研 究 集 会

第16回可換環論シンポジウム

1994 年 11 月 8 ～ 11 日

於　近江八幡国民休暇村

平成 6 年度文部省科学研究費総合 A

（課題番号　06302002　代表　吉野　雄二）

序

この報告集は，第１６回可換環論シンポジウムの講演の記録です．本研究集会は，科研費総合Ａ（代表・吉野雄二）を活用して，１９９４年１１月８日から１１日にかけて近江八幡国民休暇村において開催されました．のべ７０名近くの研究者・院生が参加し，合計１９の非常に興味ある講演が行われました．

ここに，ご講演ならびに原稿の執筆を通じて報告集の作成にご協力下さいました方々に心から感謝いたします．

１９９５年1月

吉野雄二，宮崎充弘

目次

A note on the analytic spread of the ideal of maximal minors

宮崎 充弘　　(京都教育大)

1　序

ある環の元を成分とする行列 U に対し，$I_t(U)$ で U の t 次小行列式全体で生成された ideal を表す．また，$I_k(U) \neq 0$, $I_{k+1}(U) = 0$ をみたす k に対し，$I := I_k(U)$ を ideal of maximal minors と呼ぶことにする．ここでは，下で述べるような行列 U に対し，その ideal of maximal minors の analytic spread 等について考察する．

B は無限体，m, n, r は $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$ をみたす整数，a_1, a_2, $\ldots$, a_r, b_1, b_2, $\ldots$, b_rは $1 \leq a_1 < \cdots < a_r \leq m$, $1 \leq b_1 < \cdots < b_r \leq n$ をみたす整数であるとする．このとき，

$$
(1.1) \qquad \left.\begin{array}{r} I_i(\text{first } a_i - 1 \text{ rows}) = 0 \\ I_i(\text{first } b_i - 1 \text{ columns}) = 0 \end{array}\right\} \qquad (i = 1, \ldots, r+1)
$$

(ただし，$a_{r+1} := m+1$, $b_{r+1} := n+1$) をみたす $m \times n$ 行列の中で，もっとも普遍的なものを考え，それを x とする．すなわち，x は (1.1) をみたし，U が B-algebra S の元を成分に持つ $m \times n$ 行列で (1.1) をみたすものであれば，B-algebra homomorphism $B[x] \to S$ で，x を U に写すものがただ一つ存在するようなものであるとする．ただし，$B[x]$ は x の成分全体で生成された B-algebra.

このような x の構成方法としては，generic な行列（すなわち，独立な不定元を成分にもつ行列）の剰余環における像としてとらえる方法と，適当な型の generic な行列をいくつかかけ合わせたものを並べたものとしてとらえる方法がある（このあたりのことに関しては，[HE], [HR], [BV] などを参照して下さい）が，ここでは前者の方法をとることにする．

X を generic な $m \times n$ 行列，$B[X]$ を B 上 X の成分で生成された多項式環とすれば，$B[X]$ は B 上 $\Delta(X)$ で生成された graded ASL であることが知られている（[DEP1], [BV] 等参照）．ただし，

$$
\Delta(X) := \{[c_1, c_2, \ldots, c_s | d_1, d_2, \ldots, d_s] \mid s \leq \min\{m, n\},\; 1 \leq c_1 < \cdots < c_s \leq m,\ 1 \leq d_1 < \cdots < d_s \leq n\}
$$

であり，

$$
[c_1, c_2, \ldots, c_s | d_1, d_2, \ldots, d_s] \leq [c'_1, c'_2, \ldots, c'_{s'} | d'_1, d'_2, \ldots, d'_{s'}] \iff s \geq s',\ c_1 \leq c'_1, \ldots, c_{s'} \leq c'_{s'}, d_1 \leq d'_1, \ldots, d_{s'} \leq d'_{s'}
$$

により$\Delta(X)$ に順序を定義する．また，$[c_1, c_2, \ldots, c_s | d_1, d_2, \ldots, d_s]$ に $\det(X_{c_i d_j})_{i,j}$ を対応させて，$\Delta(X)$ を $B[X]$ に埋め込む．

今，
$$\delta := [a_1, a_2, \ldots, a_r | b_1, b_2, \ldots, b_r] \in \delta(X)$$
$$\Delta(X;\delta) := \{\gamma \in \Delta(X) \mid \gamma \geq \delta\}$$
$$\Omega := \Delta(X) \setminus \Delta(X;\delta)$$
$$A := B[X]/\Omega B[X]$$
とおけば，Ω は $\Delta(X)$ の poset ideal なので，A は B 上 $\Delta(X;\delta)$ で生成された graded ASL になる．A における X の像を x とすれば，Laplace 展開により，x が (1.1) をみたす $m \times n$ 行列の中で，もっとも普遍的なものであることがわかる．

$1 \leq u \leq m$ をみたす整数 u を固定し，x の第 1 行から第 u 行から成る $u \times n$ 行列を U とする．以下では，この U の ideal of maximal minors I の analytic spread 等について考察する．なお，$a_k \leq u < a_{k+1}$ をみたす k をとると，A の構成法から $I_k(U) \neq 0$，$I_{k+1}(U) = 0$．従って，$I = I_k(U)$ である．

2 Analytic spread

A は graded ring なので，$A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ と表し，$\mathfrak{m} := A_+ = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ とおく．

Northcott-Rees [NR] は，剰余体が無限体であるような local ring $(R, \mathfrak{n})$ の ideal $\mathfrak{a}$ に対してその analytic spread $\ell(\mathfrak{a})$ を
$$R/\mathfrak{n} \otimes \mathrm{Gr}_{\mathfrak{a}}(R) = R/\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^2/\mathfrak{n}\mathfrak{a}^2 \oplus \cdots$$
の次元と定義し，それが $\mathfrak{a}$ の任意の minimal reduction の極小生成系の元数と一致することを示した．また，$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ に含まれる ideal であるときに，$(\mathfrak{b} + \mathfrak{n}\mathfrak{a})/\mathfrak{n}\mathfrak{a} (\subseteq \mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})$ で生成される $R/\mathfrak{n} \otimes \mathrm{Gr}_{\mathfrak{a}}(R)$ の ideal を$\overline{\mathfrak{b}}$であらわすと，

$$\mathfrak{b}\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{n+1} \Longleftrightarrow \overline{\mathfrak{b}} \supseteq (R/\mathfrak{n} \otimes \mathrm{Gr}_{\mathfrak{a}}(R))_+^{n+1} \tag{2.1}$$

であることも本質的に示している．ここでは A を $\mathfrak{m}$ で localize して得られる局所環につて考えたいのだが，上記のことから，reduction を homogeneous な ideal に限れば，A のまま話をしても良いことがわかる．

$$\Theta := \{\gamma \in \Delta(X) \mid [a_1, a_2, \ldots, a_k | b_1, b_2, \ldots, b_k] \leq \gamma$$
$$\leq [u - k + 1, \ldots, u | n - k + 1, \ldots, n]\}$$
とおけば，Θの元はすべて k次の homogeneous element で $I = \Theta A$ なので，容易にわかるように
$$A/\mathfrak{m} \oplus I/\mathfrak{m}I \oplus I^2/\mathfrak{m}I^2 \oplus \cdots \simeq B[\Theta]$$
である．ここで，α，βが$\Delta(X)$ の比較不可能な 2 元であるとき，ASL $B[X]$ における$\alpha\beta$の standard representation は
$$\alpha\beta = \sum_i b_i \gamma_{i1}\gamma_{i2} + \sum_j b'_j \delta_j$$
の形をしていて，各 i (j) に対してγ_{i1}とγ_{i2} (δ_j) の行（列）番号の集合の multi-set としての和集合はαとβの行（列）番号の集合の multi-set としての和集合に一致している ([DEP1], [BV])．従って，θ_1とθ_2がΘの比較不可能な 2 元であるとすると，$\theta_1\theta_2$の standard representation に現れる minor は Uの minor で，$k+1$ 次以上の Uの minor は（A において）0 なので，$\theta_1\theta_2$の A における standard representation は
$$\theta_1\theta_2 = \sum_i b_i \gamma_{i1}\gamma_{i2} \qquad (\gamma_{ij} \in \Theta)$$

の形をしていることがわかる．このことと [DEP2, Proposition 1.1] により，$B[\Theta]$ は A の sub-ASL であることがわかる．よって

$$\ell(I) = \dim B[\Theta] = \mathrm{rank}\Theta + 1$$

なので，Θの rank を計算することにより次を得る．

定理 2.2 *I の analytic spread $\ell(I)$ は $k(u+n-k+1) - \sum_{i=1}^{k}(a_i + b_i) + 1$ である．*

3 Reduction number

以下では，$B[\Theta]$ の次数を $1/k$倍して，Θの各元の次数を 1 にする．また，$B[\Theta]_+$を $\mathfrak{n}$ で表す．さらに，$\ell(I)$ を lで表すことにする．(2.1) により，A の homogeneous ideal Jが Iの minimal reduction であれば，Jは k次（$B[\Theta]$ で考えれば 1 次）の元で生成され，その極小生成系は $B[\Theta]$ の homogeneous sop of degree 1 をなす．また逆に，$B[\Theta]$ の homogeneous sop of degree 1 は A において Iの minimal reduction を生成する（[NR, §2 Theorem 1] の証明参照）．

Jが A の homogeneous ideal で，Iの minimal reduction であるとき，$r_J(I)$ で Jに関する I の reduction number $\min\{n \mid JI^n = I^{n+1}\}$ を表す．$v_1, v_2, \ldots, v_l$が Jの極小生成系であれば，(2.1) により

$$\begin{aligned} r_J(I) &= \min\{n \mid (v_1, v_2, \ldots, v_l) \supseteq \mathfrak{n}^{n+1}\} \\ &= \max\{n \mid (B[\Theta]/(v_1, v_2, \ldots, v_l))_n \neq 0\} \\ &= a(B[\Theta]/(v_1, v_2, \ldots, v_l)) \end{aligned}$$

である（[GW, Definition (3.1.4)] 参照）．ここで，Θは distributive lattice なので，$B[\Theta]$ は Cohen-Macaulay．従って [GW, Remark (3.1.6)] により

$$r_J(I) = a(B[\Theta]) + l$$

であることがわかる．

一方 [Sta2, 4.4 Theorem] の証明により，Rが体上の Cohen-Macaulay graded ring であれば

$$F(K_R, \lambda) = (-1)^{\dim R} F(R, \lambda^{-1}) \tag{3.1}$$

（[Sta2] では次数がずれているので注意．また，$F(-,-)$ は Poincaré series を，K_Rは Rの canonical module を表す）なので，a-invariant を計算するためには Hilbert function が同じであるような別の Cohen-Macaulay graded ring を用いて良いことがわかる．

一般に distributive lattice Dに対し，Dの join irreducible element（$y \lessdot x$ をみたす $y \in D$ が丁度一つだけ存在するような $x \in D$）全体を Pで表せば，poset として

$$D \simeq J(P) := \{J \mid J \text{は} P \text{の poset ideal}\}$$

であることが知られている．さらに，$\{X_\alpha\}_{\alpha \in P \cup \{-\infty\}}$を不定元の族とし，$I \in J(P)$ に対して $\varphi(I) := X_{-\infty} \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$と定義すると，

$$\mathcal{R}_B(D) := B[\varphi(I) \mid I \in J(P)] \; (\subseteq B[X_\alpha \mid \alpha \in P \cup \{-\infty\}])$$

は B上 Dで生成される graded ASL である [Hib]．ただし，$\mathcal{R}_B(D)$ の次数は $X_{-\infty}$の次数で入れる．

$$M := \{(n_\alpha | \alpha \in P \cup \{-\infty\}) \in \boldsymbol{N}^{\#P+1} \mid \alpha \leq \beta \Longrightarrow n_\alpha \geq n_\beta\}$$

とおけば，Mは $\boldsymbol{N}^{\#P+1}$の submonoid で，

$$\mathcal{R}_B(D) = B[M] := B[X^\omega \mid \omega \in M]$$

であることは容易にわかる．

ここで Mは $\boldsymbol{R}_{\geq 0}M \cap \boldsymbol{N}^{\#P+1} = M$をみたすので，[Sta1, Theorem 4.1] により

$$F(B[M], \lambda^{-1}) = (-1)^{\dim B[M]} \sum_{\omega \in \mathrm{int}(\boldsymbol{R}_{\geq 0}M) \cap M} \lambda^\omega$$

であり，$\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_{\geq 0}M) \cap M = \{(n_\alpha | \alpha \in P \cup \{-\infty\}) \in \boldsymbol{N}^{\#P+1} \mid n_\alpha > 0,\ \alpha < \beta \Longrightarrow n_\alpha > n_\beta\}$ なので，(3.1) により

$$\begin{aligned} a(B[M]) &= -\min\{\deg X^\omega \mid \omega \in \mathrm{int}(\boldsymbol{R}_{\geq 0}M) \cap M\} \\ &= -(\mathrm{rank}P + 2) \end{aligned}$$

であることがわかる（X^ωの次数は $X_{-\infty}$の次数で定義されていることに注意）．特に Dとして我々のΘをとれば，$B[\Theta]$ と $\mathcal{R}_B(\Theta)$ は共通の Hilbert function をもつ Cohen-Macaulay 環なので，

$$a(B[\Theta]) = a(\mathcal{R}_B(\Theta)) = -(\mathrm{rank}P + 2).$$

行番号と列番号を分けて考えればわかるように，Θは

$$\Theta = D_1 \times D_2$$

と二つの distributive lattices D_1と D_2の直積で表されている．$(x_1, x_2) \in D_1 \times D_2$が join irreducible であるための必要十分条件は，x_1が D_1の join irreducible element であり，x_2が D_2の minimal element であるか，または，x_1が D_1の minimal element であり，x_2が D_2の join irreducible element であることであるので，P_iで D_iの join irreducible element 全体を表せば $(i = 1, 2)$，Θの join irreducible element 全体の集合は P_1と P_2の disjoint union と poset として同型である．よって，

$$a(B[\Theta]) = -(\max\{\mathrm{rank}P_1, \mathrm{rank}P_2\} + 2).$$

D_1と D_2は同じ形をしているので，以下では D_1について考える．

$$\begin{aligned} &D_1 = \{[c_1, c_2, \ldots, c_k] \mid 1 \leq c_1 < \cdots < c_k \leq u, a_i \leq c_i\ (i = 1, \ldots, k)\}, \\ &[c_1, c_2, \ldots, c_k] \leq [d_1, d_2, \ldots, d_k] \Longleftrightarrow \forall i; c_i \leq d_i, \\ &[c_1, c_2, \ldots, c_k] \lessdot [d_1, d_2, \ldots, d_k] \Longleftrightarrow \exists i; d_i = c_i + 1, d_j = c_j (j \neq i) \end{aligned}$$

なので，$[c_1, c_2, \ldots, c_k]$ が D_1の join irreducible element であるための必要十分条件は

$$c_i > a_i, \quad c_i > c_{i-1} + 1 \tag{3.2}$$

をみたす i が丁度一つだけ存在することである．ただし，$i = 1$ のときは $c_i > c_{i-1} + 1$ は常に成立しているものとする．Join irreducible element $[c_1, c_2, \ldots, c_k]$ に対して，(3.2) をみたす i をとり，

$$p := u - c_i - (k - i), \quad q := i - 1$$

と定義し，$[c_1, c_2, \ldots, c_k]$ に対して (p,q) を対応させる写像をφで表すことにする．(p,q) がしかるべき範囲にあるとき，(p,q) から逆に join irreducible element を構成できるので，φは単射である．また，(p,q) がφの像に含まれるとき，$0 \le p' \le p$，$0 \le q' \le q$をみたす任意の (p', q') もφの像に含まれる．さらに，$[c_1, c_2, \ldots, c_k]$，$[d_1, d_2, \ldots, d_k]$ が D_1の join irreducible elements であるとき，$\varphi([c_1, c_2, \ldots, c_k]) = (p,q)$，$\varphi([d_1, d_2, \ldots, d_k]) = (p', q')$ とおけば，

$$[c_1, c_2, \ldots, c_k] \le [d_1, d_2, \ldots, d_k] \Longleftrightarrow p \ge p', q \ge q'$$

であることもわかる．とくに，P_1における $[c_1, c_2, \ldots, c_k]$ の coheight は $p+q$である．従って v, $l_1, \ldots, l_v$を

$$\{i \mid a_i + 1 < a_{i+1},\ a_i < u,\ i \le k\} = \{l_1, \ldots, l_v\}, \quad l_1 < \cdots < l_v$$

をみたす整数とすれば，P_1の極小元は $[a_1, a_2, \ldots, a_{l_1-1}, a_{l_1}+1, a_{l_1+1}, \ \ldots,\ a_k]$, $\ldots, [a_1, a_2, \ldots, a_{l_v-1}, a_{l_v}+1, a_{l_v+1}, \ldots, a_k]$ の v個であり，その coheight はそれぞれ $u-k-a_{l_1}+2l_1-2, \ldots, u-k-a_{l_v}+2l_v-2$ である．

以上をまとめて，次の結果を得る．

定理 3.3 v, l_1, $\ldots$, l_v, v', l'_1, $\ldots$, $l'_{v'}$を

$$\{i \mid a_i + 1 < a_{i+1},\ a_i < u,\ i \le k\} = \{l_1,\ \ldots,\ l_v\}, \quad l_1 < \cdots < l_v$$
$$\{i \mid b_i + 1 < b_{i+1},\ b_i < n,\ i \le k\} = \{l'_1,\ \ldots,\ l'_{v'}\}, \quad l'_1 < \cdots < l'_{v'}$$

をみたす整数とすると，I の任意の *minimal reduction* Jに対し，Jに関する Iの *reduction number* $r_J(I)$ は

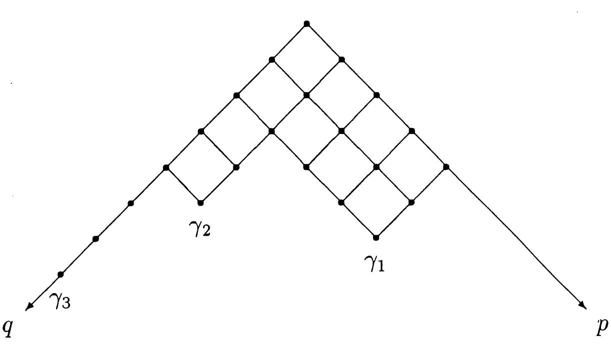
$$\ell(I) - \max\{u-k-a_{l_1}+2l_1, \ldots, u-k-a_{l_v}+2l_v, n-k-b_{l'_1}+2l'_1, \ldots, n-k-b_{l'_{v'}}+2l'_{v'}\}$$

である．

例 3.4 $u = 13$，$k = 8$，$[a_1, a_2, \ldots, a_k] = [1,2,3,7,8,10,11,12]$ とすれば，$v = 3$，$l_1 = 3$，$l_2 = 8$，$l_3 = 12$ で，

$$\gamma_1 = [1,2,4,7,8,10,11,12]$$
$$\gamma_2 = [1,2,3,7,9,10,11,12]$$
$$\gamma_3 = [1,2,3,7,8,10,11,13]$$

とおけば，γ_1，γ_2，γ_3が P_1の minimal element である．また，P_1の Hasse diagram は次のようになる．



4　補遺

ここで考察した ideal Iに関して，実はいろいろなことが知られている．それに関しては [BV, §9] を参照して下さい．たとえば，

$$\epsilon := [1,\ldots,k-1,u+1,u+2,\ldots|1,\ldots,k,\ldots]\vee\delta$$

($\Delta(X)$ における join) とおき，$\Omega' := \Delta(X;\epsilon)\setminus\Delta(X;\delta)$ とおけば，Laplace 展開により

$$A/I = A/\Omega' A = B[X]/(\Delta(X)\setminus\Delta(X;\epsilon))B[X]$$

であることがわかる．従って A/Iは B上$\Delta(X;\epsilon)$ で生成された graded ASL なので，

$$\mathrm{ht}I = \dim A - \dim A/I = (\text{interval } [\delta,\epsilon] \text{ の長さ})$$

となる．とくに $u+1 < a_{k+1}$のときは，

$$\epsilon = [a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},u+1,a_{k+1},\ldots,a_r|b_1,b_2,\ldots,b_r]$$

なので，$\mathrm{ht}I = u - a_k + 1$ である．

参考文献

[BV] Bruns, W. and Vetter, U.: "Determinantal Rings." Lecture Notes in Mathematics **1327** Springer (1988)

[DEP1] DeConcini, C., Eisenbud, D. and Procesi, C.: *Young Diagrams and Determinantal Varieties.* Inv. Math. **56** (1980), 129–165

[DEP2] DeConcini, C., Eisenbud, D. and Procesi, C.: "Hodge Algebras." Astérisque **91** (1982)

[GW] Goto, S. and Watanabe, K.: *On graded rings, I.* J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 179–213

[Hib] Hibi, T.: *Distributive lattices, affine smigroup rings and algebras with straightening laws.* in "Commutative Algebra and Combinatorics" (M. Nagata and H. Matsumura, ed.), Advanced Studies in Pure Math. **11** North-Holland, Amsterdam (1987), 93–109.

[HE] Hochster, M. and Eagon, J. A. *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci.* Amer. J. Math. **93** (1971), 1020–1058

[HR] Hochster, M. and Roberts, J. L.: *Rings of Invariants of Reductive Groups Acting on Regular Rings are Cohen-Macaulay.* Adv. Math. **13** (1974), 115–175

[NR] Northcott, D. G. and Rees, D.: *Reductions of ideals in local rings.* Proc. Cambridge Phil. Soc. **50** (1954), 145–158.

[Sta1] Stanley, R. P.: *Linear homogeneous diophantine equations and magic labelings of graphs.* Duke Math. J. **40** (1973), 607–632.

[Sta2] Stanley, R. P.: *Hilbert Functions of Graded Algebras.* Adv. Math. **28** (1978), 57–83.

Betti numbers of monomial ideals and simplicial spheres

Naoki Terai
Nagano National College of Technology

Takayuki Hibi
Department of Mathematics
Hokkaido University

Introduction

Let $A = k[x_1, x_2, \ldots, x_v]$ denote the polynomial ring in v-variables over a field k, which will be considered to be the graded algebra $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ over k with the standard grading, i.e., each $\deg x_i = 1$. Let $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{Q}$) denote the set of integers (resp. rational numbers). We write $A(j)$, $j \in \mathbf{Z}$, for the graded module $A(j) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} [A(j)]_n$ over A with $[A(j)]_n := A_{n+j}$. Let I be an ideal of A generated by homogeneous polynomials and R the quotient algebra A/I. When R is regarded as a graded module over A with the quotient grading, it has a graded *finite free resolution*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{h_j}} \xrightarrow{\varphi_h} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{1_j}} \xrightarrow{\varphi_1} A \xrightarrow{\varphi_0} R \longrightarrow 0; \qquad (1)$$

where each $\bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{i_j}}$, $1 \leq i \leq h$, is a graded free module of rank $0 \neq \sum_{j \in \mathbf{Z}} \beta_{i_j} < \infty$, and where every φ_i is degree-preserving. Moreover, there exists a unique such resolution which minimizes each β_{i_j}; such a resolution is called *minimal.* If a finite free resolution (1) is minimal, then the *homological dimension* $\mathrm{hd}_A(R)$ of R over A is the non-negative integer h and $\beta_i = \beta_i^A(R) := \sum_{j \in \mathbf{Z}} \beta_{i_j}$ is called the i-th *Betti number* of R over A.

In this paper, we study the Betti numbers of $R = A/I$ over A when an ideal I is generated by square-free monomials, i.e., R is the Stanley-Reisner ring $k[\Delta] = A/I_\Delta$ associated with a simplicial complex Δ ([Sta$_1$], [Rei]). Even though $\mathrm{hd}_A(k[\Delta])$ may depend on the base field k, (with a fixed field k) the integer $v - \mathrm{hd}_A(k[\Delta])$ is topological [Mun], i.e., it depends only on the geometric realization of Δ. Since the first Betti number $\beta_1^A(k[\Delta])$ is equal to the minimal number of generators of the ideal I_Δ, $\beta_1^A(k[\Delta])$ is independent of the base field k. However, in general, $\beta_i^A(k[\Delta])$ may depend on k. It is known, e.g., [Bru–Her$_2$] that the second Betti number $\beta_2^A(k[\Delta])$ does not depend on the base field k. We give a short proof of this result by using the Alexander duality theorem of topology. Moreover, when the ideal I_Δ is generated by square-free monomials of degree two (e.g., Δ is the order complex of a finite partially ordered set), we show that both the third and fourth Betti numbers of $k[\Delta]$ over A are independent of k. On the other hand, it would be of interest to find a natural class of simplicial complexes Δ for which all Betti numbers $\beta_i^A(k[\Delta])$ are independent of k. We show that, for example, if the geometric realization of Δ is either a 3-sphere or a 3-ball, then all Betti numbers of $k[\Delta]$ are independent of k.

Finally we give a ring-theoretical short proof of the following result, which was first proved by Barnette.

Theorem. *The 1-skelton of a simplicial $(d-1)$-sphere is d-connected.*

§1. Simplicial complexes and Hochster's formula

We first recall some notation on simplicial complexes and Hochster's topological formula on Betti numbers of Stanley-Reisner rings. We refer the reader to, e.g., [Bru–Her$_1$], [H$_1$], [Hoc] and [Sta$_1$] for the detailed information about combinatorial and algebraic background.

(1.1) A *simplicial complex* Δ on the *vertex set* $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$ is a collection of subsets of V such that (i) $\{x_i\} \in \Delta$ for every $1 \leq i \leq v$ and (ii) $\sigma \in \Delta$, $\tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in \sigma$. Each element σ of Δ is called a *face* of Δ. Let $\sharp(\sigma)$ denote the cardinality of a finite set σ. We set $d = \max\{\sharp(\sigma) \mid \sigma \in \Delta\}$ and define the *dimension* of Δ to be $\dim \Delta = d - 1$.

Given a subset W of V, the *restriction* of Δ to W is the subcomplex

$$\Delta_W = \{\sigma \in \Delta \mid \sigma \subset W\}$$

of Δ. In particular, $\Delta_V = \Delta$ and $\Delta_\emptyset = \{\emptyset\}$. On the other hand, if σ is a face of Δ, then we define the subcomplexes $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ and $\mathrm{star}_\Delta(\sigma)$ to be

$$\mathrm{link}_\Delta(\sigma) = \{\tau \in \Delta \mid \sigma \cap \tau = \emptyset, \sigma \cup \tau \in \Delta\};$$

$$\mathrm{star}_\Delta(\sigma) = \{\tau \in \Delta \mid \sigma \cup \tau \in \Delta\}.$$

Thus, in particular, $\mathrm{link}_\Delta(\emptyset) = \mathrm{star}_\Delta(\emptyset) = \Delta$.

Let $\tilde{H}_i(\Delta; k)$ denote the i-th *reduced simplicial homology group* of Δ with the coefficient field k. Note that $\tilde{H}_{-1}(\Delta; k) = 0$ if $\Delta \neq \{\emptyset\}$ and

$$\tilde{H}_i(\{\emptyset\}; k) = \begin{cases} 0 & (i \geq 0) \\ k & (i = -1). \end{cases}$$

(1.2) Let $A = k[x_1, x_2, \ldots, x_v]$ be the polynomial ring in v-variables over a field k. Here, we identify each $x_i \in V$ with the indeterminate x_i of A. Define I_Δ to be the ideal of A which is generated by square-free monomials $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq v$, with $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r}\} \notin \Delta$. We say that the quotient algebra $k[\Delta] := A/I_\Delta$ is the *Stanley-Reisner ring* of Δ over k. In what follows, we consider A to be the graded algebra $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ with the standard grading, i.e., each $\deg x_i = 1$, and may regard $k[\Delta] = \bigoplus_{n \geq 0}(k[\Delta])_n$ as a graded module over A with the quotient grading.

(1.3) Let $h = \mathrm{hd}_A(k[\Delta])$ denote the homological dimension of $k[\Delta]$ over A and consider a graded minimal free resolution

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{h_j}} \xrightarrow{\varphi_h} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{1_j}} \xrightarrow{\varphi_1} A \xrightarrow{\varphi_0} k[\Delta] \longrightarrow 0 \quad (2)$$

of $k[\Delta]$ over A. It is known that $v - d \leq h \leq v$. Hochster's formula [Hoc, Theorem (5.1)] guarantees that

$$\beta_{i_j} = \sum_{W \subset V,\ \sharp(W) = j} \dim_k \tilde{H}_{j-i-1}(\Delta_W; k). \quad (3)$$

Thus, in particular,

$$\beta_i^A(k[\Delta]) = \sum_{W \subset V} \dim_k \tilde{H}_{\sharp(W)-i-1}(\Delta_W; k). \quad (4)$$

Some combinatorial and algebraic applications of Hochster's formula have been studied. Munkres [Mun] proved that $v - \mathrm{hd}_A(k[\Delta])$ depends only on the geometric realization of Δ. Moreover, if Δ is the order complex of a modular lattice, then the last Betti number of $k[\Delta]$ can be computed by means of the Möbius function of the lattice ([H$_2$], [H$_3$]). See also [Bac], [B–H$_1$], [B–H$_2$], [Frö] and [H$_4$] for related topics and results.

§2. Second Betti numbers of Stanley–Reisner rings

It is known, e.g., [Bru–Her$_2$] that the second Betti number of a Stanley-Reisner ring is independent of the base field. By virtue of Hochster's formula together with the Alexander duality theorem of topology, we give a short proof of this result. Let $|\Delta|$ denote the geometric realization of a simplicial complex Δ.

(2.1) LEMMA. *Let Δ be a simplicial complex on the vertex set V with $\sharp(V) = v$ and k a field. Then $\dim_k \tilde{H}_{v-3}(\Delta; k)$ is independent of k.*

Proof. Let 2^V denote the set of all subsets of V. Thus, the geometric realization X of the simplicial complex $2^V - \{V\}$ is the $(v-2)$-sphere. We may assume that $V \not\in \Delta$; in particular, $|\Delta|$ is a subspace of X. Note that $H_{v-3}(|\Delta|; k) \cong H^{v-3}(|\Delta|; k)$ since k is a field. Now, the Alexander duality theorem guarantees that $H^{v-3}(|\Delta|; k) \cong \tilde{H}_0(X - |\Delta|; k)$. On the other hand, $\dim_k \tilde{H}_0(X - |\Delta|; k) + 1$ is equal to the number of connected components of $X - |\Delta|$. Thus, $\dim_k H_{v-3}(\Delta; k) = \dim_k \tilde{H}_0(X - |\Delta|; k)$ is independent of the base field k as required. Q. E. D.

(2.2) THEOREM. *The second Betti number $\beta_2^A(k[\Delta])$ of the Stanley-Reisner ring $k[\Delta] = A/I_\Delta$ of a simplicial complex Δ is independent of the base field k.*

Proof. By virtue of Hochster's formula (4), the second Betti number $\beta_2^A(k[\Delta])$ is equal to $\sum_{W \subset V} \dim_k \tilde{H}_{\sharp(W)-3}(\Delta_W; k)$, which is independent of k by Lemma (2.1) as desired. Q. E. D.

§3. Ideals I_Δ generated by monomials of degree two

The purpose of this section is to show that the third and fourth Betti numbers of a Stanley-Reisner ring $k[\Delta] = A/I_\Delta$ are independent of the base field k when the ideal I_Δ is generated by square-free monomials of degree two. For example, the ideal I_Δ associated with a simplicial complex Δ is generated by square-free monomials of degree two when, e.g., Δ is the order complex ([Sta$_3$, p.120]) of a finite partially ordered set.

Let Δ (resp. Δ') be a simplicial complex on the vertex set V (resp. V') and suppose that $V \cap V' = \emptyset$. Recall that the *simplicial join* $\Delta * \Delta'$ of Δ

and Δ' is the simplicial complex on the vertex set $V \cup V'$ which consists of all subsets of $V \cup V'$ of the form $\sigma \cup \tau$ with $\sigma \in \Delta$ and $\tau \in \Delta'$.

(3.1) LEMMA. *Let Δ be a simplicial complex on the vertex V with $\sharp(V) = v$ and suppose that the ideal I_Δ is generated by square-free monomials of degree two. Then $\tilde{H}_n(\Delta; k) = 0$ if $v < 2(n+1)$. Moreover, if $v = 2(n+1)$, then $\tilde{H}_n(\Delta; k) \neq 0$ if and only if Δ is the simplicial join of $n+1$ copies of the 0-sphere $\mathrm{S}^0 (= \bullet \;\; \bullet)$.*

(3.2) COROLLARY. *Suppose that the ideal I_Δ is generated by square-free monomials of degree two and that a finite free resolution (2) of $k[\Delta] = A/I_\Delta$ over A is minimal. Then, $\beta_{i_j} = 0$ for all i and j with $j > 2i$.*

Proof. By Lemma (3.1), we have $\tilde{H}_{\sharp(W)-i-1}(\Delta_W; k) = 0$ if $\sharp(W) < 2(\sharp(W) - i)$, i.e., $\sharp(W) > 2i$. Hence, thanks to Hochster's formula (3), $\beta_{i_j} = 0$ for all i and j with $j > 2i$. Q. E. D.

Taylor [Tay] constructed an explicit (not nesessarily minimal) finite free resolution of $k[\Delta] = A/I_\Delta$ over A. The above Corollary (3.2) also follows immediately from Taylor resolutions.

(3.3) LEMMA. *Let Δ be a simplicial complex on the vertex set V with $\sharp(V) = 7$. Suppose that I_Δ is generated by square-free monomials of degree two and that $\tilde{H}_2(\Delta; k) \neq 0$. Then, one of the following conditions* (i) *and* (ii) *is satisfied:*

(i) *Δ is the simplicial join of the cycle of length 5 and 0-sphere S^0;*

(ii) *there exists $x \in V$ such that $\Delta_{V-\{x\}} = \mathrm{S}^0 * \mathrm{S}^0 * \mathrm{S}^0$.*

We are now in the position to state the main result of this section.

(3.4) THEOREM. *Let Δ be a simplicial complex and suppose that the ideal I_Δ is generated by square-free monomials of degree two. Then, both the third Betti number $\beta_3^A(k[\Delta])$ and the fourth Betti number $\beta_4^A(k[\Delta])$ of $k[\Delta] = A/I_\Delta$ over A are independent of the base field k.*

Proof. First, we study the third Betti number $\beta_3^A(k[\Delta])$ of $k[\Delta]$ over A. Let V be the vertex set of Δ. Thanks to Proposition (3.2), what we must prove is that β_{3_j} is independent of the base field k for every $j \leq 6$. Thus, by virtue of Hochster's formula (3), what we must prove is that $\dim \tilde{H}_{\sharp(W)-4}(\Delta_W; k)$ is independent of k for every $W \subset V$ with $\sharp(W) \leq 6$.

If $\sharp(W) = 5$, then $\tilde{H}_i(\Delta_W; k) = 0$ for every $i \geq 2$ by Lemma (3.1). Thus, since the reduced Euler characteristic $\tilde{\chi}(\Delta)$ and $\dim_k \tilde{H}_0(\Delta_W; k)$ are independent of k, it follows from Euler-Poincaré formula that $\dim \tilde{H}_1(\Delta_W; k)$ is independent of k. On the other hand, if $\sharp(W) = 6$, then $\dim \tilde{H}_2(\Delta_W; k) = 0$ unless Δ_W is the simplicial join of three copies of the 0-sphere by Lemma (3.1). Moreover, if Δ_W is the simplicial join of three copies of the 0-sphere, then $\dim \tilde{H}_2(\Delta_W; k) = 1$ for an arbitrary field k.

Secondly, we show that the fourth Betti number $\beta_4^A(k[\Delta])$ of $k[\Delta]$ over A is independent of the base field k. We must prove that $\dim \tilde{H}_{\sharp(W)-5}(\Delta_W; k)$ is independent of k for every $W \subset V$ with $\sharp(W) \leq 8$. If either $\sharp(W) = 6$ or $\sharp(W) = 8$, then we can show that $\dim \tilde{H}_{\sharp(W)-5}(\Delta_W; k)$ is independent of k by the similar technique with Lemma (3.1) as above. Let $\sharp(W) = 7$ and suppose that $\tilde{H}_2(\Delta_W; k) \neq 0$. Then, by Lemma (3.3), we easily see that Δ_W has the homotopy type of one of the following spaces: (i) the 2-sphere; (ii) the disjoint union of the 2-sphere and a single point; (iii) the space $X \cup Y$, where X is the 2-sphere and Y is either the 1-sphere or the 2-sphere, such that $X \cap Y$ consists of a single point. Hence, $\dim_k \tilde{H}_2(\Delta_W; k)$ is independent of the base field k as desired. Q. E. D.

§4. Finite free resolutions of the n-sphere

In general, it is possible to define the Stanley-Reisner ring $\mathbf{Z}[\Delta] = A/I_\Delta$ of Δ over the commutative ring $\mathbf{Z}$. However, a minimal free resolution of $\mathbf{Z}[\Delta]$ over the polynomial ring $A = \mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_v]$ does not necessarily exist. On the other hand, there exists a minimal free resolution of $\mathbf{Z}[\Delta]$ over A if and only if all Betti numbers $\beta_i^A(k[\Delta])$ are independent of the base field k (see, e.g., [H–K]). Thus, it might be of interest to find a natural class of simplicial complexes Δ for which all Betti numbers $\beta_i^A(k[\Delta])$ are independent of k. The main purpose of this section is to show that if $|\Delta|$ is the n-sphere $\mathbf{S}^n$ (or the n-ball $\mathbf{B}^n$) with $n \leq 3$, then all Betti numbers $\beta_i^A(k[\Delta])$ of $k[\Delta]$ are independent of k. Moreover, we construct a shellable simplicial complex Δ with $|\Delta| = \mathbf{S}^4$ such that some Betti number $\beta_i^A(k[\Delta])$ does depend on the base field k.

(4.1) PROPOSITION. (a) *Let Δ be a simplicial complex and suppose that the geometric realization $|\Delta|$ of Δ is a connected 3-manifold without boundary. Then, all Betti numbers $\beta_i^A(k[\Delta])$ are independent of the base field k if $|\Delta|$ is orientable and $\tilde{H}_1(\Delta; \mathbf{Z}) = 0$.*

(b) *Let Δ be a simplicial complex such that $|\Delta|$ is a connected 2-manifold without boundary. Then, all Betti numbers $\beta_i^A(k[\Delta])$ are independent of the* *base field k if and only if $\mid \Delta \mid$ is orientable.*

Proof. By virtue of Hochster's formula, in order for all Betti numbers $\beta_i^A(k[\Delta])$ to be independent of the base field k, it is necessary and sufficient that $\dim_k \tilde{H}_j(\Delta_W; k)$ is independent of k for every subset W of the vertex set V and for each integer $j \geq -1$.

On the other hand, it follows easily that, for a simplicial complex Δ on the vertex set V, all Betti numbers $\beta_i^A(k[\Delta])$ are independent of k if one of the following conditions is satisfied: (i) $\dim \Delta \leq 1$; (ii) Δ is a 2-manifold with non-empty boundary; (iii) $\sharp(V) \leq 5$.

(4.2) THEOREM. *Let Δ be a simplicial complex and suppose that the geometric realization $\mid \Delta \mid$ of Δ is the n-sphere $\mathbf{S}^n$ (or the n-ball $\mathbf{B}^n$) with $n \leq 3$. Then, the Betti number $\beta_i^A(k[\Delta])$ is independent of the base field k for every $i \geq 0$.*

Proof. If $\mid \Delta \mid = \mathbf{S}^n$, then the above Proposition (4.1) guarantees that all Betti numbers $\beta_i^A(k[\Delta])$ are independent of the base field k.

On the other hand, suppose that $\mid \Delta \mid = \mathbf{B}^n$ and define Δ' to be the simplicial complex $\Delta \cup (\partial\Delta * \{\text{ a single point }\})$. Thus, $\mid \Delta' \mid = \mathbf{S}^n$. Let V denote the vertex set of Δ. Then $\Delta'_V = \Delta$. Hence, it follows that, for every subset W of V and for each integer $j \geq -1$, $\dim_k \tilde{H}_j(\Delta_W; k)$ is independent of the base field k as required. Q. E. D.

(4.3) EXAMPLE. Let Γ denote the simplicial complex on the vertex set $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ which is the minimal triangulation of the real projective plane (see [Rei]). Let Δ denote the simplicial complex which consists of all subsets σ of V with $\sigma \neq V$. Thus, $\mid \Delta \mid$ is the 4-sphere. We consider Γ to be a subcomplex of Δ in the obvious way. Let $\mathrm{Sd}(\Delta)$ denote the barycentric subdivision of Δ. If W is the vertex set of $\mathrm{Sd}(\Gamma)$, then $\sharp(W) = 31$ and $\mathrm{Sd}(\Delta)_W = \mathrm{Sd}(\Gamma)$. Thus, we have

$$\dim_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \tilde{H}_{31-28-1}(\mathrm{Sd}(\Delta)_W; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) > \dim_{\mathbf{Q}} \tilde{H}_{31-28-1}(\mathrm{Sd}(\Delta)_W; \mathbf{Q});$$

$$\dim_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \tilde{H}_{31-29-1}(\mathrm{Sd}(\Delta)_W; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) > \dim_{\mathbf{Q}} \tilde{H}_{31-29-1}(\mathrm{Sd}(\Delta)_W; \mathbf{Q}).$$

Hence

$$\beta_{28}^A((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[\mathrm{Sd}(\Delta)]) > \beta_{28}^A(\mathbf{Q}[\mathrm{Sd}(\Delta)]);$$

$$\beta_{29}^A((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[\mathrm{Sd}(\Delta)]) > \beta_{29}^A(\mathbf{Q}[\mathrm{Sd}(\Delta)]).$$

Note that $\mathrm{hd}_A(k[\mathrm{Sd}(\Delta)]) = 57$ and $\beta_{28}^A(k[\mathrm{Sd}(\Delta)]) = \beta_{29}^A(k[\mathrm{Sd}(\Delta)])$. Since Δ is the boundary complex of the 5-simplex, it follows that Δ is shellable (defined in, e.g., [B–M]). Hence, thanks to [Bjö$_1$], $\mathrm{Sd}(\Delta)$ is also shellable.

(4.4) EXAMPLE. Let Δ denote the simplicial complex as in Example (4.3) and define Δ' to be $\Delta - \{\{1,2,3,4,5\}\}$. Then $\mid \Delta' \mid$ is the 4-ball. The similar technique as in Example (4.3) enables us to see that some Betti numbers $\beta_i^A(k[\mathrm{Sd}(\Delta')])$ of the Stanley-Reisner ring $k[\mathrm{Sd}(\Delta')]$ of the barycentric subdivision $\mathrm{Sd}(\Delta')$ of Δ' depend on the base field k. The simplicial complex $\mathrm{Sd}(\Delta')$ is also shellable.

The above Examples (4.3) and (4.4) illustrate the following

(4.5) PROPOSITION. *Fix an integer $n \geq 4$ and let V denote the finite set $\{1,2,\ldots,n,n+1,n+2\}$. Define Δ_n to be the simplicial complex which consists of all subsets σ of V with $\sigma \neq V$. Moreover, let Δ'_n denote the simplicial complex $\Delta_n - \{\{1,2,\ldots,n+1\}\}$. Then, there exist integers i and j such that $\beta_i^A(k[\mathrm{Sd}(\Delta_n)])$ and $\beta_j^A(k[\mathrm{Sd}(\Delta'_n)])$ depend on the base field k. Note that both $\mathrm{Sd}(\Delta_n)$ and $\mathrm{Sd}(\Delta'_n)$ are shellable with $\mid \mathrm{Sd}(\Delta_n) \mid = \mathbf{S}^n$ and $\mid \mathrm{Sd}(\Delta'_n) \mid = \mathbf{B}^n$.*

§5. 1-skeltons of simplicial spheres

In this section we give a ring-theoretical short proof of the following result, which was first proved by Barnette.

Theorem. *The 1-skelton of a simplicial $(d-1)$-sphere is d-connected.*

Proof. Suppose Δ is a simplicial $d-1$-sphere on the vertex set V with $\sharp(V) = v$. Since $k[\Delta]$ is Gorenstein, $\beta_{i_{i+1}}(k[\Delta]) = 0$ for $i \geq v - d$. Thus we have $\tilde{H}_0(\Delta_{V-W}; k) = 0$ for every subset W of V with $\sharp(W) \leq d-1$ by Hochster's formula. That is, Δ_{V-W} is connected. Hence, the 1-skelton of Δ is d-connected. Q.E.D.

References

[Bac] K. Baclawski, *Cohen-Macaulay connectivity and geometric lattices*, European J. Combin. **3** (1982), 293 – 305.

[Bar] D. Barnette, *Graph theorems for manifolds*, Israel J. of Math. **16** (1973), 62 – 72.

[Bjö$_1$] A. Björner, *Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), 159 – 183.

[Bjö$_2$] A. Björner, *The homology and shellability of matroids and geometric lattices*, in "Matroid Applications" (N. White, ed.), Cambridge University Press, Cambridge / New York / Sydney, 1992, pp. 226 – 283.

[B–M] H. Bruggesser and P. Mani, *Shellable decompositions of cells and spheres*, Math. Scand. **29** (1971), 197 – 205.

[Bru–Her$_1$] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen-Macaulay Rings," Cambridge University Press, Cambridge / New York / Sydney, 1993.

[Bru–Her$_2$] W. Bruns and J. Herzog, *On multigraded resolutions*, preprint.

[B–H$_1$] W. Bruns and T. Hibi, *Cohen-Macaulay partially ordered sets with pure resolutions*, preprint.

[B–H$_2$] W. Bruns and T. Hibi, *Stanley-Reisner rings with pure resolutions*, preprint.

[Frö] R. Fröberg, *On Stanley-Reisner rings*, in "Topics in Algebra," Banach Center Publications, Volume 26, Part 2, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1990, pp. 57 – 70.

[H–K] M. Hashimoto and K. Kurano, *Resolutions of determinantal ideals*, Advances in Math. **94** (1992), 1 – 66.

[H$_1$] T. Hibi, "Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes," Carslaw Publications, Glebe, N.S.W., Australia, 1992.

[H$_2$] T. Hibi, *Cohen-Macaulay types of Cohen-Macaulay complexes*, J. Algebra **168** (1994), 780-797.

[H$_3$] T. Hibi, *Canonical modules and Cohen-Macaulay types of partially ordered sets*, Advances in Math. **106** (1994), 118-121.

[H_4] T. Hibi, *Buchsbaum complexes with linear resolutions*, preprint (February, 1994).

[Hoc] M. Hochster, *Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, in "Ring Theory II" (B. R. McDonald and R. Morris, eds.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., No. 26, Dekker, New York, 1977, pp.171 – 223.

[Mun] J. Munkres, *Topological results in combinatorics*, Michigan Math. J. **31** (1984), 113 – 128.

[Rei] G. Reisner, *Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings*, Advances in Math. **21** (1976), 30 – 49.

[Sta_1] R. P. Stanley, "Combinatorics and Commutative Algebra," Birkhäuser, Boston / Basel / Stuttgart, 1983.

[Sta_3] R. P. Stanley, "Enumerative Combinatorics, Volume I," Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, Calif., 1986.

[Tay] D. Taylor, *Ideals generated by monomials in an R-sequence*, Ph. D. Thesis, University of Chicago, 1960.

[$T\text{–}H_1$] N. Terai and T. Hibi, *Alexander duality theorem and second Betti numbers of Stanley-Reisner rings*, preprint

[$T\text{–}H_2$] N. Terai and T. Hibi, *Stanley-Reisner rings whose Betti numbers are independent of the base field*, to appear.

[$T\text{–}H_3$] N. Terai and T. Hibi, *Finite free resolutions and 1-skeltons of simplicial* $(d-1)$ *-spheres*, preprint

環の採色数について

Chromatical number of commutative ring

吉田憲一

Okayama Univ. of Science

I. Beck は 1988年の J. Algebra 116, 208-226 において Coloring of commutative rings と題して可換環とグラフ理論を結びつける試みを行なった。あれとこれをくっつけたら何か出て来るというのではなく、可換環を別の分野から見るという試みは評価されてよいと思い、ここにこれらの紹介と発展及びこれらの問題を考えるための道具と二,三の結果を書く事にします。

グラフ理論についてよく御存知の方もおられると思いますが、まず採色数とはなにかからはじめましょう。ここで扱うグラフは無限個の点集合であっても良いとします。そして無向グラフ(矢印のつかない線で点を結んで得られるグラフ)を考えます。

各点に色分け(色付け)を与えます。この時点 P と点 Q が線で結ばれていれば点 P と点 Q には異なる色を塗るものとします。

グラフ G にこのルールで彩色していくとき，何色で塗り分けが出来るか，その最小数を問題にする．その最小数を $\chi(G)$ で表わし，彩色数（Chromatical number）と呼ぶ。

さて I. Beck さんは可換環 R の各元を各点とし，元 x，元 y が $xy=0$ のとき点 x と点 y を線で結ぶことによって得られるグラフを考え，このグラフの彩色数について論じた．彼は R が reduced のときについて $\chi(R)$ を完全に決定した．

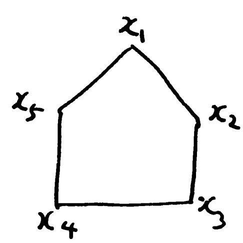
ここで彩色数について，もっとも基本となる結果を紹介しておこう。

Proposition

1. グラフ G の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が clique（徒党）であるとは，$\forall i,j\ (i \neq j)$ について x_i と x_j は線で結ばれるものを言い，G の中の clique の中で最大個数を clique(G) で表わす。このとき

$$\text{clique}(G) \leqq \chi(G)$$

グラフ G を



とすれば clique(G)＝2

しかし，$\chi(G)=3$ なので "＝" は一般的には成り立たない。

2. グラフ G の点集合を $|G|$ で表わす．ここで

$|G| = X_1 \amalg X_2 \amalg \cdots \amalg X_n$ disjoint union

で $X_i \ni {}^\forall x, y \ (x \neq y)$ ならば x と y は線で結ばれない，ならば

$$\chi(G) \leqq n$$

3. $\chi(G) = m$ であれば

$|G| = Y_1 \amalg Y_2 \amalg \cdots \amalg Y_m$ disjoint union

で，$Y_i \ni {}^\forall x, y \ (x \neq y)$ ならば x と y は線で結ばれない，というものがある。

I. Beck さんは R が reduced であるときには clique$(R) = \chi(R)$ であることから non reduced でも clique$(R) = \chi(R)$ であろうとの予想を立てたが最近 Anderson によって反例が与えられた。

さて，ここで可換環 R 上に "$xy = 0$" によってグラフを与えたわけであるが $xy = 0$ にこだわる必要はないわけで，そもそも無向グラフとは点集合 $|G|$ 上に与えられた"二項関係"がグラフなのだから いろいろの二項関係を考えて，それぞれの彩色数を考えてみようと思ったわけです。

たとえば $xy \neq 0$，xy は zero divisor，$x + y$ は invertible，$xR = yR$，etc

グラフ G_1 からグラフ G_2 への map とは

1) $|G_1| \xrightarrow{\varphi} |G_2|$ 点集合の mapping で

2) $G_1 \ni x, y$ で x と y が線で結ばれていれば

$\varphi(x)$ と $\varphi(y)$ もヌ線で結ばれている.

そこでこれらの問題を考えるのに有効な結果として,

Proposition

$G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2$ をグラフの map とすれば

$$\chi(G_1) \leqq (\deg \varphi) \times \chi(G_2)$$

ここで $\deg \varphi \overset{\text{def}}{=} \max \# \{ \varphi^{-1}(z) \mid z \in G_2 \}$

は点集合の個数

もしも $^{\forall} z \in G_2$ について $\varphi^{-1}(z) \ni {}^{\forall} a, b$ であれば

a と b は線で結ばれないとすれば

$$\chi(G_1) \leqq \chi(G_2)$$

この命題の応用として

$a P b$ で$\underset{ある}{\wedge}$二項関係を表わすとき, $f(x) \in R[X]$

に対して $a (P_f) b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(a) P f(b)$ として新らしい

二項関係が与えられる

例 $x - y$ は zero divisor, $f(x) = X^2$, なら

$x^2 - y^2$ は zero divisor が新らしい二項関係.

このとき $_aP_e$ で与えられたグラフを G_1, $_a(P_f)_e$ で与えられたグラフを G_2 とすれば，グラフの map

$$G_1 \xrightarrow{\tilde{f}} G_2$$

が与えられる．これは $|G_1| = |G_2| = R$ なので

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

によって induce される。

もうひとつ，二項関係が同値関係であれば

$$\chi(R) = \max {}^{\#}\{ C \mid C \text{ は同値類} \}$$

二項関係が同値関係 $(\sim)$ の否定で与えられるならば

$$\chi(R) = {}^{\#}(R/\sim)$$

以上の結果を使えば以下の結果が与えられる

1) 二項関係を $xR = yR$ で与えれば

$$\chi(R) = \max\{ {}^{\#}(R/\mathrm{Ann}\,x)^{\times} \mid x \in R \},$$ ここで

$(\ \ )^{\times}$ は invertible elements のなす group

2) 二項関係を $x - y$ は zero divisor で与えると，

$\chi(R) < +\infty$ なら 1. R は integral domain
(このとき $\chi(R) = 2$)
又は 2. R : finite ring で

$R = R_1 \times \cdots \times R_n$ local Artinian ring による分解

$R_i \supset M_i$ maximal ideal

とすれば

$\chi(R) = {}^{\#}(M_1 \times \cdots \times M_n)$

3. 二項関係を $x+y$ は zero divisor で与えると

$$\chi(R) = \max\left\{ {}^{\#}(M) \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ は } R \text{ の} \\ \text{maximal ideal} \end{array} \right\}$$

この時も $\chi(R) < +\infty$ なら R は integral domain か又は finite ring だが $\chi(R)$ は 2 とは異なる。

これは $x-y$ と $x+y$ が彩色数については異なっていることを意味する。

他に考えられる二項関係を述べてこの Paper を終わりましょう。

4. $xR + yR = R$

5. $x-y$ は non zero divisor

6. $x-y$ は invertible

7. $x-y$ は nilpotent

8. $x^2 = y^2$

9. $x^2 + y^2 = 1$

10. xy は zero divisor

11. x, y は regular sequence

離散付値環上 A^1を生成ファイバーにもつ環について

小野田信春

福井大学教育学部

1 序

以下は富山大浅沼照雄氏との共同研究である。
可換環 Rと R-代数 A が与えられたとき、ファイバー環 $A\otimes_R k(p)$ が A の構造を反映しているのは明らかである。それでは逆に、各ファイバー環の構造が分かっているとき、そこから A の構造に関してどの程度のことが導き出せるであろうか？これは可換環論における1つの興味ある問題と思われる。但し、その際、ファイバー環の構造について相当強い条件を設定しないと、A に関して有益な情報が得られないのが普通である。現在のところ、この方面に関してまとまった理論が出来上がっているのは、いわゆる擬多項式環、すなわち、A が R上平坦で、各ファイバーが基礎体 $k(p)$ 上一定変数の多項式環となっている場合しかない ([1] 参照)。これはかなり強い条件のようにみえるが、これだけ強い条件を与えても、A の構造を決定するには相当複雑な議論を要し、条件を少しでも弱めれば、同様の理論を展開しようとしてもすぐに行き詰まってしまうのが実情である。

そこで我々は、最初の試みとして、R が離散付値環のとき擬多項式環を離れたところでどの程度のことがいえるのかを考えてみることにした。この場合、A が R を含む整域で、生成ファイバーが1変数多項式環、閉ファイバーが整域という仮定のもとでは、ある程度の成果が得られたので、今回はその点について報告したい。

以下、本稿を通じて次の記号を固定しておく。
$(R,\pi R)$: πRを極大イデアルにもつ離散付値環
$K=R$の商体 $(=R[\pi^{-1}])$, $\qquad k=R$の剰余体 $(=R/\pi R)$
X および $X_1,X_2,\ldots$: 不定元
$R^{[n]}=R[X_1,X_2,\ldots,X_n]$, $\qquad R^{[\infty]}=R[X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots]$
$f=f(X_1,X_2,\ldots,X_n)\in R^{[n]}$に対し、$f$ の $X_i(1\le i\le n)$ に関する次数を $\deg_{X_i}f$ で表す。また、自然な写像 $R^{[n]}\to k^{[n]}$による f の像を $\overline{f}$ で表す。

2 構造定理

序でも述べたように、本稿で対象とするのは、離散付値環 Rを含む整域 A であって、次の2条件を満たすようなものである：

$$A \otimes_R K \cong_K K[X], \qquad A \otimes_R k = \text{整域}$$

容易に分かるように、最初の条件は $A[\pi^{-1}] = K[x]$ を満たす K上超越的な A の元 x が存在することと同値であり、また、後ろの条件は π が A の素元であることを意味する。便宜上、本稿ではこの性質を持つ整域 A を *generic* $\boldsymbol{A}^1$*-fibration over* R と呼ぶことにする。

以下、特に断らない限り、A は generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R であり、x は $A[\pi^{-1}] = K[x]$ を満たす A の元とする ($x \in A$ の取り方には任意性のあることに注意。このような x をひとつ選んで固定しておくという意味である。)

このような A は具体的に決定できる。本節の目的はそれを示すことにある。まず、次の命題から始める。

Proposition 2.1 A は整閉である。

証明 A の整閉包を A'とすると、$A[\pi^{-1}] = K[x]$ は整閉ゆえ、$A[\pi^{-1}] = A'[\pi^{-1}]$ が成り立つ。よって、任意の $a \in A'$に対し、$\pi^n a \in A$ となる $n \geq 0$ がある。このとき、$n \geq 1$ なら、$p' \cap A = \pi A$ を満たす A'の素イデアル p' について、$\pi^n a \in \pi A' \cap A \subseteq p' \cap A = \pi A$ より、$\pi^{n-1} a \in A$ を得る。この議論を繰り返せば $a \in A$ となり、$A = A'$ がわかる。

次の補題は簡単だが有効である。

Lemma 2.2 部分環 $R[x] \subseteq B \subseteq A$ について、$\pi A \cap B = \pi B$ なら、$B = A$ である。

証明 $K[x] \subseteq B[\pi^{-1}] \subseteq A[\pi^{-1}] = K[x]$ より、$B[\pi^{-1}] = A[\pi^{-1}]$ が成り立つことに注意すれば、上の命題と同様にして証明できる。

さらに、次の命題を準備しておく。

Proposition 2.3 $d = \mathrm{tr.deg}_k A/\pi A,\ h = \mathrm{ht}(\pi A)$ とおくとき、$(d,h) = (1,1)$ または $(0,1)$ または $(0,2)$ が成り立つ。

証明 [2] の Theorem 1 より、$d + h \leq \mathrm{ht}(\pi R) + \mathrm{tr.deg}_k A = 2$ が成り立つ。このことと $h \geq 1$ とより、直ちに結論を得る。

ここで、構造定理を述べるために必要な次の概念を導入する。

Definition 2.4 $R^{[\infty]}$の元の有限列 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ が条件 (C) を満たすとは、各 i $(1 \le i \le n)$ に対し、次が成り立つことをいう。

(1) $f_i = f_i(X_1, \ldots, X_i) \in R^{[i]}$

(2) $\deg_{X_i} f_i \ge 1$、かつ、f_i は X_iについてモニック

(3) $\deg_{X_j} f_i < \deg_{X_j} f_j \quad (1 \le \forall j < i)$

(4) $(\pi, f_1, f_2, \ldots, f_i)R^{[i]}$ は $R^{[i]}$ の極大イデアル

また、$R^{[\infty]}$の元の無限列 $f_1, f_2, \ldots$ が条件 (C) を満たすとは、任意の有限部分列 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ が (C) を満たすことをいう。

Remark 2.5 $R^{[\infty]}$の元の有限列 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ が条件 (C) を満たすとき、$f_{n+j} = X_{n+j} \quad (j \ge 1)$ とすれば $f_1, f_2, \ldots$ は条件 (C) を満たす無限列になる。即ち、条件 (C) を満たす有限列は条件 (C) を満たす無限列の部分列と見なせる。

Lemma 2.6 $R^{[\infty]}$の元の無限列 $f_1, f_2, \ldots$ が条件 (C) を満たすとき、

$$L_i = R^{[i]}/(\pi, f_1, \ldots, f_i) \ (i \ge 1), \qquad L_\infty = R^{[\infty]}/(\pi, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots)$$

とおき、自然な写像 $R^{[\infty]} \to L_\infty$による X_i の像を $\alpha_i \quad (i \ge 1)$ とするとき、次が成り立つ。

(1) 各 L_i は k の有限次代数拡大体であり、また、L_∞ は k の代数拡大体である。

(2) 各 L_i は L_∞ の部分体と同一視できる。さらに、この同一視のもとで、$L_i = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ が成り立つ。

(3) 各 i に対し、$\overline{f}_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, X_i)$ が L_{i-1} 上 α_i の最小多項式である。

証明 $M_i = (\pi, f_1, \ldots, f_i)R^{[i]} \quad (i \ge 1)$, $M_\infty = (\pi, f_1, f_2, \ldots)R^{[\infty]}$ とおくと、各 M_i は極大イデアルゆえ、$M_\infty \cap R^{[i]} = M_i$ が成り立つ。よって、$L_i = R^{[i]}/M_i$ は $L_\infty = R^{[\infty]}/M_\infty$ の部分環とみなせ、$L_i = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_i]$ が成立する。一方、仮定より、L_i は体なので、従って、L_i は k の有限次代数拡大体である。さらに、$L_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ が成立するので、L_∞ は k の代数拡大体であることも分かる。以上で (1), (2) が示せた。最後の (3) は、$L_i \cong L_{i-1}[X_i]/(\overline{f}_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, X_i))$ が成立することに注意すれば、明らかである。

Proposition 2.7 前補題と同じ記号や仮定の下で、$x_1 = x, \quad x_i = \pi^{-1} f_{i-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ により $x_1, x_2, \ldots \in K[x]$ を定め、$B_i = R[x_1, x_2, \ldots, x_i]$ とおくとき、各 i $(i \ge 1)$ に対し、次が成り立つ。

(1) $X_j \mapsto x_j$ $(1 \le j \le i)$ で定義される R-準同形写像 $\varphi_i : R^{[i]} \to B_i$ について、$\mathrm{Ker}(\varphi_i) = (\pi X_2 - f_1, \pi X_3 - f_2, \ldots, \pi X_i - f_{i-1})$ が成り立つ。特に、

$$B_i \cong_R R^{[i]}/(\pi X_2 - f_1, \pi X_3 - f_2, \ldots, \pi X_i - f_{i-1})$$

(2) $B_i[\pi^{-1}] = K[x]$

(3) π は B_i の素元である。また、$\overline{x}_j = x_j \bmod(\pi B_i)$ $(1 \leq j \leq i)$ とするとき、$k(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1})$ と $L_{i-1} = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ とは自然に同一視できる。特に、$k(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1})$ は k の有限次代数拡大体である。さらに、$B_i/\pi B_i = L_{i-1}[\overline{x}_i] \cong {L_{i-1}}^{[1]}$ が成り立つ。

(4) B_i は generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R である。

証明 (2) は B_i の定義から明らか。また、(1) が分かれば、

$$B_i/\pi B_i \cong R^{[i]}/(\pi, f_1, \ldots, f_{i-1}) \cong (R^{[i-1]}/(\pi, f_1, \ldots, f_{i-1}))^{[1]} = {L_{i-1}}^{[1]}$$

