研 究 集 会

第17回可換環論シンポジウム

1995年11月20日～23日

於　グリーンピア安浦

平成7年度文部省科学研究費総合A

（課題番号　06302002　代表　秋葉 知温）

研 究 集 会

第17回可換環論シンポジウム

1995年11月20日～23日

於　グリーンピア安浦

平成7年度文部省科学研究費総合A

(課題番号　06302002　代表　秋葉 知温)

目　　次

Basic sequence and S. Nollet's θ_X

Mutsumi AMASAKI

Faculty of School Education
Hiroshima University

Abstract We compare the criterion for the integrality of two-codimensional subschemes of projective spaces obtained recently in a general form by S. Nollet with that for the integrality of two-codimensional Buchsbaum subschemes obtained many years ago by the present author. The main point is that the function θ_X Nollet defined in his paper is exactly the same as the sequence $\bar{w}$ appearing in our theory, which is a subsequence of the basic sequence of I_X.

§1. Two-codimensional even linkage classes

Let $\mathcal{L}$ be an even linkage class of purely two-codimensional closed subschemes in $\mathbf{P}^n$. Then there is a reflexive sheaf $\mathcal{M}$ on $\mathbf{P}^n$ having no direct summand of the form $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(l)$ such that

(i) $H^{n-1}(\mathcal{M}(l)) = 0$ for all $l \in \mathbf{Z}$,

(ii) $X \in \mathcal{L}$ if and only if there is a Bourbaki sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}(-\tilde{h}_X) \oplus \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0 ,$$

where $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ are direct sums of line bundles on $\mathbf{P}^n$.

Let $X \in \mathcal{L}$. Given relatively prime homogeneous polynomials $G \in I_X$ and H, the ideal $I_Z := (HI_X, G)$ defines a two-codimensional scheme $Z \in \mathcal{L}$ such that $\tilde{h}_Z = \tilde{h}_X + \deg(H)$, which is called a *basic double link* via G and H (see [BBM], [M-DP], [N1]). Let $\tilde{h}_0 := \min\{ \tilde{h}_X \mid X \in \mathcal{L} \}$. Then an element of $\mathcal{L}$ with $\tilde{h}_X = \tilde{h}_0$ is called minimal (see loc cit). We define $\mathcal{L}^l := \{ X \in \mathcal{L} \mid \tilde{h}_X - \tilde{h}_0 = l \}$. The property stated in the following theorem is called *Lazarsfeld-Rao property* (*LR-property* for short).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Theorem 1.1. ([BBM], [M-DP], [N1]). *An even linkage class $\mathcal{L}$ of purely two-codimensional closed subschemes of $\mathbf{P}^n$ satisfies the following conditions.*

(1) *Let X_0, X_0' be minimal elements of $\mathcal{L}$. Then X_0' can be deformed flatly into X_0 through subschemes all in $\mathcal{L}^0$.*

(2) *Given an $X \in \mathcal{L}$, there is an $X' \in \mathcal{L}^{\tilde{h}_X - \tilde{h}_0}$, which is obtained by a finite number of successive basic double links starting with X_0, such that X' can be deformed flatly into X through subschemes all in $\mathcal{L}^{\tilde{h}_X - \tilde{h}_0}$.*

In fact one can choose $\mathcal{P}^0$ and $\mathcal{Q}^0$ so that every minimal element of $\mathcal{L}$ has a Bourbaki sequence with $\mathcal{P} = \mathcal{P}^0$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^0$, $\tilde{h}_X = \tilde{h}_0$. Note that the converse to the assertion (2) of the above theorem also holds by [R]. To state S. Nollet's remarkable theorem, we need some notations. Let $X \in \mathcal{L}$. First we set

$$s_0(X) = \min\{\, l \mid [I_X]_l \neq 0 \,\},$$

$$s_1(X) = \min\{\, l \mid [I_X/(f_0)]_l \neq 0,\ f_0 \in [I_X]_{s_0(X)} \,\},$$

$$t_1(X) = \min\{\, l \mid \exists f_1 \in [I_X]_l \text{ such that } \operatorname{ht}(f_0, f_1) = 2 \,\},$$

$$h_X = \tilde{h}_X - \tilde{h}_0,$$

$$e(X) = \max\{\, l \mid H^{n-2}(\mathcal{O}_X(l)) \neq 0 \,\}.$$

Denoting $\dim[E]_l$ by $\varphi_E(l)$ for a graded module E, we define functions $\gamma_X(l) : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$, $\eta_X(L) : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_0$ and $\theta_X(l) : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_0$ as follows:

$$\gamma_X(l) = \Delta^n \varphi_{I_X}(l) - \binom{l}{0} \quad \text{(admissible character [MP-D])},$$

$$\begin{aligned}\eta_X(l) &= \gamma_X(l) - \gamma_{X_0}(l - h_X) + \binom{l}{0} - \binom{l-h_X}{0} \\ &= \Delta^n \varphi_{I_X}(l) - \Delta^n \varphi_{I_{X_0}}(l - h_X) \quad \text{(see [N2])},\end{aligned}$$

$$\theta_X(l) = \eta_X(l) - \binom{l - s_0(X)}{0} + \binom{l - s_0(X_0) - h_X}{0} \quad \text{(see [N2])}.$$

Here $\mathbf{Z}_0 = \{0\} \cup \mathbf{N}$. The functions η_X and θ_X are nonnegative and vanish for all but a finite number of $l \in \mathbf{Z}$. We define θ_X to be connected about $[a, b]$ if it satisfies the three conditions below.

(i) If $\theta_X(c) > 0$ for some integer $c < b$, then $\theta_X(l) > 0$ for all $c \leq l \leq b$,

(ii) If $\theta_X(c) > 0$ for some integer $c > a$, then $\theta_X(l) > 0$ for all $a \le l \le c$,

(iii) $\theta_X(l) \ne 0$ for all $a \le l \le b$.

Theorem 1.2. (Nollet [N2,Theorem 5.8]). *Let $\mathcal{L}$ be an even linkage class of purely two-codimensional subschemes of $\mathbf{P}^n$ and X_0 be its minimal element. If $X \in \mathcal{L}$ is not minimal and integral, then*

(1) *θ_X is connected about $[s_0(X_0) + h_X, t_1(X_0) + h_X - 1]$,*

(2) *$s_0(X) \le e(X_0) + n + 1 + h_X$.*

Let $\tilde{h}_1 := \min\{ \tilde{h}_X \mid X \in \mathcal{L},\ s_1(X) = t_1(X) \}$.

Theorem 1.3. (Nollet [N2,Theorems 4.7, 4.9 and 5.11]). *With the notation as above, let X_1 be an element of $\mathcal{L}$ such that $\tilde{h}_{X_1} = \tilde{h}_1,\ s_1(X_1) = t_1(X_1)$. Suppose that X_1 can be deformed flatly into an integral scheme with the use of its Bourbaki sequence. If $X \in \mathcal{L}$ satisfies the conditions in the preceding theorem, then X can also be deformed flatly into an integral scheme with the use of its Bourbaki sequence.*

§2. Basic sequences

Let E be a finitely generated graded $R := k[x_1, \dots, x_r]$-module ($r = n + 1$). There exist a finitely generated graded $k[x_i, \dots, x_r]$-submodule $E^{[i]} \subset E$ and a finitely generated graded free $k[x_i, \dots, x_r]$-submodule $E^{\langle i \rangle} \subset E$ for each $1 \le i \le r + 1$ such that

(i) $E^{[1]} = E$, $E^{[r+1]} = E^{\langle r+1 \rangle}$,

(ii) $E^{[i]} = E^{\langle i \rangle} \oplus E^{[i+1]}$ as $k[x_{i+1}, \dots, x_r]$-module and

(iii) $x_i E^{[i+1]} \subset (x_{i+1}, \dots, x_r) E^{\langle i \rangle} \oplus E^{[i+1]}$

for all $1 \le i \le r$, if and only if

$$(x_r, \dots, x_{i+1})E :_E x_i \subset \bigcup_{l \ge 1} (x_r, \dots, x_{i+1})E :_E \mathfrak{m}^l$$

for all $1 \le i \le r$ (see [A4]). When this is the case, the structures of $E^{\langle i \rangle}$ and $E^{[i]}$ are uniquely determined up to isomorphism over $k[x_i, \dots, x_r]$ for each $1 \le i \le r+1$ by the conditions (i), (ii) and (iii). Assume that $x_1, \dots, x_r$ are sufficiently generally chosen. Then the submodules as above always exist. Denoting homogeneous free bases of $E^{\langle i \rangle}$ by e^i_l ($1 \le l \le m_i$), we define the basic sequence $B_R(E)$ of E to be the sequence $(\bar{n}^1; \bar{n}^2; \cdots; \bar{n}^{r+1})$ made of the nondecreasing sequences of integers $\bar{n}^i$ ($1 \le i \le r+1$)

such that $\bar{n}^i = (\deg(e^i_1), \ldots, \deg(e^i_{m_i}))$ up to permutation (see [A4]). In case $E^{\langle i\rangle} = 0$, we understand $\bar{n}^i = \emptyset$.

Let I be a homogeneous ideal in R of height $p \geq 2$. Then there is a finitely generated graded torsion free R-module $\mathfrak{N}(I)$ having no free direct summand, satisfying $H^i_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{N}(I)) = 0$ for $r-p+1 \leq i \leq r-1$, which fits in with an exact sequence of the form

$$0 \longrightarrow S_{p-1} \longrightarrow S_{p-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_0 \oplus \mathfrak{N}(I) \longrightarrow 0\ ,$$

where S_i $(0 \leq i \leq p-1)$ are finitely generated graded free R-modules. Note that $\mathfrak{N}(I)$ is determined uniquely by I. First we itemize some of our recent results concerning the basic sequences of homogeneous ideals.

Theorem 2.1. ([A5]). *Suppose that $I^{[p]} = C \oplus D$ with a finitely generated graded free $k[x_p, \ldots, x_r]$-submodule C and a finitely generated graded $k[x_p, \ldots, x_r]$-submodule D having no free direct summand. Then $D \cong \mathfrak{N}(I)^{[p]}$ as $k[x_p, \ldots, x_r]$-module.*

Corollary 2.2. ([A5]). *Suppose $B_R(I) = (\bar{n}^1; \bar{n}^2; \cdots; \bar{n}^{r+1})$, $B_R(\mathfrak{N}(I)) = (\bar{\gamma}^1; \bar{\gamma}^2; \cdots; \bar{\gamma}^{r+1})$. Then $\bar{n}^p = (\bar{w}', \bar{\gamma}^p)$ up to permutation with a suitable sequence of integers $\bar{w}'$ and $\bar{n}^i = \bar{\gamma}^i$ for all $p+1 \leq i \leq r+1$.*

Theorem 2.3. ([A5]). *Let $p \geq 2$ be an integer and let I and J be homogeneous ideals in R of height p and $p-1$ respectively such that $J \subset I$ and R/J is Cohen-Macaulay. Suppose that $x_p, \ldots, x_r$ is R/J-regular. Then $\mathrm{e}_{\mathfrak{m}}(R/J) \geq \mathrm{e}_{\mathfrak{m}'}(I^{[p]}) \geq \mathrm{e}_{\mathfrak{m}'}(\mathfrak{N}(I)^{[p]})$, where $\mathfrak{m}' = (x_p, \ldots, x_r)k[x_p, \ldots, x_r]$.*

Corollary 2.4. ([A5]). *Let $f_1, \ldots, f_{p-1}$ be homogeneous elements of I which form an R-regular sequence. Then $\prod_{i=1}^{p-1} \deg(f_i) \geq \mathrm{e}_{\mathfrak{m}'}(I^{[p]}) \geq \mathrm{e}_{\mathfrak{m}'}(\mathfrak{N}(I)^{[p]})$, where $\mathfrak{m}' = (x_p, \ldots, x_r)k[x_p, \ldots, x_r]$. In particular,*

$$\min\{\ l \mid [I]_l \neq 0,\ l \in \mathbf{Z}\ \} \geq \mathrm{e}_{(x_2,\ldots,x_r)k[x(1)]}(I^{[2]}) \geq \mathrm{e}_{(x_2,\ldots,x_r)k[x(1)]}(\mathfrak{N}(I)^{[2]})$$

if $p = 2$.

Theorem 2.5. ([A5]). *Let I be a homogeneous ideal in R of height $p \geq 2$ with $B_R(I) = (\bar{n}^1; \bar{n}^2; \cdots; \bar{n}^{r+1})$, $B_R(\mathfrak{N}(I)) = (\bar{\gamma}^1; \bar{\gamma}^2; \cdots; \bar{\gamma}^{r+1})$. Denote by $\bar{w}'$ the sequence of integers satisfying $(\bar{w}', \bar{\gamma}^p) = \bar{n}^p$ up to permutation (see Corollary 2.4). Then there exists an exact sequence of the form*

$$0 \longrightarrow S_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_2 \longrightarrow S_1 \longrightarrow \left(\bigoplus_{l=1}^{p-1} R(-\bar{n}^l)\right) \oplus R(-\bar{w}') \oplus \mathfrak{N}(I) \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

with

$$S_j = \left(\bigoplus_{l=j+1}^{p-1} R(-\bar{n}^l - j)^{\binom{l-1}{j}} \right) \oplus R(-\bar{w}' - j)^{\binom{p-1}{j}} \oplus \left(\bigoplus_{l=j}^{p-1} R(-\bar{\gamma}^l - j + 1)^{\binom{l-1}{j-1}} \right)$$

for $1 \le j \le p-1$.

