j \}$、$e := \sum_{i \in \Lambda} e_i$。□

<u>Notation</u> (1° の e を固定する)

$\mathcal{A} := \mathrm{mod}\, A$、$\mathcal{L} := \mathrm{mod}\, eAe$
$Q := eA \otimes_A -$、$J := \mathrm{Hom}_{eAe}(eA, -)$
$\varepsilon : 1\!\!1_{\mathcal{A}} \to JQ$、$\delta : QJ \to 1\!\!1_{\mathcal{L}}$: $Q \dashv J$ の unit、counit

(注) (1) $eA \in \mathrm{mod}\, eAe$ は generator

(2) Q は exact

(3) $X \in \mathrm{mod}\, A$、$x \in X$、$a \in eA$ のとき　$\varepsilon_X(x)(a) = a \otimes x$

(4) $M \in \mathrm{mod}\, eAe$、$a \in eA$、$f \in \mathrm{Hom}_{eAe}(eA, M)$ のとき　$\delta_M(a \otimes f) = f(a)$

(5) δ は iso

2°　ε_{E_i} は iso かつ QE_i は inj. $(\forall i \geq 0)$

(証) 1° により $\mathrm{Ker}\,\varepsilon_{E_i} \in \mathrm{Ker}\, Q \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(-, E_i)$ である。故に $\mathrm{Ker}\,\varepsilon_{E_i} = 0$ となり Lem 2 があてはまる。□

3°　$A \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}({}_{eAe}eA)^{op}$ かつ $\mathrm{Ext}^i_{eAe}(eA, eA) = 0$ $(\forall i \geq 1)$

(証) $0 \to {}_AA \to E_0 \to E_1 \to \cdots$ (min. inj. resol.) に Q、J を順番に apply する。2° から云える。□

4°　E_i $(\forall i \geq 0)$ が proj. $\Rightarrow$ $eA \in \mathrm{mod}\, eAe$ は generator かつ cogenerator

(証) $I \in \mathrm{mod}\, eAe$ を indec. inj. とする。Lem 1 により $JI \in \mathrm{mod}\, A$ は inj.。また $\mathrm{End}({}_AJI) \cong \mathrm{End}({}_{eAe}I)$ は local であるから JI は indec.。$X := \mathrm{Soc}({}_AJI)$ とおく。$\mathrm{Hom}_{eAe}(QX, I) \cong \mathrm{Hom}_A(X, JI) \neq 0$ より $QX \neq 0$。故に 1° により $\exists j \geq 0$ s.t. $\mathrm{Hom}_A(X, E_j) \neq 0$。このとき $JI <_\oplus E_j$ となり JI は proj.。従って $JI <_\oplus {}_AA$ であり $I \cong QJI <_\oplus {}_{eAe}eA$。□

5°　$eA \in \mathrm{mod}\, eAe$ が proj. $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\, Q = \{0\}$

(証) ${}_{eAe}eA$ は f.g. proj. であるから次の同型がある。

$$\mathrm{Hom}_{eAe}(eA, eAe) \otimes_{eAe} eA \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{eAe}(eA, eA),\quad f \otimes a \mapsto (b \mapsto f(b)a)$$

故に 3° より $\mathrm{Hom}_{eAe}(eA, eAe) \otimes_{eAe} eA_A \cong A_A$ となり $\mathrm{Ker}\, Q \subset \mathrm{Ker}(A \otimes_A -) = \{0\}$。□

以上により Prop 1、Prop 3 における (2) $\Rightarrow$ (1) が示された。

3。肯定的な例

(3.1) A が有限表現型（artin 環でよい）なら (a)～(f) はすべて成立。（たぶん良く知られている）。

(3.2) $A = kG$、G は有限群、のとき次が成立（[5]）。
　$X \in \mathrm{mod}\,A$、$\exists n \geq 1$ s.t. $\mathrm{Ext}_A^i(X, X) = 0$ $(\forall i \geq n)$ $\Rightarrow$ X は proj.
（これは [12] で指摘された）。特に、(d) が成立。

(3.3) $A = \oplus_{i\geq 0} A_i$、A_0 は semisimple、のとき (e) が成立（[15]）。
（A_0 の仮定はいくぶん弱められる（[8]））。

<u>Def</u> 両側 A-加群 M に対して $R = \oplus_{i\geq 0} R_i$、$R_0 = A$、$R_1 = M$、$R_i = 0$ $(\forall i \geq 2)$、を A の M による trivial extension と呼び $A \ltimes M$ と書く。

(3.4) $A = B \ltimes D({}_BB_B)$、$\mathrm{gl\,dim}\, B \leq 1$、のとき (d) が成立（[6]）。

(3.5) $\mathrm{Rad}^3(A) = 0$ のとき (b)、(c)、(d) が成立（[8]）。（ただし、k は閉体としておく）。

(3.6) $A = kG$、$\mathrm{char}\, k = p$、G は p-群、のとき次が成立（[14]）。
　$X \in \mathrm{mod}\,A$、$\mathrm{Ext}_A^1(X, X) = 0$ $\Rightarrow$ X は proj.
特に、(d) が成立。

(3.7) A が local、self-inj.、$\mathrm{Rad}^3(A) = 0$、のとき次が成立（[6]）。
　$X \in \mathrm{mod}\,A$、$\mathrm{Ext}_A^1(X, X) = 0$ $\Rightarrow$ X は proj.
特に、(d) が成立。

(3.8) A が local、$\mathrm{Rad}^3(A) = 0$、のとき次が成立。
　$\mathrm{Ext}_A^i(D(A_A), {}_AA) = 0$ $(i = 1, 2)$ $\Rightarrow$ A は self-inj.
（[8] の final version から削除されたが、[1] に別証明がある）。特に、(c) が成立。

(3.9) A が完全交叉環のとき次が成立（[2]）。
　$X \in \mathrm{mod}\,A$、$\mathrm{Ext}_A^i(X, X) = 0$ $(i = 1, 2)$ $\Rightarrow$ X は proj.
特に、(d) が成立。

(3.10) $A = k[\![x, y]\!]/\mathfrak{a}$、$\mathfrak{a}$ は (x, y)-primary ideal、のとき次が成立（[9]）。

$\mathrm{Ext}_A^i(DA, A) = 0 \ (i = 1, 2) \Rightarrow A$ は完全交叉環
特に、(c) が成立。

(注) (3.9)、(3.10) により $A = k[\![x, y]\!]/\mathfrak{a}$、$\mathfrak{a}$ は (x, y)-primary ideal、のとき次が成立。

$X \in \mathrm{mod}\, A$ が generator かつ cogenerator、$\mathrm{Ext}_A^i(X, X) = 0 \ (i = 1, 2)$
$\Rightarrow X$ は proj.

4。有限表現型の多元環

A が有限表現型なら (a) ~ (f) はすべて成立する。(f) が成立することを示せば、残りはその系として出る。

(注) $X' \in \mathrm{mod}\, A$ が generator のとき、$X'^{(n)} \cong A \oplus X$ とすると

$\mathrm{Ext}_A^i(X', X') = 0 \ (\forall i \geq 1) \Leftrightarrow$ (1) $\mathrm{Ext}_A^i(X, A) = 0 \ (\forall i \geq 1)$
(2) $\mathrm{Ext}_A^i(X, X) = 0 \ (\forall i \geq 1)$

<u>Notation</u>

$X \in \mathrm{mod}\, A$: non-proj. indec. で $\mathrm{Ext}_A^i(X, A) = 0 \ (\forall i \geq 1)$

$\cdots \to P_1 \to P_0 \to {}_AX \to 0$: min. proj. resol.

$X_i := \mathrm{Cok}(P_{i+1} \to P_i) \ (i \geq 0)$

$(\ )^* := \mathrm{Hom}_A(-, A)$

以下の議論は [7] による。

1° $X_i \ (\forall i \geq 0)$ は non-proj. indec.

(証) $n \geq 0$、X_n は non-proj. indec. と仮定する。$\mathrm{Ext}_A^1(X_n, X_{n+1}) \neq 0$、$\mathrm{Ext}_A^1(X_n, A) \cong \mathrm{Ext}_A^{n+1}(X, A) = 0$ より X_{n+1} は proj. direct summand を持たない。

<u>Def</u> $Y, Z \in \mathrm{mod}\, A$ に対し、$P(Y, Z) := \{f \in \mathrm{Hom}_A(Y, Z) : f$ factors through projectives$\}$ とおき $\underline{\mathrm{Hom}}_A(Y, Z) := \mathrm{Hom}_A(Y, Z)/P(Y, Z)$ とおく。

さて $\mathrm{Ext}_A^1(X_n, P_n) = 0$ より $\forall h \in \mathrm{End}({}_AX_{n+1}) \ \exists f \in \mathrm{End}({}_AP_n)$
s.t.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X_{n+1} & \to & P_n & \to & X_n & \to & 0 \\ & & \downarrow h & \circlearrowleft & \downarrow f & & \downarrow g & & \\ 0 & \to & X_{n+1} & \to & P_n & \to & X_n & \to & 0 \end{array}$$

従って、$\underline{\mathrm{End}}({}_A X_{n+1}) \cong \underline{\mathrm{End}}({}_A X_n)$ は local。故に X_{n+1} は non-proj. indec.。□

2° X_n ($\forall n \geq 2$) は reflexive

(証) 次の可換図式による。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & X_n & \to & P_{n-1} & \to & P_{n-2} \\ & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ 0 & \to & X_n^{**} & \to & P_{n-1}^{**} & \to & P_{n-2}^{**} \end{array} \quad \square$$

3° $\mathrm{Ext}_A^i(X_n^*, A) = 0$ ($\forall n \geq 3$、$1 \leq \forall i \leq n-2$)

(証) $P_0^* \to P_1^* \to \cdots \to P_{n-1}^* \to X_n^* \to 0$ は min. proj. resol. の一部分。従って次の可換図式から出る。

$$\begin{array}{ccccccc} P_{n-1} & \to & \cdots & \to & P_1 & \to & P_0 \\ \downarrow\wr & & & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ P_{n-1}^{**} & \to & \cdots & \to & P_1^{**} & \to & P_0^{**} \end{array} \quad \square$$

4° A が有限表現型 ⇒ $\exists n \geq 1$ s.t. $X \cong X_n$

(証) $m \gg 0$ とする。$P_0^* \to P_1^* \to \cdots \to P_{m-1}^* \to X_m^* \to 0$ は min. proj. resol. の一部であり、かつ $\mathrm{Cok}(P_{m-i-1}^* \to P_{m-i-2}^*) \cong X_{m-i}^*$ ($0 \leq \forall i \leq m-2$) である。$r := \min\{i \geq 1 : X_m^* \cong X_{m-i}^*\}$ とおく。このとき $X_2^* \cong X_{2+r}^* \cong X_{2+2r}^* \cong \cdots$ となり、3° より $\mathrm{Ext}_A^i(X_2^*, A) = 0$ ($i = 1, 2$)。従って、可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \to & P_0 & \to & X_0 & \to & 0 \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow & & \\ P_1^{**} & \to & P_0^{**} & \to & X_0^{**} & \to & 0 \end{array}$$

により X_0 は reflexive となる。次に、$X_0^* \cong X_r^* \cong X_{2r}^* \cong \cdots$ であるから、2° により $X_0 \cong X_0^{**} \cong X_{2r}^{**} \cong X_{2r}$。□

以上により、Aが有限表現型のときには(f)が成立することが示された。

5。例

(5.1) 最近、(d)が成立しないartin環の例が与えられた([13])。

Notation

K : skew field
$a \in K - \{0\}$
$\lambda \in C(K) - \{0\}$ ($C(K)$ は K の center)
$A := K\langle\alpha, \beta\rangle / (\alpha^2, \beta^2, \lambda\alpha\beta + \beta\alpha)$ (α、β は K の元と可換)
$X := A / A(a\alpha - \beta) \in \mathrm{mod}\, A$
$\partial_i : K \to K$, $x \mapsto \lambda^i a x - x a$ $(i \geq 0)$

Prop 5 ([13]) (1) A は self-inj. artin
(2) $\forall n \geq 1$、$\mathrm{Ext}_A^n(X, X) = 0 \Leftrightarrow \partial_{n-1}$ は surj. かつ ∂_n は inj.

(証) 計算 □

さて、条件

(*) ∂_0 は surj. かつ ∂_i $(\forall i \geq 1)$ は bij.

をみたす (K, a, λ) を次の様に構成する。

1° ([4]) 次の条件をみたす skew field F が存在する。
$\exists a \in F$ s.t. $F \to F$、$x \mapsto ax - xa$、は surj.

2° $K := F((\lambda))$、Laurent series ring、(λ は F の元と可換) とすれば (K, a, λ) は (*) をみたす。

(注) $H := \mathrm{Ker}\, \partial_0$ とおく。$\mathrm{End}({}_A X)^{\mathrm{op}} \cong H \ltimes {}_H K_H$ である。完全列

$$0 \to {}_H H_H \to {}_H K_H \xrightarrow{\partial_0} {}_H K_H$$

において ∂_0 が epic とすると、$\dim_H K = \dim K_H = \infty$ となる。これは $\mathrm{End}({}_A X)^{op}$ が artin 環ではないことを意味する。従って、上の例は (d) が artin 環では必ずしも成立しないことを示しているが、中山予想の反例ではない。

(5.2) 次の(*)をみたす多元環 A が存在する。

(*) $\mathrm{proj\,dim}\, E_0 = \infty$ かつ $\mathrm{proj\,dim}\, E_i = 0$ $(\forall i \geq 1)$

体 K 上で次の有向グラフ(Γ)と関係式(R)により A を構成する。

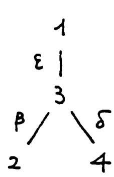
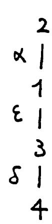
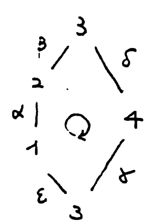
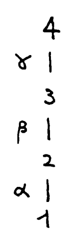
$$(\Gamma): \quad \begin{tikzcd} \overset{1}{\circ} \arrow[r, "\alpha"] & \overset{2}{\circ} \arrow[r, "\beta"] & \overset{3}{\circ} \arrow[ll, bend left, "\varepsilon"] \arrow[r, shift left, "\gamma"] & \overset{4}{\circ} \arrow[l, shift left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

(R) : $\varepsilon\alpha\beta = \gamma\delta$、$\alpha\beta\varepsilon = 0$、$\beta\gamma\delta = 0$、$\gamma\delta\varepsilon = 0$、$\gamma\delta\gamma = 0$

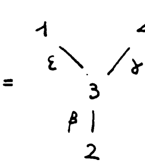
このとき A は次の basis を持つ。

e_1、e_2、e_3、e_4 $(e_i e_j = \delta_{ij} e_i)$
α、β、γ、δ、ε $(e_1 \alpha e_2 = \alpha$、$e_2 \beta e_3 = \beta$、$\cdots)$
$\alpha\beta$、$\beta\gamma$、$\beta\varepsilon$、$\gamma\delta = \varepsilon\alpha\beta$、$\delta\varepsilon$、$\varepsilon\alpha$
$\alpha\beta\gamma$、$\delta\varepsilon\alpha$

そこで $N := \mathrm{Rad}(A)$ とおき、${}_A Ae_i / Ne_i$ を i と書くことにする。各 ${}_A Ae_i$ は次の組成列を持つ。

$Ae_1 =$  $Ae_2 =$  $Ae_3 =$  $Ae_4 =$ 

また $D(e_i A_A)$ については

$D(e_1 A) \cong Ae_4$、$D(e_3 A) \cong Ae_3$、$D(e_4 A) \cong Ae_2$、$D(e_2 A) =$ 

$_AA$ の min. inj. resol. を計算すると

$$E_0 = D(e_1A) \oplus D(e_2A) \oplus D(e_3A) \oplus D(e_4A)^{(2)}$$
$$E_{3n+1} = E_{3n+2} = D(e_3A) \cong Ae_3 \quad (\forall n \geq 0)$$
$$E_{3n+3} = D(e_1A) \oplus D(e_4A) \cong Ae_4 \oplus Ae_2 \quad (\forall n \geq 0)$$

となる。ところで gl dim $A = \infty$ はすぐわかる。また、A が有限表現型であることも計算すればわかる。従って、proj dim $D(e_2A) = \infty$ といえる（もちろん、直接計算できる）。以上により、A が (*) をみたすことがわかる。

参考文献

1. Asashiba, H. and Hoshino, M.: Bilinear maps which define local algebras with trivial Hochschild cohomology, CMS Conf. Proc. (to appear)
2. Auslander, M., Ding, S. and Solberg, Ø.: Liftings and weak liftings of modules, J. Algebra 156 (1993), 273-317.
3. Auslander, M. and Reiten, I.: On a generalized version of the Nakayama conjecture, Proc. AMS 52 (1975), 69-74.
4. Cohn, P. M.: The range of derivations on a skew field and the equation $ax - xb = c$, J. IMS 37 (1973), 61-69.
5. Evans, L.: The cohomology ring of a finite group, Trans. AMS 101 (1961), 224-239.
6. Hoshino, M.: Modules without self-extensions and Nakayama's conjecture, Arch. Math. 43 (1984), 493-500.
7. ———: 中山の予想について、RIMS 講究録 628 (1987)、1-8。
8. ———: On algebras with radical cube zero, Arch. Math. 52 (1989), 226-232.
9. ———: Vanishing of Hochschild cohomologies for local rings with embedding dimension two, Canad. Math. Bull. (to appear)
10. Müller, B. J.: The classification of algebras by dominant dimension, Canad. J. Math. 20 (1968), 398-409.
11. Nakayama, T.: On algebras with complete homology, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 22 (1958), 300-307.

12. Schulz, R.: Boundedness and periodicity of modules over QF rings, J. Algebra 101 (1986), 450-469.
13. ———— : A non-projective module without self-extensions, preprint
14. Tachikawa, H.: Quasi-Frobenius rings and generalizations, LNM 351, Springer, Berlin, 1973.
15. Wilson, G.: The Cartan map on categories of graded modules, J. Algebra 85 (1983), 390-398.

On Castelnuovo-Mumford regularity

Chikashi Miyazaki
Nagano National College of Technology
e-mail: miyazaki@ei.nagano-nct.ac.jp

1 Introduction

The purpose of this note is to survey a joint paper of Hoa and Miyazaki [10] .

Let S be a polynomial ring $K[X_0, \ldots, X_N]$ over an algebraically closed field K of characteristic 0. Let $\mathfrak{m}$ be the homogeneous maximal ideal of S. Let X be a nondegenerate closed subvariety of $\mathbf{P}_K^N = \mathrm{Proj} S$. We write I and R for the ideal and the coordinate ring of X respectively. We denote by $\mathcal{I}_X$ the ideal sheaf of X in $\mathbf{P}_K^N$. The Castelnuovo-Mumford regularity $\mathrm{reg}(X)$ of X is the smallest integer r such that

$$H^i(\mathbf{P}_K^N, \mathcal{I}_X(r-i)) = 0 \ for \ i \geq 1.$$

Bounds on the regularity of X are important in computing syzygies of the S-module R, see [3] and [17].

In case X being a curve, the fundamental work for seeking the bounds

$$\mathrm{reg} X \leq \deg X - N + 1$$

was carried out at first by Castelnuovo and then completed by Gruson-Lazarsfeld-Peskine [7]. In general case, the inequality conjectured by Eisenbud-Goto [3]

$$\mathrm{reg} X \leq \deg X - \mathrm{codim} X + 1$$

was proved in smooth surface case by Lazarsfeld [13], in 2-Buchsbaum (not necessarily smooth) surface case by Brodmann-Vogel [2] and, in higher dimensional case, the rather weaker bound in this direction was solved by Beltram-Ein-Lazarsfeld, see [1] and the references there. We note that the original conjecture is still open even for 3-Buchsbaum surfaces.

Our interest is to consider the case X being locally Cohen-Macaulay, that is, the coordinate ring R of X is a generalized Cohen-Macaulay ring. Under this assumption there is a nonnegative integer k such that

$$\mathfrak{m}^k H^i(\mathbf{P}^N_K, \mathcal{I}_X(\ell)) = 0 \text{ } for \text{ } 1 \leq i \leq \dim X \text{ } and \text{ } \ell \in \mathbf{Z}.$$

In this case we call X a k-Buchsbaum subscheme. The first remarkable results for bounding the regularity with k-Buchsbaum property was achived by Stückrad-Vogel [23]. Their result

$$\mathrm{reg}X \leq \left\lceil \frac{\mathrm{deg}X - 1}{\mathrm{codim}X} \right\rceil + (2^d - 1)k + 1$$

has been improved in [9] as

$$\mathrm{reg}X \leq \left\lceil \frac{\mathrm{deg}X - 1}{\mathrm{codim}X} \right\rceil + (2^d - 1)k + 1 - d$$

and then in [11] as

$$\mathrm{reg}X \leq \left\lceil \frac{\mathrm{deg}X - 1}{\mathrm{codim}X} \right\rceil + \frac{d(d+1)}{2}k + 1 - d.$$

In our paper [10], we obtain some bounds on $\mathrm{reg}(X)$ which depend linearly on k. The main method in [9, 11, 22, 23, 19] is using hyperplane (or hypersurface) sections, but our method here is quite different. Using the structure theory of generalized Cohen-Macaulay rings, we can give a bound on $\mathrm{reg}(X)$ in terms of the a-invariant of R. This investigation gives a new bound

$$\mathrm{reg}X \leq \left\lceil \frac{\mathrm{deg}X - 1}{\mathrm{codim}X} \right\rceil + (d + 1 - \mathrm{depth}R)(2k - 1) + k + 1$$

for a k-Buchsbaum subvariety X.

Under the same assumption, Nagel and Schenzel [19] have obtained a similar bound

$$\mathrm{reg}X \leq \left\lceil \frac{\mathrm{deg}X - 1}{\mathrm{codim}X} \right\rceil + (2d - 1)k - 1$$

Their approach is completely different from ours.

The author should like to thank Professor Hoa for giving me a chance to work with him. This paper is due to our joint work. Also, the author should like to express my thanks to Professor Goto for his stimulating suggestion during this Conference, to Professor Vogel for his valuable comments and to Dr. Yanagawa for giving me an elegant proof of (3.1).

2 Main Theorem

Throughout this section, let S be a polynomial ring $K[X_0, \ldots, X_N]$ over a field K. Let $\mathfrak{m}$ be the homogeneous maximal ideal of R. Let I be a homogeneous ideal of S. Set $R = S/I$ and $d = \dim R$. We define

$$a_i(R) = \sup\{n \; ; \; [H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_n \neq 0\}.$$

In particular, we write $a(R) = a_d(R)$, which is often called the a-invariant of R (cf. [6]). Then the Castelnuovo-Mumford regularity of R is defined as

$$\operatorname{reg}(R) = \max\{i + a_i(R) \; ; \; i = 0, \ldots, d\}.$$

More generally we define

$$\operatorname{reg}_n(R) = \max\{i + a_i(R) \; ; \; i = n, \ldots, d\}.$$

Then we have $\operatorname{reg}(R) = \operatorname{reg}_0(R) = \operatorname{reg}_r(R)$, where $r = \operatorname{depth} R$.

Now let us recall the definition of a standard system of parameters of R. Note that we consider only homogeneous systems of parameters.

Definition 2.1 *A system of parameters $x_1, \ldots, x_d$ of R is called standard if*

$$(x_1, \ldots, x_d)H^i_{\mathfrak{m}}(M/(x_1, \ldots, x_j)M) = 0,$$

for all nonnegative integers i, j with $i + j < d$.

An ideal $J \subseteq \mathfrak{m}$ is called standard if every system of parameters of R contained in J is standard.

Definition 2.2 *Let k be a nonnegative integer. R is called a k-Buchsbaum graded ring if*

$$\mathfrak{m}^k H^i_{\mathfrak{m}}(R) = 0 \text{ for all } i < d.$$

Proposition 2.3 *Assume that R is a k-Buchsbaum graded ring for some $k > 0$. Then $\mathfrak{m}^{2k}$ is a standard ideal of R.*

Proof. See [24, 25].

Definition and Proposition 2.4 *(cf. [25]) R is called a generalized Cohen-Macaulay ring if one of the following equivalent conditions holds:*

(a) $\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(R)) < \infty$ for all $i < d$.

(b) R is a k-Buchsbaum graded ring for some nonnegative integer k.

(c) $\mathfrak{m}^\ell$ is a standard ideal of R for some positive integer ℓ.

Lemma 2.5 *Let $x_1, \ldots, x_d$ be homogeneous elements of degree k in R. Assume that $x_1, \ldots, x_d$ is a standard system of parameters of R. Then we have*

$$a(M/(x_1, \ldots, x_d)M) = \max\{a_i(M) + ki \ ; \ i = 0, \ldots, d\}$$

Proof. For a homogeneous parameter x of degree k in R such that $xH^i_{\mathfrak{m}}(R) = 0$ for $i = 0, \ldots, d-1$, we have only to prove that

$$a_i(R/xR) = \max\{a_i(R), a_{i+1}(R) + k\}$$

for all $i = 0, \ldots, d-1$. By the exact sequence

$$0 \to \mathrm{Ann}_R(x)[-k] \to R[-k] \xrightarrow{\cdot x} R \to R/xR \to 0,$$

we have

$$0 \to H^i_{\mathfrak{m}}(R) \to H^i_{\mathfrak{m}}(R/xR) \to H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(R)[-k] \to 0$$

for $i = 0, \ldots, d-2$ and

$$0 \to H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(R) \to H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(R/xR) \to H^d_{\mathfrak{m}}(R)[-k] \to H^d_{\mathfrak{m}}(R) \to 0.$$

Thus the assertion follows since $[H^d_{\mathfrak{m}}(R)]_j = 0$ for large j.

Theorem 2.6 *Let k be a positive integer. Assume that R is a k-Buchsbaum ring. Then we have*

$$\mathrm{reg}_n(R) \leq a(R) + d + (d-n)(2k-1) + k.$$

In particular,

$$\mathrm{reg}(R) \leq a(R) + d + (d - \mathrm{depth} R)(2k-1) + k.$$

Proof. We shall prove

$$\mathrm{reg}_n(R) \leq s - (n-1)(2k-1) - k,$$

where $s = a(R) + 2kd + 1$. First, notice that $s \geq 1$. In fact, by [12] Proposition 3, $a(R) \leq -d$. Now take a homogeneous system of parameters $x_1, \ldots, x_d$ such that $\deg(x_1) = \cdots = \deg(x_d) = 2k$. Since $x_1, \ldots, x_d$ is standard by (2.3), we have

$$(x_1, \ldots, x_d)H^i_{\mathfrak{m}}(R/(x_1, \ldots, x_j)R) = 0$$

for $i + j < d$. From a definition of local cohomology, we get the following exact sequence of graded modules

$$\oplus_{i=1}^d R_{x_1 \cdots \hat{x}_i \cdots x_d} \xrightarrow{\psi} R_{x_1 \cdots x_d} \xrightarrow{\varphi} H^d_{\mathfrak{m}}(R) \to 0,$$

where $\hat{x}_i$ means that x_i is omitted. What we want to prove here is that $\mathfrak{m}^k v \in (x_1, \dots, x_d)R$ for v of $[R]_s$. This means that

$$a(R/(x_1, \dots, x_d)R) \leq s + k - 1.$$

Thus, by (2.5), we have

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}_n R &= \max\{a_i(R) + i \,;\ i \geq n\} \\ &= \max\{a_i(R) + 2ki - (2k-1)i \,;\ i \geq n\} \\ &= \max\{a(R/(x_1, \dots, x_d)R) - (2k-1)i \,;\ i \geq n\} \\ &\leq s + k - 1 - (2k-1)n \\ &= a(R) + d + (2k-1)(d-n) + k. \end{aligned}$$

Now we shall prove $\mathfrak{m}^k v \in (x_1, \dots, x_d)R$ for every element v of $[R]_s$. Since $s - kd > a_d(R)$, we get

$$\varphi(v/x_1 \cdots x_d) \in [H^d_{\mathfrak{m}}(R)]_{s-kd} = 0.$$

Hence we have

$$\frac{v}{x_1 \cdots x_d} = \sum_{i=1}^{d} \frac{v_i}{(x_1 \cdots \hat{x}_i \cdots x_d)^\ell},$$

for some $\ell > 0$ and $v_i \in R$. Thus we have

$$(x_1 \cdots x_d)^{\ell-1} v \in (x_1^\ell, \dots, x_d^\ell)R,$$

which yields

$$\begin{aligned} v &\in [(x_1^\ell, \dots, x_d^\ell)R : (x_1 \cdots x_d)^{\ell-1}]_R \\ &\subseteq (x_1, \dots, x_d)R + \sum_{i=1}^{d} [(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_d) :< \mathfrak{m} >]_R \end{aligned}$$

by [4], Theorem 4.7. Also we see

$$\mathfrak{m}^k[(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_d)R :< \mathfrak{m} >]_R \subseteq (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_d)R.$$

Hence we have that $\mathfrak{m}^k v \in (x_1, \dots, x_d)R$.

Theorem 2.7 *Under the condition in (2.6), assume that $\mathfrak{m}^k$ is an R-standard ideal. Then*

$$\mathrm{reg}_n(R) \leq a(R) + d + (d-n)(k-1) + k.$$

In particular, if R is a Buchsbaum graded ring of $\dim R = d$, then

$$\mathrm{reg}(R) \leq a(R) + d + 1.$$

Proof. The proof is analogous to (2.6).

In Buchsbaum case, the bound in (2.7) is also obtained by the structure theorem, which is suggested by Goto. Now let me allow to introduce this rather simpler method. Assume that R is a Buchsbaum graded ring. First, we take a polynomial ring T such that R is a maximal Buchsbaum graded T-module. By the structure theorem [5], we see that R as a graded T-module is a direct sum of some twistings of i-th syzygy modules E_i. On the other hand, we know that

$$\mathrm{reg}(E_i) = i$$

and

$$a(E_i) = i - 1$$

for $i = 1, \ldots, d-1$. Thus we have

$$\mathrm{reg}(R) \leq a(R) + d + 1$$

and its sharp bound. Also, the other sharp examples are constructed geometrically by Segre products. (See [15, 16].)