となるので、Lemma 2.6 より (3) を得る。さらに、(4) は (2), (3) から明らかである。残りの (1) を i に関する帰納法で証明する。$P_i = (\pi X_2 - f_1, \ldots, \pi X_i - f_{i-1})R^{[i]}$ とおくと、帰納法の仮定より $B_{i-1} \cong R^{[i-1]}/P_{i-1}$、かつ、$\pi$ は B_{i-1}の素元である。また、$f_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}) \notin \pi B_{i-1}$でもある。実際、そうでないと仮定すると、$f_{i-1}(X_1, \ldots, X_{i-1}) \in (\pi, P_{i-1})R^{[i-1]} = (\pi, f_1, \ldots, f_{i-2})R^{[i-1]}$ となり、$(\pi, f_1, \ldots, f_{i-1})R^{[i-1]} = (\pi, f_1, \ldots, f_{i-2})R^{[i-1]}$ を得るが、これは $(\pi, f_1, \ldots, f_{i-1})R^{[i-1]}$ が $R^{[i-1]}$の極大イデアルであることに反する。よって、

$$B_i = B_{i-1}[\pi^{-1} f(x_1, \ldots, x_{i-1})] \cong B_{i-1}[X_i]/(\pi X_i - f_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}))$$

が成立し、このことから、(1) が従う。

Proposition 2.8 前命題と同じ記号や仮定の下で、$B_\infty = R[x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots]$ とおくとき、次が成り立つ。

(1) $X_i \mapsto x_i$ $(i \geq 1)$ で定義される R-準同形写像 $\varphi_\infty : R^{[\infty]} \to B_\infty$について、$\mathrm{Ker}(\varphi_\infty) = (\pi X_2 - f_1, \pi X_3 - f_2, \ldots, \pi X_i - f_{i-1}, \ldots)$ が成り立つ。特に、

$$B_\infty \cong_R R^{[\infty]}/(\pi X_2 - f_1, \pi X_3 - f_2, \ldots, \pi X_i - f_{i-1}, \ldots)$$

(2) $B_\infty[\pi^{-1}] = K[x]$

(3) $B_\infty/\pi B_\infty$ は k の代数拡大体である。

(4) B_∞ は generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R である。

(5) B_∞ は R上有限生成ではない。

証明 (1) は Proposition 2.7 の (1) から直ちに分かる。(2) は明らか。また、(1) より、$B_\infty/\pi B_\infty \cong R^{[\infty]}/(\pi, f_1, f_2, \ldots)$ となるので Lemma 2.6 より (3) を得る。(4) は (2), (3) から明らか。最後に、B_∞ が R上有限生成とすると、ある i に対し、$B_\infty = R[x_1, \ldots, x_i]$ が成立するが、すると、Proposition 2.7 の (3) より、$B_\infty/\pi B_\infty$ は k上超越次元 1 を持つことになり、(3) と矛盾する。

ここで、条件 (C) を満たす $R^{[\infty]}$の元の有限または無限列 $f_1, f_2, \ldots$ であって、この列を用いて、$x_1 = x,\ \ x_i \doteq \pi^{-1} f_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1})$ により $x_1, x_2, \ldots$ を定めたとき、各 x_i が A の元となるようなものを以下のようにして帰納的に構成する。

$f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}$まで定まったとして、$A_i = R[x_1, \ldots, x_i]$ とおく。このとき、$A_i = A$ なら、この段階で終了する。$A_i \neq A$ のときは、次のようにして f_i を決める。Lemma 2.2 より、$P_i = \pi A \cap A_i$とするとき、$P_i \neq \pi A_i$である。一方、$\overline{x}_j = x_j \bmod(\pi A_i)\ (1 \leq j \leq i)$ として、$L_{i-1} = k(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1})$ とおくとき、Proposition 2.7 より、L_{i-1}は kの有限次代数拡大体で、$A_i/\pi A_i = L_i[\overline{x}_i] \cong {L_{i-1}}^{[1]}$ が成り立つ。従って、$f_i = f_i(X_1, \ldots, X_i) \in R^{[i]}$ を $P_i/\pi A_i = \overline{f}_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i) L_{i-1}[\overline{x}_i]$ が成立するように選べる。f_iは X_iについてモニックとしてよい。また、Lemma 2.6 と Proposition 2.7 より、$\overline{f}_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, X_i)$ が L_{i-1}上 $\overline{x}_i$ の最小多項式なので、$\deg_{X_i} f_i < \deg_{X_j} f_j\ (1 \leq j < i)$ ともしてよい。すると、$f_1, f_2, \ldots, f_i$は条件 (C) を満たす $R^{[\infty]}$の元の有限列になる。また、$P_i = (\pi,\ f_i(x_1, \ldots, x_i))A_i$ ゆえ、$f_i(x_1, \ldots, x_i) \in \pi A$ であり、従って、$x_{i+1} = \pi^{-1} f_i(x_1, \ldots, x_i) \in A$ も成立する。

以上の準備のもとで、この節の主定理を与えることにする。

Theorem 2.9 $(R, \pi R)$ は離散付値環で A は Rを含む可換環とするとき次が成り立つ。
(1) A が generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R のとき、$d = \mathrm{tr.deg}_k A/\pi A$ とおけば、$d = 1$ または $d = 0$ が成り立つ。
(2) A が generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R であり、かつ、$d = 1$ を満たすための必要十分条件は、条件 (C) を満たす $R^{[\infty]}$の元の有限列 $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ が存在して

$$A \cong_R R^{[n]}/(\pi X_2 - f_1, \pi X_3 - f_2, \ldots, \pi X_n - f_{n-1})$$

が成立することである。さらに、この場合、この同型から定まる A の R上の生成元 $x_1, \ldots x_n$に対し、$\overline{x}_j = x_j \bmod(\pi A)\ (1 \leq j \leq n)$ として、$L = k(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1})$ とおくとき、L は k の有限次代数拡大体であって、$A/\pi A = L[\overline{x}_n] \cong L^{[1]}$ が成り立つ。
(3) A が generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R であり、かつ、$d = 0$ を満たすための必要十分条件は、条件 (C) を満たす $R^{[\infty]}$の元の無限列 $f_1, f_2, \ldots$ が存在して、

$$A \cong_R R^{[\infty]}/(\pi X_2 - f_1, \pi X_3 - f_2, \ldots, \pi X_n - f_{n-1}, \ldots)$$

が成立することである。また、このとき、A は R上有限生成ではない。

証明 (1) は Proposition 2.3 から明らかなので (2) と (3) を示す。上で述べたようにして、条件 (C) を満たす $R^{[\infty]}$の元の列 $f_1, f_2, \ldots$ を順次定めたとき、この列が有限で止まるのは $A = R[x_1, \ldots, x_i]$

となるような i が存在する場合である。そうでないとき、つまり、有限で止まらずに無限列が得られたときは、$A_\infty = R[x_1, x_2, \ldots]$ とおけば、Proposition 2.8 より、πA_∞は A_∞の極大イデアルとなるので、$\pi A \cap A_\infty = \pi A_\infty$が成り立ち、従って、Lemma 2.2 から、$A_\infty = A$ であることが分かる。これらの事実と Proposition 2.7 および Proposition 2.8 より主張は正しい。

この定理から、$d = 1$ のとき、$k \subseteq L \subseteq A/\pi A$ を満たす kの有限次代数拡大体 L が存在して、$A/\pi A \cong L^{[1]}$ が成立することが分かる。このような L は A に対して一意的に定まることに注意して欲しい。今後、この L のことを、$A/\pi A$ の係数体と呼ぶことにする。

最後に次の結果を示して本節を終えることにする。

Corollary 2.10 A が generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R であり、かつ、$d = 1$ なら、A は R上有限生成な 2 次元正則環である。

証明 有限生成であることは Theorem 2.9 より明らかである。正則環であることを示すには、任意の素イデアル Pに対し、A_Pが正則局所環であることをいえばよい。$\pi \notin P$のときは $A[\pi^{-1}] \cong K^{[1]}$ より直ちに分かる。また、$P = \pi A$ のときも正しい。そこで、$\pi A \subseteq P$、かつ、$P \neq \pi A$ としてよい。このとき、$A/\pi A$ の係数体を L とすれば、$P/\pi A$ は $A/\pi A \cong L^{[1]}$の非零イデアルゆえ、従って、$P = (\pi,\ a)A$ を満たす $a \in A$ が存在することが分かる。よって、A_Pは正則局所環である。また、この議論から $\mathrm{ht}(P) = 2$、かつ、Pは極大イデアルとなるので、A のクルル次元は 2 である。

Remark 2.11 $d = 0$ のときも A がネーター環なら、$A[\pi^{-1}] \cong K^{[1]}$、かつ、$\pi A$ が極大イデアルであることから、A のクルル次元は 1 であることが分かり、従って、Proposition 2.1 より、A は Dedekind 環になる。

3 ネーター性

記号や仮定は前節と同じとする。従って、A は generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R であり、x は $A[\pi^{-1}] = K[x]$ を満たす A の元である。本節では、この A がいつネーター環になるかについて考えてみたい。$d = \mathrm{tr.deg}_k A/\pi A$ とおく。Theorem 2.9 より、$d = 1$ または $d = 0$ であり、さらに、$d = 1$ なら A は R上有限生成ゆえ、必然的にネーター環になる。従って問題となるのは $d = 0$ のときであるが、まず、一般的に次が成り立つ。

Theorem 3.1 A が generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R のとき、A がネーター環であるための必要十分条件は $\mathrm{ht}(\pi A) = 1$ が成立することである。

証明 必要性は明らかゆえ十分性のみ示す。$d = 0$ としてよい。A がネーター環であることをいうには、Cohen の定理 ([3], p.8) より、A の任意の素イデアル P が有限生成であることを示せばよい。

まず、$P \subseteq \pi A$ なら、$\mathrm{ht}\,(\pi A) = 1$ ゆえ、$P = (0)$ または $P = \pi A$ となるので、Pは有限生成。また、$\pi \in P$なら、Theorem 2.9 よりπAが極大イデアルであことに注意すれば、$P = \pi A$ を得る。よって、$P \not\subseteq \pi A$、かつ、$\pi \notin P$としてよい。すると、$\pi A \subseteq P + \pi A$、かつ、$\pi A$ は極大ゆえ、$P + \pi A = A$ が成り立ち、従って、$b + \pi a = 1$ を満たす $b \in P$と $a \in A$ が存在する。一方、$A[\pi^{-1}] = K[x]$ はネーター環、かつ、$P[\pi^{-1}]$ は $A[\pi^{-1}]$ の素イデアルゆえ、ある A の有限生成イデアル Jに対して、$P[\pi^{-1}] = J[\pi^{-1}]$ が成り立つ。必要なら Jの代わりに $J + bA$ を考えることで、$b \in J$と仮定してよい。このとき、任意の $u \in P$について、$P[\pi^{-1}] = J[\pi^{-1}]$ より、$\pi^n u \in J$なる $n \geq 1$ が存在するが、すると、$u = (1 - \pi^n a^n)u + \pi^n a^n u$ において、$1 - \pi^n a^n \in (1 - \pi a)A = bA \subseteq J$、かつ、$\pi^n a^n u \in J$ゆえ、$u \in J$を得る。よって、$P = J$となり、$P$は有限生成である。

この定理から、$h = \mathrm{ht}(\pi A)$ とおくとき、A がネーター環であるかどうかをみるには $h = 1$ であるかどうかを調べればよいことになる。以下、これに関連するいくつかの結果について述べることにする。なお、Proposition 2.3 より、$h \neq 1$ ならば $h = 2$ であることに注意しておく。

Lemma 3.2 $p = \bigcap_{n=0}^{\infty} \pi^n A$ とするとき、次が成り立つ。

(1) p は A の素イデアルである。

(2) $h = 1 \Longleftrightarrow p = (0)$

(3) $h = 2 \Longleftrightarrow p \neq (0)$

証明 π が A の素元であることから (1) は容易に分かる。また、(3) は (2) の対偶である。よって、(2) のみ示せばよい。まず、$h = 1$ とすると、$p \subseteq \pi A$ かつ $p \neq \pi A$ より、$p = (0)$ を得る。次に逆を示すために、$p = (0)$ と仮定して、$(0) \neq q \subseteq \pi A$ を満たす A の素イデアル q を考える。このとき、q の元 $b \neq 0$ について、$p = (0)$ ゆえ、$b \in \pi^n A$ かつ $b \notin \pi^{n+1} A$ となる $n \geq 1$ がある。$b = \pi^n c$ とすれば、$c \notin \pi A$ であり、特に、$c \notin q$ でもある。一方、$b = \pi^n c \in q$、かつ、q は素イデアルゆえ、従って、$\pi \in q$ を得る。よって、$q = \pi A$ となり、$h = 1$ が示せた。

以下、$\hat{R}$, $\hat{A}$ は各々 R, A の π-進完備化を表すものとし、$\varphi : A \to \hat{A}$は自然な準同型写像とする。このとき、$\pi^n A \cap R = \pi^n R$ $(n \geq 1)$ ゆえ、$\hat{R}$ は $\hat{A}$ の部分環と見なせることに注意する。また、$\mathrm{Ker}(\varphi) = p = \bigcap_{n=0}^{\infty} \pi^n A$ である。

Lemma 3.3 $h = 2 \Longleftrightarrow \varphi(x)$ は R上代数的。

証明 $\beta = \varphi(x)$ とおく。まず、$h = 2$ なら、Lemma 3.2 より pは A の非零素イデアルである。さらに、$\pi \notin p$ ゆえ、$p[\pi^{-1}]$ は $A[\pi^{-1}] = K[x]$ の非零素イデアルになる。よって、ある $f(X) \in R[X]$ が存在して、$p[\pi^{-1}] = f(x)K[x]$ が成り立つ。このとき、$f(x) \in p[\pi^{-1}] \cap A = p$、かつ、$p = \mathrm{Ker}(\varphi)$ ゆえ、$\varphi(f(x)) = f(\beta) = 0$ となり、従って、βは R上代数的である。逆にβが R上代数的なら、ある $0 \neq f(X) \in R[X]$ に対して $f(\beta) = 0$ が成立する。このとき、$f(\beta) = \varphi(f(x))$ ゆえ、

$f(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi) = p$ を得る。ここで x は R上代数的独立ゆえ $f(x) \neq 0$ であることに注意すれば、$p \neq (0)$ が分かる。よって、Lemma 2.1 より、$h = 2$ が成り立つ。

Lemma 3.4 $A^* = A \otimes_R \hat{R}$とおくとき、$A^*$は generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over $\hat{R}$ である。

証明 $\hat{R}$ は R上忠実平坦かつ π は A の正則元ゆえ、π は A^* の正則元である。よって、$A^* \subseteq A^*[\pi^{-1}]$ が成り立つ。一方、$K^* = \hat{R}[\pi^{-1}]$ とおくとき、

$$\begin{aligned} A^*[\pi^{-1}] &\cong (A \otimes_R \hat{R}) \otimes_R R[\pi^{-1}] \cong (A \otimes_R R[\pi^{-1}]) \otimes_R \hat{R} \\ &\cong R[\pi^{-1}]^{[1]} \otimes_R \hat{R} \cong \hat{R}[\pi^{-1}]^{[1]} \end{aligned}$$

従って、A^* は整域であり、かつ、$A^*[\pi^{-1}] \cong (K^*)^{[1]}$ が成り立つことが分かった。さらに、

$$\begin{aligned} A^*/\pi A^* &\cong A^* \otimes_R R/\pi R \cong (A \otimes_R \hat{R}) \otimes_R R/\pi R \\ &\cong (A \otimes_R R/\pi R) \otimes_k (\hat{R} \otimes_R R/\pi R) \cong A/\pi A \otimes_k \hat{R}/\pi \hat{R} \\ &\cong A/\pi A \otimes_k k \cong A/\pi A \end{aligned}$$

ゆえ、$A^*/\pi A^*$は整域である。以上で、主張が示せた。

Proposition 3.5 $h = 2$ なら、$A/\pi A$ は k の有限次代数拡大体である。

証明 上と同様に $A^* = A \otimes_R \hat{R}$ とし、$p^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} \pi^n A^*$とおく。このとき、$p^* \neq (0)$ である。実際、$p^* = (0)$ とすると、$p = \bigcap_{n=0}^{\infty} \pi^n A$ について、$p \subseteq pA^* \cap A \subseteq p^* \cap A = (0)$ より $p = (0)$ を得るが、これは Lemma 3.2 に矛盾する。$p^* = (0)$ ゆえ、Lemma 3.4 と 3.2 より $\mathrm{ht}(\pi A^*) = 2$ が分かる。また、$A/\pi A = A^*/\pi A^*$も成り立つ。従って、必要なら A を A^*で置き換えることにより、$R = \hat{R}$ と仮定してよい。さて、$h = 2$ ゆえ、Proposition 2.3 から $d = 0$ となり、等号

$$\mathrm{ht}(\pi A) = \mathrm{ht}(\pi R) + \mathrm{tr.deg}_R A - \mathrm{tr.deg}_k A/\pi A$$

が成り立つことに注意する。Rは完備局所環ゆえ、従って、[4] の Theorem 3.6 より $A/\pi A$ は k 上有限生成なある整域の部分環になることが分かる。一方 $A/\pi A$ は k の代数拡大体である。よって、$A/\pi A$ は k の有限次代数拡大体である。

Corollary 3.6 $d = 0$ のとき、$A/\pi A$ が k の有限次代数拡大体でないなら A はネーター環である。

証明 Proposition 3.5 より $h = 1$ となるので、Theorem 3.1 より結論を得る。

Corollary 3.7 条件 (C) を満たす $R^{[\infty]}$の元の無限列 $f_1, f_2, \ldots$ について、$\deg_{X_i} f_i \geq 2$ となる i が無数に存在するなら、Proposition 2.8 で定めた B_∞はネーター環である。

最後に例をひとつ挙げて本節を終えることにする。

Example 3.8 $R = \boldsymbol{Q}[\pi]_{(\pi)}$とする。素数の無限列 $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \ldots$ を考え、$x_1 = X,\ x_i = \pi^{-1}({x_{i-1}}^2 - p_{i-1})\ (i \geq 2)$ により $x_1, x_2, \ldots$ を定めるとき、$A = R[x_1, x_2, \ldots]$ とおけば、A は generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R、かつ、ネーター環である。

4 生成元の数

この節では、$d = \mathrm{tr.deg}_k A/\pi A = 1$ と仮定する。この場合、A は R上有限生成となるが、その生成元の個数について論じてみたい。Theorem 2.9 から定まる標準的な生成元を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする。即ち、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は条件 (C) を満たす $R^{[\infty]}$の元の有限列 $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$を用いて、$x_1 = x,\ \ x_i = \pi^{-1} f_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1})\ (i \geq 2)$ により与えられるものである。

Lemma 4.1 A は $R[x_n]$ 上整である。

証明 $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ が条件 (C) を満たすから、各 $i\ (1 \leq i \leq n-1)$ について、

$$\pi^{N_i} f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \text{ が } R[x_1, \ldots, x_{i-1}] \text{ に係数をもつ } x_i \text{ のモニック多項式}$$

となるような $N_i \geq 0$ が存在する。ここで、$\pi^{N_i+1} x_n = \pi^{N_i} f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ ゆえ、このことから、x_1 は $R[x_n]$ 上整、x_2 は $R[x_1, x_n]$ 上整、x_3 は $R[x_1, x_2, x_n]$ 上整、$\ldots$ となることが分かる。よって、A は $R[x_n]$ 上整である。

以下、L は $A/\pi A$ の係数体とする。従って、$A/\pi A = L[\overline{x}_n] \cong L^{[1]}$ が成り立つ。

Lemma 4.2 $L = k(\omega_1, \ldots \omega_r)$ を満たす$\omega_1, \ldots, \omega_r \in L$、および、$t_j \bmod(\pi A) = \omega_j$を満たす $t_1, \ldots t_r \in A$ について、$B = R[t_1, \ldots, t_r, x_n]$ とおけば、$\hat{A} = \hat{B}$、かつ、$\pi A \cap B = \pi B$ が成り立つ。ただし、$\hat{A},\ \hat{B}$ は各々、$A,\ B$ の π-進完備化を表すものとする。

証明 B はネーター環であり、かつ、Lemma 3.1 より A は有限 B-加群ゆえ、自然な写像 $\hat{B} \to \hat{A}$ は単写である。一方、Bの定義から、$B/(\pi A \cap B) = A/\pi A$ が成り立つので、$\hat{B} \to \hat{A}$ は全写でもある。よって、$\hat{B} \cong \hat{A}$ が成立する。さらに、$B/\pi B \cong \hat{B}/\pi\hat{B} \cong \hat{A}/\pi\hat{A} \cong A/\pi A$ ゆえ、従って、πB は B の素イデアルである。ここで、$\pi B \subseteq \pi A \cap B$、かつ、$\mathrm{ht}(\pi B) = \mathrm{ht}(\pi A \cap B) = 1$ ゆえ、$\pi B = \pi A \cap B$ が成り立つ。

この補題より、$x \in \hat{A} = \hat{B} = B[[\pi]]$ となるので、ある $b_0, b_2, \ldots \in B$が存在して、

$$x = b_0 + b_1\pi + b_2\pi^2 + \cdots + b_i\pi^i + \cdots$$

と表せることが分かる。ここで、

$$y_0 = x, \quad y_i = \pi^{-i}(x - b_0 - b_1\pi - \cdots - b_{i-1}\pi^{i-1}) \quad (i \geq 1)$$

とおく。このとき、$x - (b_0 + b_1\pi + \cdots + b_{i-1}\pi^{i-1}) \in \pi^i \hat{A} \cap A = \pi^i A$ ゆえ、$y_i \in A$ $(i \geq 1)$ に注意する。

Lemma 4.3 $A = B[y_0, y_1, \ldots]$ が成り立つ。

証明 $C = B[y_0, y_1, \ldots]$ とおくとき、$\pi A \cap C = \pi C$ が示せればよい。実際、$z \in \pi A \cap C$ に対し、$z \in B[y_0, \ldots, y_r]$ となるような $r \geq 0$ があるが、$B[y_0, \ldots, y_r] = B[y_0 - b_0, \ldots, y_r - b_r]$ ゆえ、この z が適当な $b \in B$ と $c_0, c_1, \ldots, c_r \in B[y_0, \ldots, y_r]$ を用いて

$$z = b + (y_0 - b_0)c_0 + (y_1 - b_1)c_1 + \cdots + (y_r - b_r)c_r$$

と表せることが分かる。このとき、$y_i - b_i = \pi y_{i+1} \in \pi C \subseteq \pi A$ $(i \geq 0)$ ゆえ、$b \in \pi A \cap B$である。従って、Lemma 3.2 より、$b \in \pi B \subseteq \pi C$ となり、$z \in \pi C$ を得る。よって、$\pi A \cap C = \pi C$ が成り立つ。

Lemma 4.4 $A = B[y_m]$ が成立するような $m \geq 0$ が存在する。

証明 Lemma 3.3 より $A = B[y_0, y_1, \ldots]$ が成り立つので、$x_i \in B[y_0, y_1, \ldots, y_m]$ が任意の $1 \leq i \leq n$ に対して成立するような m がある。すると、$A = B[x_1, \ldots, x_n] \subseteq B[y_0, \ldots y_m] \subseteq A$ ゆえ、$A = B[y_0, \ldots, y_m]$ を得る。一方、$y_i = \pi y_{i+1} + b_i \in B[y_{i+1}]$ $(i \geq 0)$ より、$B[y_0, \ldots, y_m] = B[y_m]$ となるので、よって、$A = B[y_m]$ が成立する。

以上の結果をまとめて、次の定理を得る。

Theorem 4.5 A は generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R で、$\mathrm{tr.deg}_k A/\pi A = 1$ とする。$A/\pi A$ の係数体 L について、$L = k(\omega_1, \ldots \omega_r)$ とするとき、$t_i \bmod(\pi A) = \omega_i$ を満たす $t_i \in A$ $(1 \leq i \leq r)$ に対し、$A = R[t_1, \ldots, t_r, y, z]$ が成立するような y と z が存在する。

Corollary 4.6 上の定理と同じ仮定のもとで、L が k の単純拡大体なら、従って、特に k が完全体なら、A は R上 3 個以下の元で生成される。

5 同型類の決定

この節では、$k = \overline{k}$、即ち、kが代数的閉体の場合に、これまでの結果を利用して generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over Rの R-代数としての同型類を決定してみる。そのために、次のような記号を導入しておく。

Definition 5.1 Rの完備化 $\hat{R} = R[[\pi]]$ の元 $\hat{a} = a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \cdots$ に対し、

$$R\langle\hat{a}\rangle = R[x, \pi^{-1}(x - a_0), \pi^{-2}(x - a_0 - a_1\pi), \pi^{-3}(x - a_0 - a_1\pi - a_2\pi^2), \ldots]$$

により、$K[x]$ の部分環 $R\langle\hat{a}\rangle$ を定義する。

Theorem 5.2 k が代数的閉体のとき、Rを含む可換環 A について次が成り立つ。

(1) A が generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R、かつ、$d = 1$ となるための必要十分条件は、ある $a \in R$と $n \geq 0$ が存在して、$A = R[\pi^{-n}(x - a)]$ が成立することである。

(2) A が generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R、かつ、$d = 0$ となるための必要十分条件は、ある $\hat{a} \in \hat{R}$ が存在して、$A = R\langle\hat{a}\rangle$ が成立することである。さらに、このとき、A がネーター環であるための必要十分条件は、$\hat{a}$ が R上超越的となることである。

証明 $k = \overline{k}$ ゆえ、$f_1, f_2, \ldots$ が条件 (C) を満たす $R^{[\infty]}$の元の無限列なら、ある $a_0, a_1, \ldots \in R$が存在して、$f_i = X_i - a_i$ $(i \geq 1)$ が成り立つ。このとき、$x_1 = x$, $x_i = \pi^{-1} f_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1})$ により $x_1, x_2, \ldots$ を定めれば、

$$x_i = \pi^{-(i-1)}(x - a_0 - a_1\pi - \cdots - a_{i-2}\pi^{i-2}) \quad (i \geq 2)$$

となる。また、$x_i = \pi x_{i+1} + a_{i-1}$ $(i \geq 1)$ ゆえ、$A_i = R[x_1, \ldots, x_i]$ とおくとき、$A_i = R[x_i]$ が成り立つ。さらに、$A_\infty = R[x_1, x_2, \ldots]$ とするとき、$\hat{a} = a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \cdots$を考えれば、定義より、$A_\infty = R\langle\hat{a}\rangle$ を得る。以上のことと、Theorem 2.9 より、(1) および (2) の前半が成り立つことが分かる。(2) の後半に関しては、$A = R\langle\hat{a}\rangle$ について、$A/\pi A = R/\pi R = k$ ゆえ、$A/\pi^n A = R/\pi^n R$ $(\forall n \geq 1)$ が成り立ち、従って、$\hat{A} = \hat{R}$ であることに注意して欲しい。このとき、自然な写像$\varphi : A \to \hat{A} = \hat{R}$ について、$\varphi(x) = \hat{a}$ が成り立つので、Lemma 3.3、Lemma 3.2 および Theorem 3.1 より結論を得る。

この定理より、$d = 1$ のときは $A \cong R^{[1]}$が成り立ち、従って、この場合、同型類はひとつしかない。そこで、次に $d = 0$ の場合の同型類を決定してみる。そのために補題を用意する。

Lemma 5.3 Rの単数群を $R^\times$で表すとき、$\hat{a} \in \hat{R}$ と $u \in R^\times$ および $v \in R$に対し、次が成り立つ。

(1) $R\langle\hat{a}\rangle \cong_R R\langle\pi\hat{a}\rangle$

(2) $R\langle\hat{a}\rangle \cong_R R\langle u\hat{a}\rangle$

(3) $R\langle\hat{a}\rangle \cong_R R\langle\hat{a} + v\rangle$

証明 $K[x]$ の K-自己同型写像 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を、各々、$\sigma_1(x) = \pi x$, $\sigma_2(x) = ux$, $\sigma_3(x) = x + v$ で定義するとき、これらが R-同型

$$\sigma_1 : R\langle\pi\hat{a}\rangle \cong_R R\langle\hat{a}\rangle, \quad \sigma_2 : R\langle u\hat{a}\rangle \cong_R R\langle\hat{a}\rangle, \quad \sigma_3 : R\langle\hat{a} + v\rangle \cong_R R\langle\hat{a}\rangle$$

を導くことが容易に分かる。よって、主張が成り立つ。

Theorem 5.4 $\hat{R}$ の元 $\hat{a}$ および $\hat{b}$ について、$R\langle\hat{a}\rangle \cong_R R\langle\hat{b}\rangle$ が成り立つための必要十分条件は、$\hat{b} = u\hat{a} + v$ または $\hat{b} = u\hat{a} + v$ が成立するような $0 \neq u \in R$ と $v \in R$ が存在することである。

証明 必要性は、$u = \pi^n u_1$ となる $n \geq 0$ と $u_1 \in R^{\times}$が存在することに注意すれば Lemma 5.3 から導ける。逆に、$\sigma : R\langle\hat{b}\rangle \to R\langle\hat{a}\rangle$ を R-同型とすると、$R\langle\hat{b}\rangle[\pi^{-1}] = R\langle\hat{a}\rangle[\pi^{-1}] = K[x]$ ゆえ、σ は K-自己同型 $K[x] \to K[x]$ を引き起こす。従って、$\sigma(x) = ux + v$ $(u,\ v \in K,\ u \neq 0)$ と表せる。このとき、$\sigma^{-1}(x) = u^{-1}x - u^{-1}v$、かつ、$u \in R$ または $u^{-1} \in R$ ゆえ、必要なら σ の代わりに σ^{-1} を考えることにより、$u \in R$ としてよい。すると、$v \in R$ でもある。実際、$A = R\langle\hat{a}\rangle$ とおいて $v = \pi^{-n}c$ $(c \in R,\ n \geq 0)$ と表すとき、$y = ux + v$ について、$v = y - ux \in A$ ゆえ、$n \geq 1$ なら、$c = \pi^n v \in \pi^n A \cap R = \pi^n R$ より、$v \in R$ を得る。さて、$R\langle\hat{b}\rangle = R[x, \pi^{-1}(x - b_0), \pi^{-2}(x - b_0 - b_1\pi), \ldots]$ 、かつ、σ は R-同型ゆえ、$A = \mathrm{Im}\ (\sigma) = R[y, \pi^{-1}(y - b_0), \pi^{-2}(y - b_0 - b_1\pi), \ldots]$ が成り立つ。よって、自然な写像$\varphi : A \to \hat{A} = \hat{R}$に対し、$\varphi(y) = \hat{b}$ を得る。一方、$\varphi(x) = \hat{a}$ ゆえ、$\varphi(y) = \varphi(ux + v) = u\hat{a} + v$ でもある。従って、$\hat{b} = u\hat{a} + v$ が成立する。

参考文献

[1] T. Asanuma, Polynomial fibre rings of algebras over noetherian rings, Invent. Math. **87** (1987), 102-127

[2] I. S. Cohen, Lengths of prime ideal chain, Amer. J. Math. **76** (1954), 654-668

[3] M. Nagata, Local Rings, Interscience Tracts **13**, John Wiley, 1962

[4] N. Onoda, Subrings of finitely generated rings over a pseudo-geometric ring, Japan. J. Math. **10** (1984), 29-53

Exotic $\mathbb{A}^3$-fibrations and nonlinearizable algebraic group actions on $\mathbb{R}^5$

富山大 教育　浅沼照雄

序　Rを可換環とするとき $R^{[n]}$ で n 変数の R係数多項式環を表わす。体 k 上のトーラス群（i.e., $G_m = k^* = k \setminus (0)$）の $k^{[n]}$ への代数的作用は線形作用と共役であるか？という問題をトーラス群の線形化問題という。よりくわしく述べると、

$$\phi : k^* \longrightarrow Aut_k k^{[n]}$$

を群の中への準同形とするとき $\tau \in Aut_k k^{[n]}$ が存在して

$$\tau\phi(k^*)\tau^{-1} \subset GL_n(k) \subset Aut_k k^{[n]}$$

とできるか？ということである。ここで $Aut_k k^{[n]}$ は $k^{[n]}$ の k-自己同型群であり，$GL_n(k)$ の任意の matrix M について $k^{[n]} = k[x_1, \cdots, x_n]$ とおけば

$$M ; (x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_n) M$$

で $k^{[n]}$ の k-自己同型を定義することにより $GL_n(k)$ を $Aut_k k^{[n]}$ の部分群と考えることができる。なお上の式の右辺は matrix と vector の通常の積を表わしている。

体 k の標数が正ならば上記問題について反例が存在することはすでに知られている[A 2]。

本稿ではこの問題についての反例を $k^{[n]} = \mathbb{R}^{[5]}$ のときに存在することを示す。

線形化問題についての文献は[A 2]を参照してください。

§1. Rectifiableness

以下 k を体とする。

Def. $k^{[n]} = k[x_1, \dots, x_n]$ の prime ideal P が rectifiable とは $\tau \in \mathrm{Aut}_k k^{[n]}$ が存在して $P = (\tau(x_1), \dots, \tau(x_m))$ なることである。ここで $(\tau(x_1), \dots, \tau(x_m))$ は $\tau(x_i)$ $(i = 1, \dots, m)$ で generate された $k^{[n]}$ の ideal を表わす。ゆえ必然的に $m = \mathrm{height}\, P$ となっていることに注意する。

さて $k^{[n]}/P = k^{[m]}$ なる(かならずしも rectifiable になるとは限らない) $k^{[n]}$ の prime ideal P についての Rees環

$$A = k^{[n]}[t, t^{-1}P]$$

を考える。ゆえ t は不定元である。

Prop. 1.1. P が rectifiable ならば $A = k[t]^{[n]}$, i.e., A は $k[t]$ 上 n 変数の多項式環である。

Pf. def. より

$$\exists\, \tau \in \mathrm{Aut}_k k^{[n]} \ \text{s.t.}\ P = (\tau(x_1), \dots, \tau(x_{n-m})).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} A &= k[\tau(x_1), \dots, \tau(x_n), t, t^{-1}\tau(x_1), \dots, t^{-1}\tau(x_{n-m})] \\ &= k[t, t^{-1}\tau(x_1), \dots, t^{-1}\tau(x_{n-m}), \tau(x_{n-m+1}), \dots, \tau(x_n)] \\ &= k[t]^{[n]} \end{aligned}$$

Prop. 1.2. Q を $k^{[n+m]} = k[x_1, \dots, x_{n+m}]$ の prime ideal で上記の P 及び $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ で generate されたものとする。すると Q は rectifiable である。

Pf. 仮定より

$$k^{[n]} = k[f_1, \cdots, f_m] + P \quad (f_i \in k^{[n]})$$

と表わせる。ゆえに $g_i \in k^{[m]}$ が存在して

$$x_i \equiv g_i(f_1, \cdots, f_m) \pmod{P} \quad (i=1,\cdots,n)$$

をみたす。そこで $\tau \in Aut_k k^{[n+m]}$ を

$$\begin{cases} \tau(x_i) = x_i - g_i(\tau(x_{n+1}), \cdots, \tau(x_{n+m})) & (i=1,\cdots,n) \\ \tau(x_{n+j}) = x_{n+j} + f_j(x_1, \cdots, x_n) & (j=1,\cdots,m) \end{cases}$$

で def. する。τ の逆元 τ^{-1} は

$$\begin{cases} \tau^{-1}(x_i) = x_i + g_i(x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}) & (i=1,\cdots,n) \\ \tau^{-1}(x_{n+j}) = x_{n+j} - f_j(\tau^{-1}(x_1), \cdots, \tau^{-1}(x_n)) & (j=1,\cdots,m) \end{cases}$$

で与えられるから τ が welldefined であることに注意する。明らかに

$$\tau(x_i) \equiv 0 \pmod{Q} \quad (i=1,\cdots,n)$$

であるから $Q \supset (\tau(x_1), \cdots, \tau(x_n))$. がなりたつ。$Q$ の height が n であることに注意して $Q = (\tau(x_1), \cdots, \tau(x_n))$ を得る。

Cor. 1. 3. $A^{[m]} = k[t]^{[n+m]}$.

Pf.
$$\begin{aligned} A^{[m]} &= A[t^{-1}x_{n+1}, \cdots, t^{-1}x_{n+m}] \\ &= k^{[n+m]}[t, t^{-1}P, t^{-1}x_{n+1}, \cdots, t^{-1}x_{n+m}] \\ &= k^{[n+m]}[t, t^{-1}Q] \\ &= k[t]^{[n+m]} \end{aligned}$$

最後の等号は Prop. 1.1 及び Prop. 1.2 より成立することに注意すればよい。

Cor. 1.4. $F_j \in k^{[n+m]} = k[x_1, \dots, x_{n+m}]$ を

$$F_j = t^{-1}x_{n+j} - t^{-1}f_j(tx_1 + g_1, \dots, tx_n + g_n)) \quad (j = 1, \dots, m)$$

で def. する。ここで $f_j \in k^{[n]}$, $g_i \in k^{[m]}$ は Prop. 1.2 で def されたものとする。すると

$$A = k[t]^{[n+m]} \big/ (F_1, \dots, F_m)$$

がなりたつ。ここで $k[t]^{[n+m]} = k[t, x_1, \dots, x_{n+m}]$

Pf. Cor. 1.3 より

$$A[t^{-1}x_{n+1}, \dots, t^{-1}x_{n+m}] = k^{[n+m]}[t, t^{-1}Q],$$

Prop. 1.2 より

$$k^{[n+m]}[t, t^{-1}Q] = k[t, t^{-1}\tau(x_1), \dots, t^{-1}\tau(x_n), \tau(x_{n+1}), \dots, \tau(x_{n+m})]$$

を得る。ところで $\tau \in Aut_k k^{[n+m]}$ は自然な map

$$k^{[n+m]} \otimes k[t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} k[t, t^{-1}]^{[n+m]}$$

により $k[t, t^{-1}]^{[n+m]}$ の $k[t, t^{-1}]$-自己同型と見なせる。ゆえに

$$\tau^{-1}(k^{[n+m]}[t, t^{-1}Q]) \subset k[t, t^{-1}]^{[n+m]}$$

は welldefined で

$$\tau^{-1}(k^{[n+m]}[t, t^{-1}Q]) = k[t, t^{-1}x_1, \dots, t^{-1}x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$$

がなりたつ。ゆえに

$$\begin{aligned} &\tau^{-1}(A)[t^{-1}\tau^{-1}(x_{n+1}), \dots, t^{-1}\tau^{-1}(x_{n+m})] \\ &\qquad = k[t, t^{-1}x_1, \dots, t^{-1}x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}] \end{aligned}$$

であり

$$\tau^{-1}(A)[F_1, \cdots, F_m] = k[t]^{[n+m]}$$

を得る。ゆえに

$$A \cong \tau^{-1}(A) = k[t]^{[n+m]} / (F_1, \cdots, F_m)$$

ゆえ $k[t]$-同型を同一視して Cor 1.4 が示された。

§2. 反例.

$\mathbb{R}^{[3]} = \mathbb{R}[x, y, z]$ とする。

$$\alpha(u) = u^3 - 3u, \quad \beta(u) = u^4 - 4u^2, \quad \gamma(u) = u^5 - 10u$$

とおいて

$$\Phi : \mathbb{R}^{[3]} \longrightarrow \mathbb{R}[u] \ (= \mathbb{R}^{[1]})$$

を

$$x \longmapsto \alpha(u), \quad y \longmapsto \beta(u), \quad z \longmapsto \gamma(u)$$

で def. する。 $P = \mathrm{Ker}\,\Phi \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{R}^{[3]}$ とおく。

Prop. 2.1 (Shastri [S]) 上記の P について次の(i),(ii)がなりたつ。

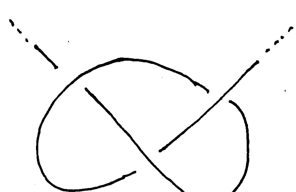
(i) $\mathbb{R}^{[3]}/P = \mathbb{R}^{[1]}$

(ii) P は rectifiable でない。

Pf. (i); $\Phi(yz - x^3 - 5xy + 2z - 7x) = u$

であるから Φ は surjective ゆえ (i) がなりたつ。

(ii); $(\alpha(u), \beta(u), \gamma(u))$ によってパラメータ表示される $\mathbb{R}^3$ 内の curve C は trefoil-knot になる。



C

一方 P が rectifiable ならば C は $\mathbb{R}^3$ の代数多様体としての自己同型により $\mathbb{R}^3$ の直線に移されるがこれは矛盾。

さて 上記の Pについての Rees 環

$$A = \mathbb{R}^{[3]}[t, t^{-1}P]$$

を考える。Pは ideal theoritic complete intersection であるから $\mathbb{R}^{[3]}$ の2つの元 f, g で generate される。ゆえに

$$A = \mathbb{R}[t, x, y, z, t^{-1}f, t^{-1}g]$$

と表わされる。

Prop. 2.2. 次の(i), (ii)がなりたつ。

(i) $A = \mathbb{R}[t, x, y, z, X, Y] / (tX - f, tY - g)$

(ii) $A = \mathbb{R}[t, x, y, z, u] / (t^{-1}u - t^{-1}h(tx + \alpha(u), ty + \beta(u), tz + \gamma(u)))$

ここで h は $\mathbb{R}[x, y, z]$ の元で $h(\alpha(u), \beta(u), \gamma(u)) = u$ をみたすものである。(たとえば

$h = yz - x^3 - 5xy + 2z - 7x$ など)

Pf. (i):

$$\psi : X \longmapsto t^{-1}f \ , \quad Y \longmapsto t^{-1}g$$

で def. される $\mathbb{R}[t, x, y, z]$ - hom.

$$\psi : \mathbb{R}[t, x, y, z, X, Y] \longrightarrow \mathbb{R}[t, x, y, z, t^{-1}f, t^{-1}g]$$

を考えて $\mathrm{Ker}\,\psi = Q$ とおく。 $(tX - f, tY - g) \supset Q$ を示せばよい。

F を Q の任意の元とする。すると $Ft^n \in (tX - f, tY - g)$ なる $n \geq 0$ が存在することに注意する。n をそのような数のうち最小のものとしておく。

$$Ft^n = (tX - f)G + (tY - g)H$$

とする。もし $n > 0$ ならば

$$-fG - gH \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ (t))$$

ゆえに f と g に共通因子がないことに注意すれば

$$G \equiv gl \ (\mathrm{mod}\,(t)) \ , \quad H \equiv -fl \ (\mathrm{mod}\,(t))$$

なる l が $\mathbb{R}[x, y, z]$ に存在する。ゆえに

$$G_1 = t^{-1}(G - gl) \ , \quad H_1 = t^{-1}(H + fl)$$

とおくと $G_1, H_1 \in \mathbb{R}[t, x, y, z, X, Y]$ であって

$$F t^n = (tX - f)\,t\,(Yl + G_1) + (tY - g)\,t\,(-Xl + H_1)$$

がなりたつ。ゆえに

$$F t^{n-1} = (tX - f)(Yl + G_1) + (tY - g)(-Xl + H_1) \in Q$$

となり n の最小性の仮定に矛盾する。

(ii) ; これは Cor. 1.4. の直接の結果である。

いま V を $tX-f$, $tY-g$ で def. された $\mathbb{R}^6$ 内の実代数多様体とする。すなわち V は (t, x, y, z, X, Y) でパラメータ表示されている $\mathbb{R}^6$ の $tX-f$, $tY-g$ の零点の集合である。そこで $\mathbb{R}^7$ の座標を (t, x, y, z, X, Y, Z) として injection (standered なもの)

$$\mathbb{R}^6 \hookrightarrow \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^7$$

によって $\mathbb{R}^6$ を $\mathbb{R}^7$ の部分空間と考える。ゆえ $V \times \mathbb{R}^1$ は $\mathbb{R}^7$ 内の代数多様体となる。ここで $V \times \mathbb{R}^1$ への $\mathbb{R}^*$ の作用 ϕ を ${}^{\forall}a \in \mathbb{R}^*$ に対して

$$\phi(a) : (t, x, y, z, X, Y, Z) \longrightarrow (a^{-2}t, x, y, z, a^2X, a^2Y, aZ)$$

によって def. する。ϕ は $\mathbb{R}^*$ の $\mathbb{R}^7$ への代数的作用の $V \times \mathbb{R}^1$ への制限として得られているは注意しておく。それゆえ ϕ は welldefined な代数的作用である。

一方 $V \times \mathbb{R}^1$ の座標環は $A^{[1]} = A[Z]$ であり Cor. 1.3 よりこれは $\mathbb{R}[t]$ 上 4 変数の多項式環であるから

$$V \times \mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}^5$$

がなりたつ。ゆえにこの代数的同型を通して ϕ を $\mathbb{R}^*$ の $\mathbb{R}^5$ への代数的作用と思える。以下この ϕ が線形化不可能であることをみるのであるが、そのために必要な補題を示しておく。

まず

$$A/tA = \mathbb{R}[t, x, y, z, X, Y]/(tX - f, tY - g, t)$$

$$= \mathbb{R}[t, x, y, z, X, Y]/(f, g, t)$$

$$\cong \mathbb{R}[u, X, Y]$$

であるから

$$A = \mathbb{R}[h, t^{-1}f, t^{-1}g] + tA$$

と表わせる。ここで h は Prop. 2.2 で def. されたものである。$A_t^\wedge$ で A の t-adic completion を表わせば

$$A_t^\wedge = \mathbb{R}[h, t^{-1}f, t^{-1}g][[t]]$$

すなわち 3-変数多項式環 $\mathbb{R}[h, t^{-1}f, t^{-1}g]$ 上 1 変数 t の formal power series ring となる。そこで h, $t^{-1}f$, $t^{-1}g$ をそれぞれ X_1, X_2, X_3 とおけば

$$A_t^\wedge[Z] = \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3][[t]][Z]$$

となる。ϕ より induce される $\mathbb{R}^*$ の $A[Z]$ への代数的作用を ϕ^* で表わすと ϕ^* は $A_t^\wedge[Z]$ への作用に拡張されて $^\forall a \in \mathbb{R}^*$ について

$$\phi^*(a) ; (X_1, X_2, X_3, t, Z) \to (X_1, a^2X_2, a^2X_3, a^{-2}t, aZ)$$

で def. されている。

一方 ϕ が線形化可能と仮定して ϕ^* が $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_5]$ $(= \mathbb{R}^{[5]})$ に線形に作用しているとする。すなわち $^\forall a \in \mathbb{R}^*$ について $\phi^*(a)$ は $A[Z] = \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_5]$ の $\mathbb{R}$-自己同型であって

$$\phi^*(a)\ ;\ (x_1,\dots,x_5) \longrightarrow (x_1,\dots,x_5)M_a$$

でdef.されているとする。ここでM_aは$GL_5(\mathbb{R})$のmatrixである。

（M_aはaにdependしていることに注意しておく）

Lemma. 2.3. 上記M_aとして

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & a^2 & & & \\ & & a^2 & & \\ & & & a^{-2} & \\ & & & & a \end{pmatrix}$$

なる対角行列とすることができる。

pf. 自然なmap $A \to \hat{A_t}$ はinjectiveである。ゆえ$A[Z]$は$\hat{A_t}[Z]$のsubringとなる。そこで$x_i^{(1)}$, $\mathbb{R}[x_1,x_2,x_3][t+T][Z]$の元としての1次のlinear formを表わすことにすれば

$$(x_1^{(1)},\dots,x_5^{(1)}) = (x_1,x_2,x_3,t,Z)N$$

と表わすことができる。ここでNはある$GL_5(\mathbb{R})$のmatrixである。そこで

$$(y_1,\dots,y_5) = (x_1,\dots,x_5)N^{-1}$$

とおくと

$$\mathbb{R}[x_1,\dots,x_5] = \mathbb{R}[y_1,\dots,y_5]$$

であってϕ^*は変数$y_1,\dots,y_5$に関してもlinearに作用している。それゆえy_iを新ためてx_i $(i=1,\dots,5)$とおいて最初からNは単位行列としてよい。そこで

$$\phi^*(a)\ ;\ (x_1,x_2,x_3,t,Z) \to (x_1,x_2,x_3,t,Z)M_a$$

に注意すれば

$$\phi^*(a)\ ;\ (x_1,\dots,x_5) \longrightarrow (x_1,\dots,x_5)M_a$$

となることがわかる。

Lemma. 2.3 はもしϕが線形化可能ならばϕの表現M_aで与え

られることを示している。

$\mathbb{R}^{[3]}[t, t^{-1}, Z]$ は t, t^{-1}, Z にそれぞれ grade $-2, 2, 1$ を与えることによって $\mathbb{R}^{[3]}$ 上の graded ring になる。

$$A[Z] = \mathbb{R}^{[3]}[t, t^{-1}P, Z]$$

はこの graded subring になっている。そこで I_i を $A[Z]$ の i 次の homogeneous part とすれば

$$A[Z] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} I_i$$

である。

Lemma. 2.4. 上記の I_i について次の(i)〜(iv)がなりたつ。

(i) $\forall F \in I_i$ ($\forall i \in \mathbb{Z}$) について

$$\phi^*(a)(F) = a^i F \quad (\forall a \in \mathbb{R}^*)$$

がなりたつ。

(ii) $I_i \subset ZA[Z]$ ($i \equiv 1 \pmod 2$ のとき)

(iii) $I_{-2} \cap A = t\mathbb{R}^{[3]}$

(iv) $I_2 \cap A = t^{-1}P$

証明は簡単なので略す。

Theorem. 2.5. ϕ は線形化不可能である。

pf. 線形化可能と仮定する。するとLemma 2.3より

$$A[Z] = \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_5]$$

と表わされて $\forall a \in \mathbb{R}^*$ について

$$\begin{aligned}\phi^*(a) : (x_1, \cdots, x_5) \longrightarrow &(x_1, \cdots, x_5) M_a \\ &= (x_1, a^2x_2, a^2x_3, a^{-2}x_4, a x_5)\end{aligned}$$

がなりたつ。

そこで

$$x_5 = \sum x_5^{(i)} \quad (x_5^{(i)} \in I_i \text{ の有限和})$$

とすると Lemma 2.4 より

$$\phi^*(a)(x_5) = \sum a^i x_5^{(i)} = \sum a\, x_5^{(i)}$$

がなりたつ。ゆえ $a^{i-1} = 1$ が $\forall a \in \mathbb{R}^*$ についてなりたつ。ゆえに

$$x_5 = x_5^{(1)} \in I_1$$

ゆえ 2.4.(ii) より x_5 は $A[Z]$ において Z でわり切れる。
x_5 は既約であるから $x_5 = b Z$ $(b \in \mathbb{R}^*)$ と表わせる。すなわち

$$A[Z] = \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4, bZ]$$

がなりたつ。そこで x_i を A 係数の Z の多項式とみてその定数項を y_i $(\in A)$ とおくと $A = \mathbb{R}[y_1, y_2, y_3, y_4]$ であるから

$$A[Z] = \mathbb{R}[y_1, y_2, y_3, y_4, Z]$$

がなりたつ。(Z に 0 を代入してたしかめればよい) ϕ^* の def. より明らかに

$$\phi^*(a) ; (y_1, y_2, y_3, y_4) \longrightarrow (y_1, a^2 y_2, a^2 y_3, a^{-2} y_4)$$

がなりたつ。そこで

$$y_4 = \sum y_4^{(i)} \quad (y_4^{(i)} \in I_i \cap A \text{ の有限和})$$

とおくと

$$\phi^*(a)(y_4) = \sum a^i y_4^{(i)} = \sum a^{-2} y_4^{(i)}$$

がなりたつ。ゆえ

$$y_4 = y_4^{(-2)} \in I_{-2} \cap A = t\mathbb{R}^{[3]}$$

ゆえに y_4 は t でわりきれるが y_4 は既約であるから $y_4 = ct$ $(c \in \mathbb{R}^*)$ と表わされる。同様にして $y_2, y_3 \in t^{-1}P$, $y_1 \in \mathbb{R}^{[3]}$

を示すことができる。とくに

$$y_2 = t^{-1}f_1 \ , \quad y_3 = t^{-1}g_1 \quad (f_1, g_1 \in P)$$

とおける。以上より

$$A = \mathbb{R}[x, y, z, t, t^{-1}f, t^{-1}g]$$

$$= \mathbb{R}[y_1, y_2, y_3, y_4]$$

$$= \mathbb{R}[t, y_1, t^{-1}f_1, t^{-1}g_1]$$

がなりたつ。そこで f_1, g_1 で generate された $\mathbb{R}^{[3]}\ (=\mathbb{R}[x,y,z])$ の ideal を P' とおくと $P' \subset P$ であって，上の式に $t=1$ を代入すると

$$\mathbb{R}^{[3]} = \mathbb{R}[y_1, f_1, g_1]$$

がなりたつから $P' = P$. さらに $\tau \in Aut_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{[3]}$ を

$$\tau : (x, y, z) \longrightarrow (f_1, g_1, y_1)$$

で def. すれば $P = (\tau(x), \tau(y))$ がなりたつ。すなわち P は rectifiable となり Prop. 2.1 に反する。ゆえに Φ は線形化不可能である。

§3. 問題

前節と同様にして線形化不可能な G_m^r の $\mathbb{R}^{[n]}$ への作用が $n \geq 5$, $n-r \geq 3$ のとき示すことができる。

Problem. 3.1. Prop. 2.1 を複素数体 $\mathbb{C}$ に拡張できるか?

Th. 2.5 の証明で基礎体が $\mathbb{R}$ であることを用いるのは Prop. 2.1 の所のみである。ゆえ 3.1 が正しければ Th. 2.5 の Φ を $\mathbb{C}$ へ拡張したものも線形化不可能となる。

Problem. 3.2. §2 の A について

$$A = \mathbb{R}^{[4]}$$

がなりたつか？

講演では $A \neq \mathbb{R}^{[4]}$ であると発表しましたがその後証明中にトポロジカルな Gap が見つかりまだ証明が確定しておりませんでした。

私としては $A \neq \mathbb{R}^{[4]}$ と予想しておりこの予想が正しければこの A は $\mathbb{R}$ 上多項式環の Cancellation problem の反例になる。

環 R 上の代数 A が $\mathbb{A}^r$-fibration とは次の 3 つの条件をみたすことである。

(1) A は R 上 finitely generated.

(2) A は R-flat.

(3) $A \otimes k(\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p})^{[r]}$ が $^\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ についてなりたつこと。ここで $k(\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$

R が regular local ring とくに discrete valuation ring のとき $\mathbb{A}^r$-fibration A について $n > 0$ が存在して

$$A^{[n]} = R^{[n+r]}$$

がなりたつ [A 1]。

Problem. 3. 3. R が regular local ring (又は discrete valuation ring) のとき $\mathbb{A}^r$-fibration A は $R^{[r]}$ か？

この問題について R が $\mathbb{Q}$ をふくまない discrete valuation ring (したがって regular local ring) については $r = 2$ のとき反例が存在する [A 1]。 R ⊃ $\mathbb{Q}$ なるときの反例は知られていない。そこで

$$A = \mathbb{R}^{[3]}[t, t^{-1}\mathfrak{p}]$$

を前節で def. した環とする。すると次がなりたつ。

Prop. 3.4. Aは$\mathbb{R}[t]$-代数として$\mathbb{A}^3$-fibration.

これはProp. 2.2. (i)の直接の結果である。

Prop. 3.5. $A \neq \mathbb{R}[t]^{[3]}$ ならば $A \otimes \mathbb{R}[t]_{(t)}$ は nontrivial な (i.e., 多項式環でない) discrete valuation ring $\mathbb{R}[t]_{(t)}$ 上 $\mathbb{A}^3$-fibration になっている。

pf. $A \otimes \mathbb{R}[t]_{(t)} = \mathbb{R}[t]_{(t)}{}^{[3]}$ ならば Aは$\mathbb{R}[t]$上 locally polynomial であるから $A = \mathbb{R}[t]^{[3]}$ がなりたつ [BCR].

以上§3の問題及び予想について又次の機会に新ためて論じたい。

参考文献

[A1] T. Asanuma, Polynomial fibre rings of algebras over noetherian rings, Invent. math. 87 (1987) 101-127

[A2] T. Asanuma, Non-linearizable algebraic group actions on $\mathbb{A}^n$, J. Algebra, 166 (1994) 72-79

[BCW] H. Bass, E. Connel, D. Wright, Locally polynomial algebras are symmetric algebras, Invent. math. 38 (1977) 279-299.

[S] A. Shastri, Polynomial representation of knots, Tôhoku Math. J. 44 (1992) 11-17.

COHEN-MACAULAY APPROXIMATIONS OVER GORENSTEIN RINGS

京都大学数理解析研究所 加藤 希理子
〒 606-01 京都市左京区北白川追分町
email:kiriko@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 Introduction

Gorenstein 局所環 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 上の有限生成加群 M にたいし、Auslander, Buchweitz により、次の完全列の存在が知られている [1]。

$$0 \to Y_M \stackrel{\zeta_M}{\to} X_M \stackrel{\rho_M}{\to} M \to 0$$

但し、(1) Y_M は射影次元有限な加群、X_M は極大 Cohen-Macaulay 加群であり、(2) 写像 ζ_M を通じて X_M と Y_M は共通の直和因子をもたない。これを M の極小 Cohen-Macaulay approximation という。定義より、任意の極大 Cohen-Macaulay 加群にたいして $\mathrm{Hom}_R(C, \rho_M) : \mathrm{Hom}_R(C, X_M) \to \mathrm{Hom}_R(C, M)$ は全射となる。([9] にも説明がある。) 我々が注目しているのは X_M の自由因子の最大階数であり、これを M の δ-invariant と呼んで $\delta_R(M)$ と表す。また M の i-th syzygy 加群 $\Omega^i_R(M)$ の δ-invariant で i- 次 δ-invariant $\delta^i_R(M) := \delta_R(\Omega^i_R(M))$ を定義する。本論文では "$\delta^i_R(M) = 0 \quad (\forall i \geq 0)$ なる R- 加群を特徴づけよ" という問題を扱う。この性質をみたす加群の例として最も単純なものは剰余体 k である [2]。$\delta^i(M) = 0 \quad (\forall i \geq 0)$ なるための必要条件は既にいくつか知られており、中でも Ding や Martsinkovsky の結果は有用である。

主結果 Theorm 3.5は、環 R が超曲面、即ち完備正則局所環 $(S, \mathfrak{m}, k)$ と $x \in \mathfrak{m}^2$ によって $R = S/(x)$ と書かれるとき、R 上の有限生成加群 M について $\delta^i(M) = 0$ $(\forall i \geq 0)$ なるための必要十分条件を記述している。尚、上述の Ding および Martsinkovsky の結果は、Theorem 3.5の系として直ちに得られる (Corollary 3.6, Corollary 3.7)。

議論を進める際の着眼点は、S- 加群としての M のホモロジー代数的な構造と R- 加群としての違いである。具体的には M の S- 自由分解によって R- 自由分解を構成する方法（Eisenbud 分解と呼ばれている。）を用いた。Eisenbud 分解は R- 自由分解を確実に得る方法であるが、必ずしも極小にならないのが欠点である。実際、たとえ S- 自由分解として極小なものを取ったとしても得られる Eiisenbud 分解は極小とは限らない。いっぽう極小な Eisenbud 分解の例も知ら

れており、中でも剰余体 k の極小自由分解は常に Eisenbud 分解の形で得られ、Tate 分解と呼ばれている [8]。

結論からいえば、M が極小な Eisenbud 分解を持つときに限って、$\delta^i(M) = 0 \ (\forall i \geq 0)$ となる、というのが Theorem 3.5の主張である。前述のように、剰余体 k がこれら 2 つの性質を持つことは、別々の結果として知られていたが、実はそれは偶然の両立ではなかったということが、この定理によって判った。

定理の証明に関しては、講演の際に見落していた点があったことを御報告し、お詫び申し上げます。

加群の間の準同型写像を複体の鎖準同型写像に持ち上げる場合、homotopy の差を考慮しなければならない。例えば、Theorem 3.5の直前の図は、（講演時には可換だと述べたが）厳密には、up to homotopy で 可換である。しかし、後述するように、我々の問題に関するかぎり、鎖準同型写像の極小性だけが重要であって、この性質は homotopy による影響を受けない。だから結論として、すべての結果は正しいのだが、議論の運び方を若干修正した。

尚、第 3 節における結果のなかには S の正則性を必要としないものもある。ここでは、繁雑さを嫌って S は常に正則と仮定した。

以上詳細な議論については、[5] にまとめましたので、御参照下さい。

2 Some basic properties

本節では、このあと必要な基本的な結果について復習する。

以下、$(R, \mathfrak{m}, k)$ を Gorenstein 局所環、M を有限生成 R- 加群とする。加群はすべて、有限生成加群のみを扱う。R- 加群 C が自由因子をもたないとき、この加群は *stable* だという。

次の 2 つの命題は、δ-invariant を計算するための道具である。

Corollary 2.1 ([1], [3] Proposition 1.5) 全射 R- 準同型写像 $N \to M$ があれば、次が成り立つ。

$$\delta_R(N) \geq \delta_R(M).$$

Corollary 2.2 ([1], [3] Corollary1.4) 以下は同値である。

1) $\delta_R(M) = 0$.

2) 任意の射影次元有限な R- 加群 Y と準同型写像 $f : M \to Y$ にたいし、次が成り立つ。$f \otimes_R k = 0$.

以下、$(S, \mathfrak{m}_S, k)$ を Gorenstein 局所環、$R := S/(x)$ は S 上の非零因子 $x \in \mathfrak{m}$ による剰余環とする。

R- 加群 M の S- 自由分解 $(P_\bullet, d_P)$ を取る。M の R- 自由分解を得るために、S- 自由分解を手がかりにすることは、極めて自然な発想である。はじめに

Shamashがこの考えを導入し、Eisenbudはさらに、一般的な構成方法を編みだした。我々はこれをEisenbud分解と呼ぶ。まず、構成因子から見てゆくことにする。

Proposition 2.3 ([7], [4] Theorem 7.1) 上述の$(P_\bullet, d_P)$にたいして、$P_\bullet$の次数付きS-加群*module*としての自己準同型族$\{c_\alpha : P_\bullet \to P_\bullet \,|\alpha \in \mathbf{N}\}$で、以下の性質をみたすものが存在する。

1) c_αは次数$2\alpha - 1$のS-準同型写像である。

2) $c_0 = -d_P$.

3) $c_0 c_1 + c_1 c_0 = x \cdot id_P$.