Remark 2.6. Given a graded R-module M, it is not known what conditions should be imposed on $\bar{w}'$ for a sequence $(\bar{n}^1; \bar{n}^2; \cdots; \bar{n}^{r+1})$ to correspond actually to a homogeneous ideal I with the property $\mathfrak{N}(I) \cong M(-\tilde{h})$ $(\tilde{h} \in \mathbf{Z})$ except for the two cases (a) $p = 2$ (see [A3]) and (b) Buchsbaum case with p arbitrary (see [A2,§§5 – 7]).

For the case $p = 2$ more is known. The next results correspond to Theorem 1.1. Given sequences of integers $B = (\bar{n}^1; \cdots; \bar{n}^i; \cdots; \bar{n}^t)$ and $B' = (\bar{n}'^1; \cdots; \bar{n}'^i; \cdots; \bar{n}'^{t'})$, we define a relation $B \overset{\mathrm{p}}{=} B'$ to mean $t = t'$ and $\bar{n}^i = \bar{n}'^i$ up to permutation for all $1 \le i \le t$.

Theorem 2.7. ([A3]). *Let M be a torsion free graded R-module of rank ≥ 2 satisfying $H^{r-1}_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ and $R' = k[x_2, \ldots, x_r]$.*

(1) *There are unique integers α, $\lambda \geq 0$, σ, a unique sequence of integers $\bar{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\lambda)$ and a unique graded free R-module F_M such that*

$$\begin{cases} R(-\bar{\beta}) \oplus F_M \cong R(-\bar{\beta} - 1) \oplus M^{\langle 1 \rangle} , \\ \text{there exists a homogeneous ideal } I_M \in R \text{ of height two with} \\ B_R(I_M) \overset{\mathrm{p}}{=} (\alpha; \bar{\beta} + \sigma, B_{R'}(M^{[2]}(-\sigma))) \quad , \quad \mathfrak{N}(I_M) \cong M(-\sigma) \ . \end{cases}$$

(2) *The basic sequences of homogeneous ideals $I \in R$ of height two satisfying $\mathfrak{N}(I) \cong M(-\sigma)$ for some $\tilde{h} \in \mathbf{Z}$ are characterized by the condition :*

$$\begin{cases} B_R(I) = (\alpha + v; \bar{w}, \bar{\beta} + \tilde{h}, B_{R'}(M^{[2]}(-\tilde{h}))) \ , \\ v \geq 0 \ , \ \tilde{h} \geq \sigma + v \ , \ \bar{w} = (w_1, \ldots, w_v) \ , \ w_j \geq \alpha + v \ (1 \leq j \leq v) \ , \end{cases}$$

where we may assume with no loss of generality that $\bar{w}$ is nondecreasing. In particular $\bar{w}' = (\bar{w}, \bar{\beta} + \tilde{h})$ up to permutation with the notation of Corollary 2.2. Moreover I has a Bourbaki sequence of the form

$$0 \longrightarrow R(-\bar{w} - 1) \oplus F_M(-\tilde{h}) \longrightarrow R(-\alpha - v, -\bar{w}) \oplus M(-\tilde{h}) \longrightarrow I \longrightarrow 0 \ .$$

Now we can clarify with our vocabulary what the function θ_X is. The next results show that considering θ_X is the same thing as considering the sequence $\bar{w}$.

Proposition 2.8. *Let $\mathcal{M}$ be a reflexive sheaf on $\mathbf{P}^n$ having no direct summand of the form $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(l)$ such that $H^{n-1}(\mathcal{M}(l)) = 0$ for all $l \in \mathbf{Z}$ and let M be the graded R-module $\bigoplus_{l\in\mathbf{Z}} H^0(\mathcal{M}(l))$. For a two-codimensional scheme $X \subset \mathbf{P}^n$ lying in the linkage class $\mathcal{L}$ represented by $\mathcal{M}$, let $\bar{w} = (w_1, \dots, w_v)$ be the nondecreasing sequence of integers associated with the saturated homogeneous ideal I_X of X as in Theorem 2.7. Then*

$$\theta_X(l) = \#\{\ j \mid w_j = l,\ 1 \le j \le v\ \} \quad \textit{for all} \quad l \in \mathbf{Z}\ .$$

Proof. Let X_0 be a minimal member of $\mathcal{L}$. Then $\sigma = \tilde{h}_0$, $s_0(X_0) = \alpha$, $s_0(X) = \alpha + v$, $h_X = \tilde{h} - \tilde{h}_0$, and we may assume $I_{X_0} = I_M$. With the help of the two exact sequences

$$(2.8.1) \qquad 0 \longrightarrow F_M(-\tilde{h}_0) \longrightarrow R(-\alpha) \oplus M(-\tilde{h}_0) \longrightarrow I_M \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow R(-\bar{w}-1) \oplus F_M(-\tilde{h}) \longrightarrow R(-\alpha - v, -\bar{w}) \oplus M(-\tilde{h}) \longrightarrow I \longrightarrow 0\ ,$$

we see

$$\begin{aligned}\eta_X(l) &= \triangle^{n+1}\varphi_{R(-\bar{w})}(l) + \binom{l-\alpha-v}{0} - \binom{l-\alpha-h_X}{0} \\ &= \triangle^{n+1}\varphi_{R(-\bar{w})}(l) + \binom{l-s_0(X)}{0} - \binom{l-s_0(X_0)-h_X}{0}\ .\end{aligned}$$

Therefore

$$\theta_X(l) = \triangle^{n+1}\varphi_{R(-\bar{w})}(l) = \#\{\ j \mid w_j = l,\ 1 \le j \le v\ \}$$

by definition. $\square$

For the rest of this paper, we work with a graded Buchsbaum R-module M with $B_R(M) = (\bar{\mu}^1; \bar{\mu}^2; \cdots; \bar{\mu}^{r+1})$ such that $H^j_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ for $j = 0,\ 1,\ r-1$ and $H^j_{\mathfrak{m}}(M) \cong R/\mathfrak{m}(-\bar{w}^j)$ for $0 < j < r-1$. As is well known, $M \cong \bigoplus_{j=2}^{r-2} \mathrm{Syz}^j_R(R/\mathfrak{m})(-\bar{w}^j)$ (see [G]). Let $N_q := \bigoplus_{j+w^j_l = q,\ 2\le j\le r-2} \mathrm{Syz}^k_j(R/\mathfrak{m})(-w^j_l)$. Let further $W_M := \{\ d + j \mid [H^j_{\mathfrak{m}}(M)]_d \ne 0,\ j < r-1\ \}$. We have

$$\min\{\ q \mid N_q \ne 0\ \} = \min W_M \quad , \quad \max\{\ q \mid N_q \ne 0\ \} = \max W_M\ ,$$

$$M = \bigoplus_{q=\min W_M}^{\max W_M} N_q \quad , \quad B_R(N_q) = (q^{\mathrm{rank} N_q}; q, \dots, q; q, \dots) \quad \text{see [A4,(4.3)]}\ ,$$

so that $\bar{\mu}^1 = (q^{\mathrm{rank} N_q})_{\min W_M \le q \le \max W_M}$. Besides, $\min\{\ l \mid [N_q]_l \neq 0\ \} = q$ if $N_q \neq 0$ and $\min\{\ l \mid [M]_l \neq 0\ \} = \min W_M$. Since M is Buchsbaum, we know by [A2,§§5,6] that

$$\begin{cases} \beta = \emptyset \ , \\ \alpha = \displaystyle\sum_{j=0}^{r-3} \binom{r-2}{j} l_R(H_{\mathfrak{m}}^{j+1}(M)) \ . \end{cases}$$

Moreover

$$\begin{aligned} \alpha &= \min(\bar{\mu}^2 + \sigma) = \min(\bar{\mu}^1 + \sigma) \\ &= \min\{\ q \mid N_q \neq 0\ \} + \sigma = \min W_M + \sigma \ . \end{aligned}$$

Let $\mathcal{L}$ be the even linkage class represented by the sheaf $\mathcal{M}$ on $\mathbf{P}^n$ associated with M. For a minimal $X_0 \in \mathcal{L}$, therefore, we have

$$s_0(X_0) = \min W_M + \sigma \ .$$

To determine $t_1(X_0)$, note first that (2.8.1) becomes

(2.9)

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{q=\min W_M}^{\max W_M} R(-q-\sigma)^{\mathrm{rank} N_q} \longrightarrow R(-\min W_M - \sigma) \oplus \left(\bigoplus_{q=\min W_M}^{\max W_M} N_q(-\sigma) \right)$$
$$\longrightarrow I_M \longrightarrow 0 \ .$$

Looking at this sequence carefully, one finds that all elements of $[I_M]_l$ are divisible by the determinant of $R(-\max W_M - \sigma)^{\mathrm{rank} N_{\max W_M}} \longrightarrow N_{\max W_M}(-\sigma)$ for $l < \max W_M + \sigma$, since $[N_{\max W_M}(-\sigma)]_l = 0$ for all l in that region. This determinant is of positive degree, so that $t_1(X_0) \geq \max W_M + \sigma$. On the other hand I_M is generated by $[I_M]_{\max W_M + \sigma}$ in degrees $\geq \max W_M + \sigma$ by (2.9). Hence

$$t_1(X_0) = \max W_M + \sigma \ .$$

Finally we go on to $e(X_0)$. Using the exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{Syz}_R^j(R/\mathfrak{m}) \longrightarrow \bigwedge^{j-1} (R(-1)^r) \longrightarrow \mathrm{Syz}_R^{j-1}(R/\mathfrak{m}) \longrightarrow 0 \ ,$$

one finds $\left[H^r_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Syz}^j_R(R/\mathfrak{m}))\right]_l = 0$ for $l \geq j-r$, $1 \leq j \leq r-2$, therefore $\left[H^r_{\mathfrak{m}}(N_q(-\sigma))\right]_{l+\sigma-r} = 0$ for all $l \geq q$. By this observation, it follows from the isomorphisms $H^{n-2}(\mathcal{O}_{X_0}(l)) \cong H^{n-1}(\mathcal{I}_{X_0}(l)) \cong \left[H^{r-1}_{\mathfrak{m}}(I_{X_0})\right]_l$ and the exact sequence

$$0 \longrightarrow H^{r-1}_{\mathfrak{m}}(I_{X_0}) \longrightarrow \bigoplus_q H^r_{\mathfrak{m}}(R(-q-\sigma)^{\mathrm{rank} N_q}) \longrightarrow H^r_{\mathfrak{m}}(R(-\min W_M - \sigma) \oplus M(-\sigma))$$

with $M(-\sigma) = \bigoplus_{q=\min W_M}^{\max W_M} N_q(-\sigma)$ that

$$\begin{cases} H^{n-2}(\mathcal{O}_{X_0}(\max W_M + \sigma - n - 1)) \neq 0 \ , \\ H^{n-2}(\mathcal{O}_{X_0}(\max W_M + \sigma - n)) = 0 \ . \end{cases}$$

Here, in case $\max W_M = \min W_M$, we use the fact that $\mathrm{rank}_R(N_q) > 1$ derived from $H^1_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Thus

$$e(X_0) = \max W_M + \sigma - n - 1 \ .$$

For any $X \in \mathcal{L}$, since $s_0(X) = s_0(X_0) + v$ and $h_X = \tilde{h} - \sigma$, we obtain

$$\begin{aligned} e(X_0) + n + 1 + h_X &= \max W_M + \sigma + (\tilde{h} - \sigma) \\ &\geq \max W_M + \sigma + v \geq \min W_M + \sigma + v \\ &= \alpha + v = s_0(X) \ , \end{aligned}$$

which means that the condition (2) of Theorem 1.2 is always satisfied in the Buchsbaum case.

At this point we can compare the conditions (1) and (2) in Theorem 1.1 with those in our old results below on the integrality of two-codimensional graded Buchsbaum rings. We define a sequence of integers $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_t)$ to be connected if $z_l \leq z_{l+1} \leq z_l + 1$ for all $1 \leq l \leq t-1$ or $t = 0$ (i.e. $\bar{z}$ is empty).

Theorem 2.10. ([A1], [A2]). *Let I be a homogeneous ideal in R with $\dim(R/I) = r-2$, $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R/I) = c$ such that R/I is Buchsbaum with $H^j_{\mathfrak{m}}(R/I) \cong R/\mathfrak{m}(-\bar{\nu}^j)$, ($\bar{\nu} = (\nu^j, \ldots, \nu^j_{v_j})$, $c \leq j < r-2$), $B_R(I) = (\bar{n}^1; \bar{n}^2; \cdots; \bar{n}^{r-c})$, $\bar{n}^2 = (\ (\ (\bar{\nu}^j + j + 1)^{\binom{r-2}{j}}\ )_{c \leq j < r-2}\ ,\ \bar{w}\ )$. Denote by $u_{\max}$ and $u_{\min}$ the maximum and the minimum of $U := \{\ \bar{\nu}^j_l + j + 1 \mid c \leq j < r-2,\ 1 \leq l \leq v_j\ \}$ respectively.*

(1) *If R/I is integral, one of the following conditions holds.*

(2.10.1) $\quad r \geq 4\ ,\ c = r-2\quad$ *and the sequence* $\quad \bar{n}^2 = \bar{w}\quad$ *is connected (see* [GP]*),*

(2.10.2) $\quad r = 4\ ,\ c = 1\ ,\ n_1^1 = 2\ ,\ v = 0\ ,\ v_1 = 1\ ,\ \nu_1^1 \geq 1\ ,$

(2.10.3) $\quad r \geq 4\ ,\ 0 < c < r-2\ ,\ n_1^1 \geq 3\ ,$

$$v = n_1^1 - \sum_{j=c}^{r-3} \binom{r-2}{j} v_j \geq u_{\max} - u_{\min}\ ,$$

$$w_1 \leq u_{\min}\ ,\ u_{\max} - 1 \leq w_v \quad \textit{and the sequence } \bar{w} \textit{ is connected}\ .$$

(2) *In the case* $\mathrm{char}(k) = 0$*, these conditions are also sufficient for the existence of a two-codimensional Buchsbaum prime ideal* I *with* $B(I) = (\bar{n}^i)_{1\leq i\leq r-c}$.