3 Some consequences

Throughout this section, we follow the notation of the introduction. Let S be a polynomial ring $K[X_0, \ldots, X_N]$ over an algebraically closed field K of characteristic 0. Let $\mathfrak{m}$ be the homogeneous maximal ideal of R. Let X be a nondegenerate closed subvariety of $\mathbf{P}_K^N = \mathrm{Proj}S$ with $\dim X = d$. We write R for the coordinate ring of X with $\dim R = d+1$. We assume that X is irreducible and reduced, that is, R is an integral domain.

The following statement is well-known and we shall describe the proof by K. Yanagawa of Nagoya University.

Lemma 3.1 *(cf. [18]) Under the above condition, we have*

$$a(R) + d + 1 \leq \left\lceil \frac{\mathrm{deg}X - 1}{\mathrm{codim}X} \right\rceil$$

Proof. For a parameter x for R, we see $a(R) + 1 \leq a(R/xR)$. Also, by Uniform Position Property [8], we may assume that X is a 0-dimensional variety with linearly general position and $\dim R = 1$. Take an h-vector $(h_0, \ldots, h_s)$ of R, where $h_s \neq 0$. Then we see $a(R) = s - 1$ and $\mathrm{deg}X = h_0 + \ldots + h_s$. Since X has linearly general position, we have $h_i \geq h_1$ for $1 \leq i \leq s-1$ by [14]. We know that $h_0 = 1$ and $h_1 = \mathrm{codim}X$. Thus we have

$$\frac{\deg X - 1}{\mathrm{codim}X} = 1 + \frac{h_2}{h_1} + \ldots + \frac{h_s}{h_1} \geq s - 1 + \frac{h_s}{h_1} > s - 1 = a(R).$$

Hence we have

$$a(R) + 1 \leq \left\lceil \frac{\deg X - 1}{\mathrm{codim}X} \right\rceil.$$

Thus the assertion is proved.

Theorem 3.2 *Let k be a positive integer. If X is k-Buchsbaum, then we have*

$$\mathrm{reg}(X) \leq \left\lceil \frac{\deg X - 1}{\mathrm{codim}X} \right\rceil + (d + 1 - \mathrm{depth}R)(2k - 1) + k.$$

Proof. It follows immediately from (2.6) and (3.1).

References

[1] A. Betram, L. Ein and L. Lazarsfeld, Vanishing theorem, a theorem of Severi, and the equations defining projective varieties, J. Amer. Math. Soc., 4(1991) 587-602.

[2] M. Brodmann and W. Vogel, Bounds for the cohomology and the Castelnuovo regularity of certain surfaces, Nagoya Math. J., 131(1993) 109-126.

[3] D. Eisenbud and S. Goto, Linear free resolutions and minimal multiplicity, J.Algebra, 88(1984) 89-133.

[4] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, J. Algebra, 85(1983) 490-534.

[5] S. Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules, Commutative Algebra and Combinatorics, Advanced Studies in Pure Math., 11(1987) 39-64.

[6] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings I, J. Math. Soc. Japan, 30(1978), 179-213.

[7] L. Gruson, R. Lazarsfeld, C. Peskine, On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves, Invent. Math. 72(1983) 496-506.

[8] J. Harris, Curves in projective space, Sém. de Math. Sup., Université de Montreal, 1982.

[9] L. T. Hoa, R. M. Mirò-Roig and W. Vogel, On numerical invariants of locally Cohen-Macaulay schemes in $\mathbf{P}^n$, Hiroshima Math. J., (to appear).

[10] L. T. Hoa and C. Miyazaki, Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for generalized Cohen-Macaulay graded rings, Math. Ann., (to appear).

[11] L. T. Hoa and W. Vogel, Castelnuovo-Mumford regularity and hyperplane sections, J. Algebra (to appear).

[12] C. Hochster, Contracted ideals from integral extensions of regular rings, Nagoya Math. J., 51(1973) 25-43.

[13] R. Lazarsfeld, A Castelnuovo bound for smooth surfaces, Duke Math. J., 55(1987) 423-429.

[14] M. Kreuzer, On the canonical module of a 0-dimensional schemes, preprint.

[15] C. Miyazaki, Graded Buchsbaum algebras and Segre products, Tokyo J. Math., 12(1989) 1-20.

[16] C. Miyazaki, Spectral sequence theory for graded modules and its application to the Buchsbaum property and Segre products J. Pure Appl. Algebra, 85(1993) 143-161.

[17] D. Mumford, Varieties defined by quadratic equations Questions on Algebraic Varieties, Centro Internationale Matematica Estivo, Cremonese, Rome, 1970, 29-100.

[18] U. Nagel, On Castelnuovo's regularity and Hilbert functions, Compositio Math., 76(1990) 265-275.

[19] U. Nagel and P. Schenzel, Cohomological annihilators and Castelnuovo-Mumford regularity, preprint.

[20] P. Schenzel, Dualisierende Komplexe in der lokalen Algebra und Buchsbaum ringe, LNM 907, Springer-Verlag, 1982

[21] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications, Springer-Verlag, 1986.

[22] J. Stückrad and W. Vogel, Castelnuovo bounds for certain subvarieties in $\mathbf{P}^n$, Math. Ann., 276(1987) 341-352.

[23] J. Stückrad and W. Vogel, Castelnuovo bounds for locally Cohen-Macaulay schemes, Math. Nachr., 136(1988) 307-320.

[24] N. Suzuki, On quasi-Buchsbaum modules — an application of the theory of FLC modules, Commutative Algebra and Combinatorics, Advanced Study in Pure Math., 11(1987) 215-243.

[25] N. V. Trung, Towards a theory of a generalized Cohen-Macaulay modules, Nagoya Math. J., 102(1986) 1-49.

On Gorenstein monomial ideals of codimension three

鴨井 祐二

東京都立大学

Introduction.

$S = K[X_1, \ldots, X_n]$ を field K 上の多項式環とし、$I \subset S$ を monomial で生成される ideal とする。Buchsbaum-Eisenbud の構造定理によれば、codimension three の Gorenstein ideal となる様な I は、適当な skew-symmetric matrix の pfaffian で生成される。

そこで、上に挙げられる行列はどの様なものかを考える。結果は次のように述べられる。

Theorem 0.1 *We put $m = \mu(I)$ a number of minimal generators of I. Then the following conditions are equivalent.*

1) I is a Gorenstein monomial ideal of codimension three.

2) $m = 2s - 1 (\geq 3)$ is odd and $I = \mathrm{Pf}_{m-1}(M)$ where $M = (a_{ij})$ is an $m \times m$ skew-symmetric matrix of monomials satisfying the following conditions.

a) For $i < j, a_{ij} = \begin{cases} \text{nonzero} & , \text{if } j = i + s - 1 \text{ or } i + s \\ 0 & , \text{otherwise.} \end{cases}$

b) $\{a_{ij} \mid a_{ij} \neq 0,\ i < j\}$ *is the set of pairwise coprime monomials.*

3) $m = 2s - 1 (\geq 3)$ is odd and there exist m monomials $b_1, \ldots, b_m$ such that

a) $I = (\{\prod_{k=1}^{s-1} b_{i+k} \mid 1 \leq i \leq m\})$
where $b_j = b_{j-m}$ for $j > m$

b) $\{b_1, \ldots, b_m\}$ *is the set of pairwise coprime monomials.*

Example 0.2 M を $K[X_1,\dots,X_7]$ 係数の行列で次のものとする

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & X_4 & -X_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_5 & -X_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_6 & -X_3\\ -X_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_7\\ X_1 & -X_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & X_2 & -X_6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & X_3 & -X_7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき、M は *(0.1),2)* の条件 *a),b)* を満たしている。そこで、$\mathrm{Pf}_6(M)$ の生成元を計算する。f_i を M から i-行,i-列 を除いて得られる行列の *pfaffian* とする。

$$N=\begin{pmatrix} X_5 & -X_2 & 0\\ 0 & X_6 & -X_3\\ 0 & 0 & X_7 \end{pmatrix}$$

と置けば、

$$f_1=pf\begin{pmatrix} 0 & N\\ -{}^tN & 0 \end{pmatrix}=det(N)=X_5X_6X_7$$

と求まる。

f_i を求めるには、M の各行と各列をそれぞれ、$-(i-1)$ 行, $-(i-1)$ 列づつ *Shift* して得られる行列について、f_1 と同じ計算をすればよい。結果とし次のようになる。

$$\begin{array}{llll} f_1=X_5X_6X_7 & f_2=X_6X_7X_1 & f_3=X_7X_1X_2 & f_4=X_1X_2X_3\\ f_5=X_2X_3X_4 & f_6=X_3X_4X_5 & f7=X_4X_5X_6. & \end{array}$$

上に挙げた例の計算は、一般性を損なわない。即ち、M を (0.1), 2) の条件 a) を満たす行列とし、$I=\mathrm{Pf}_{m-1}(M)$ とすれば、I は、(0.1), 3) の a) の様に書ける。更にこの ideal I が height 3 と成るための同値条件として、(0.1), 2) の条件 b) (または (0.1), 3) の条件 b)) が得られる。

従って (0.1) を示すには 1) $\Longrightarrow$ 2) を云えば良い。その為に幾つか準備をする。

1 monomial ideal の syzygy

S の $\mathbf{Z}^n$-grading を $\deg(X_i)=(0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,0)\in\mathbf{Z}^n$ で定める。

I を monomial ideal とし、その minimal generators を $X^{\alpha_1},\ldots,X^{\alpha_m}$ とする。また、F を free S-module with free basis $e_1,\ldots,e_m$ とし $\deg(e_i)=\alpha_i$ $(1\le i\le m)$ とおく。

そこで $\varphi: F\longrightarrow S$ by $\varphi(e_i)=X^{\alpha_i}$ $(1\le i\le m)$ について $\mathrm{Ker}(\varphi)$ を考える。

Notation 1.1

$$\begin{array}{lcll}\Sigma &=& \{X^\alpha e_i \mid \alpha\in \mathbf{N}^n,\ 1\le i\le m\} & \\ \Sigma_\beta &=& \{X^\alpha e_i \mid \alpha+\alpha_i=\beta\} & (\beta\in\mathbf{N}^n)\\ I_i &=& (\{X^{\alpha_j}\}_{j\neq i}) & (1\le i\le m).\end{array}$$

Definition 1.2 Σ_β $(\beta\in\mathbf{N}^n)$ に次の同値関係を定める。

$u,v\in\Sigma_\beta$ について、 $u\sim v$ とは、次のいづれかのときに表わす。

- $u=v$ であるか或は
- $X^{\beta_1}e_{i_1},\ldots,X^{\beta_p}e_{i_p}\in\Sigma_\beta$ が在って $u=X^{\beta_1}e_{i_1}$, $v=X^{\beta_p}e_{i_p}$ かつ $Gcd(X^{\beta_i},X^{\beta_{i+1}})\neq 1$ $(1\le i\le p-1)$ を満たす。

$X^{\beta_1}e_{i_1},\ldots,X^{\beta_p}e_{i_p}\in\Sigma_\beta$ を上で定めた relation の同値類の代表系とするとき、

$$G_\beta=\begin{cases}\{X^{\beta_1}e_{i_1}-X^{\beta_2}e_{i_2},\ldots,X^{\beta_1}e_{i_1}-X^{\beta_p}e_{i_p}\} & ,\text{ if } p\ge 2\\ \phi & ,\text{ if } p\le 1\end{cases}$$

and $G=\bigcup_\beta G_\beta$ と置く。このとき、標準的な議論により G は $\mathrm{Ker}(\varphi)$ の minimal basis と成ることが判る。(e.g. prop.1 of ch.1 in Eliahou[2].)

$V=\{e_1,\ldots,e_m\}$ を形式的に点集合と見て graph $\mathcal{G}=(V,E)$ を辺集合 $E=\{e_ie_j \mid X^\alpha e_i-X^\beta e_j\in G$ or $X^\beta e_j-X^\alpha e_i\in G$ for some $X^\alpha e_i, X^\beta e_j\in\Sigma\}$ によって定義する。

$\deg_V(e_i)={}^{\#}\{e_j \mid e_ie_j\in E\}$ と置けば次が判る。

Remark 1.3 *1) $\mathcal{G}$ は 連結 graph。*

2) $X^\alpha e_i-X^\beta e_j\in\mathrm{Ker}(\varphi)$ について

$$X^\alpha e_i-X^\beta e_j=X^\gamma\Big(\frac{Lcm(X^{\alpha_i},X^{\alpha_j})}{X^{\alpha_i}}e_i-\frac{Lcm(X^{\alpha_i},X^{\alpha_j})}{X^{\alpha_j}}e_j\Big)$$

for some monomial X^γ. 従って もし $(-1)^s(X^\alpha e_i-X^\beta e_j)$ と $(-1)^t(X^\gamma e_i-X^\delta e_k)$ $(s,t\ge 0)$ が異なる G の元ならば $j\neq k$。故に $|G|=|E|=\sum_{i=1}^m\deg_V(e_i)/2$ となる。

更に詳しく G の元を調べる。

$\Gamma = \{X^\alpha e_i \mid X^\alpha$ is one of minimal basis of $[I_i : X^{\alpha_i}]$, $1 \leq i \leq m\} \subset \Sigma$ and $\Gamma' = \{(X^\alpha e_i, X^\beta e_j), (X^\beta e_j, X^\alpha e_i) \mid X^\alpha e_i - X^\beta e_j \in G\} \subset \Sigma \times \Sigma$ とし、map $\Phi : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ を次のように定める。

$X^\alpha e_i \in \Gamma$ について $\beta = \alpha + \alpha_i$ とする。$X^\alpha \in [I_i : X^{\alpha_i}]$ だから $|\Sigma_\beta| \geq 2$ である。もし $u \in \Sigma_\beta$ such that $u \neq X^\alpha e_i$ and $u \sim X^\alpha e_i$ が在ったとすると relation の定義より $X^\alpha \in \mathfrak{m}[I_i : X^{\alpha_i}]$ where $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$ となる。これは X^α が $[I_i : X^{\alpha_i}]$ の minimal basis の内のひとつで在ることに反する。従って $X^\alpha e_i$ の同値類は $\{X^\alpha e_i\}$ である。$|\Sigma_\beta| \geq 2$ であったから $G_\beta \neq \phi$。$G_\beta = \{X^{\beta_1}e_{i_1} - X^{\beta_2}e_{i_2}, \ldots, X^{\beta_1}e_{i_1} - X^{\beta_p}e_{i_p}\}$ とおく。このとき、ある $1 \leq q \leq p$ について $X^{\beta_q}e_{i_q} = X^\alpha e_i$ と書ける。そこで Φ を

$$\Phi(X^\alpha e_i) = \begin{cases} (X^{\beta_1}e_{i_1}, X^{\beta_q}e_{i_q}) & (q > 1) \\ (X^{\beta_q}e_{i_2}, X^{\beta_1}e_{i_1}) & (q = 1) \end{cases}$$

と定める。

(1.3) に注意すれば次が確かめられる。

Proposition 1.4 *We have* $\deg_V(e_i) \geq \mu([I_i : X^{\alpha_i}])$ *for any* $1 \leq i \leq m$. *Hence*

$$\mu(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\deg_V(e_i)}{2} \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu([I_i : X^{\alpha_i}])}{2} \geq \frac{m(\mathrm{ht}(I) - 1)}{2}.$$

ここで I を Gorenstein ideal of $\mathrm{ht}(I) = 3$ と仮定すれば、$m = b_2(S/I) = |G|$ であるから (1.4) により $\mathcal{G}$ は長さ m の cycle となる。$\mathcal{G}$ の定義から次が成り立つ。

Proposition 1.5 *Suppose that I is a Gorenstein ideal of* $\mathrm{ht}(I) = 3$. *Then an homogeneous minimal basis of* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *(w.r.t. $\mathbb{Z}^n$-grading) is uniquely determined for I (up to multple of units). Furthermore, after the renumbering of $X^{\alpha_1}, \ldots, X^{\alpha_m}$, G can be written of the form*

$$G = \{X^{\alpha_{ii}}e_i - X^{\alpha_{ii+1}}e_{i+1}, X^{\alpha_{mm}}e_m - X^{\alpha_{m1}}e_1 \mid 1 \leq i \leq m-1\}.$$

2 A proof of main theorem.

まず幾つか記号を定めて置く。

$\tau \in \mathfrak{S}_m$ について、$m \times m$-matrix $(\tau) = (\tau_{ij})$ を次のものとする

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = \tau(j)) \\ 0 & (i \neq \tau(j)). \end{cases}$$

$m \times m$ matrix $M = (a_{ij})$ について、$\tau M = (\tau) \cdot M$ and $M\tau = M \cdot (\tau)^{-1}$ と置く。即ち $\tau M = (b_{ij})$ (resp. $M\tau = (c_{ij})$) とすれば $b_{\tau(i)j} = a_{ij}$ (resp. $c_{i\tau(j)} = a_{ij}$) for $1 \leq i, j \leq m$。

Proof of 1) $\Longrightarrow$ 2) of (0.1). I を height 3 の Gorenstein monomial ideal とし、S/I の $\mathbf{Z}^n$-graded minimal free resolution を

$$\mathbb{F}. = 0 \longrightarrow S(-\gamma) \xrightarrow{d_3} \bigoplus_{i=1}^{m} S(-\beta_{p_i}) \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{i=1}^{m} S(-\alpha_i) \xrightarrow{{}^t d_1} S$$

とする。但し、$d_1 = (X^{\alpha_1} \ \cdots \ X^{\alpha_m})$ and $d_3 = ((-1)^{r_1} X^{\alpha_{p_1}} \ \cdots \ (-1)^{r_m} X^{\alpha_{p_m}})$ ($r_i = 0$ or 1)。

S/I は Gorenstein だから $\mathbb{F}.$ の $S(-\gamma)$-dual をとれば、再び S/I の minimal free resolution

$$\mathbb{G}. = 0 \longrightarrow S(-\gamma) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{i=1}^{m} S(-\beta_i) \xrightarrow{{}^t d_2} \bigoplus_{i=1}^{m} S(-\alpha_{p_i}) \xrightarrow{{}^t d_3} S$$

を得る。このとき、Buchsbaum-Eisenbud[1] によれば、次の isomorphism が在る$^e xistst.$: $\mathbb{G}. \longrightarrow \mathbb{F}.$ $\mathbf{Z}^n$-graded isomorphism such that t_0 and t_3 are identities and the matrix $t_2 \cdot d_2$ is skew-symmetric.

(1.5) より、$m \times m$ matrix $d_2 = (a_{ij})$ は、次のように決まる。as

$$a_{ij} = \begin{cases} X^{\alpha_{ii}} & (1 \leq i \leq m, \ j = i) \\ -X^{\alpha_{ii+1}} & (1 \leq i < m, \ j = i+1) \\ -X^{\alpha_{m1}} & ((i,j) = (m,1)) \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

$d_3 \cdot d_2 = 0$ だから $r_1 = \cdots = r_m$。従って、$d_3 = (X^{\alpha_{p_1}} \ \cdots \ X^{\alpha_{p_m}})$ としてよい。また、$t.$ は、$\mathbf{Z}^n$-grading を保つから t_1 (resp. t_2) は、F_1 (resp. F_2) の free basis の入れ替えで決ま

る。即ち、$\tau \in \mathfrak{S}_m$ such that $\tau(p_i) = i$ for $i \in [1, m]$ とすれば t_2 は、τ に従った matrix d_2 の行の入れ替えとなる。

一方で、d_2 と ${}^t d_2$ の形をみれば、$p_i = \nu(p_1 - (i-1))$ for all $i \in [1, m]$ であるか或は、$p_i = \nu(p_1 + (i-1))$ for all $i \in [1, m]$ となる。即ち、$\tau(i) = \nu(p_1 - i + 1)$ for any $i \in [m]$ または、$\tau(i) = \nu(i - p_1 + 1)$ for any $i \in [m]$ である。

ところが、$t_2 \cdot d_2 = \tau d_2$ は skew-symmetric でなければ成らないから可能性として在り得るのは $\tau(i) = \nu(i - p_1 + 1)$ for any $i \in [1, m]$ でかつ $p_1 = s$ に限る。更にこのとき τd_2 は (0.1), 2)-a) のものとなっている。(前の注意により、条件 a) がいえれば b) も成り立つ。)

□

Corollary 2.1 *Let $I \subset S$ be a Gorenstein monomial ideal of codimension three. Then the Rees algebra $R(I) = \bigoplus_{i \geq 0} I^i$ is isomorphic to the symmetric algebra $Sym(I)$ and is Cohen-Macaulay. Furthermore, the associated graded ring $G(I) = \bigoplus_{i \geq 0} I^i / I^{i+1}$ is Gorenstein.*

Remark 2.2 *Gröbner basis* の議論により、*initial term* が *codimension 3 Gorenstein monomial ideal* であるような *(positively graded) ideal* についても *Corollary* と同じ命題が成り立つ。

References

[1] D. Buchsbaum and D. Eisenbud, *Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension 3*, Amer. J. Math. **99** (1977), 447-485.

[2] S. Eliahou, *Courbes monomiales et algebrè de Rees symbolique*, Thèse N°2080, Université de Genève, 1983.

[3] J. Herzog, A. Simis and W. V. Vasconcelos, *Approximation Complexes of Blowing-Up Rings*, J. Alg. **74** (1982), 466-493.

[4] C. Huneke, *Linkage and The Koszul Homology of ideals*, Amer. J. Math. **104**, No.5, (1982), 1043-1062.

[5] J. Watanabe, *A note on Gorenstein rings of embedding codimension 3*, Nagoya Math. J. **50** (1973), 227-232.

Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University, Tokyo, 192-03 Japan

Betti number of parameter ideals over a Buchsbaum ring

By KIKUMICHI YAMAGISHI

College of Liberal Arts, Himeji Dokkyo University

Introduction

Throughout $(A, \mathfrak{m}, k)$ denotes a Noetherian local ring of dimension d. For a finitely generated A-module M we denote by $\beta_i^A(M)$ (simply $\beta_i(M)$) the i^{th} *Betti number* of M over A, i.e., $\beta_i(M) = l_A(\operatorname{Tor}_i^A(k, M))$.

If A is a Cohen-Macaulay ring, then for any parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A we have $\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \binom{d}{i}$ for all $i \geqq 0$. In particular, every Betti number $\beta_i(A/\mathfrak{q})$ is a constant not depending on the choice of parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A. Then, our question is

Problem. *If A is a Buchsbaum ring, then for each i is the Betti number $\beta_i(A/\mathfrak{q})$ a constant not depending on the choice of parameter ideal $\mathfrak{q}$?*

This question is the dual problem whether the syzygy modules of k (over A) are Buchsbaum, cf. [5], and we get only partial answers to it; see [1], [7] and [8]. Hence, we hope that our research will bring about a new aspect in this problem.

We mention that our problem is divided into two steps as follows:

P1. *How can $\beta_i(A/\mathfrak{q})$ be determined by invariants of A not depending on a parameter ideal $\mathfrak{q}$, i.e., $l_A(\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A))$, $\beta_i(k)$ etc.?*

P2. *If $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ are any two parameter ideals of A, then is $\beta_i(A/\mathfrak{q})$ equal to $\beta_i(A/\mathfrak{q}')$ for every i ?*

From here, until the end of this note, we assume that A is a Buchsbaum ring of dimension d and $\mathfrak{q}$ is a parameter ideal of A. We sometimes write $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ using $a_1, \ldots, a_d$, the system of parameters for A, when we shall need it. For simplicity we write $h^i = l_A(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A))$ and $\beta_i = \beta_i(k)$ for each i. Then our results are stated as follows.

Proposition 1. $\beta_2(A/\mathfrak{q}) = \binom{d}{2} + \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} \cdot h^j$ *for every* $\mathfrak{q}$.

Proposition 2. (1) *If* $d = 1$, *then for each* $i \geqq 3$

$$\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \beta_{i-2} \cdot h^0 .$$

(2) *If* $d = 2$, *then for each* $i \geqq 3$

$$\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \beta_{i-2} \cdot h^0 + \beta_{i-2}([(a_1) : \mathfrak{m}]) .$$

(3) *If* $d = 3$ *and* depth $A > 0$, *then for each* $i \geqq 3$

$$\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \beta_{i-2} \cdot h^1 + \beta_{i-2}([(a_1, a_2) : \mathfrak{m}]) .$$

(4) *If* depth $A \geqq d - 2$, *then for each* $i \geqq d + 1$

$$\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \beta_{i-2} \cdot h^{d-2} + \beta_{i-2}([(a_1, \ldots, a_{d-1}) : \mathfrak{m}]) .$$

Proposition 3. *Let* M *be a maximal Buchsbaum A-module. Then the following two statements are equivalent.*

(1) $A \ltimes M$ *is a Buchsbaum ring.*

(2) $l_A(\mathrm{Tor}^A_1(A/\mathfrak{q}, M)) = \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} \cdot l_A(\mathrm{H}^j_{\mathfrak{m}}(M))$ *for every* $\mathfrak{q}$.

When this is the case, if M *is not Cohen-Macaulay, the* 1^{st} *syzygy module of* M *over* A *is a maximal Buchsbaum A-module.*

As cosequences of our propositions we have the following corollaries.

Corollary 4. *The* 2^{nd} *syzygy module of* k *over* A *is a maximal Buchsbaum A-module, if it is not zero.*

Corollary 5. *Every syzygy module of* k *over* A *is a Buchsbaum A-module, if either* $d \leqq 2$ *or* $d = 3$ *and* depth $A > 0$.

Corollary 6. *Let* A *be a complete Buchsbaum ring of minimal multiplicity, i.e.,* $e(A) = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} \cdot h^i$ *holds. If* $e(A) \geqq 2$ *then the* 1^{st} *syzygy module of the canonical module of* A *is a maximal Buchsbaum A-module.*

Proofs of Propositions

We use the notations on the Koszul complex. Namely we denote by $K.(a_1, \ldots, a_d; M)$ the Koszul complex over M with respect to $a_1, \ldots, a_d$. When $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ we simply write it by $K.(\mathfrak{q}; M)$. Moreover $Z.(\mathfrak{q}; M)$, $B.(\mathfrak{q}; M)$ and $H.(\mathfrak{q}; M)$ are its cycles, boundaries and homologies. When $M = A$ we usually omit the letter M , i.e., $K.(\mathfrak{q})$ etc., if no confusions can be expected.

Since the exact sequence of A-modules

$$0 \longrightarrow Z_1(\mathfrak{q}) \longrightarrow K_1(\mathfrak{q}) \longrightarrow K_0(\mathfrak{q}) \longrightarrow A/\mathfrak{q} \longrightarrow 0 ,$$

coincides with the leading terms of the minimal free resolution over A , we have $\beta_0(A/\mathfrak{q}) = 1$, $\beta_1(A/\mathfrak{q}) = d$ and $\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \beta_{i-2}(Z_1(\mathfrak{q}))$ for all $i \geqq 2$. Hence the main idea of our study is to clarify the behaviour of the first syzygy module $Z(\mathfrak{q})$ of a given parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A . We begin with the following.

Lemma 7. $\beta_0(Z_1(\mathfrak{q})) = \binom{d}{2} + \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} \cdot h^j$ *for every* $\mathfrak{q}$.

Proof. Here we write $K. = K.(\mathfrak{q})$. Consider the exact sequence induced from $K_2 \longrightarrow K_1$ such that

$$K_2 \xrightarrow{\delta} Z_1 \longrightarrow H_1 \longrightarrow 0 \ .$$

From this we have the next one

$$K_2/\mathfrak{m}.K_2 \xrightarrow{\bar{\delta}} Z_1/\mathfrak{m}.Z_1 \longrightarrow H_1 \longrightarrow 0 \ ,$$

which is exact. Then it is easy to see that $\bar{\delta}$ is injective, hence our assertion follows immediately.

In the case that $d = 2$, $Z_1(\mathfrak{q})$ is uniquely determined not depending on the choice of $\mathfrak{q}$. Namely

Lemma 8. *Let* M *be a Buchsbaum A-module of* $\dim_A M \geqq 2$ *and let* a, b *be a sub-system of parameters for* M . *Then*

$$Z_1(a,\ b;\ M) \cong H^0_{\mathfrak{m}}(M) \oplus [aM : m] \quad \textit{over} \quad A \ .$$

Therefore, if x, y *is another sub-system of parameters for* M , *then*

$$Z_1(a,\ b;\ M) \cong Z_1(x,\ y;\ M) \quad \textit{over} \quad A \ .$$

Proof. First, consider the diagram of A-modules as follows:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0_{\mathfrak{m}}(M) \arrow[r, "\sigma"] & Z_1(a,\ b;\ M) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & aM : \mathfrak{m} \arrow[r] & 0 \\ & & Z_1(a,\ b;\ M)/\mathfrak{m}.Z_1(a,\ b;\ M) & & \end{tikzcd}$$

where σ , ρ are defined by $\sigma(x) = (x,\ 0)$ and $\rho(x,\ y) = y$. Then we have $\sigma(H^0_{\mathfrak{m}}(M)) \cap \mathfrak{m}.Z_1(a,\ b;M) = (0)$, by the d-sequence property of a, b (on M) . This means that the composition map

$$\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \mathrm{Z}_1(a,\ b;\ M)/\mathfrak{m}.\mathrm{Z}_1(a,\ b;\ M)$$

between k-vector spaces is injective, therefore σ must split.

By the next lemma, we can reduce our problem to the case of lower dimension, when its depth is suitable large.

Lemma 9. *Let* $1 \leqq r \leqq d - 1$. *If* depth $A \geqq r$, *then there exists an exact sequence of* A*-modules*

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \mathrm{Z}_1(\mathfrak{q}) \longrightarrow \mathrm{Z}_1(a_{r+1},\ \ldots\ ,\ a_d;\ \bar{A}) \longrightarrow 0$$

such that proj $\dim_A W = r - 1$, where $\bar{A} = A/(a_1,\ \ldots\ ,\ a_r)$.