4) $\gamma \geq 2$なら、$\displaystyle\sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_\alpha c_\beta = 0.$

これらを、$(P_\bullet, d_P)$に関するShamash準同型族と呼ぶ。

Shamash準同型族は次の性質をみたすことを注意しておく。

Remark 2.4 ([7] Lemma (3)) $x \in \mathfrak{m}_S \operatorname{ann}_S(M)$のとき、すべての$\alpha \in \mathbf{N}$にたいして、$c_\alpha \otimes_S k = 0$が成り立つ。

Eisenbud分解は、次のように、Shamash準同型族によって構成できる。

Proposition 2.5 ([4] Theorem 7.2) $S[s]$は、$\deg s = -2$なる*polynomial algebra*とし、$S[s]$の双対を$S\langle\sigma\rangle$、sの双対基底をσとする。即ち、$S\langle\sigma\rangle := \mathrm{Hom}_{\text{graded S-module}}(S[s], S)$. S-自由分解$\{P_\bullet, d_P\}$ *of* Mにたいし、次数付きS-加群$(D_\bullet, d_D)$及びR-自由複体$(\overline{D}_\bullet, d_{\overline{D}})$を以下のように定義する。

$$D_\bullet := S\langle\sigma\rangle \otimes_S P_\bullet, \quad d_D := \sum_{\alpha \in \mathbf{N}} s^\alpha \otimes_S c_\alpha.$$

$$\overline{D}_\bullet := D_\bullet \otimes_S R = R\langle\sigma\rangle \otimes_S P_\bullet, \quad d_{\overline{D}} := d_D \otimes_S 1_R$$

すると、$(\overline{D}_\bullet, d_{\overline{D}})$は$M$の$R$-自由分解を与える。これを*Eisenbud*分解と呼ぶ。ここから、次の不等式を得る。

$$\beta_R^i(M) \leq \sum_{0 \leq j \leq \frac{i}{2}} \beta_S^{i-2j}(M) \quad (i \geq 0), \tag{1}$$

但し$\beta_R^i(M) := \dim_k(\mathrm{Tor}_i^R(M, k))$、$\beta_S^i(M) := \dim_k(\mathrm{Tor}_i^S(M, k))$とする。

解りやすくいうと、Eisenbud 分解は以下のように行列表示される。

$$\begin{array}{ccc} \overline{D}_n & & \overline{D}_{n-1} \\ \wr\| & & \wr\| \\ \bigoplus_{0\le j\le \frac{n}{2}}(P_{n-2j}\otimes_S R) & \overset{d_{\overline{D}_n}}{\to} & \bigoplus_{0\le j\le \frac{n-1}{2}}(P_{n-1-2j}\otimes_S R) \end{array}$$

,

$$d_{\overline{D}_n} = \begin{pmatrix} c_0\otimes_S R & & 0 & \\ c_1\otimes_S R & c_0\otimes_S R & & \\ c_2\otimes_S R & c_1\otimes_S R & c_0\otimes_S R & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

このようにして R- 加群の R- 自由分解を、R の deformation ring 上の自由分解から構成することが出来る。

最後に、δ-invariant についての公式を挙げておく。

Remark 2.6 ([5] Remark 3.3) R が超曲面即ち $(S,\mathfrak{m}_S,k)$ が正則局所環であるとき、次が成り立つ。

$$\delta_R^r(M)=\beta_R^r(M)-\beta_R^{r+1}(M)$$

但し $\beta_R^i(M):=\dim_k(\mathrm{Tor}_i^R(M,k))$、$\beta_S^i(M):=\dim_k(\mathrm{Tor}_i^S(M,k))$ とする。

3 Vanishing conditions

まず、c-minimality の概念を導入しておこう。

Definition 3.1 M,N は局所環 $(R,\mathfrak{m},k)$ 上の有限生成加群とし、$E_\bullet$,$F_\bullet$ は、R- 自由複体で、$H_0(E_\bullet)=M$、$H_0(F_\bullet)=N$ なるものとする。R 準同型写像 $f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$ が R- 自由加群 $E_\bullet$、$F_\bullet$ に関して c-minimal とは、鎖準同型写像 $f_\bullet\in\mathrm{Hom}_R(E_\bullet,F_\bullet)$ が存在して $H_0(f_\bullet)=f$, $f_\bullet\otimes_R k=0$ なることをいう。複体 $(E_\bullet,d_E)$ が極小とは、$d_E\otimes_R k=0$、鎖準同型写像 $f_\bullet$ が極小とは、$f_\bullet\otimes_R k=0$ をそれぞれ意味する。

Remark 3.2 $E_\bullet$ と $F_\bullet$ が共に極小な複体であるときには、f が *c-minimal* であることは、$H_0(f_\bullet)=f$ をみたす <u>全ての</u> 鎖準同型写像 $f_\bullet\in\mathrm{Hom}_R(E_\bullet,F_\bullet)$ に対して $f_\bullet\otimes_R k=0$ なることと同値である。

以後、$(S,\mathfrak{m}_S,k)$ を完備 Gorenstein 局所環、$R:=S/(x)$ は S 上の非零因子 $x\in\mathfrak{m}_S$ によって定義される環で、M は、有限生成 R- 加群だとする。M の極小 R- 自由分解 $(F_\bullet,d_F)$ と極小 S- 自由分解 $(P_\bullet,d_P)$ を取る。$(P_\bullet,d_P)$ に $\otimes_S R$ を施して、次の長完全列を得る。

$$0\to\mathrm{Tor}_1^S(M,R)\to\Omega_S^1(M)\otimes_S R\to P_0\otimes_S R\to M\to 0.$$

$\mathrm{Tor}_1^S(M,R) \cong M$ 故、以下の短完全列を導く。

$$0 \to M \xrightarrow{\xi} \Omega_S^1(M) \otimes_S R \to \Omega_R^1(M) \to 0. \tag{2}$$

この鎖準同型写像 ξ の重要性は、次の命題から判る。

Proposition 3.3 上述の状況で以下は同値である。

1) ξ が M および $\Omega_S^1(M) \otimes_S R$ の極小自由分解に関して *c-minimal* である。

2) $\delta_R^i(M) = 0$ $(i \geq 0)$。

証明) 1⇒2)。仮定から鎖準同型写像 $\xi_\bullet : F_\bullet \to \tau_1 P_\bullet[1] \otimes_S R$ が存在して $H_0(\xi_\bullet) = \xi, \xi_\bullet \otimes_R k = 0$ をみたす。mapping cone $Cone(\xi_\bullet)$ を考えて次の完全列を得る。

$$0 \to \tau_1 P_\bullet[1] \otimes_S R \to Cone(\xi_\bullet) \to F_\bullet[-1] \to 0. \tag{3}$$

(2) によって、$Cone(\xi_\bullet)$ が $\Omega_R^1(M)$ の R- 自由分解を与えることが判る。$\xi_\bullet$ が極小なので、これは極小 R- 自由分解である。即ち、$Cone(\xi_\bullet) \cong \tau_1 F_\bullet[1]$ である。従って完全列 (3) によって、全ての $i \geq 0$ について全射 $\Omega_R^{i+2}(M) \to \Omega_R^i(M)$ が存在することが判る。いっぽう $(j \geq \dim R + 1)$ のとき $\Omega_R^j(M)$ は stable Cohen-Macaulay 加群だから、$\delta_R^j(M) = 0$ である。Corollary 2.1によって結論を得る。

2⇒1)。まず、$\Omega_S^1(M) \otimes_S R$ が射影次元有限であることに注意する。実際、$\mathrm{Tor}_i^S(M,R) = 0$ $(i \geq 2)$ だから、有限 R- 自由複体 $(\tau_1 P_\bullet[1] \otimes_S R, d_P \otimes_S R)$ は acyclic であり、$\Omega_S^1(M) \otimes_S R$ の極小 R- 自由分解を与える。R- 準同型写像 $\xi : M \to \Omega_S^1(M) \otimes_S R$ は鎖準同型写像 $\xi_\bullet : F_\bullet \to \tau_1 P_\bullet[1] \otimes_S R$ に持ち上げられ、$\xi_\bullet$ は M の各 syzygy 加群から $\Omega_S^1(M) \otimes_S R$ の各 syzygy 加群（射影次元有限であることに注意）への準同型写像を引き起こす。Corollary 2.2によって $\delta_R^i(M) = 0$ for all $i \geq 0$ が判る。（証明終）。

次の Lemma では鎖準同型写像 $\xi_\bullet$ を記述する。これが、問題を解く鍵となった。

Lemma 3.4 上述の状況の下で、$(\overline{D}_\bullet, d_{\overline{D}})$ を M の極小 S- 自由分解 $(P_\bullet, d_P)$ に関する *Eisenbud* 分解（構成方法は *Proposition 2.5* を参照。）とする。次数付き加群の準同型写像 $\hat{\xi}_\bullet : \overline{D}_\bullet \to \tau_1 P_1[1] \otimes_S R$ を以下のように定義する。

$$\hat{\xi}_\bullet(\sigma^{(\alpha)} \otimes_S p) := c_{\alpha+1}(p) \otimes_S 1_R. \tag{4}$$

このとき $\hat{\xi}_\bullet$ は、$H_0(\hat{\xi}_\bullet) = \xi$ をみたす鎖準同型写像である。

証明) まず $\hat{\xi}_\bullet$ が鎖準同型写像であることを示す。$\overline{D}_\bullet$ の defferential が、以下のような形で与えられたことを思いだそう。

$$d_{\overline{D}}(\sigma^{(\alpha)} \otimes_S p) := \sum_{\beta \le \alpha} \sigma^{(\alpha-\beta)} \otimes_S c_\beta(p),$$

但し $\alpha \in \mathbf{N}, p \in P_\bullet$ とする。次の等式が成り立つ。

$$(d_P \otimes_S 1_R)(\hat{\xi}(\sigma^{(\alpha)} \otimes_S p)) = d_P(c_{\alpha+1}(p)) \otimes_S 1_R = -c_0 c_{\alpha+1}(p) \otimes_S 1_R, \tag{5}$$

最後の等号は、 Proposition 2.3, 2) による。いっぽう

$$\begin{aligned} \hat{\xi} d_{\overline{D}}(\sigma^{(\alpha)} \otimes_S p) &= \hat{\xi}(\sum_{\beta \le \alpha} \sigma^{(\alpha-\beta)} \otimes_S c_\beta(p)) \\ &= \sum_{\beta \le \alpha} c_{(\alpha-\beta+1)} c_\beta(p) \otimes_S 1_R \\ &= \sum_{\beta+\gamma=\alpha+1, \beta \le \alpha} c_\gamma c_\beta(p) \otimes_S 1_R. \end{aligned} \tag{6}$$

$\alpha \neq 0$ の場合 (6) の右辺は、 Proposition 2.3, 4) によって $-c_0 c_{\alpha+1}(p) \otimes_S 1_R$ に等しい。 $\alpha = 0$ の場合、 (5) と (6) とが等しいことは、 Proposition 2.3, 3) から判る。従って $\hat{\xi}_\bullet$ は鎖準同型写像である。

下図において、任意の M の元 $\varepsilon(p) \in M$ $(p \in P_0)$ にたいして、 $\varepsilon(xp) = x\varepsilon(p) = 0$ である。即ち xp は $\Omega^1_S(M) = d_P(P_1)$ の元である。

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & P_1 & \xrightarrow{d_P} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \to & 0 \\ & & x \downarrow & & x \downarrow & & \text{zero} \downarrow & & \\ \cdots & \to & P_1 & \xrightarrow[d_P]{} & P_0 & \xrightarrow[\varepsilon]{} & M & \to & 0 \end{array}$$

各 $p \in P_0$ は、次をみたす。

$$-c_0 c_1(p) = -(c_1 c_0 + c_0 c_1)(p) = -xp. \tag{7}$$

連結写像 ξ の定義を思いだそう。

$$\xi(\varepsilon(p)) = xp \otimes_S 1_R \in \Omega^1_R(M) \otimes_S R;$$

(7) によってこの式の右辺は、 $(c_0 \otimes_S 1_R)(c_1 \otimes_S 1_R)(p \otimes_S 1_R)$ と等しい。

従って、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \overline{D}_0 = P_0 \otimes_S R & \xrightarrow{\hat{\xi}_0 = c_1 \otimes_S 1_R} & P_1 \otimes_S R = (\tau_1 P_1[1] \otimes_S R)_0 \\ \varepsilon \otimes_S 1_R \downarrow & & \downarrow d_P \otimes_S 1_R \\ M & \xrightarrow[\xi]{} & \Omega^1_S(M) \otimes_S R \end{array} ,$$

これはつまり、$H_0(\hat{\xi}_\bullet)=\xi$ を意味する。（証明終）。

ここで、記号を整理しておく。完備正則局所環 $(S,\mathfrak{m}_S,k)$ および $R:=S/(x)$（但し $x\in\mathfrak{m}_S^2$ は非零因子）上で、有限生成 R- 加群 M の、極小 S- 自由分解 $(P_\bullet,d_P)$ に関して、Shamash 準同型族 $\{c_\alpha|\alpha\in\mathbf{N}\}$ によって構成された Eisenbud 分解 $(\overline{D}_\bullet,d_{\overline{D}})$ を取る。$(\overline{D}_\bullet,d_{\overline{D}})$ は必ずしも極小とはかぎらない M の R- 自由分解を与えるので、M の極小 R- 自由分解を $(F_\bullet,d_F)$ とすると、自然な分裂全射準同型 $\pi_\bullet:\overline{D}_\bullet\to F_\bullet$ がある。Betti 数を $\beta_R^i(M):=\dim_k(\mathrm{Tor}_i^R(M,k))$ および $\beta_S^i(M):=\dim_k(\mathrm{Tor}_i^S(M,k))$ で表す。完全列 (2) における写像 $\xi:M\to\Omega_S^1(M)\otimes_S R$ はそれぞれ鎖準同型写像 $\xi_\bullet$,$\hat{\xi}_\bullet$ を引き起こす。（下図参照。）

$$\begin{tikzcd}
\overline{D}_\bullet \arrow[rr, "\hat{\xi}_\bullet"] \arrow[dr, "\pi_\bullet"'] & & \tau_1 P_\bullet[1]\otimes_S R \\
& F_\bullet \arrow[ur, "\xi_\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

Theorem 3.5 上述の状況下、以下は同値である。

1) $\delta_R^i(M)=0$ ($i\geq 0$)。

2) $\pi_\bullet$ は、同型写像である。つまり、*Eisenud* 分解 $(\overline{D}_\bullet,d_{\overline{D}})$ は M の極小 R- 自由分解を与える。

3) $(F_\bullet,\ d_F)$ と $(\tau_1P_\bullet[1]\otimes_S R,d_P\otimes_S R)$ に関して、ξ は *c-minimal* である。即ち、$\xi_\bullet\otimes_R k=0$ なる $\xi_\bullet$ がある。

4) $(\overline{D}_\bullet,d_{\overline{D}})$ と $(\tau_1P_\bullet[1]\otimes_S R,d_P\otimes_S R)$ に関して、ξ は *c-minimal* である。即ち、$\hat{\xi}_\bullet\otimes_R k=0$ なる $\hat{\xi}_\bullet$ がある。

5) $c_\alpha\otimes_S k=0$ （ $\alpha\in\mathbf{N}$。）

6) $\beta_R^i(M)=\sum_{0\leq j\leq\frac{i}{2}}\beta_S^{i-2j}(M)$ （ $i\geq 0$。）

7) $\beta_R^{r+1}(M)=\sum_{0\leq j\leq\frac{r+1}{2}}\beta_S^{r+1-2j}(M)$, 但し $r=\mathrm{codepth}_R M$ とする。

証明） 2), 5), 6) の同値性は、Eisenbud 分解の構成方法（Proposition 2.5）からすぐに得られる。

1) と 3) の同値性は、Lemma 3.3で示した。

3)⇒4) を示そう。まず、$\hat{\xi}_\bullet$ を Lemma 3.4, (4) で定義された形で与える。$H_0(\hat{\xi}_\bullet)=H_0(\hat{\xi}'_\bullet)=\xi$ 故、chain homotopy $h_\bullet:\overline{D}_\bullet\to\tau_1P_\bullet[1]\otimes_S R$ が存在して、次をみたす。

$$\hat{\xi}'_n-\hat{\xi}_n=d_{P n+2}h_n+h_{n-1}d_{\overline{D}n}. \tag{8}$$

3) の条件の下、$\hat{\xi}_i \otimes_R k = 0\ (0 \leq i \leq n)$ を n に関する帰納法で証明する。上式 (8) によって、$n = 1$ のときは明らかである。$d_{\overline{D}_\bullet}$ は、

$$d_{\overline{D}_{n+2}} = \begin{pmatrix} c_0 \otimes_S R & & 0 & \\ & c_0 \otimes_S R & & \\ \hat{\xi}_n & & \ddots & \\ & \hat{\xi}_{n-2} & & \\ & & \cdots & c_0 \otimes_S R \end{pmatrix} \tag{9}$$

と表せるので、以下の条件は同値である。

$$\hat{\xi}_i \otimes_R k = 0\ (0 \leq i \leq n-1),$$

$$d_{\overline{D}j} \otimes_R k = 0\ (0 \leq j \leq n+1).$$

従ってとくに、$\hat{\xi}_i \otimes_R k = 0\ (0 \leq i \leq n-1)$ のとき、$d_{\overline{D}n} \otimes_R k = 0$ である。(8) と併せて、$\hat{\xi}_i \otimes_R k = 0\ (0 \leq i \leq n)$ を得る。

同様の議論から、4) は次と同値である。

$\hat{\xi}_\bullet$ を Lemma 3.4 (4) のように与えたとき、$\hat{\xi}_\bullet \otimes_R k = 0.$

こうして Lemma 3.4により、4) と 2) の同値性が得られた。

2) の仮定の下では、3) と 4) とは、同値である。ところが前述の通り、4) と 2) は同値であるから、結局これら 3 条件は皆同値となる。

6)⇒7) は、明らかである。

あとは、7)⇒2) を示せば良い。$i \geq r$ のとき $rankD_i = \sum_{0 \leq j \leq \frac{i}{2}} \beta_S^{i-2j}(M)$ は一定の値を取る。なぜなら、$r = \mathrm{pd}_S M - 1$ であり、M は S- 加群として階数 0 だからである。そこで、この一定値を b と記すことにすると、Proposition 2.5における不等式 (1) は、次のように表される。

$$\beta_R^r(M) \leq b,$$

$$\beta_R^{r+1}(M) \leq b.$$

いっぽう Remark 2.6によれば、

$$\beta_R^{r+1}(M) \leq \beta_R^r(M).$$

なので、$\tau_{r+1} F_\bullet$ が周期 2 で周期的であることから ([4] Theorem 6.1)、条件 $\beta_R^{r+1}(M) = b$ は $\beta_R^i(M) = b\ \ (i \geq r)$ を導く。従って $d_{\overline{D}_i} \otimes_R k = 0\ (i \geq r+1)$ が成り立つ。さもなければ $\beta_R^i(M) < rankD_i = b$ だからである。(9) におけるように、

$$d_{\overline{D}_{n+2}} = \begin{pmatrix} c_0 \otimes_S R & 0 \\ \hat{\xi}_n & d_{\overline{D}_n} \end{pmatrix}$$

であるから $d_{\overline{D}_i} \otimes_R k = 0\ \ (i \geq 0)$ を得る。（証明終）

Theorem 3.5から直ちに、次の Ding の結果を得る。

Corollary 3.6 (Ding [3],Theorem 2.1, Theorem 2.7) 上述の状況で、$x \in \mathfrak{m}_S\mathrm{ann}_S M$ ならば、$\delta^i_R(M) = 0$ *for all* $i \geq 0$。さらに、M が *cyclic* 加群のときには、逆も成り立つ。

証明) 最初の主張は、Remark 2.4と併せて Theorem 3.5を適用すれば判る。後半については、$\delta^i_R(M) = 0$ $(i \geq 0)$ から $c_\alpha \otimes_S k = 0$ $(\alpha \in \mathbf{N})$ が導かれることに注意する。とくに $c_1|_{P_0} : P_0 \to P_1$ は極小であり、これは $x \in \mathfrak{m}_S\mathrm{ann}_S M$ と同値である。(証明終)。

つぎの Corollary の準備として、Eisenbud operators について簡単に述べる。M の極小 R- 自由分解 $(F_\bullet, d_F)$ に対して、$\tilde{F}_i \otimes_S R \cong F_i$, $\tilde{d_F} \otimes_S R \cong d_F$ をみたすような S- 自由加群と S- 準同型写像の族 $(\tilde{F}_\bullet, \tilde{d_F})$ を考える。$\mathrm{Im}\tilde{d_F}^2 \subset x\tilde{F}_\bullet$ であるから、$\tilde{d_F}^2 = x\tilde{\partial_F}$ なる S- 準同型写像 $\tilde{\partial_{F_\bullet}}$ を取ることが出来る。$\partial_{F_\bullet} := \tilde{\partial_{F_\bullet}} \otimes_S 1_R$, とおけば、$\partial_{F_\bullet} : F_\bullet \to F_\bullet$ は、次数 -2 の鎖準同型写像で、これを $F_\bullet$ と S に関する Eisenbud operator と呼ぶ。(詳細は [4] 参照。) 次の Martsinkovsky の結果も、Theorem 3.5の系として得られる。

Corollary 3.7 (Martsinkovsky [6]) 以下は同値である。

1) $\partial_{F_\bullet}$ は全射である。即ちすべての $n \geq 0$ にたいして $\partial_{F n+2} : F_{n+2} \to F_n$ は全射である。

2) $\delta^i_R(M) = 0$ $(i \geq 0)$。

証明) 1)$\Rightarrow$ 2) を得るためには、Lemma 3.3におけるのと同じ議論をすれば良い。2)$\Rightarrow$ 1) は、Theorem 3.5を用いると、後は実際の計算から得られる。$F_\bullet \cong \overline{D}_\bullet$ 故、$\partial_{\overline{D}_\bullet}$ の全射性を示せば良い。実際、$\tilde{\overline{D}}_\bullet = D_\bullet$ であるから、$d_D^2 = xs \otimes_S \mathrm{id}_{P_\bullet}$ はすぐに判る。ここから $\tilde{\partial}_{D_\bullet} = s \otimes_S \mathrm{id}_{P_\bullet}$ 従って $\tilde{\partial}_{\overline{D}_\bullet} = s \otimes_S \mathrm{id}_{P_\bullet}$. (最後の 2 つの式については、[10] 参照。) (証明終)。

References

[1] M.Auslander and R.O.Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations,* Soc. Math. de France, Mem **38**(1989), 5-37.

[2] M.Auslander, S.Ding, and Ø.Solberg, *Liftings and weak liftings of modules,* J.Algebra **156** (1993), 273-317.

[3] S.Ding, *Cohen-Macaulay approximation and multiplicity,* J. Algebra **153**(1992), 271-288.

[4] D.Eisenbud, *Homological algebra on a complete intersection with an application to group algebra,* Trans. Amer. Math Soc. **260** (1980), 35-64.

[5] K.Kato, *Vanishing of free summands in Cohen-Macaulay approximations,* preprint(revised version), December 1994.

[6] A.Martsinkovsky, *Free summands in maximal Cohen-Macaulay approximations and Eisenbud Operators over hypersurface rings,* Proc. Amer. Math. Soc **115**(1992), 915-921.

[7] J.Shamash, *The Poincaré series of a local ring,* J. Algebra **12**(1969), 453-470.

[8] J.Tate, *Homology of noetherian rings and local rings,* Illinois J. Math. **1**(1957), 14-25.

[9] Y.Yoshino, " Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings," London Math.Soc., Lecture Note Series vol.146, Cambridge U.P., 1990.

[10] Y.Yoshino, *The theory of L-complexes and weak liftings of complexes,* preprint, 1994.

ON INDICES OF LOCAL RINGS ALONG LOCAL HOMOMORPHISMS

Akira Shida

Department of Mathematics, School of Science, Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464–01 JAPAN
E-mail address: a-shida@math.nagoya-u.ac.jp

Abstract

Let $\varphi : R \to S$ be a local homomorphism of Gorenstein local rings of finite flat dimension. We prove if M is a stable maximal Cohen-Macaulay R-module, then $M \otimes_R S$ is also a stable maximal Cohen-Macaulay S-module. By using it, we also prove that $\operatorname{index}(R) \leq \operatorname{index}(S)$.

1 Introduction

Throughout this paper, the word "ring" will mean commutative, noetherian ring with a non-zero unit element.

Let R and S be Gorenstein local rings with maximal ideal $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{n}$ respectively, and $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ a local homomorphism, that is, a ring homomorphism which satisfies $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$.

In studying the theory of minimal Cohen-Macaulay approximation and δ-invariant, Ding studied the notion of index of a complete local ring and showed many interesting results (see[4] and [5]). Here $\operatorname{index}(R)$ is the smallest positive integer n such that for any epimorphism $X \to R/\mathfrak{m}^n$, where X is a finitely generated maximal Cohen-Macaulay R-module, X has a non-zero free summand. (In terms of δ-invariant, we can also say that $\operatorname{index}(R)$ is the smallest integer n such that $\delta_R(R/\mathfrak{m}^n) \neq 0$.) His study shows that the smaller the index of a local ring is, the better the local ring is.

On the other hand L. L. Avramov and H.-B. Foxby studied ascent properties of local homomorphism of finite flat dimension. The philosophy is that, if S has a good property $\mathfrak{P}$, then R has the property $\mathfrak{P}$. In fact this is true, for example, if $\mathfrak{P}$ is Cohen-Macaulayness or Gorensteinness ([2, (7.2)] and [1, (3.4)]). Therefore we can expect $\operatorname{index}(R) \leq \operatorname{index}(S)$ on the condition that φ is of finite flat dimension, and to prove it is our main aim of this paper.

To prove our main result, we show the following general result about local homomorphism of finite flat dimension: Let M be a stable maximal Cohen-Macaulay R-module, then $M \otimes_R S$ is also a stable maximal Cohen-Macaulay S-module (see (3.1)).

In section 2 we recall some definitions and basic properties about the theory of δ-invariant of a module, index of a complete Gorenstein local ring and Cohen factorization of a local homomorphism. In section 3 we prove our main theorem by using Cohen factorization.

2 Some basic properties

Throughout this section we assume that R is a complete Gorenstein local ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$ and residue field k. We denote by $\mathrm{mod}(R)$ the category of all finitely generated R-modules and $\mathrm{CM}(R)$ the category of all maximal Cohen-Macaulay R-modules. We say that M in $\mathrm{mod}(R)$ is *stable* if it has no non-zero free summand.

Let C be in $\mathrm{mod}(R)$. Then the *stable CM trace* of C is defined as the submodule $\tau_R(C)$ of C which is generated by the homomorphic images in C of all stable maximal Cohen-Macaulay R-modules. Since C is noetherian, it follows that there is a morphism $f : X \to C$ such that X is a stable maximal Cohen-Macaulay R-module and $\operatorname{Im} f = \tau_R(C)$. We shall start with some basic facts on modules.

Proposition 2.1 *Let R be a complete Gorenstein local ring, and M be in* $\mathrm{CM}(R)$, *and N be a finitely generated R-module of finite projective dimension. Then*
(a) $\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = 0$ *for* $i > 0$.
(b) $\mathrm{Tor}^R_i(M, N) = 0$ *for* $i > 0$.

Proof. (a) is noted in [8].
(b) is a small refinement of a result by Sharp [7, (2.6)], and we can show it by using [3]. □

Definition 2.2 (see[4], for details). Let M be in $\mathrm{mod}(R)$. We define the *δ-invariant* of M over R (denoted by $\delta_R(M)$) as the minimal number of generators of the factor module $C/\tau_R(C)$. More generally we define the *i-th δ-invariant* $\delta^i_R(M)$ as $\delta_R(\Omega^i_R(M))$ for $i \geq 0$, where $\Omega^i_R(M)$ denotes i-th syzygy module of M over R.

It is clear that $\delta_R(C)$=0 if and only if C is a homomorphic image of a stable maximal Cohen-Macaulay R-module.
Let M be in $\mathrm{mod}(R)$. Then the *flat dimension* (respectively *projective dimension*) of a module M, denoted by $\mathrm{fd}_R\, M$ (respectively $\mathrm{pd}_R\, M$), is the infimum of the lengths of the resolutions of M by flat (respectively projective) R-modules. In particular $\mathrm{pd}_R\, M = \mathrm{fd}_R\, M$ if M is a finitely generated R-module. The following proposition about $\delta_R(M)$ is very useful.

Proposition 2.3 [4] *Let R be a complete Gorenstein local ring and $M(\neq 0) \in \mathrm{mod}(R)$. Then*
(a) *If $\mathrm{pd}_R M$ is finite, then $\delta_R(M) = \mu(M) > 0$, where $\mu(M)$ is the minimal number of generators of M.*
(b) *If $M \to N \to 0$ is exact, then $\delta_R(M) \geq \delta_R(N)$.*

□

Remark 2.4 (a) *R is not a regular local ring if and only if $\delta_R(k) = 0$.*
In fact if R is not a regular local ring , then there exists a non-zero stable maximal Cohen-Macaulay R-module M. Then we have an epimorphism $M \to M/\mathfrak{m}M \to k$, so $\delta_R(k) = 0$. Conversely, if R is a regular local ring, then $\delta_R(k) = 1 > 0$ by (2.3(a)).

(b) *There exists an integer n_0 such that $\delta_R(R/\mathfrak{m}^n) \neq 0$ for all $n \geq n_0$.*
In fact let $\mathfrak{a}$ be a parameter ideal of R. Then we can find an integer n_0 such that $\mathfrak{m}^{n_0} \subset \mathfrak{a}$. Since there exist epimorphisms $R/\mathfrak{m}^n \to R/\mathfrak{m}^{n_0} \to R/\mathfrak{a}$ for all $n \geq n_0$, we get $\delta_R(R/\mathfrak{m}^n) \neq 0$ by (2.3(b)).

Next, we define index of R (see[4], for details).

Definition 2.5 Let R be a complete Gorenstein local ring. Then the *index of R*, denoted by $\mathrm{index}(R)$, is the smallest integer n such that $\delta_R(R/\mathfrak{m}^n) \neq 0$. That is,

$$\mathrm{index}(R) = \min\{n \mid \delta_R(R/\mathfrak{m}^n) \neq 0\}.$$

Of course $\mathrm{index}(R)$ is well-defined by(2.4).

We know that $\mathrm{index}(R) = 1$ if and only if R is a regular local ring. Moreover, we can say the following.

Theorem 2.6 [4, (1.6),(3.3)] *Let R be a complete Gorenstein local ring with infinite residue field. Then,*

$$\mathrm{mult}(R) \geq \mathrm{index}(R)$$

and equality holds if and only if R is a hypersurface, where $\mathrm{mult}(R)$ *denotes the multiplicity of R.*

□

Let $\varphi : R \to S$ be a local homomorphism of local rings. We set $\mathrm{fd}\,\varphi = \mathrm{fd}_R S$. It is clear that $\mathrm{fd}\,\varphi = 0$ if and only if φ is a flat local homomorphism.

Next, we define Cohen factorization which was introduced by [1].

Definition 2.7 Let $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ be a local homomorphism of local rings. We say φ is *factorizable* if it can be decomposed as $\varphi = \sigma\tau$ with $\tau : R \to T$ flat and $T/\mathfrak{m}T$ a regular local ring, $\sigma : T \to S$ surjective and T a complete local ring ; often we shall refer to such a situation by saying that $\varphi = \sigma\tau$ is a *Cohen factorization.*

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dr, "\sigma"] & \\ R \arrow[ur, "\tau"] \arrow[rr, "\varphi"] & & S \end{tikzcd}$$

Clearly, if there exists a Cohen factorization, then S is complete. Moreover we can say that S is complete if and only if φ admits a Cohen factorization by the next theorem.

Theorem 2.8 (Existence of Cohen factorization[1, (1.1)]) *Let $\varphi : R \to S$ be a local homomorphism of local rings. If S is a complete local ring, then there exists a Cohen factorization.*

$\square$

Finally, to prove our main result we need to know how the important assumption of finite flat dimension is affected by passage to a Cohen factorization. This is shown by the next result.

Theorem 2.9 [**1, (3.3)**] *Let $\varphi = \sigma\tau$ be a Cohen factorization as in* (2.7). *Then,*

$$\operatorname{fd}\varphi \leq \operatorname{fd}\sigma \leq \dim T - \dim R + \operatorname{fd}\varphi.$$

In particular, $\operatorname{fd}\varphi$ *is finite if and only if* $\operatorname{fd}\sigma$ *is finite.*

$\square$

3 Inequality for indices

In this section, we prove our main result which gives an inequality of indices of local rings along local homomorphism of finite flat dimension. To prove it we first show a result on ascendance of stable maximal Cohen-Macaulayness of modules by homomorphisms of finite flat dimension.

Theorem 3.1 *Let $(R, \mathfrak{m})$ and $(S, \mathfrak{n})$ be complete Gorenstein local rings and $\varphi : R \to S$ a local homomorphism of finite flat dimension. If M is a stable maximal Cohen-Macaulay R-module, then $M \otimes_R S$ is also a stable maximal Cohen-Macaulay S-module.*

Proof. The proof is done in three steps by using Cohen factorization.
(step 1) We first show that theorem (3.1) is true if φ is flat.

Let $\varphi : R \to S$ be a flat local homomorphism of Gorenstein local rings, and M be a stable maximal Cohen-Macaulay R-module.
It is easy to see that $M \otimes_R S$ is a maximal Cohen-Macaulay S-module, because φ is flat.

So we have only to check that $M \otimes_R S$ is a stable S-module. Because φ is flat, we have an isomorphism (cf.[6, (7.11)])

$$\mathrm{Hom}_R(M, R) \otimes_R S \cong \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, S). \tag{3.2}$$

We assume that $M \otimes_R S$ is not a stable S-module and derive a contradiction. Then we can choose $f \in \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, S)$ such that f is an epimorphism. By (3.2), there exists $f_j \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ and $t_j \in S$ such that $f = \sum_j f_j \otimes_R t_j$, that is,

$$f(\sum_i m_i \otimes_R s_i) = \sum_j (f_j \otimes_R t_j)(\sum_i m_i \otimes_R s_i) = \sum_{i,j} \varphi(f_j(m_i))s_i t_j \ (\forall m_i \in M, \forall s_i \in S).$$

By assumption that f is an epimorphism, there exists at least one $f_j(m_i)$ such that $\varphi(f_j(m_i)) \notin \mathfrak{n}$. Therefore this f_j is an epimorphism and this is a contradiction.

(step 2) Next we show that theorem (3.1) is true if φ is surjective. Let R and $S \cong R/I$ be Gorenstein local rings and $\varphi : R \to S$ a surjective local homomorphism of local rings with $\mathrm{fd}\,\varphi < \infty$, where I is an ideal of R, and M is a stable maximal Cohen-Macaulay R-module.

We prove first that $M \otimes_R S$ is a maximal Cohen-Macaulay S-module. Let $d = \mathrm{depth}\, S$ and we argue by induction on d.

If d=0, then every finitely generated S-module is a maximal Cohen-Macaulay S-module. So there is nothing to prove.

For $d > 0$, let $x \in S$ be an S-regular element. Tensoring the exact sequence $0 \to S \xrightarrow{x} S \to S/xS \to 0$ with M, we get a long exact sequence

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(S/xS, M) \to S \otimes_R M \xrightarrow{x} S \otimes_R M \to S/xS \otimes_R M \to 0. \tag{3.3}$$

Since $\mathrm{pd}_R\, S/xS \leq \mathrm{pd}_R\, S + \mathrm{pd}_S\, S/xS < \infty$, it follows $\mathrm{Tor}_R^1(S/xS, M) = 0$ by (2.1(b)). So (3.3) shows that x is an $S \otimes_R M$-regular element and $S/xS \otimes_R M \cong (S \otimes_R M)/x(S \otimes_R M)$.

Then consider a local homomorphism $\psi : R \to S/xS$ as the composite $R \xrightarrow{\varphi} S \to S/xS$, where the second arrow is the natural map. Since $\mathrm{pd}_R\, S/xS < \infty$, we can say that $S \otimes_R M/x(S \otimes_R M) \cong S/xS \otimes_R M$ is a maximal Cohen-Macaulay S/xS-module by the induction hypothesis. So we conclude that $S \otimes_R M$ is a maximal Cohen-Macaulay S-module.

Next we prove that $S \otimes_R M$ is a stable S-module. We consider the exact sequence $0 \to I \to R \to S \to 0$. Then we have a long exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, I) \to \mathrm{Hom}_R(M, R) \to \mathrm{Hom}_R(M, S) \to \mathrm{Ext}_R^1(M, I) = 0 \to \cdots. \tag{3.4}$$

In fact since R is a Gorenstein local ring, $M \in \mathrm{CM}(R)$, and $\mathrm{pd}_R\, I < \infty$, we have $\mathrm{Ext}_R^1(M, I) = 0$ by (2.1).

As in (step 1), we assume that $M \otimes_R S$ is not a stable S-module and derive a contradiction. Then we can choose $f^* \in \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, S)$ such that f^* is an epimorphism. Now we consider the standard isomorphism

$$\lambda : \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, S) \to \mathrm{Hom}_R(M, S), \tag{3.5}$$

and let f be in $\mathrm{Hom}_R(M, S)$ such that $f = \lambda(f^*)$, that is, $f(m) = f^*(m \otimes 1)$ for all $m \in M$. We claim that f is an epimorphism. In fact, since f^* is an epimorphism, there exists $m_i \in M$ and $s_i \in S$ such that $1 = f^*(\sum_i m_i \otimes_R s_i)$. But,

$$\begin{aligned} 1 &= f^*(\sum_i m_i \otimes_R s_i) \\ &= \sum_i s_i f^*(m_i \otimes_R 1) \qquad (f^* \text{ is } S\text{-linear}) \\ &= \sum_i s_i f(m_i). \end{aligned}$$

Therefore at least one $f(m_i)$ is not in $\mathfrak{n}$, so we know that f is an epimorphism.

Then we can choose $g \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ such that $\varphi g = f$ by (3.4), that is, the next diagram is commutative.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dr, "\varphi"] & \\ M \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"] & & S \end{tikzcd}$$

This means that g is an epimorphism because f is surjective and φ is local, and this is a contradiction. Thus we know that $M \otimes_R S$ is a stable maximal Cohen-Macaulay S-module.

(step 3) We now prove theorem (3.1).

Let $\varphi = \sigma\tau$ be a Cohen factorization as in (2.7). Then $\mathrm{fd}\, \sigma < \infty$ by (2.9) and T is a Gorenstein local ring, since R is a Gorenstein and $T/\mathfrak{m}T$ is a regular local ring. Then our assertion follows from (step 1) and (step 2) since $M \otimes_R S \cong (M \otimes_R T) \otimes_T S$. $\square$

Theorem(3.1) immediately leads us to the following corollary.

Corollary 3.6 *Let R and S be complete Gorenstein local rings and $\varphi : R \to S$ a local homomorphism of finite flat dimension. If M is in* $\mathrm{mod}(R)$*, then for i=0 and 1 we have*

$$\delta_R^i(M) \geq \delta_S^i(M \otimes_R S).$$

Proof. Inequality for $i = 0$ is by definition and (3.1). To see inequality for $i = 1$, we may divide into two cases by using Cohen factorization.

(case 1) If φ is flat, then the conclusion is clear because tensoring with S and taking a syzygy are commutative.

(case 2) If φ is an epimorphism, consider an exact sequence $0 \to \Omega_R^1 M \to R^n \to M \to 0$, where $n = \mu(M) = \dim_k \mathrm{Tor}_0^R(k, M)$. Tensoring with S, we get an exact sequence $\Omega_R^1 M \otimes_R S \to S^n \to M \otimes_R S \to 0$. Since there is an epimorphism

$$\Omega_R^1 M \otimes_R S \to \Omega_S^1(M \otimes_R S),$$

So we get $\delta_R^1(M) = \delta_R(\Omega_R^1 M) \geq \delta_S(\Omega_R^1 M \otimes_R S) \geq \delta_S(\Omega_S^1(M \otimes_R S)) = \delta_S^1(M \otimes_R S)$ by (2.3). □

Theorem 3.7 *Let $(R, \mathfrak{m})$ and $(S, \mathfrak{n})$ be complete Gorenstein local rings and $\varphi : R \to S$ a local homomorphism of finite flat dimension. Then we have*

$$\mathrm{index}(R) \leq \mathrm{index}(S).$$

Proof. Let $r = \mathrm{index}(R)$. That is, $\delta_R(R/\mathfrak{m}^{r-1}) = 0$. We know that $\delta_S(R/\mathfrak{m}^{r-1} \otimes_R S) = 0$, since $0 = \delta_R(R/\mathfrak{m}^{r-1}) \geq \delta_S(R/\mathfrak{m}^{r-1} \otimes_R S) \geq 0$ by (3.6). So $\delta_S(S/\mathfrak{n}^{r-1}) = 0$ by (2.3) because there exists a natural epimorphism $R/\mathfrak{m}^{r-1} \otimes_R S \cong S/\mathfrak{m}^{r-1}S \to S/\mathfrak{n}^{r-1}$. Thus we know that $\mathrm{index}(S) \geq r$. □

Remark 3.8 *If φ is not of finite flat dimension, then theorem (3.7) is not true in general. For example, Let $(R, \mathfrak{m})$ be a Gorenstein local ring which is not a regular local ring and $S = R/\mathfrak{m}$ the residue field of R, then we have* $\mathrm{index}(R) > 1$ *and* $\mathrm{index}(S) = 1$.

ACKNOWLEDGMENTS

I am very grateful to Professor H. Matsumura, and Dr. M. Hashimoto as well as K. Yoshida and K. Yanagawa for their advices about this paper.

REFERENCES

[1] L. L. Avramov, H.-B. Foxby, and B. Herzog, Structure of Local Homomorphisms, J. Algebra 164 (1994) 124–145.

[2] L. L. Avramov and H.-B. Foxby, Locally Gorenstein homomorphisms, Amer. J. Math. 114 (1992) 1007–1047.

[3] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, What makes a complex exact?, J. Algebra 25 (1973) 259–268.

[4] S. Ding, Cohen-Macaulay approximation and multiplicity, J. Algebra 153 (1992) 271–288.

[5] S. Ding, A note on the index of Cohen-Macaulay rings, Comm. in Alg. 21 (1993) 53–71.

[6] H. Matsumura, Commutative ring theory, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986).

[7] R. Y. Sharp, Finitely generated modules of finite injective dimension over certain Cohen-Macaulay rings, Proc. London. Math. Soc. (3) 25 (1972) 303-328.

[8] Y. Yoshino, Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings, Cambridge Univ. Press (Lecture Notes of London Math. Soc. 1990).

A note on minimal Cohen-Macaulay approximations

吉田 健一
名古屋大学理学部数学教室

1 準備と背景

この報告において, 特に断らない限り, $(\mathbf{A}, \mathbf{m}, \mathbf{k})$ を complete CM local ring とし, $\mathbf{K}_A$ を $\mathbf{A}$ の canonical module, $\mathbf{D}^\bullet = 0 \to \mathbf{D}^{-d} \to \cdots \to \mathbf{D}^0 \to 0$ を $\mathbf{A}$ の normalized dualizing complex とする。

任意の finite $\mathbf{A}$-module $\mathbf{M}$ に対して, finite $\mathbf{A}$-modules の完全列

$$(\mathcal{C}.):\quad 0 \longrightarrow \mathbf{Y}_M \xrightarrow{\phi} \mathbf{X}_M \longrightarrow \mathbf{M} \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{ex})$$

$$(\mathcal{I}.):\quad 0 \longrightarrow \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{Y}^M \xrightarrow{\psi} \mathbf{X}^M \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{ex})$$

但し, $\mathbf{X}_M$, $\mathbf{X}^M$ は MCM $\mathbf{A}$ modules で $\mathrm{id}_A \mathbf{Y}_M < \infty$, $\mathrm{id}_A \mathbf{Y}^M < \infty$ をそれぞれ $\mathbf{M}$ の CM approximation, finite injective hull と呼ぶ。また, ϕ (resp.ψ) を通して, $\mathbf{Y}_M$ と $\mathbf{X}_M$ (resp. $\mathbf{Y}^M$ と $\mathbf{X}^M$) が自明でない共通の直和因子を持たない時, それぞれ minimal であると言う。(cf. [AuB])

まず, 次の事実はよく知られている。(cf. [Yosh])

Fact 1.1 (1) つねに, $\mathbf{M}$ の *minimal CM approximation* と *minimal finite injective hull* は (完全列の) 同型を除いて一意的に存在する。

(2) CM $\mathbf{A}$-*module* に対して, *Herzog–Martsinkovsky* による *minimal CM approximation* の *glueing construction* が知られている。

(3) *Gorenstein local ring* の場合には, *M. Auslander* による *CM approximation* の *minimality* の判定法が知られている。

この講演の目的は, (2) の方法を一般化して, 必ずしも Gorenstein でない CM local ring 上で minimality を Bass number を用いて判定するための次の定理を証明することにある。尚, この定理の証明にあたっては, 都立大の川崎君から多くの参考意見をいただきました。

Theorem 1.2 (cf. [Yos2, Theorem (2.4)]) **A** を *complete* CM *local ring* とし, $\mathbf{M}(\neq 0)$ を *finite* **A**-*module* とする。

$$(\mathcal{C}.): \quad 0 \longrightarrow \mathbf{Y}_M \xrightarrow{\phi} \mathbf{X}_M \longrightarrow \mathbf{M} \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{ex})$$

を **M** のCM *approximation* とするとき, 次の条件は同値である。

(1) $(\mathcal{C}.)$ は *minimal* である。

(2) $\mu_A^d(\mathbf{X}_M) = \mu_A^d(\mathbf{M})$. (この条件を満たす時, $(\mathcal{C}.)$ はμ-*minimal* であると言う。)

(3) $\mu_A^d(\mathbf{Y}_M) = \mu_A^{d-1}(\mathbf{M})$.

同様の結果が finite injective hull についても成立する。

上の定理の証明のために少し考察をする。簡単のため, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_M$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_M$ とおくとき, 次の完全列を得る。

$$0 \to \mathrm{Ext}_A^{d-1}(\mathbf{k}, \mathbf{M}) \to \mathrm{Ext}_A^d(\mathbf{k}, \mathbf{Y}) \xrightarrow{\phi'} \mathrm{Ext}_A^d(\mathbf{k}, \mathbf{X}) \to \mathrm{Ext}_A^d(\mathbf{k}, \mathbf{M}) \to 0$$

これより, (2) と (3) の同値性は明らか。また, 一般に $\mu_A^d(\mathbf{X}) \geq \mu_A^d(\mathbf{M})$ であり, 等号が成立するには, $\phi' = 0$ が成立することが必要十分条件であることも分かる。

特に, もし, $(\mathcal{C}.)$ が minimal でなければ, $\phi' \neq 0$ だから, (2) $\Longrightarrow$ (1) を得る。一方, minimal CM approximation の一意性により, (1) $\Longrightarrow$ (2) を証明するには, μ-minimal CM approximation を構成すれば良い。

2 定理の証明

改めて, **A** を complete CM local ring とし, **M** を finite **A**-module とする。$\mathbf{K}^\bullet \to \mathbf{M}$, $\mathbf{F}^\bullet \to D(\mathbf{M})$ をそれぞれ **M**, $D(\mathbf{M})$ の極小自由分解とするとき, 次の quisms の可換図式を得る。(cf. [Ro, Chapter 2])

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{K}^\bullet \arrow[r, "\text{quism}"'] & \mathbf{M} \arrow[r, "\text{quism}"'] & DD(\mathbf{M}) \arrow[d, "\text{quism}"] \\
& \mathrm{Hom}^\bullet_A(\mathbf{F}^\bullet, \mathbf{K}_A(d)) \arrow[r, "\text{quism}"'] & D(\mathbf{F}^\bullet)
\end{tikzcd}
$$

ただし, 複体 $\mathbf{M}^\bullet$ に対して, $(\mathbf{M}^\bullet(n))^k = \mathbf{M}^{n+k}$ とする。このとき,

$$\mathrm{Hom}_A^{-i}(\mathbf{F}^\bullet, \mathbf{K}_A(d)) = \prod_{j\in\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_A(\mathbf{F}^j, \mathbf{K}_A(d)^{-i+j}) = \mathrm{Hom}_A(\mathbf{F}^{-(d-i)}, \mathbf{K}_A)$$

に注意して, $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}^{-i}$, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}^{-i}$, $(\mathbf{F}^\cdot(-d)^*)_i = \mathrm{Hom}_A(\mathbf{F}_{d-i}, \mathbf{K}_A)$ と定めると, quism $g. : \mathbf{K}_\bullet \to \mathbf{F}^\cdot(-d)^*_\bullet$ が得られる。(cf. [Ro, Chapter 2, (2.5)]) これを $\mathbf{M}$ の glueing map と呼ぶ。(cf. [HM, section 1])

$\mathbf{C}_\bullet = Con(g.)$ をその mapping cone, すなわち

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{K}_{i-1} \oplus \mathbf{F}^*_{d-i}, \qquad \partial^{C_{i+1}} = \begin{bmatrix} -\partial^{K_i} & -g_i \\ 0 & (\partial^{F_{d-i}})^* \end{bmatrix}$$

とすれば, 複体の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}^\cdot(-d)^*_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{K}_\bullet[-1] \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{ex}) \tag{2.1}$$

が存在する。ここに, $(\mathbf{K}_\bullet[-1])_n = \mathbf{K}_{n-1}$ である。

一般に, 複体 $\mathbf{M}_\bullet$ に対して, 複体 $\tau_i\mathbf{M}_\bullet$ を $\tau_i(\mathbf{M}_\bullet)_j = \mathbf{M}_j$ $(j \geq i)$, $\quad = 0$ $(j < i)$ と定めるとき,

$$\mathrm{H}_j(\tau_i(\mathbf{M}_\bullet)) = \begin{cases} \mathrm{H}_j(\mathbf{M}_\bullet) & (j > i) \\ \mathrm{Cok}(\mathbf{M}_{i+1} \to \mathbf{M}_i) & (j = i) \\ 0 & (j < i) \end{cases}$$

となる。これらの記号のもとで, Theorem (1.2) は, 次の Theorem (2.2) に帰着する。

Theorem 2.2 上の記号のもとで, $g. : \mathbf{K}_\bullet \to \mathbf{F}^\cdot(-d)^*_\bullet$ を $\mathbf{M}$ の *glueing map* とし, $\mathbf{C}_\bullet = Con(g.)$ とする。このとき, (2.1) から, 次を得る。

(1) 任意の $i \geq 1$ に対して,

$$0 \to \mathrm{H}_i(\tau_i \mathbf{F}^{\cdot}(-d)^*_\bullet) \to \mathrm{H}_i(\tau_i \mathbf{C}_\bullet) \to \mathrm{H}_i(\tau_i \mathbf{K}_\bullet[-1]) \cong \mathrm{syz}_A^{i-1}(\mathbf{M}) \to 0 \quad (\mathrm{ex})$$

は $\mathrm{syz}_A^{i-1}(\mathbf{M})$ の *μ-minimal CM approximation* を与える。 また,

(2)

$$0 \longrightarrow \mathbf{M} \longrightarrow \mathrm{H}_0(\tau_0 \mathbf{F}^{\cdot}(-d)^*_\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}_0(\tau_0 \mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{ex})$$

は $\mathbf{M}$ の *μ-minimal finite injective hull* を与える。

Prrof. (1) $i \geq 1$ を固定する。(2.1) から, 複体の完全列

$$0 \to \tau_i \mathbf{F}^{\cdot}(-d)^*_\bullet \to \tau_i \mathbf{C}_\bullet \to \tau_i \mathbf{K}_\bullet[-1] \to 0 \quad (\mathrm{ex}).$$

を得る。これから, finite **A**-modules の完全列

$$0 \to \mathrm{H}_i(\tau_i \mathbf{F}^{\cdot}(-d)^*_\bullet) \to \mathrm{H}_i(\tau_i \mathbf{C}_\bullet) \to \mathrm{H}_i(\tau_i \mathbf{K}_\bullet[-1]) = \mathrm{syz}_A^{i-1}(\mathbf{M}) \to 0 \quad (\mathrm{ex}).$$

を得る。$\mathbf{X}_i = \mathrm{H}_i(\tau_i \mathbf{C}_\bullet)$, $\mathbf{Y}_i = \mathrm{H}_i(\tau_i \mathbf{F}^{\cdot}(-d)^*_\bullet)$ とおく。

このとき, 次を言えば良い。

(a) $\mathrm{id}_A \mathbf{Y}_i < \infty$.

(b) $\mathbf{X}_i$ は MCM **A**-module.

(c) $\mu_A^{d-1}(\mathrm{syz}_A^{i-1}(\mathbf{M})) = \mu_A^d(\mathbf{Y}_i)$.

$r = d - \mathrm{depth}\,\mathbf{M}$ とおくと, $\mathrm{H}^{-i}(D(\mathbf{M})) = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{H}^i_m(\mathbf{M}), \mathbf{E}_A) = 0 \quad (\forall i < d - r)$ だから, $\mathbf{F}_i = 0 \quad (\forall i < d - r)$. 特に, $i \geq r + 1$ ならば, $\mathbf{Y}_i = 0$。そこで, $1 \leq i \leq r$ としてよい。

(a) $\mathbf{Y}_i$ の定義から, 次の完全列を得る。

$$0 \to \mathbf{F}_0^* \to \mathbf{F}_1^* \to \cdots \to \mathbf{F}_{d-i-1}^* \xrightarrow{(\partial^{\mathbf{F}}{}_{d-i})^*} \mathbf{F}_{d-i}^* \to \mathbf{Y}_i \to 0 \quad (\mathrm{ex}).$$

よって, $\mathrm{id}_A(\mathbf{Y}_i) < \infty$.

(b) $\mathbf{C}_\bullet$ は完全列だから,

$$\mathbf{X}_i = \mathrm{H}_i(\tau_i \mathbf{C}_\bullet) = \mathrm{Cok}(\mathbf{C}_{i+1} \to \mathbf{C}_i) = \ker(\mathbf{C}_{i-1} \to \mathbf{C}_{i-2}).$$

各 $\mathbf{C}_j$ は MCM **A**-module だから, $\mathbf{X}_i$ も MCM **A**-module である。

(c) $\mathbf{S}_i = \ker(\mathbf{F}^*_{d-i} \to \mathbf{Y}_i) = \mathrm{Cok}((\partial^{\mathbf{F}_{d-i-1}})^* : \mathbf{F}^*_{d-i-2} \to \mathbf{F}^*_{d-i-1})$ とおく。$(\partial^{\mathbf{F}_{d-i}})^* : \mathbf{F}^*_{d-i-1} \to \mathbf{F}^*_{d-i}$ は $\mathbf{m}$ の元を成分に持つ行列で表されているから，$\mathrm{Ext}^d_A(\mathbf{k}, \mathbf{F}^*_{d-i-1}) \to \mathrm{Ext}^d_A(\mathbf{k}, \mathbf{F}^*_{d-i})$ は zero map である。

また，$\mathrm{id}_A \mathbf{N} < \infty$ ならば，$\mathrm{Ext}^{d+1}_A(\mathbf{k}, \mathbf{N}) = 0$ が成立することに注意して，次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^d_A(\mathbf{k}, \mathbf{F}^*_{d-i-1}) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "0"] & & & \\
\mathrm{Ext}^d_A(\mathbf{k}, \mathbf{S}_i) \arrow[r, "\phi"'] & \mathrm{Ext}^d_A(\mathbf{k}, \mathbf{F}^*_{d-i}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^d_A(\mathbf{k}, \mathbf{Y}_i) \arrow[r] & 0 \quad (\mathrm{ex}).
\end{tikzcd}$$

π は全射だから，ϕ は zero map である。ゆえに，$\mu^d_A(\mathbf{Y}_i) = \mu^d_A(\mathbf{F}^*_{d-i}) = \mathrm{rank}_A(\mathbf{F}_{d-i}) = \beta_{d-i}(D(\mathbf{M})) = \mu^{d-i}_A(\mathbf{M})$.

他方，$\mathbf{A}$ は CM local ring で $1 \leq i \leq r$ だから，$\mu^{d-i}_A(\mathbf{M}) = \mu^{d-1}_A(\mathrm{syz}^{i-1}_A(\mathbf{M}))$。従って，$\mu^d_A(\mathbf{Y}_i) = \mu^{d-1}_A(\mathrm{syz}^{i-1}_A(\mathbf{M}))$ を得る。

(2) 複体の完全列

$$0 \to \tau_0\mathbf{F}^{\cdot}(-d)^*_\bullet \to \tau_0\mathbf{C}_\bullet \to \tau_0\mathbf{K}_\bullet \to 0 \quad (\mathrm{ex}),$$

から，finite $\mathbf{A}$-modules の完全列

$$0 \to \mathbf{M} = \mathrm{H}_1(\tau_0\mathbf{K}_\bullet) \to \mathrm{H}_0(\tau_0\mathbf{F}^{\cdot}(-d)^*_\bullet) \to \mathrm{H}_0(\tau_0\mathbf{C}_\bullet) \to 0 \qquad (\mathrm{ex}).$$

を得る。

一方，$\mathbf{B} = \mathrm{Im}((\partial^{\mathbf{F}_d})^*)$,　$\mathbf{Z} = \ker((\partial^{\mathbf{F}_{d+1}})^*)$ とおくとき，次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{M} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{iso.}"] & \mathrm{H}_0(\tau_0\mathbf{F}^{\cdot}(-d)^*_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{iso.}"] & \mathrm{H}_0(\tau_0\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{iso.}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/\mathbf{B} \arrow[r] & \mathbf{F}^*_d/\mathbf{B} \arrow[r] & \mathbf{F}^*_d/\mathbf{Z} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{Y} = \mathbf{F}^*_d/\mathbf{B}$,　$\mathbf{X} = \mathbf{F}^*_d/\mathbf{Z}$ とおくとき，次を言えばよい。

(d) $\mathrm{id}_A \mathbf{Y} < \infty$.
(e) $\mathbf{X}$ は MCM $\mathbf{A}$-module.
(f) $\mu_A^{d+1}(\mathrm{M}) = \mu_A^d(\mathrm{X})$.
このうち, (d),(e) については, 先と同様の議論で得られる。
(f) $\mu_A^{d+1}(\mathrm{M}) = \beta_{d+1}^A(D(\mathrm{M})) = \mathrm{rank}_A \mathbf{F}_{d+1}$. 一方, $\mathbf{X}$ は MCM $\mathbf{A}$-module だから, $\mu_A^d(\mathrm{X}) = \mu_A(\mathrm{X}^*)$. さらに, $\mathbf{F}_{d+2} \to \mathbf{F}_{d+1} \to \mathbf{X}^* \to 0$ (ex) は $\mathbf{X}^*$ の minimal presentation だから, $\mu_A(\mathrm{X}^*) = \mathrm{rank}_A \mathbf{F}_{d+1}$. これより, 求める主張を得る。これで Theorem (2.2) の証明が完成した。**QED**

Corollary 2.3 $\mathbf{A}, \mathbf{M}$ を (2.2) と同じものとし, $x \in \mathbf{m}$ を $\mathbf{A}$-*regular* かつ $\mathbf{M}$-*regular* とする。また, $^-$ により, $- \otimes_A \mathbf{A}/\mathbf{xA}$ を表すものとする。このとき,

$$(\mathcal{C}.): \quad 0 \longrightarrow \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{M} \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{ex})$$

が $\mathbf{M}$ の *CM approximation* ならば, $(\mathcal{D}.) = (\mathcal{C}.) \otimes_A \overline{\mathbf{A}}$ は $\overline{\mathbf{M}}$ の$\overline{\mathbf{A}}$ 上の *CM approximation* であり, $(\mathcal{C}.)$ が *minimal* であることと, $(\mathcal{D}.)$ が *minimal* であることは同値である。

$$\text{ここに} \qquad (\mathcal{D}.): \quad 0 \longrightarrow \overline{\mathbf{Y}} \longrightarrow \overline{\mathbf{X}} \longrightarrow \overline{\mathbf{M}} \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{ex}).$$

Proof. 実際, $(\mathcal{D}.)$ が $\overline{\mathbf{M}}$ の$\overline{\mathbf{A}}$ 上の CM approximation であることを確かめるのはやさしい。また, $\mu_A^d(\mathrm{M}) = \mu_{\overline{A}}^{d-1}(\overline{\mathrm{M}})$, $\mu_A^d(\mathrm{X}) = \mu_{\overline{A}}^{d-1}(\overline{\mathrm{X}})$ だから, Theorem (1.2) から, 後半の主張は従う。 **QED**

3 応用

Theorem (2.2) の応用を少し述べてみたい。そのために, まず次の定義を思いだそう。

Definition 3.1 ([HM])

$$(\mathcal{C}.): \quad 0 \longrightarrow \mathbf{Y}_M \longrightarrow \mathbf{X}_M \longrightarrow \mathbf{M} \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{ex})$$

を $\mathbf{M}$ の minimal CM approximation とするとき,

$$\delta_A(\mathrm{M}) = f - \mathrm{rank}_A(\mathrm{X}_M), \qquad \gamma_A(\mathrm{M}) = \mathbf{K}_A - \mathrm{rank}_A(\mathrm{X}_M)$$

と定義する。また, $\forall i \geq 0$ に対して,

$$\delta^i_A(\mathbf{M}) = \delta_A(\mathrm{syz}^i_A(\mathbf{M})), \qquad \gamma^i_A(\mathbf{M}) = \gamma_A(\mathrm{syz}^i_A(\mathbf{M}))$$

と定める。

上に定めた δ-invariant についての研究は, 現在, 加藤さんをはじめとして多数の人々により進められている。その中でも次の結果は基本的なものである。

Theorem 3.2 (M. Auslander) **A** を *regular* でない *complete Gorenstein local ring* とするとき, $\delta^i_A(\mathbf{k}) = 0 \quad (\forall\, i \geq 0)$ が成立する。

我々は, Corollary 3 を利用して, 上の結果を linear maximal Buchsbaum module に対して拡張した。それを述べる前に linear maximal Buchsbaum module の定義を思いだそう。

Definition 3.3 ([Yos1]) **M** を finite **A**-module で $\dim \mathbf{M} = \dim \mathbf{A}$ なるものとする。$\mu_A(\mathbf{M})$, $e_A(\mathbf{M})$ により, それぞれ **M** の極小生成元の個数, **M** の **m** に関する multiplicity を表すものとする。また, $\mathrm{I}_A(\mathbf{M}) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \cdot h^i_A(\mathbf{M})$ とおくとき, 一般に, $\mu_A(\mathbf{M}) \leq e_A(\mathbf{M}) + \mathrm{I}_A(\mathbf{M})$ が成立する。

等式 $\mu_A(\mathbf{M}) = e_A(\mathbf{M}) + \mathrm{I}_A(\mathbf{M})$ が成立するとき, **M** を linear maximal Buchsbaum **A**-module と呼ぶ。

Remark 1 $\dim \mathbf{M} = \dim \mathbf{A}$ についての条件を忘れると, **k** の有限直和もこの条件を満たす。また, *linear maximal Buchsbaum* **A**-*module* は常に *surjective Buchsbaum* **A**-*module* であり, 特に, **M** が *MCM* **A**-*module* のとき, *linear MCM module* の概念と一致する。

Theorem 3.4 **A** を *regular* でない *complete CM local ring* とし, **M** を *linear maximal Buchsbaum* **A**-*module* または $\mathbf{mM} = 0$ とする。このとき, $\delta^i_A(\mathbf{M}) = \gamma^i_A(\mathbf{M}) = 0 \quad (\forall i \geq 0)$ が成立する。

この定理の証明には, 次の事実が重要である。

Lemma 3.5 (cf. [Yos1]) **A** を必ずしも *CM* でない *local ring* とし, $\mathbf{A}/\mathbf{m} = \mathbf{k}$ は無限体であると仮定する。**M** を *finite* **A**-*module with* $\dim \mathbf{M} = \dim \mathbf{A} = d$ とするとき, 次が成立する。

(1) 次の 2 条件は同値である。

(a) $\mathbf{M}$ は *linear maximal Buchsbaum* $\mathbf{A}$*-module.*

(b) $\mathbf{M}$ は *Buchsbaum* $\mathbf{A}$*-module* で, $\mathbf{m}$ の任意の (ある) *minimal reduction* $\mathbf{q}$ に対して, $\mathbf{mM} = \mathbf{qM}$.