With the notation of the above theorem, let $X = \mathrm{Proj}(R/I)$, $M = \mathfrak{N}(I)$. Then $H^j_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^{j-1}_{\mathfrak{m}}(R/I) \cong R/\mathfrak{m}(-\bar{\nu}^{j-1})$, $\bar{w}^j = \bar{\nu}^{j-1}$, $W_M = U$ and $\tilde{h} = 0$. Hence $h_X = \tilde{h} - \tilde{h}_0 = \tilde{h} - \sigma = -\sigma$,

$$s_0(X_0) + h_X = \min W_M + \sigma + h_X = \min W_M = u_{\min}\ ,$$

$$t_1(X_0) + h_X - 1 = \max W_M + \sigma + h_X - 1 = \max W_M - 1 = u_{\max} - 1\ .$$

Thus the necessary conditions in Theorem 1.1 coincide exactly with those in the above theorem, except for the case (2.10.2). This exception comes from the following fact. If $r = 4$, $M = \mathrm{Syz}^2_R(R/\mathfrak{m})$, then a curve X_1 in the sense of Theorem 1.3, satisfies $B_R(I_{X_1}) = (2; 2^2; 2)$, $\left[H^1_{\mathfrak{m}}(R/I_{X_1})\right]_0 \cong R/\mathfrak{m}$ and it cannot be deformed into an integral curve with the use of its Bourbaki sequence.

Remark 2.11. In the Buchsbaum case, the basic sequence of X_1 is as follows.

(1) $B_R(I_{X_1}) = (\alpha; \alpha^\alpha; \alpha, \dots)$ if $\max W_M = \min W_M$.

(2) $B_R(I_{X_1}) \overset{\mathrm{p}}{=} (\alpha+v; \bar{w}, B_{R'}(M) - \min W_M + \alpha + v)$ with $v = \max W_M - \min W_M$, $\bar{w} = (\alpha+v, \alpha+v+1, \dots, \alpha+2v-1)$ if $\max W_M > \min W_M$.

References

[A1] M. Amasaki, *Integral arithmetically Buchsbaum curves in* $\mathbf{P}^3$, J. Math. Soc. Japan **41**, No. 1 (1989), 1 – 8.

[A2] ———, *Application of the generalized Weierstrass preparation theorem to the study of homogeneous ideals*, Trans. AMS **317** (1990), 1 – 43.

[A3] ———, *On the classification of homogeneous ideals of height two in polynomial rings*, Proc. 36th Sympos. Algebra, Okayama, July 29 – August 1, 1991, pp. 129 – 151.

[A4] ———, *Generators of graded modules associated with linear filter-regular sequences*, preprint (August, 1994).

[A5] ———, *Basic sequences of homogeneous ideals in polynomial rings*, preprint (May, 1995).

[BBM] E. Ballico, G. Bolondi and J. C. Migliore, *The Lazarsfeld-Rao problem for liaison classes of two-codimensional subschemes of* $\mathbf{P}^n$, Amer. J. Math. **113** (1991), 117 – 128.

[BM] G. Bolondi and J. C. Migliore, *The Lazarsfeld-Rao property on an arithmetically Gorenstein variety*, manu. math. **78** (1993), 347 – 368.

[G] S. Goto, *Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules*, in "Commutative Algebra and Combinatorics", Advanced Studies in Pure Mathematics **11**, Kinokuniya, Tokyo ; North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 39 – 64.

[GP] L. Gruson et C. Peskine, *Genre des courbes de l'éspace projectif*, in "Algebraic Geometry", Lecture Notes in Math. **687**, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1978, pp. 31 – 59.

[MDP] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, *Sur la classification des courbes gauches*, Astèrisque 184 – 185, Société Mathématique de France, 1990.

[N1] S. Nollet, *Even linkage classes*, preprint.

[N2] S. Nollet, *Integral subschemes of codimension two*, preprint.

[PR] G. Paxia and A. Ragusa, *Irreducible Buchsbaum curves*, Comm. Algebra **23** (1995), 3025 – 3031.

[R] P. Rao, *Liaison equivalence classes*, Math. Ann. **258** (1981), 169 – 173.

Mutsumi Amasaki

Faculty of School Education, Hiroshima University,

Kagamiyama 1-1-1, Higashi-Hiroshima 739, Japan

E-mail : `amasaki@ue.ipc.hiroshima-u.ac.jp`

与えられた Hilbert function と生成元の個数をもつ高さ 3 の Gorenstein ideal の構成

張間　忠人　　四国大学
経営情報学部

1 序

Stanley 氏の結果 [10, Theorem 4.2] により簡単に Gorenstein sequence $h = \{h_0 = 1, h_1 = 3, \ldots, h_s, 0, 0, \ldots\}$ $(h_s \neq 0)$ が構成できる. 例えば, 次の sequence $h = \{h_i\}$

h :	1,	3,	6,	10,	13,	14,	14,	13,	10,	6,	3,	1,	0,	0,	0, ...
Δh :	1,	2,	3,	4,	3,	1,	0,	−1,	−3,	−4,	−3,	−2,	−1,	0,	0, ...
$\Delta^2 h$:	1,	1,	1,	1,	−1,	−2,	−1,	−1,	−2,	−1,	1,	1,	1,	1,	0, ...
$\Delta^3 h$:	1,	0,	0,	0,	−2,	−1,	1,	0,	−1,	1,	2,	0,	0,	0,	−1, ...

は, 対称的であり, 差の sequence Δh が中心 $\lfloor s/2 \rfloor$ まで O-sequence であるので Gorenstein sequence である. ゆえに, $R = k[x, y, z]$ (ここでは, k : 無限体) の homogeneous ideal I で, $A = R/I = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ が Gorenstein であり, かつ Hilbert function $H(A) = \{H(A, i)\}$ が h であるようなものが存在する.

また, R/I が Gorenstein Artin 環であるとき, 渡辺純三先生の結果 [11, Corollary] により, I の生成元の最小の個数 $\mu(I)$ は 3 以上の奇数であることがわかる.

ここでは, この 2 つの結果の延長として, "Hilbert function が ideal の生成元の個数にどの程度の制限を与えるのだろうか？" といった問題を考えたい.

問題 . Gorenstein sequence $h = \{h_0 = 1, h_1 = 3, \ldots, h_s, 0, 0, \ldots\}$ $(h_s \neq 0)$ に対して,

$$\{\mu(I) \mid R/I : \text{Gorenstein}, \ H(A) = h\} \quad \text{を求めよ.}$$

前回のシンポジウムでは, 講演の最後に次のことを付け加えた.

定義 . Gorenstein sequence $h = \{h_0 = 1, h_1 = 3, \ldots, h_s, 0, 0, \ldots\}$ $(h_s \neq 0)$ に対して,

$$\alpha(h) = \min\{i \mid h_i < \binom{2+i}{2}\}, \quad \overline{\mu}(h) = 2\alpha(h) + 1,$$

$$\nu(h) = -\sum_{i=1}^{s+2} \min\{\Delta^3 h_i, 0\}, \qquad \underline{\mu}(h) = \min\{n \in \mathbf{Z} \mid n : \text{odd}, \ n \geq \nu(h)\}$$

$$Gor(h) = \{I \subset R \mid R/I : \text{Gorenstein}, H(R/I) = h\} \quad \text{を定義する.}$$

定理 . $h = \{h_0 = 1, h_1 = 3, \ldots, h_s, 0, 0, \ldots\}$ $(h_s \neq 0)$ を Gorenstein sequence とする.

(1) $I \in Gor(h)$ に対して, $\underline{\mu}(h) \leq \mu(I)$.

(2) $\underline{\mu}(h) \leq n \leq \overline{\mu}(h)$ をみたす奇数 n に対して, $\mu(I) = n$ をみたす $I \in Gor(h)$ が存在する.

残る問題は, "$\overline{\mu}(h)$ が upper bound であるか ?" であった.

予想. $I \in Gor(h)$ に対して, $\mu(I) \leq \overline{\mu}(h)$ が成立する.

ところが, Diesel 氏は, [1, Theorem 2.1] の構造定理を使って上の定理と予想を, すでに [3, Theorem 2.3, Corollary 2.6, Theorem 3.3, Corollary 3.4] の中で証明していた (4 月に渡辺純三先生に教えていただきました). ただ, 今回 [8] で得られた Gorenstein ideal の例は, 別構成であったので報告させていただきます. この報告書では, (枚数の都合で定理や補題の証明は概略の説明だけにさせていただき) いくつかの例の計算の中で, この構成のアウトラインが説明できたらと思います. 詳しいことは [8] をご覧下さい.

また, Migliore 氏から 8 月に届いた論文 [5] にも別の方法で例が構成がされていました.

2 Pure configuration の ideal の和

上の例では, $\alpha(h) = 4,\ \overline{\mu}(h) = 9,\ \nu(h) = 4,\ \underline{\mu}(h) = 5$ なので,

$$\{\mu(I) \mid I \in Gor(h)\} = \{5, 7, 9\}$$

である. そこで, $I \in Gor(h)$ で $\mu(I) = 5, 7, 9$ となる I をそれぞれ構成してみよう.

$R = k[x, y, z]$ を $\mathbf{P}^2$ の斉次座標環とし, $\mathbf{P}^2$ の有限個の点からなる集合 X の ideal を $I(X)$ で表す.

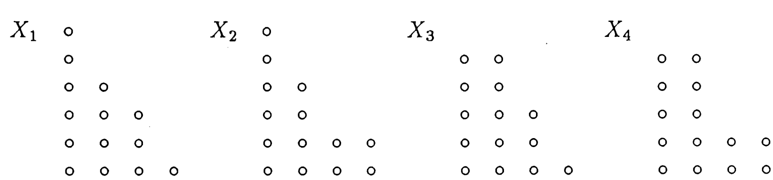
定義. (1) $\mathbf{P}^2$ の異なる有限個の点からなる集合 X に対して

$$I(X) = (\prod_{j=1}^{d}(x - b_j z),\ \prod_{j=1}^{e}(y - c_j z))$$

とかけるとき, X を *basic configuration of type* (d, e) という. ここで, b_j, c_j は異なる k の元である. このとき, $X = B(d, e)$ とかく. 明らかに $B(d, e)$ は complete intersection である.

(2) X に対して, 次の 4 つの条件をみたす basic configuration $B(d_1, e_1), \ldots, B(d_m, e_m)$ が存在するとき, X を *pure configuration* という: (i) $e_1 > \cdots > e_m$; (ii) $B(d_i, e_i) \bigcap B(d_j, e_j) = \phi$ if $i \neq j$; (iii) $X = B(d_1, e_1) \bigcup \cdots \bigcup B(d_m, e_m)$; (iv) $\varphi(B(d_i, e_i)) \supset \varphi(B(d_{i+1}, e_{i+1}))$ for all $i = 1, 2, \ldots, m-1$, where $\varphi : \mathbf{P}^2 \backslash \{(1,0,0)\} \longrightarrow \mathbf{P}^1$ is the map defined by sending the point (x, y, z) to the point (y, z). このとき, $X = \bigcup_{i=1}^{m} B(d_i, e_i)$ とかく.

例.



$X_1 = B(1,6) \bigcup B(1,4) \bigcup B(1,3) \bigcup B(1,1),\quad X_2 = B(1,6) \bigcup B(1,4) \bigcup B(2,2),$
$X_3 = B(2,5) \bigcup B(1,3) \bigcup B(1,1),\quad X_4 = B(2,5) \bigcup B(2,2).$

定理の証明に必要な補題の中で, とくに重要なものを述べることにします.

補題 1. X と Y を $\mathbf{P}^2$ の有限個の点からなる集合で, $X \bigcap Y = \phi$ かつ $X \bigcup Y$ が basic configuration であるものとすると, $I(X) + I(Y)$ は 高さ 3 の Gorenstein ideal である.

証明. $X \cap Y = \phi$ から $Ass(R/I(X) + I(Y)) = \{(x, y, z)\}$ である. ゆえに, $I(X) + I(Y)$ の高さは 3 である. また, exact sequence: $0 \to R/I(X) \cap I(Y) \to R/I(X) \bigoplus R/I(Y) \to R/I(X) + I(Y) \to 0$ から long exact sequence: $\cdots \to Hom(k, R/I(X) \bigoplus R/I(Y)) \to Hom_R(k, R/I(X) + I(Y)) \to Ext^1_R(k, R/I(X) \cap I(Y)) \to Ext^1_R(k, R/I(X) \bigoplus R/I(Y)) \to \cdots$ を得る. 条件から $Hom(k, R/I(X) \bigoplus R/I(Y)) = 0, Hom_R(k, R/I(X) + I(Y)) \neq 0$, さらに $Ext^1_R(k, R/I(X) \cap I(Y)) \cong k$ がわかり, よって, $Hom_R(k, R/I(X) + I(Y)) \cong k$. q.e.d.

補題 2. pure configuration $X = \bigcup_{i=1}^m B(d_i, e_i)$ の生成元の個数は$\mu(I(X)) = m + 1$ であって, Hilbert series は

$$F(X, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^{v_{i-1}} \frac{(1 - \lambda^{d_i})(1 - \lambda^{e_i})}{(1 - \lambda)^3}$$

である. ただし, $v_0 = 0$, $v_i = d_1 + \cdots + d_i$ $(i = 1, \ldots, m - 1)$ とする.

証明. k の元で b_j, c_j で

$$I(B(d_i, e_i)) = (f_i = \prod_{j=v_{i-1}+1}^{v_i} (x - b_j z),\ g_i = \prod_{j=1}^{e_i} (y - c_j z))$$

をみたすものがある. さらに,

$$h_i = f_1 \cdots f_i \text{ for all } \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

とおく. このとき $I(X)$ は

$$\{g_1, g_2 h_1, g_3 h_2, \ldots, g_m h_{m-1}, h_m\}$$

で minimally に生成されることがわかる.