Proof. Consider the A-epimorphism

$$\upsilon\ :\ \mathrm{Z}_1(\mathfrak{q}) \longrightarrow \mathrm{Z}_1(a_{r+1},\ \ldots\ ,\ a_d;\ \bar{A})$$

defined by $\upsilon(x_1,\ \ldots\ ,\ x_r,\ x_{r+1},\ \ldots\ ,\ x_d) = (\bar{x}_{r+1},\ \ldots\ ,\ \bar{x}_d)$. This map induces the exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \upsilon \longrightarrow \mathrm{Z}_1(\mathfrak{q}) \xrightarrow{\ \upsilon\ } \mathrm{Z}_1(a_{r+1},\ \ldots\ ,\ a_d;\ \bar{A}) \longrightarrow 0 .$$

By the direct calculation we see that proj $\dim_A(\mathrm{Ker}\ \upsilon) = r - 1$.

Proof of Proposition 1. By Lemma 7, this is obvious.

Proof of Proposition 2. (1) Since $d = 1$, we have $\mathrm{Z}_1 = 0 : a_1 = \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)$, hence $\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \beta_{i-2}(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)) = \beta_{i-2}\cdot h^0$ for $i \geqq 3$.

(2) Let $d = 2$. By Lemma 8 we have

$$\begin{aligned}\beta_i(A/\mathfrak{q}) &= \beta_{i-2}(\mathrm{Z}_1) = \beta_{i-2}(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)) + \beta_{i-2}([(a_1) : \mathfrak{m}]) \\ &= \beta_{i-2}\cdot h^0 + \beta_{i-2}([(a_1) : \mathfrak{m}]) \quad \text{for} \quad i \geqq 3 .\end{aligned}$$

(3) Let $d = 3$ and $\mathfrak{q} = (a,\ b,\ c)$. We write

$$\bar{A} = A/(a)\ ,\quad Z = Z_1(\mathfrak{q})\quad \text{and}\quad \bar{Z} = Z_1(b,\ c;\ \bar{A})\ .$$

Since depth $A > 0$, by Lemma 9, we have that $\beta_j(Z) = \beta_j(\bar{Z})$ for all $j \geqq 2$. Look at the long exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(k,\ Z) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(k,\ \bar{Z}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^A(k,\ A^2) \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^A(k,\ Z) \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^A(k,\ \bar{Z}) \longrightarrow 0\ .$$

By Proposition 1, we can easily see

$$l_A(\mathrm{Tor}_0^A(k,\ Z)) = l_A(\mathrm{Tor}_0^A(k,\ A^2)) + l_A(\mathrm{Tor}_0^A(k,\ \bar{Z}))\ ,$$

and this implies $l_A(\mathrm{Tor}_1^A(k,\ Z)) = l_A(\mathrm{Tor}_1^A(k,\ \bar{Z}))$. Hence we have $\beta_1(Z) = \beta_1(\bar{Z})$ too. Thus for all $i \geqq 3$ we have that

$$\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \beta_{i-2}(Z) = \beta_{i-2}(\bar{Z})\ .$$

But by Lemma 8 $\bar{Z} \cong H_{\mathfrak{m}}^0(\bar{A}) \oplus [b\bar{A} : \mathfrak{m}] \cong H_{\mathfrak{m}}^1(A) \oplus \dfrac{(a,\ b) : \mathfrak{m}}{(a)}$, hence

$$\beta_{i-2}(\bar{Z}) = \beta_{i-2}\cdot h^1 + \beta_{i-2}\left(\frac{(a,\ b) : \mathfrak{m}}{(a)}\right)\ .$$

Moreover from the following exact sequence of A-modules

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ a\ } (a,\ b) : \mathfrak{m} \longrightarrow \frac{(a,\ b) : \mathfrak{m}}{(a)} \longrightarrow 0$$

we have that $\beta_j\left(\dfrac{(a,\ b) : \mathfrak{m}}{(a)}\right) = \beta_j([(a,\ b) : \mathfrak{m}])$ for all $j \geqq 2$, and also for $j = 1$, because $\mathrm{Tor}_0^A(k,\ A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^A(k,\ [(a,\ b) : \mathfrak{m}])$ is injective, cf. the proof of Proposition 1. Combining these facts we finally get our assertion.

(4) Let $i \geqq d + 1$, and put $\bar{A} = A/(a_1,\ \ldots\ ,\ a_{d-2})$ By Lemma 9, there exists an exact sequence

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow Z_1(\mathfrak{q}) \longrightarrow Z_1(a_{d-1},\ a_d;\ \bar{A}) \longrightarrow 0$$

such that $\mathrm{proj\ dim}_A W = d - 3$. Since $i \geqq d + 1$, we have

$$\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \beta_{i-2}(Z_1(\mathfrak{q})) = \beta_{i-2}(Z_1(a_{d-1},\ a_d;\ \bar{A}))\ .$$

On the other hand, by Lemma 8

$$Z_1(a_{d-1}, a_d; \bar{A}) \cong H_{\mathfrak{m}}^{d-2}(A) \oplus \frac{(a_1, \ldots, a_{d-1}) : \mathfrak{m}}{(a_1, \ldots, a_{d-2})} .$$

But $a_1, \ldots, a_{d-2}$ is an A-regular sequence, we have that

$$\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \beta_{i-2} \cdot h^{d-2} + \beta_{i-2}\left(\frac{(a_1, \ldots, a_{d-1}) : \mathfrak{m}}{(a_1, \ldots, a_{d-2})}\right)$$

$$= \beta_{i-2} \cdot h^{d-2} + \beta_{i-2}([(a_1, \ldots, a_{d-1}) : \mathfrak{m}])$$

for $i \geqq d + 1$.

Let $Q.$ be a minimal free resolution of $A/\mathfrak{q}$ over A :

$$\cdots \longrightarrow Q_2 \xrightarrow{\partial_2} Q_1 \xrightarrow{\partial_1} Q_0 \xrightarrow{\partial_0} A/\mathfrak{q} \longrightarrow 0 .$$

Then ∂_1 coincides with the map $K_1(\mathfrak{q}) \longrightarrow K_0(\mathfrak{q})$, the leading terms of the Koszul complex $K.(\mathfrak{q})$, hence we have $\operatorname{Ker} \partial_1 = Z_1(\mathfrak{q})$. Write $Q. \otimes M$:

$$\cdots \longrightarrow Q_2 \otimes M \xrightarrow{\bar{\partial}_2} Q_1 \otimes M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} Q_0 \otimes M \xrightarrow{\bar{\partial}_0} A/\mathfrak{q} \otimes M \longrightarrow 0 .$$

Then $\bar{\partial}_1$ also coincides with the map $K_1(\mathfrak{q}; M) \longrightarrow K_0(\mathfrak{q}; M)$, hence $\operatorname{Ker} \bar{\partial}_1 = Z_1(\mathfrak{q}; M)$. Let $\varepsilon : Z_1(\mathfrak{q}) \longrightarrow Q_1$ be the inclusion and denote by $\bar{\varepsilon} : Z_1(\mathfrak{q}) \otimes M \longrightarrow Q_1 \otimes M$ the induced map from ε . Then we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
Q_2 \otimes M \arrow[rr, "\bar{\partial}_2"] \arrow[dr] & & Q_1 \otimes M \\
& Z_1(\mathfrak{q}) \otimes M \arrow[ur, "\bar{\varepsilon}"'] &
\end{tikzcd}$$

Since $Q_2 \longrightarrow Z_1(\mathfrak{q})$ is surjective, $Q_2 \otimes M \longrightarrow Z_1(\mathfrak{q}) \otimes M$ is also surjective, hence $\operatorname{Im} \bar{\partial}_2 = \operatorname{Im} \bar{\varepsilon}$. Moreover $B_1(\mathfrak{q}; M)$ is equal to the image of the composition map

$$B_1(\mathfrak{q}) \otimes M \longrightarrow Z_1(\mathfrak{q}) \otimes M \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} Q_1 \otimes M ,$$

hence $Z_1(\mathfrak{q}; M) \supset \operatorname{Im} \bar{\varepsilon} \supset B_1(\mathfrak{q}; M)$. By these facts we can find an

A-epimorphism such that

$$H_1(\mathfrak{q};\ M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{q},\ M)\ ,$$

because $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{q},\ M) \cong Z_1(\mathfrak{q};\ M)/\mathrm{Im}\ \bar{\varepsilon}$ by the definition.

Now we can prove Proposition 3 as follows.

Proof of Proposition 3. First we prove (1) $\Longrightarrow$ (2). Assume that $A \ltimes M$ is a Buchsbaum ring. Then we will show that

$$l_A(\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{q},\ M)) = \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} \cdot l_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^j(M))$$

for every parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A. At first we have the following.

Claim. $\mathrm{Im}\ \bar{\varepsilon} = B_1(\mathfrak{q};\ M)$.

By this claim, the A-linear map $H_1(\mathfrak{q};\ M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{q},\ M)$ as above must be an isomorphism, hence we get that

$$l_A(\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{q},\ M)) = l_A(H_1(\mathfrak{q};\ M)) = \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} \cdot l_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^j(M))\ .$$

The converse is clear in the same way.

Next we show the rest of our assertion. Assume that $A \ltimes M$ is a Buchsbaum ring. Write $\mu = \mu_A(M)$, the minimal number of generators of M over A . Consider the short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \sigma \longrightarrow F \xrightarrow{\ \sigma\ } M \longrightarrow 0\ ,$$

where F is an A-free module of rank μ and σ is a suitable A-epimorphism. Put $E = \mathrm{Ker}\ \sigma$. Since F , M are maximal Buchsbaum, it occurs that either $\dim_A E = 0$ or E is an FLC A-module with $\dim_A E = d$. But M is not Cohen-Macaulay by our assumption, this means that $\dim_A E \neq 0$. In fact, assume on the contrary, namely $\dim_A E = 0$. Then $\mathrm{H}_\mathfrak{m}^0(E) = E$. Note that $\sigma(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^0(F)) = \sigma(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^0(A).F) \subset$

$H^0_{\mathfrak{m}}(A).M$. Since $A \ltimes M$ is Buchsbaum, we know $H^0_{\mathfrak{m}}(A).M = (0)$, cf. [7], Proposition 2.3, hence $H^0_{\mathfrak{m}}(F) \subset E$, i.e., $H^0_{\mathfrak{m}}(E) = H^0_{\mathfrak{m}}(F)$. This implies that $E \cong H^0_{\mathfrak{m}}(A)^{\mu}$, the direct sum of μ copies of $H^0_{\mathfrak{m}}(A)$. Hence $M \cong (A/H^0_{\mathfrak{m}}(A))^{\mu}$ from the exact sequence above. Since $A \ltimes M$ is Buchsbaum again, by [7], Corollary 2.5, $(A/H^0_{\mathfrak{m}}(A)) \ltimes M$ is also Buchsbaum. But M is free as an module over $A/H^0_{\mathfrak{m}}(A)$, this means that M is Cohen-Macaulay, cf. the proof of Corollay 2.4 of [7], and this is a contradiction. Now we may assume that E is FLC such that $\dim_A E = d$. Choose any parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A . Then from the exact sequence above we see that

$$\begin{aligned} I(\mathfrak{q}; E) &= I_A(F) - I_A(M) + l_A(\mathrm{Tor}^A_1(A/\mathfrak{q}, M)) \\ &= \mu . I(A) - I_A(M) + \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} . l_A(H^j_{\mathfrak{m}}(M)) , \end{aligned}$$

cf. the statement (2), and thus E must be a Buchsbaum A-module.

Remark 10. Assume that $d \geqq 2$. Let $a \in \mathfrak{m}$ be a parameter for A . Then, in general, we have that

$$\beta_j([(a) : \mathfrak{m}]) \leqq \beta_j(h^1 + h^0) + \beta_{j-1}.h^0 \quad \text{for all} \quad j \geqq 1 .$$

Moreover the equality holds when $h^1 = 0$ or $h^0 = 0$.

Example 11. Let $S = k[[a, b, c, x, y, z]]$ be a formal power series ring over a field k , and put $B = S/(a, b, c) \cap (x, y, z)$. Consider $A = B/(c^2 + z^2)B$ and $\mathfrak{q} = (a + x, b + y)A$. Then A is a 2-dimensional Buchsbaum ring with $h^0 = h^1 = 1$ and $\mathfrak{q}$ is a parameter of A . Moreover by a computer we have that

$\beta.(A/\mathfrak{q}) = (1, 2, 4, 18, 74, 288, 1112, \ldots)$,

$\beta. = (1, 6, 25, 98, 379, \ldots)$, and

$$\beta_{\cdot}([(a + x) : \mathfrak{m}]) = (3, 12, 49, 190, 733, 2822, \ldots) .$$

Hence these computations imply that

$$\beta_1([(a + x) : \mathfrak{m}]) = 12 < 13 = \beta_1(h^1 + h^0) + \beta_0 . h^0 .$$

Therefore the equality in Remark 10 is not true in general.

Remark 12. Unfortunately, in the case that the length of the sub-system of parameters is greater than 2 , Lemma 8 is not true in general.

Assume that $d \geqq 3$. Then we have that

$$l_A(A/\mathfrak{q}) = l_A(\mathrm{H}^2_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Z}_1(\mathfrak{q}))) - l_A(\mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Z}_1(\mathfrak{q}))) - dh^2 + (d - 1)h^1 + h^0$$

for any parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A . Now choose another parameter ideal of A , say $\mathfrak{q}'$, such that $l_A(A/\mathfrak{q}') \neq l_A(A/\mathfrak{q})$. Then we see that $l_A(\mathrm{H}^p_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Z}_1(\mathfrak{q}))) \neq l_A(\mathrm{H}^p_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Z}_1(\mathfrak{q}')))$ for $p = 1$ or 2 , and hence $\mathrm{Z}_1(\mathfrak{q}) \ncong \mathrm{Z}_1(\mathfrak{q}')$.

For a finitely generated A-module M we denote by $\mathrm{Syz}^A_i(M)$ the i^{th} syzygy module of M over A . Moreover, we write $A^* = A/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)$ and $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{q}.A^*$. Now assume that $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A) \cap \mathfrak{m}^2 = (0)$. Then, by the similar discussion as in the proof of Theorem (1.3) in [8], we see that for each $i \geqq 3$

$$\mathrm{Syz}^A_i(A/\mathfrak{q}) \cong \{ \bigoplus_{j=0}^{i-2} \mathrm{Syz}^A_j(k)^{\beta^*_{i-j-1} . h^0} \} \oplus \mathrm{Syz}^{A^*}_i(A^*/\mathfrak{q}^*) \quad \text{over } A ,$$

where $\beta^*_p = \beta^{A^*}_p(A^*/\mathfrak{q}^*)$, hence

$$\beta^A_i(A/\mathfrak{q}) = \{ \sum_{j=0}^{i-2} \beta_j . \beta^{A^*}_{i-j-1}(A^*/\mathfrak{q}^*) \} . h^0 + \beta^{A^*}_i(A^*/\mathfrak{q}^*) .$$

Therefore, by Proposition 2, we have the following.

Proposition 13. *Assume that* $d = 3$. *If* A *has maximal embedding dimension, i.e.,* $v(A) = e(A) + d - 1 + \mathrm{I}(A)$ *holds, then for each* i , $\beta_i(A/\mathfrak{q})$ *is a constant not depending on the choice of parameter ideal* $\mathfrak{q}$ *of* A .

When does become the syzygy module Buchsbaum?

We here assume that A is a non-regular Buchsbaum ring. We denote by $F.$ the minimal free resolution of k over A and by E_i the i^{th} syzygy module of k over A . Then, since A is Buchsbaum, E_i is an FLC A-module and $\mathrm{Supp}_A E_i = \mathrm{Spec}\, A$; cf. [5], Theorem 9. Now let $\mathfrak{q}$ be a parameter ideal of A . From the exact sequence

$$0 \longrightarrow E_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow E_{i-1} \longrightarrow 0$$

we have the long exact sequence of A-modules:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A/\mathfrak{q},\ E_{i-1}) \longrightarrow E_i/\mathfrak{q}E_i \longrightarrow F_{i-1}/\mathfrak{q}F_{i-1} \longrightarrow E_{i-1}/\mathfrak{q}E_{i-1} \longrightarrow 0 .$$

But $\mathrm{Tor}_1(A/\mathfrak{q},\ E_{i-1}) \cong \mathrm{Tor}_i(k,\ A/\mathfrak{q})$ we have

$$\beta_i(A/\mathfrak{q}) = l_A(E_i/\mathfrak{q}E_i) + l_A(E_{i-1}/\mathfrak{q}E_{i-1}) - \beta_{i-1}\cdot l_A(A/\mathfrak{q}) .$$

On the other hand, $e_{\mathfrak{q}}(E_i) + e_{\mathfrak{q}}(E_{i-1}) - \beta_{i-1}\cdot e_{\mathfrak{q}}(A) = 0$, hence

$$\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \mathrm{I}(\mathfrak{q};\ E_i) + \mathrm{I}(\mathfrak{q};\ E_{i-1}) - \beta_{i-1}\cdot \mathrm{I}(A) .$$

$$\leqq \mathrm{I}_A(E_i) + \mathrm{I}_A(E_{i-1}) - \beta_{i-1}\cdot \mathrm{I}(A) .$$

Moreover if we write $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_d)$, then since E_i $(i \geqq 1)$ is FLC we have

$$\mathrm{I}(a_1^{m_1}, \ldots, a_d^{m_d};\ E_i) \leqq \mathrm{I}(a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d};\ E_i) ,$$

for $m_j \leqq n_j$, $1 \leqq j \leqq d$.

By these observations we have the following.

Lemma 14. (1) If $m_j \leqq n_j$ for all $1 \leqq j \leqq d$, then

$$\beta_i(A/(a_1^{m_1}, \ldots, a_d^{m_d})) \leqq \beta_i(A/(a_1^{n_1}, \ldots, a_d^{n_d})) .$$

Moreover there is an integer r such that

$$\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \mathrm{I}_A(E_i) + \mathrm{I}_A(E_{i-1}) - \beta_{i-1}.\mathrm{I}(A)$$

for any parameter ideals $\mathfrak{q}$ of A contained in $\mathfrak{m}^r$.

(2) $a_1, \ldots, a_d$ is a uncoditioned strong d-sequence on both E_i and E_{i-1} $(i \geqq 1)$ if and only if

$$\beta_i(A/(a_1, \ldots, a_d)) = \beta_i(A/(a_1^2, \ldots, a_d^2)) .$$

Lemma 15 ([1], Corollary 15]). E_i is a Buchsbaum A-module if and only if $\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}.\beta_j(A/\mathfrak{q})$ is a constant not depending on the choice of parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A. When this is the case one has

$$\mathrm{I}_A(E_i) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}.\beta_j(A/\mathfrak{q}) + \{\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j-1}\beta_j\}.\mathrm{I}(A) .$$

Therefore every syzygy module E_i of k (over A) is a Buchsbaum A-module if and only if $\beta_i(A/\mathfrak{q})$ is a constant not depending on the choice of parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A for all $i \geqq 0$.

Assume that $d \geqq 2$ and depth $A > 0$. Let $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ and put $\bar{A} = A/(a_1)$, $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/(a_1)$ and $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}/(a_1)$. Then

Proposition 16. If $a_1 \notin \mathfrak{m}^2$, then for all $i \geqq 1$

$$\beta_i(A/\mathfrak{q}) = \beta_i^{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{\mathfrak{q}}) + \beta_{i-1}^{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{\mathfrak{q}}) .$$

Proof. We denote by $\bar{E}_i$ the i^{th} syzygy module of k over $\bar{A}$ and write $\bar{\beta}_i = \beta_i^{\bar{A}}(k)$. Since $a_1 \notin \mathfrak{m}^2$ we see that E_i/a_1E_i is isomorphic to $\bar{E}_i \oplus \bar{E}_{i-1}$ for all $i > 0$. Hence $\beta_i = \bar{\beta}_i + \bar{\beta}_{i-1}$, and hence we have that

$$\begin{aligned}\beta_i(A/\mathfrak{q}) &= \mathrm{I}(\mathfrak{q};\, E_i) + \mathrm{I}(\mathfrak{q};\, E_{i-1}) - \beta_{i-1}\cdot \mathrm{I}(A)\\ &= \{\mathrm{I}(\bar{\mathfrak{q}};\, \bar{E}_i) + \mathrm{I}(\bar{\mathfrak{q}};\, \bar{E}_{i-1}) - \bar{\beta}_{i-1}\cdot \mathrm{I}(\bar{A})\}\\ &\qquad + \{\mathrm{I}(\bar{\mathfrak{q}};\, \bar{E}_{i-1}) + \mathrm{I}(\bar{\mathfrak{q}};\, E_{i-2}) - \bar{\beta}_{i-2}\cdot \mathrm{I}(\bar{A})\}\\ &= \beta_i^{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{\mathfrak{q}}) + \beta_{i-1}^{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{\mathfrak{q}}),\end{aligned}$$

where $\bar{E}_{-1} = (0)$ and $\bar{\beta}_{-1} = 0$.

Example 17. In the case that $a_1 \in \mathfrak{m}^2$, Proposition 16 is not true in general. In fact, if $d = 2$ and depth $A = 1$, then by Proposition 2 we have that

$$\beta_3(A/\mathfrak{q}) = \beta_1\cdot h^1\,;$$

$$\beta_3^{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{\mathfrak{q}}) = \bar{\beta}_1\cdot l_{\bar{A}}(\mathrm{H}^0_{\bar{\mathfrak{m}}}(\bar{A})) = \beta_1\cdot h^1\,,\ \text{since}\ \ \beta_1 = \bar{\beta}_1\,;$$

$$\beta_2^{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{\mathfrak{q}}) = \bar{\beta}_0\cdot l_{\bar{A}}(\mathrm{H}^0_{\bar{\mathfrak{m}}}(\bar{A})) = \beta_0\cdot h^1 = h^1\,.$$

Hence $\beta_3(A/\mathfrak{q}) < \beta_3^{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{\mathfrak{q}}) + \beta_2^{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{\mathfrak{q}})$ as required.

Question 18. *If A has the stability for the Betti number of parameter ideal, then for any parameter $a \in \mathfrak{m}$ does $A/(a)$ satisfy the stability for the Betti number of parameter ideal too?*

We note that Question 18 is true in the case that depth $A > 0$ and $a \notin \mathfrak{m}^2$ by Proposition 16.

References

[1] S. Gōto. On Buchsbaum rings. *J. Algebra* **67**(1980), 272-279.

[2] ________ Buchsbaum rings of maximal embedding dimension. *J. Algebra* **76**(1982), 383-399.

[3] J. Herzog, A. Simis and W. V. Vasconcelos. Approximation complexes of blowing-up rings. *J. Algebra* **74**(1982), 466-493.

[4] C. Huneke. The theory of d-sequences and powers of ideals. *Adv. in Math.* **46**(1982), 249-279.

[5] S. Okiyama. A local ring is CM if and only if its residue field has a CM syzygy. *Tokyo J. Math.* **14**(1991), 489-500.

[6] J. Stückrad and W. Vogel. *Buchsbaum Rings and Applications* (Springer-Verlag, 1986).

[7] K. Yamagishi. Idealizations of maximal Buchsbaum modules over a Buchsbaum ring. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **104**(1988), 451-478.

[8] K. Yoshida. On Ulrich modules and its generalizations. In *Proc. of the 14th Symposium on Commutative Algebra in 1992*. **14**(1993), 188-200. (In Japanese)

College of Liberal Arts
Himeji Dokkyo University
Kamiono 7-2-1, Himeji, Hyogo 670
E-Mail: yamagisi@hdkuc1.himeji-du.ac.jp

体上の多項式環の素イデアル による局所環

宮崎大教育・谷　本　　洋

1　はじめに

体を K とし，K 上の変数の集合を $\underline{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$, $K[\underline{X}]$ の素イデアルを P とし，さらに $R = K[\underline{X}]_P$, $\wp = PR$ とする。このとき，R の適当な部分体 L と $\wp$ の適当な元の集合 $\underline{u} = \{u_1, \ldots, u_t\}$ $(t = \mathrm{ht}\, P)$ に対して，いつ $R = L[\underline{u}]_{(\underline{u})}$ となるだろうか？ という問題を考える。もちろん否定的な場合もあるが，肯定的な場合も身近にかなりある。ここではこのことについて述べたい。たとえば，半群環を定義する素イデアルなどは肯定的な例であることがわかる。

2　判定方法

肯定的，あるいは否定的であることを示すために，それぞれ次の性質を主に使う。

<u>肯定的であることを示すとき.</u>

Proposition 1　K を含む R の部分体 L と，R の元の集合 $\underline{u} = \{u_1, \ldots, u_t\}$ $(t = \mathrm{ht}\, P)$ に対し，

(1) $\forall i$ について，$u_i \in \wp$,

(2) $\forall j$ について，$X_j \in L[\underline{u}]_{(\underline{u})}$,

であるとき，$R = L[\underline{u}]_{(\underline{u})}$ である。

証明は容易である。

<u>否定的であることを示すとき.</u>　もし $R = L[\underline{u}]_{(\underline{u})}$ と書けるならば，L は R の係数体となる。そこで R が係数体を持つための必要条件をある条件下で求めてみる。

Proposition 2　次のいずれかの条件をみたす体 k を K が含むとする：

$$k = \overline{k}\ ,\ k = \mathbf{R} \text{ または } k \text{ は素体上代数的。}$$

いま $\wp = PR$ とおき，R が係数体を持つとすれば，次が成立する：

(1) R の任意の係数体 L に対し，$L \supseteq k$；

(2) $\exists u_1, \ldots, u_t \in R$ s.t. $\forall f(\underline{X}) \in \wp \cap k(\underline{X})$ に対し，$f(u_1, \ldots, u_t) = 0$；

(3) *(2)* において，K^n の点に対応する極大イデアルに P が等しくないとき，$\exists i$ に対し $u_i \notin K$ ととれる。

Proof. R から $R/\wp$ への標準的準同型写像を φ とし，R の任意の係数体を L とする。$\psi = \varphi|_L$ とおくと，ψ は L から $R/\wp$ への同型写像である。
(1) k が素体上代数的であるときは容易であるから，$k = \overline{k}$ または $k = \mathbf{R}$ であるとする。$L \not\supseteq k$ とすると，$\exists a \in k - L$. $L + \wp/\wp = R/\wp$ より，$\exists x \in L, \exists p \in \wp$ s.t. $a = x + p$. もし $x \in K$ なら，$p \in \wp \cap K = 0$. よって $p = 0$. よって $a = x \in L$. これは矛盾。従って，$x \in K(\underline{X}) - K$. そこで，$x = \alpha(\underline{X})/\beta(\underline{X})$ ($\alpha(\underline{X}), \beta(\underline{X}) \in K[\underline{X}]$, $\alpha(\underline{X}), \beta(\underline{X})$ は互いに素) とおく。自然数 r を $r > \max\{\deg \alpha(\underline{X}), \deg \beta(\underline{X})\}$ をみたすようにとる。いま，$k' = \psi^{-1}(\varphi(k))$ とおくと，$\psi(x) = a \pmod{\wp} = \varphi(a)$. よって，$x \in k'$. たとえ $k = \mathbf{R}$ で $a < 0$ であっても，$-a$ を考えることにより $a > 0$ とできるから，$k = \overline{k}$，$k = \mathbf{R}$ いずれの場合においても $\exists z \in k'$ s.t. $z^r = x$. $z \in K(\underline{X})$ より，$z = f(\underline{X})/g(\underline{X})$ ($\exists f(\underline{X}), g(\underline{X}) \in K[\underline{X}]$, $f(\underline{X}), g(\underline{X})$ は互いに素) とおけば，$f(\underline{X})^r \beta(\underline{X}) = g(\underline{X})^r \alpha(\underline{X})$. よって，$\exists \varepsilon \in K - \{0\}$ s.t. $\alpha(\underline{X}) = \varepsilon f(\underline{X})^r$, $\beta(\underline{X}) = \varepsilon^{-1} g(\underline{X})^r$. r の定義より，$\alpha(\underline{X}), \beta(\underline{X}) \in K$. これは矛盾。よって，$L \supseteq k$.
(2),(3) $L + \wp/\wp = R/\wp$ より，$\exists u_1, \ldots, u_n \in L$ s.t. $\psi(u_j) = X_j \pmod{\wp}$ for $\forall j$. さらに，K^n の点に対応する極大イデアルに P が等しくないとき，$\exists i$ s.t. $P \not\ni X_i - t$ for $\forall t \in K$. よって，$u_i \notin K$ である。
さて，$\forall f(\underline{X}) = \sum a_{i_1 \cdots i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} / \sum b_{j_1 \cdots j_n} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n} \in \wp \cap k(\underline{X})$ ($a_{i_1 \cdots i_n}, b_{j_1 \cdots j_n} \in k$) に対し，$k \subseteq L$ ゆえに，$\forall a_{i_1 \cdots i_n}, b_{j_1 \cdots j_n} \in L$. よって，$f(u_1, \ldots, u_n) \in L$. 従って，$\psi(f(u_1, \ldots, u_n)) = \sum a_{i_1 \cdots i_n} \psi(u_1)^{i_1} \cdots \psi(u_n)^{i_n} / \sum b_{j_1 \cdots j_n} \psi(u_1)^{j_1} \cdots \psi(u_n)^{j_n} = f(\underline{X}) \pmod{\wp} = 0$
ψ は単射だから，$f(u_1, \ldots, u_n) = 0$ □

Corollary 1 次のいずれかの条件をみたす体 k を K が含むとする：

$$k = \overline{k}\ ,\ k = \mathbf{R} \text{ または } k \text{ は素体上代数的。}$$

このとき次が成立する：

(1) $\exists f(\underline{X}) \in k[\underline{X}]$ s.t. $f(\underline{X}) = 0$ は $K(\underline{X})^n$ に解を持たない。
$\Rightarrow P \ni f(\underline{X})$ であるような $K[\underline{X}]$ の任意の素イデアル P に対し，$K[\underline{X}]_P$ は係数体を持たない。

(2) $\exists f(\underline{X}) \in k[\underline{X}]$ s.t. $f(\underline{X}) = 0$ は $K(\underline{X})^n - K^n$ に解を持たない。
$\Rightarrow K^n$ の点に対応する極大イデアルに等しくないような $f(\underline{X})$ を含む $K[\underline{X}]$ の任意の素イデアル P に対し，$K[\underline{X}]_P$ は係数体を持たない。

3 半群環を定義する素イデアルについて

Theorem 1 r 個の変数を $t_1,\ldots,t_r$ とし，負ではない整数 a_{ij} に対し，$\mathrm{t}_j = t_1^{a_{1j}}t_2^{a_{2j}}\cdots t_r^{a_{rj}}$ $(j=1,\ldots,n)$ とおく。さらに，体 k 上 $\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_n$ で生成された半群環を A とし，k 上 n 変数の多項式環 $k[X_1,\ldots,X_n]$ から A への自然な準同型写像を Φ とする。$P = Ker\,\Phi$ とおき，$R = k[X_1,\ldots,X_n]_P$，$\wp = PR$ とおく。このとき，$\exists \ell : R$ の係数体，$\exists U_1,\ldots,U_p : \ell$ 上代数的独立 s.t. $R = \ell[U_1,\ldots,U_p]_{(U_1,\ldots,U_p)}$

Proof. 連立 1 次方程式 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 (i=1,\ldots,r)$ の $\mathbf{Z}^n$ における解の集合は基底を持つ。それを $\mathrm{e}_j = (e_{j1},\ldots,e_{jn})(j=1,\ldots,m)$ とする。すると，$\exists \mathrm{e}_j = (e_{j1},\ldots,e_{jn}) \in \mathbf{Z}^n(j=m+1,\ldots,n)$ s.t. $\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_n$ は $\mathbf{Z}^n$ の基底になる。すると，Φ から導かれる準同型写像 $\phi : \mathbf{Z}^n \longrightarrow \mathbf{Z}^r$ について，$\phi(\mathrm{e}_{m+1}),\ldots,\phi(\mathrm{e}_n)$ は $\mathbf{Z}$ 上 1 次独立である。$\phi(\mathrm{e}_i)$ の j 番目の座標を $\phi(\mathrm{e}_i)_j$ とかく。

このとき，$V_j = X_1^{e_{j1}}\cdots X_n^{e_{jn}}(j=m+1,\ldots,n)$ とおくと，$V_{m+1},\ldots,V_n$ は k 上代数的独立であり，$k(V_{m+1},\ldots,V_n) \subset R$.