(2) $\mathbf{M}$ は *linear maximal Buchsbaum* $\mathbf{A}$*-module* であると仮定するとき,

(a) もし, $\mathrm{depth}_A(\mathbf{M}) = 0$ ならば,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}/\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}, \quad ここに \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_m^0(\mathbf{M})$$

と表すことが出来る。

(b) もし, $\mathrm{depth}_A \mathbf{M} > 0$ かつ $\mathrm{depth}_A \mathbf{A} > 0$ ならば, 適当な $\mathbf{A}-$ かつ $\mathbf{M}-$ *regular element* $x \in \mathbf{m}$ を $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_d)\mathbf{A}$ が $\mathbf{m}$ の *minimal reduction* を満たすようにとるとき, $\mathbf{M}/\mathbf{xM}$ は *linear maximal Buchsbaum* $\mathbf{A}/\mathbf{xA}$*-module* である。

Thorem (3.4) のうち, $\gamma_A^i(\mathrm{M}) = 0 \quad (\forall i \geq 0)$ のみを示そう。

Lemma 3.6 ([Yos2]) $\mathbf{A}$ を *complete CM local ring* とし, $\mathbf{M}$ を *MCM* $\mathbf{A}$*-module* とするとき, $\delta_A^1(\mathrm{M}) = \gamma_A^1(\mathrm{M}) = 0.$

Proof. $\delta_A^1(\mathrm{M}) = 0$ は, [He, (1.4)] から従うので, $\gamma_A^1(\mathrm{M}) = 0$ のみ示せば良い。特に, $\mathbf{A}$ は Gorenstein でないとしてよい。

$0 \to \mathrm{syz}_1^A(\mathrm{M}) \to \mathbf{F}_0 = \mathbf{A}^n \to \mathbf{M} \to 0 \quad (\mathrm{ex})$ を $\mathbf{M}$ の極小自由分解の最初の部分とすれば, $\mathrm{syz}_1^A(\mathrm{M}) \subseteq \mathbf{mF}_0$ である。

さて, $\mathrm{syz}_1^A(\mathrm{M}) = \mathbf{K}_A \oplus \mathrm{N}$ と書けたとしよう。このとき, $\mathbf{K}_A$-dual をとれば,

$$0 \longrightarrow \mathbf{M}^* \longrightarrow \mathbf{K}_A^n \longrightarrow \mathrm{syz}_1^A(\mathrm{M})^* = \mathbf{A} \oplus \mathrm{N}^* \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{ex}).$$

これより, ある全射 $\phi\colon \mathbf{K}_A^n \to \mathbf{A}$ が存在し, これは split する。特に, $\mathrm{id}_A \mathbf{A} < \infty$ となり, $\mathbf{A}$ が Gorenstein であることに反する。 **QED**

$\mathbf{\Omega}_i^A = \mathrm{syz}_i^A(\mathbf{k}) \quad (\forall i \geq 0)$ と表そう。すると, 上の補題と $\dim \mathbf{A}$ についての帰納法から次を得る。

Corollary 3.7 **A** を *complete CM local ring* とし, $d = \dim \mathbf{A}$ とする。もし, $f - \mathrm{rank}_A(\mathbf{\Omega}_d^A) > 0$ ならば, **A** は *regular local ring* である。

一方, **k** の minimal CM approximation の構成の仕方から, $\mathbf{X}_k \cong (\mathbf{\Omega}_d^A)^* = \mathrm{Hom}_A(\mathbf{\Omega}_d^A, \mathbf{K}_A)$ だから, $\gamma_A^0(\mathbf{k}) = \mathbf{K}_A - \mathrm{rank}(\mathbf{X}_k) = f - \mathrm{rank}_A(\mathbf{\Omega}_d^A)$. ゆえに, もし, **A** が regular でない complete CM local ring ならば, $\gamma_A^0(\mathbf{k}) = 0$ である。

さて, これと (2.3) を用いて, (3.4) の特別な場合として, 次を示すことが出来る。

Proposition 3.8 (cf. (3.3)) **A** を *regular* でない *complete CM local ring* とすると, $\gamma_A^i(\mathbf{k}) = 0 \quad (\forall i \geq 0)$ が成立する。

Proof. $d = \dim \mathbf{A}$ についての帰納法を用いる。$d = 0$ のとき, (3.6),(3.7) から従う。$d > 0$ とし, $d-1$ まで正しいと仮定しよう。$\mathbf{x} \in \mathbf{m} \backslash \mathbf{m}^2$ を **A**-regular となるようにとり, $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\mathbf{xA}$ とおき, $^-$ により, $- \otimes_A \overline{\mathbf{A}}$ を表すものとする。このとき, **x** は $\mathbf{\Omega}_i^A$-regular で, $\overline{\mathbf{\Omega}_i^A} = \mathbf{\Omega}_i^{\overline{A}} \oplus \mathbf{\Omega}_{i-1}^{\overline{A}}$ が成立している。

$i \geq 1$ を固定し, $0 \to \mathbf{Y}_i \to \mathbf{X}_i \to \mathbf{\Omega}_i^A \to 0 \quad (\mathrm{ex})$ を $\mathbf{\Omega}_i^A$ の **A** 上の minimal CM approximation とすれば, (2.3) から, $0 \to \overline{\mathbf{Y}_i} \to \overline{\mathbf{X}_i} \to \overline{\mathbf{\Omega}_i^A} \to 0 \quad (\mathrm{ex})$ は $\overline{\mathbf{\Omega}_i^A}$ の $\overline{\mathbf{A}}$ 上の minimal CM approximation を与える。よって, $\gamma_{\overline{A}}^i(\mathbf{k}) + \gamma_{\overline{A}}^{i-1}(\mathbf{k}) = \gamma_{\overline{A}}(\overline{\mathbf{\Omega}_i^A}) = \mathbf{K}_{\overline{A}} - \mathrm{rank}(\overline{\mathbf{X}_i})$. 帰納法の仮定から, $\gamma_{\overline{A}}^i(\mathbf{k}) = \gamma_{\overline{A}}^{i-1}(\mathbf{k}) = 0$, よって, $\mathbf{K}_{\overline{A}} - \mathrm{rank}(\overline{\mathbf{X}_i}) = 0$. 特に, $\gamma_A^i(\mathbf{k}) = \mathbf{K}_A - \mathrm{rank}(\mathbf{X}_i) = 0$. 他方, (3.7) の後の考察から, $\gamma_A^0(\mathbf{k}) = 0$ ゆえ, 求める主張を得た。 **QED**

上の結果を利用して, Theorem (3.4) を証明しよう。

Theorem (3.4) の証明

$d = \dim \mathbf{A}$ についての帰納法により, $\gamma_A^i(\mathbf{M}) = 0 \quad (\forall i \geq 0)$ を示そう。$d = 0$ のとき, 主張は (3.8) から従う。$d > 0$ として, $d-1$ まで正しいと仮定しよう。もし, $\mathrm{depth}\, \mathbf{M} = 0$ ならば, $\mathbf{H} = \mathrm{H}_m^0(\mathbf{M})$ として, $\mathbf{M} \cong \mathbf{H} \oplus \mathbf{M}/\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \cong \mathbf{k}^{h_A^0(M)}$ とできる。(3.8) により, **M** の代わりに **M/H** を考えて, $\mathrm{depth}\, \mathbf{M} > 0$ としてよい。$\mathbf{x} \in \mathbf{m}$ を (3.5)(2) のように選び, $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\mathbf{xA}$ とおく。$^-$ により, $- \otimes_A \overline{\mathbf{A}}$ を表すことにすると, $\overline{\mathrm{syz}_i^A(\mathbf{M})} \cong \mathrm{syz}_i^{\overline{A}}(\overline{\mathbf{M}})$ であり, $\overline{\mathbf{M}}$ も linear maximal Buchsbaum $\overline{\mathbf{A}}$-module だから, 帰納法の仮定により, $\gamma_{\overline{A}}^i(\overline{\mathbf{M}}) = 0 \quad (\forall i \geq 0)$. これと, (3.8) と同様の議論により, $\gamma_A^i(\mathbf{M}) = 0$ を得る。 **QED**

一般に, linear maximal Buchsbaum module は surjective Buchsbaum module であることが知られている。特に, M が linear であるとき, $0 \leq p \leq d-1$ に対して,

$$\mu_A^p(\mathrm{M}) = \sum_{i=0}^{p} \beta_{p-i}^A \cdot h_A^i(\mathrm{M})$$

さらに,

$$\mu_A^d(\mathrm{M}) = \sum_{i=0}^{d-1} \beta_{d-i}^A(\mathbf{k}) \cdot h_A^i(\mathrm{M}) + e_A(\mathrm{M}) - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} \cdot h_A^i(\mathrm{M}).$$

が成立している。

我々は, Theorem (2.1) の応用として, 次を証明することが出来る。

Proposition 3.9 **A** を *complete CM local ring of maximal embedding dimension* (*i.e.* $\mathrm{emb(A)} = \dim \mathrm{A} + e(\mathrm{A}) - 1$) とする。

このとき, 任意の *maximal surjective Buchsbaum* **A**-*module* **M** に対して, 次は同値である。

(1) **M** は *linear maximal Buchsbaum* **A**-*module* である。

(2) **M** は *linear MCM* **A**-*module* の準同型像である。

(3) 次の公式を満たす。

$$\mu_A^d(\mathrm{M}) = \sum_{i=0}^{d-1} \beta_{d-i}^A(\mathbf{k}) \cdot h_A^i(\mathrm{M}) + e_A(\mathrm{M}) - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} \cdot h_A^i(\mathrm{M}).$$

ただし, $h_A^i(\mathrm{M}) = \mathrm{length}_A(\mathrm{H}_m^i(\mathrm{M}))$ を表す。

Proof. (2) $\Longrightarrow$ (1) : **X** を linear MCM **A**-module とし, $\mathbf{X} \to \mathbf{M} \to 0$ (ex) とすれば, **m** の任意の minimal reduction **q** をとるとき, **M**/**qM** は ベクトル空間 **X**/**qX** の準同型像であり, それ自身ベクトル空間である。ゆえに, **M** は linear である。((3.5))

(1) $\Longrightarrow$ (3) : は, 上に述べた。

(3) $\Longrightarrow$ (2) : ($\mathcal{C}$.) : $0 \longrightarrow \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{M} \longrightarrow 0$ (ex) を **M** の minimal CM approximation とすれば, **M** が maximal surjective Buchsbaum **A**-module だから, **Y** もそう。さらに, $h_A^{i-1}(\mathrm{M}) = h_A^i(\mathrm{Y})$ $(\forall i < d)$. 一方, ($\mathcal{C}$.) の minimality

から, $\mu_A^d(\mathbf{M}) = \mu_A^d(\mathbf{X})$ かつ $\mu_A^{d-1}(\mathbf{M}) = \mu_A^d(\mathbf{Y})$. また, [Kaw1, (2.2)] に注意すると,

$$\begin{aligned} h_A^d(\mathbf{Y}) &= \mu_A^d(\mathbf{Y}) - \sum_{i=0}^{d-1} \beta_{d-i}^A \cdot h_A^i(\mathbf{Y}) \\ &= \mu_A^{d-1}(\mathbf{M}) - \sum_{i=1}^{d-1} \beta_{d-i}^A \cdot h_A^{i-1}(\mathbf{M}) \\ &= h_A^{d-1}(\mathbf{M}). \end{aligned}$$

川崎により証明された finite injective dimension を持つ maximal surjective Buchsbaum modules の構造定理 ([Kaw1]) により,

$$\mathbf{Y} \cong \bigoplus_{i=0}^{d} \mathbf{L}_i^{h_A^i(\mathbf{Y})} = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{L}_i^{h_A^{i-1}(\mathbf{M})},$$

ただし, $\mathbf{L}_i$ は indecomposable maximal surjective Buchsbaum $\mathbf{A}$-module で, $\mathrm{id}_A(\mathbf{L}_i) < \infty, \quad h_A^i(\mathbf{L}_j) = \delta_{ij} \quad (0 \le i < d,\ 0 \le j \le d)$.

他方, $2 \le i \le d-1$ に対して, $\mathbf{L}_i \cong \mathrm{Hom}_A(\mathbf{\Omega}_{d-i+1}^A, \mathbf{K}_A)$ であることが分かる。

Claim : $\mathbf{X}$ は linear MCM $\mathbf{A}$-module.
$e(\mathbf{X}) = \mu_A^d(\mathbf{X})$ を言えば良い。

$$\begin{aligned} & e(\mathbf{X}) - \mu_A^d(\mathbf{X}) \\ = \; & e(\mathbf{Y}) + e(\mathbf{M}) - \mu_A^d(\mathbf{M}) \\ = \; & \sum_{i=1}^{d} e(\mathbf{L}_i) \cdot h_A^{i-1}(\mathbf{M}) - \sum_{i=0}^{d-1} \beta_{d-i}^A \cdot h_A^i(\mathbf{M}) + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} \cdot h_A^i(\mathbf{M}) \quad (\text{仮定}) \\ = \; & \sum_{i=0}^{d-1} e(\mathbf{\Omega}_{d-i}) \cdot h_A^i(\mathbf{M}) - \sum_{i=0}^{d-1} \mu_A(\mathbf{\Omega}_{d-i}) \cdot h_A^i(\mathbf{M}) + \sum_{i=1}^{d-1} h_A^{d-i}(\mathbf{\Omega}_{d-i}) \cdot h_A^i(\mathbf{M}) \\ = \; & \sum_{i=0}^{d-1} \Big(e(\mathbf{\Omega}_{d-i}) + \mathrm{I}_A(\mathbf{\Omega}_{d-i}) - \mu_A(\mathbf{\Omega}_{d-i}) \Big) \cdot h_A^i(\mathbf{M}) \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

最後の等式は, [Yos1, (2.4)] から従う。ゆえに, 求める主張を得る。 **QED**

Remark 2 一般に, (1) と (3) の同値性が確認されている。

References

[AuB] M. Auslander, R. O. Buchweitz, The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations, *Bull. Soc. Math. de France*, Mem 38 (1989), 5–37.

[AuDS] M. Auslander, S. Ding and Φ. Solberg, Liftings and Weak Liftings of Modules, *J. Algebra* 156 (1993), 273–317.

[He] J. Herzog, Ringe mit nur endlich vielen Isomorphieklassen von maximalen, unzerlegbaren Cohen-Macaulay-Moduln, *Math. Ann.* 233 (1978), 21–34.

[HM] J. Herzog, and A. Martsinkovsky, Glueing Cohen-Macaulay modules with applications to quasihomogeneous complete intersections with isolated singularities, *Comm. Math. Helv.* 68 (1993), 365–384.

[Kaw1] T. Kawasaki, Surjective-Buchsbaum modules over Cohen-Macaulay local rings, (to appear in *Math. Z.*)

[Kaw2] T. Kawasaki, Local Cohomology Modules of Indecomposable Surjective Buchsbaum Modules over Gorenstein Local Rings, *preprint.*

[Ro] P. Roberts, Homological invariants of modules over commutative rings, Séminaire de Mat. Sup. no 72, *Les Press de l'Université de Montreal*, 1980.

[Yos1] K. Yoshida, On Linear Maximal Buchsbaum Modules and the Syzygy Modules, to appear in Comm. in Alg.

[Yos2] K. Yoshida, A note on minimal Cohen-Macaulay approximations, *preprint.*

[Yosh] Y. Yoshino, Cohen-Macaulay approximations, 多元環の表現論シンポジウム報告集, 伊豆, 1993.

Department of Mathematics, School of Science
Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya 464-01, Japan
Email address : yoshida@math.nagoya-u.ac.jp

乗法型の導分について

松村英之

福岡工大 自然系

可換環 A の高階導分 $\underline{D}=(D_0, D_1, D_2, \cdots)$ とは，加法群の準同型 $D_i : A \to A$ の列で

$$(※)\quad D_0 = id_A, \quad D_i(ab) = \sum_{\nu+\mu=i} D_\nu(a) D_\mu(b)$$

をみたすものであり，環の準同型

$$E_t : A \to A[\![t]\!], \qquad E_t(a) = a + \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu(a) t^\nu$$

と同一視できる．D_1 は A の導分 (derivation) になる．

図式
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "E_t"] \arrow[dr, "E_{t+u}"'] & A[\![t]\!] \arrow[d, "E_u"] \\ & A[\![t, u]\!] \end{tikzcd}$$
$$\left(\begin{array}{l} \text{ただし } E_u(t^\nu) = t^\nu \text{ すなわち} \\ E_u(\sum a_\nu t^\nu) = \sum_\nu E_u(a_\nu)\cdot t^\nu \\ \qquad = \sum_{\nu,\mu} D_\mu(a_\nu) t^\nu u^\mu \end{array} \right)$$

が可換になることは，$D_i \circ D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j} \quad (\forall i, j)$ が成り立つことと同値であり，このとき $\underline{D}$ は iterative であるといわれる．A の標数が素数 p のときには，上式から容易に $D_1^p = 0$ が得られる．逆に A が標数 p の体 K のときには，$D^p = 0$ をみたす導分 $D \in Der(K)$ に対し，$K^D = \{a \in K \mid Da = 0\}$ とおけば

(i) $Dx_0 = 1$ となる $x_0 \in K$ があり，$K = K^D[x_0]$，

(ii) iterative な高階導分 $\underline{D} = (D_0, D_1, D_2, \cdots)$ で $D_1 = D$, $D_\nu(x_0) = 0$

（$\nu>1$）をみたすものが存在する，
ことが証明できる（[M]，[CRT] Th. 27.4）．

イタリアのメッシナ大学の Vittoria Bonanzinga さんは，高階導分が

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "E_t"] \arrow[dr, "E_{t+u+tu}"'] & A[[t]] \arrow[d, "E_u"] \\
 & A[[t,u]]
\end{tikzcd}$$

の可換性をもつ場合を考察し，F_m 型の高階導分と呼んだ。これは，$f(t,u)=t+u+tu$ で与えられる1次元の形式群 F_m が A に作用すると見なせることから来ている．（形式群とその作用については [Tyc] 参照．）こゝでは乗法型と呼ぶことにしよう．以下は V. B. さんと私の共同研究である．

整数 $a, b, \cdots, c$ に対し

$$\langle a, b, \cdots, c\rangle = (a+b+\cdots+c)!\,(a!\,b!\cdots c!)^{-1}$$

とおく．$a, b, \cdots$ の中に負のものがあれば左辺は 0 と約束する．$\langle a, b\rangle = \binom{a+b}{a}$ である．この記号を用いれば，D が乗法型であることは

$$(*)\qquad D_i\circ D_j = \sum_r \langle r-i,\ r-j,\ i+j-r\rangle D_r \qquad (\forall i, j)$$

と同値である（[Tyc] Example 2.6）．右辺の和は，$\langle\ \rangle$ についての約束により $\max(i,j)\le r\le i+j$ にわたる．たとえば

$$\begin{aligned}D_2\circ D_3 &= \langle 1, 0, 2\rangle D_3 + \langle 2, 1, 1\rangle D_4 + \langle 3, 2, 0\rangle D_5\\ &= 3D_3 + 12D_4 + 10D_5.\end{aligned}$$

とくに，$j=1$ のとき

$$(**)\qquad D_n\circ D_1 = nD_n + (n+1)D_{n+1} \qquad (\forall n)$$

となるから，

もしAが有理数体$\mathbb{Q}$を含めば，(**)から$D_2, D_3, \cdots$は順次にD_1の多項式として定まる．より精密に，$D_1 = D$とすれば

$$D_n = \frac{1}{n!}\left(D^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n} D^{n-i}\right), \quad a_{i,n} \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_i a_{i,n} = -1$$

となることをV.B.さんは示した。逆に，$D_1, D_2, \cdots$が(**)をみたせば一般のi,jについても(*)をみたし，また(☆)もみたすことは一寸計算すれば判るので，$\underline{D} = (D_0, D_1, D_2, \cdots)$, $D_0 = id$, は乗法型の高階導分である．従って，$A \supset \mathbb{Q}$のときには，与えられた任意の導分Dに対し，それをD_1とする乗法型の高階導分が1つかつただ1つ存在する．

Aが標数pのときには，

$$0 = p!\, D_p = D^p + \sum_{1}^{p-1} a_{i,p} D^{p-i}$$

すなわち

$$D^p = -\sum_{i=1}^{p-1} a_{i,p} D^{p-i}$$

となるが，左辺は導分であるから，$a_{p-1,p}$以外の$a_{i,p}$は0である（[CRT] 定理25.4）．これと$\sum a_{i,p} = -1$とから

$$D^p = D$$

が得られる．以下，Aが標数pのときのみを考え，$D^p = D$, $D \neq 0$ をみたす$D \in \mathrm{Der}(A)$を乗法型の導分と呼ぶ。

Kを標数pの体とすると，乗法型の$D \in \mathrm{Der}(K)$に対し

(i') $Dx_0 = x_0$ をみたす $0 \neq x_0 \in K$ が存在する．

(ii') $D_1 = D$ となる乗法型の高階導分 $\underline{D} = (D_0, D_1, D_2, \cdots)$ で $D_\nu(x_0) = 0 \quad (\nu > 1)$ をみたすものが存在する

が成立する．

(i′) の証明.

[CRT] 定理25.4 によれば $1, D, D^2, \cdots, D^{p-1}$ は K 上1次独立であるから,

$$Dy + D^2y + \cdots + D^{p-1}y \neq 0$$

となる $y \in K$ が存在する. この左辺を x_0 とおけばよい.

<u>補題 1.</u> 上の x_0 に対し $K = K^D[x_0]$ で, $1, x_0, x_0^2, \cdots, x_0^{p-1}$ は K^D 上の K の基底になる.

これは, 色々な証明が可能である. まず, $1, x_0, \cdots, x_0^{p-1}$ が K^D 上1次独立であることは, $x_0^p \in K^D$, $x_0 \notin K^D$, よって $[K^D(x_0) : K^D] = p$ だから明らかである.

$K = K^D[x_0]$ を初等的に示すには, D を K の K^D 上の1次変換と見るとよい.

$$X^p - X = \prod_{\nu=0}^{p-1} (X - \nu)$$

が D の最小多項式で, 容易に判るように x_0^ν が固有値 ν に対応する固有ベクトルの空間を張る. $g_\nu(X) = \dfrac{X^p - X}{X - \nu}$ とおくと $g_0, g_1, \cdots, g_{p-1}$ の最大公約数は 1 であるから

$$1 = \sum_{\nu=0}^{p-1} h_\nu(X) \cdot g_\nu(X)$$

となる $h_\nu(X) \in K^D[X]$ が存在する. よって $a \in K$ に対し

$$a = \sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu, \quad a_\nu = h_\nu(D) g_\nu(D) a \in K x_0^\nu$$

となるから $K = K^D + K^D x_0 + \cdots + K^D x_0^{p-1}$.

また, N. Jacobson の, 指数1の純非分離拡大のガロア理論 ([Jac] Chap. 2 Th. 19) によれば, $\mathfrak{g}$ が K の導分の restricted p-Lie algebra (すなわち, K 上のベクトル空間で, 括弧積と p 乗とに関して閉じているもの) で $\dim_K \mathfrak{g} = m < \infty$ ならば, $[K : K^D] = p^m$ である. これを使うなら, 今の場合 $D^p = D$ と

Hochschildの公式とによって，KDが上のσの条件をみたすから，$[K:K^D]=p$となり，$K=K^D(x)\ (=K^D[x])$がわかる．

第3の方法は，$\delta=x_0^{-1}D$とおく．Hochschildの公式により$\delta^p=b\delta$となる$b\in K$があるが，$\delta(x_0)=1$より$b=0$が出る．よって$\delta^p=0$である．$K^D=K^\delta$であり，δについては$K=K^\delta[x_0]$はよく知られている（[CRT]定理27.3）からこれでよい．

ここから先の(iii')の証明は，加法型（すなわち$D^p=0$のとき）の私の証明（[CRT]定理27.4）と全く同様にやればできるが，上記の$\delta=x_0^{-1}D$を用いて加法型の場合から導くこともできる．即ち，

$$\underline{\delta}=(\delta_0,\delta_1,\delta_2,\cdots),\quad \delta_0=id,\quad \delta_1=\delta=x_0^{-1}D$$

をKのiterativeな高階導分で$\delta_\nu(x_0)=0\ (\nu>1)$をみたすものとする．

$$D_\nu=x_0^\nu\delta_\nu\quad(\nu=0,1,2,\cdots)$$

とおくと$\underline{D}=(D_0,D_1,D_2,\cdots)$もKの高階導分で，$D_1=D$である．更に，$E_t(a)=\sum_\nu D_\nu(a)t^\nu\quad(a\in K)$とおくと

$$E_t(x_0)=x_0(1+t).$$

$$\begin{aligned}(E_u\circ E_t)(a)&=\sum_\nu E_u(x_0^\nu\delta_\nu(a))t^\nu\\&=\sum_\nu E_u(x_0)^\nu E_u(\delta_\nu(a))t^\nu\\&=\sum_\nu x_0^\nu(1+u)^\nu\cdot\sum_\alpha x_0^\alpha\delta_\alpha\delta_\nu(a)\,u^\alpha t^\nu\\&=\sum_{\nu,\alpha}t^\nu(1+u)^\nu\cdot u^\alpha\, x_0^{\nu+\alpha}\binom{\alpha+\nu}{\alpha}\delta_{\alpha+\nu}(a)\\&=\sum_r D_r(a)\cdot\sum_\alpha\binom{r}{\alpha}u^\alpha t^{r-\alpha}(1+u)^{r-\alpha}\\&=\sum_r D_r(a)\cdot(t+u+tu)^r\\&=E_{t+u+tu}(a)\end{aligned}$$

となるから $\underline{D}$ は乗法的な高階導分である. //

A が標数 p の可換環で, D が A の乗法的導分であるとき, A が体の場合と同様にうまく行くとは限らない. D が乗法的高階導分に延長できるための簡明な十分条件があるだろうか?

[R-M] Th.8 では次の結果が得られている.

$\boxed{\text{定理}}$ K/k を, 標数 p の有限生成の体の拡大とすると, 次の条件は同値である:

(1) K は k 上分離的 (separable) である.

(2) 任意の $D \in Der_k(K)$ は K の k 上の高階導分に延長できる.

(3) $D^p = 0$ をみたす任意の $D \in Der_k(K)$ は K の k 上の iterative な高階導分に延長できる.

(4) $D^p = 0$ をみたす $D \in Der_k(K)$ は K の k 上の高階導分に延長できる.

D と $\delta = x_0^{-1} D$ の関係について上に見たことから, この定理の (3) は

(3′) $D^p = D$ をみたす任意の $D \in Der_k(K)$ は, K の k 上の乗法的高階導分に延長できる.

と同値であることがわかる.

[R-M] は入手困難と思われるので, 上の定理の証明のスケッチを記しておこう. (1) $\Rightarrow$ (2) は [M] Th.6, (2) $\Rightarrow$ (4) は自明. (1) $\Rightarrow$ (3) は [M] Th.7, (3) $\Rightarrow$ (4) は自明. よって (4) $\Rightarrow$ (1) のみが問題である. 次の補題が必要である:

<u>補題 2</u>. K/k を標数 p の拡大体とし, $D^p = 0$ をみたす任意の $D \in Der_k(K)$ は K の k 上の高階導分に延長できるとする. しからば, k 上に p 独立な K の元 $x_1, \cdots, x_n$ は k 上に代数的独立である.

証明. $x_1,\cdots,x_n$ が k 上代数的関係 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$ をみたすとし, そのような f の中で最低次のものをえらんでおく. f を

$$f(X_1,\cdots,X_n)=g(X_1{}^{p^e},\cdots,X_n{}^{p^e}),$$

こゝに $g(Y_1,\cdots,Y_n)\in k[\underline{Y}]$, $g_i=\frac{\partial g}{\partial Y_i}\neq 0$ for some i, と表わしておく. $g_1\neq 0$ として一般性を失わない.

$\{x_1,\cdots,x_n\}$ を K/k の p 基底に拡張できるから, $D\in \mathrm{Der}_k(K)$ で $D(x_1)=1$, $D(x_i)=0$ $(i>1)$, $D^p=0$ をみたすものが存在する. 仮定により D を高階導分 $\underline{D}=(D_0,D_1,D_2,\cdots)$ に延長できる. $E(a)=\sum D_\nu(a)t^\nu\in K[[t]]$ $(a\in K)$ とおくと

$$E(x_1)=x_1+t+D_2(x_1)t^2+\cdots,$$
$$E(x_i)=x_i+\quad D_2(x_i)t^2+\cdots\qquad(i>1).$$

よって

$$0=E(g(x_1{}^{p^e},\cdots,x_n{}^{p^e}))\equiv g((x_1+t)^{p^e},x_2{}^{p^e},\cdots)\ \mathrm{mod}\ t^{2p^e},$$

$$\therefore\ 0\equiv g(\underline{x}^{p^e})+g_1(\underline{x}^{p^e})\cdot t^{p^e}=g_1(\underline{x}^{p^e})\cdot t^{p^e}\ \mathrm{mod}\ t^{2p^e}.$$

$g_1\neq 0$, $g_1(\underline{x}^{p^e})=0$ となるから, $f(\underline{x})=0$ より低次の関係式があることになり矛盾. //

定理の (4) $\Rightarrow$ (1) の証明.

B を K/k のひとつの p 基底とすると, 補題2により $k(B)$ は k の純粋超越拡大である. また, $K=kK^p(B)$ だから $\Omega_{k(B)}(K)=0$. K が k 上有限生成という仮定から

$$\mathrm{rank}\,\Omega_{k(B)}(K)\geq \mathrm{tr.deg.}_{k(B)}K$$

が成り立つ. (例えば松村: Commutative Algebra, Th.59).
よって K は $k(B)$ 上代数的である. 更に, 同じ Th.59 の (ii) から上の不等式が等式になるのは $K/k(B)$ が分離生成のときに限るから, K は k 上分離生成である. 即ち (1) が成り立つ.

Reference

[M] H. Matsumura, Integrable Derivations,
Nagoya Math. J. 87 (1982), 227-245.

[CRT] 松村英之, 可換環論, 共立出版(1980), 又は 英語版
Commutative Ring Theory, Cambridge Univ. Press, (1986).

[Tyc] A. Tyc, Invariants of linearly reductive formal group actions,
J. of Algebra 101(1986), 166-187.

[Tyc2] A. Tyc, On F-integrable actions of the restricted Lie algebra of a formal group F in characteristic p.
Nagoya Math. J. 105(1989), 125-137.

[Jac] N. Jacobson, Lectures in abstract algebra, Vol. III.
Van Nostrand, (1964).

[R-M] G. Restuccia-H. Matsumura, Integrable Derivations II,
Atti Accad. Peloritana dei Pericolanti, Messina, Vol. LXX (1994), 153-172.

On syzygy modules of Buchsbaum modules

Kikumichi Yamagishi

College of Liberal Arts, Himeji Dokkyo University

Introduction

Throughout this note $(A, \mathfrak{m}, k)$ is a Noetherian local ring of dimension d. For a finitely generated A-module M we denote by $\mathrm{Syz}_i^A(M)$ and $\beta_i^A(M)$ the i^{th} *syzygy* module and the i^{th} *Betti number* of M over A, respectively, i.e.,

$$\mathrm{Syz}_i^A(M) = \mathrm{Im}\ (F_i \longrightarrow F_{i-1}) \quad \text{and} \quad \beta_i^A(M) = \mathrm{rank}_A F_i \ ,$$

where $F.$ is the minimal free resolution of M over A.

First we recall our original problem discussed in [6]. In the case that A is a Cohen-Macaulay ring we have $\beta_i^A(A/\mathfrak{q}) = \binom{d}{i}$ for any parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A, hence every Betti number $\beta_i^A(A/\mathfrak{q})$ is a constant not depending on the choice of $\mathfrak{q}$. This fact motivates us the next question:

Problem I. *If A is a Buchsbaum ring, then is $\beta_i^A(A/\mathfrak{q})$ a constant not depending on the choice of parameter ideal $\mathfrak{q}$?*

This is a dual problem whether the syzygy modules of the residue field k are Buchsbaum, cf. [2]. Namely

Problem II. *If A is a Buchsbaum ring, then is $\mathrm{Syz}_i^A(k)$ a Buchsbaum A-module for each i ?*

But we still have a partial answer to this problem, see [1], [7] and also [6]. It seems the difficulty of this problem that we must check infinitely many (syzygy) modules whether they are Buchsbaum.

The purpose of this note is to discuss a new question below which may be much sharper than Problem II and seems a very hopeful approach to studying Problem II (and also Problem I) by inductive steps.

Problem III. *Let A be a Buchsbaum ring. If M is a maximal Buchsbaum A-module, then is $\mathrm{Syz}_1^A(M)$ a Buchsbaum A-module too?*

Of course, this is not true in general, see Remark 9 below, and we should set up a suitable restriction on A and M. Our main results are stated as follows:

Theorem 1. *Let A be a Buchsbaum ring and M a maximal Buchsbaum A-module. Suppose that $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ for all $2 \leqq i < d$, i.e., the canonical module $K_{\hat{A}}$ is a Cohen-Macaulay $\hat{A}$-module, and M is a 1^{st} syzygy A-module (of some finitely generated A-module). Then $\mathrm{Syz}_1^A(M)$ is either a maximal Buchsbaum A-module or a k-vector space.*

Theorem 2. *Let A be a surjective Buchsbaum ring and M a maximal surjective Buchsbaum A-module. Suppose that $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ for all $2 \leqq i < d$ and M is a 1^{st} syzygy A-module. Then $\mathrm{Syz}_1^A(M)$ is either a maximal surjective Buchsbaum A-module or a k-vector space.*

As consequences of our theorems we also have the followings.

Corollary 3. *If A is a Buchsbaum ring such that $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ for each $2 \leqq i < d$, then $\mathrm{Syz}_j^A(k)$ is a maximal Buchsbaum A-module for all $j > 0$.*

Corollary 4. *If A is a surjective Buchsbaum ring such that $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ for each $2 \leqq i < d$, then $\mathrm{Syz}_j^A(k)$ is a maximal* *surjective Buchsbaum A-module for all* $j > 0$.

Criterion for $\mathrm{Syz}_1^A(M)$ *to be Buchsbaum*

Until the end of Proposition 13, let A be a Buchsbaum ring of dimension d , M a maximal Buchsbaum A-module and $\mathfrak{q}$ a parameter ideal of A . We write $\mu = \mu_A(M)$, the minimal number of generators of M over A . Consider the short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{Syz}_1^A(M) \longrightarrow F \xrightarrow{\sigma} M \longrightarrow 0 ,$$

where F is an A-free module of rank μ and σ is a suitable A-epimorphism. Then we have the long exact sequence of local cohomology modules:

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(\mathrm{Syz}_1^A(M)) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(F) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(M) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^{i-1}(M) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(\mathrm{Syz}_1^A(M)) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(F) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M) \longrightarrow \cdots .$$

Since $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(F)$ and $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^{i-1}(M)$ are k-vector spaces for each $i < d$, it follows that $\mathfrak{m}.\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(\mathrm{Syz}_1^A(M)) = (0)$ and $\mathfrak{m}^2.\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^j(\mathrm{Syz}_1^A(M)) = (0)$ for all $1 \leqq j < d$. Thus we know that $\mathrm{Syz}_1^A(M)$ is either a maximal FLC A-module or a k-vector space.

Now we discuss the criterion whether $\mathrm{Syz}_1^A(M)$ is Buchsbaum. Let $\mathrm{H}_1(\mathfrak{q}; M)$ denote the 1^{st} Koszul homology of M with respect to $\mathfrak{q}$, and write $\mathrm{H}_1(\mathfrak{q})$ simply if $M = A$. Notice that there exists an exact sequence of A-modules concerning Koszul homology:

$$\mathrm{H}_1(\mathfrak{q}) \otimes_A M \longrightarrow \mathrm{H}_1(\mathfrak{q}; M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{q}, M) \longrightarrow 0 .$$

Then we have the following.

Lemma 5. *Suppose that* $\dim_A \mathrm{Syz}_1^A(M) > 0$. *Then the following conditions are equivalent.*

(1) $\mathrm{Syz}_1^A(M)$ *is a maximal Buchsbaum A-module.*

(2) $l_A(\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{q}, M))$ *is a constant not depending on* $\mathfrak{q}$.

(3) $l_A(\mathrm{Im}\ (\mathrm{H}_1(\mathfrak{q}) \otimes_A M \longrightarrow \mathrm{H}_1(\mathfrak{q}; M)))$ *is a constant not depending on* $\mathfrak{q}$.

Proposition 6. *Suppose that* $\dim_A \mathrm{Syz}_1^A(M) > 0$. *Then the following statements are equivalent.*

(1) *The idealization* $A \ltimes M$ *is a Buchsbaum ring.*

(2) $l_A(\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{q}, M)) = \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j+1} \cdot l_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^j(M))$ *for every* $\mathfrak{q}$.

(3) $\mathrm{H}_1(\mathfrak{q}) \otimes_A M \longrightarrow \mathrm{H}_1(\mathfrak{q}; M)$ *is a zero map for every* $\mathfrak{q}$.

(4) $\mathrm{Syz}_1^A(M)$ *is a maximal Buchsbaum A-module such that*

$$l_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(\mathrm{Syz}_1^A(M))) = \mu_A(M) \cdot l_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A)) + l_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^{i-1}(M))$$

for all $0 \leqq i < d$.

As consequences of Proposition 6, we have the following.

Corollary 7. *If* A *(resp.* M *) is Cohen-Macaulay then* $\mathrm{Syz}_1^A(M)$ *is either a maximal Buchsbaum A-module or a k-vector space.*

Corollary 8. $\mathrm{Syz}_2^A(k)$ *is a maximal Buchsbaum A-module if it is not a zero module.*

Notice that Problem Ⅲ stated above is not necessarily true in general. S. Goto pointed out the author the next counter example. By this example we see that $\mathrm{Syz}_1^A(M)$ is not necessarily a Buchsbaum A-module, even if $A \ltimes M$ is a quasi-Buchsbaum ring.

Remark 9. Let $(R, \mathfrak{n}, k)$ be a regular local ring of dimension $d \geqq 2$, and put

$$A = R \ltimes \mathfrak{n} \quad , \quad M = R \ltimes \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \quad .$$

Then A is a Buchsbaum ring such that $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ for $i \neq 1, d$ and $\mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(A) \cong k$, and M is a maximal Buchsbaum A-module such that $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ for $i > 0$ and $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M) \cong k^d$, and moreover $A \ltimes M$ is a quasi-Buchsbaum ring, cf. [4]. Now we have the exact sequence of A-modules as follows:

$$0 \longrightarrow (0) \times \mathfrak{n}^2 \longrightarrow A = R \ltimes \mathfrak{n} \longrightarrow M = R \ltimes \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \longrightarrow 0 .$$

Hence $\mathrm{Syz}^A_1(M) \cong (0) \times \mathfrak{n}^2$. Since $\mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Syz}^A_1(M)) \cong R/\mathfrak{n}^2$ as R-modules, we know $\mathfrak{n}.\mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Syz}^A_1(M)) \neq (0)$. This means $\mathfrak{m}.\mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Syz}^A_1(M)) \neq (0)$. Therefore $\mathrm{Syz}^A_1(M)$ is not a Buchsbaum A-module, though $A \ltimes M$ is a quasi-Buchsbaum ring. Moreover, it is obvious that this A-module M cannot be a 1^{st} syzygy module over A , because of $\mathrm{depth}_A M = 0$.

Reduction step to the case of positive depth

In this part we prepare some reduction step of our problem to the case of positive depth. We begin with the following.

Lemma 10. *If* $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M) \not\subset \mathfrak{m}M$, *then there is an* A*-submodule* W *of* M *satisfying the following conditions:*

(*i*) $W \subset \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)$;

(*ii*) $W \cap \mathfrak{m}M = (0)$;

(*iii*) $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M/W) \subset \mathfrak{m}.(M/W)$.

When this is the case one also has $M = W \oplus M/W$, *and therefore*

$$\mathrm{Syz}^A_1(M) = \mathfrak{m}^{\oplus l} \oplus \mathrm{Syz}^A_1(M/W) , \ \textit{where} \ \ l = l_A(W) .$$

Now we denote by A' (resp. M') the local ring $A/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)$ (resp. the A-module $M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)$). Then we have the following.

Lemma 11. *Suppose that* $H^0_{\mathfrak{m}}(A).M = (0)$. *Then one has*

(*i*) $H^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Syz}^A_1(M)) = H^0_{\mathfrak{m}}(A).F = (H^0_{\mathfrak{m}}(A))^{\oplus\mu}$, *where* $\mu = \mu_A(M)$;

(*ii*) $\mathrm{Syz}^{A^{\check{}}}_1(M) = (\mathrm{Syz}^A_1(M))^{\check{}}$, *as* $A^{\check{}}$*-modules.*

Therefore $\mathrm{Syz}^A_1(M)$ *is a maximal Buchsbaum A-module if and only if* $\mathrm{Syz}^{A^{\check{}}}_1(M)$ *is a maximal Buchsbaum* $A^{\check{}}$*-module.*

Let $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_d)$. Then we define the ideal of A, say $\Sigma(\mathfrak{q})$, as follows:

$$\Sigma(\mathfrak{q}) = \sum_{i=1}^{d} [(a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_d) : a_i] + \mathfrak{q} .$$

Then $\mathfrak{q} \subset \Sigma(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{m}$ clearly. With this notation we have:

Lemma 12. *Suppose that* $\Sigma(\mathfrak{q}).M \cap H^0_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ *for every parameter ideal* $\mathfrak{q}$ *of* A *and* $H^0_{\mathfrak{m}}(M) \subset \mathfrak{m}M$. *Then the following two statements are equivalent.*

(1) $\mathrm{Syz}^A_1(M)$ *is a maximal Buchsbaum A-module.*

(2) $\mathrm{Syz}^A_1(M^{\check{}})$ *is a maximal Buchsbaum A-module.*

Now we attain our goal of this section which is the key to the proof of our results. Namely

Proposition 13. *Suppose that* M *is a* 1^{st} *syzygy module (of some finitely generated A-module) and* $H^0_{\mathfrak{m}}(M) \subset \mathfrak{m}M$. *Then the following statements are equivalent.*

(1) $\mathrm{Syz}^A_1(M)$ *is a maximal Buchsbaum A-module.*

(2) $\mathrm{Syz}^{A^{\check{}}}_1(M^{\check{}})$ *is a maximal Buchsbaum* $A^{\check{}}$*-module.*

Proof of Theorems

Here, before the proof of theorems, it is not necessarily to keep the assumption such that A is a Buchsbaum ring.

In order to show our theorems we need more several lemmas. We begin with the following.

Lemma 14. *Let* $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *be an exact sequence of finitely generated* A*-modules and* $t \geqq 0$ *an integer. Suppose that the following conditions are satisfied:*

(*a*) $\dim_A E = \dim_A F = \dim_A N > t$;

(*b*) $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(F) = (0)$ *for all* $i \neq t, \dim_A F$;

(*c*) N *is a surjective Buchsbaum* A*-module with* $\mathrm{depth}_A N \geqq t - 1$.

Then E *is a surjective Buchsbaum* A*-module (with* $\mathrm{depth}_A E \geqq t$ *) if and only if* $\mathfrak{m}.\mathrm{H}^{t}_{\mathfrak{m}}(E) = (0)$.

Proposition 15. *With the same notations as in* Lemma 14, *suppose that the following conditions are satisfied:*

(*a*) $\dim_A E = \dim_A F = \dim_A N > t$;

(*b*) $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(F) = (0)$ *for all* $i \neq t, \dim_A F$, *and* $\mathfrak{m}.\mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(F) = (0)$;

(*c*) N *is a Buchsbaum* A*-module with* $\mathrm{depth}_A N \geqq t$.

Then E *is a Buchsbaum* A*-module with* $\mathrm{depth}_A E \geqq t$.

Proposition 16. *Let* F *be a surjective Buchsbaum* A*-module and* E *an* A*-submodule of* F . *Then the following two statements are equivalent.*

(1) E *is a surjective Buchsbaum* A*-module.*

(2) $E/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(E)$ *is a surjective Buchsbaum* A*-module.*

Remark 17. Unless the assumption that E is a submodule of some surjective Buchsbaum A-module, Proposition 16 is not true in general. In fact, if E is a 2-dimensional Buchsbaum A-module, then $E/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(E)$ is always a sujective Buchsbaum A-module. However, every Buchsbaum module E is not necessarily surjective Buchsbaum, even if

$\dim_A E = 2$.

Proposition 18. *Let* $\mathfrak{a}$ *be an ideal such that* $\dim A/\mathfrak{a} > 0$. *Then the following two statements are equivalent.*

(1) $A/\mathfrak{a}$ *is a surjective Buchsbaum* A*-module.*

(2) $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ *is a surjective Buchsbaum* A*-module.*

Therefore, if A *is a surjective Buchsbaum ring, then its maximal ideal* $\mathfrak{m}$ *is a surjective Buchsbaum* A*-module.*

Now we are ready to prove our theorems.

<u>Proof of Theorem 1</u>. Since any submodule of a 1^{st} syzygy module is also 1^{st} syzygy, we may assume that $H^0_{\mathfrak{m}}(M) \subset \mathfrak{m}M$ by Lemma 10. If $\dim_A \mathrm{Syz}^A_1(M) = 0$, it is clearly k-vector space So we may further assume that $\dim_A \mathrm{Syz}^A_1(M) = d$. By Proposition 13 we enoughly show that the $A^{\check{}}$-module $\mathrm{Syz}^{A^{\check{}}}_1(M^{\check{}})$ is Buchsbaum. But, by Proposition 15, we immediately get this assertion from our standard assumption on A and M .

<u>Proof of Theorem 2</u>. Write $E = \mathrm{Syz}^A_1(M)$. By Theorem 1, E is either a maximal Buchsbaum A-module or a k-vector space. If E is a k-vector space, then there is nothing to say more. So we may assume that E is a maximal Buchsbaum A-module. By Lemma 11 there is the exact sequence as follows:

$$0 \longrightarrow E^{\check{}} \longrightarrow F^{\check{}} \longrightarrow M \longrightarrow 0 .$$

Notice that $E^{\check{}}$ is a maximal Buchsbaum A-module of positive depth. In particular, we know $\mathfrak{m}.H^1_{\mathfrak{m}}(E^{\check{}}) = (0)$. Combining this fact and our standard assumption on A and M , this A-module $E^{\check{}}$ is surjective Buchsbaum from Lemma 14. This completes the proof of our theorems.

Finally, Corollary 3 is coming from Theorem 1 at once, and by Theorem 2 and Proposition 18 we immediately obtain Corollary 4 too.

References

[1] S. Goto. On Buchsbaum rings. *J. Algebra* **67**(1980), 272-279.

[2] S. Okiyama. A local ring is CM if and only if its residue field has a CM syzygy. *Tokyo J. Math.* **14**(1991), 489-500.

[3] J. Stückrad and W. Vogel. *Buchsbaum Rings and Applications* (Springer-Verlag, 1986).

[4] K. Yamagishi. Idealizations of maximal Buchsbaum modules over a Buchsbaum ring. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **104**(1988), 451-478.

[5] K. Yamagishi. Bass number characterization of surjective Buchsbaum modules. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **110**(1991), 261-279.

[6] K. Yamagishi. Note on stability of Betti numbers of ideals over a Buchsbaum ring. In *Commutative Algebra: International Conference, Vechta, 1994*, Vechtaer Universitätsschriften Bd. **13** (Vechta Univ. Press, 1994), 206-208.

[7] K. Yoshida. On linear maximal Buchsbaum modules and the syzygy modules. To appear in *Comm. Algebra*.

College of Liberal Arts

Himeji Dokkyo University

Kamiono 7-2-1, Himeji, Hyogo 670

E-Mail: yamagisi@hdkuc1.himeji-du.ac.jp

LOCAL COHOMOLOGY MODULES OF MAXIMAL SURJECTIVE-BUCHSBAUM MODULES

KAWASAKI, TAKESI

Tokyo Metropolitan University

1. Introduction

Let A be a Noetherian local ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$ and residue class field k. The purpose of this article is to report the following theorem and corollary.

Theorem 1.1. *We assume that A is a Gorenstein local ring whose multiplicity is greater than 2 and $d = \dim A > 0$. Then, for arbitrary integers $h_0, \ldots, h_{d-1} \geq 0$, there exists an indecomposable maximal surjective-Buchsbaum module such that*

$$\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = h_i \quad \textit{for all } 0 \leq i \leq d-1.$$

Corollary 1.2. *Under the same assumption as above, for any integer $0 \leq t < d$ and $n > 0$, there exists an indecomposable maximal surjective-Buchsbaum module such that*

$$\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \begin{cases} 0, & i \neq t, d; \\ n, & i = t. \end{cases}$$

Here a finitely generated A-module M is said to be *surjective-Buchsbaum* if the canonical map

$$\operatorname{Ext}^i_A(k, M) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M)$$

is surjective for all $i \neq \dim_A M$ [16, Definition 2.1]. For example, a finitely generated module M of dimension s and of depth t is surjective-Buchsbaum if its local cohomology modules all vanish except the s-th one and the t-th one and if the t-th local cohomology module is annihilated by the maximal ideal. Any Cohen-Macaulay module is surjective-Buchsbaum. Furthermore a surjective-Buchsbaum module is Buchsbaum module [15] and the converse is true if A is a regular local ring.

Local cohomology modules of indecomposable modules was studied by several authors. We can find the first of them in the article of Eisenbud and Goto [4, Theorem 3.2]. They proved that an indecomposable maximal Buchsbaum module over a polynomial ring over a field—it has only one homogeneous maximal ideal, that is, it is an H-local ring [6, p. 181]—is a syzygy of the field. Their proof, however, works not only in the graded case but also in the local case. In fact, Goto proved that, over a regular local ring, there exist only finitely many isomorphism classes of indecomposable maximal Buchsbaum modules [5]. Furthermore the author improved his theorem for maximal surjective-Buchsbaum modules of finite injective dimension over a Cohen-Macaulay ring possessing the canonical module [10].

Concerning these results, the following question may be raised:

Question. Let A be a Noetherian local ring and P a property for A-modules. Is there, for arbitrary integers $h_0, \ldots, h_{d-1} \geq 0$, an indecomposable module M such that

$$\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = h_i \quad \text{for all } 0 \leq i < d$$

and which satisfies P? When there is such a module, how may are there such modules?

Cipu, Herzog and Popescu obtained a partial answer of the question when A is regular and $P =$ quasi-Buchsbaum [3, Theorem 2.3]. On the other hand Amasaki gave a classification of maximal quasi-Buchsbaum modules over a regular local ring whose local cohomology modules all vanish except for at most three [1, Theorem 4.10]. Furthermore Yoshino gave another proof of Goto's theorem and consider the question for maximal Buchsbaum modules of finite projective dimension over a Gorenstein local ring [17, Theorem 3.5 and Theorem 4.8].

In these studies, we always assume that modules have *finite injective dimension.* In fact, all modules over a regular local ring has finite injective dimension and over a Gorenstein local ring, the finiteness of projective dimension is equivalent to the finiteness of injective dimension. In this article, we study modules of infinite injective dimension with help of *minimal finite injective hull*; see the next section for the definition. But we will prove only Corollary 1.2 because it is too complicated to prove Theorem 1.1. Please refer to [11] for the proof of Theorem 1.1.

Throughout this article, A denotes a Cohen-Macaulay local ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$. Let k be the residue class field of A and $d = \dim A$. We assume that there is the canonical module K_A of A. When this is the case, a maximal Cohen-Macaulay module of finite injective dimension is a direct sum of finite copies of K_A [14, Corollary 2.7].

2. Finite injective hull

Firstly we state on finite injective hull.

Definition 2.1. Let M be a finitely generated A-module. An exact sequence of A-modules

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{\ f\ } Y \longleftarrow M \longleftarrow 0$$

is said to be a *finite injective hull* of M if Y is of finite injective dimension and X is a maximal Cohen-Macaulay module or a zero module. The finite injective hull is said to be *minimal* if there is no common direct summand of X and Y under f.

In [2], Auslander and Buchweitz showed that, over a Cohen-Macaulay local ring possessing the canonical module, there exists a minimal finite injective hull of arbitrary finite generated A-module M. Moreover Auslander showed that the minimal finite injective hull of M is determined by M up to isomorphisms. That is, take two minimal finite injective hulls of M:

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{f} Y \longleftarrow M \longleftarrow 0;$$

and

$$0 \longleftarrow X' \xleftarrow{f'} Y' \longleftarrow M \longleftarrow 0.$$

Then there exists a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longleftarrow & X & \xleftarrow{f} & Y & \longleftarrow & M & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \| & & \\
0 & \longleftarrow & X' & \xleftarrow{f'} & Y' & \longleftarrow & M & \longleftarrow & 0.
\end{array}$$

But his proof is not published. For the sake of completeness, we prove the existence and the uniqueness of minimal finite injective hull.

Before the proof, we prepare a notation of complexes. Let $X_\bullet$ be a complex of A-modules. We denote the differentiations of $X_\bullet$ by $d_\bullet^X$. A chain homomorphism $X_\bullet \to Y_\bullet$ is said to be a quism if it induces an isomorphism of homology. A complex $X_\bullet$ whose homologies are finitely generated and $H_i(X_\bullet) = 0$ for sufficiently small i has a quism $F_\bullet \to X_\bullet$ such that $F_\bullet$ is a bounded below complex of finitely generated free A-modules and $d_i^F \otimes k = 0$ for all i. We say that $F_\bullet$ is a minimal free resolution of $X_\bullet$. The minimal free resolution is determined by $X_\bullet$ up to isomorphism. Refer to the readers for details and other elementary results on complexes to [13, Chapter 2].

Definition 2.2. A complex $D_A^\bullet$ of A-modules is said to be a dualizing complex of A if it satisfies the following two conditions:

- $D_A^{-i} = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \\ \dim A/\mathfrak{p} = i}} E_A(A/\mathfrak{p})$, where $E_A(-)$ denotes the injective envelope;
- the homology modules of $D_A^\bullet$ are finitely generated.

A dualizing complex of A is determined up to isomorphism if it exists.

Since we assume that A is a Cohen-Macaulay and there exists the canonical module, there exists a dualizing complex of A. In fact, the minimal injective resolution of K_A is a dualizing complex under the shifting of degree, see [8, Satz 6.1]. That is, $K_A(-d) \to D_A^\bullet$ is a quism.

Let $D(-) = \operatorname{Hom}_A(-, D_A^\bullet)$ and $(-)^* = \operatorname{Hom}_A(-, K_A)$. The next theorem is fundamental.

Theorem 2.3 (Local duality theorem). *Let M be a finitely generated A-module. Then the canonical morphism*

$$M \longrightarrow DD(M)$$

is a quism. Furthermore

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \operatorname{Hom}_A(H_i(D(M)), E_A(k)) \quad \textit{for all } i.$$

Now we finish the preparation for the proof of the following theorem.

Theorem 2.4. *There exists a unique minimal finite injective hull of arbitrary finitely generated A-module M.*

Proof. Let $F_\bullet$ be the minimal free resolution of $D(M)$. Then there exists the following quisms

$$M \longrightarrow DD(M) \longrightarrow D(F_\bullet) \longleftarrow F^*_\bullet(-d)$$

and we have

$$H_i(F^*_\bullet) = \begin{cases} M, & i = d; \\ 0, & i \neq d. \end{cases}$$

It implies that the following three sequences

$$(2.5) \qquad 0 \longleftarrow \operatorname{Im}(d^F_{d+1})^* \longleftarrow \operatorname{Coker}(d^F_d)^* \longleftarrow 0;$$

$$(2.6) \qquad 0 \longleftarrow \operatorname{Coker}(d^F_d)^* \longleftarrow F^*_d \longleftarrow \cdots \longleftarrow F^*_1 \longleftarrow F^*_0 \longleftarrow 0;$$

$$(2.7) \qquad \cdots \longleftarrow F^*_{d+2} \longleftarrow F^*_{d+1} \longleftarrow \operatorname{Im}(d^F_{d+1})^* \longleftarrow 0;$$

are exact. The sequence (2.6) means that $Y = \operatorname{Coker}(d^F_d)^*$ is of finite injective dimension. Furthermore $F_{d+1}, F_{d+2}, \ldots$ are either all vanish or all non zero, because it is known that $\operatorname{rank} F_i = \mu^i_A(M)$ where $\mu^i_A(-)$ denotes the i-th Bass number [13, Chapter 2, Theorem 3.6]. Hence $X = \operatorname{Im}(d^F_{d+1})^*$ is a maximal Cohen-Macaulay module or a zero module, and so, the exact sequence (2.5) is a finite injective hull of M.

If X and Y have a common direct summand Z, then it is a direct sum of finite copies of K_A. By taking $(-)^*$ of the sequence (2.7), we find that Z is also a direct summand of F^*_{d+1}. It contradicts the fact that $X \subseteq \mathfrak{m}F^*_{d+1}$. Thus the finite injective hull (2.5) is minimal.

Next, we show the uniqueness of the minimal finite injective hull. Take two minimal finite injective hulls of M:

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{\ f\ } Y \longleftarrow M \longleftarrow 0$$

and

$$0 \longleftarrow X' \xleftarrow{\ f\ } Y' \longleftarrow M \longleftarrow 0.$$

Let $F_\bullet$ and $G_\bullet$ be the minimal free resolutions of $D(X)$ and $D(Y)$, respectively. Then by considering Bass numbers, we have

$$F_i = 0 \quad \text{for all } i < d$$

and

$$G_i = 0 \quad \text{for all } i > d.$$

Furthermore $D(f)$ induces a chain homomorphism $\phi_\bullet \colon F_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ which makes the following diagram

$$\begin{tikzcd} D(Y) & D(Y) \arrow[l, "D(f)"'] \\ G_\bullet \arrow[u] & F_\bullet \arrow[l, "\phi_\bullet"'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

commutative up to homotopy. We remark that the minimality of the finite injective hull $0 \leftarrow X \xleftarrow{f} Y \leftarrow M \leftarrow 0$ implies that $\phi_d \otimes k = 0$. Taking mapping cone $Mc(-)$, we have a quism

$$Mc(\phi_\bullet) \longrightarrow Mc(D(f)) \longrightarrow D(M)$$

and find that $Mc(\phi_\bullet)$ is the minimal free resolution of $D(M)$. Let $F'_\bullet$ and $G'_\bullet$ be the minimal free resolution of $D(X')$ and $D(Y')$, respectively, and $\phi'_\bullet \colon F'_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$ the induced chain homomorphism by $D(f')$. Then $Mc(\phi'_\bullet)$ is also the minimal free resolution of $D(M)$. The uniqueness of the minimal free resolution gives a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} G_\bullet & F_\bullet \arrow[l, "\phi_\bullet"'] \\ G'_\bullet \arrow[u, "\wr"] & F'_\bullet . \arrow[l, "\phi'_\bullet"'] \arrow[u, "\wr"] \end{tikzcd}$$

By taking $D(-)$ and homology, we obtain a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} 0 & X \arrow[l] \arrow[d, "\wr"'] & Y \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\wr"'] & M \arrow[l] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[l] \\ 0 & X' \arrow[l] & Y' \arrow[l, "f'"'] & M \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

which is required diagram. The proof is completed. $\square$

From now on, we assume that A is a Gorenstein local ring, that is, A is Cohen-Macaulay and $K_A \cong A$. We will observe a relation between a finitely generated A-module and its minimal finite injective hull. For the purpose, we define the stable category.

Definition 2.8. Let A be a Noetherian ring. The *stable category* $\underline{\mathcal{M}}_A$ is defined as following:

- the objects of $\underline{\mathcal{M}}_A$ are the A-modules;
- let M and N be two objects of $\underline{\mathcal{M}}_A$. A morphism from M to N is an element of A-module:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N) \Big/ \begin{pmatrix}\text{the homomorphism from } M \text{ to } N \\ \text{passing through a free module}\end{pmatrix}.$$

In $\underline{\mathcal{M}}_A$, A is a zero object and $\underline{\mathcal{M}}_A$ has the universal property with respect to this condition.

Let X be a maximal Cohen-Macaulay module and Y a finitely generated A-module of finite injective dimension. We assume that both have no free summand. For any homomorphism $f \in \mathrm{Hom}_A(Y,X)$, there exists a free module F and g a homomorphism from F to X such that $f \oplus g$ is surjective. Then the following exact sequence

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{f\oplus g} Y \oplus F \longleftarrow \mathrm{Ker}\, f \oplus g \longleftarrow 0 \tag{2.9}$$

is a finite injective hull of $\mathrm{Ker}\, f \oplus g$ and it is minimal because X has no K_A-summand.

Lemma 2.10. *In* (2.9), $\mathrm{Ker}\, f \oplus g$ *is uniquely determined by* f *up to isomorphism in* $\underline{\mathcal{M}}_A$.

Proof. Let F' be another free module and g' a homomorphism from F' to X such that $f \oplus g'$ is surjective. We put $M = \mathrm{Ker}\, f \oplus g$ and $M' = \mathrm{Ker}\, f \oplus g'$. Since F and F' are free, we obtain the following two commutative diagrams:

$$\begin{tikzcd}
0 & X \arrow[l] \arrow[d, equal] & Y \oplus F \arrow[l, "f\oplus g"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathrm{id}_Y & a \\ 0 & b\end{pmatrix}"] & M \arrow[l] \arrow[d, "\phi"] & 0 \arrow[l] \\
0 & X \arrow[l] & Y \oplus F' \arrow[l, "f\oplus g'"'] & M' \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

and

$$\begin{tikzcd}
0 & X \arrow[l] \arrow[d, equal] & Y \oplus F' \arrow[l, "f\oplus g'"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathrm{id}_Y & a' \\ 0 & b'\end{pmatrix}"] & M' \arrow[l] \arrow[d, "\phi'"] & 0 \arrow[l] \\
0 & X \arrow[l] & Y \oplus F \arrow[l, "f\oplus g"'] & M \arrow[l] & 0. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Composing them, we find that $\phi'\phi - \mathrm{id}_M$ factors as

$$M \xleftarrow{\begin{pmatrix} a+a'b \\ b'b-\mathrm{id}_F\end{pmatrix}} F \longleftarrow M,$$

which means that $\phi'\phi = \mathrm{id}_M$ in $\underline{\mathcal{M}}_A$. Similarly, we have $\phi\phi' = \mathrm{id}_{M'}$ in $\underline{\mathcal{M}}_A$, and so, M is isomorphic to M' in $\underline{\mathcal{M}}_A$. $\square$

Lemma 2.11. *There is a univalent correspondence*

$$\underline{\mathrm{Aut}}\,X\backslash\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(Y,X)/\,\underline{\mathrm{Aut}}\,Y \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} \textit{isomorphism class} \\ \textit{of } M \textit{ in } \underline{\mathcal{M}}_A \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \textit{there exists an exact sequence} \\ 0 \leftarrow X \leftarrow Y \oplus F \leftarrow M \leftarrow 0 \\ \textit{with free module } F \end{matrix} \right\}.$$

Here the left hand side denotes the orbit space of $\underline{\mathrm{Hom}}_A(Y,X)$ *as an* $(\underline{\mathrm{Aut}}\,X) \times (\underline{\mathrm{Aut}}\,Y)^{op}$*-group.*

Proof. By (2.9), we obtain a map from $\mathrm{Hom}_A(Y,X)$ to the right hand side of above. We consider fibre of it. Let f and f' be two homomorphisms from Y to X. Then there exist two exact sequences:

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{f\oplus g} Y \oplus F \longleftarrow M \longleftarrow 0$$

and

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{f\oplus g'} Y \oplus F' \longleftarrow M' \longleftarrow 0,$$

where F and F' are free. Assume that M is isomorphic to M' in $\underline{\mathcal{M}}_A$. We will prove that there exists a diagram

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\wr"] \\ X \arrow[from=u, "\wr"'] & Y \arrow[l, "f'"] \end{tikzcd}$$

which is commutative in $\underline{\mathcal{M}}_A$.