次の Hilbert series については, m に関する帰納法で証明する. $m = 1$ のときは, 明らかに

$$F(B(d_1, e_1), \lambda) = \frac{(1 - \lambda^{d_1})(1 - \lambda^{e_1})}{(1 - \lambda)^3}$$

である.

$m > 1$ のとき, まず

$$I(\bigcup_{i=1}^{m-1} B(d_i, e_i)) = (g_1, g_2 h_1, \ldots, g_{m-1} h_{m-2}, h_{m-1}).$$

$g_i \in g_m R$ なので,

$$\begin{aligned} I(\bigcup_{i=1}^{m-1} B(d_i, e_i)) + I(B(d_m, e_m)) &= (g_1, g_2h_1, \ldots, g_{m-1}h_{m-2}, h_{m-1}) + (f_m, g_m) \\ &= (f_m, g_m, h_{m-1}) \end{aligned}$$

である. また

$$0 \longrightarrow R/I(X) \longrightarrow R/I(\bigcup_{i=1}^{m-1} B(d_i, e_i)) \oplus R/I(B(d_m, e_m)) \longrightarrow R/(f_m, g_m, h_{m-1}) \longrightarrow 0$$

から

$$F(X, \lambda) = F(R/I(\bigcup_{i=1}^{m-1} B(d_i, e_i)), \lambda) + F(R/I(B(d_m, e_m)), \lambda) - F(R/(f_m, g_m, h_{m-1}), \lambda).$$

さらに, 帰納法の仮定から

$$F(R/I(\bigcup_{i=1}^{m-1} B(d_i, e_i)), \lambda) = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda^{v_{i-1}} \frac{(1-\lambda^{d_i})(1-\lambda^{e_i})}{(1-\lambda)^3}$$

を得る. $\{f_m, g_m, h_{m-1}\}$ が regular sequence であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} & F(R/I(B(d_m, e_m), \lambda) - F(R/(f_m, g_m, h_{m-1}), \lambda) \\ = & \frac{(1-\lambda^{d_m})(1-\lambda^{e_m})}{(1-\lambda)^3} - \frac{(1-\lambda^{d_m})(1-\lambda^{e_m})(1-\lambda^{v_{m-1}})}{(1-\lambda)^3} \\ = & \frac{\lambda^{v_{m-1}}(1-\lambda^{d_m})(1-\lambda^{e_m})}{(1-\lambda)^3}. \end{aligned}$$

よって,

$$F(X, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^{v_{i-1}} \frac{(1-\lambda^{d_i})(1-\lambda^{e_i})}{(1-\lambda)^3}.$$

q.e.d.

例. $\mu(I(X_1)) = 5$, $\mu(I(X_2)) = 4$, $\mu(I(X_3)) = 4$, $\mu(I(X_4)) = 3$ である. また, すべての $i = 1, 2, 3, 4$ に対して

$$\begin{aligned} F(X_i, \lambda) &= \frac{1 - 2\lambda^4 - \lambda^5 + \lambda^6 + \lambda^7}{(1-\lambda)^3} \\ &= 1 + 3\lambda + 6\lambda^2 + 10\lambda^3 + 13\lambda^4 + 14\lambda^5 + \sum_{i \geq 6} 14\lambda^i \end{aligned}$$

である. ゆえに, X_1, X_2, X_3, X_4 は同じ Hilbert function, $1, 3, 6, 10, 13, 14, 14, \ldots$ をもつ.

補題 3. $X \subset B$ をみたす pure configuration $X = \bigcup_{i=1}^{m} B(d_i, e_i)$ と basic configuration $B = B(d, e)$ に対して $Y = B \backslash X = \{P \in B \mid P \notin X\}$ とおく. このとき $e = e_1$ かつ $d > \sum_{i=1}^{m} d_i$ ならば, $\mu(I(X) + I(Y)) = 2\mu(X) - 1 = 2m + 1$ である.

証明. k の元 $b_1, \ldots, b_d, c_1, \ldots, c_e$ で

$$I(B) = (\prod_{i=1}^{d}(x - b_i z), \prod_{i=1}^{e}(y - c_i z))$$

をみたすものが存在する. さらに, $X \subset B$ なので,

$$I(B(d_i, e_i)) = (f_i, g_i), \quad \text{where } f_i = \prod_{j=v_{i-1}+1}^{v_i}(x - b_j z), \ g_i = \prod_{j=1}^{e_i}(y - c_j z)$$

と仮定してよい. $f_{m+1} = \prod_{j=v_m+1}^{d}(x - b_j z)$ とおく. また, g'_i $(2 \leq i \leq m)$ を $g_1 = g'_i g_i$ をみたすものとする. $e = e_1$ かつ $d > \sum_{i=1}^{m} d_i$ なので, Y もまた X と basic configuration の個数が同じ pure configuration である. ゆえに補題 2 の証明から, $I(X)$ と $I(Y)$ はそれぞれ

$$A = \{g_1, g_2 f_1, g_3 f_1 f_2, \ldots, g_m f_1 \cdots f_{m-1}, f_1 \cdots f_m\}$$

$$と \quad B = \{g_1, g'_m f_{m+1}, g'_{m-1} f_{m+1} f_m, \ldots, g'_2 f_{m+1} f_m \cdots f_3, f_{m+1} f_m \cdots f_2\}$$

で minimally に生成されることがわかり, さらに簡単な計算で, $I(X) + I(Y)$ は $A \cup B$ で minimally に生成されることが確認できる. $A \cap B = \phi$ に注意する. q.e.d.

注意. 補題 3 は, 一般に次の形で成立する: $X \subset B$ をみたす pure configuration $X = \bigcup_{i=1}^{m} B(d_i, e_i)$ と basic configuration $B = B(d, e)$ に対して $Y = B \backslash X = \{P \in B \mid P \notin X\}$ とおく. このとき $\mu(I(X) + I(Y)) = 2\min\{\mu(I(X)), \mu(I(Y))\} - 1$ である.

Gorenstein sequence $h = \{h_0 = 1, h_1 = 3, \ldots, h_s, 0, 0, \ldots\}$ $(h_s \neq 0)$ に対して, sequence $b = \{b_i\}$, ただし $b_i = h_i$ $(0 \leq i \leq \lfloor s/2 \rfloor)$, $b_i = h_{\lfloor s/2 \rfloor}$ $(i \geq \lfloor s/2 \rfloor + 1)$, を h に付随した differentiable O-sequence と呼ぶことにする.

補題 4. $h = \{h_0 = 1, h_1 = 3, \ldots, h_s, 0, 0, \ldots\}$ $(h_s \neq 0)$ を Gorenstein sequence とし, $b = \{b_i\}$ を h に付随した differentiable O-sequence とする. さらに, pure configuration $X = \bigcup_{i=1}^{m} B(d_i, e_i)$ は b を Hilbert function にもつものとする. $d = s + 3 - e_1$, $e = e_1$ とおく. このとき,
(1) $d > \sum_{i=1}^{m} d_i$, すなわち, $X \subset B$ をみたす basic configuration $B = B(d, e)$ が存在する.
(2) $Y = B \backslash X$ とおくと, $H(R/I(X) + I(Y)) = h$ である.

証明. [7, Lemma 3.1] を使えば証明できる. q.e.d.

例 (1) 上の例では $s = 11$ なので, $d = 11 + 3 - 6 = 8, e = 6$. ゆえに, $Y_1 = B(8, 6) \backslash X_1$ とおくと, $I(X_1) + I(Y_1) \in Gor(h)$ かつ $\mu(I(X_1) + I(Y_1)) = 9$ である.
(2) $d = 11 + 3 - 6 = 8, e = 6$ なので $Y_2 = B(8, 6) \backslash X_2$ とおくと, $I(X_2) + I(Y_2) \in Gor(h)$ かつ $\mu(I(X_2) + I(Y_2)) = 7$ である.
(3) $d = 11 + 3 - 5 = 9, e = 5$ なので $Y_4 = B(9, 5) \backslash X_4$ とおくと, $I(X_4) + I(Y_4) \in Gor(h)$ かつ $\mu(I(X_4) + I(Y_4)) = 5$ である.

3 Gorenstein sequence h に付随した differentiable O-sequence b を Hilbert function にもつ pure configuration の構成

この辺りの話は [2,4] に関係してくる．ここでは, 少し違った方法で（b から 2 回差をとった sequence $\Delta^2 b$ の分解を考えて）構成する．

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
b: & 1, & 3, & 6, & 10, & 13, & 14, & 14, & 14, & 14, & \ldots \\
\Delta b: & 1, & 2, & 3, & 4, & 3, & 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots \\
\Delta^2 b: & 1, & 1, & 1, & 1, & -1, & -2, & -1, & 0, & 0, & \ldots \\
\Delta^3 b: & 1, & 0, & 0, & 0, & -2, & -1, & 1, & 1, & 0, & \ldots
\end{array}
$$

与えられた Gorenstein sequence h と生成元の個数 n に対して, b を Hilbert function にもち, 生成元の個数が $(n+1)/2$ である pure configuration X を構成すれば補題 3, 4 から我々のめざす Gorenstein ideal が構成できる．ところが, 一般に $H(X)=b$ をみたす $X\subset \mathbf{P}^2$ に対して

$$\underline{\mu}(b) = -\sum_{i\geq 0}\min\{\Delta^3 b_i, 0\} \leq \mu(I(X)) \leq \overline{\mu}(b) = \alpha(h)+1$$

が成り立つことがわかり (cf. [2,9]), n の値によっては b を Hilbert function にもつ pure configuration だけを考えても構成できない．例えば, $h: 1,3,6,10,11,10,6,3,1,0,\ldots$ ($\underline{\mu}(h)=5, \overline{\mu}(h)=9$) を考える．このとき, $b: 1,3,6,10,11,11,\ldots$ ($\underline{\mu}(b)=4, \overline{\mu}(b)=5$) であるので, $n=7,9$ についてはうまくいくが, $n=5$ の場合は無理である．$n=5$ の場合は次のような X, Y をとればよい．手順は少し複雑なのでここでは省略させていただきます．X の Hilbert function は $1,3,6,10,13,15,15,\ldots$ である．

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \quad Y \\
 & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
X & \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
$$

しかし,（例えば）n の値が upper bound $\overline{\mu}(h)=2\alpha(h)+1$ のときはうまくいく．つまり, b を Hilbert function にもち, 生成元の個数が $\overline{\mu}(b)=(\overline{\mu}(h)+1)/2=\alpha(h)+1$ である pure configuration X はいつでも構成できる．この X は次のように構成する．$\Delta^2 b$ はいつも

$$\Delta^2 b_i = \begin{cases} 1 & 0\leq i\leq \alpha(h)-1, \\ \text{non-positive} & \alpha(h)\leq i \end{cases}$$

であって, $\sum \Delta^2 b_i = 0$ である．さて, $\Delta^2 b_i$ の前半部分の 1 の個数（いつも $\alpha(h)$ 個）と, 後半の negative 部分を -1 の何個かの和と考えたときの個数は, $\sum \Delta^2 b_i = 0$ ということから一致する．上の例では, 前半部分の 1 の個数は 4 個であって, 後半部分の negative 部分は, $\Delta^2 b_4 = -1, \Delta^2 b_5 = -2 = (-1)+(-1), \Delta^2 b_6 = -1$ なので, -1 の個数は 4 である．そこで, 1 については次数の小さい方から, -1 については次数の大きい方から選んで, 1 と -1 の組を作る．明らかに, 組の個数は $\alpha(h)$ 個である．上の例では, $\Delta^2 b_0 = 1$ と $\Delta^2 b_6 = -1$, $\Delta^2 b_1 = 1$ と $\Delta^2 b_5 = -2$ の -1, $\Delta^2 b_2 = 1$ と $\Delta^2 b_5 = -2$ の -1, $\Delta^2 b_3 = 1$ と $\Delta^2 b_4 = -1$ の

ように 4 組できる. ここで, 次のような$\sum_{i\geq 0} b_i\lambda^i$ の分解を考えよう. 第 3 式に注意する.

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i\geq 0} b_i\lambda^i \\
= &\ \frac{1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3-\lambda^4-2\lambda^5-\lambda^6}{(1-\lambda)^2} \\
= &\ \frac{(1-\lambda^6)+(\lambda-\lambda^5)+(\lambda^2-\lambda^5)+(\lambda^3-\lambda^4)}{(1-\lambda)^2} \\
= &\ \frac{(1-\lambda^{\mathbf{1}})(1-\lambda^{\mathbf{6}})}{(1-\lambda)^3}+\lambda\frac{(1-\lambda^{\mathbf{1}})(1-\lambda^{\mathbf{4}})}{(1-\lambda)^3}+\lambda^2\frac{(1-\lambda^{\mathbf{1}})(1-\lambda^{\mathbf{3}})}{(1-\lambda)^3}+\lambda^3\frac{(1-\lambda^{\mathbf{1}})(1-\lambda^{\mathbf{1}})}{(1-\lambda)^3}.
\end{aligned}$$

最後の式の分子の λ の次数をとってきて, $X_1 = B(1,6)\bigcup B(1,4)\bigcup B(1,3)\bigcup B(1,1)$ を作る. このとき, 補題 2 から $\mu(I(X)) = 4+1 = 5$, $F(X,\lambda) = \sum_{i\geq 0} b_i\lambda^i$, すなわち $H(X) = b$ が確かめられる. 一般に, n の値が upper bound $\overline{\mu}(h)$ の場合はこのように構成される. 他の n の値についても, ほとんどの場合は $\sum_{i\geq 0} b_i\lambda^i$ の分解を考えて構成できる. ある手順による (その分解手順の説明は, ここでは省略します) 次の分解を考えよう.