なぜなら，$\forall X_i \notin \wp$ ゆえに，$V_{m+1},\ldots,V_n \in R$. いま，$\exists f(Y_{m+1},\ldots,Y_n) \in k[Y_{m+1},\ldots,Y_n]$ $(Y_{m+1},\ldots,Y_n$ は k 上の変数$)$ について，$f(V_{m+1},\ldots,V_n) \in \wp$ と仮定する。

$$f(Y_{m+1},\ldots,Y_n) = \sum hY_{m+1}^{u_{m+1}}\cdots Y_n^{u_n}\ (\forall h \in k)$$

とすれば，

$$f(V_{m+1},\ldots,V_n) = \sum hX_1^{\sum e_{i1}u_i}\cdots X_n^{\sum e_{in}u_i}$$

Φ を R から A の商体への準同型写像に拡張しておけば，

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(f(V_{m+1},\ldots,V_n)) \\ &= \sum h(t_1^{a_{11}}\cdots t_r^{a_{r1}})^{\sum e_{i1}u_i}\cdots(t_1^{a_{1n}}\cdots t_r^{a_{rn}})^{\sum e_{in}u_i} \\ &= \sum ht_1^{\sum a_{1j}\sum e_{ij}u_i}\cdots t_r^{\sum a_{rj}\sum e_{ij}u_i} \end{aligned}$$

いま，$1 \leq \forall s \leq r$ について，

$$\sum_j a_{sj}\sum_i e_{ij}u_i = \sum_i(\sum_j a_{sj}e_{ij})u_i = \sum_i \phi(\mathrm{e}_i)_s u_i$$

よって，$0 = \sum ht_1^{\sum \phi(\mathrm{e}_i)_1 u_i}\cdots t_r^{\sum \phi(\mathrm{e}_i)_r u_i}$. $\phi(\mathrm{e}_{m+1}),\ldots,\phi(\mathrm{e}_n)$ は $\mathbf{Z}$ 上代数的独立ゆえに，$\forall h = 0$. よって $f(Y_{m+1},\ldots,Y_n) = 0$. 従って，$V_{m+1} \pmod{\wp},\ldots,V_n \pmod{\wp}$ は k 上代数的である。よって，$k[V_{m+1},\ldots,V_n] \cap \wp = (0)$. よって，$k(V_{m+1},\ldots,V_n) \subset R$.

一方，$V_i = X_1^{e_{i1}}\cdots X_n^{e_{in}}\ (1 \leq i \leq m)$ とおき，$U_1 = 1 - V_1,\ldots,U_m = 1 - V_m$ とおくと，$\forall i$ について $X_i \notin \wp$ より $U_1,\ldots,U_m \in \wp$. よって，

$$k(V_{m+1},\ldots,V_n)[U_1,\ldots,U_m] \subseteq R, \wp \cap k(V_{m+1},\ldots,V_n) = (U_1,\ldots,U_m)$$

そこで，$R_0 = k(V_{m+1},\ldots,V_n)[U_1,\ldots,U_m]_{(U_1,\ldots,U_m)}$ とおくと，$V_1,\ldots,V_m \in R_0 - (U_1,\ldots,U_m)R_0$. よって，$V_1^{-1},\ldots,V_m^{-1} \in R_0$. いま，$\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_n$ は $\mathbf{Z}^n$ の基底ゆえに，$1 \leq \forall i \leq n$ に対し，i 番目だけが 1 であるような $(0,\ldots,1,\ldots,0)$ に対し，$\mathbf{Z}$ の元 $v_1,\ldots,v_n$ が存在して，$(0,\ldots,1,\ldots,0) = v_1\mathrm{e}_1 + \cdots + v_n\mathrm{e}_n$ よって $X_i = V_1^{v_1}\cdots V_n^{v_n} \in R_0$ であるから，$R_0 = R$. □

4 Grassmann 多様体を定義する素イデアルについて

Theorem 2 *Grassmann* 多様体を定義する素イデアルを P とする。すなわち，k は素体，d,n は $d \leq n$ をみたす自然数，$S = \{p_{i_0 \cdots i_d} | i_0, \ldots, i_d \in \{0,1,\ldots,n\}\}$ を $i_0, \ldots, i_d$ について交代的な変数の集合としたとき，

$$P = (\{\sum_{\lambda=0}^{d+1}(-1)^{\lambda+1} p_{\alpha_0 \cdots \check{\alpha}_\lambda \cdots \alpha_{d+1}} p_{i_0 \cdots i_{d-1} \alpha_\lambda} | \alpha_0, \ldots, \alpha_{d+1}, i_0, \ldots, i_{d-1} \in \{0,1,\ldots,n\}\})$$

と定義される。$R = k[S]_P$ とおく。このとき，R の係数体 ℓ と ℓ 上代数的独立な元 $q_1, \ldots, q_m$ が存在して，$R = \ell[q_1, \ldots, q_m]_{(q_1,\ldots,q_m)}$ となる。

Proof. $T = \{p_{01\cdots d}\} \cup \{p_{01\cdots(d-1)i}, \ldots, p_{i12\cdots d}\}_{d+1 \leq i \leq n}$ とおく。$\{p \pmod{PR} | p \in T\}$ は k 上代数的独立ゆえに，$k[T] \cap PR = (0)$. よって $k(T) \subset R$.

さらに，$\forall p_{i_0 \cdots i_d} \in S$ に対し，$\exists f_{i_0 \cdots i_d} \in k(T)$ s.t. $p_{i_0 \cdots i_d} - f_{i_0 \cdots i_d} \in PR$. そこで $q_{i_0 \cdots i_d} = p_{i_0 \cdots i_d} - f_{i_0 \cdots i_d}$ とおく。$U = \{q_{i_0 \cdots i_d} | 0 \leq i_0 < \cdots < i_d \leq n, |\{i_0, \ldots, i_d\} - \{0, \ldots, d\}| \geq 2\}$ とおけば，$R = k(T)[U]_{(U)}$ である。□

5 1つの多項式で生成された素イデアルについて

まず，1つの2次多項式で生成された場合を扱う。
体が標数が2ではない代数的閉体の場合と，実数体の場合を考える。

Theorem 3 標数が2ではない代数的閉体を k とし，k 上の変数からなる集合を $\underline{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ とおく。$k[\underline{X}]$ の既約な2次多項式を $f = f(\underline{X})$ とし，$R = k[\underline{X}]_{(f)}$，$\wp = fR$ とする。このとき，R の部分体 ℓ と R の元 u が存在して，$R = \ell[u]_{(u)}$ となる。

Proof. $k[\underline{X}]$ から $k[\underline{X}]$ への適当な同型写像により，はじめから $f = X_1X_2 + g$ であると仮定してもよい。すると，$X_2 \notin \wp$ ゆえに，次元公式より，$X_2 \pmod{\wp}, \ldots, X_n \pmod{\wp}$ は k 上代数的独立。よって，$k[X_2, \ldots, X_n] \cap \wp = 0$. 従って，$k(X_2, \ldots, X_n) \subset R$. $\ell = k(X_2, \ldots, X_n)$ とおく。すると，$\ell[f] \subset R$ であり，$\wp \cap \ell[f] = (f), X_1, \ldots, X_n \in \ell[f]$. 従って，$\ell[f]_{(f)} = R$. □

Theorem 4 $\mathbf{R}$ 上の変数からなる集合を $\underline{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$，$\mathbf{R}[\underline{X}]$ の $\mathbf{R}$ 上既約な2次多項式を f とし，$R = \mathbf{R}[\underline{X}]_{(f)}, \wp = fR$ とおく。このとき，つぎは同値である。

(1) $\exists \ell$: R の係数体，$\exists u \in R$ s.t. $R = \ell[u]_{(u)}$

(2) $\mathbf{R}^n$ における $f = 0$ の解は2個以上ある。

Proof. $\mathbf{R}[\underline{X}]$ から $\mathbf{R}[\underline{X}]$ への適当な同型写像により，$f = a_1X_1^2 + \cdots + a_kX_k^2 + b$ $(a_1, \ldots, a_k = 1 \text{ or } 1; b = -1, 0 \text{ or } 1)$ であると仮定してよい。さらに，定理3の証明より，$a_1 = \cdots = a_k = 1$

であるとしてよい。$\mathbf{R}[X_{k+1},\ldots,X_n]\cap\wp=(0)$ より，$\mathbf{R}(X_{k+1},\ldots,X_n)\in R$. そこで，$\ell_0=\mathbf{R}(X_{k+1},\ldots,X_n)$ とおけば，$R=\ell_0[X_1,\ldots,X_n]_{(f)}$ である。

(1) $b=0$ or 1 のとき。 $b=0$ とすれば，$k\geq 2, \ell_0[X_k]\cap\wp=(0)$. よって，$\ell_0(X_k)\in R$. そこで，$Y_1=X_1/X_k,\ldots,Y_{k-1}=X_{k-1}/X_k$ とおき，$\ell'=\ell_0(X_k)$ とおけば，$R=\ell'[Y_1,\ldots,Y_{k-1}]_{(Y_1^2+\cdots+Y_{k-1}^2+1)}$. よって初めから $b=1, k\geq 1$ と仮定してよい。すると，$f=0$ は $\ell_0(X_1,\ldots,X_k)^k$ には解を持たない。よって，R は係数体を持たない。

(2) $b=-1$ のとき。 $g=(X_1+1)^2+\sum_{i=2}^k X_i^2$ とおき，$F=f/g, Y_1=X_1-(X_1+1)F, Y_i=X_i-X_iF$ $(k\geq 2)$ とおけば，$g\notin\wp$ ゆえに，$Y_i\equiv X_i \pmod{\wp}$ for $\forall i$. よって，$\kappa(\wp)=\ell(Y_1 \pmod{\wp},\ldots,Y_k \pmod{\wp})$. $\mathrm{tr.deg}_\ell\,\kappa(\wp)=k-1$ より，$Y_1 \pmod{\wp},\ldots,Y_{k-1} \pmod{\wp}$ が ℓ 上代数的独立であると仮定してよい。すると，$\ell_0[Y_1,\ldots,Y_{k-1}]\cap\wp=(0)$ より，$\ell_0(Y_1,\ldots,Y_{k-1})\subset R$. さらに，

$$\begin{aligned}
g^2 f_{X_1=Y_1,\ldots,X_k=Y_k} &= g^2(\sum_{i=1}^k Y_i^2-1)\\
&= (X_1g-(X_1+1)f)^2+\sum_{i=2}^k X_i^2(g-f)^2-g^2\\
&= fg^2-2X_1(X_1+1)fg+(X_1+1)^2f^2\\
&\quad -2fg\sum_{i=2}^k X_i^2+f^2\sum_{i=2}^k X_i^2\\
&= fg^2-2X_1(X_1+1)fg+f^2g-2fg\sum_{i=2}^k X_i^2\\
&= fg(g-2X_1(X_1+1)+f-2\sum_{i=2}^k X_i^2)=0
\end{aligned}$$

よって，$f_{X_1=Y_1,\ldots,X_k=Y_k}=0$. よって，$Y_k$ は $\ell_0(Y_1,\ldots,Y_{k-1})$ 上代数的だから，$\ell_0(Y_1,\ldots,Y_{k-1})[Y_k]$ は体である。そこで，$\ell=\ell_0(Y_1,\ldots,Y_{k-1})[Y_k]$ とおくと，ℓ は R の係数体である。いま，$u=(X_1+1)F$ とおけば，$u\in\wp$. そこで，$A=\ell[u]_{(u)}$ とおくと $A\subseteq R$. $Y_1\in A$ より，$X_1+1\notin\wp\cap A=uA$. よって，$F\in uA$. さらに，$\forall i\geq 2$ について，$Y_i=X_i(1-F)\in A$. $1-F\in A-uA$ より，$X_i\in A$. よって，示された。□

つぎに，3 変数の 1 つの斉次 3 次多項式で生成された場合を扱う。

Theorem 5 f は $\mathbf{C}[X,Y,Z]$ における既約で斉次な 3 次多項式であるとする。$R=\mathbf{C}[X,Y,Z]_{(f)}$ とおく。このとき，

(1) f が非特異なら，R は係数体を持たない。

(2) f が特異なら，R の係数体 ℓ と R の元 u が存在して，$R=\ell[u]_{(u)}$ となる。

Proof. f はつぎのいずれかであると仮定してよい：X^3-Y^2Z, $X^2(X+Z)-Y^2Z$, $X(X-Z)(X-\lambda Z)-Y^2Z$ $(\lambda\in\mathbf{C}-\{0,1\})$.
(1) $f=X^3-Y^2Z$ のとき。 $R=\mathbf{C}(X,Y)[Z]_{(f)}=\mathbf{C}(X,Y)[Z-X^3/Y^2]_{(Z-X^3/Y^2)}$
(2) $f=X^2(X+Z)-Y^2Z$ のとき。 $R=\mathbf{C}(X,Y)[Z]_{(f)}=\mathbf{C}(X,Y)[Z+X^3/(X^2-Y^2)]_{(Z+X^3/(X^2-Y^2))}$

(3) $f = X(X-Z)(X-\lambda Z) - Y^2 Z$ のとき。 $X_0 = X/Z$, $Y_0 = Y/Z$ とおけば，$R = \mathbf{C}(Z)[X_0, Y_0]_{(f(X_0,Y_0,1))}$. $f(X_0, Y_0, 1) \in \mathbf{C}[X_0, Y_0]$ であり，$f(X_0, Y_0, 1) = 0$ は $\mathbf{C}(Z, X_0, Y_0)^2 - \mathbf{C}(Z)^2$ には解を持たない。よって，R は係数体を持たない。□

Modules of Generalized Fractions and Complexes of Cousin Type

SANG-CHO CHUNG

Department of Mathematics, School of Science
Nagoya University, Nagoya, 464-01, Japan

1. Introduction and definitions.

Let **R** be a commutative (Noetherian) ring with identity and let **M** be an **R**-module. Let $\mathcal{F} = (\mathbf{F}_i)_{i\geq 0}$ be a filtration of Spec(**R**) which admits **M**.

The concept of modules of generalized fractions, which generalizes the usual theory of localization of modules, was introduced as defined by Sharp and Zakeri ([SZ1]). This concept has a wide rang of application in commutative algebra (cf. [GO], [RSZ], [SZ2], [SZ3], [SZ4]).

A complex of **R**-modules is said to be of Cousin type if it satisfies the four conditions of (**Definition 5**) which are reproduced below. The complex, is constructed from a chain of special triangular subsets, is of Cousin type ([RSZ], 3.4 and [GO], 3.6). The purpose of this paper is to show that, when the complex is defined by a chain of triangular subsets, we can give a simpler criterion, consisting of only two conditions, for being of Cousin type (**Theorem 18** and **Corollary 19**). Moreover, we prove that, for every complex induced by a chain of triangular subsets, the first and the second conditions of the definition of Cousin type hold (**Lemma 10**).

In ([RSZ], 3.3), Riley, Sharp and Zakeri proved that every complex of Cousin type for **M** with respect to $\mathcal{F}$ is isomorphic to the Cousin complex. Hence when we investigate the structure of a complex of Cousin type, it is useful to study the complex of Cousin type which is constructed from special modules of generalized fractions whose properties are well known.

We use ^{T} to denote matrix transpose. **N** denotes the set of positive integers. For $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{D}_n(\mathbf{R})$ denotes the set of $n\times n$ lower triangular matrices over **R**. For $\mathbf{H} \in \mathbf{D}_n(\mathbf{R})$, $|\mathbf{H}|$ denotes the determinant of **H**. Let $(a_1,\ldots,a_i)\mathbf{R}$ be the ideal of **R** which is generated by $\{a_1,\ldots,a_i\}$, and let $(a_1,\ldots,a_i)\mathbf{M}$ be the submodule of **M** which is generated by $\{a_j m : j = 1,\ldots,i \text{ and } m \in \mathbf{M}\}$.

For $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{M})$, the **M**-height of $\mathfrak{p}$, denoted by $ht_{\mathbf{M}}\mathfrak{p}$, is defined to be $dim_{\mathbf{R}_\mathfrak{p}}\mathbf{M}_\mathfrak{p}$ and $ht_{\mathbf{M}}(a_1,\ldots,a_n)\mathbf{R} = \inf\{ht_{\mathbf{M}}\mathfrak{p} : (a_1,\ldots,a_n)\mathbf{R} \subset \mathfrak{p}\}$.

Definition 1. ([SZ1]) Let **R** be a ring. A *triangular subset of* $\mathbf{R}^n$ is a non-empty subset $\mathbf{U}_n$ of $\mathbf{R}^n$ such that

(i) if $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbf{U}_n$, then $(a_1^{\alpha_1},\ldots,a_n^{\alpha_n}) \in \mathbf{U}_n$ for all choices of positive integers $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, and

(ii) if $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{U}_n$ and $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{U}_n$, then there exist $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{U}_n$ and $\mathbf{H}, \mathbf{K} \in \mathbf{D}_n(\mathbf{R})$ such that $\mathbf{H}(a_1, \dots, a_n)^T = (c_1, \dots, c_n)^T = \mathbf{K}(b_1, \dots, b_n)^T$.

Let $\mathbf{U}_n$ be a triangular subset of $\mathbf{R}^n$. The *module of generalized fractions* $\mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M}$ *of* $\mathbf{M}$ *with respect to* $\mathbf{U}_n$ is a module, whose elements, called *generalized fractions*, have the form

$$\frac{m}{(a_1, \dots, a_n)},$$

where $m \in \mathbf{M}$ and $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{U}_n$, satisfying the following condition.

Let $m,\ m',\ s \in \mathbf{M}$ and $(a_1, \dots, a_n),\ (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{U}_n$. Then $\frac{m}{(a_1, \dots, a_n)} = \frac{m'}{(b_1, \dots, b_n)}$ if and only if there exist $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{U}_n$ and $\mathbf{H},\ \mathbf{K} \in \mathbf{D}_n(\mathbf{R})$ such that $\mathbf{H}(a_1, \dots, a_n)^T = (c_1, \dots, c_n)^T = \mathbf{K}(b_1, \dots, b_n)^T$ and $|\mathbf{H}|m - |\mathbf{K}|m' \in (c_1, \dots, c_{n-1})\mathbf{M}$.

The addition and scalar multiplication in $\mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M}$ are such that

$$\frac{m}{(a_1, \dots, a_n)} + \frac{s}{(b_1, \dots, b_n)} = \frac{|\mathbf{H}|m + |\mathbf{K}|s}{(c_1, \dots, c_n)}$$

for any choice of $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{U}_n$ and $\mathbf{H},\ \mathbf{K} \in \mathbf{D}_n(\mathbf{R})$ such that $\mathbf{H}(a_1, \dots, a_n)^T = (c_1, \dots, c_n)^T = \mathbf{K}(b_1, \dots, b_n)^T$, and for $r \in \mathbf{R}$

$$r \cdot \frac{m}{(a_1, \dots, a_n)} = \frac{rm}{(a_1, \dots, a_n)}.$$

Definition 2. ([SZ1], p38) For a given triangular subset $\mathbf{U}_n$ of $\mathbf{R}^n$, let $\overline{\mathbf{U}}_n = \{(a_1, \dots, a_i, 1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^n$: for all i $(0 \le i \le n)$, $\exists a_{i+1}, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ s.t. $(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathbf{U}_n\}$. This is a triangular subset of $\mathbf{R}^n$ and is called the *expansion* of $\mathbf{U}_n$.

Definition 3. ([RSZ], p52). Let $\mathbf{R}$ be a ring. A family $\mathcal{U} = (\mathbf{U}_i)_{i \ge 1}$ is called a *chain of triangular subsets* on $\mathbf{R}$ if the following conditions are satisfied:

(i) $\mathbf{U}_i$ is a triangular subset of $\mathbf{R}^i$ for all $i \in \mathbf{N}$;

(ii) $(1) \in \mathbf{U}_1$;

(iii) whenever $(a_1, \dots, a_i) \in \mathbf{U}_i$ with $i \in \mathbf{N}$, then $(a_1, \dots, a_i, 1) \in \mathbf{U}_{i+1}$; and

(iv) whenever $(a_1, \dots, a_i) \in \mathbf{U}_i$ with $1 < i \in \mathbf{N}$, then $(a_1, \dots, a_{i-1}) \in \mathbf{U}_{i-1}$.

Each $\mathbf{U}_i$ leads to a module of generalized fractions $\mathbf{U}_i^{-i}\mathbf{M}$ and we can obtain a complex

$$0 \xrightarrow{e^{-1}} \mathbf{M} \xrightarrow{e^0} \mathbf{U}_1^{-1}\mathbf{M} \xrightarrow{e^1} \mathbf{U}_2^{-2}\mathbf{M} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{U}_i^{-i}\mathbf{M} \xrightarrow{e^i} \mathbf{U}_{i+1}^{-i-1}\mathbf{M} \longrightarrow \cdots,$$

denoted by $\mathbf{C}(\mathcal{U}, \mathbf{M})$, for which $e^0(m) = \frac{m}{(1)}$ for all $m \in \mathbf{M}$ and

$$e^i\left(\frac{x}{(a_1, \dots, a_i)}\right) = \frac{x}{(a_1, \dots, a_i, 1)}$$

for all $i \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{M}$ and $(a_1, \dots, a_i) \in \mathbf{U}_i$.

Definition 4. ([S3], 1.1 and 1.2) A *filtration* of Spec($\mathbf{R}$) is a descending sequence $\mathcal{F} = (\mathbf{F}_i)_{i \geq 0}$ of subsets of Spec($\mathbf{R}$), so that

$$\operatorname{Spec}(\mathbf{R}) \supset \mathbf{F}_0 \supset \mathbf{F}_1 \supset \cdots \supset \mathbf{F}_i \supset \mathbf{F}_{i+1} \supset \cdots,$$

with the property that, for each $i \geq 0$, each member of $\mathbf{F}_i \setminus \mathbf{F}_{i+1}$ is a minimal member of $\mathbf{F}_i$ with respect to inclusion. We then set $\partial\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i \setminus \mathbf{F}_{i+1}$. We say that the filtration $\mathcal{F}$ *admits* an $\mathbf{R}$-module $\mathbf{M}$ if $\operatorname{Supp}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{F}_0$. Let $\mathcal{F}_{\mathbf{M}} = (\mathbf{F}_{\mathbf{M}i})_{i \geq 0}$ be the $\mathbf{M}$-height filtration of Spec($\mathbf{R}$), *i.e.*, $\mathbf{F}_{\mathbf{M}i} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(\mathbf{M}) : ht_{\mathbf{M}}\mathfrak{p} \geq i\}$.

Definition 5. ([GO], 3.2). Let $\mathbf{R}$ be a Noetherian ring and $\mathbf{M}$ an $\mathbf{R}$-module. Let $\mathcal{F} = (\mathbf{F}_i)_{i \geq 0}$ be a filtration of Spec($\mathbf{R}$) that admits $\mathbf{M}$. A complex $\mathbf{X}^\bullet = \{\mathbf{X}^i : i \geq -2\}$ of $\mathbf{R}$-modules and $\mathbf{R}$-homomorphisms is said to be of *Cousin type for* $\mathbf{M}$ *with respect to* $\mathcal{F}$ if it has the form

$$0 \xrightarrow{d^{-2}} \mathbf{M} \xrightarrow{d^{-1}} \mathbf{X}^0 \xrightarrow{d^0} \mathbf{X}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{X}^i \xrightarrow{d^i} \mathbf{X}^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

and satisfies the following, for each $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

(i) $\operatorname{Supp}(\mathbf{X}^n) \subset \mathbf{F}_n$;

(ii) $\operatorname{Supp}(\operatorname{Coker} d^{n-2}) \subset \mathbf{F}_n$;

(iii) $\operatorname{Supp}(\operatorname{Ker} d^{n-1}/\operatorname{Im} d^{n-2}) \subset \mathbf{F}_{n+1}$; and

(iv) The natural $\mathbf{R}$-homomorphism $\xi(\mathbf{X}^n) : \mathbf{X}^n \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \partial\mathbf{F}_n} (\mathbf{X}^n)_{\mathfrak{p}}$, such that, for $x \in \mathbf{X}^n$ and $\mathfrak{p} \in \partial\mathbf{F}_n$, the component of $\xi(\mathbf{X}^n)(x)$ in the summand $(\mathbf{X}^n)_{\mathfrak{p}}$ is $x/1$, is an isomorphism.

2. Modules of generalized fractions and complexes of Cousin type.

Lemma 6 ([SZ1], [SZ2], [O]). *Let* $\mathbf{R}$ *be a ring. Let* $\mathbf{M}$ *be an* $\mathbf{R}$*-module and let* $\mathbf{U}_n$ *be an expanded triangular subset of* $\mathbf{R}^n$. *Let* $(a_1, \dots, a_n)$ *and* $(b_1, \dots, b_n)$ *be elements of* $\mathbf{U}_n$ *such that* $\mathbf{H}(a_1, \dots, a_n)^T = (b_1, \dots, b_n)^T$ *for some* $\mathbf{H} \in \mathbf{D}_n(\mathbf{R})$. *Then we have*

(1) $\dfrac{m}{(a_1, \dots, a_n)} = \dfrac{|\mathbf{H}|m}{(b_1, \dots, b_n)}$ *and* $\dfrac{a_n m}{(a_1, \dots, a_n)} = \dfrac{m}{(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)}$ *in* $\mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M}$.

(2) *If* $m \in (a_1, \dots, a_{n-1})\mathbf{M}$ *then* $\dfrac{m}{(a_1, \dots, a_n)} = 0$ *in* $\mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M}$. *In particular, if each element of* $\mathbf{U}_n$ *is a poor* $\mathbf{M}$*-sequence, then the converse holds.*

(3) $\operatorname{Ann}_{\mathbf{R}}\left(\dfrac{m}{(a_1, \dots, a_n)}\right) = \operatorname{Ann}_{\mathbf{R}}\left(\dfrac{m}{(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)}\right)$.

Lemma 7 ([GO], 3.4). *Let* $\mathbf{R}$ *be a ring. For a positive integer* n, *suppose that* $\dfrac{m}{(a_1, \dots, a_n, 1)} = 0$ *in* $\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}$. *Then there exist* $(b_1, \dots, b_{n+1}) \in \mathbf{U}_{n+1}$ *and* $\mathbf{H} \in \mathbf{D}_n(\mathbf{R})$ *such that* $\mathbf{H}(a_1, \dots, a_n)^T = (b_1, \dots, b_n)^T$ *and* $b_{n+1}|\mathbf{H}|m \in (b_1, \dots, b_n)\mathbf{M}$.

Lemma 8 ([GO], 3.3 and [SY], 2.7). *Let* $\mathbf{R}$ *be a ring. Let* $\mathbf{M}$ *be an* $\mathbf{R}$*-module. Let* $\mathcal{U} = (\mathbf{U}_i)_{i \geq 1}$ *be a chain of triangular subsets on* $\mathbf{R}$. *Then in* $\mathbf{C}(\mathcal{U}, \mathbf{M})$, *for all* $n \in \mathbf{N}$

$$\operatorname{Coker} e^{n-1} \cong \mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M}/\operatorname{Im} e^{n-1} \cong \mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M},$$

where $\mathbf{U}_n[1] = \{(a_1, \ldots, a_n, 1) \in \mathbf{R}^{n+1} : (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{U}_n\}$.

Lemma 9. *Let* $\mathbf{R}$ *be a ring and let* $\mathbf{M}$ *be an* $\mathbf{R}$*-module. Fix a positive integer* n. *Let* $\mathbf{U}_n$ *be a triangular subsets of* $\mathbf{R}^n$. *Let* $0 \neq \dfrac{m}{(a_1, \ldots, a_n)} \in \mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M}$. *Then we have, for all* $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{U}_n$,

$$(b_1, \ldots, b_n)\mathbf{R} \not\subset \left(0 : \frac{m}{(a_1, \ldots, a_n)}\right).$$

Proof. Suppose that for some $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{U}_n$

$$(b_1, \ldots, b_n)\mathbf{R} \subset \left(0 : \frac{m}{(a_1, \ldots, a_n)}\right).$$

Then by the definition of triangular subset there ~~are~~ $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{U}_n$ and $\mathbf{H}$, $\mathbf{K} \in \mathbf{D}_n(\mathbf{R})$ such that $\mathbf{H}(a_1, \ldots, a_n)^T = (c_1, \ldots, c_n)^T = \mathbf{K}(b_1, \ldots, b_n)^T$. Hence we get $(c_1, \ldots, c_n)\mathbf{R} \subset (b_1, \ldots, b_n)\mathbf{R}$.