Firstly, we will show that M and M' is isomorphic up to free summands. By the definition of the stable category, there are a free module G and a finitely generated module G' such that $M \oplus G \cong M' \oplus G'$. Then G' is a maximal Cohen-Macaulay module. In fact, by the isomorphism $M \oplus G \cong M' \oplus G'$, we have

$$\ell(\mathrm{Soc}\, H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \geq \ell(\mathrm{Soc}\, H^i_{\mathfrak{m}}(M')) \quad \text{for all } i < d.$$

In the same way, we have the converse inequality. Thus $\ell(\mathrm{Soc}\, H^i_{\mathfrak{m}}(G')) = 0$ for all $i < d$. It implies that $H^i_{\mathfrak{m}}(G') = 0$ for all $i < d$ because the local cohomology modules are Artinian. Furthermore, G' is free. In fact, let

$$0 \longleftarrow X' \longleftarrow Y' \longleftarrow G' \longleftarrow 0$$

be the minimal finite injective hull of G'. By the uniqueness of the minimal finite injective hull, the following diagram

$$\begin{tikzcd} 0 & X \arrow[l] \arrow[d, "\wr"', "\psi"] & Y \oplus F \oplus G \arrow[l] \arrow[d, "\wr"', "\phi"] & M \oplus G \arrow[l] \arrow[d, "\wr"'] & 0 \arrow[l] \\ 0 & X \oplus X' \arrow[l] & Y \oplus F' \oplus Y' \arrow[l] & M' \oplus G' \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

is commutative. Hence $X' = 0$, that is, $G' = Y'$ is of finite injective dimension. Therefor G' is a maximal Cohen-Macaulay module of finite injective dimension, that is, free.

Hence we get a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f\oplus g\oplus 0} & Y\oplus F\oplus G \\ \wr\big\downarrow\psi & & \wr\big\downarrow\phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{pmatrix} \\ X & \xleftarrow[f'\oplus g'\oplus 0]{} & Y\oplus F'\oplus G', \end{array}$$

which implies that

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f} & Y \\ \big\downarrow\psi & & \big\downarrow\phi_{11} \\ X & \xleftarrow[f']{} & Y \end{array}$$

is commutative in $\underline{\mathcal{M}}_A$. Since ϕ and ψ are automorphisms, ϕ_{11} and ψ are automorphisms in $\underline{\mathcal{M}}_A$. The proof is completed. $\square$

Lemma 2.12. *In* (2.9), $\operatorname{Ker} f\oplus g$ *is indecomposable in* $\underline{\mathcal{M}}_A$ *if and only if* f *is not decomposable in* $\underline{\mathcal{M}}_A$. *Here* f *is said to be decomposable if there are non-trivial direct sum decompositions*: $X = X_1\oplus X_2$ *and* $Y = Y_1\oplus Y_2$ *such that* f *is a direct sum of* $f_1 \in \underline{\mathrm{Hom}}_A(Y_1, X_1)$ *and* $f_2 \in \underline{\mathrm{Hom}}_A(Y_2, X_2)$.

Proof. Let $M = M_1\oplus M_2$ be a direct sum decomposition where M_i is not free (for $i = 1, 2$) and

$$0 \longleftarrow X_i \xleftarrow{f_i\oplus g_i} Y_i\oplus F_i \longleftarrow M_i \longleftarrow 0$$

the minimal finite injective hull of M_i (for $i = 1, 2$). Then, by the uniqueness of minimal finite injective hull, we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f\oplus g} & Y\oplus F \\ \wr\big\downarrow & & \wr\big\downarrow \\ X_1\oplus X_2 & \xleftarrow[\begin{pmatrix} f_1 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & g_2 \end{pmatrix}]{} & Y_1\oplus Y_2\oplus F_1\oplus F_2 \end{array}$$

Thus f is decomposable in $\underline{\mathcal{M}}_A$.

Conversely, we assume that there exist non-trivial direct sum decompositions $X = X_1\oplus X_2$ and $Y = Y_1\oplus Y_2$ and that f is a direct sum of $f_1 \in \underline{\mathrm{Hom}}_A(Y_1, X_1)$ and $f_2 \in \underline{\mathrm{Hom}}_A(Y_2, X_2)$. Let $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}_A(Y_1\oplus Y_2, X_1\oplus X_2)$ be a representative element of $f_1\oplus f_2$ in $\underline{\mathrm{Hom}}_A(Y_1\oplus Y_2, X_1\oplus X_2)$. By the definition of stable category, there are two free modules F_1 and F_2 such that f_{21} factors as $Y_1 \xrightarrow{b_1} F_1 \xrightarrow{a_1} X_2$ and f_{21} factors as $Y_2 \xrightarrow{b_2} F_2 \xrightarrow{a_2} X_1$. Take an exact sequence with free modules G_1 and G_2:

$$0 \longleftarrow X_1 \oplus X_2 \xleftarrow{\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & g_1 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 & g_2 \end{pmatrix}} Y_1 \oplus Y_2 \oplus G_1 \oplus G_2 \longleftarrow M \longleftarrow 0.$$

Then by considering a morphism from $Y_1 \oplus Y_2 \oplus G_1 \oplus G_2 \oplus F_1 \oplus F_2$ to $X_1 \oplus X_2$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & 0 & g_1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & f_{22} & 0 & g_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & g_1 & 0 & 0 & a_2 \\ f_{21} & f_{22} & 0 & g_2 & a_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

we have two exact sequences:

$$0 \longleftarrow X_1 \xleftarrow{f_{11} \oplus g_1 \oplus a_2} Y_1 \oplus G_1 \oplus F_2 \longleftarrow M_1 \longleftarrow 0$$

and

$$0 \longleftarrow X_2 \xleftarrow{f_{22} \oplus g_2 \oplus a_1} Y_2 \oplus G_2 \oplus F_1 \longleftarrow M_2 \longleftarrow 0.$$

Therefore $M_1 \oplus M_2$ is a non-trivial direct sum decomposition of $M \oplus F_1 \oplus F_2$, which is required. □

3. Surjective-Buchsbaum modules

In this section, we will observe surjective-Buchsbaum modules.

Let $F_\bullet$ be a minimal free resolution of k and

$$Y_t = \mathrm{Coker}(d^F_{d-t})^* \quad \text{for all } 0 \leq t \leq d.$$

Then Y_t is of finite injective dimension, because $F^*_\bullet$ is exact up to $-d$-th term. That is, there exists an exact sequence

$$0 \longleftarrow Y_t \longleftarrow F^*_{d-t} \longleftarrow \cdots \longleftarrow F^*_0 \longleftarrow 0$$

By the local duality theorem, we obtain that

$$H^i_\mathfrak{m}(Y_t) = \begin{cases} k, & i = t; \\ 0, & i \neq t, d. \end{cases}$$

The author had proved the following theorem.

Theorem 3.1 ([11, Theorem 3.1]). *Assume that A is not regular. Then Y_t is an indecomposable maximal surjective-Buchsbaum module of finite injective dimension for all $0 \leq t \leq d$. Moreover, any maximal surjective-Buchsbaum module of finite injective dimension is isomorphic to a unique direct sum of finite copies of them.*

Let M be arbitrary finitely generated module and

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow Y \longleftarrow X \longleftarrow 0$$

its minimal finite injective hull. Then the diagram

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Ext}^i_A(k,Y) & \xleftarrow{\sim} & \operatorname{Ext}^i_A(k,M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i_{\mathfrak{m}}(Y) & \xleftarrow{\sim} & H^i_{\mathfrak{m}}(M) \end{array}$$

is commutative for all $i < d$. Hence when $\dim M = d$, M is maximal surjective-Buchsbaum if and only if Y is also.

We want to use Lemma 2.11 for maximal surjective-Buchsbaum modules. Let X be a maximal Cohen-Macaulay module. We compute $\underline{\operatorname{Hom}}_A(Y_t, X)$.

Lemma 3.2. $\underline{\operatorname{Hom}}_A(Y_t, X) \cong \operatorname{Tor}^A_{d-t}(k, X)$.

Proof. Let $G_\bullet$ be the minimal free resolution of X and f a homomorphism from Y_t to X. Then f induces a chain homomorphism from the minimal free resolution of Y_t to $G_\bullet$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \longleftarrow & Y_t & \longleftarrow & F^*_{d-t} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & F^*_1 & \longleftarrow & F^*_0 & \longleftarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle \phi_0}\downarrow & & & & {\scriptstyle \phi_{d-t-1}}\downarrow & & {\scriptstyle \phi_{d-t}}\downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & X & \longleftarrow & G_0 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & G_{d-t-1} & \longleftarrow & G_{d-t} & \longleftarrow & \cdots, \end{array} \tag{3.3}$$

where $\phi_\bullet$ is uniquely determined by f up to homotopy. Hence we obtain a homomorphism

$$\operatorname{Hom}_A(Y_t, X) \longrightarrow \operatorname{Tor}^A_{d-t}(k, X)$$

by $f \mapsto \phi_{d-t}(1) \pmod{\mathfrak{m}}$. If $\phi_{d-t}(1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$, then we may assume that $\phi_i = 0$ for all $i > 0$, by exchanging $\phi_\bullet$ with a homotopy equivalent homomorphism. Hence f passing through G_0 and so we obtained an injective homomorphism

$$\underline{\operatorname{Hom}}_A(Y_t, X) \longrightarrow \operatorname{Tor}^A_{d-t}(k, X).$$

Conversely any homomorphism $\phi_{d-t}\colon F^*_0 \longrightarrow G_{d-t}$ induces the commutative diagram (3.3), by considering the $(-)^*$. Thus we obtain required isomorphism. □

In this lemma, X is not necessarily Cohen-Macaulay. Therefore we also obtain $\underline{\operatorname{Hom}}_A(Y_t, Y_t) = k$.

Proof of Corollary 1.2. Assume that A is a Gorenstein local ring whose multiplicity is greater than 2. Of course, A is not regular.

Firstly we prove the corollary when A is not hypersurface or $d > 1$. Let n be a positive integer and $0 \leq t < d$. Then there exists an indecomposable maximal Cohen-Macaulay module X such that

$$\ell(\mathrm{Tor}_{d-t}^A(k, X)) \geq n.$$

In fact, if A is not hypersurface, then it is known that $\lim_{i \to \infty} \ell(\mathrm{Tor}_i^A(k, X)) = \infty$ and that the syzygy of an indecomposable maximal Cohen-Macaulay module is also indecomposable [7, Lemma 1.3]. If the d-th syzygy of the residue class field, which is a maximal Cohen-Macaulay module, has m indecomposable components, then the i-th syzygy of the residue class field has only m indecomposable components for all $i > d$. And so we can find the required module among the direct summands of syzygies of the residue class field. On the other hand, if A is hypersurface, but $d > 1$, then d-th syzygy of $A/\mathfrak{m}^n$ has the required property for sufficiently large m, see [9] and [11, Theorem 4.1].

Let $e_1, e_2, \dots, e_m$ be a basis of $\mathrm{Tor}_{d-t}^A(k, X)$ as a k-vector space, where $m \geq n$. We regard them as elements of $\underline{\mathrm{Hom}}_A(Y_t, X)$. Then $(e_1, \dots, e_n) \in \underline{\mathrm{Hom}}_A(Y^n, X)$ is indecomposable, that is, we obtain an indecomposable maximal surjective-Buchsbaum module which has required local cohomology module by Lemma 2.11.

Next we prove Corollary 1.2 when A is hypersurface of dimension 1. We will use the following lemma, which is a refinement of [12, Theorem 2.1].

Lemma 3.4. *Let A be a Noetherian local ring (not necessarily Gorenstein) and X an indecomposable maximal Cohen-Macaulay module such that there are two elements e_1 and e_2 of $\mathrm{Ext}_A^1(X, k)$ which satisfy the following condition:*

- *Let A' be the endomorphisms of $\mathrm{Ext}_A^1(X, k)$ which induced by an endomorphisms of X. Then e_1 and e_2 are linearly independent over A'.*

Then there is, for any $n > 0$, an indecomposable maximal surjective-Buchsbaum module M such that

$$\ell(H_{\mathfrak{m}}^i(M)) = \begin{cases} n, & i = 0; \\ 0, & i \neq 0, d. \end{cases}$$

Proof. Take an extension of k^n by X:

$$0 \longleftarrow X^n \longleftarrow M \longleftarrow k^n \longleftarrow 0 \tag{3.5}$$

with associated to

$$\Pi = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & & & \\ & e_1 & e_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & e_2 \\ & & & & e_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ext}_A^1(X^n, k^n). \tag{3.6}$$

Then M has the required local cohomology. We will show that M is indecomposable. If M has a non-trivial direct sum decomposition $M = M_1 \oplus M_2$. Then the exact sequence (3.5) is a direct sum of

$$0 \longleftarrow M_i/H^0_{\mathfrak{m}}(M_i) \longleftarrow M_i \longleftarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M_i) \longleftarrow 0. \quad (i = 1, 2)$$

This means that matrix (3.6) is decomposable, that is, there are invertible matrices P with entries in k and Q with entries in A' such that

$$P\Pi Q = \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix}.$$

But it is impossible by [12, Lemma 2.2]. □

Proof of Corollary 1.2: *continuation.* Let A is a hypersurface of dimension 1. Then the second syzygy of the residue class field satisfies the hypothesis of Lemma 3.4, in fact, $A' = k$. Hence we have finished the proof of Corollary 1.2. □

After the symposium, Goto posed the following question:

Question. Let n, $m > 0$ be integers and $0 \leq t < d$. Then is there an indecomposable maximal surjective-Buchsbaum module M such that

$$\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \begin{cases} n, & i = t; \\ 0, & i \neq t, d \end{cases}$$

and $\operatorname{rank} M \geq m$?

The author has no answer. In the exact sequence (2.9), if $\operatorname{Ker} f \oplus g$ has no free summand, then we have an inequality:

$$\mu(X) \geq \operatorname{rank} F \geq \mu(X) - \mu(Y),$$

where $\mu(-)$ denotes the minimal number of generators. Is there, for any m, n, t, an indecomposable maximal Cohen-Macaulay module X which satisfies the following two inequalities:

$$\ell(\operatorname{Tor}^A_{d-t}(k, X)) \geq n;$$
$$\mu(X) \geq \operatorname{rank} X + n(\mu(Y_t) - \operatorname{rank} Y_t) + m.$$

If there is such a module, then we can answer Goto's question in affirmative.

4. Example

In this section, we will prove the following proposition.

Proposition 4.1. *Let A be a Gorenstein local ring of dimension $d \geq 3$. Assume that A is not regular. Then there exists, for arbitrary integer $n > 0$, an indecomposable maximal surjective module M such that*

$$\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \begin{cases} n, & i = 0, 1; \\ 0, & i \neq 0, 1, d. \end{cases}$$

This proposition is true even if the multiplicity of A is two. So Theorem 1.1 and Corollary 1.2 may be true when the multiplicity is two.

Proof. Let $0 \leftarrow Y_1^n \leftarrow M \leftarrow k^n \leftarrow 0$ be an extension of k^n by Y_1^n such that M is indecomposable. Since $\underline{\mathrm{Hom}}_A(Y_1, Y_1) = k$ and $\ell(\mathrm{Ext}^1_A(Y_1, k)) = \mathrm{rank}\, F_{d-1} \geq \binom{d}{2}$, it is possible to take such an extension in the same way as Lemma 3.4. We will show that M is surjective-Buchsbaum.

Take the minimal injective resolution of $D(Y_1)$:

$$G_\bullet \colon 0 \longrightarrow \overset{\overset{d}{\vee}}{F_{d-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \overset{\overset{2}{\vee}}{F_1} \longrightarrow \overset{\overset{1}{\vee}}{F_0} \longrightarrow 0,$$

where $F_\bullet$ is the minimal injective resolution of k, see [10, Theorem 3.1]. Then a free resolution of $D(M)$ is given by the mapping cone of $\alpha_\bullet \colon F_\bullet^n(-1) \longrightarrow G_\bullet^n$, that is, the extension of k^n by Y_1^n corresponds to an element of the first homology of the double complex $C^{\bullet\bullet} = \mathrm{Hom}_A(F_\bullet^n, G_\bullet^n)$. The double complex $C^{\bullet\bullet}$ gives two spectral sequences and they give

$$H^i(C^{\bullet\bullet}) = \begin{cases} \mathrm{Ext}^d_A(k^n, G^n_{d-i}), & 0 \leq i \leq d; \\ 0, & \text{otherwise}; \end{cases}$$

and an exact sequence:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_A(k^n, k^n) \longrightarrow \mathrm{Ext}^d_A(k^n, X^n) \longrightarrow H^0(C^{\bullet\bullet}) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(k^n, k^n) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d+1}_A(k^n, X^n) \longrightarrow H^1(C^{\bullet\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(k^n, k^n) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

where X is the d-th syzygy of k. Comparing length of the terms of this exact sequence, we find that the homomorphism $\mathrm{Ext}^{d+1}_A(k^n, X^n) \longrightarrow H^1(C^{\bullet\bullet})$ is surjective—we compute the length of $\mathrm{Ext}^{d+i}_A(k, X)$ later on. It means that an element of $H^1(C^{\bullet\bullet})$ is represented by $\alpha_\bullet \colon F_\bullet^n(-1) \longrightarrow G_\bullet$ such that $\alpha_i = 0$ for all $i < d$. By [10, Proposition 2.6], M is surjective-Buchsbaum. □

We denote the i-th syzygy of M by $\mathrm{Syz}_i^A M$.

Lemma 4.2. *For arbitrary Gorenstein ring A of dimension d,*

$$\mu_A^{d+i}(\mathrm{Syz}_{d+j}^A\, k) = \beta_{i-j}^A(k) + \beta_{d-i+j-1}^A(k), \quad \textit{for all } i,\ j \geq 0,$$

where $\beta_i^A(-)$ denotes the i-th Betti number.

Proof. We work by induction on d. If $d = 0$, then $A \cong E_A(k)$ because A is Gorenstein. Therefore $\mu_A^i(\mathrm{Syz}_j^A\, k) = \beta_i^A((\mathrm{Syz}_j^A)^*)$. If $F_\bullet$ is the minimal free resolution of k, then there is an exact sequence

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F_0^* \longrightarrow F_1^* \longrightarrow F_2^* \longrightarrow \cdots .$$

Thus we have the assertion.

If $d > 0$, then there is an A-non zero divisor $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. It is well known that

$$(\mathrm{Syz}_i^A\, k) \otimes_A A/xA \cong (\mathrm{Syz}_i^{A/xA}\, k) \oplus (\mathrm{Syz}_{i-1}^{A/xA}\, k) \quad \text{for all } i \geq 0,$$

for example [16]. Therefore

$$\begin{aligned}
\mu_A^{d+i}(\mathrm{Syz}_{d+j}^A\, k) =& \mu_{A/xA}^{d+i-1}((\mathrm{Syz}_{d+j}^A\, k) \otimes_A A/xA) \\
=& \mu_{A/xA}^{d-1+i}(\mathrm{Syz}_{d+j}^{A/xA}\, k) + \mu_{A/xA}^{d-1+i}(\mathrm{Syz}_{d+j-1}^{A/xA}\, k) \\
=& \beta_{i-j-1}^{A/xA}(k) + \beta_{d-i+j-1}^{A/xA}(k) + \beta_{i-j}^{A/xA}(k) + \beta_{d-i+j-2}^{A/xA}(k) \\
=& \beta_{i-j}^A(k) + \beta_{d-i+j-1}^A(k).
\end{aligned}$$

This is the required equality. □

References

1. Mutsumi Amasaki, *Free complexes defining maximal quasi-Buchsbaum, graded modules over polynomial rings*, J. Math. Kyoto Univ. **33** (1993), 143–170.
2. Maurice Auslander and Ragnar-Olaf Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) **38** (1989), 5–37.
3. Mihai Cipu, Jürgen Herzog, and Dorin Popescu, *Indecomposable generalized Cohen-Macaulay modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **342** (1994), 107–136.
4. David Eisenbud and Shiro Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicity*, J. Algebra **88** (1984), 89–133.
5. Shiro Goto, *Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules*, Advanced Studies in Pure Math. vol. 11, Kinokuniya, 1987, pp. 39–64.
6. Shiro Goto and Kei-ichi Watanabe, *On graded rings, I*, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 179–213.
7. Jürgen Herzog, *Ringe mit nur endlich vielen Isomorphielassen von maximalen, unzerlegbaren Cohen-Macaulay-Moduln*, Math. Ann. **233** (1978), 21–34.
8. Jürgen Herzog, Ernst Kunz, et al., *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings*, Lecture Notes in Math. vol. 238, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, New-York, 1971.
9. Jürgen Herzog and Herbert Sanders, *Indecomposable syzygy-modules of high rank over hypersurface rings*, J. Pure Appl. Algebra **51** (1988), 161–168.
10. Takesi Kawasaki, *Surjective-Buchsbaum modules over Cohen-Macaulay local rings*, to appear in Math. Z., 1993.

11. ———, *Local cohomology modules of indecomposable surjective-Buchsbaum modules over Gorenstein local rings*, submitting to J. Math. Soc. Japan, 1994.
12. Kohji Nishida, *On a construction of indecomposable modules and applications*, Tsukuba J. Math. **13** (1989), 147–155.
13. Paul Roberts, *Homological invariants of modules over commutative rings*, Séminaire de Math., vol. 72, Les Press de l'Université de Montréal, 1980.
14. Rodney Y. Sharp, *On Gorenstein modules over a complete cohen-macaulay local rings*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **22** (1971), 386–425.
15. Jürgen Stückrad and Wolfgang Vogel, *Toward a theory of Buchsbaum singularities*, Amer. J. Math. **100** (1978), 728–746.
16. Kikumichi Yamagishi, *Bass number characterization of surjective-Buchsbaum modules*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **110** (1991), 261–279.
17. Yuji Yoshino, *Maximal Buchsbaum modules of finite projective dimension*, J. Algebra **159** (1993), 240–264.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY, HACHIOJI MINAMI-OHSAWA 1–1, TOKYO 192–03, JAPAN
E-mail address: kawasaki@math.metro-u.ac.jp

Almost complete intersection monomial curve について

衛藤　和文

早稲田大学　教育学部

kを体とする。最大公約数が 1 の自然数 $n_1,\cdots,n_r$に対し、環準同型写像 ϕ: $k[X_1,\cdots,X_r]\to k[t]$, $\phi(x_i)=t^{n_i}$に対し、$I=\mathrm{Ker}\ \phi$は $n_1,\cdots,n_r$で定義される monomial curve の定義イデアルである。Iが almost complete intersection すなわち $\mu(I)=\mathrm{ht}\ I+1=r$、(但し$\mu$は最小生成元の個数) のときにその minimal generating system を求め、その性質について述べる。さらに、set-theoretic complete intersection (以後、STCI と略す)、すなわちある complete intersection ideal Jが存在して、$\sqrt{I}=\sqrt{J}$となるかについて調べる。もちろん、Cowsik-Nori の定理 ([1]) によって、標数 0 のときが問題である。

次の notation を使う。

$n_1,\cdots,n_r$	最大公約数が 1 の自然数
$V\subset \mathrm{Ker}\ (n_1,\cdots,n_r)$	$(n_1,\cdots,n_r)\in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^r,\mathbf{Z})$ とみたときの rank $r-1$ の $\mathbf{Z}^r$の submodule
$v\in V$に対し、	$F(v)=\prod_{\sigma_i(v)<0} X_i^{-\sigma_i(v)}-\prod_{\sigma_i(v)>0} X_i^{\sigma_i(v)}$ 但し、$\sigma_i(v)$ は vの i 番目の成分

$I(V)$ をすべての $F(v)(v\in V)$ で生成される $k[X_1,\cdots,X_r]$ のイデアルとする。

例 $V = \mathrm{Ker}\ (3,4,5)$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき、$F(v) = X_1X_3 - X_2^2$となる。

このとき、一般に、

(1) $\mathrm{ht}\ I(V) = r-1$

(2) $I(V)$ が prime $\Longleftrightarrow V = \mathrm{Ker}\ (n_1, \cdots, n_r)$
このとき、$I(V)$ は monomial curve の定義イデアルになる。

(3) $I(V)$ は $F(v_1), \cdots, F(v_s)$ からなる minimal generating system をもつ。但し、$s = \mu(I(V))$。

以後、$I(V)$ が almost complete intersection のとき、(3) より $F(v_1), \cdots, F(v_r)$ $(r \geq 3)$ からなる minimal generating system のみを考える。

このとき、必要ならばv_jを$-v_j$に置き換えて、unique な relation $\sum \delta_j v_j = 0$ $(\delta_j \geq 0)$ が存在する。

$$\alpha_i = \min\{\sigma_i(v) | v \in V, \sigma_i(v) > 0, \sigma_{i'}(v) \leq 0, \text{for any } i' \neq i\}$$

とおく。$V = \mathrm{Ker}\ (n_1, \cdots, n_r)$ のとき、

$$\alpha_i = \min\{\mu \neq 0 | \mu n_i \in \langle n_1, \cdots, \widehat{n_i}, \cdots, n_r \rangle\}$$

となる。但し、$\langle n_1, \cdots, \widehat{n_i}, \cdots, n_r \rangle$ はその成分によって生成される $\mathbf{Z}$ の中の additive sub-semigroup。

$v_1 = \alpha_{r-1}e_{r-1} - \alpha_r e_r \in V$とする。$\rho\colon \mathbf{Z}^r \to \mathbf{Z}^{r-1}$を次のように定義する。

$$\rho(e_i) = \begin{cases} e_i & i < r-1 \\ \dfrac{n_{r-1}}{\text{g.c.d.}(n_{r-1}, n_r)} e_{r-1} & i = r-1 \\ \dfrac{n_r}{\text{g.c.d.}(n_{r-1}, n_r)} e_{r-1} & i = r \end{cases}$$

$\tilde{V} = \rho(V)$ とおく。このとき、

$$\tilde{V} \subset \mathrm{Ker}\ (n_1, \cdots, n_{r-2}, \mathrm{g.c.d.}(n_{r-1}, n_r)),$$
$$\mathrm{rank}\ \tilde{V} = r - 2$$

$V = \mathrm{Ker}\ (n_1, \cdots, n_r)$ のとき、$\tilde{V} = \mathrm{Ker}\ (n_1, \cdots, n_{r-2}, \mathrm{g.c.d.}(n_{r-1}, n_r))$ となる。また、$F(v_1)$ を含む minimal generating system を $F(v_1), F(v_2), \cdots, F(v_r)$ とすると、

Theorem 1 次の (1) または (2) が成り立つとき、$I(\tilde{V})$ も *almost complete intersection* で、$F(\widetilde{v_2}), \cdots, F(\widetilde{v_r})$ で生成される。但し、$\widetilde{v_j} = \rho(v_j)$。

(1) $\delta_1 = 0$

(2) $\delta_j > 0$ *for any* j

$\square$

注意 1 (1) の場合の証明は、α_{r-1}, α_rの minimality は必要ない。

注意 2 (1), (2) 以外の場合も、次の形で (1) の場合に帰着できる。

Lemma 2 $\rho' : \mathbf{Z}^r \to \mathbf{Z}^r$, $\rho'(e_i) = n_i e_i$とすると、

$$I(V) = (F(v_1), \cdots, F(v_s)) \Leftrightarrow I(\rho'(V)) = (F(\rho'(v_1)), \cdots, F(\rho'(v_s))) \qquad \square$$

上の Lemma により、$V \subset \mathrm{Ker}\ (1, 1, \cdots, 1)$ としてよい。このとき、

Proposition 3 もし、ある $j \neq 1$ が存在して$\delta_j = 0$, かつ v_jは$\alpha_i e_i - \alpha_{i'} e_{i'}$という形をしていないとき、$\sigma_{i_1}(v_j) > 0$, $\sigma_{i_2}(v_j) < 0$ となるような i_1, i_2を選び、

$$v_j' = \deg F(v_j) e_{i_1} - \deg F(v_j) e_{i_2}$$

とおくと、v_jを v_j'でおきかえた *module* $\langle v_1, \cdots, v_j', \cdots, v_r \rangle$ に関して、

$$I(\langle v_1, \cdots, v_j', \cdots, v_r \rangle) = (F(v_1), \cdots, F(v_j'), \cdots, F(v_r))$$

となる。 $\square$

ゆえに、$\delta_j = 0$ なる jが存在するときは、必ず v_jを $d_i e_i - d_{i'} e_{i'}$ という形に変形でき、注意1 より、Theorem 1 を apply できる。

(証明の概略) 次の Proposition を使って証明する。

Proposition 4 (Gastinger[6]) $I(V)$ が $F(v_1), \cdots, F(v_s)$ で生成される必要十分条件は、

(1) $V = \langle v_1, \cdots, v_s \rangle$

(2) $\dim_k A/(F(v_1), \cdots, F(v_s), X_1) = I_{r-1}(M_1)$
但し、M_1は $r \times s$-*matrix* $(\sigma_i(v_j))$ から第1行を取り除いてえられる $(r-1) \times s$-*matrix*、$I_{r-1}(M_1)$ は M_1の $(r-1)$-*minors* で生成されるイデアルの正の生成元。

□

$V \in \mathrm{Ker}\,(1, 1, \cdots, 1)$ としてよい。このとき Proposition 4 により、monomial Mが $A/(F(\widetilde{v_2}), \cdots, F(\widetilde{v_r}), X_{r-1})$ の基底になるとき、$X_{r-1}^{\alpha_{r-1}-1}M$が $A/(F(v_1), \cdots, F(v_s), X_r)$ の基底になることを示せばよい。これは、Theorem 1 の (1), (2) の条件よりえられる。 Q.E.D.

次に、$\alpha_i e_i - \alpha_{i'} e_{i'}$ という形の元が V に含まれていないとき、

Lemma 5 $\alpha_i e_i - \alpha_{i'} e_{i'}$ という形の元が Vに含まれていないとき、(もちろん、$I(V)$ が *almost complete intersection* のときに) 次の $(*)$ を満たす $v_1, \cdots, v_r$が

存在する。

$$(*)\qquad \begin{array}{l} I(V) = (F(v_1), \cdots, F(v_r)) \\ \sigma_i(v_i) = \alpha_i \\ \sigma_i(v_j) \leq 0, |\sigma_i(v_j)| < \alpha_i \quad (j \neq i) \\ \text{各 } j \text{ に対し、} \sigma_i(v_j) < 0 \text{ なる } i \text{ が、少なくとも 2 つ存在} \end{array}$$

$\square$

このLemmaにより、$(*)$ をみたす $v_1, \cdots, v_r$のみを考えればよい。さらに、

Lemma 6 $v_1, \cdots, v_r$が $(*)$ をみたし、$\sigma_r(i) = 0$ *for* $i < r$のとき、$V' = \langle v_1, \cdots, v_{r-1}\rangle \subset \mathbf{Z}^{r-1}$とおけば、$I(V') = (F(v_1), \cdots, F(v_{r-1}))$ となる。

特に、$V = \mathrm{Ker}\ (n_1, \cdots, n_r)$ のとき、

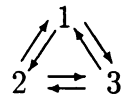
$$V' = \mathrm{Ker}\ (g^{-1}n_1, \cdots, g^{-1}n_{r-1}), \quad g = g.c.d.(n_1, \cdots, n_{r-1})$$

となる。 $\square$

そこで、各 i に対し、$\sigma_i(v_j) < 0$ なる jが存在する場合が残る。ここで、$(*)$ をみたす $v_1, \cdots, v_r$について、次のような有向グラフを考える。

- 各頂点は、$1, \cdots, r$ に対応している。
- $i \longrightarrow j \Longleftrightarrow \sigma_i(v_j) < 0$

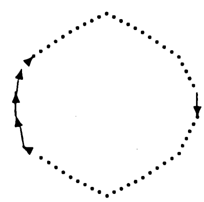
例 $V = \mathrm{Ker}\ (3,4,5)$ で $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき、$I(V)$ は $F(v_1), F(v_2), F(v_3)$ で生成され、その有向グラフは次のようになる。



次の Theorem が、最後に残った $v_1, \cdots, v_r$ を特徴づける。

Theorem 7 $v_1, \cdots, v_r$ が $(*)$ をみたし、さらに各 i に対し $\sigma_i(v_j) < 0$ なる j が存在するとき、これらのベクトルは次の条件をみたす。

(0) $V = \langle v_1, \cdots, v_r \rangle$

(1) それらに対応する有向グラフについて、どの 2 つの *circuit* 

も、必ずある頂点を共有する。

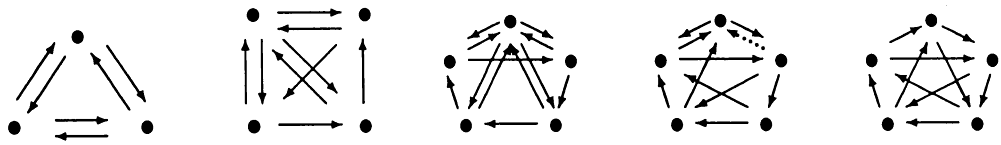
(2) $\sum v_j = 0$

□

注意 逆に、$\sigma_i(v_i) > 0$, $\sigma_i(v_j) \leq 0$ $(j \neq i)$、かつ (0), (1), (2) をみたす $v_1, \cdots, v_r$ が存在すれば、$I(V)$ は $F(v_1), \cdots, F(v_r)$ で生成される。

(0) は明らかで、(1) の証明も難しくない。(2) に関しては、特別な model を考えて証明する。逆の証明は難しくない。

例 $r \leq 5$ のときの有向グラフは次のものしかない。



$r=3$ $r=4$ $r=5$

• STCI に関して

まず、次の定理が成立する (cf. [2])。

Theorem 8 次の条件が成り立つとき、$I(V)$ は *STCI*。

(0) $v_j = \alpha_j e_j - \sum_{k\neq j} d_{jk}e_k, \quad d_{jk}\geq 0$

$\sqrt{I(V)} = \sqrt{(F(v_1),\cdots,F(v_r))}$

(1) 適当に変数を入れかえて $F(v_j)\in k[X_1,\cdots,X_j]$ $(j\geq 3)$ とできる

(2) $v_1+\cdots+v_r=0$

□

ここで、条件の (1) は有向グラフの条件である。この定理により、

Corollary 9 $v_1,\cdots,v_r$が *Theorem* 7 の仮定をみたし、さらにその有向グラフが$\bullet \rightleftharpoons \bullet$ を含むとき、$I(V)$ は *STCI*。 □

次の例は、Theorem 7 の (1) の条件が、Theorem 8 の (1) の条件を導かない例である。

例 $\langle 328, 207, 219, 213, 210, 269, 238, 224, 231\rangle$ で定義される monomial curve。

$$\begin{array}{llll} v_1 = & 2e_1 - e_3 - e_4 - e_8 & v_6 = & 2e_6 - e_1 - e_5 \\ v_2 = & 4e_2 - e_1 - e_6 - e_9 & v_7 = & 2e_7 - e_2 - e_6 \\ v_3 = & 2e_3 - e_2 - e_9 & v_8 = & 2e_8 - e_5 - e_7 \\ v_4 = & 2e_4 - e_2 - e_3 & v_9 = & 2e_9 - e_7 - e_8 \\ v_5 = & 2e_5 - e_2 - e_4 & & \end{array}$$

とおくと、$v_1, \cdots, v_9$ は Theorem 7 の (1) の条件をみたすが、Theorem 8 の (1) をみたさない。

現在、この講演に関する論文は準備中で、まとまり次第お知らせいたします。

参考文献

[1] R. C. Cowsik and M. V. Nori. Affine curves in characteristic p are set theoretic complete intersections. *Inventiones math.*, **45**:111–114, (1978).

[2] S. Eliahou. Idéaux de définition des courbes monomiales. In *“Complete Intersections”*, pp 229–240. Springer-Verlag, 1984. Lecture Notes in Math. No. **1092**.

[3] K. Eto. Almost complete intersection monomial curves in A^4. *Comm. in algebra*, **22**(13):5325–5342, (1994).

[4] K. Eto. Almost complete intersection monomial curves in A^5. (to appear).

[5] K. Eto. Defining ideals of complete intersection monoid rings. (to appear).

[6] W. Gastinger. *Über die Verschwindungsideale monomialer Kurven.* PhD thesis, Univ. Regensburg, Landshut, 1989.

[7] J. Herzog. Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings. *Manuscripta Math.*, **3**:175–193, (1970).

[8] E. Kunz. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry.* Birkhäuser, 1985.

*

A CHARACTERIZATION OF INTEGRAL CURVES WITH GORENSTEIN HYPERPLANE SECTIONS

KOHJI YANAGAWA

ABSTRACT. We classify reduced, irreducible and non-degenerate curve $C \subset \mathbb{P}^r$ such that its general hyperplane section $C \cap H$ is arithmetically Gorenstein, but C itself is not. These curves are contained in surface scrolls and closely related to Castelnuovo theory on curves in projective space.

INTRODUCTION

Let k be an algebraically closed field of characteristic 0. Recently, Huneke and Ulrich [6] proved the following theorem which generalizes Strano's result ([8]) on curves in $\mathbb{P}^3_k$.

Theorem A. ([6, Theorem 3.20]) *Let $C \subset \mathbb{P}^r_k$, $r \geq 3$ be a reduced, connected and non-degenerate curve which is not contained in a quadric hypersurface. If a general hyperplane section of C is arithmetically Gorenstein, then C itself is arithmetically Gorenstein.*

In this paper, we will refine the result above under the additional assumption that C is irreducible. The main results of this paper are the following.

Theorem 0.1. *Let $C \subset \mathbb{P}^r$ be a reduced, irreducible, non-degenerate curve. Suppose that a general hyperplane section $\Gamma := C \cap H$ is arithmetically Gorenstein, but C itself is not. Then $\Gamma \subset H \simeq \mathbb{P}^{r-1}$ is contained in a rational normal curve, and $\deg C \equiv 2 \pmod{r-1}$.*

Theorem 0.2. *For given integer $d \geq r+1$ such that $d \equiv 2 \pmod{r-1}$, there is a smooth, irreducible curve $C \subset \mathbb{P}^r$ with $\deg C = d$ which is not arithmetically Gorenstein but its general hyperplane section is arithmetically Gorenstein.*

To prove Theorem 0.1, we use M. Green's "Strong Castelnuovo Lemma"(c.f. [3]).

The curves constructed in Theorem 0.2 are closely related to Castelnuovo theory on curves in projective space. For example, let $C \subset \mathbb{P}^r$ be a *nearly Castelnuovo curve* (see [1] or [4] for the definition) with $\deg C \equiv 2 \pmod{r-1}$. Then C is smooth, non-degenerate and *not* arithmetically Cohen–Macaulay, but its general hyperplane section is arithmetically Gorenstein.

After proving these, we prove the hypersurface version of the results above.

---

*To appear in Proc. Amer. Math. Soc.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 13C40, 13H10, 14H45, 14H50.

Key words and phrases. Gorenstein ring, Hyperplane section, Castelnuovo curve, Uniform Position Lemma, Surface scroll.

Theorem 0.3. *Let $C \subset \mathbb{P}^r$, $r \geq 3$ be a reduced, irreducible and non-degenerate curve. If its general degree d (≥ 2) hypersurface section Z is arithmetically Gorenstein, then C itself is arithmetically Gorenstein.*

If C is not integral, there is a counterexample of Theorem 0.3. See Migliore [7].

1. Main Results

Throughout this paper, k is an algebraically closed field of characteristic 0.

Let $C \subset \mathbb{P}^r_k$ be an integral and non-degenerate curve and $\Gamma := C \cap H$ a general hyperplane section. Denote the homogeneous coordinate ring of $\mathbb{P}^r$ (resp. C) by $S := k[x_0, x_1, \ldots, x_r]$ (resp. $A := S/I_C$). Set $m := (x_0, x_1, \ldots, x_r)$. We let x be the linear form which defines H. Set $S' := S/xS$, $A' := A/xA$ and $R := A'/H^0_m(A')$. S' (resp. R) represents the homogeneous coordinate ring of $H \simeq \mathbb{P}^{r-1}$ (resp. $\Gamma \subset H$).

We denote the Hilbert function of C (resp. Γ) by H_C (resp. H_Γ). In other words, $H_C(n) := \dim_k A_n$ and $H_\Gamma(n) := \dim_k R_n$ for all $n \in \mathbb{Z}$.

Note that R is a 1-dimensional Cohen–Macaulay ring, and the Hilbert series of R is given by

$$F(R, \lambda) = \sum_{n \geq 0} H_\Gamma(n)\lambda^n = (h_0 + h_1\lambda + \cdots + h_s\lambda^s)/(1-\lambda),$$

where $h_0, h_1, \cdots, h_s$ are certain *positive* integers. We call the vector $(h_0, h_1, \cdots, h_s)$ the h-vector of R (or Γ). It is well-known that $h_0 = 1$ and $\deg C = \deg \Gamma = \sum_{i=0}^{s} h_i$.

Lemma 1.1. *Let the notation be as above. For a general hyperplane H, we have that,*

(a) $h_i \geq h_1 = r - 1$ for all $2 \leq i \leq s-1$,

(b) If $\Gamma \subset H = \mathbb{P}^{r-1}$ is contained in a rational normal curve, then $h_1 = h_2 = \cdots = h_{s-1}$ and $h_s \leq h_1$,

(c) Γ is arithmetically Gorenstein if and only if $h_i = h_{s-i}$ for each i.

Proof. The assertion follows from "Uniform Position Lemma" (c.f. [1]) and the Caylay-Bacharach characterization of arithmetically Gorenstein zero-dimensional schemes (c.f. [2]). $\square$

Suppose that R is Gorenstein. In this case, A is Gorenstein if and only if it is Cohen–Macaulay. Consider the minimal free resolution of R over S' :

$$0 \to S'(-n_{r-1}) \to \bigoplus_{i=1}^{b_{r-2}} S'(-n_{r-2,i}) \to \cdots \to \bigoplus_{i=1}^{b_1} S'(-n_{1,i}) \to S' \to R \to 0.$$

We need the following result due to Huneke and Ulrich.

Lemma 1.2. ([6, Corollary 3.24.]) *If C is not arithmetically Cohen–Macaulay, we have*

$$n_{r-1} = \min\{i | [H^0_m(A')]_i \neq 0\} + r - 1 = \max\{n_{1,i}\} + r - 1.$$

Now we can prove the following theorem.

Theorem 1.3. *Let $C \subset \mathbb{P}^r$, $r \geq 3$ be a reduced, irreducible and non-degenerate curve. Suppose that $\Gamma = C \cap H$ is arithmetically Gorenstein for a generic hyperplane H, but C itself is not arithmetically Gorenstein (equivalently, Cohen–Macaulay). Then,*

(a) $\Gamma \subset H \simeq \mathbb{P}^{r-1}$ is contained in a rational normal curve.

(b) $\deg C \equiv 2 \pmod{r-1}$.

(c) If $\deg C \geq 2r$, the intersection of the quadrics containing C is a surface scroll.

Proof. (a) From Lemma 1.2 and the "duality" of the free resolution of R, it is easy to see that $\min\{n_{r-2,i}\} = r-1$. Since we may assume that $\Gamma \subset H$ is in linearly general position, Γ is contained in a rational normal curve by M. Green's "Strong Castelnuovo's Lemma" (Corollary 3.c.6. of [3]).

(b) Since $\Gamma \subset \mathbb{P}^{r-1}$ is arithmetically Gorenstein and contained in a rational normal curve, the h-vector of Γ is given by $(1, r-1, r-1, \ldots, r-1, 1)$. Hence, we have $\deg C = \deg \Gamma = \sum_{i=0}^{s} h_i \equiv 2 \pmod{r-1}$.

(c) By (a), Γ is contained in a rational normal curve X_Γ. Since $n_{r-1} \geq r+2$ (note that $\deg \Gamma \geq 2r$ and $r \geq 3$), we have $\min\{i | [H^0_m(A')]_i \neq 0\} \geq 3$ and $A'_2 = R_2$ by Lemma 1.2. Hence the intersection of the quadrics containing C meets H exactly in X_Γ (note that the defining ideal of a rational normal curve is generated by quadrics). Thus the intersection of the quadrics containing C is a surface X whose general hyperplane section is a rational normal curve, in particular $\deg X = r-1$. So X is a Veronese surface of $\mathbb{P}^5$ or a surface scroll (c.f. [1]). But easy calculation shows that a nondegenerate curve contained in a Veronese surface of $\mathbb{P}^5$ is always projectively normal. So X is a surface scroll. $\square$

Corollary 1.4. *Let $C \subset \mathbb{P}^r$ be a reduced, irreducible and non-degenerate curve with $\dim_k(I_C)_2 < \binom{r-1}{2}$. If a general hyperplane section of C is arithmetically Gorenstein, then C itself is arithmetically Gorenstein.*

Proof. If $\deg C \geq 2r$ (equivalently $\deg C \neq r+1$), the assertion follows from Theorem 1.3.(c), since a surface scroll in $\mathbb{P}^r$ is defined by $\binom{r-1}{2}$ quadrics. So we may suppose that $\deg C = r+1$. Then we have $\dim_k(I_\Gamma)_2 = \binom{r+1}{2} - H_\Gamma(2) = \binom{r+1}{2} - (r+1) \geq \binom{r-1}{2} + 1$. By the same argument as in the proof of [6, Theorem 3.20], we see that $\dim_k H^0_m(A')_2 \leq 1$ in this case. Hence we have $\dim_k(I_C)_2 \geq \dim_k(I_\Gamma)_2 - 1$. It contradicts to the assumption $\dim_k(I_C)_2 < \binom{r-1}{2}$. $\square$

Next, we describe a curve with Gorenstein hyperplane sections as a divisor of a smooth scroll. For each integer $e \geq 0$, we denote the rational ruled surface $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e))$ by X_e. There is an embedding of $X_e \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ as a rational normal scroll if and only if there exists an integer $n > e$ such that $r = 2n - e + 1$.

Let $X_e \subset \mathbb{P}^r$ be a smooth surface scroll. It is well known that the divisor class group of X_e is free of rank 2, having as generators the class H and L of a hyperplane section and a line of the ruling, respectively. The intersection pairing is given by

$$H \cdot H = r-1, \qquad H \cdot L = 1, \qquad L \cdot L = 0,$$

and the canonical class is

$$K_{X_e} \sim -2H + (r-3)L.$$

Let α, β be two integers. The existence of a reduced and irreducible curve $C \sim \alpha H + \beta L$ on a scroll $X_e \subset \mathbb{P}^r$ depends on e. But, when e is smallest possible (i.e., $e = 0$ if r is odd, and $e = 1$ if r is even), the condition for these curves to exist is mildest. With this hypothesis, we have the following fact.

Lemma 1.5. *Let α, β be two integers with $\alpha > 0$. Then the following are equivalent.*

(a) There exists smooth, irreducible curve $C \sim \alpha H + \beta L$ on X_e.
(b) There exists reduced, irreducible curve $C \sim \alpha H + \beta L$ on X_e.
(c) $\alpha[\frac{r-1}{2}] + \beta \geq 0$.

Proof. Follows from [5, V, Corollary 2.18 and 19]. See also [4]. □

Let $C \subset \mathbb{P}^r$ be a reduced and irreducible curve contained in a smooth scroll X such that $C \sim \alpha H + \beta L$. Then we have that

$$\deg C = \alpha(r-1) + \beta$$

and

$$g = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(r-1) + (\alpha-1)(\beta-1)$$

where g is the (arithmetic) genus of C. It is easy to see that C is non-degenerate if and only if $\deg C = \alpha(r-1) + \beta \geq r$.

Lemma 1.6. *Let $C \subset \mathbb{P}^r$ be as above. Then C is arithmetically Cohen–Macaulay if and only if $-(r-2) \leq \beta \leq 1$.*

Proof. C is arithmetically Cohen–Macaulay if and only if the genus of C is equal to $\pi(d,r)$ (see [1] or [4] for the definition). Hence the assertion follows from easy calculation. See also [1, III Exercise I -4]. □

If C satisfies the conditions of the previous lemma, C is called *Castelnuovo curve.* A Castelnuovo curve $C \subset \mathbb{P}^r$ with $\deg C = d$ has the largest genus among integral and non-degenerate curves in $\mathbb{P}^r$ with degree d.

Let $d \geq r+1$ be an integer such that $d \equiv 2 \pmod{r-1}$. From Lemma 1.5, we can take a smooth, irreducible and non-degenerate curve

$$C \sim nH + 2L, \qquad \text{where} \quad n = \frac{d-2}{r-1}$$

on some surface scroll. Easy calculation shows that the arithmetic genus of C is equal to $\pi(d,r) - 1$, and hence C is a typical example of a "nearly Castelnuovo curve" (see [1] or [4] for detail). From Lemma 1.6, C is not arithmetically Cohen–Macaulay. On the other hand, since C is contained in a surface scroll, a general hyperplane section $\Gamma = C \cap H$ is contained in a rational normal curve. The h-vector of Γ is given by $(1, r-1, r-1, \cdots, r-1, 1)$ by Lemma 1.1.(b). So Γ is arithmetically Gorenstein by Lemma 1.1.(c).

Now, we obtain the following.

Theorem 1.7. *For given integer $d \geq r+1$ such that $d \equiv 2 \pmod{r-1}$. There is a smooth, irreducible curve $C \subset \mathbb{P}^r$ with $\deg C = d$ which is not arithmetically Gorenstein but its general hyperplane section is arithmetically Gorenstein.*

By Lemma 1.5 and 1.6, we can determine the set of pairs (α, β) such that the curve $C \sim \alpha H + \beta L$ satisfies the assumption of Theorem 1.7.

Example 1.8. ([6. Example 3.26]) Let $B = k[x^8, x^7y, x^4y^4, x^3y^5, y^8]$ and $C := \operatorname{Proj} B \subset \mathbb{P}^4$. The generic hyperplane section $C \cap H$ is arithmetically Gorenstein, but C is not arithmetically Cohen–Macaulay. Note that $\deg C = 8 \equiv 2 \pmod 3$ and $g = 3$. There exists a smooth surface scroll $X \subset \mathbb{P}^4$ which contains C as $C \sim 4H - 4L$.

2. Hypersurface Cases

In this section, we study a hypersurface version of the results in the previous section. As in Section 1, let $C \subset \mathbb{P}^r$ be a reduced, irreducible, non-degenerate curve, and A the projective coordinate ring of C.

Let $f \in S_d$, $d \geq 2$ be a general degree d element which defines a hypersurface F. Set $A' := A/fA$ and $B := A'/H^0_m(A')$. Then B is the projective coordinate ring of hypersurface section $Z := C \cap F$ in $\mathbb{P}^r$.

Remark 2.1. The general degree d (≥ 2) hypersurface section of C is in linearly general position in $\mathbb{P}^r$. The proof of "Uniform Position Lemma" given in [1] is also applicable in hypersurface case.

We need a result of J. C. Migliore which is a hypersurface version of Lemma 1.2.

Suppose that Z is arithmetically Gorenstein, and consider the minimal free resolution of B over S :

$$0 \to S(-n_r) \to \bigoplus_{i=1}^{b_{r-1}} S(-n_{r-1,i}) \to \cdots \to \bigoplus_{i=1}^{b_1} S(-n_{1,i}) \to S \to B \to 0.$$

Lemma 2.2. *Let the notation be as above. Suppose that C is not arithmetically Cohen–Macaulay and Z is arithmetically Gorenstein. Set $b := \min\{n | H^0_m(A')_n \neq 0\} = \min\{n | A'_n \neq B_n\}$. Then we have*

$$n_r = b + r = \max\{n_{1,i}\} + r.$$

Proof. The assertion follows from [7, Proposition 2.2]. See also the argument following (3.2) of [7].

Theorem 2.3. *Let $C \subset \mathbb{P}^r$, $r \geq 3$ be a reduced, irreducible and non-degenerate curve. If its general degree d (≥ 2) hypersurface section Z is arithmetically Gorenstein, then C itself is arithmetically Gorenstein.*

Proof. Assume the contrary (i.e., C is not arithmetically Cohen–Macaulay). Note that $\deg C \geq r+1$ (if $\deg C \leq r$, then C is a rational normal curve and projectively normal).

From Lemma 2.2 and an argument similar to our proof of Theorem 1.3 (a), we can see that Z is contained in a rational normal curve of $\mathbb{P}^r$. Hence we have that $H_Z(n) = \min\{\deg Z, nr+1\}$ for all $n \in \mathbb{Z}$.

Case 1, $b = \min\{n | A'_n \neq B_n\} > 2$: Since the defining ideal of a rational normal curve is generated by quadrics, we have $(I_Z)_2 \neq (I_C)_2$ (i.e., $A_2 \neq B_2$). By the assumption that $b \geq 3$ (note that $H^0_m(A')_2 = 0$), we have $d = 2$. Easy calculation shows that $H_C(2) = H_Z(2) + 1 = 2r + 2$.

Let $x \in S_1$ be a general linear form which defines a hyperplane H, and set $\Gamma := C \cap H$. Then,

$$\begin{aligned} H_\Gamma(2) &= H_C(2) - H_C(1) - \dim_k[H^0_m(A/xA)]_2 \\ &= 2r + 2 - (r+1) - \dim_k[H^0_m(A/xA)]_2 \\ &= r + 1 - \dim_k[H^0_m(A/xA)]_2. \end{aligned}$$

On the other hand, $\Gamma \subset H$ is in linearly general position, and hence $H_\Gamma(2) \geq \min\{\deg \Gamma, 2r-1\}$. So we have $\deg C = \deg \Gamma = H_\Gamma(2) = r+1$ and $[H^0_m(A/xA)]_2 = 0$. Since Γ is in linearly general position (in particular, Γ is non-degenerate in H), we have that $(A/xA)_1 = B_1$. Hence we have $[H^0_m(A/xA)]_i = 0$ for all $i \leq 1$. Furthermore, since the defining ideal of $\Gamma \subset H$ is generated by quadrics (note that Γ is arithmetically Gorenstein with h-vector $(1, r-1, 1)$), we have $[H^0_m(A/xA)]_i = 0$ for all $i \geq 3$. So we have $H^0_m(A/xA) = 0$, and A is Cohen–Macaulay. This is a contradiction.

Case 2, $b = 2$: Since $\max\{n_{1,i}\} = b = 2$ and Z is contained in a rational normal curve, the h-vector of Z is (1, r, 1) and $\deg Z = d \deg C = r+2$. It contradicts to the fact $d \geq 2$ and $\deg C \geq r+1$. □

Acknowledgment

The author is grateful to Professor J. C. Migliore for valuable e-mail discussion, and sending me the preprints including [7].

References

1. E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths and J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves, vol. 1*, Springer-Verlag, 1985.
2. E. Davis, A. V. Geramita and F. Orecchia, *Gorenstein algebras and the Cayley-Bacharach theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 593-597.
3. M. Green, *Koszul cohomology and the geometry of projective varieties*, J. Diff. Geom. **19** (1984), 125–171.
4. J. Harris, *Curves in Projective Space*, University of Montreal Press, 1982.
5. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
6. C. Huneke and B. Ulrich, *General hyperplane sections of algebraic varieties*, J. Alg. Geom. **2** (1993), 487–505.
7. J. Migliore, *Hypersurface sections of curves*, Proceeding of the conference on Zero-dimensional Schemes (Ravello, 1992), De Gruyter (to appear).
8. R. Strano, *A characterization of complete intersection curves in $\mathbb{P}^3$*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 711–715.

Department of Mathematics, School of Science, Nagoya University Chikusa-ku, Nagoya 464 JAPAN

E-mail address: yanagawa@math.nagoya-u.ac.jp

補足

これまでと同様、基礎体は標数0の代数閉体とする。次の事実が知られている。

Theorem 1 (Ballico–Migliore [BM]) $\mathbb{P}^{r-1} \simeq H \subset \mathbb{P}^r$ を超平面、$X \subset H$ を非退化かつ被約な 0次元スキームとする。このとき、非特異有理曲線 $C \subset \mathbb{P}^r$ が存在して、$C \cap H = X$ と出来る。

上の定理と同じ notation で、2次超曲面に含まれない arithmetically Gorenstein (以下、aGor と略記) な点集合 $X \subset H$ (例えば、2次超曲面に含まれない zero-dimensional complete intersection) を考える。前定理から、非特異有理曲線 $C \subset \mathbb{P}^r$ が存在して、$C \cap H = X$ と出来る。非特異有理曲線が非退化かつ aGor になるように埋め込まれることはないので、$C \subset \mathbb{P}^r$ は aGor ではない (従って、arithmetically Cohen–Macaulay でもない)。作り方から明らかに、C は2次超曲面に含まれない。よって、Huneke–Ulrich の定理 (本稿 Introduction の Theorem A) から、C の一般の超平面切断は aGor ではない事が分かる。よって、次を得る。

Example 2 非退化かつ非特異な射影曲線 $C \subset \mathbb{P}^r$ であって、"ある"超平面 H' に対しては $C \cap H'$ が aGor となるが、"一般"の超平面 H につては $C \cap H$ が aGor とはならないようなものが、大量に存在する。

この手の話では、"一般の元は特殊な元よりも良い性質を持っている"、という場合が多いので、一見奇妙な感じがする。

実際、一定の Hilbert 関数を持つ 0次元スキームの族が与えられた時、aGor になる元が一つでも存在すれば、一般の元が aGor になる事が確かめられる。

実は、aCM でない曲線の超平面切断の Hilbert 関数は、どの超平面で切ったかによって変わってくるのである。

一般に、曲線 $C \subset \mathbb{P}^r$ が与えられた時、$(\mathbb{P}^r)^V$ は $C \cap H$ の Hilbert 関数によって stratify されていて、$C \cap H$ の Hilbert 関数が同じになるような $(\mathbb{P}^r)^V$ の locally open set 各々の中では、より一般の元による切断の方が、座標環の Cohen–Macaulay type がより小さくなっている (よって特に、各 locally open subset の中では aGor 性は open condition である)。Example 2 の状況では、"メジャーな集団の一般元よりも、マイナーな集団の一般元の方が、(ある基準からすると) 素行が良い" という事態が起こっていたのである。

参考文献

[BM] E. Ballico and J. C. Migliore, Smooth curves whose hyperplane section is a given set of points, Commun. in Alg. 18(9) (1990), 3015-3040.

代数関数体の非有理次数について

Hisao Yoshihara

Faculty of Science, Niigata University

§ 1. はじめに

（1）． 基礎体 k が与えられた時, k の有限生成拡大体 L に対しては L/k が代数的ならば L/k の考察の手段は，ガロワ理論等いろいろとある。また詳しい成果も多数得られている。しかし超越的となると， L は捉え難い対象となってしまい，多少でも詳しく研究しようとしても，その手段はいくらも無いようである。そもそも言葉がきわめて少ない，代数拡大や可換環などには豊富な言葉が存在するのと対照的である。そこで超越拡大に対しても新しく言葉を導入し，ごくおおさっぱながらも分類のための手段を提供することを考えた。

その際問題となるのは，一番の基礎とすべき超越拡大体である。ではそれは何であろうか？ 我々は純粋超越拡大体がそうであるという立場に立とう。そこで L が k の純粋超越拡大体からどのくらい離れているかを計る量を定義しよう。

定義 1.1. L は k 上の有限生成拡大体とし， $\mathrm{tr.deg.}_k L = n$ とする。このとき L/k の **degree of irrationality, (非有理次数)**, $d_r(L)$ を次で定義する：

中間体 $K, L \supset K \supset k$, は $\mathrm{tr.deg.}_k K = n$ であって k 上純粋超越拡大であるとする。このような K たちに対して $m = [L : K]$ の最小値を $d_r(L)$ とする。

この最小値 m を与える K （たち）を **maximal rational subfield** （略して max. rat. subf.）と言う。

もちろん，$d_r(L)$ は L/k から一意的にきまる。しかし max. rat. subf. は一意的ではない。また L/k の中間体 K で $\mathrm{tr.deg.}_k K = n$ となる，包含関係で極大なものを取ったとしてもその K が d_r を与える (max. rat. subf.) とはかぎらない。

なお k 上定義された代数多様体 V に対しても, その上の有理関数体を $k(V)$ とする時 $d_r(V) = d_r(k(V))$ として非有理次数を定義する。もちろん定義から, $d_r(V)$ は k 上の代数多様体の双有理不変量である。 また $n = 1$ の時は, 代数曲線の gonality と一致している。

（2）．超越拡大の種々の結果の中では，つぎの Lüroth の定理がきわだっている（永田 [3])。

定理 1.2. k は無限体とし，L は k の純粋超越拡大とする。このとき，$L \supset K \supset k$, $\mathrm{tr.deg.}_k K = 1$ ならば，K/k も純粋超越拡大である。

この定理は L/K が分離拡大なら $\mathrm{tr.deg.}_k K = 2$ のときも成立する (Zariski-Castelnuovo の定理) が，そうでないときは一般には成立しない。また $\mathrm{tr.deg.}_k K = 3$ では基礎体の標数が 0 でも成立しない。

さて上の定理の証明で純代数的なものは，かなり複雑である。ところが基礎体 k に対して標数 0 の代数閉体という仮定をして幾何学的方法を用いると，いちじるしく簡明になる。すなわち有理曲線の判定法である幾何種数が 0 という条件を用いるのである。このときは正則微分形式の考察から直ちに得られる。$\mathrm{tr.deg.}_k K = 2$ のときも同様な Zariski-Castelnuovo の判定法 $q = P_2 = 0$ を用いれば直ちに証明できる。なおこのときは純代数的な証明はほとんど不可能と思われるくらい難しい (らしい)。

また後出の例の関数体 $k(X) = k(y_1, y_2, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2)$ が有理であることの代数的な証明もかなり困難であろう。幾何学的方法が有効となる例をもう一つあげてみよう。$L = k(x, y)$ を一変数代数関数体とし，$g \in L \backslash k$, とするとき，拡大次数 $[L : k(g)]$ は純代数的にはいかにして求めたらよいであろうか。幾何学的にこの問題を捉えると，x, y の関係の定める代数曲線 $C(\subset \mathbf{P}^2)$ に対して，曲線 $C_\lambda : g(x, y) = \lambda$, として，一般的な $\lambda \in k$ を考えたとき，C と C_λ の (C_λ の固定点を除いた部分での) 交点数を求めることになる。これはかなり問題を扱い易くする。

このように代数学の研究を幾何学の助けを借りて行うと，見通しがよくなる。従ってこのような方法で代数学を研究するとき，幾何代数 (geometric algebra) と言ってよいかもしれない。

さてこのように新しい不変量を定義したとき*まず問題となるのは，すでに存在するいろいろな幾何不変量との関係である。これからそれを調べてみよう。簡単のため k は標数 0 の代数閉体とする。gonality はなかなか捉え難い量であったが，d_r はなお一層難しい量である。

§ 2. 超越次数 1 のとき

(1). 種数との関係

C を k 上定義された非特異代数曲線とする。f を C 上の定数でない有理関数とすると，f は正則写像 $C \longrightarrow \mathbf{P}^1$ とみられる。その次数を $deg(f)$ で表し，$L = k(C)$ とおく。$L/k(f)$ は有限次代数拡大である。$d_r(L)$ は，この様な f で $deg(f)$ が最小となるものの値である。これは gonality と一致する。$d_r(C) = 2$ とは hyperelliptic (または elliptic) ということで，また $d_r(C) = 3$ とは trigonal ということである。

さて Riemann-Roch の定理によると，g を C の種数として $P \in C$ に対して

$$h^0(nP) = n + 1 - g + h^1(nP)$$

*実は degree of irrationality の定義は Moh and Heinzer [2] になされている。しかしその視点は曲線の Lüroth semigroup を考察することにかぎられている。

が成立する。従って $n \geq 1+g$ なら $l(nP) \geq 2$ である。これより $d_r(L) \leq g+1$ が解る。なお，$g \geq 2$ のとき Weiersrass point P において考えれば，$d_r(L) \leq g$ を得る。特に $g=2$ なら hyperelliptic である。

（２）．次数との関係

定理 2.1(Namba[4])．$L = k(x,y)$ は非特異モデルを $\mathbf{P}^2$ にもつとする。d をその次数とし，$d \geq 2$ とすれば，$d_r(L) = d-1$ である。

この $d-1$ を与える関数は $P \in C$ を通る pencil によって決まる。たとえば C を原点を通るように射影変換したとすれば，$k(y/x)$ は max. rat. subf. である。

（３）．Moh-Heinzer の定理

定理 2.2 ([2]). $L \supset K \supset k$ であって，$\mathrm{tr.deg.}_k K = 1$ であれば，$d_r(L) \geq d_r(K)$ が成立する。

これは Lüroth の定理を含むものである。$\mathrm{tr.deg.}_k K = 2$ でも成立すれば Zariski-Castelnuovo の結果も含むことになる。しかし成立するかどうか不明である。
なお難波の定理の部分で C に特異点を許してしまうと，d_r の決定はむずかしい。特異性が node くらいであれば若干の成果があるが，一般的にはほとんど何もわかっていないと思われる。

§３．超越次数２のとき

いくつかの結果を証明抜きで述べる。詳しくはそこに引用されている文献を参照のこと。 まず次の２つの典型的な例を問としてあげよう：

問. S_1 と S_2 はそれぞれ，Fermat's quartic : $X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0$ と abelian surface : $E \times E$, ここに E は楕円曲線 $y^2 = x^3 + 1$, であるとする。このときそれぞれの d_r を求めよ。

明らかに $2 \leq d_r(S_1) \leq 3$, $2 \leq d_r(S_2) \leq 4$ であるが，正確な値はいくらか。実際に d_r を決定しようとすると，いろいろな困難に直面する。超越次数が２のときは，以下の状況があるため一層難しくなる。

♠ 1. 有理曲面への dominant rational map を考えなければならず，これは一般的には不定点を持つ。あるいは，射影空間に埋め込んだとき，射影平面への一番小さい次数の射影を考えなければならない。

♠ 2. 完備でない一次系を考える必要があるが，そのための十分な理論はない。

上にも述べたように，体の圏では L/k を分類する適当な用語がないので, 同値な圏である L をモデルとする代数曲面の birational class の言葉を使うことにする。以後 L の (相対極小) モデルを S とする。

まず小平次元 $\kappa(S)$ との関係が知りたいが，一部分がごくおおざっぱに解る程度である。次の通り：

定理 3.1([7]). (1) $\kappa(S)=-\infty$, *i.e.*, S が $\mathbf{P}^1\times C$ と双有理同値の時, $d_r(S)=d_r(C)$.
(2) $\kappa(S)=0$ の類では：
  (a) abelian surface の時, $d_r\geq 3$.
  (b) hyperelliptic surface の時, $12\geq d_r\geq 3$.
  (c) Enriques surface の時, $d_r=2$.