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i\geq 0} b_i\lambda^i \\
= &\ \frac{(1-\lambda^6)+(\lambda-\lambda^5)+(\lambda^2+\lambda^3-\lambda^4-\lambda^5)}{(1-\lambda)^2} \\
= &\ \frac{(1-\lambda^{\mathbf{1}})(1-\lambda^{\mathbf{6}})}{(1-\lambda)^3}+\lambda\frac{(1-\lambda^{\mathbf{1}})(1-\lambda^{\mathbf{4}})}{(1-\lambda)^3}+\lambda^2\frac{(1-\lambda^{\mathbf{2}})(1-\lambda^{\mathbf{2}})}{(1-\lambda)^3}.
\end{aligned}$$

同じように, 最後の式の分子の λ の次数をとってきて, $X_2 = B(1,6)\bigcup B(1,4)\bigcup B(2,2)$ を作る. このとき, 補題 2 から $\mu(I(X)) = 3+1 = 4$, $H(X) = b$ が確かめられる. X_4 であれば,

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i\geq 0} b_i\lambda^i \\
= &\ \frac{(1+\lambda-\lambda^5-\lambda^6)+(\lambda^2+\lambda^3-\lambda^4-\lambda^5)}{(1-\lambda)^2} \\
= &\ \frac{(1-\lambda^{\mathbf{2}})(1-\lambda^{\mathbf{5}})}{(1-\lambda)^3}+\lambda^2\frac{(1-\lambda^{\mathbf{2}})(1-\lambda^{\mathbf{2}})}{(1-\lambda)^3}.
\end{aligned}$$

以上のように, 与えられた Gorenstein sequence と生成元の個数をもつ R の中の高さ 3 の Gorenstein ideal は $I(X)+I(Y)$ の形の ideal で構成できた. [5] の中でも述べられているように, 次のような問題は興味深いと思います.

問題 (cf. [5]). $R = k[x,y,z]$ の高さ 3 の Gorenstein ideal はいつ幾何的に link する 2 つの ideal の和で表されるか ?

4 Weak Stanley property

定義 (cf. [12]). $A = \bigoplus_{i=0}^{s} A_i, A_s \neq 0$ を Artin graded ring とする. 次の性質をもつとき, A は weak Stanley property をもつという: (i) A の Hilbert function は unimodal である. (ii) 元 $g \in A_1$ で, すべての i に対して, k-vector space homomorphism $A_i \ni f \mapsto fg \in A_{i+1}$ が injective または surjective となるものが存在する.

注意. (1) [12, Example 3.9] から, ほとんどの Gorenstein 環は Weak Stanley property をもつことがわかる.

(2) 今回 [8] で得られた Gorenstein 環の例は, すべて Weak Stanley property をもつ.

今後, 次のような問題を考えていきたい.

問題. I を $R = k[x, y, z]$ の高さ 3 の Gorenstein ideal とする.

(1) R/I は weak Stanley property をもつか？

(2) もし, R/I が weak Stanley property をもつとき, I は幾何的に link する 2 つの ideal の和で表されるか？

References

[1] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, *Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorem for ideals of codimension 3*, Amer. J. Math. **99** (1977), 447-485.

[2] G. Campanella, *Standard bases of perfect homogeneous polynomial ideals of height 2*, J. Algebra **101** (1986), 47-60.

[3] S. J. Diesel, *Irreducibility and dimension theorems for families of height 3 Gorenstein algebras*, to appear in Pacific J. Math..

[4] A. V. Geramita, P. Maroscia and L. G. Roberts, *The Hilbert function of a reduced K-algebra*, J. London Math. Soc. **28** (1983), 443-452.

[5] A. V. Geramita and J. Migliore, *Reduced Gorenstein codimension three subschemes of projective space*, preprint.

[6] T. Harima, *Some examples of unimodal Gorenstein sequences*, to appear in J. Pure Appl. Algebra.

[7] ———, *Characterization of Hilbert functions of Gorenstein Artin algebras with the weak Stanley property*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc..

[8] ———, *Examples of Gorenstein ideals of height 3 with given Hilbert function and number of generators*, preprint.

[9] ———, *Notes on Artin graded rings with the weak Stanley property : A theorem of Campanella revised*, in preparation.

[10] R. Stanley, *Hilbert functions of graded algebra*, Adv. in Math. **28** (1978), 57-83.

[11] J. Watanabe, *A note on Gorenstein rings of embedding codimension three*, Nagoya Math. J. **50** (1973), 227-232.

[12] ———, *The Dilworth number of Artinian rings and finite posets with rank function*, "Commutative algebra and Combinatorics", Advanced Studies in Pure Math. **11** (1987), 303-312.

Department of Management and Information Science, Shikoku University, Furukawa Ohjin-cho, Tokushima 771-11, Japan

E-mail : harima@keiei.shikoku-u.ac.jp

1995/11/20

環の次元と部分体上の超越次数について

宮崎大教育・谷　本　　洋

1　はじめに

k が体，A が k 上有限生成であるような整域であるとする。このとき，

$$(*)\quad \dim A = \mathrm{tr.deg}_k A$$

という関係がよく知られている。この関係について，「k 上有限生成」という条件をはずして考えたい。この問題を扱っている論文としては，例えば，[2],[4] などがある。ただし，これらは体上のアフィン整域の部分環，あるいは体上のアフィン環の極大イデアルによる局所環の部分環を扱っている。ここでは，考える環を整域とし，しかも体上のアフィン環の極大イデアルによる局所環の部分環という条件をはずして考えたい。

これについては4年前のこのシンポジウムでも話をしている。ここでは，次のことについて述べたい：

- その後少し改良したので，そのことについて；
- その後分かったいくつかのこと（ミニシンポジウムで話したり，未発表のもの）について。

2　$\mathrm{td}_k A$ の定義

「k 上有限生成」という条件をはずして関係 $(*)$ を考えるとき，どのような部分体上の超越次数を考えればよいだろうか，という問題が生じる。このことについて，[1] の Theorem 20.9 より次の不等式が成り立つことが知られている：

$$\dim A \leq \mathrm{tr.deg}_k A.$$

従って，関係 $(*)$ を考えるとき，A の超越次数としては

$$\min\,\{\mathrm{tr.deg}_k A \mid k : A \text{ の subfield}\}$$

を考えることが自然だろう。そこで，この値を $\mathrm{td}\,A$ と書くことにする。

気になることは，どのような A の部分体 k に対して等式 $\mathrm{td}\,A = \mathrm{tr.deg}_k A$ が成り立つだろうか，ということである。もっと詳しく言うと，上の最小値は A の maximal subfields の間でとればよいが，どのような A の maximal subfield k に対しても $\mathrm{tr.deg}_k A$ は一定だろうか。このことについて次の命題と例に注意しよう。

命題 1 k, ℓ はともに *quasi-local ring* (A, m) の *maximal subfield* であり，$\mathrm{tr.deg}_{k\cap\ell}\, k < \infty$ であるとする。このとき，$\mathrm{tr.deg}_k\, A = \mathrm{tr.deg}_\ell\, A$ が成立する。

証明. k, ℓ はともに (A, m) の maximal subfield であるから，A/m は k, ℓ のどちらの上にも代数的である。従って，$\mathrm{tr.deg}_{k\cap\ell}\, k = \mathrm{tr.deg}_{k\cap\ell}\, \ell$. よって，$\mathrm{tr.deg}_k\, A = \mathrm{tr.deg}_\ell\, A$. Q.E.D.

例 1 次のような *DVR* A が存在する：
$\forall n \in \mathrm{N}$ に対し，$\exists k(n)$ ： A の *maximal subfield* s.t. $\mathrm{tr.deg}_{k(n)}\, A = n$. 従って，命題 *1* より，$n \neq m \Rightarrow \mathrm{tr.deg}_{k(n)\cap k(m)}\, k(n) = \infty$.

具体的には，k は体，$X_1, \ldots, X_n, \ldots, Z$ は k 上の変数であるとする。$K = k(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$, $A = K[Z]_{(Z)}$ とおけば，A は *DVR*, K は A の *coefficient field* であり，$\mathrm{tr.deg}_K\, A = 1$ である。そこで，$\forall v \in \mathrm{N}$ をとる。$\forall i \in \mathrm{N}$ に対し $\xi_i := X_i + X_{i+v}Z$ とおき，$k(v+1) = k(\xi_1, .., \xi_n, \ldots)$ とおけば，$k(v+1)$ は A の *coefficient field* であり，$\mathrm{tr.deg}_{k(v+1)}\, A = v+1$ であることが分かる。

私たちの等式を考える上では $\mathrm{tr.deg}_k\, A < \infty$ であるような部分体 k について考えればよい。このとき，k に対する A の部分体の集合として次を考える：

$$S_k(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\ell : A \text{ の subfield} \mid \mathrm{tr.deg}_{k\cap\ell}\, k < \infty\}$$

そして，$\mathrm{td}_k\, A \overset{\mathrm{def}}{=} \min\, \{\mathrm{tr.deg}_\ell\, A \mid \ell \in S_k(A)\}$ とおく。この $\mathrm{td}_k\, A$ を考える方が $\mathrm{td}\, A$ より扱いやすいので，ここに話を限定する。すなわち，$\mathrm{td}\, A = \mathrm{td}_k\, A$ であるような A の部分体 k に対し，なるべく $S_k(A)$ の中で，あるいはその付近で考えたい，というのが基本的な考え方である。

これから，この $\mathrm{td}_k\, A$ と $\dim A$ の関係について考えていくことにする。

以下，A は整域，k は $\mathrm{tr.deg}_k\, A < \infty$ であるような A の部分体であるとする。

3 $\mathrm{td}_k\, A$ の局所性

$\forall m \in \mathrm{Max}\, A$ に対して $k \subseteq A \subseteq A_m$ であるから，$\mathrm{td}_k\, A \geq \mathrm{td}_k\, A_m$ が成立する。そこで，一般に

$$\mathrm{td}_k\, A = \max\, \{\mathrm{td}_k\, A_m \mid m \in \mathrm{Max}\, A\}$$

が成立するだろうか，という問題が生じる。

これについては次のことが分かる。

定理 1 A が *quasi-semi-local domain* であるとき，次が成立する：

$$\mathrm{td}_k\, A = \max\,\{\mathrm{td}_k\, A_m \mid m \in \mathrm{Max}\, A\}.$$

証明. $\mathrm{Max}\, A = \{m_1, ..., m_n\}$ とする。$\exists \ell : A$ の subfield s.t. $\mathrm{tr.deg}_{k \cap \ell}\, k < \infty$ について $\mathrm{td}_k\, A = \mathrm{tr.deg}_\ell\, A$. この ℓ に対し，

$$u = \min\,\{\mathrm{tr.deg}_\ell\, A/m \mid m \in \mathrm{Max}\, A\}$$

とおく。剰余定理より，$\forall m \in \mathrm{Max}\, A$ に対して $x_1 \bmod m, ..., x_u \bmod m$ が ℓ 上代数的独立であるような A の元 $x_1, ..., x_u$ が存在する。すると，$\forall m \in \mathrm{Max}\, A$ に対して $\ell[x_1, ..., x_u] \cap m = (0)$. よって，$\ell(x_1, ..., x_u) \subset A$ となり，$x_1, ..., x_u$ は ℓ 上代数的独立になる。すると，ℓ の定義から $u = 0$. 従って，$\exists m \in \mathrm{Max}\, A$ s.t. $\mathrm{tr.deg}_\ell\, A/m = 0$. すなわち，$\mathrm{td}_k\, A = \mathrm{tr.deg}_\ell\, A_m = \mathrm{td}_k\, A_m$. Q.E.D.

semi-local ではない一般の場合は成り立つかどうか不明である。

4 $\dim A = \mathrm{td}_k\, A$ が成り立つ例

等式 $\dim A = \mathrm{td}_k\, A$ が成り立つ例として，4年前に次の話をした。

定理 2 A は $\dim A = \mathrm{td}_k\, A$ であるような整域であり，$X_1, ..., X_n$ は A 上の変数であるとする。このとき，$X_1, ..., X_n$ で生成された可換群の必ずしも有限生成ではない部分半群を M とすれば，$\dim A[M] = \mathrm{td}_k\, A[M]$ が成立する。

特に，M の元が $X_1, ..., X_n$ の単項式ばかりからなり，$M \ni 1$ であるとする。このとき，$\exists m \in \mathrm{Max}\, A$ について $\dim A = \mathrm{ht}\, m$ とすれば，(M, m) から始まる長さ $\dim A[M]$ の素イデアルの列が作れる。

その後，前半は [2] または [4] から，後半は [2] からすぐに従うことが分かった。しかし，上の定理が無意味になったわけではなく，m から始まる長さが $\dim A$ の A の素イデアルの列が与えられれば，長さが $\dim A[M]$ の具体的な素イデアルの列が作れるという利点が私の方法にはある。

5 catenary 性・universally catenary 性との関係

等式 $\dim A = \mathrm{td}_k\, A$ と関係のある性質として catenary 性・universally catenary 性がある。

まず，catenary 性に関しては次が示せる。

定理 3 A が *noetherian* であり，$\forall m \in \operatorname{Max} A$ について $\dim A_m = \operatorname{td}_k A_m$ であるとする。

このとき，次は同値である。

(1) A : *catenary;*

(2) $\forall m \in \operatorname{Max} A, \forall p \in \operatorname{Spec} A$ s.t. $m \supseteq p$ について，次が成立する：

  (a) $\dim A_m/pA_m = \operatorname{td}_k A_m/pA_m$;

  (b) $\dim A_p = \operatorname{td}_k A_p$;