On the other hand, by Lemma 6(1)(3) we have

$$\begin{aligned}\left(0 : \frac{m}{(a_1, \ldots, a_n)}\right) &= \left(0 : \frac{|\mathbf{H}|m}{(c_1, \ldots, c_n)}\right) = \left(0 : \frac{|\mathbf{H}|m}{(c_1, \ldots, c_{n-1}, 1)}\right) \\ &\supset (b_1, \ldots, b_n)\mathbf{R} \supset (c_1, \ldots, c_n)\mathbf{R}.\end{aligned}$$

Therefore we have the following contradiction.

$$\frac{c_n|\mathbf{H}|m}{(c_1, \ldots, c_n)} = \frac{|\mathbf{H}|m}{(c_1, \ldots, c_{n-1}, 1)} = 0.$$

From now on, we suppose that $\mathbf{U}_0[1]^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{M}$, $\mathbf{U}_0^0\mathbf{M} = \mathbf{M}$ and n is a non-negative integer.

Lemma 10. *Let* $\mathbf{R}$ *be a ring and let* $\mathbf{M}$ *be an* $\mathbf{R}$*-module. Then, in* $\mathbf{C}(\mathcal{U}, \mathbf{M})$, *we have*

$$\operatorname{Supp}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) \subset \operatorname{Supp}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) \subset \mathbf{F}_{\mathbf{M}n} \subset \mathbf{F}_n$$

where $\mathbf{U}_0[1]^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{M}$ *and* $\mathbf{U}_n[1] = \{(a_1, \ldots, a_n, 1) \in \mathbf{R}^{n+1} : (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{U}_n\}$.

Proof. For the first half, this follows from the following short exact sequence

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} e^n/\operatorname{Im} e^{n-1} & \longrightarrow & \mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M}/\operatorname{Im} e^{n-1} & \longrightarrow & \mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M}/\operatorname{Ker} e^n & \longrightarrow & 0, \\ & & & & \| & & \| & & \\ & & & & \mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M} & & \operatorname{Im} e^n & & \end{array}$$

since $\operatorname{Supp}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) = \operatorname{Supp}(\operatorname{Im} e^n)$ by Lemma 6(3).

The others follow from ([HS], 3.1) and ([C], 2.7).

Remark 11. Lemma 10 shows that, for every complex $\mathbf{C}(\mathcal{U}, \mathbf{M})$, the first and the second conditions of the definition of Cousin type hold by Lemma 8.

Lemma 12. *Let* $\mathbf{R}$ *and* $\mathbf{M}$ *be as above. Then in* $\mathbf{C}(\mathcal{U},\mathbf{M})$ *we have the following.*

(1) $\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{M}) = (\bigcup_{i=0}^{n} \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}i}) \cap \partial\mathbf{F}_n$.

(2) (cf. [ST], 2.7) $\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) \subset \partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) \subset \partial\mathbf{F}_n \cap \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n}$.

(3) $\partial\mathbf{F}_n \cap \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n} = \bigcup_{\mathfrak{q}\in\partial\mathbf{F}_{n-1}\cap\partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}(n-1)}} (V(\mathfrak{q}) \cap \partial\mathbf{F}_n \cap \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n})$.

Proof. (1) Let $\mathfrak{p} \in \partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{M}) \setminus \bigcup_{i=0}^{n} \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}i}$. Hence $ht_{\mathbf{M}}\mathfrak{p} > n$. Therefore there is $\mathfrak{q} \in \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n}(\subset \mathbf{F}_n)$ such that $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$. That is, $\mathfrak{p}$ is not minimal in $\mathbf{F}_n$.

(2) Since $\mathrm{Supp}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) \subset \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) \subset \mathbf{F}_{\mathbf{M}n}$, we have

$$\begin{aligned}\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) &\subset \partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) \subset \partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{M}) \cap \mathbf{F}_{\mathbf{M}n} \\ &\subset (\bigcup_{i=0}^{n} \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}i}) \cap \partial\mathbf{F}_n \cap \mathbf{F}_{\mathbf{M}n} = \partial\mathbf{F}_n \cap \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n}\end{aligned}$$

by (1).

(3) Let $\mathfrak{p} \in \partial\mathbf{F}_n$ and $ht_{\mathbf{M}}\mathfrak{p} = n$. Suppose that $\mathfrak{q} \notin \partial\mathbf{F}_{n-1}$ for some $\mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{M})$ such that $ht_{\mathbf{M}}\mathfrak{q} = n-1$ and $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$. Hence $\mathfrak{q} \in \mathbf{F}_n$, since $\partial\mathbf{F}_{n-1} = \mathbf{F}_{n-1} \setminus \mathbf{F}_n$ and $\mathbf{F}_{\mathbf{M}(n-1)} \subset \mathbf{F}_{n-1}$. This contradicts that $\mathfrak{p}$ is a minimal element in $\mathbf{F}_n$.

Lemma 13. *Let* $\mathbf{R}$ *be a ring and let* $\mathbf{M}$ *be an* $\mathbf{R}$*-module. Then in* $\mathbf{C}(\mathcal{U},\mathbf{M})$*, for each* $\dfrac{m}{(a_1,\dots,a_n)} + \mathrm{Im}\ e^{n-1} \in H_U^n(\mathbf{M})$*, there are* $(b_1,\dots,b_{n+1}) \in \mathbf{U}_{n+1}$ *and* $\mathbf{H} \in \mathbf{D}_n(\mathbf{R})$ *such that* $\mathbf{H}(a_1,\dots,a_n)^T = (b_1,\dots,b_n)^T$ *and*

$$(b_1,\dots,b_{n+1})\mathbf{R} \subset \left(\mathrm{Im}\ e^{n-1} : \frac{m}{(a_1,\dots,a_n)}\right).$$

Proof. Since $\dfrac{m}{(a_1,\dots,a_n)} \in \mathrm{Ker}\ e^n$, we have $\dfrac{m}{(a_1,\dots,a_n,1)} = 0$ in $\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}$. Hence by Lemma 7 there are $(b_1,\dots,b_{n+1}) \in \mathbf{U}_{n+1}$ and $\mathbf{H} \in \mathbf{D}_n(\mathbf{R})$ such that $\mathbf{H}(a_1,\dots,a_n)^T = (b_1,\dots,b_n)^T$ and $b_{n+1}|\mathbf{H}|m \in (b_1,\dots,b_n)\mathbf{M}$. Therefore we have

$$(b_1,\dots,b_{n+1})\mathbf{R} \subset \left(\mathrm{Im}\ e^{n-1} : \frac{|\mathbf{H}|m}{(b_1,\dots,b_n)}\right) = \left(\mathrm{Im}\ e^{n-1} : \frac{m}{(a_1,\dots,a_n)}\right).$$

Lemma 14. *Let* $\mathbf{R}$ *be a ring and let* $\mathbf{M}$ *be an* $\mathbf{R}$*-module. Let* $\mathcal{U} = (\mathbf{U}_i)_{i\geq 1}$ *be a chain of triangular subsets on* $\mathbf{R}$*. Then in* $\mathbf{C}(\mathcal{U},\mathbf{M})$*, for a fixed non-negative integer* n*, we have the following.*

(1) $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_{n+2+i}^{-n-2-i}\mathbf{M}) = \emptyset$ *for all* $i \geq 0$.

(2) $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_{n+1+i}[1]^{-n-2-i}\mathbf{M}) = \emptyset$ *for all* $i \geq 0$.

(3) $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) = \mathrm{Ass}(\mathrm{Im}\ e^n) = \mathrm{Ass}(\mathrm{Ker}\ e^{n+1})$.

(4) $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) \cap \mathrm{Supp}(H_U^{n+i}(\mathbf{M})) = \emptyset$ *for all* $i \geq 0$.

(5) $\mathrm{Ass}(H_U^n(\mathbf{M})) \subset \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) \subset \mathrm{Ass}(H_U^n(\mathbf{M})) \cup \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})$.

(6) *If* $\mathbf{R}$ *is Noetherian, then*

$\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) = (\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Ass}(H_U^n(\mathbf{M}))) \cup \left(\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})\right).$

(7) $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) \cap \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}[1]^{-n-2}\mathbf{M}) \subset \mathrm{Ass}(H_U^n(\mathbf{M}))$.

Proof. (1) and (2) These follow from Lemma 9 and Lemma 6(2).

(3) Since $\mathrm{Im}\ e^n \subset \mathrm{Ker}\ e^{n+1} \subset \mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}$, this follows from Lemma 6(3).

(4) This follows from Lemma 9, Lemma 13 and Lemma 6(2).

(5) The following short exact sequence and (3) complete the proof.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\ e^n/\mathrm{Im}\ e^{n-1} & \longrightarrow & \mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M}/\mathrm{Im}\ e^{n-1} & \longrightarrow & \mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M}/\mathrm{Ker}\ e^n & \longrightarrow & 0. \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & H_U^n(\mathbf{M}) & & \mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M} & & \mathrm{Im}\ e^n & & \end{array} \qquad (*)$$

(6) By Lemma 10, we have

$$\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) = \partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) \subset \partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}).$$

Hence the assertion follows from (5).

(7) This follows from (1), (4) and (5).

Proposition 15. *Let* $\mathbf{R}$ *and* $\mathbf{M}$ *be as above. Assume that* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathbf{R})$. *In* $\mathbf{C}(\mathcal{U},\mathbf{M})$, *consider the following statements:*

(i) *For all* $(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in \mathbf{U}_{n+1}$, $(a_1,\ldots,a_{n+1})\mathbf{R} \not\subset \mathfrak{p}$;

(ii) $(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_\mathfrak{p} \cong (\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})_\mathfrak{p}$;

(ii′) $(H_U^n(\mathbf{M}))_\mathfrak{p} = 0$ *and* $(\mathbf{U}_{n+1}[1]^{-n-2}\mathbf{M})_\mathfrak{p} = 0$;

(iii) $(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_\mathfrak{p} \cong (\mathrm{Im}\ e^n)_\mathfrak{p}$;

(iii′) $(\mathbf{U}_{n+1}[1]^{-n-2}\mathbf{M})_\mathfrak{p} = 0$;

(iii″) $(H_U^{n+1}(\mathbf{M}))_\mathfrak{p} = 0$ *and* $(\mathbf{U}_{n+2}^{-n-2}\mathbf{M})_\mathfrak{p} = 0$;

(iv) $(\mathrm{Ker}\ e^{n+1})_\mathfrak{p} \cong (\mathrm{Im}\ e^n)_\mathfrak{p}$;

(iv′) $(\mathbf{U}_{n+1}[1]^{-n-2}\mathbf{M})_\mathfrak{p} \cong (\mathrm{Im}\ e^{n+1})_\mathfrak{p}$.

Then we have the following.

(1) (ii) $\Leftrightarrow$ (ii′).

(2) (iii) $\Leftrightarrow$ (iii′) $\Leftrightarrow$ (iii″).

(3) (iv) $\Leftrightarrow$ (iv′).

(4) (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). *That is, if* (i) *holds, then*

$$(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_\mathfrak{p} \cong (\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})_\mathfrak{p} \cong (\mathrm{Im}\ e^n)_\mathfrak{p} \cong (\mathrm{Ker}\ e^{n+1})_\mathfrak{p}.$$

(5) *If* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})$, *then the above four modules are isomorphic.*

(6) *If* $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_{n+2}^{-n-2}\mathbf{M})$, *then* (iv) $\Rightarrow$ (iii).

Proof. (1) Using the short exact sequence $(*)$, we prove as follows.

($\Rightarrow$) Assume that $(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \cong (\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}}$. Then, from the following short exact sequence

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\, e^{n-1} \arrow[r] & \mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M} \arrow[r] & \mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M}/\mathrm{Im}\, e^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0, \\ & & & \mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M} & \end{tikzcd}$$

we have a commutative diagram with exact rows.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\mathrm{Im}\, e^{n-1})_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (\mathrm{Im}\, e^{n-1})_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & (\mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "e^n{}_{\mathfrak{p}}"] & (\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Therefore we get

$$(\mathrm{Ker}\, e^n)_{\mathfrak{p}} = (\mathrm{Im}\, e^{n-1})_{\mathfrak{p}}.$$

Hence, from the following short exact sequence

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (H_U^n(\mathbf{M}))_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\mathrm{Im}\, e^n)_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & 0. \\ & 0 & (\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} & & \end{tikzcd}$$

induced from the short exact sequence $(*)$, we have

$$(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \cong (\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \cong (\mathrm{Im}\, e^n)_{\mathfrak{p}}.$$

Therefore from the following short exact sequence

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\, e^n \arrow[r] & \mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M} \arrow[r] & \mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}/\mathrm{Im}\, e^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ & & & \mathbf{U}_{n+1}[1]^{-n-2}\mathbf{M} & \end{tikzcd} \qquad (**)$$

we have

$$(\mathbf{U}_{n+1}[1]^{-n-2}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} = 0.$$

($\Leftarrow$) By the assumption and the short exact sequences $(*)$ $(**)$, we have

$$(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \cong (\mathrm{Im}\, e^n)_{\mathfrak{p}} \cong (\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}}.$$

(2) The first equivalence follows immediately from the above short exact sequence $(**)$. For the second half, this follows from

$$\mathrm{Supp}(\mathbf{U}_{n+1}[1]^{-n-2}\mathbf{M}) = \mathrm{Supp}(H_U^{n+1}(\mathbf{M})) \cup \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_{n+2}^{-n-2}\mathbf{M})$$

induced by the short exact sequence $(*)$ with $n+1$ instead of n and Lemma 14(3)

(3) This follows similarly from the short exact sequence $(*)$ with n replaced by $n+1$.

(4) Suppose that (i) holds. By the hypothesis and Lemma 6(2) we have $(\mathbf{U}_{n+1}[1]^{-n-2}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} = 0$. On the other hand, from the assumption and Lemma 13, we have $(H_U^n(\mathbf{M}))_{\mathfrak{p}} = 0$.

The other assertions are obvious.

(5) This follows from the hypothesis, Lemma 9 and (4).

(6) This follows easily from (2), since $(H_U^{n+1}(\mathbf{M}))_{\mathfrak{p}} = 0$.

Corollary 16. *Let* $\mathbf{R}$ *be a Noetherian ring and let* $\mathbf{M}$ *be an* $\mathbf{R}$*-module. Then we have the following.*

(1) $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) \subset \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})$.

(2) $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) = \mathrm{Ass}(H_U^n(\mathbf{M})) \cup \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})$.

Proof. (1) Let $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{\mathbf{R}}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})$. Then $\mathfrak{p}\mathbf{R}_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}_{\mathbf{R}_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}}$ by ([M], p38 Corollary). Hence $\mathfrak{p}\mathbf{R}_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}_{\mathbf{R}_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}}$ by Proposition 15(5). Therefore $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{\mathbf{R}}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})$ again by ([M], p38 Corollary).

(2) This follows from (1) and Lemma 14(5).

Proposition 17. *Let* $\mathbf{R}$ *be a ring and let* $\mathbf{M}$ *be an* $\mathbf{R}$*-module. Fix a non-negative integer* t. *Then in* $\mathbf{C}(\mathcal{U},\mathbf{M})$, *the following four conditions are equivalent.*

(1) $H_U^n(\mathbf{M}) = 0$ *for all* $n = 0, \dots, t$.

(2) $\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M} \cong \mathrm{Im}\, e^n$ *for all* $n = 0, \dots, t$.

(3) *For all* $n = 0, \dots, t$, *for each* $\dfrac{m}{(a_1, \dots, a_{n+1})} \in \mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}$,

$$\left(0 : \frac{m}{(a_1, \dots, a_{n+1})}\right) = \left(0 : \frac{m}{(a_1, \dots, a_n, 1)}\right) \text{ where } \frac{m}{(a_1, \dots, a_n, 1)} \in \mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}.$$

(4) *For all* $n = 0, \dots, t$, *each element of* $\mathbf{U}_{n+1}$ *forms a poor* $\mathbf{M}$*-sequence.*

In particular, let $\mathbf{R}$ *be a Noetherian local ring and let* $\mathbf{M}$ *be a finitely generated* $\mathbf{R}$*-module of dimension* d. *Assume that the above conditions hold for* $t = d-1$ *and* $\mathbf{U}_d[1]^{-d-1}\mathbf{M} \neq 0$. *Then* $\mathbf{M}$ *is a Cohen-Macaulay module.*

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2) From the short exact sequence $(*)$ this is clear.

(2) $\Rightarrow$ (3) By Lemma 6(3) this is obvious.

(3) $\Rightarrow$ (4) We proceed by induction on n. In the case $n = 0$, assume that $a_1 m = 0$ for some $0 \neq m \in \mathbf{M}$ and $(a_1) \in \mathbf{U}_1$. Then we have $a_1 \in (0 : m) = \left(0 : \dfrac{m}{(b_1)}\right)$ for some

$\dfrac{m}{(b_1)} \in \mathbf{U}_1^{-1}\mathbf{M}$ by the hypothesis. This contradicts Lemma 9.

Now suppose that each element of $\mathbf{U}_n$ is a poor $\mathbf{M}$-sequence. Assume that $a_{n+1}m \in (a_1, \ldots, a_n)\mathbf{M}$ for some $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbf{U}_{n+1}$ and $m \in \mathbf{M}$. Then by Lemma 6(2) we have $\dfrac{a_{n+1}m}{(a_1, \ldots, a_{n+1})} = 0$. That is, by ([SZ3], 2.1), we have

$$\frac{m}{(a_1, \ldots, a_{n+1})} = 0 \text{ in } \mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}.$$

Hence by the hypothesis we have

$$\frac{m}{(a_1, \ldots, a_n, 1)} = 0 \text{ in } \mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}.$$

Then, by the definition of module of generalized fractions, there are $(b_1, \ldots, b_n, 1) \in \mathbf{U}_n[1]$ and $\mathbf{H} \in \mathbf{D}_{n+1}(\mathbf{R})$ such that $\mathbf{H}(a_1, \ldots, a_n, 1)^T = (b_1, \ldots, b_n, 1)^T$ and $|\mathbf{H}|m \in (b_1, \ldots, b_n)\mathbf{M}$.

On the other hand, since $h_{n+1,n+1} = 1 - (h_{n+1,1}a_1 + \cdots + h_{n+1,n}a_n)$, by ([SZ1], 2.2) we have

$$h_{11} \cdots h_{nn}m \in (b_1, \ldots, b_n)\mathbf{M}.$$

Note that by the inductive hypothesis $b_1, \ldots, b_n$ is a poor $\mathbf{M}$-sequence and $\mathbf{H}'(a_1, \ldots, a_n)^T = (b_1, \ldots, b_n)^T$ where $\mathbf{H}'$ is the top left $n \times n$ submatrix of $\mathbf{H}$. Hence by ([O], 3.2) we get

$$m \in (a_1, \ldots, a_n)\mathbf{M}.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) Let $\dfrac{m}{(a_1, \ldots, a_n)} \in \operatorname{Ker} e^n$ with $\dfrac{m}{(a_0)} = m$. Then $\dfrac{m}{(a_1, \ldots, a_n, 1)} = 0$ in $\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}$. Hence by Lemma 6(2), we have

$$m \in (a_1, \ldots, a_n)\mathbf{M}.$$

Therefore we have $\dfrac{m}{(a_1, \ldots, a_n)} \in \operatorname{Im} e^{n-1}$.

For the last assertion, since $\mathbf{U}_d[1]^{-d-1}\mathbf{M} \neq 0$, there is $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{U}_d$ such that $a_1, \ldots, a_d$ is an $\mathbf{M}$-sequence.

Theorem 18. *Let* $\mathbf{R}$ *be a Noetherian ring and let* $\mathbf{M}$ *be an* $\mathbf{R}$*-module. Let* $\mathcal{U} = (\mathbf{U}_i)_{i \geq 1}$ *be a chain of triangular subsets on* $\mathbf{R}$*. Let* $\mathcal{F} = (\mathbf{F}_i)_{i \geq 0}$ *be a filtration of* $\operatorname{Spec}(\mathbf{R})$ *which admits* $\mathbf{M}$*. Then*

$$\text{the complex } \mathbf{C}(\mathcal{U}, \mathbf{M}) \text{ is of Cousin type for } \mathbf{M} \text{ with respect to } \mathcal{F}$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{Ass}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) \cap \partial\mathbf{F}_n = \operatorname{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) \text{ for all } n \geq 0 \text{ and}$$
$$\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M} \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \partial\mathbf{F}_n} (\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \text{ for all } n \geq 0.$$

Proof. ($\Uparrow$) We must verify the properties (i)–(iii) of the definition of Cousin type (see Definition 5).

(i) and (ii) By Remark 11 these always hold for arbitrary complex $\mathbf{C}(\mathcal{U},\mathbf{M})$.

(iii) We must show that $\mathrm{Supp}(H^n_{\mathcal{U}}(\mathbf{M})) \subset \mathbf{F}_{n+1}$. Note that $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M}) = \mathrm{Ass}\left(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\partial\mathbf{F}_n}(\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}}\right) \subset \partial\mathbf{F}_n$ by Lemma 10. By Lemma 14(5) and Lemma 10, we have $\mathrm{Supp}(H^n_{\mathcal{U}}(\mathbf{M})) \subset \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) \subset \mathbf{F}_n$. But it follows from the hypothesis and Lemma 14(4)(6) that $\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(H^n_{\mathcal{U}}(\mathbf{M})) = \emptyset$.

($\Downarrow$) It is enough to show that the first condition of Theorem holds. By the third and the fourth conditions of the definition of Cousin type, we have $\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(H^n_{\mathcal{U}}(\mathbf{M})) = \emptyset$ and $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M}) \subset \partial\mathbf{F}_n$. Hence Lemma 14(6) completes the proof of Theorem.

Corollary 19. *With the same notation and assumption as in Theorem 18, we have the following.*

(1) *Suppose that* $\partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n} \cap \partial\mathbf{F}_n = \mathrm{Ass}(\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M})$ *for all* $n \geq 0$ *and*

$$\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M} \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\partial\mathbf{F}_n}(\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \text{ for all } n \geq 0.$$

Then the complex $\mathbf{C}(\mathcal{U},\mathbf{M})$ *is of Cousin type for* $\mathbf{M}$ *with respect to* $\mathcal{F}$.

(2) *In particular, assume that* $\partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n} \cap \partial\mathbf{F}_n \subset \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})$ *for all* $n \geq 0$. *Then the converse of* (1) *is true.*

Proof. (1) This follows from Theorem 18, since $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M}) \subset \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) \cap \partial\mathbf{F}_n \subset \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n} \cap \partial\mathbf{F}_n$ by Corollary 16(1) and Lemma 12(2).

(2) It is sufficient to show that $\partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n} \cap \partial\mathbf{F}_n = \mathrm{Ass}(\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M})$, since the second isomorphisms hold by the definition of Cousin type.

($\supset$) Since $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M}) \subset \partial\mathbf{F}_n$, it follows from Lemma 12(2) that $\mathrm{Ass}(\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M}) \subset \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n} \cap \partial\mathbf{F}_n$.

($\subset$) We proceed by induction on n. In the case $n = 0$, let $\mathfrak{p} \in \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}0} \cap \partial\mathbf{F}_0$. Consider the following complex

$$0 \longrightarrow \mathbf{M} \xrightarrow{e^0} \mathbf{U}^{-1}_1\mathbf{M} \xrightarrow{e^1} \mathbf{U}^{-2}_2\mathbf{M} \longrightarrow \cdots.$$

Then by the definition of Cousin type, we have the following exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbf{M}_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\cong} (\mathbf{U}^{-1}_1\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

Since $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathbf{M})$, we have $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathbf{U}^{-1}_1\mathbf{M})$ by ([M], p38 Corollary).

Suppose that $n \geq 1$. Let $\mathfrak{p} \in \partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n} \cap \partial\mathbf{F}_n$. Consider the following complex

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{U}^{-n+1}_{n-1}\mathbf{M} \xrightarrow{e^{n-1}} \mathbf{U}^{-n}_n\mathbf{M} \xrightarrow{e^n} \mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M} \longrightarrow \cdots.$$

It follows from the definition of Cousin type that we have the following exact sequence

$$0 \longrightarrow (\mathrm{Im}\ e^{n-1})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (\mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0,$$

since $(\mathrm{Ker}\ e^n)_{\mathfrak{p}} \cong (\mathrm{Im}\ e^{n-1})_{\mathfrak{p}}$. Hence by the induction hypothesis and Lemma 12(3), we have $(\mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \neq 0$. On the other hand, by Proposition 15(2), and by the assumption $\partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n} \cap \partial\mathbf{F}_n \subset \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M})$, we get

$$(\mathrm{Im}\ e^{n-1})_{\mathfrak{p}} \ncong (\mathbf{U}_n^{-n}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}}.$$

That is $(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Hence we conclude that $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})$ by Lemma 10.

Remark 20. Using Lemma 12(2), Lemma 14(6), the third and the fourth conditions of the definition of Cousin type, we have another proof of Corollary 19(2) as follows:

$$\begin{aligned}\partial\mathbf{F}_{\mathbf{M}n} \cap \partial\mathbf{F}_n &= \partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) = \partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) \\ &= (\partial\mathbf{F}_n \cap (H_U^n(\mathbf{M}))) \cup (\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M})) \\ &= \partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}) = \mathrm{Ass}(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}).\end{aligned}$$

Corollary 21. *Let* $\mathbf{M}$ *be a finitely generated* $\mathbf{R}$*-module of dimension* d*. Let* $\mathcal{F} = (\mathbf{F}_i)_{i\geq 0}$ *be a filtration of* $\mathrm{Spec}(\mathbf{R})$ *which admits* $\mathbf{M}$*. Let* $\mathcal{F}_{\mathbf{M}} = (\mathbf{F}_{\mathbf{M}i})_{i\geq 0}$ *be the* $\mathbf{M}$*-height filtration.*

(1) (cf. [SY], 3.9) $\mathbf{C}(\mathcal{U}_h, \mathbf{M})$ *is of Cousin type for* $\mathbf{M}$ *w.r.t.* $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$*, where* $\mathcal{U}_h = ((\mathbf{U}_h)_i)_{i\geq 0}$.

(2) ([RSZ], 3.4) $\mathbf{C}(\mathcal{U}_{\bar{h}}, \mathbf{M})$ *is of Cousin type for* $\mathbf{M}$ *w.r.t.* $\mathcal{F}$*, where* $\mathcal{U}_{\bar{h}} = ((\mathbf{U}_{\bar{h}})_i)_{i\geq 0}$.

(3) ([GO], 3.6) *Let* $\mathcal{U} = (\mathbf{U}_i)_{i\geq 1}$ *be a chain of saturated triangular subsets on* $\mathbf{R}$*. Put* $\mathbf{G}_0 = \mathrm{Supp}(\mathbf{M})$ *and for* $i \in \mathbf{N}$*, define* $\mathbf{G}_i = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{M}) :$ *there exists* $(a_1, \ldots, a_i) \in \mathbf{U}_i$ *with* $(a_1, \ldots, a_i)\mathbf{R} \subset \mathfrak{p}\}$*. Assume that* $\mathcal{G} = (\mathbf{G}_i)_{i\geq 0}$*, induced by* $\mathcal{U}$ *and* $\mathbf{M}$*, is a filtration of* $\mathrm{Spec}(\mathbf{R})$ *which admits* $\mathbf{M}$*. Then*

$\mathbf{C}(\mathcal{U}, \mathbf{M})$ *is of Cousin type for* $\mathbf{M}$ *w.r.t.* $\mathcal{G}$.

(4) *If* $\dim \mathbf{M} = ht_{\mathbf{M}}\mathfrak{q} + \dim \mathbf{M}/\mathfrak{q}\mathbf{M}$ *for all* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{M})$*, then*

$\mathbf{C}(\mathcal{U}_s, \mathbf{M})$ *is of Cousin type for* $\mathbf{M}$ *w.r.t.* $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$*, where* $\mathcal{U}_s = ((\mathbf{U}_s)_i)_{i\geq 0}$.

(5) *Let* $\mathcal{U}_r = ((\mathbf{U}_r)_i)_{i\geq 0}$*. Then we have the following equivalent conditions.*

$$\begin{aligned}&\mathbf{M} \textit{ is a Cohen-Macaulay module} \\ \Leftrightarrow\ &\mathbf{C}(\mathcal{U}_r, \mathbf{M}) \textit{ is of Cousin type for } \mathbf{M} \textit{ w.r.t. } \mathcal{F}_{\mathbf{M}} \\ \Leftrightarrow\ &(\mathbf{U}_r)_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M} \cong \bigoplus_{ht_{\mathbf{M}}\mathfrak{p}=n} \left((\mathbf{U}_r)_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}\right)_{\mathfrak{p}} \textit{ for all } n \geq 0.\end{aligned}$$

(6) *Let* $\mathbf{R}$ *be a Noetherian local ring. Then*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M} \text{ is a Gorenstein module}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} \mathbf{C}(\mathcal{U}_r, \mathbf{M}) \text{ is of Cousin type for } \mathbf{M} \text{ w.r.t. } \mathcal{F}_{\mathbf{M}} \text{ and}\\ (\mathbf{U}_r)_{d+1}^{-d-1}\mathbf{M} \text{ is an injective } \mathbf{R}\text{-module}\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} (\mathbf{U}_r)_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M} \cong \bigoplus_{ht_{\mathbf{M}}\mathfrak{p}=n} \left((\mathbf{U}_r)_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}\right)_{\mathfrak{p}} \text{ for all } n \geq 0, \text{ and}\\ (\mathbf{U}_r)_{d+1}^{-d-1}\mathbf{M} \text{ is an injective } \mathbf{R}\text{-module.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Proof. (1) This follows from ([C], 2.11 and 3.3(2)) and Corollary 19.