この表で残っている場合にはほとんど判らないが，幾つかについては求められる。そのための鍵となる補題を次にあげる：

補題 3.2 ([8]). S, C はそれぞれ nonsingular projective surface, curve として, $f: S\longrightarrow C$ は surj. morphism とする。general fiber を F とすると, (まず $d_r(C)\leq d_r(S)$ は定理 2.2 から解っている),
(1) $g(F)=0$ ならば，$d_r(S)=d_r(C)$.
(2) $g(F)=1$, f は section を持つならば，$d_r(S)\leq 2d_r(C)$.
(3) $g(F)\geq 2, d_r(F)=2$ ならば，$d_r(S)\leq 2d_r(C)$.
(4) $g(F)=d_r(F)=3$, f は section を持つならば，$d_r(S)\leq 3d_r(C)$.

まず $\mathbf{P^3}$ の smooth hypersurface S について d_r を決定する必要があろう。この場合は $degS=d$ とすると $d_r(S)\leq d-1$ は明かである。また $d=1$, 2, 3 なら，S は有理曲面だから，$d=4$ のときが問題になる。

S 上に交わらない 2 本の直線 l_1 と l_2 があれば, S から $l_1\times l_2$ への 2 次の有理写像が存在する。従って $d_r(S)\leq 2$ がいえるから，問の S_1 については $d_r(S_1)=2$ を得る。実はこのことはもう少し一般的な次の命題からも従う, すなわち $\rho(S)$ を S の Picard number とすると：

命題 3.3 ([7]). $d=4$ のとき, $1\leq\rho(S)\leq 20$ であるが,
(1) $\rho(S)=1$ ならば，$d_r(S)=3$,
(2) $\rho(S)=20$ ならば，$d_r(S)=2$.

$\rho(S)\geq 4$ なら，この S は elliptic surface の構造を持ち，$\rho(S)=20$ ならば，それが global section を持つことも解り，補題 3.2 から singular K3 surface の d_r は 2 であることが判明する。特に問の S_1 はこの場合に該当する。なお，Noether の定理によると一般的な hypersurface S は次数が 4 以上なら $\rho(S)=1$ である。また，中間の $\rho(S)$ の値を持つときの d_r は不明である。

では abelian surface の d_r はどうであろうか。これについては徳永氏（高知大）との共同研究で解ったことを述べよう。

例．問の abelian surface $A = E \times E$ について，$E = \mathbf{C}/(1, \omega)$，$\omega = e^{2\pi i/3}$ である。A は $\varphi(z_1, z_2) = (\omega z_1, \omega z_2)$ を自己同型に持ち，$X = A/\langle\varphi\rangle$ は 9 個の有理 3 重点を持つ。それらを特異点解消した曲面は elliptic rational であることが分かる。従って定理 3.1 と併せて $d_r(A) = 3$ という結論を得る。

なおこの時の max. rat. subf は何であろうか。φ の作用を関数体で書けば

$$\varphi^*(x_i) = \omega x_i,\ \varphi^*(y_i) = y_i,\ i = 1,\ 2,$$

であるから，$k(X) = k(y_1,\ y_2,\ x_1^2 x_2,\ x_1 x_2^2)$ である。この体が tr. $\deg._k k(X) = 2$ の純粋超越拡大であることを代数的に示すことは，難しいと思われるがいかがであろうか？

さてこの例は次の意味で一意的である。

定理 3.4 ([5]). abelian surface A が $d_r(A) = 3$ かつ $k(A)$ は或る max. rat. subf. 上 Galois 拡大ならば A は $E \times E$, $E = \mathbf{C}/(1, \omega)$ と同型である。

では max. rat. subf. 上 Galois でないときはどうであろうか？　この場合は難しく，計算できたものはわずかしかない。次の定理が有用である。

定理 3.5([5]). abelian surface A が smooth, genus 3 の曲線をふくめば $d_r(A) = 3$ である。

smooth, genus 3 の曲線 C は (1, 2)-polarization を決めて，$\dim H^0(A, \mathcal{O}(C)) = 2$ であり，linear system $|C|$ は 4 個の base points を持ち，その点を blow-up して正則写像 $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{P}^1$ を得る。この写像は補題 3.2(4) の条件を満たしている。このことと定理 3.1 より $d_r(A) = 3$ がわかる。この結果を用いると max. rat. subf. 上 non-Galois ext. のときも $d_r = 3$ の例を作ることができる。

命題 3.6([5],[8]). 次の abelian surface A はすべて $d_r = 3$ である。

(1). C を genus 2 の curve として, $J(C)$ をその Jacobi 多様体とする。A は $J(C)$ の不分岐 2 重被覆であるとき。

(2). C は

$$y^3 = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+\lambda)(x-\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbf{C}\backslash\{0,\ \pm 1\}$$

で定義される genus 2 の curve であるとして，A は C の Jacobi 多様体であるとき。

(3). E は虚数乗法をもつ elliptic curve （のうちいくつかを除いたもの[†]）とするとき，$A = E \times E$.

Barth [1] では nonsingular genus 3 の curve C が abelin surface A の中に存在するための必要十分条件を述べている。それによると C が elliptic curve E への 2 重被覆 $\varphi : C \longrightarrow E$ をもつことである。このとき A は $J(C)/\varphi^*(E)$ として得られる。さて次の主張は成立するが，実は現在 abelian surface の非有理次数が 4 以上の例は見つかっていない。

命題 3.7. A が principally polarized abelian surface ならば $d_r(A) = 3$ または 4.

§4. Problems

以下主な未解決問題を列挙しておこう。

問 1． S を $\mathbf{P^3}$ の nonsingular hypersurface of degree $d \geq 5$ でかつ，$\rho(S) = 1$ （あるいは generic）とするとき，$d_r(S) = d - 1$ であるか？

問 2． S_i を曲面とし，$f : S_1 \cdots \to S_2$ を dominant rational map とするとき，$d_r(S_1) \geq d_r(S_2)$ であるか？

問 3． E_1 と E_2 は同種でない楕円曲線とするとき，$d_r(E_1 \times E_2) = 4$ であるか？

これは体論の言葉で十分条件として次のように言い替えられる（十分条件としては強すぎて成立しないかもしれない）:

2 つの楕円関数体 L_1 と L_2 にたいして，L_1 の 2 次拡大体で L_2 を含むものが存在したら，L_1 と L_2 は同種な楕円曲線の関数体であるか。

問 4． abelian surface の d_r は isogeny で変わるか。問 2 が成立すれば不変であることが従う。

問 5． 集合 $\{d_r(S) \mid S\ is\ a\ K3\ surface\}$ は有界でないか？または，K3 surface の代わりに abelian surface のときはどうであろうか？

問 6． S, Δ をそれぞれ曲面と曲線として，surj. morphism $f : S \longrightarrow \Delta$ があるとして，general fiber $f^{-1}(t) = C_t$ は既約と仮定する。general な C_t に対しては genus $g(C_t)$ は一定であるから，この値を g とする。$g \geq 2$ のとき，$d_r(C_t) \leq g$ であるから，$\max\{d_r(C_{a,i}) \mid a \in \Delta,\ C_{a,i}$ は fiber C_a の既約成分$\} = m$ が定まる。このとき以下の主張が成立するであろうか？(もちろん，$g = 0, 1$ のときは成立している)

[†]詳しくは [8] を参照のこと

(1) general な t にたいして　$d_r(C_t) = m$　（一定）．
これは C_t の moduli space を考えれば正しそうである。さらに：
(2) $\forall a \in \Delta$ に対して，$\exists U \ni a$, open nbh of a, such that $\forall t \in U$, $d_r(C_t) \geq d_r(C_{a,i})$, が成立するか？ ただし，$C_{a,i}$ は C_a の既約成分である。
(3) f が section をもつとき，$d_r(S) \leq md_r(\Delta)$ が成立するか？あるいはもう少し section に関する条件をつける必要があるか。

References

[1] W. Barth, Abelian surfaces with (1,2)-polarization, Advanced Studies in Pure Math. **10**(1985), 41-84.

[2] T. T. Moh and W. Heinzer, On the Lüroth semigroups and Weierstrass canonical divisors, J. Algebra **77**(1982), 62-73.

[3] 永田雅宜, 可換体論，数学選書６，華裳房

[4] M. Namba, Families of meromorphic functions on compact Riemann surfaces, Lecture Notes in Math., Vol. **767**, Springer, 1979.

[5] H. Tokunaga and H. Yoshihara, Degree of irrationality of abelian surfaces, to appear in J. Algbra.

[6] H. Yoshihara, Double covering of rational surface, manuscripta math., **75**(1992), 279-291.

[7] H. Yoshihara, Degree of irrationality of an algebraic surface, J. Algebra **167**(1994), 634-640.

[8] H. Yoshihara, Degree of irrationality of a product of two elliptic curves, preprint.

Department of Mathematics,
Faculty of Science,
Niigata University,
Ikarashi 2-8050,
Niigata 950-21
Tel: 025-262-6325
e-mail adress : yosihara@geb.ge.niigata-u.ac.jp

適当な UFD 上の abel 拡大に表れる complete intersection について

鴨井祐二

都立大 理

Introduction

A を Noetherian local factorial domain とし、その商体を K とします。L を K の有限次 abel 拡大、$G = Gal(L/K)$ と置くとき、L 内の A の integral closure R を A の abelian extension と呼びます。

ここでは、$ch(A)$ が $n = |G|$ を割らず、A は 1 の原始 n 乗根を持つと仮定した時 R がいつ complete intersection と成るかについて考えます。

結果として、次に定める datum によって complete intersection と成る R を決める事が出来ます。

Definition $\mathrm{P}(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ の有限部分集合 Γ と map $w : \Gamma \to \mathbf{N}_+$ の 組 (Γ, w) が次を満たすときに datum と呼ぶ。

(1) $D, E \in \Gamma$ $(D \neq E)$ について、次の何れかが起こる。

$$(a)\ \mathrm{Supp}(D) \subsetneq \mathrm{Supp}(E),\ (b)\ \mathrm{Supp}(D) \supsetneq \mathrm{Supp}(E),\ (c)\ \mathrm{Supp}(D) \bigcap \mathrm{Supp}(E) = \phi$$

(2) $E \in \Gamma$ について、次の relation が在る。

$$w(E)E = \sum_{i=1}^{k} E_i + \sum_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j$$

但し、$\{E_1, \ldots, E_k\} = \{D \in \Gamma \mid D \prec E\}$ で $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l\} = \mathrm{Supp}(E) \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Supp}(E_i)$ 。

ここで、$\mathrm{Supp}(D)$ $(D \in \mathrm{Div}(A)_{\mathbf{Q}})$ は D の有理線形結合に表れる prime divisor の集合とします。また、$\mathrm{Supp}(D) \subsetneq \mathrm{Supp}(E)$ であってかつ $\mathrm{Supp}(D) \subsetneq \mathrm{Supp}(D') \subsetneq \mathrm{Supp}(E)$ と成る $D' \in \Gamma$ が無いときに $D \prec E$ と書きます。

このとき、結果は次のように述べられます。

Theorem *Let $(A, \mathfrak{m})$ be as above and $(R, \mathfrak{n})$ be a local ring such that $R \supset A$. Then the following conditions are equivalent.*

(1) R is an abelian extension of A such that $R/\mathfrak{n} \cong A/\mathfrak{m}$ and is a complete inetersection.

(2) There exists a datum (Γ, w) such that

$$R \cong A[Y_E \mid E \in \Gamma]/(Y_E^{w(E)} - a_E \prod_{D \prec E} Y_D \mid E \in \Gamma)$$

where $A[Y_E \mid E \in \Gamma]$ is a polynomial ring and a_E is an element of A satisfying $\mathrm{div}(a_E) = w(E)E - \sum_{D \prec E} D$.

上の (A についての) 仮定の下で R には torsion group による grading が入ります。そして、定理は G-graded ring に関する議論から得られます。そこで、定理の証明の準備として次の section で G-graded ring 関する命題を幾つか挙げて置きます。証明は全て non graded case と同様ににして得られますので適当な text を参照して下さい。

1 Preliminaries.

G を abelian group とし、$R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ を G-graded ring とします。R の nonzero homogeneous element の全体を $h(R)$ と置きます。

R の全ての homogeneous element が nonzero divisor (resp. unit) のとき、R が G-domain (resp. G-simple) と呼びます。また、G-graded ideal $\mathfrak{P}$ of R について、$R/\mathfrak{P}$ が G-domain (resp. G-simple) と成るとき、$\mathfrak{P}$ を G-prime ideal (resp. G-maximal ideal) と呼びます。G-prime 全体の集合を $V_G(R)$ と置き、$V_G(R)$ の中の chain の最大の長さを $\underline{\dim}(R)$ と書くことにします。

G-graded module M と $\mathfrak{P} \in V_G(R)$ について、積閉集合 $h(R \setminus \mathfrak{P})$ による M の module of fractions を M の $\mathfrak{P}$ での homogeneous localization と呼び、$M_{(\mathfrak{P})}$ で表わすことにします。

$H \subset G$ を subgroup とし、$\{g_i\}_{i\in I}$ を G/H の代表系とするとき

$$
\begin{aligned}
M^{(H)} &= \bigoplus\nolimits_{h\in H} M_h \\
M^{(g_i,G)} &= \bigoplus\nolimits_{h\in H} M_{g_i+h}
\end{aligned}
$$

とします。

Remark 1.1 H を G/H が torsion と成る G の subgroup とする。このとき、$\mathfrak{P} \in V_G(R)$ について、$\mathfrak{P}^{(H)} \in V_H(R^{(H)})$ となり、更に $\mathfrak{p} \in V_H(R^{(H)})$ について G-graded ideal $(\sqrt{\mathfrak{p}R})^*$ は、G-prime となる。この対応により $V_H(R^{(H)})$ と $V_G(R)$ は一対一に対応し、G-graded R-module M と $\mathfrak{P} \in V_G(R)$ について、$M_{(\mathfrak{P})} \cong M \otimes_{R^{(H)}} (R^{(H)})_{(\mathfrak{P}^{(H)})}$ と成る。

以下、R を G-domain とし、K を R の (0) での homogeneous localization とします。

Definition 1.2 $h(K)$ の R 上 integral な元が全て R に入るとき、R を *G-normal* と呼ぶ。

Definition 1.3 $x \in h(K)$ で、$R[x]$ がある finitely generated G-graded R-submodule of K である x が全て R の元である時、R を *completely G-normal* と呼ぶ。

G-graded R-submodule $0 \neq I$ of K について、ある $a \in R$ について、$aI \subset R$ と成るとき、I を *G-fractional* ideal of R と呼ぶ。G-fractional ideal の全体を $\underline{\mathrm{I}}(R)$ で表すことにします。また、$\underline{\mathrm{P}}(R)$ でもって、homogeneous principal ideal の全体を表します。更に、$I \in \underline{\mathrm{I}}(R)$ について

$$
\underline{\mathrm{div}}_R(I) = \bigcap_{x\in h(K),\ I\subset Rx} Rx
$$

を I の G-divisorial hull と呼ぶことにします。

Definition 1.4 $I \in \underline{\mathrm{I}}(R)$ が $I = \underline{\mathrm{div}}_R(I)$ と成るとき、*G-divisorial* ideal of R と呼ぶ。G-divisorial ideal の全体を $\underline{\mathrm{Div}}(R)$ と置く。

Remark 1.5 $I,\ J \in \underline{\mathrm{I}}(R)$ について、次が成立。

(0) $\underline{\mathrm{Hom}}_R(I,J) \cong [J:I]$ 。

(1) $[I:J]_K = \bigcap_{x\in h(J)} x^{-1}I$。

(2) $I \in \underline{\mathrm{Div}}(R)$ なら $[I:J]_K \in \underline{\mathrm{Div}}(R)$ 。

(3) $\underline{\mathrm{div}}_R(I) = [R:[R:I]_K]_K$。

(4) $\underline{\mathrm{div}}_R(I) \subset \underline{\mathrm{div}}_R(J) \Longleftrightarrow [R:I]_K \supset [R:J]_K$。

Definition 1.6 $\underline{\mathrm{Div}}(R)$ 上の演算を$\underline{\mathrm{div}}_R(I) + \underline{\mathrm{div}}_R(J) := \underline{\mathrm{div}}_R(IJ)$ $(I,J \in \underline{\mathrm{I}}(R))$ で定義する。また、$\underline{\mathrm{div}}_R(I) \sim \underline{\mathrm{div}}_R(J)$ を$\underline{\mathrm{div}}_R(I) = \underline{\mathrm{div}}_R(J) + \underline{\mathrm{div}}_R(a)$ for some $a \in h(K)$ によって定める。このとき、$\underline{Cl}(R) = \underline{\mathrm{Div}}(R)/\sim$ と置く。

Proposition 1.7 *R is completely G-normal if and only if $\underline{\mathrm{Div}}(R)$ is an abelian group.*

Definition 1.8 Γ を ordered abelian group とする。次を満たす map $\nu : h(K) \longrightarrow \Gamma$ を *G-valuation* on K と呼ぶ。$x, y \in h(K)$ について、

(1) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$

(2) $\nu(x+y) \geq min(\nu(x), \nu(y))$, if $\deg(x) = \deg(y)$ and $x + y \neq 0$.

ν を G-valuation on K とすれば、$\nu|_{K_0}$ は、K_0 の valuation と成る。R_{ν_0} を $\nu|_{K_0}$ の valuation ring とするとき、

$$R_\nu = R_{\nu_0}[x \in h(K) | \nu(x) \geq 0]$$

と置き、ν の *G-valuation ring* と呼ぶ。

Definition 1.9 G-valuation ν on K が $Im(\nu) \cong \mathbf{Z}$ を満たすとき *discrete* と呼ぶ。
ある discrete G-valuation ν on K が在って、$R = R_\nu$ と成るとき、R を *G-discrete valuation ring* (*G-DVR*) と呼ぶ。

non-graded case の様に次の命題が成り立ちます。

Proposition 1.10 *Let $(R, \mathfrak{M})$ be a G-Noetherian G-local G-domain of* $\underline{\dim}(R) = 1$. *Then the following are equivalent.*

(1) R is G-DVR.

(2) R is G-normal.

(3) $\mathfrak{M}$ is a principal ideal.

(4) Every proper G-homogeneous ideal is a power of $\mathfrak{M}$.

$V_G^1(R) = \{\mathfrak{P} \in V_G(R) \mid \underline{\dim}(R_{(\mathfrak{P})}) = 1\}$ と置きます。

Definition 1.11 G-domain R が次の条件を満たすとき、*G-Krull* と呼ぶ。

(1) 全ての $\mathfrak{P} \in V_G^1(R)$ について、$R_{(\mathfrak{P})}$ が G-DVR。

(2) $R = \bigcap_{\mathfrak{P} \in V_G^1(R)} R_{(\mathfrak{P})}$。

(3) $h(R)$ の元は、有限個の $V_G^1(R)$ の元にしか入らない。

このとき、次が成立。

Proposition 1.12 *(1) A G-domain R is G-Krull, if R is G-Noetherian G-normal. Conversely, a G-Krull R is completely G-normal.*

(2) A G-graded Krull domain is G-Krull.

(3) Let R be a G-Krull G-domain and S be a multiplicatively closed subset of $h(R)$. Then a G-graded ring $S^{-1}R$ is G-Krull and $S^{-1}R = \bigcap_{\mathfrak{P} \in \Lambda} R_{(\mathfrak{P})}$ where $\Lambda = \{\mathfrak{P} \in V_G^1(R) \mid \mathfrak{P} \cap S = \phi\}$.

(4) Let R be a G-Krull G-domain with a homogeneous localization K at (0) and K' be a simple graded subring of K. Then $R \cap K'$ is a G-Krull G-domain. In particular, $R^{(H)}$ is a H-Krull H-domain for a subgroup H of G.

以下、この section では、R は G-Krull と仮定します。

Proposition 1.13 *(cf. Chap. VII, §1 of [3])*

(1) For $I \in \underline{\mathrm{I}}(R)$, $\underline{\mathrm{div}}_R(I) = \bigcap_{\mathfrak{P} \in V_G^1(R)} IR_{(\mathfrak{P})}$.

(2) For $I, J \in \underline{\mathrm{Div}}(R)$ with $I \subset J$, $I = J$ if and only if $I_{(\mathfrak{P})} = J_{(\mathfrak{P})}$ for every $\mathfrak{P} \in V_G^1(R)$.

Corollary 1.14 *Let H be a subgroup of G such that G/H is torsion and $\{g_i\}_{i \in \Gamma}$ be a system of representatives of G mod H. Then a G-fractional ideal I is G-divisorial if and only if $I^{(g_i, H)}$ is H-divisorial for any $i \in \Gamma$.*

$\mathfrak{P} \in V_G^1(R)$ について、(1.10) により、$\mathfrak{P}R_{(\mathfrak{P})}$ は K の discrete G-valuation を定めます。それを $\nu_{\mathfrak{P}}$ と書くことにします。このとき、

$$\begin{array}{rccl} \mu \ : & \underline{\mathrm{Div}}(R) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{P} \in V_G^1(R)} \mathbf{Z}\mathfrak{P} \\ & \underline{\mathrm{div}}_R(I) & \longmapsto & \sum_{\mathfrak{P} \in V_G^1(R)} \nu_{\mathfrak{P}}(I)\mathfrak{P} \end{array}$$

とすれば、μ は、ordred abelian group の間の同型射で、$I, J \in \underline{\mathrm{Div}}(R)$ について

$$I \subset J \Longleftrightarrow \mu(I) \geq \mu(J)$$

が成り立ちます。

以下、H を G/H が torsion group と成る G の subgroup とします。

Definition 1.15 $\mathfrak{p} \in V_H^1(R^{(H)})$ と $\mathfrak{P}^{(H)} = \mathfrak{p}$ と成る $\mathfrak{P} \in V_G^1(R)$ に対して

$$e_R(\mathfrak{p}) = \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{P})})$$

と置く。

Remark 1.16 $I \mapsto \underline{\mathrm{div}}_R(IR)$ $(I \in \underline{\mathrm{Div}}(R^{(H)}))$ と云う対応により、$\underline{\mathrm{Div}}(R^{(H)})$ から $\underline{\mathrm{Div}}(R)$ への射が定まり、更に次の可換図が得られます。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & \underline{\mathrm{P}}(R^{(H)}) & \rightarrow & \underline{\mathrm{Div}}(R^{(H)}) & \rightarrow & \underline{Cl}(R^{(H)}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \underline{\mathrm{P}}(R) & \rightarrow & \underline{\mathrm{Div}}(R) & \rightarrow & \underline{Cl}(R) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & G'/H' & \xrightarrow{\alpha} & \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbf{Z}/(e_R(\mathfrak{p})) & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

但し、$G' = \{g \in G \mid K_g \neq 0\}$, H' は $(G' \cap H) \cup \{g \in G \mid R_g$ contains a unit of $R\}$ で生成された G の subgroup で$\underline{\mathrm{P}}(R) \to G/H'$ は、

$$x \in h(K) \mapsto \deg(x) \text{ の } G'/H' \text{ での image}$$

で定まる射とします。

2 R の構成法

この section では、R を G-Noetherian G-normal G-domain とし、K を R の (0) での homogeneous localization とします。更に全ての $g \in G$ について、$K_g \neq 0$ と仮定します。

H を G の subgroup で $G/H \cong \oplus_{i=1}^r \mathbf{Z}/(d_i)$ と成るものとし、$A = R^{(H)}$ と置きます。また、$\underline{\mathrm{Div}}(A)_{\mathbf{Q}} = \underline{\mathrm{Div}}(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ と置き、$D = \sum_{\mathfrak{p} \in V_G^1(A)} a_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \in \underline{\mathrm{Div}}(A)_{\mathbf{Q}}$ について、次の記号を定めます。

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Supp}(D) & = & \{\mathfrak{p} \mid a_{\mathfrak{p}} \neq 0\} \\ D(\mathfrak{p}) & = & a_{\mathfrak{p}} \\ [D] & = & \sum_{\mathfrak{p} \in V_G^1(R)} [a_{\mathfrak{p}}] \mathfrak{p} \\ \{D\} & = & D - [D] \end{array}$$

$A(D)$ を $\{a \in h(K^{(H)}) \mid \underline{\mathrm{div}}_R(a) + D \geq 0\}$ で生成された A の H-divisorial ideal とします。このとき、$A(D) = A([D])$ かつ $\underline{\mathrm{div}}_A(A(D)) = -[D]$ が成り立ちます。

泊先生と渡辺敬一先生の共著 [9] に於いて、$\underline{\mathrm{P}}(A)_{\mathbf{Q}}$ の元を用いて normal $\mathbf{Z}_r$-graded ring が構成されています。この section では、上の状況で泊先生と渡辺敬一先生の構成法を考えます。

K' を A の (0) での homogeneous localization とすれば、$K' = K^{(H)}$ かつ $K = R \otimes_A K'$ と成ります。更に、$1 \leq i \leq r$ に対して、$x_i^{d_i} = f_i \in A$ を満たす元 $x_i \in h(K)$ が在り

$$K = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq m_i < d_i}} K' x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_r^{m_r} \cong K'[X_1, \ldots, X_r]/(X^{d_1} - f_1, \ldots, X^{d_r} - f_r)$$

と書けます。但し、$K'[X_1, \ldots, X_r]$ は、polynomial ring。

そこで、$D_i = \frac{1}{d_i} \underline{\mathrm{div}}_A(f_i) \in \underline{\mathrm{Div}}(A)_{\mathbf{Q}}$ $(1 \leq i \leq r)$ と置くと次が成り立ちます。

Proposition 2.1 *We have*

$$R = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq m_i < d_i}} A(\sum_{i=1}^r m_i D_i) \prod_{i=1}^r x_i^{m_i}.$$

証明は、Proposition 1.4 of Tomari-Watanabe[9] と同様にして出来ます。

Remark 2.2 (1) (2.1) の逆も成立します。A を H-Noetherian H-normal H-domain 、$1 \leq i \leq r$ について、$D_i \in \underline{\mathrm{Div}}(A)_{\mathbf{Q}}$ を $d_i D_i = \underline{\mathrm{div}}_A(f_i)$ と成る A の fractional H-divisor とし、

$$G = H \oplus \mathbf{Z}^r / \sum_{i=1}^r \mathbf{Z}(\deg(f_i), -d_i e_i)$$

とします。ここで、$e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{Z}^r$。このとき、$K'[X_1, \ldots, X_r]/(X_1^{d_1} - f_1, \ldots, X_r^{d_r} - f_r)$ の G-graded subring

$$R(A; D_1, \ldots, D_r, f_1, \ldots, f_r) := \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq m_i < d_i}} A(\sum_{i=1}^r m_i D_i) \prod_{i=1}^r x_i^{m_i}$$

は、G-normal G-domain と成ります。但し K' は、A の (0) での homogeneous localization 。

(2) $1 \leq i \leq r$ について、

$$e_R(\mathfrak{p}) > 1 \Longleftrightarrow D_i(\mathfrak{p}) \notin \mathbf{Z}$$

と成り、更に $D_i(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{b_i} \in \mathbf{Q}$ with $(a_i, b_i) = 1$ と置けば、

$$e_R(\mathfrak{p}) = LCM(\{b_i \mid a_i \neq 0,\ 1 \le i \le r\})$$

と成ります。

$E \in \underline{\mathrm{Div}}(A)_{\mathbf{Q}}$ に対して、G-graded R-module $R(E; D_1, \ldots, D_r, f_1, \ldots, f_r)$ を

$$R(E; D_1, \ldots, D_r, f_1, \ldots, f_r) = \bigoplus_{\substack{1 \le i \le r \\ 0 \le m_i < d_i}} A(E + \sum_{i=1}^{r} m_i D_i) \prod_{i=1}^{r} x_i^{m_i}.$$

と定めます。このとき、$R(E; D_1, \ldots, D_r, f_1, \ldots, f_r)$ は、R の G-divisorial ideal と成ります。特に混同の恐れが無いときは、これを $R(E)$ と書くことにします。

Proposition 2.3 *We define a map*

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \bigoplus_{\mathfrak{p} \in V_H^1(A)} \mathbf{Z} \frac{1}{e_R(\mathfrak{p})} \mathfrak{p} & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Div}}(R) \\ & E & \longmapsto & R(-E; D_1, \ldots, D_r, f_1, \ldots, f_r). \end{array}$$

Then ϕ is an isomorphism of abelian groups.

以下では、特に断らずに上の同型を通して$\underline{\mathrm{Div}}(R)$ と $\bigoplus_{\mathfrak{p} \in V_H^1(A)} \mathbf{Z} \frac{1}{e_R(\mathfrak{p})} \mathfrak{p}$ を同一視します。

Remark 2.4 (1) $D_i = \underline{\mathrm{div}}_R(Rx_i)$ $(1 \le i \le r)$ かつ

$$\underline{\mathrm{P}}(R) = \{E + \sum_{i=1}^{r} m_i D_i \mid E \in \underline{\mathrm{P}}(A), 0 \le m_i < d_i, 1 \le i \le r\}.$$

(2) $0 \le m_i < d_i$ $(1 \le i \le r)$ について、$A(\sum_{i=1}^{r} m_i D_i) \prod_{i=1}^{r} x_i^{m_i}$ が R の G-homogeneous unit を含む事と$\sum_{i=1}^{r} m_i D_i \in \underline{\mathrm{P}}(A)$ と成ることは同値。

以下、$D_R = \sum_{\mathfrak{p} \in V_H(A)} \frac{e_R(\mathfrak{p}) - 1}{e_R(\mathfrak{p})} \mathfrak{p} \in \underline{\mathrm{Div}}(A)_{\mathbf{Q}}$ と起きます。このとき、次が成り立ちます。

Lemma 2.5 *For $E \in \underline{\mathrm{Div}}(A)$, there is the following isomorphism*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(R, A(E)) \cong R(E + D_R; D_1, \ldots, D_r, f_1, \ldots, f_r).$$

$(A, \mathfrak{m})$ を H-local とするとき、*H-canonical* module $\underline{K}_A$ を次を満たす H-graded A-module として定義します。

$$\underline{K}_A \otimes_{A_0} \widehat{A_0} \cong [H_{\mathfrak{m}}^d(\widehat{A})]^{\vee}$$

ここで、$\widehat{A} = A \otimes_{A_0} \widehat{A_0}$ かつ $d = \underline{\dim}(A)$ 。(cf. Section 3 of [6]) 更に A が H-normal で $\underline{K}_A$ が存在すれば、$\underline{K}_A$ は H-divisorial と成ります。ここで、$\underline{K}_A = A(\mathfrak{K}_A)$ と成る H-divisor $\mathfrak{K}_A \in \underline{\mathrm{Div}}(A)$ を固定します。

(2.5) により次が示せます。

Proposition 2.6 *(Theorem 3.2 of Tomari-Watanabe[9])*
Assume that A is H-local and has an H-canonical module $\underline{K}_A = \underline{\mathrm{div}}_A(\mathfrak{K}_A)$.

(1) $\underline{K}_R = R(\mathfrak{K}_A + D_R; D_1, \ldots, D_r, f_1, \ldots, f_r)$.

(2) $\underline{K}_R$ *is free if and only if* $\mathfrak{K}_A + D_R - \sum_{i=1}^r m_i D_i \in \underline{\mathrm{P}}(A)$ *for some* $0 \le m_i < d_i$ $(1 \le i \le r)$.

3 Complete intersections.

以下、Section 2 の記号をそのまま用います。
R は、unique G-maximal ideal $\mathfrak{M}$ を持ち、$\mathfrak{m} = \mathfrak{M}^{(H)} \subset A$ について、$A/\mathfrak{m} = A_0/\mathfrak{m}_0$ と成ると仮定します。更に、以下の仮定を置きます。

Assumption 3.1 *(1) A is locally a complete intersection factorial domain.*

(2) $R/\mathfrak{M} = A/\mathfrak{m}(= A_0/\mathfrak{m}_0)$ *(or* $\sum_{i=1}^r m_i D_i \notin \underline{\mathrm{P}}(A)$ *for* $(m_1, \ldots, m_r) \neq (0, \ldots, 0)$*).*

$\mathrm{Deg}(R) = \{\{\sum_{i=1}^r m_i D_i\} \mid 0 \le m_i < d_i (1 \le i \le r)\}$ とし、$\mathrm{Fund}(R)$ を $\underline{\mathrm{Div}}(A)_{\mathbf{Q}}$ の順序に関する $\mathrm{Deg}(R)$ の minimal elements の集合とします。
このとき、$[\sum_{i=1}^r m_i D_i] \in \underline{\mathrm{P}}(A)$ より、$\{\sum_{i=1}^r m_i D_i\}$ は R の principal ideal で、$\mathrm{Deg}(R) \subset \underline{\mathrm{P}}(R)$ と成ります。そこで、$E \in \mathrm{Fund}(R)$ について、$y_E \in h(R)$ を $\underline{\mathrm{div}}_R(y_E) = E$ と成る元として選びます。また、(3.1) より (1.16) の$\alpha : G/H \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in V_H^1(A)} \mathbf{Z}/(e_R(\mathfrak{p}))$ は、injective と成ることに注意します。
$\Lambda = \{\mathfrak{p} \in V_H^1(A) \mid e_R(\mathfrak{p}) > 1\}$ と置き、$\Lambda' \subset \Lambda$ について、$G_{\Lambda'}$ を $G_{\Lambda'} \supset H$ かつ $G_{\Lambda'}/H = \alpha^{-1}(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Lambda'} \mathbf{Z}/(e_R(\mathfrak{p})))$ と成る G の subgroup とします。
このとき、次が容易に確かめられます。

Lemma 3.2 *(1) For* $E \in \underline{\mathrm{P}}(R)$ *with* $E > 0$ *and* $E \notin \underline{\mathrm{P}}(A)$*, there exists* $D \in \mathrm{Fund}(R)$ *such that* $D \le E$*. (i.e.* $\mathrm{Fund}(R)$ *is the set of minimal elements of* $\{E \in \underline{\mathrm{P}}(R) \mid E > 0$ *and* $E \notin \underline{\mathrm{P}}(A)\}$*.)*

(2) $R = A[y_E \mid E \in \mathrm{Fund}(R)]$.

(3) $\mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda'})}) = \{E \in \mathrm{Fund}(R) \mid \mathrm{Supp}(E) \subset \Lambda'\}$ *for* $\Lambda' \subset \Lambda$.

$\Lambda' \subset \Lambda$ について、

$$\begin{aligned} S_{\Lambda'} &= A[Y_E \mid E \in \mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda'})})] \qquad &: \text{polynomial ring} \\ M_{\Lambda'} &= \mathfrak{m} S_{\Lambda'} + (Y_E \mid E \in \mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda'})})) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi_{\Lambda'} : & S_{\Lambda'} & \longrightarrow & R^{(G_{\Lambda'})} \\ & Y_E & \longmapsto & y_E \\ J_{\Lambda'} = & ker(\psi_{\Lambda'}) & & \end{array}$$

と置きます。標準的な議論により $J_{\Lambda'}$ は、$Y^\alpha - aY^\beta (\neq 0)$ $(a \in h(A), Y^\alpha, Y^\beta$ は $S_{\Lambda'}$ の monomial) の形の元で生成される事が解ります。また、$J_{\Lambda'} = J_\Lambda \bigcap S_{\Lambda'}$ が成り立ちます。

G/H が torsion であることから、$E \in \mathrm{Fund}(R)$ について、J_Λ の元で $Y_E^d - aY^\beta$ ($a \in h(A)$ 、Y^β は monomial) の形の物が存在します。そこで $d_E = inf\{d \mid 0 \neq Y_E^d - aY^\beta \in J_\Lambda\}$ と置き、J_Λ の元 $F(E) = Y_E^{d_E} - a_E Y^{\beta_E} \in J_\Lambda$ を固定して置きます。$\Lambda' \subset \Lambda$ について、もし $\mathrm{Supp}(E) \subset \Lambda'$ ならば、$F(E) \in J_{\Lambda'}$ と成り、更に $\{F(E) \mid E \in \mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda'})})\}$ は $(J_{\Lambda'})_{M_{\Lambda'}}$ の minimal basis の一部と成ります。

Proposition 3.3 *For $\Lambda' \subset \Lambda$, $R^{(G_{\Lambda'})}$ is locally a complete intersection if and only if $J_{\Lambda'}$ is generated by $\{F(E) \mid E \in \mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda'})})\}$.*

Proposition 3.3 は、次の lemma から確かめられます。

$\Lambda' \subset \Lambda$ について、点集合 $V(\mathcal{G}_{\Lambda'}) = \{Y_E \mid E \in \mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda'})})\}$ と辺集合 $DE(\mathcal{G}_{\Lambda'})$ を持つ directed graph $\mathcal{G}_{\Lambda'}$ を次で定義します。ordered pair (Y_E, Y_D) が $DE(\mathcal{G}_{\Lambda'})$ に入ると云うのを Y_D が Y^{β_E} を割る時に定めます。

Lemma 3.4 *((3.5) of Nakajima[7] and (2.1) of Eto[4]) Suppose that $(J_{\Lambda'})_{M_{\Lambda'}}$ is generated by $\{F(E) \mid E \in \mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda'})})\}$.*

(1) There exists a linear ordering $\leq_{\Lambda'}$ on $V(\mathcal{G}_{\Lambda'})$ such that $Y_E \geq_{\Lambda'} Y_D$, if $(Y_E, Y_D) \in DE(\mathcal{G}_\Lambda)$.

(2) $\{F(E) \mid E \in \mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda'})})\}$ forms a regular sequence (in any order).

Corollary 3.5 *If R is locally a complete intersection, then so is $R^{(G_{\Lambda'})}$ for any $\Lambda' \subset \Lambda$.*

Definition 3.6 $\mathrm{P}(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ の有限部分集合 Γ と map $w : \Gamma \to \mathbf{N}_+$ の 組 (Γ, w) が次を満たすときに datum と呼ぶ。

(1) $D, E \in \Gamma$ $(D \neq E)$ について、次の何れかが起こる。

$$(a)\ \mathrm{Supp}(D) \subsetneq \mathrm{Supp}(E),\ (b)\ \mathrm{Supp}(D) \supsetneq \mathrm{Supp}(E),\ (c)\ \mathrm{Supp}(D) \bigcap \mathrm{Supp}(E) = \phi$$

(2) $E \in \Gamma$ について、次の relation が在る。

$$w(E)E = \sum_{i=1}^{k} E_i + \sum_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_j$$

但し、$\{E_1, \ldots, E_k\} = \{D \in \Gamma \mid D \prec E\}$ で $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l\} = \mathrm{Supp}(E) \setminus \bigcup_{i=1}^k \mathrm{Supp}(E_i)$ 。

($\mathrm{Supp}(D) \subsetneq \mathrm{Supp}(E)$ であってかつ $\mathrm{Supp}(D) \subsetneq \mathrm{Supp}(D') \subsetneq \mathrm{Supp}(E)$ と成る $D' \in \Gamma$ が無いときに $D \prec E$ と書きます。)

(Γ, w) を datum 、$E \in \Gamma$、$\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(E)$ とするとき次の記号を置きます。

$$\begin{aligned} \Gamma_{E,\mathfrak{p}} &= \{D \in \Gamma \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(D) \subset \mathrm{Supp}(E)\} \\ e_E(\mathfrak{p}) &= \textstyle\prod_{D \in \Gamma_{E,\mathfrak{p}}} w(D). \end{aligned}$$

このとき、$E = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(E)} \frac{1}{e_E(\mathfrak{p})} \mathfrak{p}$ と書くことが出来ます。

Definition 3.7 (Γ, w) を datum とする。

(1) $A[Y_E \mid E \in \Gamma]$ を polynomial ring over A とし、$E \in \Gamma$ について、$a_E \in h(A)$ を $\underline{\mathrm{div}}_A(a_E) = w(E)E - \sum_{D \prec E} D$ と成る homogeneous elelment とします。このとき

$$R(\Gamma) = A[Y_E \mid E \in \Gamma]/(Y_E^{w(E)} - a_E \prod_{D \prec E} Y_D \mid E \in \Gamma)$$

と置きます。

(2) $G(\phi) = H$ とし abelian group $G(\Gamma)$ を

$$G(\Gamma) = \mathbf{Z}^{(\Gamma)}/\langle \sum_{D \prec E} \mathrm{e}_D - w(E)\mathrm{e}_E \mid E \in \Gamma\rangle$$

と定義します。ここで、e_E $(E \in \Gamma)$ は、$\mathbf{Z}^{(\Gamma)}$ の free base。

(3) $\{E_1, \ldots, E_l\} = \{E \in \Gamma \mid \mathrm{Supp}(E) \text{ is maximal in } \{\mathrm{Supp}(D) \mid D \in \Gamma\}\}$ とし、$\mathfrak{p} \in V_H^1(A)$ とするとき、

$$e(\mathfrak{p}) = \begin{cases} e_{E_i}(\mathfrak{p}) & \text{if } \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(E_i) \text{ for some } i \\ 1 & \text{otherwise .} \end{cases}$$

と置く。

Proposition 3.8 *Let (Γ, w) be a datum. Then the followings hold.*

(1) $R(\Gamma)$ is $G(\Gamma)$-normal and $\underline{\mathrm{Div}}(R(\Gamma)) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in V_H^1(A)} \mathbf{Z}\frac{1}{e(\mathfrak{p})}\mathfrak{p}$.

(2) $\underline{\mathrm{div}}_R(Y_E R(\Gamma)) = E$ for $E \in \Gamma$.

(3) $\mathrm{Fund}(R(\Gamma)) = \Gamma$.

上の命題は次の remark から出ます。

Remark 3.9 B を G'-normal とし、$a \in h(B)$ とする。今、$G'' = G' \oplus \mathbf{Z}/\langle(\deg(a), -n)\rangle$ と置けば、(2.1) と (2.2) により、$B' := B[X]/(X^n - a)$ が G''-normal と成るための必要十分条件が$\underline{\mathrm{div}}_B(a)(\mathfrak{q}) \leq 1$ for every $\mathfrak{q} \in V_{G'}^1(B)$ と求まります。このとき、

$$\underline{\mathrm{Div}}(B') = \bigoplus_{\mathfrak{q} \in V_{G'}^1(B)} \mathbf{Z}\frac{1}{e(\mathfrak{q})}\mathfrak{q}$$

で $\underline{\mathrm{div}}_{B'}(XB') = \frac{1}{n}\underline{\mathrm{div}}_B(a)$ where $e(\mathfrak{q}) = n$ (resp. $e(\mathfrak{q}) = 1$), if $\mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}(\underline{\mathrm{div}}_B(a))$ (resp. $\mathfrak{q} \notin \mathrm{Supp}(\underline{\mathrm{div}}_B(a))$) と成ります。(cf. (2.3))

さて、本稿の主結果は次のように述べられます。

Theorem 3.10 *The following conditions are equivalent.*

(1) R is locally a complete intersection.

(2) There exists a datum (Γ, w) *such that* $G \cong G(\Gamma)$ *and* $R \cong R(\Gamma)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) は明らかなので次を示せば十分と成ります。

Proposition 3.11 *Suppose that R is locally a complete intersection. Then the following holds.*

(1) $\mathrm{Fund}(R)$ *is a datum.*

(2) $R(\mathrm{Fund}(R)) = S_\Lambda / J_\Lambda (\cong R)$.

(3) $G \cong G(\mathrm{Fund}(R))$.

Proof. (1) $|\Lambda|$ についての induction で証明します。

$\Lambda = \phi$ ならば、$R = A$ かつ $\mathrm{Fund}(R) = \phi$ より、何も証明する事はありません。そこで $\Lambda \neq \phi$ と仮定します。(3.5) により、$\Lambda' \subsetneq \Lambda$ について、$R^{(G_{\Lambda'})}$ は、locally a complete intersection と成り、induction hypothesis により、$\mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda'})})$ は datum と成ります。

A は、factorial より、$\sum_{\mathfrak{p}\in\Lambda} \mathfrak{p} \in \underline{P}(A)$ で (2.6) の (2) より、$D = \sum_{\mathfrak{p}\in\Lambda} \frac{1}{e_R(\mathfrak{p})}\mathfrak{p}$ は、$\mathrm{Deg}(R)$ の元と成ります。そこで、(1) $D \notin \mathrm{Fund}(R)$, (2) $D \in \mathrm{Fund}(R)$. の二通りの場合に分けます。

Case (1). $D = E_1 + \cdots + E_p$ for $E_1, \ldots, E_p \in \mathrm{Fund}(R)$ $(p \geq 2)$ と書けて、$\mathrm{Supp}(E_i) \cap \mathrm{Supp}(E_j) = \phi$ for $i \neq j$ と成る。そこで、$\Lambda_i = \mathrm{Supp}(E_i)$ for $1 \leq i \leq p$ と置く。

$E' \in \mathrm{Fund}(R)$ について、$\Lambda_i \subset \mathrm{Supp}(E')$ であれば、$E_i \leq E'$ かつ ($E' \in \mathrm{Fund}(R)$ より) $E_i = E'$。$\Lambda_i \not\subset \mathrm{Supp}(E')$ for $i = 1, \ldots, p$ と仮定すると、$\mathrm{Supp}(E') \subset \Lambda$ より、$\mathrm{Supp}(E_j) \cap \mathrm{Supp}(E') \neq \phi$ for some j。$\Lambda_i \not\subset \mathrm{Supp}(E')$ かつ $\Lambda_i \cap \Lambda_k = \phi$ $(i \neq k)$ だから、$\Lambda' := \Lambda_j \cup \mathrm{Supp}(E') \subsetneq \Lambda$。よって、induction hypothesis と $E_j, E' \in \mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda'})})$ (cf. (3.2)) により、$\mathrm{Supp}(E') \subset \mathrm{Supp}(E_j)$ と成ります。従って、$\mathrm{Fund}(R)$ は $\mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda_i})})$ $(1 \leq i \leq p)$ の disjoint union で更に、$\mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda_i})})$ は datum であることから、$\mathrm{Fund}(R)$ も datum と成ります。

Case (2). $\{E_1, \ldots, E_p\} = \{E \in \mathrm{Fund}(R) \mid E \prec D\}$ と置きます。

Claim 1. $\mathrm{Supp}(E_i) \cap \mathrm{Supp}(E_j) = \phi$ for $i \neq j$.

$\mathrm{Supp}(E_i) \cap \mathrm{Supp}(E_j)$ (for some $i \neq j$) と仮定して矛盾を導きます。$\Lambda' \subsetneq \Lambda$ について、$\mathrm{Fund}(R^{(G_{\Lambda'})})$ が datum であることに注意すれば、$\Lambda = \mathrm{Supp}(E_i) \cup \mathrm{Supp}(E_j)$ でなければなりません。このとき、$E_i + E_j \geq D$ より、relation $E_i + E_j = nD + E$ $(0 \leq E \in \underline{P}(R)$ and $\mathrm{Supp}(E) \subsetneq \Lambda)$ が得られます。言い換えれば、$Y_{E_i} Y_{E_j} - aY_D^n Y^\beta \in J_\Lambda$ $(a \in h(A)$ such that $\underline{\mathrm{div}}_R(a\psi_\Lambda(Y^\beta)) = E)$ と成ります。更に、(3.3) により、ある $E' \in \mathrm{Fund}(R)$ について、$Y^{\beta_{E'}}$ divides $Y_{E_i} Y_{E_j}$ かつ $a_{E'}$ は unit と成ります。このことは、$E_i, E_j \in \mathrm{Fund}(R)$ より、$Y^{\beta_{E'}} = Y_{E_i} Y_{E_j}$ であって、$F(E') = Y_{E'}^{d_E} - a_{E'} Y_{E_i} Y_{E_j}$ を意味します。また、$\mathrm{Supp}(E') \supsetneq \mathrm{Supp}(E_i)$ より、$E' = D$ 即ち、$d_D D = E_i + E_j$ と成ります。同様の議論を経て、$p = 2$ であることが解ります。

そこで、$\mathrm{Supp}(E_1) \setminus \mathrm{Supp}(E_2) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$, $\mathrm{Supp}(E_1) \cap \mathrm{Supp}(E_2) = \{\mathfrak{p}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{p}_t\}$ and $\mathrm{Supp}(E_2) \setminus \mathrm{Supp}(E_1) = \{\mathfrak{p}_{t+1}, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$ と置きます。$d_D D = E_1 + E_2$ により

$$E_1 = \sum_{i=1}^{s} \frac{d_D}{e_R(\mathfrak{p}_i)}\mathfrak{p}_i + \sum_{i=s+1}^{t} \frac{n_i}{e_R(\mathfrak{p}_i)}\mathfrak{p}_i \text{ and } E_2 = \sum_{i=s+1}^{t} \frac{n_i'}{e_R(\mathfrak{p}_i)}\mathfrak{p}_i + \sum_{i=t+1}^{m} \frac{d_D}{e_R(\mathfrak{p}_i)}\mathfrak{p}_i$$

$(n_i+n'_i = d_D$ for $s+1 \le i \le t)$ と書けます。ここで n_{s+1} は $n_{s+1},\dots,n_t,n'_{s+1},\dots,n'_t$ の内で最小の数とします。 $E = E_1+\sum_{j=t+1}^{m}\mathfrak{p}_j - n_{s+1}D \in \underline{\mathrm{P}}(R)$ と置けば、$E \not> E_i$ for $i=1,2$。$E=\{E\}$ である事からある $E' \in \mathrm{Fund}(R)\setminus\{D,E_1,E_2\}$ に対して、$E' \le E$ and $\mathrm{Supp}(E')\bigcap\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_s\} \ne \phi$ と成ります。全ての $E'' \in \mathrm{Fund}(R)\setminus\{D,E_1,E_2\}$ について、$\mathrm{Supp}(E'') \subset \mathrm{Supp}(E_1)$ であるか $\mathrm{Supp}(E'') \subset \mathrm{Supp}(E_2)$ と成ることに注意すれば、$\mathrm{Supp}(E') \subset \mathrm{Supp}(E_1)$ かつ $E' \le \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(E_1)} E(\mathfrak{p}) < E_1$ が解ります。しかしこれは、$E_1 \in \mathrm{Fund}(R)$ に反するので矛盾が出ました。

よって、Claim 1 が示されました。

$\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_q\} = \mathrm{Supp}(D)\setminus\bigcup_{i=1}^{p}\mathrm{Supp}(E_i)$ と置きます。

Claim 2. $w(D)D = \sum_{i=1}^{p}E_i + \sum_{j=1}^{q}\mathfrak{p}_j$ for some $w(D)>0$.

$E := \sum_{i=1}^{p}E_i + \sum_{j=1}^{q}\mathfrak{p} - wD \ge 0$ and $\mathrm{Supp}(E) \subsetneq \Lambda$. なる $w>0$ が在ることは容易に解ります。もし $E \ne 0$ ならばある $E' \in \mathrm{Fund}(R)\setminus\{D\}$ について、$E' \le E$ と成ります。一方で、$\mathrm{Supp}(E') \subset \mathrm{Supp}(E_i)$ for some i であり、$\mathrm{Supp}(E_i)\cap\mathrm{Supp}(E_j) = \phi$ $(i \ne j)$ より、$E' \le \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(E')} E(\mathfrak{p})\mathfrak{p} < E_i$ と成り矛盾。従って、$E=0$ で $wD = \sum_{i=1}^{p}E_i + \sum_{j=1}^{q}\mathfrak{p}$ と成ります。

Claim 1, 2 と induction hypothesis により、$\mathrm{Fund}(R) = \{D\}\cup\bigcup_{i=1}^{p}\mathrm{Fund}(R^{(G_{\mathrm{Supp}(E_i)})})$ は datum と成ります。

(2) と (3) は、(1) より直ちに従う。 □

Introduction の命題は Proposition 1.12 of Tomari-Watanabe[9] に注意すれば、主結果から直ちに得られます。

References

[1] D. F. Anderson, *Graded Krull domains*, Comm. in Alg. **7** (1979), 79-106.

[2] L. Avramov, *Flat morphisms of complete intersections*, Soviet Math. Dokl. **16** No.6 (1975), 1413-1417.

[3] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann, 1965.

[4] K. Eto, *Ideals associated with free abelian groups*, (1994), Preprint.

[5] S. Goto and K.-i. Watanabe, *On Graded Rings*, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 172-213.

[6] Y. Kamoi, Noetherian rings graded by an Abelian group, to appear in Tokyo J. Math.

[7] H. Nakajima, *Affine tourus embedding which are complete intersections*, Tohoku Math. J. **38** (1986), 85-98.

[8] L. Robbiano, *Introduction to the Theory of Gröbner Basis*, Qeen's Papers in Pure and Applied Maths **5** no.80, 1988.

[9] M. Tomari and K.-i. Watanabe, *Normal* $\mathbf{Z}_r$*-Graded Rings and Normal Cyclic Covers*, manuscripta math. **76** (1992), 325-340.

[10] K.-i. Watanabe, *Invariant subrings which are complete intersections,* I, Nagoya, Math. J. **77** (1980), 89-98.

Yuji Kamoi

Department of Mathematics
Tokyo Metropolitan University
Minami-Ohsawa 1-1, Hachioji-shi
Tokyo, 192-03 Japan
e-mail : kamoi@math.metro-u.ac.jp

Gorenstein Artin standard G-algebras with unimodal sequences

張間　忠人
四国大学　経営情報学部

Introduction

Gorenstein sequence について, いくつかの事実をまとめてみると,

(1) Gorenstein sequence は symmetric である (cf. [16, Theorem 4.1]).

(2) $h = (h_0, h_1, \ldots, h_s), h_1 \le 3$, が Gorenstein sequence であるための必要十分条件は

(2.1) h : symmetric, i.e., $h_{s-i} = h_i$ for all $i = 0, 1, \ldots, [s/2]$.

(2.2) $(h_0, h_1 - h_0, h_2 - h_1, \ldots, h_{[s/2]} - h_{[s/2]-1}, 0, 0, \ldots)$: O-sequence である (cf. [16, Theorem 4.2]).

よって $h_1 \le 3$ のとき, Gorenstein sequence は unimodal である. $h_1 \ge 4$ のときの特徴づけはまだわかっていないと思います.

(3) 各 $h_1 \ge 5$ に対して, unimodal でない Gorenstein sequence が存在する (cf. [16, Example 4.3], [1, Theorem 1] and [2, Example 5.5]). 例えば,

- $1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 91, 90, 91, 70, 51, 35, 22, 12, 5, 1$
- $1, a, 27, 25, 25, 27, a, 1$ $(10 \le a \le 28)$
- $1, 13, 12, 13, 1$

などが具体的に構成されている. $h_1 = 4$ のとき, unimodal でない Gorenstein sequence が存在するかどうかはわかっていないと思います.

(4) Gorenstein sequence のほとんどが unimodal である (cf. [18, Remark 3.7, Theorem 3.8 and Example 3.9]). unimodal な Gorenstein sequence はどのように特徴づけられるのであろうか.

unimodal な Gorenstein sequence $h = (h_0, h_1, \ldots, h_s)$ の特徴づけを考えるとき, その対称性から h の前半部分の増え方, すなわち $(h_0, h_1 - h_0, h_2 - h_1, \cdots, h_{[s/2]} - h_{[s/2]-1})$, を調べればよいことになります.

Conjecture : $h = (h_0, h_1, \ldots, h_s)$ が unimodal な Gorenstein sequence であるための必要十分条件は (2.1) と (2.2) を同時にみたすことである.

Definiton (cf. [9, page 2]). 上の 2 つの性質 (2.1) と (2.2) をもつ sequence を *SI-sequence* と呼ぶことにします.

さて, Artin standard G-algebra $A = \bigoplus_{i=0}^{s} A_i$ ($A_s \neq (0)$) について, 次の性質を考えましょう.

Definition (cf. [18, Definition 3.1]). A が *weak Stanley property* (簡単に WSP) をもつとは次の 2 つの性質をもつときに言う.

(i) $h(A)$: unimodal.

(ii) $\exists g \in A_1$ such that the k-vector space homomorphism $g : A_i \longrightarrow A_{i+1}$ defined by $f \longmapsto gf$ is either injective or surjective for each $i = 0, 1, \ldots, s-1$.

(このとき,(A, g) が WSP をもつと言う.)

この講演では, SI-sequence が WSP をもつ Gorenstein Artin standard G-algebra の h-sequence によって特徴づけられることを証明します. すなわち,

Theorem (cf. [10, Theorem 1.2]). *Let $h = (h_0, h_1, \ldots, h_s)$ be a sequence of non-negative integers. Then h is the h-sequence of some Gorenstein Artin G-algebra with the WSP if and only if h is an SI-sequence.*

この特徴づけを証明するためには, Linkage のある結果 [13, Remarque 1.4] と $\mathbf{P}^n$ の finite points からなる有限集合の Hilbert function に関するある結果 [7, Corrorally 2.5], [8, Theorem 4.1] が必要です. さらにまた, 渡辺純三先生の [18, Theorem 3.8] の証明がヒントになりました.

§5 では, この定理の応用として, 体 k 上の 3 変数多項式環 $R = k[x, y, z]$ の height 3 の Gorenstein homogeneous ideal I の minimal generators の個数 $\mu(I)$ と R/I の Hilbert function のある関係式を求めます (cf. [11]).

以下の内容は, References の [9], [10], [11] から引用しました。

謝辞

隅広秀康先生, 伊藤史朗先生, 大石彰先生には有益なコメントをいただきました. また, 徳島大学の奥山広先生には有益なセミナーをしていただきました. ここに感謝の意を表したいと思います.

1. Preliminaries and notation

A *standard G-algebra* $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots$ over a field k is a commutative graded ring such that $A_0 = k$, A is generated as a k-algebra by A_1 and the dimension of A_1 as a k-vector space is finite. Thus they are those k-algebras which can be written in the form $A = k[x_0, x_1, \dots, x_n]/I$, where the x_i are indeterminates of degree 1 and I is a homogeneous ideal. In this paper a standard G-algebra over k is called a *k-algebra* for short.

The *Hilbert function* of A is defined by $H(A,i) = \dim_k A_i$ for all $i = 0, 1, \dots,$ and $H(A,i) = 0$ for all $i < 0$. In particular, if A is Artin, then we denote by the finite sequence $H(A) = (H(A,0), H(A,1), \dots, H(A,s))$ the Hilbert function of A, where $s = \max\{i \mid A_i \neq 0\}$. Furthermore, we put $\sigma(A) = s+1$.

If h and i are positive integers, then h can be written uniquely in the form

$$h = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{n_j}{j},$$

where $n_i > n_{i-1} > \cdots > n_j \geq j \geq 1$. We put $0^{<i>} = 0$ and

$$h^{<i>} = \binom{n_i + 1}{i+1} + \binom{n_{i-1}+1}{i} + \cdots + \binom{n_j + 1}{j+1}.$$

A finite or infinite sequence $\underline{H} = (h_0, h_1, \dots)$ of nonnegative integers is called an *O-sequence* if $\underline{H}$ is the Hilbert function of some k-algebra, i.e., $h_0 = 1$ and $0 < h_{i+1} \leq h_i^{<i>}$ for $i = 1, 2, \dots$ (cf. [16, Theorem 2.2] for the details). A sequence $\underline{H} = (h_0, h_1, \dots, h_s)$ of positive integers is called a *Gorenstein sequence* if $\underline{H}$ is the Hilbert function of some Gorenstein Artin k-algebra. Furthermore, we say that a sequence $\underline{H} = (h_0, h_1, \dots, h_s)$ of positive integers is *unimodal* if $h_0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_j \geq h_{j+1} \geq \cdots \geq h_s$.

Throughout this paper, let k be an algebraically closed field and let $R = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ be the homogeneous coordinate ring of $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^n_k$. Let X be a finite set of points in $\mathbf{P}^n$ and let $I(X) \subset R$ be the homogeneous ideal of X. The Hilbert function of X is defined by $H(X,i) = H(R/I(X),i)$ for all i. Furthermore we put $\Delta H(X,0) = 1$, $\Delta H(X,i) = H(X,i) - H(X,i-1)$ for all $i = 1, 2, \dots$ and $\Delta H(X,i) = 0$ for all $i < 0$. We denote by $\mid X \mid$ the number of points in X.