(3) $\forall p, q \in \operatorname{Spec} A$ s.t. $p \supseteq q$ について，$\dim A_p/qA_p = \operatorname{td}_k A_p/qA_p$ が成立する。

次に，universally catenary 性に関しては次がまず示せる。

命題 2 A が *noetherian* であり，$\forall p \in \operatorname{Spec} A$ について $\dim A_p = \operatorname{td}_k A_p$ であるとする。このとき，A 上の変数の集合を $\underline{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ とすれば，$\forall P \in \operatorname{Spec} A[\underline{X}]$ について $\dim A[\underline{X}]_P = \operatorname{td}_k A[\underline{X}]_P$ が成立する。

これを利用して，次の定理が示せる。

定理 4 A が *noetherian* であり，$\forall m \in \operatorname{Max} A$ について $\dim A_m = \operatorname{td}_k A_m$ であるとする。

このとき，次は同値である。

(1) A : *universally catenary;*

(2) A 上 *essentially of finite type* であるような任意の *local domain* B について $\dim B = \operatorname{td}_k B$ が成立する。

さて，定理 3 の (2) に関して，noetherian local domain A について次の２つの条件を考えよう。

(L)　$\forall p \in \operatorname{Spec} A$ について $\dim A_p = \operatorname{td}_k A_p$ が成立する；

(R)　$\forall p \in \operatorname{Spec} A$ について $\dim A/p = \operatorname{td}_k A/p$ が成立する。

これについて，次の命題を示すことができる。

命題 3 条件 *(L)* は満たすが *(R)* は満たさない例が存在する。また，条件 *(L)* は満たさないが *(R)* は満たす例も存在する。

これが成り立つ理由について，まず，次の [3], Appendix, A1, Example 2 に着目しよう。

例 2 $\forall m \geq 0$ について，次の条件を満たす $\dim S_m = \mathrm{td}_k S_m$ であるような *noetherian local domain* S_m が存在する。

- $m = 0 \Rightarrow S_0$ は *catenary* だが，*universally catenary* ではない；
- $m > 0 \Rightarrow S_m$ は *catenary* ではない。

従って，定理 3・命題 2・定理 4 より，$\exists p \in \mathrm{Max}\, S_0[X]$ に対し $S_0[X]_p$ が前半の例となる。

後半については，$\forall m > 0$ に対し S_m が目的の例となることが計算によって確かめられる。

catenary 性の descent について，次が示せる。

定理 5 A, R は *noetherian domains* であり，$R \subseteq A$ であるとする。k は R の部分体であり，$\forall m \in \mathrm{Max}\, A$ に対して $\dim A_m = \mathrm{td}_k A_m$ であるとする。さらに，$\forall p \in \mathrm{Spec}\, R, \forall m \in \mathrm{Max}\, R$ s.t. $m \supseteq p$ に対し，$\exists P, Q \in \mathrm{Spec}\, A$ s.t. $P \supseteq Q, P \cap R = m, Q \cap R = p$ となると仮定する。

このとき，A が *catenary* なら，R も *catenary* である。

もし，A が R 上 integral，あるいは A が R 上 faithfully flat であるなら，定理の条件の後半が満たされる。従って，次の系が成り立つことがすぐに分かる。

系 1 $(A, m_1, ..., m_n)$ は *noetherian semi-local domain* であり，*local domain* (K, m) を *dominate* しているとする。任意の i について A/m_i は K/m の *finite algebraic extension* であると仮定する。$I = \bigcap m_i, S = K + I$ とおく。このとき，K の部分体 k について，任意の i に対し $\dim A_{m_i} = \mathrm{td}_k A_{m_i}$ であり，A が *catenary* であるとすれば，次が成立する。

(1) $\mathrm{ht}\, m_1 = \cdots = \mathrm{ht}\, m_n$;

(2) S は *catenary* である。

任意の i に対し $\dim A_{m_i} = \mathrm{td}_k A_{m_i}$ が成り立つという仮定を上の系からはずすと反例が存在することは，[3], Appendix, A1, Example 2 から分かる。

さて，定理 5 の条件 $k \subseteq R \subseteq A$ を弱めて $k \subseteq A$ としたとき，$k \cap R$ をもとにして定理 5 の k に相当するものが作れるだろうか。これに関して，次の例は大事な示唆を与えているように思う。

例 3 次の条件を満たすような *DVR* A, R が存在する：A は R の *finite extension* であり，$Q(A)$ は $Q(R)$ の *Galois extension* である。しかも，$\mathrm{tr.deg}_L A < \infty$ であるような A のある *coefficient field* L について R の部分体を $\ell = L \cap R$ とすれば，$\mathrm{tr.deg}_\ell R = \infty$ となる。具体的には，例 *1* から得られる。

参考文献

[1] R. Gilmer, Multiplicative Ideal Theory (Marcel Dekker, New York, 1972).

[2] R. Gilmer, B. Nashier and W. Nichols, The prime spectra of subalgebras of affine algebras and their localizations, J. Pure Appl. Algebra 57 (1989) 47–65.

[3] M. Nagata, Local Rings (Interscience, 1962).

[4] N. Onoda and K. Yoshida, On noetherian subrings of an affine domain, Hiroshima Math. J. 12 (1982) 377–384.

Purely inseparable k-forms of affine plane curves

浅沼照雄
富山大　教育

定義 1 k'/k を 標数 $p \geq 0$ の体の拡大、B を k−代数とする。k−代数 A について、係数体の拡大 $A \otimes_k k'$ が $B \otimes_k k'$ に k'−同型になるとき A を B の *k'/k-form* という。特に $\bar{k}$ を k の代数的閉包としたとき B の*$\bar{k}/k$-form* を単に B の *k-form* という。また k^i *(resp. k^s)* を k の *purely inseparable closure in* $\bar{k}$ *(resp. separable closure in* $\bar{k}$*)* とするとき B の *k^i/k-form (resp. k^s/k-form)* を単に *purely inseparable (resp. separable) k-form* という。

以下にみるように、nontrivial な (i.e. B と k−同型にならない) B の k-form が存在する。

例 2 B として 1 変数の Laurent polynomial $k[x, x^{-1}]$ 考える。A を

(1) $A = k[x, y]/(x^2 + y^2 = 1)$ $(p \neq 2, \sqrt{-1} \notin k)$,
(2) $A = k[x, y]/(x^2 + xy + y^2 = 1)$ $(p = 2, x^2 + x + 1$ は $k[x]$ で既約$)$,
(3) $A = k[x^p, x + \alpha x^{-p}]$ $(p > 0, \alpha \in k^{p^{-1}} - k)$,

とおくと、すべて B の nontrivial な k-form で (1)、(2) は separable (3) は purely inseparable である。

定義 3 B が *affne k-algebra (i.e. k 上 finitely generated)* なるとき B の *k-form* A はつねに *affine k-algebra* になるから、*finite Galois extension* k'/k が存在して、A は B の *k'/k-form* となる。よく知られているように k' と k の中間体 k_1 が存在して、k'/k_1 が *separable*、k_1/k は *purely inseparable* とできる。このとき $k_1^{p^e} \subset k$ を満たす最少の整数 $e \geq 0$ を k'/k の *exponent* といい ex.$k'/k = e$ と書く。そこで

$$\text{ex.}A = \min\{\text{ex.}k'/k \mid k'/k \text{ は } A \text{ が } B \text{ の } k'/k\text{-form なる finite Galois extension}\}$$

とおいて ex.A を A の *exponent* という。

それゆえ特に A が B の purely inseparable k-form ならば exponent ex.A は

$$A \otimes_k k^{p^{-e}} \cong B \otimes_k k^{p^{-e}}$$

を満たす最少の整数 $e \geq 0$ である。

本稿では、標数 $p > 2$ の体 k 上 2 つの元で生成されたクルル次元 1 の geometrically reguler な integral domain B の purely inseparable k-form の構造定理 (定理 5) を取り上

げる。またその典型的な応用例として、k 上１変数多項式環の k-form の構造（系６）と性質等について述べたい。ここで B が geometrically reguler とは任意の代数拡大 k'/k について $B \otimes_k k'$ が reguler domain になることである。

定義 4 k を任意標数の体、B を $B = k[x,y]/(f(x,y)=0)$ で定義された *k-affine ring* とする。このとき任意の $g \in B$ に対して $\mathrm{d}_f(g) \in B$ を *Jacobian*

$$\mathrm{d}_f(g) = \det \begin{pmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{pmatrix}$$

で定義すると $\mathrm{d}_f \in \mathrm{Hom}_k(B,B)$ は B の *k-derivation* である。また任意の体の拡大 k'/k について B を自然な単射で $B' = k'[x,y]/(f(x,y)=0)$ の *k-subalgebra* とするとき d_f は B' の *k'-derivation* に *unique* に拡張できる。それを同じ記号 d_f で表す。

定理 5 k を 標数 $p > 2$ の無限体、B を

$$B = k[x,y]/(f(x,y)=0)$$

で定義された *geometrically reguler* な *one dimensional affine k-domain* とする。このとき *k-algebra* A および整数 $e \geq 0$ について次の２つの条件は同値である。
(i) A は B の *purely inseparable k-form* で $\mathrm{ex}.A \leq e$、
(ii) 微分方程式

$$2v\mathrm{d}_f(u) + u\mathrm{d}_f(v) = 1 \quad (*)$$

の解 $u, v \in k^{p^{-e}}[x,y]$ $(\subset B^{p^{-e}})$ が存在して

$$A \cong_k k[x^{p^e}, y^{p^e}, u^2v, uv^q] \;\; (q = (p^e+1)/2)$$

を満たす。

上の定理の証明から、$A = B$ とおくと、定理５の条件 (ii) をみたす u, v があって

$$B = k[x^{p^e}, y^{p^e}, u^2v, uv^q] \;\; (q = (p^e+1)/2)$$

とできる。ゆえ特に微分方程式 $(*)$ の解 u, v は定理５の条件の下でつねに存在することに注意しておく。B の条件 geometrically reguler は一般には、はぶくことができない。たとえば $p > 2$ のとき、$\alpha \in k^{p^{-1}} - k$ なる元 α について $f(x,y) = x^2 + y^p - \alpha$ とおくと $B = k[x,y]/(f(x,y)=0)$ は reguler であるが geometrically reguler ではなく、また上記の微分方程式の解 u, v も存在しない。

k 上１変数の polynomial ring $k[x]$ の任意の separable k-form は trivial である。ゆえ $k[x]$ の任意の k-form は purely inseparable となる。

系 6 k を標数 $p > 2$ の体、$k[x]$ を k 上１変数の *polynomial ring* とする。*k-algebra* A および整数 $e \geq 0$ について次の２つの条件は同値である。

(i) A は $k[x]$ の *purely inseparable k-form* で ex.$A \leq e$、
(ii) 微分方程式

$$2vu' + uv' = 1 \quad (**)$$

の解 $u, v \in k^{p^{-e}}[x]$ が存在して

$$A \cong_k k[x^{p^e}, u^2 v, uv^q] \;\; (q = (p^e + 1)/2)$$

を満たす。ここで u', v' は x による u, v の通常の微分をあらわす。

上の微分方程式 $(**)$ の任意の解 u, v は次のようにして与えられる。まず $u \in k^{p^{-e}}[x]$ を

$$u = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-2} x^{p-2} \;\; (a_i \in k^{p^{-e}}[x^p])$$

と表された任意の separable な polynomial (i.e. $\mathrm{GCM}(u, u') = 1$) とする。この u について、元 $b \in k^{p^{-e}}[x^p]$ が存在して

$$w = b + a_0 x + 2^{-1} a_1 x^2 + \ldots + (p-1)^{-1} a_{p-2} x^{p-1}$$

とおくと、$w \equiv 0 \pmod u$ となる。そこで任意の $c \in k^{p^{-e}}[x^p]$ に対して

$$v = (u^p c + w) u^{-2}$$

とすると u, v は求める解になる。また任意の解はこのように表される。

$p = 3$ のときは特に

$$u, v \text{は微分方程式} (**) \text{の解} \iff u = a + bx, v = c + dx$$

ここで

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(k^{3^{-e}}[x^3])$$

がなりたつ。

定義 7 上の 2×2 行列を M とおいて M および e によってきまる *k-algebra* $k\langle e, M\rangle$ を

$$k\langle e, M\rangle = k[x^{3^e}, (a + bx)^2(c + dx), (a + bx)(c + dx)^q] \;\; (q = (3^e + 1)/2)$$

で定義する。

系 8 *k-algebra* A および整数 $e \geq 0$ についてつぎの2つの条件はは同値である。
(i) A は $k[x]$ の *purely inseparable k-form* で ex.$A \leq e$、
(ii) ある $M \in \mathrm{SL}_2(k^{3^{-e}}[x^3])$ が存在して $A \cong_k k\langle e, M\rangle$ がなりたつ。

定義 9 $e>0$ を固定しておいて上の系 9 の (i) を満たす *k-algebra* A の同型類を $\mathcal{F}_e$ で表せば対応 $M \to k\langle e, M\rangle$ により上への自然な写像

$$\mathrm{SL}_2(k^{3^{-e}}[x^3]) \longrightarrow \mathcal{F}_e$$

が得られる。この写像は 1 対 1 ではない。この写像より引き起こされる $\mathrm{SL}_2(k^{3^{-e}}[x^3])$ 内の同値関係を $\sim$ であらわす。すなわち $M, N \in \mathrm{SL}_2(k^{3^{-e}}[x^3])$ について

$$M \sim N \iff k\langle e, M\rangle \cong k\langle e, N\rangle$$

とする。

問題 10 上の同値関係 $\sim$ を具体的にあたえよ。

$e=1$ のとき同値関係 $\sim$ は次のようにあたえられる。σ を $k^{3^{-1}}[x]$ の $k^{3^{-1}}$−automorphism とすると、

$$\sigma(x) = \alpha x + \beta \ \ (\alpha, \beta \in k^{3^{-1}}, \alpha \neq 0)$$