(2) By ([RSZ], 2.6 or [C], 3.3(3)), we have for all $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$(\mathbf{U}_{\bar{h}})_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M} \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\partial\mathbf{F}_n} \left((\mathbf{U}_{\bar{h}})_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}\right)_{\mathfrak{p}}.$$

Hence by Lemma 10 we get

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ass}\left((\mathbf{U}_{\bar{h}})_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}\right) &= \mathrm{Ass}\left(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\partial\mathbf{F}_n} \left((\mathbf{U}_{\bar{h}})_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}\right)_{\mathfrak{p}}\right)\\
&= \bigcup_{\mathfrak{p}\in\partial\mathbf{F}_n} \mathrm{Ass}\left(\left((\mathbf{U}_{\bar{h}})_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}\right)_{\mathfrak{p}}\right) \subset \partial\mathbf{F}_n.
\end{aligned}$$

By Lemma 13 and the definition of $(\mathbf{U}_{\bar{h}})_{n+1}$, we have, for all $\mathfrak{p} \in \partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Supp}(\mathbf{M})$,

$$(H_U^n(\mathbf{M}))_{\mathfrak{p}} = 0.$$

Therefore we have $\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Ass}(H_U^n(\mathbf{M})) = \emptyset$, since $\mathrm{Ass}(H_U^n(\mathbf{M})) \subset \mathrm{Supp}(\mathbf{M})$. Hence we obtain

$$\partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Ass}\left((\mathbf{U}_{\bar{h}})_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}\right) = \partial\mathbf{F}_n \cap \mathrm{Ass}\left((\mathbf{U}_{\bar{h}})_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}\right) = \mathrm{Ass}\left((\mathbf{U}_{\bar{h}})_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}\right),$$

by Lemma 14(6). Hence Theorem 18 completes the proof.

(3) By ([GO], 3.6), we have for all $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M} \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\partial\mathbf{G}_n} \left(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}\right)_{\mathfrak{p}}.$$

Hence we get $\mathrm{Ass}\left(\mathbf{U}_{n+1}^{-n-1}\mathbf{M}\right) \subset \partial\mathbf{G}_n$.

Next for all $\mathfrak{p} \in \partial\mathbf{G}_n$ we have

$$(H_U^n(\mathbf{M}))_{\mathfrak{p}} = 0.$$

In fact, if $(H_U^n(\mathbf{M}))_{\mathfrak{p}} \neq 0$, then there is $x \in H_U^n(\mathbf{M})$ such that $(0 : x) \subset \mathfrak{p}$. But by Lemma 13, we have $(a_1, \ldots, a_{n+1})\mathbf{R} \subset (0 : x) \subset \mathfrak{p}$ for some $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbf{U}_{n+1}$. Hence from the definition of $\mathbf{G}_{n+1}$ we have $\mathfrak{p} \in \mathbf{G}_{n+1}$. This contradicts $\mathfrak{p} \in \partial\mathbf{G}_n$.

Therefore we have $\partial \mathbf{G}_n \cap \operatorname{Ass}(H^n_U(\mathbf{M})) = \emptyset$.

Then by Lemma 14(6) we get

$$\begin{aligned}\partial \mathbf{G}_n \cap \operatorname{Ass}(\mathbf{U}_n[1]^{-n-1}\mathbf{M}) &= (\partial \mathbf{G}_n \cap \operatorname{Ass}(H^n_U(\mathbf{M}))) \cup (\partial \mathbf{G}_n \cap \operatorname{Ass}(\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M})) \\ &= \operatorname{Ass}(\mathbf{U}^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M}).\end{aligned}$$

The result follows from Theorem 18.

(4) This follows from ([C], 2.12 and 3.3 (1)) and Corollary 19.

(5) Since $\mathbf{C}(\mathcal{U}_r, \mathbf{M})$ is an exact sequence by ([SZ2], 3.3 or [O], 3.1), the first equivalence follows from ([S2], 2.4). From Proposition 17(3) and Theorem 18, we have the second equivalence.

(6) This follows from (5) and ([S2], 3.11).

Remark 22. Let $(\mathbf{R}, \mathfrak{m})$ be a Noetherian ring and let $\mathbf{M}$ be a finitely generated f-module of dimension d. Then $\mathbf{C}(\mathcal{U}_s, \mathbf{M})$ is of Cousin type for $\mathbf{M}$ with respect to $\mathcal{F}_{\mathbf{M}}$ (Corollary 21(4)) but $\mathbf{C}(\mathcal{U}_f, \mathbf{M})$ is not, even though $(\mathbf{U}_f)^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M} \cong \bigoplus_{ht_{\mathbf{M}}\mathfrak{p}=n} \left((\mathbf{U}_f)^{-n-1}_{n+1}\mathbf{M}\right)_{\mathfrak{p}}$ for all $n \geq 0$ ([C], 3.3(5)). For, by ([C], 2.15), we have $\operatorname{Ass}\left((\mathbf{U}_f)^{-d-1}_{d+1}\mathbf{M}\right) = \emptyset$ but $\operatorname{Ass}\left((\mathbf{U}_f)_d[1]^{-d-1}\mathbf{M}\right) \cap \partial \mathbf{F}_{\mathbf{M}d} = \operatorname{Ass}\left((\mathbf{U}_s)^{-d-1}_{d+1}\mathbf{M}\right) \cap \partial \mathbf{F}_{\mathbf{M}d} = \{\mathfrak{m}\}$. Hence we have

$$\operatorname{Ass}\left((\mathbf{U}_f)_d[1]^{-d-1}\mathbf{M}\right) \cap \partial \mathbf{F}_{\mathbf{M}d} \neq \operatorname{Ass}\left((\mathbf{U}_f)^{-d-1}_{d+1}\mathbf{M}\right).$$

Therefore the result follows from Theorem 18.

References

[C] S. C. Chung, *Associated prime ideals and isomorphisms of modules of generalized fractions*, preprint.

[GO] G. J. Gibson and L. O'carroll, *Direct limit systems, generalized fractions and complexes of Cousin type*, J. Pure Appl. Algebra **54** (1988), 249–259.

[HS] M. A. Hamieh and R. Y. Sharp, *Krull dimension and generalized fractions*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **28** (1985), 349–353.

[M] H. Matsumura, "Commutative ring theory," Cambridge University Press, 1986.

[O] L. O'carroll, *On the generalized fractions of Sharp and Zakeri*, J. London Math. Soc. (2) **28** (1983), 417–427.

[RSZ] A. M. Riley, R. Y. Sharp and H. Zakeri, *Cousin complexes and generalized fractions*, Glasgow Math. J. **26** (1985), 51–67.

[S1] R. Y. Sharp, *The Cousin complex for a module over a commutative Noetherian ring*, Math. Z. **112** (1969), 340–356.

[S2] R. Y. Sharp, *Gorenstein modules*, Math. Z. **115** (1970), 117–139.

[S3] R. Y. Sharp, *A Cousin complex characterization of balanced big Cohen-Macaulay modules*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **33** (1982), 471–485.

[SY] R. Y. Sharp and M. Yassi, *Generalized fractions and Hughes' grade-theoretic analogue of the Cousin complex*, Glasgow Math. J. **32** (1990), 173–188.

[SZ1] R. Y. Sharp and H. Zakeri, *Modules of generalized fractions*, Mathematika **29** (1982), 32–41.

[SZ2] R. Y. Sharp and H. Zakeri, *Modules of generalized fractions and balanced big Cohen-Macaulay modules*, Commutative Algebra: Durham 1981, London Mathematical Society Lecture Notes 72 (Cambridge University Press, 1982), 61–82.

[SZ3] R. Y. Sharp and H. Zakeri, *Local cohomology and modules of generalized fractions*, Mathematika **29** (1982), 296–306.

[SZ4] R. Y. Sharp and H. Zakeri, *Generalized fractions, Buchsbaum modules and generalized Cohen-Macaulay modules*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **98** (1985), 429–436.

Composite of local rings

-- Non-noetherian rings which exist near you --

Hideyuki MATSUMURA
Nagoya University

1. Motivation. Let R be a commutative ring. For a prime ideal P of R, let v(P) denote the embedding dimension of the local ring R_P (i.e. the minimal number of generators of the R_P-module PR_P). Concerning this notion, the following theorem is known.

Theorem (Lech [1]). If R is noetherian and P, Q are prime ideals of R such that $P \subset Q$, then

(1.1) $$v(P) + ht(Q/P) \leq v(Q).$$

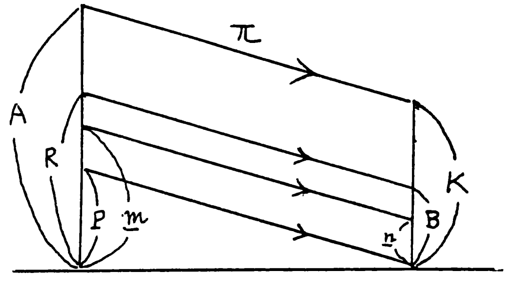
(For another proof of this theorem, see Vasconcelos [2].)

I was once asked by a young mathematician whether the theorem (or at least the weaker assertion $v(P) \leq v(Q)$) holds in the non-noetherian case. I answered that there were valuation domains of dimension 2 whose maximal ideal was principal but whose prime ideal P of height one had $v(P) = \infty$. Indeed the composite of a discrete valuation ring and a non-discrete valuation ring of dimension one is such a ring. Later I realized that, by applying the same construction to more ordinary local rings, we could get interesting examples of non-noetherian rings as subrings of very common noetherian rings.

What follows is just a simple generalization of a well-known construction, and it is very likely that it has been found by some others already. I claim no originality.

2. Construction. Let (A,P,K) be a local ring with $P \neq (0)$, and let $\pi : A \longrightarrow K = A/P$ be the natural map. Let $(B, \underline{n}, k)$ be a local domain with $\underline{n} \neq (0)$ and with field of fractions K.

Let $R = \pi^{-1}(B)$ and $\underline{m} = \pi^{-1}(\underline{n})$. Then R is a subring of A and $\underline{m}$ is an ideal of R. Since $P \subset R$, P is an ideal of R as well as of A.



3. **Properties.**

(1) $P \subsetneqq \underline{m} \subsetneqq R \subsetneqq A$; $R/P = B$, $\underline{m}/P = \underline{n}$.

(2) If $s \in A - P$, then $sP = P$.

(3) If I is an ideal of R, then either $I \subset P$ or $P \subset I$.

(4) R is a local ring with maximal ideal $\underline{m}$.

(5) P is not finitely generated as an ideal of R. Hence R is not noetherian.

(6) $R \subset R_P = A$, hence $P = PR_P$ and $v_R(P) = v_A(P)$.

(7) If $J \neq (0)$ is an ideal of B generated by $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, and if a_λ is a pre-image of b_λ in R, then $\pi^{-1}(J) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda R$. In particular, $v(\underline{m}) = v(\underline{n})$.

(8) If $Q \in \mathrm{Spec}(A)$, then $Q \in \mathrm{Spec}(R)$ also, and $R_Q = A_Q$. Hence $v_R(Q) = v_A(Q)$.

Proof. (1) is obvious. (2) is also clear since s is a unit in A and P is an ideal of A.

(3) Suppose $I \not\subset P$ and take an element s of I which is not in P. Then by (2) we have $P = sP \subset sR \subset I$.

(4) Let I be a proper ideal of R. If $I \subset P$ then $I \subset P \subset \underline{m}$. If $P \subset I$ then $I = \pi^{-1}(\pi(I)) \subset \pi^{-1}(\underline{n}) = \underline{m}$. Therefore $\underline{m}$ is the unique maximal ideal of R.

(5) Take $s \in \underline{m} - P$. By (2) we have $sP = P$, but $\underline{m}$ is the Jacobson radical of R, hence by Nakayama's Lemma the non-zero R-module P cannot be finitely generated. (We owe this proof to Mr. T. Kawasaki.)

(6) Since $R - P \subset A - P$, all elements of $R - P$ are non-zero divisors of R, and so we have $R \subset R_P$. Moreover, if $s \in R - P$ then $s^{-1} \in A$, hence $R_P \subset A$. On the other hand, since K is the field of fractions of B, for each $a \in A$ there is a non-zero element b of B such that $b\cdot\pi(a) \in B$. Let $s \in R - P$ be such that $\pi(s) = b$. Then $\pi(sa) \in B$, hence $sa \in R$ so that $a \in R_P$. Therefore $A = R_P$.

(7) By construction, it holds that

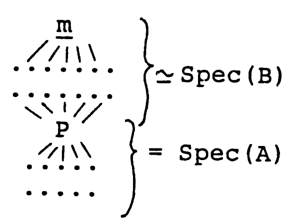
$$\pi^{-1}(J) = \sum_\lambda a_\lambda R + P.$$

Since $J \neq (0)$ there is $\tau \in \Lambda$ such that $a_\tau \notin P$. Then $P = a_\tau P \subset a_\tau R$, hence $\pi^{-1}(J) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda R$. In particular, $v_B(J) = v_R(\pi^{-1}(J))$.

(8) Q is obviously a prime ideal of R. Moreover,

$$R_Q = (R_P)_{QR_P} = A_{QA} = A_Q.$$

Thus, the poset Spec(R) looks like this:



4. Example.

Let k be a field and r, s be arbitrary natural numbers. Let

$$A = k[X_1, \ldots, X_r; Y_1, \ldots, Y_s]_{(\underline{X})}, \qquad P = (\underline{X})A.$$

Then $K := A/P = k(Y_1, \ldots, Y_s)$. Let

$$B = k[Y_1, \ldots, Y_s]_{(\underline{Y})}, \qquad \underline{n} = (\underline{Y})B.$$

Then

$$A = \left\{ \frac{f(\underline{X},\underline{Y})}{g(\underline{X},\underline{Y})} \;\middle|\; g(0,\underline{Y}) \neq 0 \right\} \quad \text{and}$$

$$R = \left\{ \frac{f(\underline{X},\underline{Y})}{g(\underline{X},\underline{Y})} \;\middle|\; \frac{f(0,\underline{Y})}{g(0,\underline{Y})} = \frac{U(\underline{Y})}{V(\underline{Y})},\; V(0) \neq 0 \right\}.$$

For instance, $(X_1 + Y_1^2)/(X_2 + Y_1) \in R$, $(X_1 + Y_1)/(X_2 + Y_1^2) \in A - R$.
We have

$$v(\underline{m}) = v(\underline{n}) = s, \qquad v(P) = r.$$

Therefore the theorem of Lech completely fails for general commutative rings.

References

[1] C. Lech: Inequalities related to certain couples of local rings. Acta Math. 112 (1964), 69-89.

[2] W. Vasconcelos: Ideals generated by R-sequences. J. of Algebra, 6 (1967), 309-316.

On the basic sequences of homogeneous ideals of height three

Mutsumi AMASAKI

Faculty of School Education
Hiroshima University

§1. Main results

Let k denote an infinite field, $x_1, \ldots, x_r$ indeterminates over k and $k[x(i)] = k[x_{i+1}, \ldots, x_r]$ $(0 \leq i \leq r)$ polynomial rings. Let further $R = k[x(0)]$, $R' = k[x(1)]$, $R'' = k[x(2)]$. We will make free use of the notation in [**A1**], [**A2**] and [**A3**].

(1.1) Theorem (cf. [**A3**]). *Let E be a finitely generated graded R-module and suppose that the linear forms $x_1, \ldots, x_r$ are sufficiently generally chosen. Then there are finitely generated graded free $k[x(i-1)]$-module $E^{\langle i \rangle} \subset E$ and finitely generated graded $k[x(i-1)]$-module $E^{[i]} \subset E$ $(1 \leq i \leq r+1)$ satisfying*

(1) $E^{[i]} = E^{\langle i \rangle} \oplus E^{[i+1]} \quad (1 \leq i \leq r)$,

(2) $x_i E^{[i+1]} \subset (x_{i+1}, \ldots, x_r) E^{\langle i \rangle} \oplus E^{[i+1]} \quad (1 \leq i \leq r)$,

where $E^{[1]} = E$, $E^{\langle r+1 \rangle} = E^{[r+1]}$.

Proof. See [**A2**,§1], [**A4**]. □

(1.2) Definition (cf. [**A3**]). Under the condition of the above theorem, let $\bar{n}^i = (n^i_1, \ldots, n^i_{m_i})$ $(1 \leq i \leq r+1)$ be non decreasing sequences of integers such that $E^{\langle i \rangle} = \bigoplus_{l=1}^{m_i} k[x(i-1)](-n^i_l)$. We define the basic sequence of E to be the sequence $(\bar{n}^1; \bar{n}^2; \cdots; \bar{n}^{r+1})$ and denote it by $B_R(E)$. In case $E^{\langle i \rangle} = 0$, we understand $\bar{n}^i = \emptyset$.

Given a homogeneous ideal $I \subset R$ of height 3, one can construct an exact sequence of the form

$$0 \longrightarrow S_3 \longrightarrow S_2 \longrightarrow S_1 \oplus N \longrightarrow I \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX with finitely generated graded free R-modules S_1, S_2, S_3 and a finitely generated graded torsion free R-module N having no free direct summand such that $H^{r-2}_{\mathfrak{m}}(N) = H^{r-1}_{\mathfrak{m}}(N) = 0$ (see (2.5)). Moreover, this N is uniquely determined by I.

(1.4) Theorem. *Let $I \subset R$ be a homogeneous ideal of height three and N be as explained above. Suppose that the linear forms $x_1, \ldots, x_r$ are chosen sufficiently generally for both I, N.*

(1) *There is a sequence of integers $\bar{w}''$ such that $I^{[3]} \cong R''(-\bar{w}'') \oplus N^{[3]}$. In particular, $B_{R''}(I^{[3]}) = (\bar{w}'', B_{R''}(N^{[3]}))$. Moreover, the R''-module $N^{[3]}$ has no free direct summand.*

(2) *As the free modules S_1, S_2, S_3 appearing in (1.3), one may take those indicated below.*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow R(-\bar{w}'' - 2) \oplus R(-\bar{\gamma}^2 - 1) \\ &\longrightarrow R(-\bar{n}^2 - 1, -\bar{w}'' - 1, -\bar{w}'' - 1) \oplus R(-\bar{\gamma}^1, -\bar{\gamma}^2) \\ &\longrightarrow R(-\bar{n}^1, -\bar{n}^2, -\bar{w}'') \oplus N \longrightarrow I \longrightarrow 0 \, , \end{aligned}$$

where $B_R(I) = (\bar{n}^1; \bar{n}^2; \cdots)$, $B_R(N) = (\bar{\gamma}^1; \bar{\gamma}^2; \cdots)$.

Our theorem establishes a relationship betweeen the basic sequences of I and of N, which may be thought of as giving a necessary condition for a sequence of integers $(\bar{n}^1; \bar{n}^2; \cdots)$ to correspond to a homogeneous ideal I with $N \cong M(-s)$, $s \in \mathbf{Z}$, when a finitely generated graded R-module M is given beforehand. In the case $\mathrm{ht}(I) = 2$, as well as an analogous result [**A3**,(3.1)], we have already proved that with suitable additional conditions it becomes sufficient (see [**A3**,(3.7)]). But so far, we have no general solution to the problem below, exept that one finds an answer in our previous results of [**A1**,§§5,6] for the Buchsbaum case.

(1.5) Problem. Let M be a finitely generated graded torsion free R-module with no free direct summand satisfying $H^{r-2}_{\mathfrak{m}}(M) = H^{r-1}_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Find a necessary and sufficient condition for a sequence of integers $(\bar{n}^1; \bar{n}^2; \cdots; \bar{n}^{r+1})$ to be the basic sequence of a homogeneous ideal $I \subset R$ of height three such that $N \cong M(-s)$ with a suitable $s \in \mathbf{Z}$.

§2. Proof of (1.4)

Let I be an ideal of height $n \geq 2$ in R and

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n+1}} L_n \xrightarrow{\varphi_n} \cdots \xrightarrow{\varphi_3} L_2 \xrightarrow{\varphi_2} L_1 \xrightarrow{\varphi_1} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

a free resolution for R/I over R. Take a free resolution

$$(2.1)\qquad \cdots \longrightarrow \tilde{L}_0{}^\vee \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1{}^\vee} \cdots \longrightarrow \tilde{L}_{n-1}{}^\vee \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n{}^\vee} \tilde{L}_n{}^\vee \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{n+1}{}^\vee} \mathrm{Im}(\varphi_{n+1}{}^\vee) \longrightarrow 0$$

for $\mathrm{Im}(\varphi_{n+1}{}^\vee)$ and then consider the complex
(2.2)

$$\cdots \longrightarrow L_{n+1} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{n+1}} \tilde{L}_n \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} \tilde{L}_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} \tilde{L}_1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} \tilde{L}_0 \longrightarrow \mathrm{Coker}(\tilde{\varphi}_1) \longrightarrow 0$$

(2.3) Lemma. *The above complex* (2.2) *is exact.*

Proof. For any free resolution (2.1), the complex $\tilde{L}_\bullet{}^\vee$ is the direct sum of its minimal and split exact parts, and the (2.2) is exact if and only if it is exact when we take as (2.1) the one given by the minimal part of $\tilde{L}_\bullet{}^\vee$, namely, a minimal free resolution for $\mathrm{Im}(\varphi_{n+1}{}^\vee)$. Therefore, we have only to consider the special case where $\tilde{L}_n = L_n$, $\tilde{\varphi}_{n+1} = \varphi_{n+1}$. Since $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, I) = 0$ for $i < n$, the complex

$$(2.4)\qquad 0 \longrightarrow L_0{}^\vee \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{n-2}{}^\vee \xrightarrow{\varphi_{n-1}{}^\vee} L_{n-1}{}^\vee \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi_n{}^\vee) \longrightarrow 0$$

is exact. One sees by the long exact sequence of extensions arising from

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi_n{}^\vee) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1}{}^\vee) = \mathrm{Im}(\tilde{\varphi}_n{}^\vee) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(R/I, R) \longrightarrow 0$$

that

$$\mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}_{n-1}) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}(\tilde{\varphi}_n{}^\vee), R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}(\varphi_n{}^\vee), R) = \mathrm{Ker}(\varphi_{n-1}) = \mathrm{Im}(\varphi_n)\ ,$$

$$\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Im}(\tilde{\varphi}_n{}^\vee), R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Im}(\varphi_n{}^\vee), R) = 0 \quad \text{for} \quad 1 \le i < n-1\ .$$

The exactness of (2.2) at $\tilde{L}_i$ ($i \neq n-1,\ n$) follows immediately. To show that $\mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}_i) = \mathrm{Im}(\tilde{\varphi}_{i+1})$ for $i = n-1,\ n$, we first consider the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \tilde{L}_{n-2}{}^\vee \arrow[r, "\tilde{\varphi}_{n-1}{}^\vee"] & \tilde{L}_{n-1}{}^\vee \arrow[r, "\tilde{\varphi}_n{}^\vee"] & L_n{}^\vee \arrow[r] & L_{n+1}{}^\vee \arrow[r] & L_{n+2}{}^\vee \\
\cdots \arrow[r] & L_{n-2}{}^\vee \arrow[r, "\varphi_{n-1}{}^\vee"] \arrow[u] & L_{n-1}{}^\vee \arrow[r, "\varphi_n{}^\vee"] \arrow[u] & L_n{}^\vee \arrow[r] \arrow[u, equal] & L_{n+1}{}^\vee \arrow[r] \arrow[u, equal] & L_{n+2}{}^\vee \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Taking duals gives rise to a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
L_{n+1} \arrow[r, "\varphi_{n+1}"] \arrow[d, equal] & L_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}(\tilde{\varphi}_n{}^\vee), R) \arrow[d, "\wr"] & \\
L_{n+1} \arrow[r, "\varphi_{n+1}"] & L_n \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}(\varphi_n{}^\vee), R) = \mathrm{Im}(\varphi_n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd},$$

where the bottom row is exact. This, together with the exactness of the sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}(\tilde{\varphi}_n{}^{\vee}), R) = \mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}_{n-1}) \longrightarrow \tilde{L}_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{n-1}} \tilde{L}_{n-2} ,$$

shows our assertion. □

(2.5) Lemma. *With the notation above, there is an exact sequence of the form*

$$0 \longrightarrow S_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_3 \longrightarrow S_2 \longrightarrow S_1 \oplus N \longrightarrow I \longrightarrow 0 ,$$

where S_i $(1 \le i \le n)$ are finitely generated graded free R-modules and N is a finitely generated graded torsion free R-module satisfying $H^i_{\mathfrak{m}}(N) = 0$ $(r-n+1 \le i < r)$. Moreover N is determined uniquely by these conditions.

Proof. Since (2.1) is exact, one obtains a chain map

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots \longrightarrow L_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & L_n & \xrightarrow{\varphi_n} & L_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\varphi_2} & L_1 & \longrightarrow & I & \longrightarrow 0 \\
\| & & \| & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & \\
\cdots \longrightarrow L_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & L_n & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} & \tilde{L}_{n-1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} & \tilde{L}_1 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} & E & \longrightarrow 0
\end{array}$$

as shown in the proof of the above lemma, where $E := \mathrm{Coker}(\tilde{\varphi}_2) \cong \mathrm{Im}(\tilde{\varphi}_1)$. Take its mapping cone, cancel L_i $(n \le i \le r)$ and then extract a free direct summand S from E so that $E = S \oplus N$ with N having no free direct summand. □

Given a square matrix Φ of size (l, l), let $\Phi - \mathrm{diag}(x_m)$ denote $\Phi - x_m 1_l$.

(2.6) Lemma. *Let E be an R-module which has a direct sum decomposition $E = L \oplus E'$ as R'-module with a graded free R-submodule $L \subset E$ and a finitely generated graded R'-submodule $E' \subset E$. Let further*

$$\cdots \longrightarrow G'_2 \xrightarrow{A_2} G'_1 \xrightarrow{A_1} G'_0 \longrightarrow E' \longrightarrow 0$$

be a free resolution for E' as R'-module and put $G_i = G'_i \otimes_{R'} R$ for all i. Then we can construct a free resolution for E of the form

$$\cdots \longrightarrow G_1(-1) \oplus G_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -A_1 & 0 \\ \Phi_2 & A_2 \end{pmatrix}} G_0(-1) \oplus G_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -A & 0 \\ \Phi_1 & A_1 \end{pmatrix}} L \oplus G_0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

with $A_i, \Phi_i - \mathrm{diag}(x_1) \in \mathrm{MAT}(x(1))$.

Proof. See [**A3**,§2]. □

(2.7) Lemma. *Let* $\varphi_i = \begin{pmatrix} -\Lambda & 0 \\ \Phi_i & A_i \end{pmatrix}$, $\varphi_{i+1} = \begin{pmatrix} -A_i & 0 \\ \Phi_{i+1} & A_{i+1} \end{pmatrix}$ *be matrices satisfying* $\varphi_i\varphi_{i+1} = 0$ *and* A_j, $\Phi_j - \mathrm{diag}(x_1) \in \mathrm{MAT}(x(1))$ $(j = i,\ i+1)$. *If* $\mathrm{Ker}(A_i) = \mathrm{Im}(A_{i+1})$, *then* $\mathrm{Ker}(\varphi_i) = \mathrm{Im}(\varphi_{i+1}) = \mathrm{Im}^R\begin{pmatrix} -A_i \\ \Phi_{i+1} \end{pmatrix} \oplus \mathrm{Im}^{R'}\begin{pmatrix} 0 \\ A_{i+1} \end{pmatrix}$.

Proof. See [**A3**,§2]. □

(2.8) Remark. The following assertion is the same as the above lemma. Let $\varphi_i = \begin{pmatrix} A_i & \Phi_i \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}$, $\varphi_{i+1} = \begin{pmatrix} A_{i+1} & \Phi_{i+1} \\ 0 & -A_i \end{pmatrix}$ be matrices satisfying $\varphi_i\varphi_{i+1} = 0$ and A_j, $\Phi_j - \mathrm{diag}(x_1) \in \mathrm{MAT}(x(1))$ $(j = i,\ i+1)$. If $\mathrm{Ker}(A_i) = \mathrm{Im}(A_{i+1})$, then $\mathrm{Ker}(\varphi_i) = \mathrm{Im}(\varphi_{i+1}) = \mathrm{Im}^R\begin{pmatrix} \Phi_{i+1} \\ -A_i \end{pmatrix} \oplus \mathrm{Im}^{R'}\begin{pmatrix} A_{i+1} \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2.9) Lemma. *Let*

$$G'_\bullet : \cdots \longrightarrow G'_2 \xrightarrow{A_2} G'_1 \xrightarrow{A_1} G'_0 \xrightarrow{A_0} G'_{-1} \xrightarrow{A_{-1}} G'_2 \longrightarrow \cdots$$

be a free complex of finite free graded R'*-modules such that* $H_i(G'_\bullet) = 0$ *for* $i > 0$ *and* $H^j(G'^{\vee\bullet}) = 0$ *for* $j \leq 0$. *Suppose there are square matrices* Φ_i *with the property* $\Phi_i - \mathrm{diag}(x_1) \in \mathrm{MAT}(x(1))$ *for all* i *such that*

$$\cdots \xrightarrow{\begin{pmatrix} -A_1 & 0 \\ \Phi_2 & A_2 \end{pmatrix}} F_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -A_0 & 0 \\ \Phi_1 & A_1 \end{pmatrix}} F_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -A_{-1} & 0 \\ \Phi_0 & A_0 \end{pmatrix}} F_{-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -A_{-2} & 0 \\ \Phi_{-1} & A_{-1} \end{pmatrix}} \cdots$$

is a complex satisfying

$$H_i(F_\bullet) = 0 \quad \text{for} \quad i > 0 \quad \text{and} \quad H^j(F^{\vee\bullet}) = 0 \quad \text{for} \quad j \leq 0\ ,$$

where $G_i = G'_i \otimes_{R'} R$, $F_i = G_{i-1}(-1) \oplus G_i$ *for all* i. *Denote by* E *(resp.* E'*) the cokernel of the linear mapping* $\begin{pmatrix} -A_0 & 0 \\ \Phi_1 & A_1 \end{pmatrix}$ *(resp.* A_1*) over* R *(resp.* R'*). Then* $E^{[2]}$ *has no free direct summand. Moreover* $E' = E^{[2]} \oplus \mathrm{se}(G'_\bullet)_0/A_1(\mathrm{se}(G'_\bullet)_1) = E^{[2]} \oplus A_0(\mathrm{se}(G'_\bullet)_0)$.