We recall some basic facts about Hilbert functions of points in $\mathbf{P}^n$.

Proposition 1.1. *Let X be a finite set of points in $\mathbf{P}^n$.*

(1) $H(X,i) \leq H(X,i+1)$ *for all* $i \geq 0$.

(2) $H(X,i) = H(X,i+1) \Rightarrow H(X,i+2) = H(X,i+1)$.

(3) $H(X,i) = \mid X \mid$ *for all* $i >> 0$.

Put $\sigma(X) = \min\{i \mid \Delta H(X,i) = 0\}$.

(4) *If* $Y \subset X$ *then* $\sigma(Y) \leq \sigma(X)$.

(5) $H(X,i) = \mid X \mid$ *for all* $i \geq \sigma(X)-1$.

(6) $\mid X \mid \geq 2 \Longleftrightarrow \sigma(X) \geq 2$.

(7) $(\Delta H(X,0), \ldots, \Delta H(X, \sigma(X)-1))$ *is an O-sequence.*

Proof. The assertions of (1), (2), (3) and (4) follow from [15, Proposition 1 and Proposition 2].

(5) follows from (2) and (3).

(6) Assume that $\mid X \mid \geq 2$. Then it follows from (1), (2), (3) and $H(X,0) = 1$ that $H(X,1) \geq 2$. Hence $\Delta H(X,1) \geq 1$. Thus $\sigma(X) \geq 2$. Conversely assume that $\sigma(X) \geq 2$. Then since $\Delta H(X,1) \geq 1$, it follows that $H(X,1) \geq 2$. Hence $\mid X \mid \geq 2$.

(7) follows from [8, Proposition 2.7].

2. A construction of a number of Gorenstein Artin k-algebras with the WSP

In this section, we prove the following four lemmas which is the key to the proof of Theorem. That is, for two given geometrically linked sets of points, we give a construction of a number of Gorenstein Artin k-algebras with the WSP whose Hilbert functions can be recovered from the Hilbert function of one of the sets (cf. [13] for the details about geometric linkage).

Lemma 2.1. *Let X and Y be two finite sets of points in $\mathbf{P}^n$ such that $X \cap Y = \phi$ and $X \cup Y$ is complete intersection, and put $A = R/I(X) + I(Y)$. Furthermore put $a = \sigma(X) - 1$, $b = \sigma(X \cup Y) - \sigma(X) - 1$, $c = \sigma(X \cup Y) - 1$. Assume that $2\sigma(X) \leq \sigma(X \cup Y)$ and $\mid X \mid \geq 2$. Then $H(A)$ is a Gorenstein SI-sequence as follows.*

$$H(A,i) = \begin{cases} H(X,i) & i = 0,1,\ldots,a-1, \\ \mid X \mid & i = a,\ldots,b, \\ H(X,c-1-i) & i = b+1,\ldots,c-1, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

i.e., $H(A) = (1, h_1, \ldots, h_{a-1}, \mid X \mid, \ldots, \mid X \mid, h_{a-1}, \ldots, h_1, 1)$, where $h_i = H(X,i)$, and we have $\sigma(A) = c$.

Proof. By the assumption $2\sigma(X) \leq \sigma(X \cup Y)$ and $\mid X \mid \geq 2$, it is easy to show that $a \leq b$, $b+1 \leq c-1$ and $a \leq [(c-1)/2] \leq b$.

First we show that

$$H(A,i) = H(X,i) + H(X,c-1-i) - \mid X \mid \quad \text{for all } i = 0,1,\ldots,c. \tag{2.1.2}$$

From [6, Theorem 3 (b)], it follows that

$$\Delta H(X \cup Y, i) = \Delta H(X, c-i) + \Delta H(Y,i) \quad \text{for all } i = 0,1,\ldots,c.$$

Hence for every $j \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{j} \Delta H(X \cup Y, i) = \sum_{i=0}^{j} \Delta H(X, c-i) + \sum_{i=0}^{j} \Delta H(Y, i).$$

Therefore

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{j} \Delta H(X, c-i) &= \sum_{i=0}^{j} \Delta H(X \cup Y, i) - \sum_{i=0}^{j} \Delta H(Y, i) \\ &= H(X \cup Y, j) - H(Y, j). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Furthermore, from $a \leq c$,

$$\sum_{i=0}^{c} \Delta H(X, i) = H(X, c) = \mid X \mid .$$

Thus for all $j = 0, 1, \ldots, c$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{j} \Delta H(X, c-i) &= \sum_{i=0}^{c} \Delta H(X, i) - \sum_{i=0}^{c-1-j} \Delta H(X, i) \\ &= \mid X \mid - H(X, c-1-j). \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Therefore we obtain from (2.1.3) and (2.1.4) that

$$H(X \cup Y, j) - H(Y, j) = \mid X \mid - H(X, c-1-j) \quad \text{for all } j = 0, 1, \ldots, c. \tag{2.1.5}$$

On the other hand, from the following exact sequence

$$0 \to R/I(X \cup Y) \to R/I(X) \oplus R/I(Y) \to A \to 0,$$

we have

$$\begin{aligned} H(A, i) &= H(R/I(X), i) + H(R/I(Y), i) - H(R/I(X \cup Y), i) \\ &= H(X, i) + H(Y, i) - H(X \cup Y, i). \end{aligned}$$

Hence we obtain from (2.1.5) that

$$H(A, i) = H(X, i) + H(X, c-1-i) - \mid X \mid .$$

Next we show that $\sigma(A) = c$. Namely, it is enough to show that $H(A, c-1) \neq 0$ and $H(A, c) = 0$. Since $a \leq b$ and $b+1 \leq c-1$, we have $a < c-1$. Hence $H(X, c-1) = \mid X \mid$. Therefore when $i = c-1$, it follows from (2.1.2) that

$$\begin{aligned} H(A, c-1) &= H(X, c-1) + H(X, 0) - \mid X \mid \\ &= \mid X \mid + 1 - \mid X \mid \\ &= 1. \end{aligned}$$

Furthermore when $i = c$, we obtain

$$\begin{aligned} H(A,c) &= H(X,c) + H(X,-1) - \mid X \mid \\ &= \mid X \mid + 0 - \mid X \mid \\ &= 0. \end{aligned}$$

We show the equality (2.1.1). Since $a + b = \sigma(X) - 1 + \sigma(X \cup Y) - \sigma(X) - 1 = c - 1$, we have $a \leq c - 1 - i$ for all $i = 0, 1, \ldots, b$. Hence

$$H(X, c-1-i) = \mid X \mid \quad \text{for all } i = 0, 1, \ldots, b.$$

On the other hand we obtain from $a < b + 1$ that

$$H(X, i) = \mid X \mid \quad \text{for all } i = b+1, \ldots.$$

Hence, from (2.1.2), we get

$$\text{(2.1.6)} \qquad H(A,i) = \begin{cases} H(X,i) & \text{for all } i = 0, 1, \ldots, b, \\ H(X, c-1-i) & \text{for all } i = b+1, \ldots, c-1. \end{cases}$$

Thus the equality (2.1.1) holds by noting $H(X,i) = \mid X \mid$ for all $i = a, \ldots, b$. Hence from Proposition 1.1 (1) and (7), $H(A)$ is an SI-sequence. Furthermore by [13, Remarque 1.4], A is a Gorenstein Artin k-algebra. Hence $H(A)$ is a Gorenstein sequence.

Lemma 2.2. *With the same notations as in Lemma 2.1, let $L \subset \mathbf{P}^n$ be a hyperplane defined by a polynomial $G \in R_1$, and let $g \in A_1$ be the image of G. Assume that $2\sigma(X) \leq \sigma(X \cup Y)$ and $X \cap L = \phi$. Then (A, g) has the WSP.*

Proof. It is enough to show that $g : A_i \longrightarrow A_{i+1}$ is either injective or surjective for all i. Put $B = R/I(X) = \oplus_{i \geq 0} B_i$, and let $\overline{G} \in B_1$ be the image of G. Consider the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \xrightarrow{g} & A_1 & \xrightarrow{g} & \cdots & \xrightarrow{g} & A_{c-1} & \xrightarrow{g} & 0 & \cdots \\ \varphi \uparrow & & \varphi \uparrow & & & & \varphi \uparrow & & \varphi \uparrow & \\ B_0 & \xrightarrow{\overline{G}} & B_1 & \xrightarrow{\overline{G}} & \cdots & \xrightarrow{\overline{G}} & B_{c-1} & \xrightarrow{\overline{G}} & B_c & \cdots \end{array}$$

where φ is the canonical homomorphism $B \longrightarrow A$. It follows immediately from $X \cap L = \phi$ that $\overline{G}$ is not a zero-divisor in B. Hence $\overline{G} : B_i \longrightarrow Bi + 1$ is injective for all i. Furthermore we have from Proposition 2.1 (5) that $H(B, i) = \mid X \mid$ for all $i \geq a$. Therefore $\overline{G} : B_i \longrightarrow B_{i+1}$ is bijective for all $i \geq a$. We obtain from (2.1.6) that $H(A,i) = H(B,i)$ for all $i = 0, 1, \ldots, b$. Hence since the homogeneous part of the canonical homomorphism $\varphi : B \longrightarrow A$ is surjective, $\varphi : B_i \longrightarrow A_i$ is bijective for all $i = 0, 1, \ldots, b$. Thus it follows immediately that

$$\text{(2.2.1)} \qquad g : A_i \longrightarrow A_{i+1} \text{ is } \begin{cases} \text{injective} & \text{for all } i = 0, 1, \ldots, a-1, \\ \text{bijective} & \text{for all } i = a, \ldots, b-1, \\ \text{surjective} & \text{for all } i = b, \ldots, c-1. \end{cases}$$

Lemma 2.3. *With the same notations as in Lemma 2.2, let d be an integer such that $1 \le d \le \sigma(X \cup Y) - 2\sigma(X)$ and let $(0 : g^d)$ denote the homogeneous ideal generated by homogeneous elements $f \in A$ such that $g^d f = 0$. Then $H(A/(0 : g^d))$ is a Gorenstein SI-sequence as follows.*

$$H(A/(0:g^d), i) = \begin{cases} H(X,i) & i = 0,1,\dots,a-1, \\ \mid X \mid & i = a,\dots,b-d, \\ H(X, c-1-i-d) & i = b+1-d,\dots,c-1-d, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

and $\sigma(A/(0 : g^d)) = c - d$.

Proof. Put $\overline{A} = A/(0 : g^d)$. Note that the i-th graded piece of $\overline{A}$ is $A_i/\ker[g^d : A_i \longrightarrow A_{i+d}]$. Since $1 \le d \le \sigma(X \cup Y) - 2\sigma(X)$, obviously $a \le b - d$. Hence we obtain from (2.2.1) that

$$g^d : A_i \longrightarrow A_{i+d} \text{ is } \begin{cases} \text{injective} & i = 0,1,\dots,b-d, \\ \text{surjective} & i = b+1-d,\dots. \end{cases}$$

Thus we get the following identification

$$\overline{A} \cong A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_{b-d} \oplus A_{b+1} \oplus A_{b+2} \oplus \cdots \oplus A_{c-1} \oplus 0 \oplus \cdots. \tag{2.3.2}$$

Obviously $\sigma(\overline{A}) = c - d$ and

$$H(\overline{A}, i) = \begin{cases} H(A,i) & i = 0,1,\dots,b-d, \\ H(A, i+d) & i = b+1-d,\dots,c-1-d. \end{cases}$$

Hence, from (2.1.6), we obtain the equality (2.3.1). Thus $H(\overline{A})$ is an SI-sequence.

Next we show that $H(\overline{A})$ is a Gorenstein sequence, i.e., $\overline{A}$ is Gorenstein. Put $Soc(\overline{A}) = \{\overline{y} \in \overline{A} \mid \overline{A}_1\overline{y} = (0)\}$, where $\overline{y}$ is the image of $y \in A$. We note that $\sigma(\overline{A}) = c - d$ and $\dim_k(\overline{A})_{c-1-d} = 1$. It is enough to show that $Soc(\overline{A}) = (\overline{A})_{c-1-d}$. Let $\overline{y} \in \overline{A}_i$ ($y \in A_i, i < c-1-d$) be an element such that $\overline{y} \in Soc(\overline{A})$. Hence $A_1 y \subset (0 : g^d)$. Since $Soc(A) = A_{c-1}$, we have $yg^d \in A_{c-1}$. On the other hand, $yg^d \in A_{i+d}$. Since $i+d < c-1$, we obtain $yg^d = 0$. Hence $\overline{y} = 0$. Thus $Soc(\overline{A}) = (\overline{A})_{c-1-d}$.

Lemma 2.4. *With the same notations as in Lemma 2.3, let $\overline{g}$ be the image of g in $A/(0 : g^d)$. Then $(A/(0 : g^d),\ \overline{g})$ is a Gorenstein Artin k-algebra with the WSP.*

Proof. It is enough to show that $\overline{g} : \overline{A}_i \longrightarrow \overline{A}_{i+d}$ is either injective or surjective for all i. It is easy to show that, with the identification (2.3.2), the multiplication $\overline{g} : \overline{A} \longrightarrow \overline{A}$ is described as

$$A_0 \xrightarrow{g} A_1 \xrightarrow{g} \cdots \xrightarrow{g} A_{b-d} \xrightarrow{g^{d+1}} A_{b+1} \xrightarrow{g} A_{b+2} \xrightarrow{g} \cdots \xrightarrow{g} A_{c-1}.$$

The only part which is not clear is $A_{b-d} \overset{g^{d+1}}{\longrightarrow} A_{b+1}$. But we obtain from $b-d \geq a$ and (2.2.1) that $A_{b-d} \overset{g^{d+1}}{\longrightarrow} A_{b+1}$ is surjective.

Remark 2.5. Let X be a finite set of points in $\mathbf{P}^n$ and let j be an integer. Then it is easy to construct a finite set Y of points in $\mathbf{P}^n$ such that $X \cap Y = \phi$, $X \cup Y$ is complete intersection and $\sigma(X \cup Y) \geq j$. For example we construct Y as follows. We may assume that $X \cap L = \phi$, where L is the hyperplane defined by the equation $x_0 = 0$. Obviously there exist distinct elements $a_{i,j} \in k$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ such that $X \subset Z$, where $Z = \{[1; a_{1,j}; \ldots; a_{n,j}] \mid 1 \leq j \leq m\}$. Then it is easy to show that Z is complete intersection and $\sigma(Z) = nm - (n-1)$. Furthermore for a sufficient large m, we get $\sigma(Z) \geq j$. We put $Y = \{P \in Z \mid P \notin X\}$. Then Y satisfy the conditions above.

3. Proof of Theorem

Before proving Theorem 1.2, we have to recall a result in [7] and [8].

Definition 3.1 (cf. [8, Definition 2.9]). An O-sequence $\underline{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_i, \ldots)$ is called differentiable if its difference $\Delta\underline{b} = (b_0, b_1 - b_0, \ldots, b_i - b_{i-1}, \ldots)$ is also an O-sequence.

Proposition 3.2 (cf. [7, Corollary 2.5] and [8, Theorem 4.1]). Let $\underline{b}$ be a differentiable O-sequence. Then there is a reduced k-algebra over an infinite field k with Hilbert function $\underline{b}$.

We now start to prove Theorem.

Proof of Theorem. Assume that $\underline{H}$ is the Hilbert function of some Gorenstein Artin k-algebra (A, g) with the WSP. Then the Hilbert function of A/gA is the sequence $(h_0, h_1 - h_0, h_2 - h_1, \ldots, h_t - h_{t-1})$, where $h_i = H(A, i)$ and $t = \min\{i \mid H(A,i) \geq H(A, i+1)\}$. Hence $\underline{H}$ is an SI-sequence.

Conversely assume that $\underline{H}$ is an SI-sequence.

If $h_1 = 1$, then it is easy to show that $h_i = 1$ for all $i = 0, 1, \ldots, s$. Hence $\underline{H}$ is the Hilbert function of $A = k[x_0]/(x_0^{s+1})$ which is a Gorenstein Artin k-algebra with the WSP.

Let $h_1 \geq 2$. We put $t = \min\{i \mid h_i \geq h_{i+1}\}$. Hence $\underline{H} = (1, h_1, \ldots, h_{t-1}, h_t, \ldots, h_t, h_{t-1}, \ldots, h_1, 1)$. We consider the infinite sequence $\underline{b} = \{b_i\}_{i \geq 0}$, where $b_i = h_i$ for all $i = 0, 1, \ldots, t$ and $b_i = h_t$ for all $i = t+1, \ldots$. Since $\underline{H}$ is an SI-sequence, $\underline{b}$ is a differentiable O-sequence. Hence, by Proposition 3.2, there exists a finite set X of points in $\mathbf{P}^n$ such that $H(X) = \underline{b}$, where $n = h_1 - 1$. We may assume that $X \cap L = \phi$, where L is the hyperplane defined by the equation $x_0 = 0$. Furthermore by Remark 2.5, there exists a finite set Y of points in $\mathbf{P}^n$ such that $X \cap Y = \phi$, $X \cup Y$ is complete intersection and $\sigma(X \cup Y) \geq s + 2$. Since $2t \leq s$ and $\sigma(X) = t + 1$, it follows that $2\sigma(X) \leq s + 2$. Hence $2\sigma(X) \leq \sigma(X \cup Y)$. Put $A = R/I(X) + I(Y)$ and $d = \sigma(X \cup Y) - s - 2$, and let g be the image of x_0 in A.

Note that $d \geq 0$. Furthermore, we put $a = \sigma(X) - 1$, $b = \sigma(X \cup Y) - \sigma(X) - 1$ and $c = \sigma(X \cup Y) - 1$. Then we obtain by Lemma 2.1 and Lemma 2.3 that

$$H(A/(0 : g^d), i) = \begin{cases} H(X, i) & i = 0, 1, \ldots, a-1, \\ \mid X \mid & i = a, \ldots, b-d, \\ H(X, c-1-i-d) & i = b+1-d, \ldots, c-1-d, \end{cases}$$

where $g^0 = 1$. It is easy to show that $a \leq [s/2] \leq b-d$. Hence $H(A/(0 : g^d), i) = H(X, i) = b_i = h_i$ for all $i = 0, 1, \ldots, [s/2]$. Thus since $H(A/(0 : g^d))$ is symmetric and $c - 1 - d = s$, it follows immediately that $H(A/(0 : g^d)) = \underline{H}$. Furthermore by Lemma 2.2 and Lemma 2.4, $A/(0 : g^d)$ is a Gorenstein Artin k-algebra with the WSP. This completes the proof of Theorem.

4. SI-SEQUENCES WITH $h_1 = 3$

In this section, for a given SI-sequence $\underline{h} = (1, 3, h_2, \ldots, h_s)$, we construct more explicitly a Gorenstein Artin k-algebra with h-sequence $\underline{h}$. We use only Lemma 2.1 and Lemma 2.2.

At first we consider the configurations of points in $\mathbf{P}^2$ as follows.

Definition 4.1 (cf. [14, Definition 1.1]). A finite set X of points in $\mathbf{P}^2$ which satisfies the following conditions is called a *k-configuration.*

There exist integers $1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_m$, subsets $X_1, \cdots, X_m$ of X, and distinct lines $L_1, \cdots, L_m$ such that

(i) X is the union of the X_i's,

(ii) $\mid X_i \mid = d_i$ for each $i = 1, \cdots, m$,

(iii) Any point of X_i lies on L_i for each $i = 1, \cdots, m$, and

(iv) $L_i (1 < i \leq m)$ does not contain any point of X_j for all $j < i$.

In this case, the *type* of X is defined by $type(X) = (d_1, \cdots, d_m)$.

In the following remark we recall some results from [8].

Remark 4.2. (1) All k-configurations in $\mathbf{P}^2$ of type $(d_1, \cdots, d_m)$ have the same Hilbert function, which will be denoted by $H^{(d_1, \cdots, d_m)}$. $H^{(d_1, \cdots, d_m)}$ can be obtained as follows: For any $d \geq 1$ let $\tau(d)$ be the infinite sequence $1, 2, \cdots, d, d, \rightarrow$ (continuing with this constant value d). Write down the sequences $\tau(d_1), \cdots, \tau(d_m)$, successively shifted to the left and add:

$$\begin{array}{lcccc}
\tau(d_1): & & 1, 2, \cdots, d_1, \rightarrow & & \\
\tau(d_2): & & 1, 2, 3, \cdots, \quad d_2, \rightarrow & & \\
\cdots & & \cdots \qquad \cdots & & \\
\tau(d_m): & 1, 2, 3, & \cdots & , & d_m, \rightarrow \\
\hline
H^{(d_1, \cdots, d_m)}: & 1, 3, \cdots & & &
\end{array}$$

Hence we obtain

$$H^{(d_1, \cdots, d_m)}(i) = \sum_{j=1}^{m} \tau(d_j)(j + i - m).$$

Therefore we have

$$H^{(d_1, \cdots, d_m)}(i) = d_1 + \cdots + d_m = \mid X \mid \quad \text{for all} \quad i \gg 0$$

and

$$\min\{i \mid H^{(d_1, \cdots, d_m)}(i) = \mid X \mid\} = d_m - 1.$$

Hence we obtain that $\sigma(X) = d_m$.

(2) Let $\underline{b} = (b_0, b_1, b_2, \cdots)$ be a 0-dimensional differentiable O-sequence with $b_1 = 3$. Then there exist integers $1 \leq d_1 < \cdots < d_m$ such that $H^{(d_1, \cdots, d_m)}(i) = b_i$ for all $i = 0, 1, \cdots$. Since the integers $d_1, \cdots, d_m$ for a given 0-dimensional O-sequence $\underline{b}$ are uniquely determined, we call $(d_1, \cdots, d_m)$ the *type* of $\underline{b}$, which will be denoted by *type*($\underline{b}$). The proof of [8,Theorem 4.1] gives a process of calculating the type of $\underline{b}$. Thus if X be a k-configuration in $\mathbf{P}^2$ of type $(d_1, \cdots, d_m)$, then we obtain $H(X, i) = b_i$ for all $i = 0, 1, \cdots$.

The main theorem of this section is the following.

Theorem 4.3. *Let $\underline{h} = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$ be an SI-sequence with $h_1 = 3$, let $\underline{b} = \{b_i\}$ be the sequence associated with $\underline{h}$, let type($\underline{b}$) $= (d_1, \cdots, d_m)$ and put $a = d_m$ and $b = s + 3 - d_m$.*

(1) There exist a k-configuration X of type $(d_1, \cdots, d_m)$ in $\mathbf{P}^2$ and a finite set Y of points in $\mathbf{P}^2$ such that $X \cup Y$ is in a basic configuration of type (a, b).

(2) Moreover the h-sequence of $R/I(X) + I(Y)$ is equal to the given SI-sequence $\underline{h}$.

Proof. (1) It is enough to show $m \leq a$ and $d_m \leq b$. Since $1 \leq d_1 < \cdots < d_m$, we have $m \leq a$. Furthermore we note that $b_{[s/2]} = d_1 + \cdots + d_m$. Hence by Remark 4.2, we have $d_m - 1 \leq [s/2]$. Thus $2(d_m - 1) \leq s$. Therefore $d_m < b$.

(2) We note that $\sigma(X) = d_m$ and $\sigma(X \cup Y) = a + b - 1$. Since $d_m \leq a < b$, we have $2d_m \leq a + b - 1$. Hence we obtain $2\sigma(X) \leq \sigma(X \cup Y)$. Thus by Lemma 2.1, we have that $H(R/I(X) + I(Y), i) = H(X, i) = b_i$ for all $i = 0, 1, \cdots, a + b - 2 - d_m$. It is easy to show that $[s/2] \leq a + b - 2 - d_m$. Hence we obtain $H(R/I(X) + I(Y), i) = b_i = h_i$ for

all $i = 0, 1, \cdots, [s/2]$. Thus since $a + b - 3 = s$, we have $H(R/I(X) + I(Y), i) = h_i$ for all $i = 0, 1, \cdots, s$. This completes the proof.

Example 4.4. When $n = 5, 6$ or $7, \underline{h} = (1, 3, 5, n, 5, 3, 1)$ is an SI-sequence. Hence the sequence $\underline{b}$ associated with $\underline{h}$ is $1, 3, 5, n, n, \rightarrow$. By the construction in [8, Theorem 4.1], we obtain

$$type(\underline{b}) = \begin{cases} (2,3) & \text{if } n = 5 \\ (n-4, 4) & \text{if } n = 6 \text{ or } 7. \end{cases}$$

Hence we put, as in Theorem 3.3

$$a = \begin{cases} 3 & \text{if } n = 5 \\ 4 & \text{if } n = 6 \text{ or } 7 \end{cases} \quad \text{and} \quad b = \begin{cases} 6 & \text{if } n = 5 \\ 5 & \text{if } n = 6 \text{ or } 7 \end{cases}.$$

Thus for $n = 5$, let X be the following set of points in $\mathbf{P}^2$

$$\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ & \circ & \circ \end{array},$$

and let Y be

$$\begin{array}{cccccc} \circ & \circ & \circ & & & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}.$$

For $n = 6$, let X be the following set of points in $\mathbf{P}^2$

$$\begin{array}{cccc} \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & \circ & \circ \end{array},$$

and let Y be

$$\begin{array}{ccccc} \circ & & & & \\ \circ & \circ & \circ & & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}.$$

Furthermore for $n = 7$, let X be the following set of points in $\mathbf{P}^2$

$$\begin{array}{cccc} \circ & \circ & \circ & \circ \\ & \circ & \circ & \circ \end{array},$$

and let Y be

$$\begin{array}{ccccc} \circ & & & & \\ \circ & \circ & & & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}.$$

Then we have, by the construction in Theorem 4.3 (2),

$$F(A, \lambda) = 1 + 3\lambda + 5\lambda^2 + n\lambda^3 + 5\lambda^4 + 3\lambda^5 + \lambda^6, \quad \text{where} \quad A = k[x, y, z]/I(X) + I(Y) \ .$$

Example 4.5. For SI-sequence $h = (1,3,5,\underbrace{6,\cdots,6}_{m \text{ times}},5,3,1)$ $(m \geq 1)$, X and Y follows.

X: 6-points colored with black, Y: other points

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$$

Put $A = k[x_0, x_1, x_2]/I(X) + I(Y)$. Then we can check that $h(A) = h$.

In the rest of this section we give an example of SI-sequences with $h_1 = 4$. See [9, §4] for the details about SI-sequences with $h_1 = 4$.

Example 4.6. For SI-sequence $h = (1,4,\underbrace{10,\cdots,10}_{m \text{ times}},4,1)(m \geq 1)$, X and Y follows.

X : 10-points colored with black, Y : other points

$$\begin{array}{ccc} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \quad H_1 : x_3 - a_{3,1}x_0 = 0 \qquad \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \quad H_4 : x_3 - a_{3,4}x_0 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \bullet \end{array} \quad H_2 : x_3 - a_{3,2}x_0 = 0 \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{array} \quad H_3 : x_3 - a_{3,3}x_0 = 0 \qquad \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \quad H_{m+2} : x_3 - a_{3,m+2}x_0 = 0 \ ,$$

Put $A = k[x_0, x_1, x_2, x_3]/I(X) + I(Y)$ and let g be the image of x_0 in A. Then we check that $h(A/0 : g) = h$.

5. Some remarks on the number of generators of Gorenstein homogeneous ideals of height 3

Let $R = k[x, y, z]$ be the polynomial ring in 3-variables over a field k and let I be a homogeneous ideal of height 3 such that R/I is Gorenstein (such an ideal is called a Gorenstein ideal). Let $\mu(I)$ denote the minimal number of homogeneous generators of I.

J. Watanabe [17] showed that $\mu(I)$ is odd for all Gorenstein homogeneous ideals I of height 3 in R.

In this section we consider the problem of determining permissible values of the number $\mu(I)$ in terms of the Hilbert function of R/I.

First we define some notation.

Definition 5.1. For an SI-sequence $h = (h_0, h_1, \cdots)$ with $h_1 = 3$, we put

$$s(h) = \max\{i \mid h_i \neq 0\}, \qquad \alpha(h) = \min\{i \mid h_i < \binom{2+i}{2}\},$$

$$\nu(h) = \frac{\sum_{i=0}^{s(h)+3} \mid \Delta^3 h_i \mid}{2} - 1, \qquad \overline{\mu}(h) = 2\alpha(h) + 1$$

and $\quad \underline{\mu}(h) = \min\{t \in \mathbf{Z} \mid t \text{ is odd and } t \geq \nu(h)\}.$

In this section we prove the following two theorems.

Theorem 5.2 (The lower and upper bounds). *Let h be an SI-sequence with $h_1 = 3$. Then we have the following.*

(1) *For all Gorenstein homogeneous ideals $I \subset R = k[x, y, z]$ of height 3 such that $H(R/I) = h$, $\underline{\mu}(h) \leq \mu(I)$.*

(2) *For "most" Gorenstein homogeneous ideals $I \subset R = k[x, y, z]$ of height 3 such that $H(R/I) = h$, $\mu(I) \leq \overline{\mu}(h)$.*

Proof. see [11].

Theorem 5.3 (Sharpness of the estimates). *For every odd number t satisfying $\underline{\mu}(h) \leq t \leq \overline{\mu}(h)$, there exist two finite sets X and Y of points in $\mathbf{P}^2$ such that $X \bigcap Y = \phi$, $X \bigcup Y$ is complete intersection, $H(R/I(X) + I(Y)) = h$ and $\mu(I(X) + I(Y)) = t$, i.e., there exists a Gorenstein homogeneous ideal $I \subset R$ of height 3 such that $H(R/I) = h$ and $\mu(I) = t$.*

Proof. see [11].

References

[1] D. Bernstein and A. Iarrobino, *A nonunimodal graded Gorenstein Artin algebra in codimension five*, Comm. algebra **20** (1992), 2323-2336.

[2] M. Boij and D. Laksov, *Nonunimodality of graded Gorenstein Artin algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 1083-1092.

[3] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, *Algebra structures for finite resolutions and some structure theorem for ideals of codimension 3*, Amer. J. Math. **99** (1977), 447-485.

[4] G. Campanella, *Standard bases of perfect homogeneous ideals of height 2*, J. Algebra **101** (1986), 47-60.

[5] ______, *Homogeneous polynomial ideals: standard bases and liaison*, J. Pure Appl. Algebra **64** (1990), 119-130.

[6] E. Davis, A. V. Geramita and F. Orecchia, *Gorenstein algebras and the Cayley-Bacharach theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 593-597.

[7] A. V. Geramita, D. Gregory and L. Roberts, *Monomial ideals and points in projective space*, J. Pure Appl. algebra **40** (1986), 33-62.

[8] A. V. Geramita, P. Maroscia and L. Roberts, *The Hilbert function of a reduced K-algebra*, The Curves Seminar at Queen's Vol. II, Queen's papers in Pure and Applied Mathematics **61** (1982), Kingston, Ontario, Canada.

[9] T. Harima, *Some examples of unimodal Gorenstein sequences*, to appear in J. Pure Appl. Algebra.

[10] ______, *Characterization of Hilbert functions of Gorenstein Artin algebras with the weak Stanley property*, Preprint, 1994.

[11] ______, *Some remarks on the number of generators of Gorenstein homogeneous ideals of height 3*, in preparation.

[12] T. Harima and H. Okuyama, *The conductor of some special points in* $\mathbf{P}^2$, to appear in J. Math. Tokushima Univ..

[13] C. Peskine and L. Szpiro, *Liaison des variétés algébriques. I*, Invent. Math. **26** (1974), 271-302.

[14] L. Roberts and M. Roitman, *On Hilbert functions of reduced and of integral algebras*, J. Pure Appl. Algebra **56** (1989), 85-104.

[15] A. Sodhi, *On the intersection oh hypersurface with a finite points in* $\mathbf{P}^n$, J. Pure Appl. Algebra **74** (1991), 85-94.

[16] R. Stanley, *Hilbert functions of graded algebras*, Adv. in Math. **28** (1978), 57-83.

[17] J. Watanabe, *A note on Gorenstein rings of embedding codimension three*, Nagoya Math. J. **50** (1973) 227-232.

[18] ______, *The Dilworth number of Artinian rings and finite posets with rank function*, "Commutative algebra and Combinatorics", Advanced Studies in Pure Mathematics **11** (1987), 303-312.

DEPARTMENT OF MANAGEMENT AND INFORMATION SCIENCE, SHIKOKU UNIVERSITY, FURUKAWA OHJIN-CHO, TOKUSHIMA 771-11, JAPAN
E-mail address: harima@keiei.shikoku-u.ac.jp

1994/11/10

ON THE GORENSTEINNESS IN GRADED RINGS ASSOCIATED TO CERTAIN IDEALS OF ANALYTIC DEVIATION ONE

by

Shiro Goto*)

Department of Mathematics, Meiji University
School of Science and Technology

Abstract. For a certain class of Cohen-Macaulay analytic deviation one ideals in Gorenstein local rings, a criterion for the associated graded rings to be Gorenstein is given in terms of the generic and global reduction numbers with respect to minimal reductions. Some consequences are discussed.

1. Introduction.

The purpose of this paper is to prove the following, which aims at a generalization of a theorem given by [**GN1**, (1.3)] for ideals of generic complete intersection:

Theorem (1.1). Let I be an analytic deviation one ideal of $\mathrm{ht}_A I = s$ in a Gorenstein local ring A of dim A = d and assume A/I is a Cohen-Macaulay ring. Suppose I contains elements $a_1, a_2, \dots, a_{s+1}$ which generate a reduction J of I and satisfy the conditions : (i) the sequence $a_1, a_2, \dots, a_s$ is A-regular and (ii) K_Q is a reduction of I_Q for all $Q \in \mathrm{Ass}_A A/I$, where $K = (a_1, a_2, \dots, a_s)$. Then the associated graded ring $\mathbf{G}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ of I is a Gorenstein ring with $a(\mathbf{G}(I)) = 1 - s$ if and only if (1) $r_{K_Q}(I_Q) = 1$ for all $Q \in \mathrm{Ass}_A A/I$, (2) $K : I \subseteq I$, (3) $r_J(I) \leq 1$ and (4) depth $A/I^2 \geq d - (s + 1)$.

Here $a(\mathbf{G}(I))$ denotes the a-invariant of $\mathbf{G}(I)$ ([**GW**, (3.1.4)]). Then thanks to the theorems of Trung and Ikeda ([**TI**, 1.1] and [**I**, (3.1)]), as a consequence of Theorem (1.1) we get

---

*) The author is partly supported by the Grants-in-Aid for Scientific Research, The Ministry of Education, Science and Culture, Japan.

This is a joint work with Yukio Nakamura and Koji Nishida. This paper is not in final. The final version will appear elsewhere.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 13H30; Secondary 13H10, 13D45, 14B15.

Corollary (1.2). Let I, J and K be as are in Theorem (1.1) and assume $r_{K_Q}(I_Q) = 1$ for all $Q \in \mathrm{Ass}_A A/I$. Then the Rees algebra $\mathbf{R}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$ of I is a Gorenstein ring if and only if (1) s = 3, (2) $K : I \subseteq I$, (3) $r_J(I) \leq 1$ and (4) depth $A/I^2 \geq d - 4$. When this is the case, $\mathbf{G}(I)$ is a Gorenstein ring and $a(\mathbf{G}(I)) = -2$.

To explain the unspecified notion used in Theorem (1.1), let A be a Noetherian local ring with maximal ideal m and dim A = d. For simplicity, we assume the field A/m is infinite. Let I be an ideal in A and $s = \mathrm{ht}_A I$. Let $\mathbf{R}(I) = A[It] \subseteq A[t]$ (t an indeterminate over A) and $\mathbf{G}(I) = \mathbf{R}(I)/I\mathbf{R}(I)$, which we call respectively the Rees algebra and the associated graded ring of I. Let J be a minimal reduction of I; hence $J \subseteq I$ and $I^{n+1} = JI^n$ for some $n \geq 0$. We put $r_J(I) = \min\{n \geq 0 \mid I^{n+1} = JI^n\}$ and call it the reduction number of I with respect to J. Let $\lambda(I)$ denote the analytic spread of I, that, is $\lambda(I) = \dim (A/m) \otimes_A \mathbf{G}(I)$. Then as is well known, J is minimally generated by $\lambda(I)$-elements ([**NR**]) and one has the inequalities

$$d - \inf_{n>0} \mathrm{depth}\, A/I^n \geq \lambda(I) \geq s$$

([**Bu**]). Following [**HH1**], we put ad (I) = $\lambda(I) - s$ and call it the analytic deviation of I. Note that when A is a Cohen-Macaulay ring, our ideal J always contains a minimal system $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ ($\ell = \lambda(I)$) of generators, satisfying the conditions (i) and (ii) stated in Theorem (1.1) : $a_1, a_2, \ldots, a_s$ form an A-regular sequence and K_Q is a minimal reduction of I_Q for all $Q \in V(I)$ with $\mathrm{ht}_A Q = s$, where $K = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ (cf., e.g., [**AHT**, 7.2]).

The theory of ideals having small analytic deviation started from the researches [**HH1**, **HH2**] of Huckaba and Huneke. In [**HH1**] they explored certain generically complete intersection ideals I with ad (I) = 1 or 2 in a Cohen-Macaulay or Gorenstein local ring A and gave, for these ideals, a criterion for symbolic powers to equal the ordinary ones.**) In addition, they studied in [**HH2**] the Cohen-Macaulay property of $\mathbf{R}(I)$ and showed especially, that $\mathbf{R}(I)$ is a Cohen-Macaulay ring if $r_J(I) \leq 1$. Their research [**HH2**] was succeeded by [**GH**], in which the author and Huckaba gave a certain a-invariant formula for $\mathbf{G}(I)$ in the case where ad (I) = 1. The researches were fairly accelerated after [**GH**]. The author and Nakamura [**GN2**] pursued the investigation in [**GH**] to the case where ad (I) = 2. It was almost the same time when Aberbach, Huneke and Trung [**AHT**] succeeded in giving an excellent a-invariant formula for $\mathbf{G}(I)$ in a more general situation.

) The criterion in [HH1**] is greatly generalized by Nishida [**N**].

The progress [**GN1**, **GN2**, **GN3**, **GNN**, **SUU**, **JU**, **A**, **U**] in the study of the Cohen-Macaulayness and/or Gorensteinness of $\mathbf{R}(I)$ and $\mathbf{G}(I)$ is also quite rapid and by these articles, day by day it has become clearer and clearer what kind of conditions on the ideals I make $\mathbf{R}(I)$ and $\mathbf{G}(I)$ Cohen-Macaulay and/or Gorenstein rings. The class of ideals most of the authors dealt with remains, nevertheless, within generically complete intersections and it seems we still lack satisfactory references that analyze the ideals which are not necessarily generically a complete intersection. Naturally, ideals satisfying the condition $r_{K_Q}(I_Q) \le 1$ for all $Q \in V(I)$ with $\mathrm{ht}_A Q = s$ are located in one of the classes to be explored next to the ideals of generic complete intersection. For this reason our results Theorem (1.1) and Corollary (1.2) might have some interests for further studies of Cohen-Macaulayness and/or Gorensteinness in $\mathbf{R}(I)$ and $\mathbf{G}(I)$.

We close this section with a brief orientation for this paper. We shall prove Theorem (1.1) and Corollary (1.2) in Section 4. The proof of Cohen-Macaulayness in Theorem (1.1) will be separately given in Section 3 in a slightly more general setting. Section 2 is devoted to preliminaries; some a-invariant formula in $\mathbf{G}(I)$ shall be gathered. We will explore in Section 5 a few examples to illustrate our theorems.

Throughout this paper let (A,m) denote a Noetherian local ring of $\dim A = d$. Let I be an ideal in A and $s = \mathrm{ht}_A I$. Let J be a minimal reduction of I. For a finitely generated A-module M we denote by $\mu_A(M)$ the number of elements in a minimal system of generators for M. Let $H^i_m(*)$ $(i \in \mathbf{Z})$ stand for the i-th local cohomology functor of A with respect to m.

2. Preliminaries.

Let A be a Cohen-Macaulay local ring with maximal ideal m and $\dim A = d$. Let I be an analytic deviation one ideal in A. We put $s = \mathrm{ht}_A I$ and $\ell = \lambda(I)$; hence $\ell = s + 1$. Let J be a minimal reduction of I. The purpose of this section is to summarize some auxiliary results, which we later need to prove Theorem (1.1) and Corollary (1.2).

We put $\mathbf{F} = \{Q \in V(I) \mid \mathrm{ht}_A Q = s\}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(I)$ and $\mathbf{G} = \mathbf{G}(I)$. To begin with, we note

Proposition (2.1). Assume the field A/m is infinite. Then the ideal J contains a minimal system $a_1, a_2, \dots, a_\ell$ of generators such that (i) $a_1, a_2, \dots, a_s$ form an A-regular sequence and (ii) K_Q is a minimal reduction of I_Q for all $Q \in \mathbf{F}$, where $K = (a_1, a_2, \dots, a_s)$.

Proof. See, e.g., [**AHT**, 7.2]. //

In the rest of this section we throughout assume our ideal J contains a minimal system $a_1, a_2, \dots, a_\ell$ of generators which satisfies the conditions (i) and (ii) stated in Proposition (2.1). We put $K = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ and $b = a_{s+1}$. Let

$$m = \max\{r_{K_Q}(I_Q) \mid Q \in \mathbf{F}\}.$$

Then as $KI^m : I^{m+1} \not\subset Q$ for any $Q \in \mathbf{F}$, we may choose an element x of $KI^m : I^{m+1}$ so that it forms part of a system, say $x, c_1, c_2, \dots, c_{d-\ell}$ of parameters for the ring A/I. We put $\mathfrak{a} = K + (c_1, c_2, \dots, c_{d-\ell}, x - b)A$ and $\mathfrak{b} = (a_1t, a_2t, \dots, a_st, c_1, c_2, \dots, c_{d-\ell}, x - bt)\mathbf{R} + I\mathbf{R}$. Let $\mathfrak{M} = m\mathbf{R} + \mathbf{R}_+$ denote the unique graded maximal ideal in $\mathbf{R}$. Then we have

Proposition (2.2). $\sqrt{\mathfrak{a}} = m$ and $\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathfrak{M}$.

Proof. Let $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Then as $x \equiv b \mod \mathfrak{p}$, we have $x^{m+2} \equiv xb^{m+1}$ whence $x^{m+2} \in \mathfrak{p}$ because $K \subseteq \mathfrak{p}$ and $xb^{m+1} \in KI^m$ for the choice of x. Therefore $\mathfrak{p} \ni x$, b and $\mathfrak{p} \supseteq J + xA$. Hence $\mathfrak{p} \supseteq I + (x, c_1, c_2, \dots, c_{d-\ell})A$ and so $\mathfrak{p} = m$. Similarly, let $Q \in V(\mathfrak{b})$ and note $x \equiv bt \mod Q$. Then $x^{m+2} \equiv x(bt)^{m+1} \mod Q$. Write $xb^{m+1} = \sum_{i=1}^{s} a_ix_i$ with $x_i \in I^m$. Then as $x(bt)^{m+1} = \sum_{i=1}^{s} a_it \cdot x_it^m$ and $Q \supseteq Kt$, we have $Q \ni x(bt)^{m+1}$ whence $Q \ni x$, bt. Thus $Q \supseteq Jt$ and $Q \supseteq \mathbf{R}_+$. As $Q \cap A \supseteq I + (x, c_1, c_2, \dots, c_{d-\ell})A$, $Q \supseteq m\mathbf{R}$ so that we have $Q = \mathfrak{M}$ as is claimed. //

Corollary (2.3). (1) The sequence $a_1, a_2, \dots, a_s, c_1, c_2, \dots, c_{d-\ell}, x - b$ is A-regular.
(2) $\mathbf{G}$ is a Cohen-Macaulay ring if and only if the sequence $a_1t, a_2t, \dots, a_st, c_1, c_2, \dots, c_{d-\ell}, x - bt$ is $\mathbf{G}$-regular.

Let $s > 0$ and assume a_1t is $\mathbf{G}$-regular. We put $\overline{A} = A/a_1A$, $\overline{I} = I\overline{A}$, $\overline{J} = J\overline{A}$ and $\overline{K} = K\overline{A}$. Then $\overline{A}$ is a Cohen-Macaulay ring of $\dim \overline{A} = d - 1$ and $\mathrm{ht}_{\overline{A}}\overline{I} = s - 1$. We furthermore have the following

Lemma (2.4). (1) $\lambda(\overline{I}) = \ell - 1$, $\overline{J}$ is a minimal reduction of $\overline{I}$ and $r_{\overline{J}}(\overline{I}) = r_J(I)$.

(2) $\overline{K}_Q$ is a minimal reduction of $\overline{I}_Q$ with $r_{\overline{K}_Q}(\overline{I}_Q) = r_{K_Q}(I_Q)$ for all $Q \in V(I)$ with $\mathrm{ht}_AQ = s$. Hence $m = \max\{r_{\overline{K}_Q}(\overline{I}_Q) \mid Q \in V(\overline{I}) \text{ with } \mathrm{ht}_{\overline{A}}Q = s - 1\}$.

(3) Suppose A/I is a Cohen-Macaulay ring. Then depth $\overline{A}/\overline{I}^2 \geq \min\{\text{depth } A/I^2, d - \ell\}$.

(4) $\mathbf{G}(\overline{I})$ is a Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) ring if and only if $\mathbf{G}$ is a Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) ring. When this is the case, one has $a(\mathbf{G}(\overline{I})) = a(\mathbf{G}) + 1$.

Proof. Since $f = a_1 t$ is $\mathbf{G}$-regular, we have by [**UU**, 2.1] an isomorphism $\mathbf{G}/f\mathbf{G} \cong \mathbf{G}(\overline{I})$ of graded A-algebras and the equality $a_1 A \cap I^{n+1} = a_1 I^n$ for all $n \in \mathbf{Z}$. Hence the equality $\lambda(\overline{I}) = \lambda(I) - 1$ $(= \ell - 1)$ and the former part of assertion (4) follow (see [**GW**, (3.1.6)] for the latter part of assertion (4)). Thus $\overline{J}$ is a minimal reduction of $\overline{I}$. If $\overline{I}^{n+1} = \overline{J}\overline{I}^n$ for some $n \geq 0$, then $I^{n+1} \subseteq JI^n + a_1 A$ so that $I^{n+1} = JI^n$ as $a_1 A \cap I^{n+1} = a_1 I^n$. Thus $r_{\overline{J}}(\overline{I}) = r_J(I)$. Let $Q \in \mathbf{F}$ and put $P = Q/a_1 A$ and $k = r_{K_Q}(I_Q)$. Then as $I_Q^{k+1} = K_Q I_Q^k$, we have $\overline{I}_P^{k+1} = \overline{K}_P \overline{I}_P^k$. Hence $\overline{K}_P$ is a minimal reduction of $\overline{I}_P$. Since $a_1 A \cap I^{n+1} = a_1 I^n$ for all $n \in \mathbf{Z}$, with the same reasoning as is in the proof of the equality $r_{\overline{J}}(\overline{I}) = r_J(I)$ we get $r_{\overline{K}_Q}(\overline{I}_Q) = r_{K_Q}(I_Q)$ for all $Q \in \mathbf{F}$. Assertion (3) follows from the exact sequence $0 \to A/I \to A/I^2 \to \overline{A}/\overline{I}^2 \to 0$ via the depth lemma. //

Next, we assume $s = 0$ (hence $\ell = 1$), $d > 1$ and depth $A/I^n \geq 1$ for all $n \geq 1$. Let $\mathbf{F}_1 = \bigcup_{n\geq 1} \text{Ass}_A A/I^n$ and $\mathbf{F}_2 = \{Q \in V(I + xA) \mid \text{ht}_A Q = 1\}$ $(\subseteq \text{Min}_A A/(I + xA))$. Then since the set $\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$ is finite ([**B**]) and $m \notin \mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$, we may choose the element $c = c_1 \in m$ so that $c \notin Q$ for any $Q \in \mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$. Hence c is $\mathbf{G}$-regular. We put $\overline{A} = A/cA$, $\overline{I} = I\overline{A}$ and $\overline{J} = J\overline{A}$. Then $\overline{A}$ is a Cohen-Macaulay ring of dim $\overline{A} = d - 1$ and $\text{ht}_{\overline{A}} \overline{I} = 0$. We furthermore have

Lemma (2.5). (1) $\lambda(\overline{I}) = 1$, $\overline{J}$ is a minimal reduction of $\overline{I}$ and $r_{\overline{J}}(\overline{I}) = r_J(I)$.

(2) Let $\overline{\mathbf{F}} = \{Q \in V(\overline{I}) \mid \text{ht}_{\overline{A}} Q = 0\}$. Then $m = \min\{n \geq 0 \mid \overline{I}_Q^{n+1} = (0) \text{ for all } Q \in \overline{\mathbf{F}}\}$.

(3) depth $\overline{A}/\overline{I}^2 = \text{depth } A/I^2 - 1$.

(4) $\overline{A}/\overline{I}$ is a Cohen-Macaulay ring if and only if A/I is a Cohen-Macaulay ring.

(5) $\mathbf{G}(\overline{I})$ is a Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) ring if and only if $\mathbf{G}$ is a Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) ring. When this is the case, one has $a(\mathbf{G}(\overline{I})) = a(\mathbf{G})$.

Proof. By [**VV**, 2.1 and 2.7]) we get an isomorphism $\mathbf{G}/c\mathbf{G} \cong \mathbf{G}(\overline{I})$ of graded A-algebras and the equality $cA \cap I^{n+1} = cI^{n+1}$ for all $n \in \mathbf{Z}$. Hence $\lambda(\overline{I}) = \lambda(I) = 1$ and assertion (5) follows (see also [**GW**, (3.1.6)]). Thus $\overline{J}$ is a minimal reduction of $\overline{I}$. If $\overline{I}^{n+1} = \overline{J}\overline{I}^{\,n}$ for some $n \geq 0$, then $I^{n+1} \subseteq JI^n + cA$ so that $I^{n+1} = JI^n$ by Nakayama's lemma, because $cA \cap I^{n+1} = cI^{n+1}$. Hence $r_{\overline{J}}(\overline{I}) = r_J(I)$. Let $n = \min\{n \geq 0 \mid \overline{I}_Q^{\,n+1} = (0)$ for all $Q \in \overline{\mathbf{F}}\}$. Let $Q \in \overline{\mathbf{F}}$ and write $Q = P/cA$ with $P \in V(I + cA)$. Then as $\mathrm{ht}_A P = 1$ and $c \in P$, we have $P \notin \mathbf{F}_2$ so that $x \notin P$. Hence $I_P^{\,m+1} = (0)$ (recall $xI^{m+1} = (0)$ by the choice of x) and we get $\overline{I}_Q^{\,m+1} = (0)$. Thus $m \geq n$. Conversely, let $\mathfrak{p} \in \mathbf{F}$ and take $P \in V(\mathfrak{p} + cA)$ with $\mathrm{ht}_A P = 1$. Let $Q = P/cA$. Then $\overline{I}_Q^{\,n+1} = (0)$ as $Q \in \overline{\mathbf{F}}$, whence $I_P^{\,n+1} \subseteq cA_P$ so that we have $I_P^{\,n+1} = cI_P^{\,n+1}$ (recall c is A/I^{n+1}-regular). Thus $I_P^{\,n+1} = (0)$ and $I_{\mathfrak{p}}^{\,n+1} = (0)$ as well. Hence $m = n$ which proves assertion (2). Assertions (3) and (4) are obvious. //

Let $H^i_{\mathfrak{M}}(*)$ $(i \in \mathbf{Z})$ stand for the i-th local cohomology functor of $\mathbf{R}$ with respect to $\mathfrak{M}$. For each finitely generated graded $\mathbf{R}$-module E, we denote by $[H^i_{\mathfrak{M}}(E)]_n$ $(n \in \mathbf{Z})$ the homogeneous component of degree n in the graded $\mathbf{R}$-module $H^i_{\mathfrak{M}}(E)$. Let

$$a_i(E) = \max\{n \in \mathbf{Z} \mid [H^i_{\mathfrak{M}}(E)]_n \neq (0)\}$$

and call it the i-th a-invariant of E. When $i = \dim_{\mathbf{R}} E$, we denote $a_i(E)$ simply by $a(E)$.

Among the next results (2.6) assertion (4) is known by [**AHT**, 4.8] in a much more general setting. But because it plays a quite important role in this paper, let us include a direct proof of it for completeness.

Proposition (2.6). Assume $d = 1$. Then
(1) $a_0(\mathbf{G}) \le \max\{m, r-2\}$.
(2) $r_J(I) \le \max\{m+1, a(\mathbf{G})+1\}$.
(3) $0 \le a(\mathbf{G}) \le \max\{m, r_J(I)-1\}$.
(4) $a(\mathbf{G}) = \max\{m, r_J(I)-1\}$ if $\mathbf{G}$ is Cohen-Macaulay.

Proof. Note $\ell = 1$ and $s = 0$. Let $r = r_J(I)$. We put $f = bt$ and $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/f\mathbf{G}$. Then since $[\overline{\mathbf{G}}]_i = I^i/(JI^{i-1} + I^{i+1})$, $[\overline{\mathbf{G}}]_r \ne (0)$ and $[\overline{\mathbf{G}}]_i = (0)$ for all $i \ge r+1$. Hence by **[GH**, 2.2] , for all $p, i \in \mathbf{Z}$ we get isomorphisms $[H^p_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathbf{G}})]_i \cong H^p_{\mathfrak{m}}([\overline{\mathbf{G}}]_i)$ of A-modules. Let $i \ge m+1$. Then $A_Q \otimes_A I^i/I^{i+1} = (0)$ for all $Q \in \mathbf{F}$. Hence the length $length_A([\overline{\mathbf{G}}]_i)$ is finite, as so is $length_A(I^i/I^{i+1})$. So we get $[H^0_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathbf{G}})]_i = [\overline{\mathbf{G}}]_i$ and $[H^1_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathbf{G}})]_i = (0)$ for $i \ge m+1$. Hence $a_0(\overline{\mathbf{G}}) \le r$ and $a_0(\overline{\mathbf{G}}) = r$ when $r \ge m+1$. Similarly, as $[H^1_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathbf{G}})]_0 \cong H^1_{\mathfrak{m}}([\overline{\mathbf{G}}]_0) \cong H^1_{\mathfrak{m}}(A/I) \ne (0)$, we have $0 \le a_1(\overline{\mathbf{G}}) \le \min\{m, r\}$.

Let $L = (0) :_{\mathbf{G}} f$. Apply the functors $H^i_{\mathfrak{M}}(*)$ $(i = 0,1)$ to the exact sequences

$$0 \to L(-1) \to \mathbf{G}(-1) \to f\mathbf{G} \to 0 \text{ and } 0 \to f\mathbf{G} \to \mathbf{G} \to \overline{\mathbf{G}} \to 0$$

and consider the resulting long exact sequences

$$(\#)\ 0 \to H^0_{\mathfrak{M}}(L)(-1) \xrightarrow{\alpha_0} H^0_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G})(-1) \xrightarrow{\beta_0} H^0_{\mathfrak{M}}(f\mathbf{G}) \xrightarrow{\gamma} H^1_{\mathfrak{M}}(L)(-1) \xrightarrow{\alpha_1} H^1_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G})(-1) \xrightarrow{\beta_1} H^1_{\mathfrak{M}}(f\mathbf{G}) \to 0$$

and

$$(\#\#)\quad 0 \to H^0_{\mathfrak{M}}(f\mathbf{G}) \xrightarrow{\delta_0} H^0_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G}) \xrightarrow{\varepsilon_0} H^0_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathbf{G}}) \xrightarrow{\phi} H^1_{\mathfrak{M}}(f\mathbf{G}) \xrightarrow{\delta_1} H^1_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G}) \xrightarrow{\varepsilon_1} H^1_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathbf{G}}) \to 0$$

of local cohomology. We note

Claim. (i) $[(0) : b] \cap I^{m+1} = (0)$.
(ii) $L_i = (0)$ for all $i \ge \max\{m+1, r-1\}$.

Proof of Claim. (i) Let $Q \in \operatorname{Ass} A$. If $b \notin Q$, then obviously $[(0) : b]_Q = (0)$. Let $b \in Q$. Then $Q \in \mathbf{F}$ whence $I_Q^{m+1} = (0)$. Thus $([(0) : b] \cap I^{m+1})_Q = (0)$ for all $Q \in \operatorname{Ass} A$ whence $[(0) : b] \cap I^{m+1} = (0)$.
(ii) Let $y \in I^i$ with $i \ge \max\{m+1, r-1\}$ and assume $bt \cdot yt^i \equiv 0$ in $\mathbf{G}$. Then as $by \in I^{i+2} = bI^{i+1}$ (recall $i+1 \ge r$), we may write $by = bz$ with $z \in I^{i+1}$. Then since

$y - z \in [(0) : b] \cap I^i$ and $i \geq m + 1$, $y = z \in I^{i+1}$ by (1). Thus $L_i = (0)$ for $i \geq \max\{m + 1, r - 1\}$. This completes the proof of Claim.

Let us now prove assertions (1), (2) and (3). Thanks to the composite homomorphism $\delta_0 \circ \beta_0$, by Claim (ii) we get an embedding $[H^0_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G})]_i \subseteq [H^0_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G})]_{i+1}$ for $i \geq \max\{m + 1, r - 1\}$. Because $[H^0_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G})]_i = (0)$ for $i >> 0$, we get $a_0(\mathbf{G}) \leq \max\{m, r - 2\}$ whence assertion (1). We put $a = a(\mathbf{G})$. Assume $r \geq \max\{m, a\} + 2$. Then as $r \geq m + 2$, we get $a_0(\overline{\mathbf{G}}) = r$ while considering the homomorphisms ε_0 and ϕ in the exact sequence (##), we have $r = a_0(\overline{\mathbf{G}}) \leq \max\{a_0(\mathbf{G}), a_1(f\mathbf{G})\}$. Note $a_1(f\mathbf{G}) \leq a + 1 \leq r - 1$ (look at the homomorphism β_1 in the exact sequence (#)). Then as $a_0(\mathbf{G}) \leq r - 2$ by assertion (1) (note $r - 2 \geq m$) and as $a_1(f\mathbf{G}) \leq r - 1$, we have $r \leq \max\{r - 2, r - 1\}$ which is absurd. Thus $r \leq \max\{m + 1, a + 1\}$. Because $a \leq \max\{a_1(f\mathbf{G}) - 1, a_1(L)\}$ (this follows from the homomorphisms α_1 and β_1 in (#)) and because $a_1(L) \leq \max\{m, r - 2\}$ by Claim (ii) and [**GH**, 2.2], we get $a \leq \max\{a_1(f\mathbf{G}) - 1, m, r - 2\}$. Consequently, if $a_1(f\mathbf{G}) - 1 \geq \max\{m, r - 2\}$, then $a_1(f\mathbf{G}) \geq a + 1$, whence we have $\delta_1([H^1_{\mathfrak{M}}(f\mathbf{G})]_b) = (0)$ (here $b = a_1(f\mathbf{G})$) in the exact sequence (##). Therefore by the homomorphism ϕ in (##) we find $a_1(f\mathbf{G}) \leq a_0(\overline{\mathbf{G}}) \leq r$ so that $a \leq r - 1$. Thus $a \leq \max\{m, r - 1\}$ in any case. As $a_1(\overline{\mathbf{G}}) \geq 0$ and as $a_1(\overline{\mathbf{G}}) \leq a$ (this follows from the homomorphism ε_1 in (##)), we have $a \geq 0$ which completes the proof of assertions (2) and (3).

Next, consider assertion (4). We put $\mathbf{U} = \sum_{i \geq m+1} \mathbf{G}_i$. Apply the functor $H^1_{\mathfrak{M}}(*)$ to the sequence $0 \to \mathbf{U} \to \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{U} \to 0$ and look at the induced epimorphism $H^1_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G}) \to H^1_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G}/\mathbf{U}) \to 0$. Note $[\mathbf{G}/\mathbf{U}]_i = (0)$ if $i \geq m + 1$ and $[\mathbf{G}/\mathbf{U}]_i = I^i/I^{i+1}$ if $i \leq m$. Then by [**GH**, 2.2] we get for all $i \in \mathbf{Z}$, isomorphisms $[H^1_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G}/\mathbf{U})]_i \cong H^1_{m}([(\mathbf{G}/\mathbf{U})]_i)$ of A-modules. We will show $a \geq m$. Assume $a < m$. Then as $[H^1_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G})]_{a+1} = (0)$, by the above epimorphism we have $[H^1_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G}/\mathbf{U})]_{a+1} = (0)$ whence $H^1_{m}(I^{a+1}/I^{a+2}) = (0)$ as $a + 1 \leq m$. Therefore the A-module I^{a+1}/I^{a+2} has finite length so that $I_Q^{a+1} = (0)$ for all $Q \in \mathbf{F}$. Hence $m \leq a$, which is absurd. Let us check $a = \max\{m, r - 1\}$. Assume $a < \max\{m, r - 1\}$. Note $m < r - 1$ as $m \leq a$. Hence $a < r - 1$ and $a_0(\overline{\mathbf{G}}) = r$ as $m + 2 \leq r$. Consider the exact sequence (**). Then as $H^0_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G}) = (0)$ (recall $\mathbf{G}$ is a Cohen-Macaulay ring), by the monomorphism ϕ we get $a_1(f\mathbf{G}) \geq r$. Hence by the epimorphism β_1 in the sequence (*) we find $a + 1 \geq r$, which is absurd. Thus $a = \max\{m, r - 1\}$, which completes the proof of (2.6). //

Corollary (2.7) ([AHT, 4.8]). Suppose $\mathbf{G}$ is a Cohen-Macaulay ring. Then $a(\mathbf{G}) = \max\{m - s, r_J(I) - \ell\}$.

Proof. By (2.3), (2.4) and (2.5) we may assume $d = 1$. Hence from (2.6) the equality follows. //

Lemma (2.8). Suppose $\mathbf{G}$ is a Gorenstein ring. Then $a(\mathbf{G}) = r_{K_Q}(I_Q) - s$ for all $Q \in \mathbf{F}$ and hence $a(\mathbf{G}) = m - s$.

Proof. As the sequence $a_1t, a_2t, \ldots, a_st$ is $\mathbf{G}$-regular ((2.3) (2)), by (2.4) (4) the ring $\mathbf{G}(I/K)$ is Gorenstein and $a(\mathbf{G}(I/K)) = a(\mathbf{G}) + s$. Let $n = a(\mathbf{G}) + s$ and let $\mathbf{K}_{\mathbf{G}(I/K)}$ denote the graded canonical module of $\mathbf{G}(I/K)$. Then $\mathbf{K}_{\mathbf{G}(I/K)} \cong \mathbf{G}(I/K)(n)$ as graded $\mathbf{G}(I/K)$-modules (cf. [I, (1.9)]). Let $Q \in \mathbf{F}$. Then since $\mathbf{K}_{\mathbf{G}(I_Q/K_Q)} = [\mathbf{K}_{\mathbf{G}(I/K)}]_Q$ and $\mathbf{G}(I_Q/K_Q)(n) = [\mathbf{G}(I/K)(n)]_Q$, $\mathbf{K}_{\mathbf{G}(I_Q/K_Q)} \cong \mathbf{G}(I_Q/K_Q)(n)$; hence $n = a(\mathbf{G}(I_Q/K_Q))$. On the other hand, $a(\mathbf{G}(I_Q/K_Q)) = \max\{j \in \mathbf{Z} \mid I_Q^{\,j} \not\subset K_Q\}$ which equals $r_{K_Q}(I_Q)$ (recall $K_Q \cap I_Q^{\,j+1} = K_Q I_Q^{\,j}$ for all $j \in \mathbf{Z}$). Thus $a(\mathbf{G}) + s = r_{K_Q}(I_Q)$ for all $Q \in \mathbf{F}$. //

The next two results are direct consequences of (2.7) and (2.8).