この σ について

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k^{3^{-1}}) \subset \mathrm{GL}_2(k^{3^{-1}}[x^3])$$

により行列 $[\sigma]$ を定義する。また

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k^{3^{-1}}[x^3])$$

に対して σ の作用 ${}^{\sigma}M$ を

$${}^{\sigma}M = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \\ \sigma(c) & \sigma(d) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k^{3^{-1}}[x^3])$$

で定義する。

定理 11 $M, N \in \mathrm{GL}_2(k^{3^{-1}}[x^3])$ ついて次は同値である。
(i) $M \sim N$、
(ii) $L \in \mathrm{GL}_2(k[x^3])$ および $k^{3^{-1}}[x]$ の $k^{3^{-1}}$−*automorphism* σ が存在して

$$\sigma(x) = \alpha x + \beta \ \ (\alpha, \beta \in k^{3^{-1}}, \alpha \neq 0)$$

とするとき

$$M = \alpha L^{\sigma} N[\sigma]$$

と表される。

この結果, たとえば $\mathcal{F}_e$ の濃度は k が perfect でなければ k の濃度以上あることがわかる。とくに $\mathcal{F}_1$ の濃度は k のそれと等しい。

系6より標数 $p > 2$ の体 k 上の polynomial ring $k[x]$ の k-form A は一般的に k 上3つの元で生成されている。ゆえ3変数の polynomial ring $k[X, Y, Z]$ から A への sujection ϕ が存在する。ϕ の kernel を A の定義 ideal という。以下 ϕ を

$$X \mapsto x^{p^e},\ Y \mapsto u^2 v,\ Z \mapsto uv^q$$

で決まる surjection としたときの A の定義 ideal を P として、P の生成元を求める。ここで e, u^2v, uv^q は系6(ii) で与えられたものである。

まず $u^{p^e}, v^{p^e} \in k[x^{p^e}]$ に注意する。ゆえ x^{p^e} を X と思えば u^{p^e} および v^{p^e} は $k[X]$ の多項式となる。この多項式を簡単のためそれぞれ U および V とおいて次の定理を得る。

定理 12 上の *ideal* P について

$$\begin{aligned} P &= (Y^q - UZ, Z^2 - VY, Y^{q-1}Z - UV) \\ &= \mathrm{rad}(Y^{p^e} - U^2V, Z^{p^e} - UV^q) \end{aligned}$$

がなりたつ。特に P はつねに *set theoritic complete intersection* となる。

P が ideal theoritic complete intersection であるかどうかについては、次の結果がある。

定理 13 上で定義された P について次は同値。
(i) P は *ideal theoritic complete intersection*、
(ii) A は k 上2つの元で生成される。

次の定理に関しては体 k の標数が2の場合についてもなりたつ。

定理 14 k 標数 $p > 0$ なる体とする。このとき次は同値。
(i) A は k 上2つの元で生成されている
$k[x]$ の *purely inseparable k-form* で ex.$A \leq e$、
(ii) $k^{p^{-e}}$ の元 α_i $(i = 1, ..., n)$ が存在して

$$A \cong k[x^{p^e}, \alpha_0 + x + \alpha_1 x^p + \ldots + \alpha_n x^{np}]$$

となる、
(iii) 微分 A–加群 $\Omega_k(A)$ が *free* である。

$p > 2$ の場合には、具体的に A–加群 $\Omega_k(A)$ が free であるかどうかを系6を用いて調べることができ、その結果$\Omega_k(A)$ が free でない例が存在する。すなわち幾何学的にいえば、affine line の 任意の k-form は（3次元）の space curve である。更にそのなかに plane curve でない例がある。

簡単な例を1つあげておく。

例 **15** 任意の元 $a_i \in k^{p^{-e}}[x^p]$ $(i = 1, ..., n)$ について

$$\begin{aligned} u &= x \\ 2v &= 1 + a_1 x^{p-2} + \ldots + a_n x^{np-2} \end{aligned}$$

とおく。すると u, v は微分方程式 (**) の解であるから、系 6 より

$$A = k[x^{p^e}, u^2 v, uv^q] \;\; (q = (p^e + 1)/2)$$

とおけば A は $k[x]$ の k-form である。更に $k[x^p]$ に入らない a_i が存在すれば A は k 上 2 つの元で生成されない。

以上の定理等を用いることにより、$k[x]$ の k-form の構造や性質についてはよくわかってきている。例えば次の事実がなりたつ。

系 **16** *A を任意標数の $k[x]$ の k-form とする。すると次は同値。*
(i) $A \cong k[x]$、
(ii) $A \otimes_k A$ は *UFD*。

この他に $k[x]$ の k-form の k−自己同型群として実現されるすべての群を与えることができるが、それについては次の機会にゆずる。

以下定理 5 の証明で本質的に用いる定義および定理について述べておく。与えられた integal domain A について、$\mathrm{qt}(A)$ で A の商体を表すことにする。

定義 **17** 標数 $p > 0$ の *integral domain* の拡大 A/R が、次の 3 つの条件
(i) A/R *: finite as an $R-$module,*
(ii) 商体の拡大 $\mathrm{qt}(A)/\mathrm{qt}(R)$ が *purely inseparable* であって、その拡大次数を $[\mathrm{qt}(A) : \mathrm{qt}(R)] = p^e$ とすると $A^{p^e} \subset R \subset A$,
(iii) 微分 $A-$加群 $\Omega_R(A)$ が射影的,
を満たすとき *quasi-Galois extension* という。

上の e を exponent という。

定義 **18** 標数 $p > 2$ の *integral domain* の拡大 A/R について、2 つの元 $u, v \in R^{p^{-e}}$ が存在して、

$$A = R[u^2 v, uv^q] \;\; (q = (p^e + 1)/2)$$

と表せるとき、A/R は $u, v \in R^{p^{-e}}$ で定義された $(2,1)-$*type* の $\mathbf{Z}/p^e$*-grading structure* をもつという。ここで p^e は $\mathrm{qt}(A)/\mathrm{qt}(R)$ の拡大次数である。

定理 **19** *k を標数 $p > 2$ の無限体、A/R を k 上次元 1 の affine domain の拡大とする。このとき、次の 2 つの条件は同値である。*
(i) A/R は *exponent e* の *quasi-Galois extension* であって、$\Omega_R(A) \otimes_A R^{p^{-e}} \cong R^{p^{-e}}$ がなりたつ。
(ii) A/R は互いに素な $u, v \in R^{p^{-e}}$ (*i.e.* $R^{p^{-e}}$ の *ideal* (u, v) は *unit ideal)* で定義された $(2,1)-$*type* の $\mathbf{Z}/p^e$*-grading structure* をもつ。

B が geometrically reguler な one dimensional affine k-domain ならば、B の purely inseparable k-form A に対して、$R = k[A^{p^e}]$ $(e = \mathrm{ex}.A)$ とおけば A/R は exponent e の quasi-Galois extension になる。更に B が k 上2つの元で生成されていれば、定理 19(i) がなりたつ。このことを用いて定理 5 が示される。

９３０
富山市五福３１９０
富山大学教育学部
浅沼照雄
e-mail asanuma@edu1.edu.toyama-u.ac.jp

Hodge Algebra の理論の視点から見た一般の環上の Gröbner 基底に関する一考察

宮崎 充弘　　(京都教育大)

序

Hodge algebra の中で特に重要な graded Hodge algebra においては，straightening relation がその表示を与えている．すなわち，任意の元は有限回の straightening relation の適用によって standard monomial の linear combination に書き直せる．これは graded Hodge algebra にはある種の monomial order が定義できて，straightening relation による書き直しは与えられた monomial をそれよりも（その monomial order に関して）小さい monomial の linear combination に書き表すことになっているからである（例 11 参照）．Gräbe [G] は Hodge algebra の定義を monomial order によるものに変更している（定義 9 参照）が，このことから考えれば，graded case に限れば Hodge algebra の定義の一般化になっている．

一方で，straightening relation がその表示を与えないような Hodge algebra が存在することも知られている [T]，[M]．この場合にはもちろん，定義 9 でいう (GH-2) をみたすような monomial order は存在しないことになる．

そこで本稿では，Hodge algebra の定義を monomial order によるものに変更した場合，[DEP] で論じられているような Hodge algebra の一般論がどこまで成立するかを考える．

1 Gröbner basis

$H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ は有限集合であるとする．H上の monomial とは，$h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_i \in \boldsymbol{N})$ の形の形式的な“もの”のことをいう．$\alpha_i = 0$ であれば，$h_i^{\alpha_i}$は省略しても良い．Monomial の積などは，多項式環の場合と同様に定義される．Ideal of monomials とは，Hの monomial からなる集合Σで，$M \in \Sigma, L$:monomial $\Longrightarrow ML \in \Sigma$をみたすもののことをいう．$\Sigma$に含まれない monomial のことを，$\Sigma$に関して standard な monomial という．Σの元で，他のΣの元によって割ることのできないものをΣの generator と呼ぶ．Hilbert の基底定理より，Σの generator の個数は有限であることがわかる．

A が環（ここでは，環や代数と言ったら単位元を持ち可換であるものを意味することにする）で，Hが A の部分集合であるとき，H上の monomial $h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_n^{\alpha_n}$ を形式なものと考える場合も，A の元と考える場合も以下で出てくるが，context で判断できるものと期待し，あえて同じ記号を使うことにする．

Monomial order とは，monomial 全体の集合に定義された全順序で，(1) m, n_1, n_2が monomial で $n_1 > n_2$ であれば $mn_1 > mn_2$，(2) $m \neq 1$ であれば $m > 1$，の 2 条件をみたすもののことをいう．Hilbert の基底定理から次がわかる．

補題 1. Monomial order は極小条件をみたす．

$X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ を不定元の集合，$S = B[X] = B[x_1, \ldots, x_r]$ を可換環 B 上の多項式環とし，X上の monomial 全体の集合に monomial order $>$が定まっているとする．このとき，

定義 2. $g \in S$ $(g \neq 0)$ に対し，$g = b_1m_1 + b_2m_2 + \cdots + b_sm_s$ $(b_i \in B,\ b_i \neq 0,\ m_i$は monomial，$m_1 > m_2 > \cdots > m_s)$ とするとき，

$$\mathrm{lt}(g) := b_1m_1, \quad \mathrm{lm}(g) := m_1, \quad \mathrm{lc}(g) := b_1$$

と定義する．

以下しばらく，$g_1, \ldots, g_t$は $\mathrm{lc}(g_i) = 1$ をみたす Sの元であるとし，$G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ とおく．このとき，

定義 3. $f \in S$とする．$h \in S$で，h に現れる monomial はすべてどの $\mathrm{lm}(g_i)$ でも割れず，かつ，

$$h = f - \sum_i f_ig_i, \qquad f_i = 0 \text{ または } \mathrm{lm}(f_ig_i) \leq \mathrm{lm}(f) \quad (i = 1, \ldots, t)$$

をみたす $f_1, \ldots, f_t \in S$が存在するとき，h を fの G に関する remainder と呼ぶ．

もちろん，一般には remainder は一意的に決まるわけではないが，次の事が成立する．

補題 4. 任意の $f \in S$は少なくとも一つ remainder を持つ．

今，各 i, j に対し，

$$m_{ij} := \mathrm{lt}(g_i)/\gcd(\mathrm{lm}(g_i), \mathrm{lm}(g_j))$$

とおくと，次が成立する．

定理 5. Iは Sのイデアルで，$g_1, \ldots, g_t \in I$であるとすると，次は同値である．

1) $\mathrm{lt}(I) = (\mathrm{lt}(g_1), \ldots, \mathrm{lt}(g_t))$．ただし，$\mathrm{lt}(I) := (\mathrm{lt}(g) \mid g \in I \setminus \{0\})$．

2) Iの任意の元の G に関する任意の remainder は 0．

3) $I = (g_1, \ldots, g_t)$ で，Sの任意の元の G に関する remainder は一意的．

4) $I = (g_1, \ldots, g_t)$ で，各 i, jに対して $m_{ji}g_i - m_{ij}g_j$の G に関するある remainder は 0．

5) $\{m + I \mid m$ は monomial で，$m \notin (\mathrm{lm}(g_1), \ldots, \mathrm{lm}(g_t))\}$ は S/Iの B-free basis．

6) $\{m + I \mid m$ は monomial で，$m \notin (\mathrm{lm}(g_1), \ldots, \mathrm{lm}(g_t))\} \subset S/I$は B上一次独立．

証明． 1) $\Rightarrow$ 2) $f\in I$ で h が f の G に関する remainder であれば，$h\in I$．もし $h\neq 0$ であれば，$\mathrm{lt}(h)\in I=(\mathrm{lt}(g_1),\ldots,\mathrm{lt}(g_t))$ となり，$\mathrm{lt}(h)$ はある $\mathrm{lm}(g_i)$ で割り切れる．これは h が G に関する remainder であることに反する．

2) $\Rightarrow$ 3) $f\in I$ であるとすると，仮定と補題 4 により $f-\sum f_ig_i=0$ をみたす $f_1,\ldots,f_t\in S$ が存在するので，$I=(g_1,\ldots,g_t)$．一方，h_1, h_2 がともに $f\in S$ の remainder であるとすると，$h_1-h_2\in I$ で，h_1-h_2 は h_1-h_2 の G に関する remainder なので，$h_1-h_2=0$．

3) $\Rightarrow$ 4) $m_{ji}g_i-m_{ij}g_j$ の remainder は $m_{ji}g_i$ の一つの remainder であり，0 は $m_{ji}g_i$ の一つの remainder．Remainder の一意性から，$m_{ji}g_i-m_{ij}g_j$ の任意の remainder は 0．よって補題 4 より結論を得る．