Proof. Put $X'_\bullet = \min(G'_\bullet)_\bullet$, $Y'_\bullet = \mathrm{se}(G'_\bullet)_\bullet$, $X_\bullet = X'_\bullet \otimes_{R'} R$, $Y_\bullet = Y'_\bullet \otimes_{R'} R$, $\partial^X_\bullet = A_{\bullet|X_\bullet}$, $\partial^Y_\bullet = A_{\bullet|Y_\bullet}$. First of all, the complex $F_\bullet$ is the mapping cone of the chain map $\Phi_{\bullet+1} : G_\bullet(-1) \longrightarrow G_\bullet$. Let $\tilde{\tilde{\Phi}}_{\bullet+1}$ denote the composite chain map

$$X_\bullet(-1) \hookrightarrow G_\bullet(-1) \xrightarrow{\Phi_{\bullet+1}} G_\bullet \xrightarrow{\text{projection}} X_\bullet\ .$$

Since $G_\bullet = X_\bullet \oplus Y_\bullet$ with $Y_\bullet$ split exact, we find that $F_\bullet$ is isomorphic to the direct sum of $Y_{\bullet-1}(-1) \oplus Y_\bullet$ and the mapping cone of $\tilde{\tilde{\Phi}}_{\bullet+1}$. Hence

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Coker}^R \begin{pmatrix} -A_0 & 0 \\ \Phi_1 & A_1 \end{pmatrix} \\ &\cong \mathrm{Coker}^R \begin{pmatrix} -\partial_0^X & 0 \\ \tilde{\tilde{\Phi}}_1 & \partial_1^X \end{pmatrix} \oplus (Y_{-1}/\partial_0^Y(Y_0))(-1) \oplus (Y_0/\partial_1^Y(Y_1)) \ . \end{aligned}$$

Besides,

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_i - \mathrm{diag}(x_1) \in \mathrm{MAT}(x(1)),\ \ \mathrm{Ker}(\partial_1^{X\vee}) = \mathrm{Im}(\partial_0^{X\vee}) \text{ and } \partial_0^X,\ \partial_1^X \in \mathfrak{m}'\,\mathrm{MAT}(x(1))$$

by the assumption on $\Phi_\bullet$, $X_\bullet$, $Y_\bullet$. We find therefore that $E^{[2]} \cong \mathrm{Coker}(\partial_1^X)$ has no free direct summand and that $E' \cong E^{[2]} \oplus Y_0'/A_1(Y_1') = E^{[2]} \oplus A_0(Y_0')$. □

(2.10) Lemma. *With the natation above, suppose that $G_\bullet$ is minimal. Let $\bar{\nu}$ be a sequence of integers such that $R(-\bar{\nu}) = \begin{pmatrix} -A_{-1} & 0 \\ \Phi_0 & A_0 \end{pmatrix}(\mathrm{se}(F_\bullet)_0)$. Then*

$$E \cong R(-\bar{\nu}) \oplus N$$

with a graded R-module N having no free direct summand, $\mathrm{Coker}^{R'}(A_0) \cong N^{[2]}$ *and $G_{-1}(-1) \cong R(-\bar{\nu}) \oplus R(-\bar{\gamma}^1)$, where $B_R(N) = (\bar{\gamma}^1; \cdots)$.*

Proof. See [**A3**,2.4]. □

(2.11) Corollary. *Under the assumption of* (2.9), *let $\bar{\nu}$ be a sequence of integers such that*

$$\begin{pmatrix} -A_{-1} & 0 \\ \Phi_0 & A_0 \end{pmatrix} (\mathrm{se}(F_\bullet)_0) \cong A_{-1}(\mathrm{se}(G_\bullet(-1)_{-1}) \oplus A_0(\mathrm{se}(G_\bullet)_0) \oplus R(-\bar{\nu}) \ .$$

Then

$$\begin{aligned} &\min(G_\bullet(-1))_{-1} \cong R(-\bar{\nu}) \oplus R(-\bar{\gamma}^1) \ , \\ &E = A_{-1}(\mathrm{se}(G_\bullet(-1))_{-1}) \oplus A_0(\mathrm{se}(G_\bullet)_0) \oplus R(-\bar{\nu}) \oplus N \ , \end{aligned}$$

where N is an R-module with no free direct summand and $B_R(N) = (\bar{\gamma}^1; \cdots)$.

Proof. With the notation of the proof of (2.9), we have

$$R(-\bar{\nu}) \cong \begin{pmatrix} -\partial_{-1}^X & 0 \\ \tilde{\tilde{\Phi}}_0 & \partial_0^X \end{pmatrix} \left(\mathrm{se}(\mathrm{con}(\tilde{\tilde{\Phi}}_{\bullet+1})_\bullet)_0\right) \ .$$

□

(2.12) Lemma. *Let $F_j = G_{j-1}(-1) \oplus G_j$, $\tilde{F}_j = \tilde{G}_{j-1}(-1) \oplus \tilde{G}_j$ with graded free R-modules G_j, $\tilde{G}_j$ $(j = i,\ i+1)$. Assume that, in the diagram*

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
F_{i+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -D_i & 0 \\ \Phi_{i+1} & D_{i+1} \end{pmatrix}"] & F_i \arrow[r, "\begin{pmatrix} -D_{i-1} & 0 \\ \Phi_i & D_i \end{pmatrix}"] & F_{i-1} \\
\tilde{F}_{i+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -\tilde{D}_i & 0 \\ \tilde{\Phi}_{i+1} & \tilde{D}_{i+1} \end{pmatrix}"'] \arrow[u, "\lambda_{i+1}=\begin{pmatrix} \mu_i & 0 \\ \nu_{i+1} & \mu_{i+1} \end{pmatrix}"'] & \tilde{F}_i \arrow[r, "\begin{pmatrix} -\tilde{D}_{i-1} & 0 \\ \tilde{\Phi}_i & \tilde{D}_i \end{pmatrix}"'] \arrow[u, "\lambda_i=\begin{pmatrix} \mu_{i-1} & 0 \\ \nu_i & \mu_i \end{pmatrix}"'] & \tilde{F}_{i-1} \arrow[u, "\lambda_{i-1}=\begin{pmatrix} \mu_{i-2} & 0 \\ \nu_{i-1} & \mu_{i-1} \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

all the maps other than μ_{i-2}, ν_{i-1}, (i.e. λ_{i-1}) exist and the following conditions are satisfied :

(1) *both rows are complexes,*

(2) *the left rectangle is commutative,*

(3) $\operatorname{Ker}(\tilde{D}_i{}^{\vee}) = \operatorname{Im}(\tilde{D}_{i-1}{}^{\vee})$,

(4) $\mu_{j-1}\tilde{D}_j = D_j\mu_j$ $(j = i,\ i+1)$.

Then there are maps μ_{i-2}, ν_{i-1} (i.e. λ_{i-1}) which make the right rectangle commutative. Moreover if a map μ_{i-2} satisfying $\mu_{i-2}\tilde{D}_{i-1} = D_{i-1}\mu_{i-1}$ exists from the first, then we may take it as the desired one.

Proof. The relation

$$\begin{pmatrix} \mu_{i-2} & 0 \\ \nu_{i-1} & \mu_{i-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\tilde{D}_{i-1} & 0 \\ \tilde{\Phi}_i & \tilde{D}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_{i-1} & 0 \\ \Phi_i & D_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_{i-1} & 0 \\ \nu_i & \mu_i \end{pmatrix}$$

is equivalent to

$$\begin{cases} \Phi_i\mu_{i-1} - \mu_{i-1}\tilde{\Phi}_i + D_i\nu_i + \nu_{i-1}\tilde{D}_{i-1} = 0 \\ \mu_{i-2}\tilde{D}_{i-1} - D_{i-1}\mu_{i-1} = 0 \end{cases}.$$

The conditions (1), (2) and (4) imply that $\Phi_i\mu_{i-1} - \mu_{i-1}\tilde{\Phi}_i + D_i\nu_i$ and $D_{i-1}\mu_{i-1}$ vanish when multiplied by $\tilde{D}_i$ on the right. Our assertion therefore is a consequence of (3). □

We have

$$I = I^{\langle 1\rangle} \oplus I^{\langle 2\rangle} \oplus I^{[3]} \qquad I^{[3]} = R''(-\bar{w}'') \oplus N''$$

with a finitely generated R''-module N'' having no free direct summand. Starting with a minimal free resolution for $I^{[3]}$ over R''

$$\cdots \longrightarrow P_3'' \xrightarrow{C_3} P_2'' \xrightarrow{C_2} P_1'' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ C_1 \end{smallmatrix}\right)} R''(-\bar{w}'') \oplus P_0'' \longrightarrow I^{[3]} \longrightarrow 0 ,$$

one obtains by (2.6) a free resolution for $I^{[2]} = I^{\langle 2\rangle} \oplus I^{[3]}$ over R'

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow P_2'(-1) \oplus P_3' &\xrightarrow{A_3=\left(\begin{smallmatrix} -C_2 & 0 \\ \Psi_3 & C_3 \end{smallmatrix}\right)} P_1'(-1) \oplus P_2' \\ &\xrightarrow{A_2=\left(\begin{smallmatrix} -\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ C_1 \end{smallmatrix}\right) & 0 \\ \Psi_2 & C_2 \end{smallmatrix}\right)} (R'(-\bar{w}''-1) \oplus P_0'(-1)) \oplus P_1' \\ &\xrightarrow{A_1=\left(\begin{smallmatrix} -\Theta & 0 \\ \Psi_1 & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ C_1 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)} R'(-\bar{n}^2) \oplus (R'(-\bar{w}'') \oplus P_0') \longrightarrow I^{[2]} \longrightarrow 0 , \end{aligned}$$

where $P_i' = P_i'' \otimes_{R''} R'$. Write $\Psi_1 = \left(\begin{smallmatrix} \bar{\Psi}_{11} & \bar{\Psi}_{12} \\ \bar{\Psi}_{21} & \tilde{\Psi}_1 \end{smallmatrix}\right)$ with $\tilde{\Psi}_1 \in \mathrm{Hom}_{R'}(P_0'(-1), P_0')$. Let

$$\cdots \longrightarrow P''_{-3}{}^{\vee} \xrightarrow{C_{-2}{}^{\vee}} P''_{-2}{}^{\vee} \xrightarrow{C_{-1}{}^{\vee}} P''_{-1}{}^{\vee} \xrightarrow{C_0{}^{\vee}} P_0''^{\vee} \xrightarrow{C_1{}^{\vee}} \mathrm{Im}^{R''}(C_1{}^{\vee}) \longrightarrow 0$$

be a minimal free resolution for $\mathrm{Im}^{R''}(C_1{}^{\vee})$. Since N'' has no free direct summand, we have $C_i \in \mathfrak{m}' \,\mathrm{MAT}(x(1))$ $(i \le 0)$. Constructing a free resolution for $\mathrm{Im}^{R'}\left(\begin{smallmatrix} -C_1 & 0 \\ \Psi_2 & C_2 \end{smallmatrix}\right)^{\vee}$ by (2.6), (2.8) and then passing to its dual, we get a complex

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow P_2'(-1) \oplus P_3' &\xrightarrow{\tilde{A}_3=\left(\begin{smallmatrix} -C_2 & 0 \\ \Psi_3 & C_3 \end{smallmatrix}\right)} P_1'(-1) \oplus P_2' \xrightarrow{\tilde{A}_2=\left(\begin{smallmatrix} -C_1 & 0 \\ \Psi_2 & C_2 \end{smallmatrix}\right)} P_0'(-1) \oplus P_1' \\ &\xrightarrow{\tilde{A}_1=\left(\begin{smallmatrix} -C_0 & 0 \\ \tilde{\Psi}_1 & C_1 \end{smallmatrix}\right)} P'_{-1}(-1) \oplus P_0' \xrightarrow{\tilde{A}_0=\left(\begin{smallmatrix} -C_{-1} & 0 \\ \Psi_0 & C_0 \end{smallmatrix}\right)} P'_{-2}(-1) \oplus P'_{-1} \\ &\xrightarrow{\tilde{A}_{-1}=\left(\begin{smallmatrix} -C_{-2} & 0 \\ \Psi_{-1} & C_{-1} \end{smallmatrix}\right)} P'_{-3}(-1) \oplus P'_{-2} \longrightarrow \cdots , \end{aligned}$$

with $\Psi_i - \mathrm{diag}(x_2) \in \mathrm{MAT}(x(2))$. Let

$$G_0' = R'(-\bar{n}^2) \oplus R'(-\bar{w}'') \oplus P_0', \quad G_1' = R'(-\bar{w}''-1) \oplus P_0'(-1) \oplus P_1' ,$$

$$G_i' = P_{i-1}'(-1) \oplus P_i' \quad (i \ge 2), \qquad \tilde{G}_i' = P_{i-1}'(-1) \oplus P_i' \quad (i \in \mathbf{Z}) .$$

Since

$$\begin{pmatrix} -\Theta \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \mathrm{Ker}({C_1}^\vee) = \mathrm{Im}({C_0}^\vee) \quad ,$$

there are matrices $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathrm{MAT}(x(1))$ such that $\mu_{i-1}\tilde{A}_i = A_i\mu_i$ $(i \geq 1)$ with

$$(2.13) \qquad \begin{cases} \mu_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} : \tilde{G}'_0 \longrightarrow G'_0 \, , \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} : \tilde{G}'_1 \longrightarrow G'_1 \\ \mu_i = \mathrm{id} : \tilde{G}'_i \longrightarrow G'_i \quad (i \geq 2) \, . \end{cases}$$

Starting with the free resolution of $I^{[2]}$ above, let us first construct a free resolution $\Gamma_\bullet : F_\bullet \longrightarrow I$ by the method of (2.6). Next, following the procedure stated in the beginning of this section and applying (2.6), (2.8), we get a complex $(\tilde{F}_\bullet, \tilde{\Gamma}_\bullet)$. Note that $\mathrm{Ker}({\tilde{\Gamma}_{i+1}}^\vee) = \mathrm{Im}({\tilde{\Gamma}_i}^\vee)$ for $i \leq 2$ and that $\mathrm{Ker}(\tilde{\Gamma}_i) = \mathrm{Im}(\tilde{\Gamma}_{i+1})$ for $i \geq 0$. Let

(2.14)

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & F_4 \arrow[r, "\Gamma_4"] & F_3 \arrow[r, "\Gamma_3"] & F_2 \arrow[r, "\Gamma_2"] & F_1 \arrow[r, "\Gamma_1"] & F_0 \arrow[r] & I \arrow[r] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & \tilde{F}_4 \arrow[r, "\tilde{\Gamma}_4"] \arrow[u, equal] & \tilde{F}_3 \arrow[r, "\tilde{\Gamma}_3"] \arrow[u, equal] & \tilde{F}_2 \arrow[r, "\tilde{\Gamma}_2"] \arrow[u, "\lambda_2"'] & \tilde{F}_1 \arrow[r, "\tilde{\Gamma}_1"] \arrow[u, "\lambda_1"'] & \tilde{F}_0 \arrow[r, "\tilde{\Gamma}_0"] \arrow[u, "\lambda_0"'] & E \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

be the chain map obtained by (2.12), (2.13). Here,

$$F_0 = R(-\bar{n}^1) \oplus G_0, \quad F_i = G_{i-1}(-1) \oplus G_i \ (i \geq 1),$$

$$\tilde{F}_i = \tilde{G}_{i-1}(-1) \oplus \tilde{G}_i \ (i \in \mathbf{Z}), \quad E = \mathrm{Im}(\tilde{\Gamma}_0) \hookrightarrow \tilde{F}_{-1},$$

$$G_i = G'_i \otimes_{R'} R, \quad \tilde{G}_i = \tilde{G}'_i \otimes_{R'} R,$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -\Lambda & 0 \\ \Phi_1 & A_1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_i = \begin{pmatrix} -A_{i-1} & 0 \\ \Phi_i & A_i \end{pmatrix} \ (i \geq 2),$$

$$\tilde{\Gamma}_i = \begin{pmatrix} -\tilde{A}_{i-1} & 0 \\ \tilde{\Phi}_i & \tilde{A}_i \end{pmatrix} \ (i \in \mathbf{Z}),$$

$$\Phi_i - \mathrm{diag}(x_1), \ \tilde{\Phi}_i - \mathrm{diag}(x_1) \in \mathrm{MAT}(x(1)),$$

$$\tilde{\Phi}_i = \Phi_i, \quad \tilde{A}_i = A_i \quad (i \geq 3) \, .$$

(2.15) Lemma.

(1) *The image of* $\begin{pmatrix} -\lambda_i \\ \tilde{\Gamma}_i \end{pmatrix} \otimes_R k : \tilde{F}_i \otimes_R k \longrightarrow (F_i \oplus \tilde{F}_{i-1}) \otimes_R k$ *contains a free direct summand isomorphic to* $\tilde{F}_i \otimes_R k$ *for* $i \geq 2$.

(2) *The image of* $\begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ \tilde{\Gamma}_1 \end{pmatrix} \otimes_R k : \tilde{F}_1 \otimes_R k \longrightarrow (F_1 \oplus \tilde{F}_0) \otimes_R k$ *contains a free direct summand isomorphic to* $(\tilde{A}_0(\mathrm{se}(\tilde{G}_\bullet)_0(-1)) \oplus P_0(-1) \oplus \tilde{G}_1) \otimes_R k$.

(3) *The image of* $\begin{pmatrix} -\lambda_0 \\ \tilde{\Gamma}_0 \end{pmatrix} \otimes_R k : \tilde{F}_0 \otimes_R k \longrightarrow (F_0 \oplus \tilde{F}_{-1}) \otimes_R k$ *contains a free direct summand isomorphic to* $(\tilde{\Gamma}_0(\mathrm{se}(\tilde{F}_\bullet)_0) \oplus P_0) \otimes_R k$.

Proof. The first assrtion is clear by (2.12), (2.13). On the other hand, since $C_0 \in \mathfrak{m}' \,\mathrm{MAT}(x(1))$, we have

$$\mathrm{rank}_k \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ -C_{-1} & 0 \\ \Psi_0 & C_0 \end{pmatrix} \otimes_R k = \mathrm{rank}_k(\mathrm{id} \otimes_R k) + \mathrm{rank}_k \begin{pmatrix} -C_{-1} \\ \Psi_0 \end{pmatrix} \otimes_R k$$

$$= \mathrm{rank}_k(\mathrm{id} \otimes_R k) + \mathrm{rank}_k(\tilde{A}_{0|\mathrm{se}(\tilde{G}_\bullet(-1))_0} \otimes_R k) \ ,$$

$$\mathrm{rank}_k \begin{pmatrix} * & \begin{matrix} 0 & \mathrm{id} \end{matrix} \\ -\begin{pmatrix} -C_{-2} & 0 \\ \Psi_{-1} & C_{-1} \end{pmatrix} & 0 \\ \Phi_0 & \begin{pmatrix} -C_{-1} & 0 \\ \Psi_0 & C_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \otimes_R k$$

$$= \mathrm{rank}_k(\mathrm{id} \otimes_R k) + \mathrm{rank}_k \begin{pmatrix} -\begin{pmatrix} -C_{-2} & 0 \\ \Psi_{-1} & C_{-1} \end{pmatrix} & 0 \\ \Phi_0 & \begin{pmatrix} -C_{-1} \\ \Psi_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \otimes_R k$$

$$= \mathrm{rank}_k(\mathrm{id} \otimes_R k) + \mathrm{rank}_k(\tilde{\Gamma}_{0|\mathrm{se}(\tilde{F}_\bullet)_0} \otimes_R k) \ .$$

Hence the second and the third follow also from (2.12), (2.13). $\square$

Consider the mapping cone of (2.14).

$$(2.16) \quad \cdots \longrightarrow F_4 \oplus \tilde{F}_3 \xrightarrow{\partial_4} F_3 \oplus \tilde{F}_2 \xrightarrow{\partial_3} F_2 \oplus \tilde{F}_1 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \oplus \tilde{F}_0 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \oplus E \xrightarrow{\partial_0} I \longrightarrow 0$$

Since $\mathrm{Ker}(\tilde{\Gamma}_1{}^\vee) = \mathrm{Im}(\tilde{\Gamma}_0{}^\vee)$, the module

$$N := \tilde{\Gamma}_0(\min(F_\bullet)_0)$$
$$\cong \mathrm{Coker}(\tilde{\Gamma}_{1|\min(F_\bullet)_1} : \min(F_\bullet)_1 \longrightarrow \min(F_\bullet)_0)$$

has no free direct summand and E is the direct sum of N and the free module $V := \tilde{\Gamma}_0(\mathrm{se}(F_\bullet)_0)$. The above lemma implies

(1) $\mathrm{Im}(\partial_i)$ contains a free direct summand isomorphic to $\tilde{F}_{i-1}$ for $i \geq 3$,

(2) $\mathrm{Im}(\partial_2)$ contains a free direct summand isomorphic to $\tilde{A}_0(\mathrm{se}(\tilde{G}_\bullet(-1))_0) \oplus P_0(-1) \oplus \tilde{G}_1$,

(3) $\mathrm{Im}(\mathrm{pr} \circ \partial_1)$ contains a free direct summand isomorphic to $\tilde{\Gamma}_0(\mathrm{se}(\tilde{F}_\bullet)_0) \oplus P_0$, where $\mathrm{pr} : F_0 \oplus E \longrightarrow F_0 \oplus V$ denotes the natural projection.

Let $B_R(N) = (\bar{\gamma}^1; \bar{\gamma}^2; \cdots)$. Since $B_{R'}(E^{[2]}) = (\bar{\gamma}^2; \cdots)$ and $\mathrm{Coker}^{R'}(\tilde{A}_1) = \tilde{A}_0(\mathrm{se}(\tilde{G}'_\bullet)_0) \oplus E^{[2]}$ by (2.9), we have

$$P_{-1}(-1) \cong \tilde{A}_0(\mathrm{se}(\tilde{G}_\bullet)_0) \oplus R(-\bar{\gamma}^2) \ .$$

Besides,

$$\tilde{G}_{-1}(-1) \cong \min(\tilde{G}_\bullet(-1))_{-1} \oplus \tilde{A}_{-1}(\mathrm{se}(G_\bullet(-1))_{-1}) \oplus \tilde{A}_0(\mathrm{se}(G_\bullet(-1))_0) \ ,$$

$$\min(G_\bullet(-1))_{-1} \cong R(-\bar{\nu}) \oplus R(-\bar{\gamma}^1) \ ,$$

$$\tilde{\Gamma}_0(\mathrm{se}(\tilde{F}_\bullet)_0) \cong \tilde{A}_{-1}(\mathrm{se}(G_\bullet(-1)_{-1}) \oplus \tilde{A}_0(\mathrm{se}(G_\bullet)_0) \oplus R(-\bar{\nu}) \ .$$

for a suitable sequence of integers $\bar{\nu}$ by (2.11). Thus we see

$$\begin{aligned}
F_2 \oplus \tilde{F}_1 &= G_1(-1) \oplus G_2 \oplus \tilde{G}_0(-1) \oplus \tilde{G}_1 \\
&= R(-\bar{w}'' - 2) \oplus \tilde{F}_2 \oplus \tilde{A}_0(\mathrm{se}(\tilde{G}_\bullet(-1))_0) \oplus R(-\bar{\gamma}^2 - 1) \oplus P_0(-1) \oplus \tilde{G}_1 \ , \\
F_1 \oplus \tilde{F}_0 &= G_0(-1) \oplus G_1 \oplus \tilde{G}_1(-1) \oplus \tilde{G}_0 \\
&= R(-\bar{n}^2 - 1) \oplus R(-\bar{w}'' - 1) \oplus P_0(-1) \oplus R(-\bar{w}'' - 1) \oplus \tilde{G}_1 \\
&\qquad \oplus \tilde{G}_{-1}(-1) \oplus \tilde{G}_0 \\
&= R(-\bar{n}^2 - 1) \oplus R(-\bar{w}'' - 1) \oplus P_0(-1) \oplus R(-\bar{w}'' - 1) \oplus \tilde{G}_1 \\
&\qquad \oplus R(-\bar{\nu}) \oplus R(-\bar{\gamma}^1) \oplus \tilde{A}_{-1}(\mathrm{se}(G_\bullet(-1))_{-1}) \oplus \tilde{A}_0(\mathrm{se}(G_\bullet(-1))_0) \\
&\qquad \oplus \tilde{A}_0(\mathrm{se}(\tilde{G}_\bullet)_0) \oplus R(-\bar{\gamma}^2) \oplus P_0 \ , \\
F_0 \oplus V &= R(-\bar{n}^1) \oplus R(-\bar{n}^2) \oplus R(-\bar{w}'') \oplus P_0 \oplus \tilde{\Gamma}_0(\mathrm{se}(\tilde{F}_\bullet)_0) \ .
\end{aligned}$$

Cancelling out $\tilde{F}_{i-1}$ $(i \geq 3)$, $A_0(\mathrm{se}(\tilde{G}_\bullet(-1))_0) \oplus P_0(-1) \oplus \tilde{G}_1$, $\tilde{\Gamma}_0(\mathrm{se}(\tilde{G}_\bullet)_0)_0 \oplus P_0$

succesively, we can reduce the sequence (2.16) to

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow R(-\bar{w}'' - 2) \oplus R(-\bar{\gamma}^2 - 1) \\
&\xrightarrow{\omega_2} R(-\bar{n}^2 - 1, -\bar{w}'' - 1, -\bar{w}'' - 1) \oplus R(-\bar{\gamma}^1 -, \bar{\gamma}^2) \\
&\xrightarrow{\omega_1} R(-\bar{n}^1, -\bar{n}^2, -\bar{w}'') \oplus N \longrightarrow I \longrightarrow 0 .
\end{aligned}$$

Furthermore, from $\mathrm{Coker}^{R'}(\tilde{A}_1) \cong \tilde{A}_0(\mathrm{se}(\tilde{G}'_\bullet)_0) \oplus E^{[2]}$ follows

$$N'' \cong \mathrm{Coker}^{R''}(C_1) \cong \left(\mathrm{Coker}^{R'}(\tilde{A}_1)\right)^{[2]} \cong \left(E^{[2]}\right)^{[2]} \cong E^{[3]} \cong N^{[3]} .$$

Hence, $N^{[3]}$ has no free direct summand and $I^{[3]} \cong R'' \oplus N^{[3]}$.

References

[A1] Amasaki, M., *Application of the generalized Weierstrass preparation theorem to the study of homogeneous ideals*, Trans. AMS **317** (1990), 1–43.

[A2] ______ , *Free complexes defining maximal quasi-Buchsbaum graded modules over polynomial rings*, J. Math. Kyoto Univ. **33**, No. 1 (1993), 143–170.

[A3] ______ , *On the classification of homogeneous ideals of height two in polynomial rings*, Proc. 36th Sympos. Algebra, Okayama, July 29 – August 1, 1991, pp. 129 – 151.

[A4] ______ , *untitled*, in preparation.

Mutsumi Amasaki
Faculty of School Education, Hiroshima University, Shinonome 3-1-33 Minami-ku, Hiroshima 734, Japan
E-mail : amasaki@ue.ipc.hiroshima-u.ac.jp

F-REGULAR AND F-RATIONAL RINGS IN DIMENSION 2

渡辺 敬一 (東海大・理・情報数理)

標数 $p>0$ の環に対する Frobenius 写像の作用を利用して，rational singularity に擬される概念として，まず F-pure ring の概念が，次いで ideal の tight closure の概念を通じて F-regular, F-rational ring の概念が代数的に定義されている．

一方，標数 0 の代数多様体の特異点の理論に於て，rational singularity の概念から始まって，terminal, canonical, elliptic, log-terminal, log-canonical 等々の多くの特異点の概念が定義されている．

これらの概念の間の関係として，次の事実が成立することが証明または予想されている．

(1) 標数 0 の rational singularity の標数 $p\gg 0$ への reduction は F-rational であろう．逆に，無限個の標数 p への reduction が F-rational ならば rational singularity である．

(2) 標数 0 での log-terminal (resp. log-canoical) は canoical class の位数が有限のとき，標数 $p>0$ の F-regular (resp. F-pure) と対応するだろう (これに関しては canonical cover を使った証明があるので，canoical cover の次数を割り切らない p に対しては云えている ([W-4], [W-5]))．

本稿の目的は，

(1) 2 次元の F-regular ring は "標数 0" の場合には分類されているが，すべての標数 $p>0$ に対しても分類したい．(なお，これに関しては原伸生氏も研究していて完全な解答を得ている [Hara-2].) また，この分類の出発点として，"F-regular (正確には strongly F-regular) なら log-terminal" の任意標数での証明を紹介したい．

(2) 標数 0 の rational singularity の標数 $p\gg 0$ への reduction は F-rational か？という問に関して，2 次元 graded ring の時に，R. Fedder の結果があるが [F-2]，これに関して，どんな p で F-rational になるかまで含めた議論をして見たい．

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

2 次元の話なので，これ自身としては，かなり特殊な話題だが，高次元への一つのステップになれば幸いである．

§1. Preliminaries.