Proposition (2.9). Suppose $\mathbf{G}$ is a Gorenstein ring. Then $r_J(I) \leq a(\mathbf{G}) + \ell = m + 1$.

Corollary (2.10). Suppose $\mathbf{G}$ is a Gorenstein ring. Then $r_J(I) \leq 2$ if $r_{K_Q}(I_Q) \leq 1$ for some $Q \in \mathbf{F}$.

3. Cohen-Macaulayness in G(I).

Let A be a Cohen-Macaulay local ring with maximal ideal m and $\dim A = d$. Let I be an analytic deviation one ideal in A. Let $s = \mathrm{ht}_A I$ and $\ell = \lambda(I)$ $(= s + 1)$. Let J be a minimal reduction of I. We assume J contains a minimal system $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ of generators such that $a_1, a_2, \ldots, a_s$ form an A-regular sequence and K_Q is a minimal reduction of I_Q for all $Q \in \mathbf{F} := \{Q \in V(I) \mid \mathrm{ht}_A Q = s\}$, where $K = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$.

The purpose of this section is to prove the following (3.1). It is already known by [**GN1**, (1.5)] in the case where $r_{K_Q}(I_Q) = 0$ for all $Q \in \mathbf{F}$. The assertions on the invariant $a(\mathbf{G})$ are direct consequences of [**GH**, 2.4] and (2.7).

Theorem (3.1). Assume A/I is a Cohen-Macaulay ring and $r_{K_Q}(I_Q) \le 1$ for all $Q \in \mathbf{F}$. Suppose $r_J(I) \le 2$ and depth $A/I^2 \ge d - \ell$. Then $\mathbf{G}(I)$ is a Cohen-Macaulay ring and $a(\mathbf{G}) = \max\{-s, r_J(I) - \ell\}$ if $I_Q = K_Q$ for all $Q \in \mathbf{F}$ and $a(\mathbf{G}) = 1 - s$ otherwise.

Let us prove the Cohen-Macaulayness in $\mathbf{G}(I)$. In what follows, we throughout assume A/I is a Cohen-Macaulay ring and $r_{K_Q}(I_Q) \le 1$ for all $Q \in \mathbf{F}$. Let $\mathbf{R} = \mathbf{R}(I)$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}(I)$ and $b = a_{s+1}$. We begin with the following

Lemma (3.2). $[K : b] \cap I^2 = KI$.

Proof. Look at the exact sequence $0 \to K/KI \to A/KI \to A/K \to 0$ and note $K/KI = A/I \otimes_{A/K} K/K^2$ is a free A/I-module. Then A/KI is a Cohen-Macaulay ring of $\dim A/KI = d - s$. Assume $[K : b] \cap I^2 \neq KI$ and take $Q \in \mathrm{Ass}_A([K : b] \cap I^2)/KI$. Then as $Q \in \mathrm{Ass}_A A/KI$, $\mathrm{ht}_A Q = s$. If $I \not\subseteq Q$, then $b \notin Q$ as $K \subseteq Q$, so that $([K : b] \cap I^2)_Q = K_Q = (KI)_Q$. Thus $I \subseteq Q$. Hence ${I_Q}^2 = K_Q I_Q$ as $Q \in \mathbf{F}$ and so $([K : b] \cap I^2)_Q \subseteq (KI)_Q$, which is absurd.//

Proposition (3.3). Suppose $r_J(I) \le 2$. Then the sequence $a_1t, a_2t, \ldots, a_st$ is $\mathbf{G}$-regular.

Proof. By [**UU**, 2.7] it suffices to show $K \cap I^{n+1} = KI^n$ for all $n \in \mathbf{Z}$. As $K \cap I^2 \subseteq [K : b] \cap I^2$, by (3.2) $K \cap I^2 = KI$. Assume $n \ge 2$ and our assertion is true for $n - 1$. Then as $I^{n+1} = JI^n$ (recall $r_J(I) \le 2$), we get $K \cap I^{n+1} = KI^n + b([K : b] \cap I^n)$. On the other hand, as $n \ge 2$, $[K : b] \cap I^n \subseteq [K : b] \cap I^2 = KI$ from which we get $[K : b] \cap I^n = KI^{n-1}$ by the hypothesis of induction on n. Thus $K \cap I^{n+1} = KI^n$. //

Lemma (3.4). Suppose $s = 0$ and $r_J(I) \le 2$. Then depth $A/I^2 \ge d - 1$ for all $n \ge 1$ if depth $A/I^2 \ge d - 1$.

Proof. We may assume $n \ge 3$ and our assertion is true for $n - 1$. Note $I^n \cong I^{n-1}$, since $I^n = bI^{n-1}$ and $[(0) : b] \cap I^{n-1} = (0)$ by (3.2). Then as depth $A/I^{n-1} \ge d - 1$, by the exact sequences $0 \to I^{n-1} \to A \to A/I^{n-1} \to 0$ and $0 \to I^{n-1} \to A \to A/I^n \to 0$ we get depth $A/I^n \ge d - 1$ (use the depth lemma). //

Proof of Theorem (3.1).

Passing to the ring A/K, by (3.3) and (2.4) we may assume $s = 0$. Also, by (3.4) and (2.5) we may assume $d = 1$. Let $\mathfrak{M} = m\mathbf{R} + \mathbf{R}_+$. Then as $r_{K_Q}(I_Q) \le 1$ for all $Q \in \mathbf{F}$ and $r_J(I) \le 2$, by (2.6) (1) we get $a_0(\mathbf{G}) \le 1$. Hence $H^0_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G}) = [H^0_{\mathfrak{M}}(\mathbf{G})]_1$ as depth $A/I > 0$. Let $f \in \mathbf{G}_1$ with $\mathfrak{M}f = (0)$. Let $x \in (0) : I^2$ be A/I-regular (recall $r_{K_Q}(I_Q) \le 1$ for all $Q \in \mathbf{F}$). Write $f \equiv yt \bmod I\mathbf{R}$ with $y \in I$. Then as $(x - bt)f = 0$ in $\mathbf{G}$, $xy \in I^2$ and $by \in I^3$. Let $by = bz$ with $z \in I^2$ (note $I^3 = bI^2$). Then $y - z \in (0) : b$ while $x(y - z) = xy \in I^2$. Hence $(x - b)(y - z) \in [(0) : b] \cap I^2$ and $(x - b)(y - z) = 0$ as $[(0) : b] \cap I^2 = (0)$ by (3.2). Thus $y = z$ since by (2.3) (1) $y - b$ is A-regular. Hence $f = 0$ and $\mathbf{G}$ is a Cohen-Macaulay ring. //

Corollary (3.5). Suppose A/I is a Cohen-Macaulay ring and $r_{K_Q}(I_Q) \le 1$ for all $Q \in \mathbf{F}$. Assume $r_J(I) \le 2$ and depth $A/I^2 \ge d - \ell$. Then $\mathbf{R}(I)$ is a Cohen-Macaulay ring if $s \ge 2$.

Proof. Thanks to **[TI**, 1.1**]**, we have the assertion because $\mathbf{G}$ is by (3.1) Cohen-Macaulay and $a(\mathbf{G}) \le 1 - s$. //

Remark (3.6). When $s = 1$, the Rees algebra $\mathbf{R}(I)$ of I is not necessarily Cohen-Macaulay. For instance, let $A = B/(X^2Y)$ where $B = k[[X, Y, Z]]$ denotes the formal power series ring in three variables X, Y, Z over an infinite field k. Let x and z be the reduction of X and Z mod (X^2Y) and put $I = (x, z)$. Then $\dim A = \lambda(I) = 2$ and $\mathrm{ht}_A I = 1$. The ideal I is a minimal reduction for itself and the elements $a_1 = z$ and $a_2 = x$ satisfy the conditions (i) and (ii) stated in Theorem (1.1). As $r_{K_Q}(I_Q) = 1$ for $Q \in \mathrm{Ass}_A A/I$, $\mathbf{G}(I)$ is by (3.1) a Cohen-Macaulay ring of $a(\mathbf{G}(I)) = 0$. Hence by **[TI**, 1.1**]** $\mathbf{R}(I)$ cannot be Cohen-Macaulay.

4. Proof of Theorem (1.1) and Corollary (1.2).

Let I be an analytic deviation one ideal in a d-dimensional Gorenstein local ring A with maximal ideal m. Let $s = \mathrm{ht}_A I$ and $\ell = \lambda(I)$ $(= s + 1)$. Suppose A/I is a Cohen-Macaulay ring. Let J be a minimal reduction of I. Assume J contains a minimal system $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ of generators, satisfying the condition : $a_1, a_2, \ldots, a_s$ form an A-regular sequence and K_Q is a minimal reduction of I_Q for all $Q \in \mathbf{F} := \mathrm{Ass}_A A/I$, where $K = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$. We put $b = a_{s+1}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(I)$ and $\mathbf{G} = \mathbf{G}(I)$.

The purpose of this section is to prove Theorem (1.1) and Corollary (1.2). We firstly prove Theorem (1.1). The proof of Corollary (1.2) shall be given at the end of this section. We begin with the following

Proposition (4.1). Suppose $\mathbf{G}$ is a Gorenstein ring and $a(\mathbf{G}) = 1 - s$. Then
(1) $r_{K_Q}(I_Q) = 1$ for all $Q \in \mathbf{F}$.
(2) $r_J(I) \leq 2$.
(3) depth $A/I^n \geq d - \ell$ for all $n \geq 1$.

Proof. As $\mathrm{grade}_{\mathbf{G}} m\mathbf{G} = \inf_{n>0} \mathrm{depth}\, A/I^n$ (**[Bu]**) and $\mathrm{grade}_{\mathbf{G}} m\mathbf{G} = \mathrm{ht}_{\mathbf{G}} m\mathbf{G} = d - \ell$ (note $\mathbf{G}$ is Cohen-Macaulay), we get assertion (3). Assertions (1) and (2) follow from (2.8) and (2.10). //

To prove Theorem (1.1) we may assume by (4.1) $r_{K_Q}(I_Q) = 1$ for all $Q \in \mathbf{F}$, $r_J(I) \leq 2$ and depth $A/I^2 \geq d - \ell$. Then $\mathbf{G}$ is a Cohen-Macaulay ring by (3.1) whence the sequence $a_1t, a_2t, \ldots, a_2t$ is $\mathbf{G}$-regular by (2.3). Thus passing to the ring A/K, by (2.4) we may assume $s = 0$. We put $\mathfrak{a} = (0) : I$.

Proposition (4.2). (1) $\mathfrak{a} \cap I^2 = (0)$.
(2) The following conditions are equivalent.
(a) $\mathfrak{a} \subseteq I$.
(b) $(0) : I_Q = I_Q$ for all $Q \in \mathbf{F}$.
(c) $\mathbf{G}(I_Q)$ is a Gorenstein ring for all $Q \in \mathbf{F}$.
When this is the case, one has $a(\mathbf{G}(I_Q)) = 1$ for all $Q \in \mathbf{F}$.

Proof. (1) Note $[(0) : b] \cap I^2 = (0)$ by (3.2).
(2) (a) $\Rightarrow$ (b) Let $Q \in \mathbf{F}$. Then $\mathfrak{a}_Q = (0) : I_Q \subseteq I_Q$ while $(0) : I_Q \supseteq I_Q$ as $I_Q{}^2 = (0)$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Note $I = \bigcap_{Q \in \mathbf{F}} (I_Q \cap A)$.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Let $Q \in \mathbf{F}$. Then as $I_Q{}^2 = (0)$ but $I_Q \neq (0)$, $\mathbf{G}(I_Q) = A_Q/I_Q \oplus I_Q$ is the idealization of the A_Q/I_Q-module I_Q. Hence by **[R]** $\mathbf{G}(I_Q)$ is Gorenstein if and only if I_Q is the canonical module $\mathbf{K}_{A_Q/I_Q}$ of A_Q/I_Q. Recall $\mathbf{K}_{A_Q/I_Q} \cong (0) : I_Q$ (cf. **[HK**, 5.14**]**) and we get the implication (b) $\Rightarrow$ (c). To see the reverse one, note $\mathit{length}_{A_Q}((0) : I_Q) = \mathit{length}_{A_Q}(I_Q)$ as $(0) : I_Q \cong I_Q$. Then $(0) : I_Q = I_Q$ as $(0) : I_Q \supseteq I_Q$. The last assertion follows from the fact that $I_Q \neq (0)$. //

If $\mathbf{G}$ is Gorenstein, $a(\mathbf{G}) = r_{K_Q}(I_Q)$ for all $Q \in \mathbf{F}$ by (2.8). Hence we get

Corollary (4.3). Assume $\mathbf{G}$ is a Gorenstein ring. Then $\mathfrak{a} \subseteq I$ and $a(\mathbf{G}) = 1$.

We may assume $\mathfrak{a} \subseteq I$ by (4.3). For a while, let us assume $d > 1$ and put $E = I/\mathfrak{a}$. Let $x \in (0) : I^2$ be A/I-regular. Then $xE = (0)$ as $xI \subseteq \mathfrak{a}$. Let $\mathbf{F}_3 = \{Q \in V(I) \cap \mathrm{Supp}_A E \mid \mathrm{ht}_A Q = 1\}$. Then $\mathbf{F}_3$ is finite as $\mathbf{F}_3 \subseteq \mathrm{Min}_A A/(I + xA)$. Hence as $\mathfrak{m} \notin \mathbf{F}_3$, we may choose the element $c \in \mathfrak{m}$ discussed in Lemma (2.5) so that $c \notin Q$ for any $Q \in \mathbf{F}_3$. Let $\overline{A}$ and $\overline{I}$ be as are in (2.5). Then $(0) : \overline{I}_P = \overline{I}_P$ for all $P \in \mathrm{Ass}_{\overline{A}} \overline{A}/\overline{I}$. In fact, let $P \in \mathrm{Ass}_{\overline{A}} \overline{A}/\overline{I}$ and write $P = Q/cA$ with $Q \in V(cA)$. Then $Q \supseteq I + cA$ and $\mathrm{ht}_A Q = 1$. Hence $Q \notin \mathbf{F}_3$ and so $E_Q = (0)$. Therefore $I_Q \cong \mathbf{K}_{A_Q/I_Q}$ as $I_Q = (0) : I_Q$ ([**HK**, 5.14]). Thus $I_Q/cI_Q \cong \mathbf{K}_{\overline{A}_P/\overline{I}_P}$ by [**HK**, 6.3], because c is A/I-regular. Hence $\overline{I}_P \cong \mathbf{K}_{\overline{A}_P/\overline{I}_P}$ as $\overline{I}_P \cong I_Q/cI_Q$. Therefore as $\overline{A}_P$ is Gorenstein and $\overline{I}_P^{\,2} = (0)$ by (2.5) (2), with the same reasoning as is in the proof of (4.2) (2) we get $(0) : \overline{I}_P = \overline{I}_P$ for all $P \in \mathrm{Ass}_{\overline{A}} \overline{A}/\overline{I}$. Hence as $\overline{I}_P^{\,2} = (0)$ but $\overline{I}_P \neq (0)$ for any $P \in \mathrm{Ass}_{\overline{A}} \overline{A}/\overline{I}$, we have $(0) : \overline{I} \subseteq \overline{I}$ by (4.2) (2). This observation enables us by (2.5) to reduce the problem to the case where $d = 1$.

Now we carefully look at the case $d = 1$. As $a(\mathbf{G}) = 1$ once $\mathbf{G}$ is Gorenstein (see (4.3)), it suffices to show that $\mathbf{G}$ is a Gorenstein ring if and only if $r_J(I) \leq 1$. Let $B = A/\mathfrak{a}$ and $\mathbf{T} = \mathbf{G}(IB)$. Then B is a Cohen-Macaulay ring of $\dim B = 1$ ([**PS**]). Let $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{T}$ be the canonical epimorphism and $L = \mathrm{Ker}\, \varphi$. Then $L = L_1 \cong \mathfrak{a}$ as $I \supseteq \mathfrak{a}$ and $\mathfrak{a} \cap I^2 = (0)$. We note

Proposition (4.4). $\mathbf{T}$ is a Cohen-Macaulay ring and $a(\mathbf{T}) = \max\{0, r_{JB}(IB) - 1\}$.

Proof. Note $\lambda(IB) \neq 0$ as IB is not nilpotent. We have $\mathrm{ht}_B IB = 0$ and $\lambda(IB) = \dim B = 1$. JB is a minimal reduction of IB with $r_{JB}(IB) \leq r_J(I) \leq 2$ and by (4.2) (2) IB is generically a complete intersection. Thus by (3.1) $\mathbf{T}$ is a Cohen-Macaulay ring with $a(\mathbf{T}) = \max\{0, r_{JB}(IB) - 1\}$. //

Let $\mathbf{K_G}$ denote the graded canonical module of $\mathbf{G}$. We identify $\mathbf{G}/\mathbf{G}_+ = A/I$. Then since $L_1 \cong \mathfrak{a}$ and $\mathfrak{a} = (0) : I$, we get an isomorphism $L \cong (\mathbf{K}_{A/I})(-1)$ ([**HK**, 5.14]). Hence $L \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(A/I,\mathbf{K_G})(-1)$ as $\mathbf{K}_{A/I} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(A/I,\mathbf{K_G})$. Thus $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(L,\mathbf{K_G}) \cong (A/I)(1)$ by [**HK**, 6.1] while $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{G}}(\mathbf{T},\mathbf{K_G}) = (0)$ as $\mathbf{T}$ is Cohen-Macaulay and $\dim \mathbf{T} = \dim \mathbf{G}$. Hence, taking the $\mathbf{K_G}$-dual of the sequence $0 \to L \to \mathbf{G} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{T} \to 0$, we get the exact sequence

(4.5) $0 \to \mathbf{K_T} \to \mathbf{K_G} \xrightarrow{\tau} (A/I)(1) \to 0$

of graded $\mathbf{G}$-modules.

Assume now $\mathbf{G}$ is Gorenstein. Then as $\mathbf{K_G} \cong \mathbf{G}(1)$ ([**I**, 1.9]), looking at the homogeneous components of degree -1 in (4.5), we get $[\mathbf{K_T}]_{-1} = (0)$. Hence $a(\mathbf{T}) \le 0$ (cf. [**GNi**, Part I (2.15)]) so that $r_{JB}(IB) \le 1$ by (4.4). Thus $I^2 \subseteq JI + \mathfrak{a}$. As $\mathfrak{a} \cap I^2 = (0)$ by (4.2) (1), $I^2 = JI$ whence $r_J(I) \le 1$.

Conversely, let $r_J(I) \le 1$. Then $a(\mathbf{T}) = 0$ by (4.4) (note $r_{JB}(IB) \le 1$). Hence $[\mathbf{K_G}]_{-1} \cong A/I$ by (4.5) as $[\mathbf{K_T}]_{-1} = (0)$. Take an element ξ of $[\mathbf{K_G}]_{-1}$ so that $[\mathbf{K_G}]_{-1} = A\xi$ and let $\alpha : \mathbf{G}(1) \to \mathbf{K_G}$ be the homomorphism defined by $\alpha(1) = \xi$. We will show α is an isomorphism. Recall $\mathbf{K_T} = \mathbf{T}\cdot[\mathbf{K_T}]_0$ (cf. [**GN3**, (2.2)]) and we get by [**HSU**, (2.4)] an isomorphism $\mathbf{K_T} \cong \mathrm{gr}_I(\mathbf{K}_B)$ of graded $\mathbf{T}$-modules, where $\mathrm{gr}_I(\mathbf{K}_B)$ denotes the graded module associated to the I-adic filtration of the canonical module $\mathbf{K}_B$ of B. Hence $\mathbf{K_T} = \mathbf{G}_+(1)$ as $\mathbf{K}_B \cong (0) : \mathfrak{a} = I$ ([**HK**, 5.14]). Thus with the identification $\mathbf{G}/\mathbf{G}_+ = A/I$ we get the exact sequence

(4.6) $0 \to \mathbf{K_T} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{G}(1) \to (A/I)(1) \to 0.$

Let us compare (4.6) with (4.5). Then as $[\mathbf{K_T}]_i = (0)$ for all $i < 0$ and the graded module $(A/I)(1)$ is concentrated in degree -1, we get $\tau\alpha\sigma = 0$. Hence the homomorphism α induces two endomorphisms $\beta : \mathbf{K_T} \to \mathbf{K_T}$ and $\gamma : (A/I)(1) \to (A/I)(1)$ so that the diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbf{K_T} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{G}(1) & \to & (A/I)(1) & \to & 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \to & \mathbf{K_T} & \to & \mathbf{K_G} & \xrightarrow{\tau} & (A/I)(1) & \to & 0 \end{array}$$

commutes. Recall $\alpha(1) = \xi$ and $[\mathbf{K_G}]_{-1} = A\xi$. Then as $A/I = A\cdot\tau(\xi)$, γ is an epimorphism so that it must be an isomorphism. We note

Lemma (4.7). α is a monomorphism.

Proof. Take the $\mathbf{K}_{\mathbf{G}}$-dual of (4.6) to get an epimorphism $\varepsilon : (\mathbf{K}_{\mathbf{G}})(-1) \to \mathbf{T}$. Then as $[\mathbf{K}_{\mathbf{G}}]_{-1} = A\xi$, we have $\mathbf{T}_0 = A\varepsilon(\xi)$ whence $\varepsilon(\xi)$ is a unit of $\mathbf{T}$. Therefore $(\mathrm{Ker}\ \alpha)T = (0)$ and so $\mathrm{Ker}\ \alpha \subseteq L$. Now assume $\mathrm{Ker}\ \alpha \neq (0)$ and take $Q \in \mathrm{Ass}_A(\mathrm{Ker}\ \alpha)$. Then as $L \cong \alpha$, we get $Q \in \mathrm{Ass}_A \alpha$ whence $Q \in \mathbf{F}$. Thus by (4.2) (2) the ring $\mathbf{G}(I_Q)$ is Gorenstein and $a(\mathbf{G}(I_Q)) = 1$. As $[\mathbf{K}_{\mathbf{G}}]_Q = \mathbf{K}_{\mathbf{G}(I_Q)} \cong \mathbf{G}(I_Q)(1) = \mathbf{G}(1)_Q$, the graded $\mathbf{G}_Q$-module $[\mathbf{K}_{\mathbf{G}}]_Q$ is generated by a single element of degree -1. Hence the endomorphism $A_Q \otimes_A \alpha : \mathbf{G}(1)_Q \to [\mathbf{K}_{\mathbf{G}}]_Q = \mathbf{G}(1)_Q$ is an epimorphism, as $\mathrm{Im}\ \alpha \supseteq [\mathbf{K}_{\mathbf{G}}]_{-1}$ so that it must be an isomorphism as well. This is absurd because $Q \in \mathrm{Supp}_A(\mathrm{Ker}\ \alpha)$ by the choice of Q. Thus α is a monomorphism. //

Since β is an endomorphism of $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}$ and the canonical map $\mathbf{T} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(\mathbf{K}_{\mathbf{T}}, \mathbf{K}_{\mathbf{T}})$ is an isomorphism of graded rings ([**HK**, 6.6]), we can regard β as the homothety map given by an element z in A. Then as β is by (4.7) a monomorphism, z is a nonzerodivisor on $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}$, whence it must be a nonzerodivisor on $\mathbf{T}$ as well. Therefore if $z \in m$, $\mathrm{grade}_{\mathbf{T}} m\mathbf{T} > 0$ so that we have $\dim\ (A/m) \otimes_A \mathbf{T} = 0$ since $\dim \mathbf{T} = 1$. Thus $\lambda(IB) = 0$ whence I is nilpotent, which is absurd. Thus β and γ are both isomorphisms whence so is α. This completes the proof of Theorem (1.1).

Remark (4.8). Let I, J and K be as are in the preface of this section. Then $\mathbf{G}$ is a Gorenstein ring of $a(\mathbf{G}) = -s$ if and only if $I = J$ and $I_Q = K_Q$ for all $Q \in \mathbf{F}$.

Proof. Suppose $\mathbf{G}$ is a Gorenstein ring with $a(\mathbf{G}) = -s$. Then by (2.8) $r_{K_Q}(I_Q) = 0$ for all $Q \in \mathbf{F}$ whence I is generically a complete intersection so that we have $I = J$ by [**GN1**, (1.3)]. See [**GN1**, (1.3)] also for the proof of the converse. //

Let us prove Corollary (1.2). We need the following

Proposition (4.9) ([**I**, (3.1)]). Assume $s \geq 2$. Then $\mathbf{R}$ is a Gorenstein ring if and only if $\mathbf{G}$ is a Gorenstein ring and $a(\mathbf{G}) = -2$.

Proof of Corollary (1.2).

Thanks to (1.1), (4.9) and (2.8), it suffices to show $s \geq 2$ whenever $\mathbf{R}$ is Gorenstein. Assume $s = 0$. Then $I \not\subset Q$ for some $Q \in \mathrm{Ass}\ A$ as $\ell = 1$. Hence $\dim \mathbf{R} = d + 1$ by [**U**, 1.7] and $a(\mathbf{G}) < 0$ by [**TI**, 1.1]. This is impossible (cf. (2.7)). Let $s = 1$. Then as $\mathbf{R}$ is Gorenstein, by [**GNi**, Part II (1.5)] we have $\mathrm{Hom}_A(I,A) \cong A$. On the other hand, as A/I is a Cohen-Macaulay ring of $\dim A/I = d - 1$, we get $\mathrm{depth}_A I = d$ whence

$I \cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(I,A),A)$ ([**HK**, 6.1]). Thus $I \cong A$ so that $\ell = 1$, which is absurd. Hence $s \geq 2$. //

5. Some examples.

Let A be a Cohen-Macaulay local ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$ and $\dim A = d$. Assume $A/\mathfrak{m}$ is infinite. Let I be an ideal in A and put $s = \mathrm{ht}_A I$ and $\ell = \lambda(I)$. Let $r(I) = \min r_J(I)$ where J runs over minimal reductions of I. We put $\mathbf{R} = \mathbf{R}(I)$ and $\mathbf{G} = \mathbf{G}(I)$.

Proposition (5.1). Suppose $d = \ell = 3$, $s = 2$ and A/I is Cohen-Macaulay. Then
(1) $\mathbf{R}$ is a Cohen-Macaulay ring if and only if $r(I) \leq 2$ and $r(I_Q) \leq 1$ for all $Q \in \mathrm{Ass}_A A/I$.
(2) $\mathbf{R}$ is a Gorenstein ring if and only if $\mu_A(I) = 3$ and $\mu_{A_Q}(I_Q) = 2$ for all $Q \in \mathrm{Ass}_A A/I$.

Proof. (1) Assume $\mathbf{R}$ is Cohen-Macaulay. Then by [**GS**, (3.10)] $r(I_Q) \leq 1$ for all $Q \in \mathrm{Ass}_A A/I$ since $\mathbf{R}(I_Q)$ is Cohen-Macaulay and $\dim A_Q = 2$. As $\mathbf{G}$ is a Cohen-Macaulay ring of $a(\mathbf{G}) < 0$ ([**TI**, 1.1]), by (2.7) we get $r_J(I) \leq 2$ for any minimal reduction J of I. See (3.5) for the reverse implication.
(2) See (4.8) and (4.9). //

Corollary (5.2). Let A be a regular local ring of $\dim A = 3$ and let $P \in \mathrm{Spec}\, A$ of $\mathrm{ht}_A P = 2$. Let $I = P^{(k)}$ $(k > 0)$ be the k-th symbolic power of P and assume $\lambda(I) = 3$. Then $\mathbf{R}(I)$ is a Cohen-Macaulay ring if and only if $r(I) \leq 2$.

Proof. We get $r(IA_P) \leq 1$ as $IA_P = P^k A_P$ and A_P is a regular local ring of $\dim A_P = 2$. Hence the assertion follows from (5.1) (1). //

Let $A = k[[X, Y, Z, W]]$, $B = k[[X, Y, Z]]$ and $k[[t]]$ be the formal power series rings over an infinite field k and let n_1, n_2, n_3 and m be positive integers. Let $\Phi : A \to k[[t]]$ and $\phi : B \to k[[t]]$ be the homomorphisms of k-algebras defined by $\Phi(X) = \phi(X) = t^{n_1}$, $\Phi(Y) = \phi(Y) = t^{n_2}$, $\Phi(Z) = \phi(Z) = t^{n_3}$ and $\Phi(W) = t^m$. Let $P = \mathrm{Ker}\, \Phi$ and $\mathfrak{p} = \mathrm{Ker}\, \phi$. Let $n = \mathrm{GCD}(n_1, n_2, n_3)$ and assume

(1) $\mathrm{GCD}(n, m) = 1$,
(2) $mn = m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3$ with positive integers m_i and
(3) there exist positive integers $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ and γ' with $\alpha \leq \alpha'$, $\beta \leq \beta'$ and $\gamma \leq \gamma'$ such that $\mathfrak{p}$ is generated by the maximal minors of the matrix

$$\begin{bmatrix} X^{\alpha} & Y^{\beta'} & Z^{\gamma'} \\ Y^{\beta} & Z^{\gamma} & X^{\alpha'} \end{bmatrix}.$$

Then we have

Example (5.3). Suppose $\beta < \beta'$ and $\gamma < \gamma'$. Then $\mathbf{R}(\mathfrak{p}^{(2)})$ is a Cohen-Macaulay ring and $\mathbf{R}(P^{(2)})$ is a Gorenstein ring.

Sketch of Proof. Let $a = Z^{\gamma+\gamma'} - X^{\alpha'}Y^{\beta'}$, $b = X^{\alpha+\alpha'} - Y^{\beta}Z^{\gamma'}$ and $c = Y^{\beta+\beta'} - X^{\alpha}Z^{\gamma}$. Then $\mathfrak{p} = (a, b, c)B$. Let $d_2 \in \mathfrak{p}^{(2)}$ with $X^{\alpha}d_2 = Z^{\gamma'-\gamma}ac - Y^{\beta'-\beta}b^2$. Then $\mathfrak{p}^{(2)} = (d_2, b^2, c^2, ac, bc)B$ ([**GNS**, (2.2)]). As $(\mathfrak{p}^{(2)})^2 = (d_2, b^2, c^2)\mathfrak{p}^{(2)}$, $(d_2, b^2, c^2)B$ is a reduction of $\mathfrak{p}^{(2)}$. Since $\beta < \beta'$ and $\gamma < \gamma'$, we get $\mu_B(\mathfrak{p}^{(2)}) = 5$ by [**GNS**, (2.4) (1)]. Note $\mu_B(\mathfrak{p}^{(2)}) = 4$ if $\lambda(\mathfrak{p}^{(2)}) = 2$ ([**GNS**, (4.2)]) and we have $\lambda(\mathfrak{p}^{(2)}) = 3$ and $r(\mathfrak{p}^{(2)}) = 1$. Thus by (5.2) $\mathbf{R}(\mathfrak{p}^{(2)})$ is a Cohen-Macaulay ring. Let $f = W^n - X^{m_1}Y^{m_2}Z^{m_3}$. Then $P = \mathfrak{p}A + fA$ ([**W**, Lemma 1]) and $P^{(2)} = \mathfrak{p}^{(2)}A + f\cdot\mathfrak{p}A + f^2A$. Let $I = P^{(2)}$ and $J = (d_2, b^2, c^2, f^2)A$. Then $I \neq J$ and $I^2 = JI$. As $\lambda(\mathfrak{p}^{(2)}) = 3$, we have $\lambda(I) = 4$ and hence J is a minimal reduction of I with $r_J(I) = 1$. As $\mathbf{G}(IA_P)$ is a Gorenstein ring of $a(\mathbf{G}(IA_P)) = -2$ (recall $IA_P = P^2A_P$), for any minimal reduction $\mathfrak{q}$ of IA_P $\mathbf{G}(IA_P/\mathfrak{q})$ is a Gorenstein ring of $a(\mathbf{G}(IA_P/\mathfrak{q})) = 1$ so that we have $\mathfrak{q} : IA_P = IA_P$ (cf. Proof of (4.2)). All the requirements (1), (2), (3) and (4) in Corollary (1.2) are fulfilled whence $\mathbf{R}(I)$ is a Gorenstein ring. //

More precisely, let $A = Q[[X, Y, Z, W]]$ and $n_1 = 54$, $n_2 = 159$, $n_3 = 87$ and $m = 47$. Then $\mathfrak{p}$ is generated by the maximal minors of the matrix $\begin{bmatrix} X^4 & Y^2 & Z^5 \\ Y & Z^3 & X^7 \end{bmatrix}$ with $a = Z^8 - X^7Y^2$, $b = X^{11} - YZ^5$, $c = Y^3 - X^4Z^3$ and $d_2 = -Z^{13} - X^{18}Y - X^3Y^5Z^2 + 3X^7Y^2Z^5$. Let $f = W^3 - XZ$. Then the ideal $I = P^{(2)} = (d_2, b^2, c^2, ac, bc, fa, fb, fc, f^2)A$ has a minimal reduction $J = (d_2, b^2, c^2, f^2)A$ with $r_J(I) = 1$ and the Rees algebra $\mathbf{R}(I)$ is a Gorenstein ring.

REFERENCES

[A] I. M. Aberbach, Local reduction numbers and Cohen-Macaulayness of associated graded rings, Preprint 1994.

[AHT] I. M. Aberbach, C. Huneke and N. V. Trung, Reduction numbers, Briançon-Skoda theorems and depth of Rees algebras, Preprint 1993.

[B] M. Brodmann, Asymptotic stability of Ass (M/I^nM), Proc. Amer. Math. Soc., **74** (1979), 16-18.

[Bu] L. Burch, Codimension and analytic spread, Proc. Camb. Philos. Soc., **72**(1972), 369-373.

[GH] S. Goto and S. Huckaba, On graded rings associated to analytic deviation one ideals, Amer. J. Math., **116** (1994), 905-919.

[GN1] S. Goto and Y. Nakamura, On the Gorensteinness of graded rings associated to ideals of analytic deviation one, Contemporary Mathematics, **159** (1994), 51-72.

[GN2] S. Goto and Y. Nakamura, Cohen-Macaulay Rees algebras of ideals having analytic deviation two, Tohoku Math. J., **46**(1994), 573- 586.

[GN3] S. Goto and Y. Nakamura, On the Gorensteinness of graded rings associated to ideals of analytic deviation two, to appear in J. Algebra.

[GNi] S. Goto and K. Nishida, The Cohen-Macaulay and Gorenstein Rees algebras associated to filtrations, Mem. Amer. Math. Soc., **526** (1994).

[GNN] S. Goto, Y. Nakamura and K. Nishida, Cohen-Macaulayness in graded rings associated to ideals, Preprint 1994.

[GNS] S. Goto, K. Nishida and Y. Shimoda, Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves, Nagoya Math. J., **124**(1991), 99-132.

[GS] S. Goto and Y. Shimoda, On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **68**(1982), 201-231.

[GW] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings I, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 179-213.

[HH1] S. Huckaba and C. Huneke, Powers of ideals having small analytic deviation, Amer. J. Math., **114** (1992), 367-403.

[HH2] S. Huckaba and C. Huneke, Rees algebras of ideals having small analytic deviation, Trans. Amer. Math. Soc., **339** (1993), 373-402.

[HK] J. Herzog and E. Kunz, Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings, L. N. M, **238**(1971).

[HSV] J. Herzog, A. Simis, and W. V. Vasconcelos, On the canonical module of the Rees algebra and the associated graded ring of an ideal, J. Algebra, **105**(1987), 285-302.

[I] S. Ikeda, On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings, Nagoya Math. J., **102**(1986), 135-154.

[N] K. Nishida, Powers of ideals in Cohen-Macaulay rings, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[NR] D. G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **50**(1954), 145-158.

[JU] M. Johnson and B. Ulrich, Artin Nagata properties and Cohen-Macaulay associated graded rings, Preprint 1994.

[PS] C. Peskine and L. Szpiro, Liasions des variétés algébriques. I, Invent. Math., **26** (1974), 271-302.

[R] I. Reiten, The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules, Proc. Amer. Math. Soc., **32**(1972), 417-420.

[SUV] A. Simis, B. Ulrich and W. Vasconcelos, Cohen-Macaulay Rees algebras and degrees of polynomial relations, to appear in Math. Ann.

[TI] N. V. Trung and S. Ikeda, When is the Rees algebra Cohen-Macaulay, Comm. Algebra, **17** (1989), 2893-2922.

[U] B. Ulrich, Ideals having the expected reduction number, Preprint 1994.

[V] G. Valla, Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay, J. Algebra, **42** (1976), 537-548.

[VV] P. Valabrega and G. Valla, Form rings and regular sequences, Nagoya Math. J., **72** (1978), 93-101.

[W] K. Watanabe, Some examples of one dimensional Gorenstein domains, Nagoya Math. J., **49**(1973), 101-109.

ヒルベルト係数と整閉イデアル

伊藤　史朗

広島市立大学　情報科学部

1. (A, m) を $d(\geq 2)$ 次元 Cohen-Macaulay 環で、剰余体 A/m は無限体であるとする．A 加群 M の長さを $\lambda(M)$ で表わす．

良く知られているように m 準素イデアル I の Hilbert-Samuel 関数

$$H_I(n) = \lambda(A/I^{n+1})$$

は n が十分大きいとき n についての多項式

$$P_I(n) = e_0\binom{n+d}{d} - e_1\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d$$

で表わされる．この $P_I(n)$ を I の Hilbert 多項式、各 e_i を I の Hilbert 係数という．またイデアル I に対して、十分大きい全ての n に対して $J^n = I^n$ となるイデアル J のうち最大のものを $\widetilde{I}$ で表わす．

Sally は論文 [S1] で $e_1 - e_0 + \lambda(A/I)$ が小さいときの m 準素イデアル I の研究をしているが、その中で使われている 2 次元の場合の $\widetilde{I}$ に関する事実をまとめると次のようになる：m 準素イデアル I の minimal reduction Q を選び, $j_n = \lambda(\widetilde{I^{n+1}}/Q\widetilde{I^n})$ とおくと

(1) $e_1 - e_0 + \lambda(A/\widetilde{I}) = \sum_{r=1}^{\infty} j_r \geq 0$,
(2) $P_I(n) - \lambda(A/\widetilde{I^{n+1}}) = \sum_{r=n+2}^{\infty}(r-n-1)j_r \geq 0$,
　特に、$P_I(n) - \lambda(A/\widetilde{I^{n+1}})$ は減少関数,
(3) $P_I(0) - \lambda(A/\widetilde{I}) = e_2 - e_1 + e_0 - \lambda(A/\widetilde{I}) = \sum_{r=2}^{\infty}(r-1)j_r \geq 0$

となる．Sally はこれらの結果を使って一般次元で $e_1 - e_0 + \lambda(A/I) = 1$ かつ $e_2 \neq 0$ となるイデアル、$e_2 - e_1 + e_0 - \lambda(A/I) = 0$ かつ $e_2 = 2$ となるイデアルの性質を調べている．

今回のシンポジウムでは Sally の議論の再構成と、整閉イデアルに対する著者自身の考察を発表したが、この報告集では後者のみを記述することにする．

ここで、イデアル J に対し

$$\overline{J} = \{z \in A \mid z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0\ (a_i \in J^i) \text{ という関係式が存在する}\}$$

を J の整閉包といい, $J = \overline{J}$ の時 J は整閉であるという．また Q が m 準素イデアル I の minimal reduction なら Q は d 個の元で生成されていて $Q \subset I \subset \overline{Q}$, $mI \cap Q = nQ$ である．

2. 以後 I は m 準素イデアル、Q はその minimal reduction とする.

THEOREM A. I が整閉なら $e_2 - e_1 + e_0 - \lambda(A/I) \geq 0$.

証明の方針はいたって簡単である. 2 次元の時は上の (2) より正しいのであるから、次元 d に関する帰納法を使う. そのためには、以前著者が別の論文 [I1] で使った次の事実を確かめておけばよい (証明略).

LEMMA 1. I は整閉、$Q = (x_1, \cdots, x_d)$ とする. このとき $IA[T]/(x_1T - x_2)$ は $A[T]/(x_1T - x_2)$ の整閉イデアル.

さて一般次元で $e_1 - e_0 + \lambda(A/I) = 0$ である必要十分条件は $I^2 = QI$ であった (Ooishi, Huneke). この次のステップとしての Sally の論文には $I^3 = QI^2$ となるイデアルが登場するが、整閉イデアルについてはそのようなイデアルは Hilbert 関数と多項式のあいだの関係で記述される.

THEOREM B. I が整閉のとき $I^3 = QI^2$ である必要十分条件は $P_I(0) = H_I(0)$ かつ $P_I(1) = H_I(1)$ である.

I が整閉で $I^3 = QI^2$ であれば、$\overline{I^2} \cap Q = Q\overline{I}$(itoh) という事実を使うことによって次数環 $\mathrm{gr}_I(A)$ は Cohen-Macaulay となり、$P_I(0) = H_I(0)$ かつ $P_I(1) = H_I(1)$ が従う. 逆に $P_I(0) = H_I(0)$ かつ $P_I(1) = H_I(1)$ とする. $x \in Q$ を I の superficial な元とし $B = A/(x), J = IB$ とおく. Lemma 1 より J は整閉であるとして一般性を失わない. また $\overline{I^2} \cap (x) = x\overline{I}$ でもあるので、$P_J(0) = H_J(0)$ かつ $P_J(1) = H_J(1)$ が従う. 次元に関する帰納法で $J^3 = QJ^2$. これを用いると、簡単な計算で $I^3 = QI^2$ が導かれる.

この証明の後半部分に関連して、証明は省略するが、次の事実に注意しておこう.

LEMMA 2. x を I の superficial な元、$B = A/(x)$, $J = IB$ とおく.

(i) $(x) \cap \widetilde{J^{n+1}} = x\widetilde{J^n}$

(ii) もし $\widetilde{J^n} = J^n$ $(\forall n)$ であれば $\widetilde{I^n} = I^n$ $(\forall n)$. このとき特に、$\mathrm{depth}\ \mathrm{gr}_I(A) = \mathrm{depth}\ \mathrm{gr}_J(B) + 1$.

3. 補足. THEOREM A に関連していくつか補足しておく. まず整閉という条件をはずすと 3 次元正則局所環で反例がある.

例 (Marley) K は体、$A = K[x, y, z]_{(x,y,z)}$, $I = (x^3, y^3, z^3, x^2y, xy^2, yz^2, xyz)$. この

Iは整閉ではなくて、

$$\lambda(A/I^{n+1}) = 27\binom{n+3}{3} - 18\binom{n+2}{2} + 4\binom{n+1}{1} + 1$$

従って $e_2 - e_1 + e_0 - \lambda(R/I) = -1$.

また、THEOREM A を用いると e_2の小さい整閉イデアルの特徴付けができる.

(a) $e_2 = 0 \iff I^2 = QI$
(b) $e_2 = 1 \iff I^3 = QI^2$ かつ $\lambda(I^2/QI) = 1$
(c) $e_2 = 2 \iff I^3 = QI^2$ かつ $\lambda(I^2/QI) = 2$

いづれの場合も $\mathrm{gr}_I(A)$ は Cohen-Macaulay である.

Theorm B の項でも注意したようにIが整閉であれば、$x \in Q$ を Iの superficial な元、$B = A/(x), J = IB$は整閉、$J^3 = QJ^2$ということから $I^3 = QI^2$が導かれる. よって上の主張は 2 次元の場合に確かめておけばよい. 2 次元の場合は 1 節で述べたことから簡単に検証できる.

1 節で述べた 2 次元の場合の$\tilde{I}$に関する性質 (3) はI自身では置き換えることはできない. 上で挙げた Marley の例からも導かれるが、2 次元正則環でも例がある. Kは体、$A = K[x,y]_{(x,y)}$, $I = (y^6, xy^5, x^3y^3, x^2y^2, x^6)$ とする. この例では、

$$P_I(n) = \lambda(A/(x,y)^{6n+6}) + 1 = 36\binom{n+2}{2} - 15\binom{n+1}{1} + 1$$

であって、$\lambda(A/I) = \lambda(A/(x,y)^6) + 2$. 従って $P_I(0) - \lambda(R/I) = -1$ である.

参考文献

[I1] S. Itoh, Integral closures of ideals generated by regular sequences, Journal of Algebra 117(1988),390-401

[I2] S.Itoh, Coefficients of normal Hilbert polynomials, Journal of Algebra 150(1992), 101-117

[I3] S. Itoh, A note on Hilbert coefficientsof integrally closed ideals, to appear in Journal of Algebra

[S1] J.D. Sally, Hilbert coefficients and reduction number 2, J. Algebraic Geometry 1(1992),325-333

[S1] J.D. Sally, Ideals whose Hilbert function and Hilbert polynomial agree at $n = 1$, Journal og Algebra 157(1993),534-547

On Vector Bundles arising from the Frobenius with application to F-rational graded Rings

渡辺 敬一 (東海大・理・情報数理)

標数 $p>0$ の環に対する Frobenius 写像の作用を利用して，標数 0 の rational singularity に擬される概念として，ideal の tight closure の概念を通じて F-rational ring の概念が代数的に定義されている．

これらの概念の間の関係として，次の事実が成立することが予想されている．

(1) 標数 0 の rational singularity の標数 $p \gg 0$ への reduction は F-rational であろう．(逆に，無限個の標数 p への reduction が F-rational ならば rational singularity であることは証明されている [S].)

(2) もっと一般的に，(A が標数 0 の環のとき) resolution $f : X \to Y := \mathrm{Spec}(A)$ に対して，コホモロジー群 $H^i(X, O_X)$ は A の標数 $p \gg 0$ への reduction の local cohomology 加群での tight closure で表わされるだろう．

本稿の目的は，標数 0 の 2 次元 graded ring A に対して $\mathrm{Proj}(A) = \mathbb{P}^1$ の時に，上の予想をどのような p へ reduce すれば良いかという具体的な評価を含めて証明することである (2 次元 graded ring に対して R. Fedder が "十分大きな p に対して" 上の結果を示しているが，具体的な p の評価はわからない)．

証明は Frobenius 写像から得られる vector bundle を考察することにより得られる．

この結果はかなり特殊な話題でもあり，結果としては全く取るに足らないものだが，次の発展への一つのステップになれば幸いである．また，証明の副産物として次の結果が得られるのだが，これは知られていたものだろうか？

Lemma 0.1. k は体，$a_1, \dots, a_s \in k$ を互いに異なる元とする．

(1) $f(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-a_i)^{n_i}$ とおき，標数 $p>0$ のときは，$n_i < p\ (i = 1, \dots, s)$ と仮定する．このとき，

(*) $$f = x^N + c_1 x^{N-1} + \dots + c_N$$

と展開するとき，c_i の連続 s 個が 0 になることはない．

(2) $\mathrm{char}(k) = p > 0$, f は (1) の条件を満たし，

(**) $$\tilde{f} = f(x) j(x^p) \in k[x]$$

とする．このとき，もし

(***) $$\tilde{f} = g(x) x^{l+s} + h(x) \quad (\deg(h) < l)$$

と書けるなら，$f \mid g$ である．

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

§1. Preliminaries. Normal graded rings

(1.1) normal graded ring $R=\oplus_{n\geq 0}R_n$ に対して $X=\mathrm{Proj}(R)$ とおくと，R の商体の degree 1 の同次元 T を与えるとき X 上に分数 divisor $D\in \mathrm{Div}(X,\mathbb{Q})=\mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ で，ある正整数 N に対して $ND\in \mathrm{Div}(X)$ で ample Cartier divisor になるものが定まり，

$$R=R(X,D):=\oplus_{n\geq 0}H^0(X,O_X(nD)).T^n \tag{1.1}$$

と書ける（[Dem], [W1] 参照）．このとき，D の整数部分を $[D]$，分数部分を $\{D\}$ と書く．$[D]$ は $[D]\leq D$ なる最大の $\mathrm{Div}(X)$ の元，$\{D\}=D-[D]$ である．

(1.2) graded ring R に対して，$R^\natural=\oplus_{n\geq 0}[\oplus_{i\geq n}R_i]U^n$ とおく．$R^\natural$ を U に関して graded ring と思うとき，canonical map $C:=\mathrm{Proj}(R^\natural)\to Y:=\mathrm{Spec}(R)$ は projective morphism で，$Y-V_+(R_+)$ 上で同型である．この写像を R の graded blowing-up と呼ぶ．$R=R(X,D)$ のときは，$C=:C(X,D)=\mathrm{Spec}_X(\oplus_{n\geq 0}O_X(nD)T^n)$ となる．

$R=R(X,D)$, $R_0=k$ が体のとき，$\mathfrak{m}:=R_+:=\oplus_{n>0}R_n$ とおくと，

$$H^i_{\mathfrak{m}}(R)\cong \oplus_{n\in\mathbb{Z}}H^{i-1}(X,O_X(nD))T^n=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}H^{i-1}(X,O_X([nD]))T^n \quad (i\geq 2)$$

である．

更に，$\mathrm{char}\,k=0$ で，$\mathrm{Spec}(R)-\{\mathfrak{m}\}$ が rational singularity しかもたないとき，Boutot の定理より C も rational singularity しかもたない ([W1], [W2], [Fl] 参照)．

$f:Y'\to Y=\mathrm{Spec}\,R$ が C を経由する特異点の解消のとき，Leray の spectral sequence より

$$H^i(Y',O_{Y'})\cong H^i(C,O_C)\cong \oplus_{n\geq 0}H^i(X,O_X(nD))T^n=\oplus_{n\geq 0}[H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_n \tag{1.2.1}$$

(1.3) $\mathrm{char}\,k=p>0$ のとき，Frobenius 写像 $F:R\to R$ によってひきおこされる local cohomology 群上の Frobenius 写像は，degree n の同次成分では，

$$F:H^i_{\mathfrak{m}}(R)_n\cong H^{i-1}(X,O_X(nD))T^n\longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(R)_{pn}\cong H^{i-1}(X,O_X(pnD))T^{pn}$$

となる．ここで次の定義をしよう．

定義 (1.4). *R が F-injective in negative degree $\Longleftrightarrow$ $n<0$ のとき，$F:H^i_{\mathfrak{m}}(R)_n\to H^i_{\mathfrak{m}}(R)_{pn}$ は injective．(大体 R は Cohen-Macaulay, $i=d=\dim R$ のときを考える．)*

(1.5) $\dim R=d$ とし，$H^d_{\mathfrak{m}}(R)\subset(0)$ の tight closure $(0)^*$ を考える．$(0)^*\supset\oplus_{n\geq 0}[H^d_{\mathfrak{m}}(R)]_n$ であることは $H^d_{\mathfrak{m}}(R)$ がアルチン加群より明らかだが，$\mathrm{Spec}(R)-V(\mathfrak{m})$ の各点が strongly F-regular のとき，

$(0)^*=\oplus_{n\geq 0}[H^d_{\mathfrak{m}}(R)]_n \Longleftrightarrow R$ は F-injective in negative degree．

(イデアル，部分加群の tight closure の定義は [HH] [W3] [W4] 参照．証明は この仮定の下に，test ideal が $\mathfrak{m}$−primary であることからすぐに従う ([W5] (3.1))．)

ゆえに，(1.2.1) と (1.5) を合せると，$\mathrm{Spec}(R)-\{\mathfrak{m}\}$ が rational singularity しかもたず，R が F-injective in negative degree なら，

$$H^{d-1}(Y',O_{Y'})\cong\oplus_{n\geq 0}[H^d_{\mathfrak{m}}(R)]_n=(0)^* \tag{1.5.1}$$

となる (左辺は char $=0$ の世界，右辺は char $=p>0$ の世界で，"char $p\gg 0$ への reduction を考えると" という意味だが．)

従って，この稿の主題は，「$R=R(X,D)$ が F-injective in negative degree であるための良い条件を求めよ.」ということになる.

(1.6) X 上の sheaf $\mathcal{E}_n$ を，

$$0\to O_X(-nD)\to[O_X(-pnD)]^{1/p}\to[\mathcal{E}_n]^{1/p}\to 0 \tag{1.6.1}$$

で定義する ($O_X^{1/p}$-module と考えるとき，言い換えれば $k(X)^{1/p}$ の中で考えるとき $(\quad)^{1/p}$ を付けて表わすことにする)．

このとき

$$F\ :H^i_{\mathfrak{m}}(R)_n\cong H^{i-1}(X,O_X(nD))T^n\longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(R)_{pn}\cong H^{i-1}(X,O_X(pnD))T^{pn}$$

が injective であるために，$H^{i-1}(X,\mathcal{E}_n)=0$ が十分条件である．

以下，$\dim R=2$, $\dim X=1$ のときを考える．

§ 2. 2 次元 F-rational ring と F-injectivity in negative degree

この節では，$R=\oplus_{n\geq 0}R_n=R(X,D)$ を体 $k=R_0$ 上の 2 次元 normal graded ring，$\mathfrak{m}=R_+=\oplus_{n>0}R_n$ とおく．このとき，(1.6.1) で定義された $\mathcal{E}_n$ は locally free，rank $p-1$ で，$n>0$ に対し $H^0(X,\mathcal{E}_n)\cong\mathrm{Ker}[F:H^2_{\mathfrak{m}}(R)_{-n}\to H^2_{\mathfrak{m}}(R)_{-pn}]$ である ([W5] (3.4))．

以下，特に $X=\mathbb{P}^1$ のときに $H^0(X,\mathcal{E}_n)=0$ となるための条件を考えよう．

(2.1) $k(X)=k(x),\mathrm{div}_X(x-a)=(a)-(\infty)$ とおく ($a\in k$)．また，$-nD$ を改めて $-D$ と思い，$-D=-m(\infty)+\sum_{i=1}^s r_iP_i$ $(0<r_i<1,\ i=1,\ldots,s)$ とおく．$P_1=\infty,P_2=0,P_i=a_i$ $(i\geq 3)$ $(a_i\in k,\ a_i\neq 0)$ とおく．更に，$[-pD]=-mp(\infty)+\sum_{i=1}^s n_iP_i$ とする $(n_i=[pr_i])$．

(2.2) $X=\mathbb{P}^1=U_0\cup U_1$，$U_0=\mathrm{Spec}(k[x])$，$U_1=\mathrm{Spec}(k[x^{-1}])$ とおき，完全列 (1.6.1) を p 乗したものを

$$\begin{aligned}(2.2.1)\qquad & 0\to[O_X(-D)]^p=[O_X(-m(\infty))]^p\\ &\to O_X(-pD)=O_X(-mp(\infty)+\sum_{i=1}^s n_iP_i)\to\mathcal{E}\ \to\ 0\end{aligned}$$

とし，その，U_0, U_1 上での section をとると，$f = \prod_{i=3}^{s}(x-a_i)^{n_i}$，$N = \deg f = \sum_{i=3}^{s} n_i$ と置いて，それぞれ

$$(2.2.2) \qquad 0 \to \quad k[x^p] \ \to \quad x^{-n_2}\frac{1}{f}k[x] \qquad \to H^0(U_0, \mathcal{E}) \to 0$$

$$(2.2.3) \qquad 0 \to x^{-mp}k[x^{-p}] \to x^{-mp+n_1+N}\frac{1}{f}k[x^{-1}] \to H^0(U_1, \mathcal{E}) \to 0$$

となる．ここで，$\deg[-pD] = -mp + \sum_{i=1}^{s} n_i = -mp + n_1 + n_2 + N$ であることに注意しておこう．

さて，$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E})$ の元は，$(\frac{g}{f}, \frac{h}{f})$ $(\frac{g}{f} \in H^0(U_0, O_X(-pD))$，$\frac{h}{f} \in H^0(U_1, O_X(-pD)))$ という組で表わされる．ここで $g \in x^{-n_2}k[x]$，$h \in x^{-mp+n_1+N}k[x^{-1}]$，$U_0 \cap U_1$ に制限したとき $H^0(U_0 \cap U_1, \mathcal{E})$ の同じ元を与えるので，$g - h \in f.k[x^p, x^{-p}]$ である．

また，$(\frac{g}{f}, \frac{h}{f})$ が $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E})$ の元として 0 という条件を解析すると，$g \in f.k[x^p]$ または $h \in x^{-mp}f.k[x^{-p}]$ となる．以上の議論をまとめると，

(2.2.3)　$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}) \neq 0 \iff \exists(g,h)$，$g \in x^{-n_2}k[x]$，$h \in x^{-mp+n_1+N}k[x^{-1}]$ で以下の (#) を満たす．

$$(\#) \qquad g - h \in f.k[x^p, x^{-p}] \text{ かつ } g \notin f.k[x^p].$$

ここで上記の条件 (#) に Lemma 0.1 を使うと，次が得られる．

(2.3)　$\deg[-pD] \leq 1 - s$ なら $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}) = 0$ であり，従って $F : H^1(X, O_X(-D)) \to H^1(X, O_X(-pD))$ は injective である．

系 (2.4)　$R = R(\mathbb{P}^1, D)$ が標数 0 の体上の 2 次元 normal graded ring で $D = s(\infty) - \sum_{i=1}^{s} r_i P_i$ $(0 < r_i < 1; i = 1, \ldots, s,\ P_1, \ldots P_s$ は $\mathbb{P}^1$ の異なる点) のとき，R の標数 p への reduction は，

(*)　　$P_1, \ldots, P_s$ が reduction の後で異なる点になり，かつ

(**)　　任意の正整数 n に対し $\deg[-pnD] \leq 1 - s$ となる

とき，F-injective in negative degree である．

特に，L を $r_1, \ldots, r_s$ の共通分母 (分母の最小公倍数) とするとき，$p > L(s-1)$ なら上の条件 (**) は満たされる．

系 (2.5)　A が標数 0 の体上 essentially of finite type の 2 次元 normal local ring で，A の resolution のグラフが star-shaped ([TW] 参照) とする．このとき，A の標数 p への reduction は $p \gg 0$ のとき，F-rational であり，p の大きさの具体的な十分条件もグラフ (“枝” と中心の $\mathbb{P}^1$ との交点も含んだ情報) によって与えられる．

実際，A 上の “central curve” による filtration は 2 次元 normal graded ring R で A と同じグラフをもつものを associated graded ring にもつ．R の reduction が F-rational

なら A の reduction も F-rational である (F-rational の "deformation" は F-rational である ([Fe 0] 参照)).

最後に，補題 0.1 の証明をしよう.

(1) は $\deg f$ に関する帰納法を使う. c_i の連続 s 個が 0 になると仮定し，$f(x) = g(x)x^{l+s} + h(x)$, $(\deg h < l)$ とする. もしある a_i について $g(a_i) = 0$ とすると，$f/(x-a_i)$ は次数が減り，連続 $s+1$ 個の係数が 0 になるから，帰納法の仮定に反する. また，f の導関数 f' も連続 s 個の係数が 0 になる.

$g(a_i) = b_i$ $(i = 1, \dots, s)$ とおき，等式

(2.6.1)
$$f' = n_1 \frac{f}{x-a_1} + \dots + n_s \frac{f}{x-a_s}.$$

に於て両辺の $x^{l+s-2}, \dots, x^{l-1}$ の係数を比較する. 各 $\dfrac{f}{x-a_i}$ を多項式の割り算で計算すると，次の等式を得る.

(2.6.2)
$$\begin{cases} a_1 n_1 b_1 + \dots + a_s n_s b_s &= 0 \\ a_1^2 n_1 b_1 + \dots + a_s^2 n_s b_s &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_1^s n_1 b_1 + \dots + a_s^s n_s b_s &= 0 \end{cases}$$

これを $n_1 b_1, \dots, n_s b_s$ を求める連立方程式と思うと，係数行列の行列式は Vandermonde の行列式で 0 でない. 従って $n_1 b_1 = \dots = n_s b_s = 0$ となるが，仮定に反する. ゆえに (1) が示された.

(2) やはり $g(x)$ を $x - a_i$ で割れるだけ割る. 示すべきことは，g が $(x-a_i)^{n_i}$ $(i = 1, \dots, s)$ で割り切れる事である. g がある i に対し $(x-a_i)^{n_i}$ で割り切れないとき，$b_i := g(a_i) \neq 0$ $(i = 1, \dots, s)$ と仮定できる. (2.6.1) はこの場合にも成立するから，あとは (1) と同様に矛盾を導ける (g が $(x-a_i)^{n_i}$ で割り切れるとき (2.6.2) で $b_i = 0$ でも良い).

付記. (1) $X = \mathbb{P}^d$ $(d \geq 2)$ の場合にも F-injective in negative degree であるための条件を d 変数多項式の言葉で書き表すことはできるが，証明の方法は見当がつかない.

(2) X が smooth curve , $D \in \mathrm{Div}(X, \mathbb{Q}), \deg D > 0$ のとき,「素数 p が $\{D\}$ の分母と互いに素で，$p \deg D > \deg(K_X + D')$ ならば，$F : H^1(X, O_X(-D)) \to H^1(X, O_X(-pD))$ は injective」が最近 原 伸生 氏によって示されている. 但し，ここで $\{D\} = \sum \frac{p_i}{q_i} P_i$ のとき，$D' := \sum \frac{q_i - 1}{q_i} P_i$.

REFERENCES

[Dem] Demazure, M., Anneaux gradués normaux, Introduction a la théorie des singularités II; Méthodes algébriques et géométriques (Lê Dũng Tráng (ed.), Travaux En Cours **37**), 35-68, Paris: Hermann 1988.

[Fe 0] Fedder, R., F-purity and rational singularity, Trans. A.M.S., **278** (1983), 461-480.

[Fe 1] Fedder, R., F-purity and rational singularity in graded complete intersection rings, Trans. A.M.S., **301** (1987), 47-62.

[Fe 2] Fedder, R., A Frobenius Characterization of Rational Singularity in 2 Dimensional Graded Rings, . Trans. A.M.S., **340** (1993), 655-668.

[Fl] Flenner, H., Rationale quasi-homogene Singularitäten, Arch. Math. **36** (1981), 35-44.

[FW] Fedder, R. and Watanabe, K.-i.: A characterization of F-regularity in terms of F-purity, in "Commutative Algebra", Proc. Microprogram MSRI 1987, Publ. **15** (1989), 227-245, Springer.

[HH] Hochster, M. and Huneke, C.: Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem, J. of Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31-116.

[S] Smith, K.E., F-rational rings have rational singularities, preprint.

[Ta] Tango, H., On the behaviour of extensopns of vector bundles under the Frobenius map, Nagoya Math. J. **48** (1972), 73-89.

[TW] Tomari, M., Watanabe, K.-i.: Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with "star-shaped" resolution, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **25**, (1989) 681-740

[W1] Watanabe, K.-i.: Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings , Nagoya Math. J. **83**,(1981) 203-211

[W2] Watanabe, K.-i.: Rational singularities with k^*- action, "Commutative Algebra", Proc. Trento Conf. , Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **84** (1983), 339-351, Marcel Dekker.

[W3] Watanabe, K.-i.: F-regular and F-pure normal graded rings, J. of Pure and Appl. Alg. **71** (1991), 341-350.

[W4] Watanabe, K.-i.: 特異点の性質の Frobenius 写像による特徴付け, 代数学シンポジウム報告集, 仙台, 1993 年 7 月.

[W5] Watanabe, K.-i.: F-regular and F-rational rings in Dimension 2, 第 15 回可換環論シンポジウム報告集, 賢島, 1993 年 10 月.