A は標数 $p>0$ の環とし，

$$F: A \longrightarrow A, \quad F(a)=a^p$$

を Frobenius 写像とする．以下 A は reduced と仮定するので，次の 3 つの写像

$$F: A \to A, \quad A^p \hookrightarrow A, \quad A \hookrightarrow A^{1/p}$$

を同一視する．また，F の始点と終点を区別するために，

$$F: A \to {}^1A, \quad F^e: A \to {}^eA$$

などと書く．また，A–加群 M に対して，

$$F^e: M \to F^e(M) := M \otimes_A {}^eA \; (= M \otimes_A A^{1/q})$$

と定義する $(q=p^e)$．$F^e(M)$ の A–加群の構造は ${}^eA$ により定義する．即ち，$a \in A, x \in M$ に対して

$$F^e(ax) = a^q x \quad (\text{または}, (ax)\otimes 1 = x \otimes (a^q)^{1/q})$$

となる．(以下に於て文字 q は必ず素数 p の巾 $q=p^e$ を表すこととする．) 例えば，イデアル $I=(a_1,\dots,a_n) \subset A$ に対して，$(A/I)\otimes_A A^{1/q} = A^{1/q}/(I.A^{1/q})$ より，

$$F^e(A/I) = A/I^{[q]}, \; I^{[q]} = (a_1^q, \dots, a_n^q)$$

となる．一般に，部分加群 $N \subset M$ に対して，

$$N^{[q]} := \mathrm{Im}(F^e(N) \to F^e(M)) \subset F^e(M)$$

とおくとき，N の (M内での) *tight closure* N^* を

$$x \in N^* \iff \exists c \in A^0, cF^e(x) \in N^{[q]} \quad \forall e \gg 0$$

と定義する．但し，$A^0 := A \backslash \bigcup \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}\text{ は }A\text{ の minimal prime}\}$ とする．特にイデアル $I \subset A$ に対し

$$a \in I^* \iff \exists c \in A^0, c^{1/q}a \in I.A^{1/q} \quad \forall e \gg 0$$

である．このとき N^* は M の部分加群，I^* は A のイデアルである．

$I^* = I$ (resp. $N^* = N$) となるとき，I は *tightly closed* (resp. N は M 内で tightly closed) という．

この tight closure の概念を用いて (weakly) F-regular ring, F-rational ring の定義がされる．

定義 (1.1). *(1) (Hochster-Huneke, [HH1]) A が weakly F-regular $\Longleftrightarrow$ 任意のイデアル $I \subset A$ が tightly closed*[1]*.*

(2) ([FW]) 局所環 A が F-rational $\Longleftrightarrow$ A のパラメーター・イデアルが[2] *tightly closed.*

"F-regular" の概念については，まだ歴史が浅い事もあって (それでも概念の発生から 6 年経っているが)，どの定義が一番良いか実験中の面があるように思われる．我々の議論に関しては，次の "strongly F-regular" が使い易い．但し，次の仮定の下で考える．

$$(\#) \qquad F \text{ は } finite\ map.$$

例えば A は体 k 上 essentially of finite type, k は完全体，または A は complete local, 剰余体 k は完全体のとき，この条件は満たされる．本稿では，常にこの条件を仮定する．

定義 (1.2). *(1) (Hochster-Roberts, [HR]) R が F-pure $\Longleftrightarrow$ $R \to R^{1/p}$ が R-module として split.*

(2) (Hochster-Huneke,[HH2]) R が strongly F-regular $\Longleftrightarrow$ $\forall\, c \in R^\circ$, $\exists\, q = p^e$, $R \to R^{1/q}$, $1 \to c^{1/q}$ が split as R-module.

注 1.3. (1) strongly F-regular $\Longrightarrow$ weakly F-regular $\Longrightarrow$ F-rational が成立し，更に，F-rational $\Longrightarrow$ normal, Cohen-Macaulay が云える．また weakly F-regular $\Longrightarrow$ F-pure であるが，F-pure と F-rational の間はどちらの包含関係も成立しない．

(2) A が Gorenstein のときには strongly F-regular と weakly F-regular とは同値な概念となり，更に A が局所環のときは F-rational とも同値である ([HH2]).

(3) ([HR],[HH1]) F-pure, F-regular (strongly, weakly) という性質は pure subring に遺伝する (subring $A \subset B$ が pure $\Longleftrightarrow$ $\forall M$, (A−module) $M \to M \otimes_A B$ が単射).

[1] A が F-regular $\Longleftrightarrow$ 任意の素イデアル $\mathfrak{p} \subset A$ に対し $A_\mathfrak{p}$ が weakly F-regular.)
[2] "一つの" でも "任意の" でも同値.

記号 A が normal domain, A の商体の submodule I が fractional divisorial ideal (= 有限生成 reflexive A−module) のとき，$I^{(m)}$ を I^m の reflexive hull とする．

また，A が整域で商体が K のとき，$(\ )^{1/p}$ で，$K^{1/p}$ の submodule と見る事を示す．

§ 2. F-regular Rings.

まず，$(A, \mathfrak{m})$ を normal local ring とする．F-regular, F-pure ring の概念は次の log-terminal, log-canonical singularity の概念と密接な関係がある．

定義 (2.1). *$f : X \to Y = Spec(A)$ を特異点の解消，f の exceptional divisor を $E = \cup_{i=1}^{s} E_i$ とおく．ord $cl(K_A) < \infty$ の仮定のもとに，*

$$K_X = f^*(K_Y) + \sum_{i=1}^{s} a_i E_i \tag{2.1.1}$$

とおくとき ($K_A^{(r)} = wA$ と生成元を指定するとき，$div_X(f^*w) = \sum_{i=1}^{s} r a_i E_i$ で a_i が定まる),

A が log-terminal (resp. log-canonical) singularity $\iff$ $a_i > -1$ (resp. $a_i \geq -1$) for every i.

これらの概念は標数 0 の概念だが，定義は (resolution の存在を前提として) 正標数でも可能である．

strongly F-regular $\Longrightarrow$ log-terminal (= quotient singularity),

F-pure $\Longrightarrow$ log-canonical

を次の形で示す．

定理 (2.2). *$(A, \mathfrak{m})$ が標数 $p > 0$ の local ring, $ord(cl(K_A)) = r < \infty$ とし，$f : X \longrightarrow Y := Spec(A)$ は proper birational map, X は normal, Gorenstein とする．*

$$K_X = f^*(K_Y) + \sum a_i E_i, \tag{2.2.1}$$

とおくとき，

(i) もし A が F-pure ならば $\forall a_i \geq -1$.

(ii) もしある $d \in \mathfrak{m}^t$ と (t は証明の中で指定) $q = p^e$ に対して $\alpha : A \to A^{1/q}, \alpha(1) = d^{1/q}$ が A–加群の準同型として *split* すれば $\forall a_i > -1$ である．

証明は若干長くなるので，最後に回す事にする．これを用いて 2 次元の strongly F-regular ring の分類をしよう．

(2.3) 2 次元の特異点は，まず特異点の解消の exceptional set の様子 (グラフ) で表現される．2 次元の log-terminal singularity は rational singularity であり，resolution の形が 代数閉体上で分類されている (渡辺公夫 [WK])．この分類は，当然標数にはよらず，標数 0 の quotient singularity と同じグラフである．(標数 0 の log-terminal singularity は canonical cover を取っても log-canonical = rational Gorenstein である事は任意次元の一般論である．2 次元の rational Gorenstein singularity はすべて分類されていて，$\mathbb{C}$ 上で以下の特異点と同型である．

(A_n) $$x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$$

(D_n) $$x^2 + y(z^2 + y^{n-2}) = 0 \quad (n \geq 4)$$

(E_6) $$x^2 + y^3 + z^4 = 0$$

(E_7) $$x^2 + y(y^2 + z^3) = 0$$

(E_8) $$x^2 + y^3 + z^5 = 0$$

2 次元 rational singularity の divisor class group, canonical class も resolution のグラフで決るので ([L])，標数には依存しない．従って，任意標数 p の strongly F-regular ring は，以上の 5 種類の特異点と**同じグラフを持つ** Gorenstein 環を canonical cover として持つ．

命題 (2.4). $(A, \mathfrak{m})$ が標数 $p > 0$ の *2* 次元 *normal local ring* で，*rational double point* と同じ *resolution* のグラフを持つとき，

(1) $p \geq 7$ なら A は *strongly F-regular,*

(2) $p = 5$ で，グラフが (E_8) 以外なら A は *strongly F-regular,*

(3) $p = 3$ で，グラフが $(E_6) - (E_8)$ 以外なら A は *strongly F-regular,*

(4) $p = 2$ で，グラフが (A_n) なら A は *strongly F-regular.*

[証明] 問題のグラフは，すべて "star-shaped" なので，[TW] により，A 上の filtration $\{F^n(A)\}_{n \geq 0}$ で，associated graded ring $G(A) := \oplus_{n \geq 0} F^n(A)/F^{n+1}(A)$ が同じ

グラフを持つ normal graded ring であるものが存在する．strongly F-regular graded ring の分類は [W-3] で終っていて，(2.4) に対応する normal graded ring は F-regular である．

さて，Gorenstein ring に関して strongly F-regular と F-rational は同値で，次の Lemma により，$G(A)$ が F-rational ならば A も F-rational である．これで (2.4) が証明された．

Lemma (2.5). $(A, \mathfrak{m})$ が標数 $p > 0$ の *local ring*，$\{F^n(A)\}_{n \geq 0}$ は A 上の *filtration* で，条件

(1) 各 F^n は A のイデアル，$F^1 = \mathfrak{m}$　*(2)* $F^i.F^j \subset F^{i+j}$,

(3) $\mathcal{R}_F := \oplus_{n \geq 0} F^n T^n \subset A[T]$ は *Noether* 環

を満たすとき，もし $G(A) := \oplus_{n \geq 0} F^n(A)/F^{n+1}(A)$ が *F-rational* なら A も *F-rational* である．

[証明]　$\dim A = d$ とする．$H^d_{\mathfrak{m}}(A)$ へのフロベニウス写像 F の作用で，$(0)^* = (0)$ を示せば良い．[TW] により，A の filtration は，$H^d_{\mathfrak{m}}(A)$ の filtration を引き起こし，その associated graded module は $H^d_{G_+}(G(A))$ と同型である．$H^d_{G_+}(G(A))$ に於て $(0)^* = (0)$ であるので，$H^d_{\mathfrak{m}}(A)$ に於て $(0)^* = (0)$ である事は容易に得られる．

Remark　同じ結論が一般の F-pure, (strongly) F-regular ring に対して成立するかどうかはわからない．

以上の議論をまとめると以下のようになる．

定理 (2.6). $(A, \mathfrak{m})$ が標数 $p > 0$ の *2* 次元 *strongly F-regular local ring*，$A/\mathfrak{m}$ が代数閉体のとき，

(1) A の特異点解消のグラフは，標数 *0* の *quotient singularity* のグラフのどれかに一致する．

(2) $p \geq 7$ のとき，逆に A の特異点解消のグラフが標数 *0* の *quotient singularity* のグラフならば，A は *strongly F-regular* である．

(3) $p \leq 5$ でも，同じグラフを持つ *normal graded ring* が *strongly F-regular* ならば A も *strongly F-regular* である．

Remark　以上の分類で $p = 2, 3, 5$ の場合がいくつか残されているが，最近 原伸生氏によって，次が示されている ([H-2])．

A が 2 次元 normal log-terminal singularity のとき，A が strongly F-regular $\Longleftrightarrow$ 同じグラフを持つ normal graded ring が strongly F-regular.

2 次元 normal graded ring で strongly F-regular なものの分類は [W-3] で終っているので，これで剰余体が代数閉体である 2 次元 strongly F-regular ring の分類は完全に終った事になる．なお，2 次元 normal F-pure ring の完全な分類に関しては，例えば M. Artin [A] にある例で，

$$x^2 + y^3 + z^5 + xyz = 0$$

は標数 $p \leq 5$ でも F-pure だが，対応する associated graded ring は $p \leq 5$ では F-pure にならない．

§ 3. 2 次元 F-rational ring, $H^1(X, O_X)$ と tight closure の関係

この節では，$A = \oplus_{n \geq 0} A_n$ を体 $k = A_0$ 上の 2 次元 normal graded ring, $\mathfrak{m} = A_+ = \oplus_{n>0} A_n$ とおく．

$f : X \to Y := \mathrm{Spec}(A)$ を特異点の解消，$E := f^{-1}(\mathfrak{m})$ とおくとき[3]，A が rational singularity という性質は $H^1(X, O_X) = 0$ で定義されるが，

A が標数 0 の rational singularity $\Longrightarrow$ A の標数 $p > 0$ での reduction は $p \gg 0$ のとき F-rational か？

という問は次の完全系列

(3.1.1) $$0 \to H^1(X, O_X) \to H^1(X - E, O_X) \cong H^2_{\mathfrak{m}}(A) \to H^2_E(X, O_X) \to 0$$

により (左端の 0 は Grauert-Riemenschneider 消滅定理 － 2 次元では excellent local ring に対して成立する － による)，

$H^2_E(X, O_X)$ への Frobenius 写像の作用は $p \gg 0$ のとき単射か？

という問に一般化される．この問は

$H^2_{\mathfrak{m}}(A)$ での (0) の tight closure は $p \gg 0$ のとき $H^1(X, O_X)$ と一致するか？

という問と同値で，また，この問は $A = \oplus_{n \geq 0} A_n$ が graded ring のとき，

Frobenius 写像 $F : H^2_{\mathfrak{m}}(A)_{-n} \to H^2_{\mathfrak{m}}(A)_{-pn}$ は $n > 0, p \gg 0$ のとき単射か？という問と同値である．2 次元の graded ring に対しては Fedder によりこの問は肯定的だが，

[3] 2 次元での特異点の解消の存在は [L-2] で示されている．

p がどの位大きければ良いか？は証明に derivation を用いているために良くわからない．この問題に対するささやかな考察を述べたい．

命題 (3.1). A が標数 $p>0$ のとき，上の記号の下に，次は同値

(1) $H^2_E(X,O_X)$ *への Frobenius 写像の作用は単射.*

(2) $H^2_{\mathfrak{m}}(A)$ *での (0) の tight closure は* $H^1(X,O_X)$ *と一致する.*

[証明] まず，我々の仮定の下に，A の test ideal が $\mathfrak{m}$−primary であることに注意する ([HH-1])．即ち，$\exists J\subset A$, $\mathfrak{m}$−primary で，$x\in(0)^*$ (tight closure) のとき $J.x=(0)$.

また，[W-1] により (2 次元の場合 Spec(A) の graded blowing-up は "cyclic quotient singularity" しか持たないので),

$$H^1(X,O_X)\cong\oplus_{n\geq0}H^2_{\mathfrak{m}}(A)_n,\quad H^2_E(X,O_X)\cong\oplus_{n<0}H^2_{\mathfrak{m}}(A)_n \tag{3.1.2}$$

が云えている．

さて，$x\in H^2_{\mathfrak{m}}(A)_n$ に対して $F(x)\in H^2_{\mathfrak{m}}(A)_{pn}$ だから，$H^1(X,O_X)\subset(0)^*$ は明らかである．また，$F(x)=0\Longrightarrow x\in(0)^*$ も明らかである．ゆえに，(1) を仮定して (2) を示せば十分である．

$x\in H^2_{\mathfrak{m}}(A)_n, n<0$ とすると，$F^e(x)\in H^2_{\mathfrak{m}}(A)_{qn}$, $(q=p^e)$．もし $F^e(x)\neq0$ ならば，$\exists s,\mathfrak{m}^sF^e(x)\neq0,\mathfrak{m}^{s+1}F^e(x)=(0)$ 即ち，$\exists a\in A$, homogeneous で，$aF^e(x)\neq0$ かつ $H^2_{\mathfrak{m}}(A)$ の socle に含まれる．一方，$H^2_{\mathfrak{m}}(A)$ の socle は有限個の同次元で生成されている．その最小次数を m と置くと，$\deg a=m-qn$ となる．しかし，$q\gg0$ のとき $a\in J$ だから $aF^e(x)\neq0\Longrightarrow x\notin(0)^*$. ゆえに (1) $\Longrightarrow$ (2) が示された．

定理 (3.2). *[F-2]* A *が標数 0 の 2 次元 normal graded ring のとき，*$p\gg0$ *に対して* A *の標数* p *への reduction に於て* $H^2_{\mathfrak{m}}(A)$ *での (0) の tight closure は* $H^1(X,O_X)$ *と一致する.*

証明には A の derivation module $Der_k(A)$ を使う．A が複雑になると $Der_k(A)$ の構造を調べるのも大変なので，与えられた A に対して p がどの位大きければ良いかはわからない．そこで，もっと具体的に (3.1) の同値な条件が成り立つための条件を与えたい．

(3.3) $X:=\mathrm{Proj}(A)$ とおくと，ある ample 分数 divisor $D\in\mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ によって，

$$A=R(X,D):=\oplus_{n\geq0}H^0(X,O_X(nD)).T^n \tag{3.3.1}$$

と表わされる (Demazure, [W-1] 参照). ゆえに, $F : H^2_{\mathfrak{m}}(A)_{-n} \to H^2_{\mathfrak{m}}(A)_{-pn}$ は

(3.3.2) $$F : H^1(X, O_X(-nD)) \to H^1(X, O_X(-pnD))$$

となる. ここで, X 上の rank $p-1$ の vector bundle $\mathcal{E}_n$ を,

(3.3.3) $$0 \to O_X(-nD) \to [O_X(-pnD)]^{1/p} \to [\mathcal{E}_n]^{1/p} \to 0$$

で定義する. このとき,

命題 (3.4). *(1)* 上の $\mathcal{E}_n$ は *locally free.*

(2) $n > 0$ に対し $H^0(X, \mathcal{E}_n) \cong \mathrm{Ker}\,[F : H^2_{\mathfrak{m}}(A)_{-n} \to H^2_{\mathfrak{m}}(A)_{-pn}]$.

[証明] $-nD = [-nD] + G$, ($[-nD]$ は $-nD$ の整数部分, $G = \sum r_i P_i$, $P_i \in X, 0 < r_i < 1$, $O_X(-nD) = O_X([-nD]) = \mathcal{L}$ とおくとき, $O_X(-nD) \to [O_X(-pnD)]^{1/p}$ は $\mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes_{O_X} [O_X(B)]^{1/p}$, $B = [pG] = \sum [pr_i] P_i$ である. $[pr_i] < p$ より, この写像は各点の近傍で split する. また, (3.3.3) より完全系列

(3.4.4)
$$H^0(X, [O_X(-pnD)]^{1/p}) \to H^0(X, [\mathcal{E}_n]^{1/p})$$
$$\to H^1(X, O_X(-nD)) \to H^1(X, [O_X(-pnD)]^{1/p})$$

ができる. D が ample より $H^0(X, O_X(-nD)) = 0$ $(\forall n > 0)$ だから, $H^0(X, [\mathcal{E}_n]^{1/p}) \cong \mathrm{Ker}\,[(H^1(X, O_X(-nD)) \to H^1(X, [O_X(-pnD)]^{1/p}))]$ が得られる.

これから A が rational singularity の時を考えたいので $X = \mathbb{P}^1$ とする. また, $k(X) = k(x), div_X(x-a) = (a) - (\infty)$ とおく $(a \in k)$. まず, $[O_X(n)]^{1/p}$ の O_X−Module としての分解を見よう (同じ事なので, $O_X(n)$ の $[O_X]^p$−Module としての分解と同一視する).

Lemma (3.5). $n = mp + t\,(0 \le t < p)$ とおくとき,

(1) $[O_X(n)]^{1/p} \cong [O_X(m)]^{\oplus(t+1)} \oplus [O_X(m-1)]^{\oplus(p-t-1)}$.

(2) $f \in k[x], deg\, f = n \ge 0$ に対して, $B := div_X(f) + n(\infty) \ge 0$ とおくとき, $O_X \hookrightarrow [O_X(B)]^{1/p}$ が O_X−*Module* として *split* $\iff$ $n < p$ または $p \le n < 2p-1$ かつ $f(x)$ の $x^{n+1-p}, \ldots, x^{p-1}$ の係数のとれかが *0* でない.

[証明] (1) $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$, $U_0 = \mathrm{Spec}(k[x]), U_1 = \mathrm{Spec}(k[x^{-1}]), O_X(n) = O_X(n(\infty))$ とすると, $k[x^p]$ 上の基底は $1, x, \cdots, x^{p-1}$, $k[x^{-p}]$ 上の基底は $x^n, x^{n-1}, \cdots, x^{n-p+1}$ だから, 例えば $x^i k[x^p]$ と $x^n k[x^{-p}] = x^i(x^{mp} k[x^{-p}])$ で $[O_X(m)]^p$ ができる. 以下同様.

(2) 与えられた埋め込み写像は，U_0, U_1 上でそれぞれ

$$k[x^p] \subset \frac{1}{f}k[x], \quad k[x^{-p}] \subset \frac{t^n}{f}k[x^{-1}]$$

となるので，それぞれの基底を計算して結論を得る．

一方，F-pure ring の議論から，次が得られている．

命題 (3.6). *([W-2],(2.3))* $A = R(\mathbb{P}^1, D)$ で *((3.3) 参照)* $D > 0$ なら A は *F-rational.*

これらを利用して，いくつかの場合の F-rationality を示そう．

命題 (3.7). $A = R(\mathbb{P}^1, D)$,

$$D - [D] = \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i}{q_i}, \ (\text{但し}, p_i, q_i \in \mathbb{Z}, q_i \geq 2, 0 < p_i < q_i)$$

もし $r \leq 3$ で A が *rational singularity* なら $p > LCM(q_i | i = 1, \cdots, r)$ のとき，A は *F-rational.*

[証明]　$\mathbb{P}^1$ の 3 点は $\{\infty, 0, -1\}$ とできる．$r \leq 2$ のときは，normal semigroup ring で $k[x, y]$ の直和因子なので F-regular である．$r = 3$ のとき，nD を D と思って，

$$(*) \qquad F : H^1(X, O_X(-D)) \to H^1(X, O(-pD))$$

が単射であることを示せば良い $(X = \mathbb{P}^1)$.

$$(3.7.1) \qquad -D = r_1(\infty) + r_2(0) + r_3(-1) - s(\infty)$$

$(0 \leq r_1, r_2, r_3 < 1)$ とおくとき，D が ample より $\deg -D < 0$. また，$s \geq 3$ とすると (3.6) より (*) は単射，$s = 1$ のとき $H^1(X, O_X(-D)) = 0$ より，$s = 2$ として十分．$[-pD] = B - ps(\infty) = B - 2p(\infty)$ とおくとき，$\deg B < 2p$ である．かつ，$r_1 + r_2 + r_3 \leq 2 - \frac{1}{M}$ のとき，$p > M$ なら $\deg B < 2p - 1$ であり，(3.5) (2) より (*) は単射である．

例 (3.8). N を素数とし，$D = 1/N(0) + 1/N(-1) - 1/N(\infty)$ とおくと，

$$A = R(\mathbb{P}^1, D) = k[t^{-1}T^N, (t+1)^{-1}T^N, t^{-1}(t+1)^{-1}T^{N+1}, \cdots, t^{-1}(t+1)^{-1}T^{2N-1}]$$

は rational singularity で，$p \neq N$ のとき F-rational, $p = N$ のときのみ F-rational でない．実際，$p = N$ のとき $\mathcal{E} \cong O_X \oplus O_X(-1)^{\oplus(p-2)}$ である．

まだ非常に特殊な場合にしか結果が得られていないのだが，一般の graded ring に使うためには，vector bundle $\mathcal{E}$ の分解の様子をもっと詳しく見る必要がありそうだ．また，高次元の場合に，面白い vector bundle が出て来ないかと期待している ($A = R(\mathbb{P}^n, D)$ とおくとき，同様に $\mathcal{E}_n$ が定義でき，

$$H^{d-1}(X, \mathcal{E}_n) \cong \mathrm{Ker}\,[F : H^{d+1}_{\mathfrak{m}}(A)_{-n} \to H^{d+1}_{\mathfrak{m}}(A)_{-pn}].$$

となるのだから，F が単射でなければ，line bundle の直和に分解しない vector bundle が得られる)．

4．定理 2.2 の証明

次の 5 つのステップに分けて行う．f は proper, birational より，ある Y の open set U, codim $(Y \setminus U) \geq 2$ の上で同型である．また，$K_A^{(i)}$ は reflexive だから，

$$(K_A)^{(i)} = H^0(U, O_Y(iK_Y)) = H^0(U, (\omega_Y)^{\otimes i}) \quad \text{である．}$$

(1) 一般に標数 $p > 0$ の normal variety X の dualizing sheaf ω_X が invertible のとき，

$$\mathrm{Hom}_{O_X}((O_X)^{1/q}, O_X) \cong ((\omega_X)^{\otimes(1-q)})^{1/q} = O_X((1-q)K_X)^{1/q}.$$

証明は finite map $O_X \hookrightarrow (O_X)^{1/q}$ に対する adjunction formula を使って，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{O_X}(O_X^{1/q}, O_X) &\cong Hom_{O_X}(O_X^{1/q}, \omega_X) \otimes_{O_X} \omega_X^{-1} \\ &\cong (\omega_X)^{1/q} \otimes \omega_X^{-1} \cong (O_X((1-q)K_X))^{1/q}.\end{aligned}$$

(2) $(K_A)^{(r)} = wA$ とおくと，$(K_A)^{(mr+i)} = w^m K_A^{(i)}$ と書ける．今，a_i の定義より $(\omega_X)^{\otimes r} = O_X(rK_X) = O_X(r(f^*(K_Y) + \sum a_i E_i)) = f^*w.O_X(r \sum a_i E_i)$ である．

さて，$a_i > 0$ なら目的の不等式が成立しているので，$-rK_X \geq 0$ となるように，

(4.2.2) $$X' := X - \bigcup_{a_i > 0} E_i$$

とおく．こうおくと，

$$
\begin{aligned}
w^{-1}A = K_A^{(-r)} &= H^0(X', w^{-1}O_{X'}) \subseteq H^0(X', w^{-1}O_{X'}(-rK_{X'} + f^*(K_Y))) \\
&= w^{-1}H^0(X', O_{X'}(-r\sum a_iE_i)) \subset w^{-1}H^0(U, O_Y) = w^{-1}A
\end{aligned}
$$

となるので，$m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$ に対して同様に

$$H^0(X', O_{X'}(-mrK_{X'})) = w^{-m}A, \tag{4.2.3}$$

$$H^0(X', O_{X'}((-mr+i)K_{X'})) = w^{-m}H^0(X', O_{X'}(-iK_{X'})) \tag{4.2.4}$$

が成立する．また，$c \in A, c \neq 0$ を，

$$H^0(X', O_{X'}(iK_{X'})) \supset cK_A^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \cdots, r-1) \tag{4.2.5}$$

が成立するように取る．

(3) さて，A が F-pure ならば $\forall a_i \geq -1$ を示そう．

$\phi : A^{1/q} \to A$ を splitting としよう．$\mathrm{Hom}_A(A^{1/q}, A) \cong K_A^{(1-q)}$ だから，$\phi \in K_A^{(1-q)}$ とも思う．$1 - q = -mr + i$, $0 \leq i < r$ とすると，$K_A^{(1-q)} = w^{-m}K_A^{(i)}$ で，$\phi = w^{-m}c^{-1}\psi, \psi \in H^0(X', O_{X'})$ と書ける．

$a_i < -1$ とすると，$ra_i \in \mathbb{Z}$ だから，$a_i \leq -1-1/r$ で，$-mra_i \geq -mr(-1-1/r) = mr + m > q = mr - i + 1$ であり，$div_{X'}(c)$ の E_i−成分を s とおくと，$-mra_i \geq q + s$ となるように $q \gg 0$ を取ることができる．

さて，E_i の generic point ξ_i で E_i の定義方程式を x_i とすると，

$K_X = f^*(K_Y)(\sum a_iE_i)$ より，ξ_i に於て $O_{X'}((1-q)K_{X'})$ の生成元を κ とすると，$\phi = (x_i)^u\kappa$, $u = mr+m-s+div_{E_i}(\psi) > q$ となる．しかし，ϕ は U 上で splitting を与えているから，ξ_i に於ても splitting を与えなければならない．一方，$\phi\iota(A) \subset \kappa((x_i^qA)^{1/q}) \subset x_iA$ となり ϕ は splitting を与え得ない（ι は埋め込み写像，$A \hookrightarrow A^{1/q}$）．この矛盾は $a_i < -1$ より起ったものだから，$a_i \geq -1$ でなければならない．

A が strongly F-regular のとき，任意の $d \neq 0 \in A$ に対して $A \to A^{1/q}$, $1 \to d^{1/q}$ が splitting を持つが，d の E_i での 0 の位数が c のものより大きいように d を選べば $a_i \geq -1$ も示せる．

REFERENCES

[A] M. Artin, Coverings of the rational double points in characteristic p, "Complex Analysis and Algebraic Geometry", 11-22, Cambridge Univ. Press, 1977.

[F-1] Fedder, R., F-purity and rational singularity in graded complete intersection rings, Trans. A.M.S., **301** (1987), 47-62.

[F-2] Fedder, R., A Frobenius Characterization of Rational Singularity in 2 Dimensional Graded Rings, preprint.

[FW] Fedder, R. and Watanabe, K.-i.: A characterization of F-regularity in terms of F-purity, in "Commutative Algebra", Proc. Microprogram MSRI 1987, Publ. **15** (1989), 227-245, Springer.

[HH-1] Hochster, M. and Huneke, C.: Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem, J. of Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31-116.

[HH-2] Hochster, M. and Huneke, C.: Tight closure and strong F-regularity, Mém. Soc. Math. France **38** (1989), 119-133.

[HR] Hochster, M. and Roberts, J.L.: The purity of the Frobenius and local cohomology, Adv. in Math. **21** (1976), 117-172.

[Ha-1] Hara, N., F-regularity and F-purity of graded rings, to appear in J. of Alg.

[Ha-2] Hara, N., Classification of 2-dimensional F-regular rings, in preparation.

[KMM] Kawamata, Y., Matsuda, K. and Matsuki, K.: Introduction to the Minimal Model Problem, Adv. Studies in Pure Math. **10** (1987), 283-360, Algebraic Geometry, Sendai, 1985.

[L] J. Lipman, Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization, Publ. Math. IHES **36** 1969, 195-280.

[MR] Mehta, V.B., and Ramanathan, A.: Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties, Ann. of Math., **122** (1985), 27-40.

[MS] V.B. Mehta and V. Srinivas, Normal F-pure surface singularites, J. of Alg. **143** (1991), 130–143.

[S] Smith, K.E., F-rational rings have rational singularities, preprint.

[TW] Tomari, M., Watanabe, K.-i.: Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with "star-shaped" resolution, Publ. RIMS. Kyoto Univ.

25, (1989) 681-740

[WK] Kimio Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities, I, Math. Ann. **250** (1980), 65-94.

[W-1] Watanabe, K.-i.: Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings , Nagoya Math. J. **83**,(1981) 203-211

[W-2] Watanabe, K.-i.: Study of F-purity in dimension two, "Algebraic Geometry and Commutative Algebra", in Honor of M. Nagata, 791-800 (1987).

[W-3] Watanabe, K.-i.: F-regular and F-pure normal graded rings, J. of Pure and Appl. Alg. **71** (1991), 341-350.

[W-4] Watanabe, K.-i.: 特異点の性質の Frobenius 写像による特徴付け, 代数学シンポジウム報告集, 仙台, 1993 年 7 月.

[W-5] Watanabe, K.-i., F-regular and F-pure rings vs. log-terminal and log-canonical singularities, in preparation.