4) $\Rightarrow$ 1) $\mathrm{lt}(I)\supsetneq(\mathrm{lt}(g_1),\ldots,\mathrm{lt}(g_t))$ として矛盾を導く．

$$g=\sum f_ig_i,\quad \mathrm{lt}(g)\notin(\mathrm{lt}(g_1),\ldots,\mathrm{lt}(g_t))$$

をみたすような $f_1,\ldots,f_t\in S$ の中で，$m:=\max\{\mathrm{lm}(f_1g_1),\ldots,\mathrm{lm}(f_tg_t)\}$ が最小のものをとり，さらにそのようなものの中で $v:=\max\{j\mid \mathrm{lm}(f_jg_j)=m\}$ が最小のものをとる．

$\mathrm{lm}(g)\leq m$，$\mathrm{lm}(g)\notin(\mathrm{lm}(g_1),\ldots,\mathrm{lm}(g_t))$, $m\in(\mathrm{lm}(g_1),\ldots,\mathrm{lm}(g_t))$ なので $\mathrm{lm}(g)<m$．従って $u<v$，$\mathrm{lm}(f_ug_u)=\mathrm{lm}(f_vg_v)$ をみたす u が存在する．このとき $\mathrm{lm}(f_vg_v)$ は $\mathrm{lcm}(\mathrm{lm}(g_v),\mathrm{lm}(g_u))$ で割り切れるので，$\mathrm{lt}(f_vg_v)=bnm_{uv}g_v$ をみたす monomial n と $b\in B$ が存在する．ここで仮定から

$$m_{vu}g_u-m_{uv}g_v=\sum h_ig_i,\quad \mathrm{lm}(h_ig_i)<\mathrm{lm}(m_{uv}g_v)\ (i=1,\ldots,t)$$

をみたす $h_1,\ldots,h_t\in S$ がとれる．このとき

$$g=\sum f_ig_i+bn\Big(m_{vu}g_u-m_{uv}g_v-\sum h_ig_i\Big)$$

の右辺を $g_1,\ldots,g_t$ について整理したものを

$$g=\sum f_i'g_i$$

とすれば，この表示は v または m の最小性に反する．

1) $\Rightarrow$ 5) $m_1,\ldots,m_l$ が $(\mathrm{lm}(g_1),\ldots,\mathrm{lm}(g_t))$ に含まれない相異なる monomial で，$b_1m_1+\cdots+b_lm_l\in I$ $(b_i\in B)$ であれば，仮定から $b_1m_1+\cdots+b_lm_l=0$．すなわち $b_i=0$ $(\forall i)$．よって $m_1+I,\ldots,m_l+I$ は B 上一次独立である．次に $F=\{m\mid m$ は monomial で，$m\notin(\mathrm{lm}(g_1),\ldots,\mathrm{lm}(g_t))\}$ とおき，$S=BF+I$ であることを示す．$BF+I\subsetneq S$ であるとし，$BF+I$ に含まれない $g\in S$ の中で $\mathrm{lm}(g)$ が最小のものをとる．$\mathrm{lm}(g)\in F$ であれば，$g':=g-\mathrm{lt}(g)$ とおけば $g'\notin BF+I$, $\mathrm{lm}(g')<\mathrm{lm}(g)$ となり $\mathrm{lm}(g)$ の最小性に反する．$\mathrm{lm}(g)\notin F$ であれば，$\mathrm{lt}(g)=bn\,\mathrm{lm}(g_i)$ をみたす monomial n，番号 i，および $b\in B$が存在し，$g':=g-bng_i$ とおけば同様に矛盾が導ける．

6) $\Rightarrow$ 2) $f\in I$ で，h が f の G に関する remainder であれば，$h\in I$．そこで $h=b_1m_1+\cdots+b_sm_s$ $(b_i\in B, b_i\neq 0)$ とすれば，$m_1,\ldots,m_s$ は modulo I で B 上一次独立なので，$s=0$．すなわち $h=0$．∎

一般に，加法群の準同型 $w: \boldsymbol{Z}^r \to \boldsymbol{Z}$と monomial $m = x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}$に対し，$w(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ を $w(m)$ と表すことにする．Monomial の有限集合 Mに関し，次の定義をする．

定義 6. 加法群の準同型 $w: \boldsymbol{Z}^r \to \boldsymbol{Z}$で $m, n \in M$, $m > n \Rightarrow w(m) > w(n)$ をみたすものを，M上で$>$と整合する weight と呼ぶ．

補題 7. Monomial の任意の有限集合 Mに対し，M上で$>$と整合する weight は存在する．

t を新たな不定元とし，wを

$$\{m \mid m \text{ はある } g_i \text{ に現れる monomial}\} \cup \{1, x_1, \ldots, x_r\}$$

上で$>$と整合する weight であるとする．Sの 0 でない元 $g = b_1 m_1 + \cdots + b_s m_s$ ($b_i \in B$, $b_i \neq 0$, m_iは monomial on X) に対し，$S[t]$ の元$\tilde{g}$を

$$\tilde{g} := \sum_i t^{a - w(m_i)} b_i m_i$$

により定義する．ただし $a = \max\{w(m_1), \ldots, w(m_s)\}$．また，$S$のイデアル Jに対し，$S[t]$ のイデアル$\tilde{J}$を

$$\tilde{J} := (\tilde{g} \mid g \in J \setminus \{0\})$$

により定義する．このとき，

定理 8. $B[t]$ 上の多項式環$\tilde{S} = S[t] = (B[t])[X]$ とその元$\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_t$およびそのイデアル$\tilde{I}$は定理 5 の各条件をみたす．特に$\tilde{I} = (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_t)$ である．

証明. $F := \{m \mid m \text{ は monomial で } m \notin (\mathrm{lm}(\tilde{g}_1), \ldots, \mathrm{lm}(\tilde{g}_t))\}$ とおく．$\mathrm{lm}(\tilde{g}_i) = \mathrm{lm}(g_i)$ なので，Fは S/Iにおいて B上一次独立である．従って，Fは $S[t, t^{-1}]/IS[t, t^{-1}]$ において，$B[t, t^{-1}]$ 上一次独立である．

ここで，φ を $x_i \mapsto t^{w(x_i)} x_i$をみたす $S[t, t^{-1}]$ の $B[t, t^{-1}]$-自己同型とすれば，

$$\varphi(\tilde{I} S[t, t^{-1}]) = IS[t, t^{-1}]$$

なので，φ は同型

$$S[t, t^{-1}]/IS[t, t^{-1}] \simeq S[t, t^{-1}]/\tilde{I} S[t, t^{-1}]$$

を induce する．この同型により Fの各元は自分自身に $B[t, t^{-1}]$ の unit をかけたものに移るので，Fは $S[t, t^{-1}]/\tilde{I} S[t, t^{-1}] = \tilde{S}/\tilde{I} \oplus_{B[t]} B[t, t^{-1}]$ において $B[t, t^{-1}]$ 上一次独立である．$B[t] \subset B[t, t^{-1}]$ なので，Fは$\tilde{S}/\tilde{I}$において $B[t]$ 上一次独立である．以上で，定理 5 の 6) が成立することがわかる．∎

2 Hodge algebra の定義の一般化

この節では前節の結果を用いて，graded Hodge algebra の理論を一般化する．まず，定理 5 の 5) に注目し，次の定義をする．

定義 9. Bは可換環，AはB-algebra，HはAの有限部分集合，Σは ideal of monomials on H，$>$はH上の monomial order であるとする．AがB上H，Σ，$>$に関する (GH)-条件をみたすとは，

(GH-1) $\{m \mid m$ はΣに関して standard な monomial$\}$ はAのB-module としての free basis をなす．

(GH-2) nがΣの generator であれば，

$$n = \sum_i b_i m_{i,n}, \quad b_i \in B,\ m_{i,n}\text{は monomial で } m_{i,n} < n \tag{10}$$

をみたす関係式が存在する．

の 2 条件が成立することである．

定義から明らかなように，(GH)-条件は base change で保たれる．

例 11. Aは graded Hodge algebra over B generated by H governed by Σ であるとする．Hの元に適当に番号を付けて$H = \{h_1, \ldots, h_r\}$，$h_i > h_j \Rightarrow i > j$，が成り立つようにしておく．$A$における次数とこの番号付けに関する reverse lexicographic order を$>$とすれば，AはB上H，Σ，$>$に関する (GH)-条件をみたす．

(10) の右辺がすべて 0 (empty sum) であるとき，Aは discrete Hodge algebra になる（この場合，monomial order $>$は影響しない）．AがB上$H, \Sigma, >$に関する (GH)-条件をみたすとき，対応する discrete Hodge algebra をA_{dis}で表すことにする．

定理 8 からただちに次がわかる．

定理 12. AがB上$H, \Sigma, >$に関する (GH)-条件をみたすとき，B上の 1 変数多項式環$B[t]$上$H, \Sigma, >$に関する (GH)-条件をみたす$B[t]$-代数$\widetilde{A}$で，Bの任意の単数uに対し

$$\widetilde{A}/(t) \simeq A_{\mathrm{dis}}, \qquad \widetilde{A}/(u-t) \simeq A$$

をみたし，$\widetilde{A} = \widetilde{A_0} \oplus \widetilde{A_1} \oplus \cdots$は次数環で$\widetilde{A_0} = B$，$H$の元および$t$は次数正の斉次元，となるものが存在する．

このことから，次がわかる．

定理 13 ([DEP, Theorem 6.1] 参照). Bが noetherian ring であれば，$\dim A = \dim A_{\mathrm{dis}}$.

証明. AおよびA_{dis}はB上忠実平坦で，(GH)-条件は base change で保たれるので，Bは体であるとしてよい．

$$\Delta := \{\{h_{i_1}, \ldots, h_{i_s}\} \subset H \mid (h_{i_1} \cdots h_{i_s})^n \notin \Sigma\ (\forall n > 0)\}$$

とおけば，Δは simplicial complex で，$A_{\mathrm{dis}}/\sqrt{0}$は Stanley-Reisner ring $B[\Delta]$ になる．$\sigma = \{h_{i_1}, \ldots, h_{i_d}\}$が$\Delta$の次元を与える facet であるとすれば，$h_{i_1}, \ldots, h_{i_d}$に関する

monomial はすべて standard になる．よって $h_{i_1},\ldots,h_{i_d}$ は A において B上 algebraically independent になるので，

$$\dim A = \max_{P\in \mathrm{Min}(A)} \mathrm{tr.deg}_B A/P \geq d = \dim B[\Delta] = \dim A_{\mathrm{dis}}.$$

一方，定理 12 の$\tilde{A}$は体 B上有限生成で，t および $1-t$ は $B[t]$-free module $\tilde{A}$に関する non-zero-divisor である．また，$\tilde{A}$の任意の極小素イデアル$\tilde{P}$に対し，$(t)+\tilde{P}\subset A_1\oplus A_2\oplus\cdots$ なので $(t)+\tilde{P}\neq A$．よって

$$\dim A_{\mathrm{dis}} = \dim \tilde{A}/(t) = \dim \tilde{A}-1 \geq \dim \tilde{A}/(1-t) = \dim A. \qquad \blacksquare$$

以下では A には $A=A_0\oplus A_1\oplus\cdots$, $A_0=B$, Hの元は次数正の斉次元，をみたす次数が付けられているとする．

H上の monomial 全体の集合に (1) $\deg m>\deg n$，または (2) $\deg m=\deg n$ で $m<n$，のいずれかが成り立つときに $m>' n$ であると定義すれば，$>'$は H上の monomial order になる．ただし，degは A における次数を表すものとする．wを

$$\{m \mid \Sigma \text{ のある generator } n \text{ に対し，} m=n \text{ または } m=m_{i,n}\}\cup\{1\}\cup H$$

上で$>'$と整合する weight であるとすると，

定理 14. $I_j := \sum_{m \text{ は monomial で } w(m)\geq j} Bm$ とおけば，I_jは A のイデアルで，$I_0 = A\supset I_1\supset\cdots$であり，$A$ の ideal の filtration $\mathcal{I}: I_0\supset I_1\supset I_2\supset\cdots$ は次をみたす．

1. $HA=I_1$.
2. $\bigcap_{n\geq 0} I_n=(0)$.
3. $\{I_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$と $\{(HA)^n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$は同じ位相を定義する．
4. $\mathcal{I}$で定義される extended Rees algebra $\widehat{R}=A[t^{-1}]\oplus\bigoplus_{n\geq 1} I_n t^n$ は $B[t^{-1}]$ 上 (GH)-条件をみたす．ただし，$H\ni h\mapsto ht^{w(h)}\in I_{w(h)}t^{w(h)}$により H を$\widehat{R}$に埋め込む．
5. $\mathcal{I}$で定義される associated graded ring $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}=\bigoplus_{n\geq 0} I_n/I_{n+1}$ は A_{dis}と同型になる．

また，$\{m \mid m \text{ は standard monomial で } w(m)\geq j\}$ は I_jの B-free basis になる．

証明. I_jがイデアルであることは明らか．(10) において $\deg m_{i,n}=\deg n$ なので，wの定義から，

$$w(n)<w(m_{i,n}) \qquad (\forall i,n)$$

であることがわかる．このことと，A の任意の元が (10) の有限回の適用によって standard monomial の linear combination に表せることから，$\{m \mid m \text{ は standard monomial で } w(m)\geq j\}$ が I_jの B-free basis になることがわかる．またこれから，1,2,3 はただちにわかる．

次に 4 を示す．$\widehat{R}$における $h \in H$の像 $ht^{w(h)}$を h^*で表し，対応する monomial も *を付けて表すことにする．関係式 (10) により

$$n^* = \sum b_i t^{w(n)-w(m_{i,n})} m_{i,n}^* \tag{15}$$

なので，$\widehat{R}$は $B[t^{-1}]$ 上 (GH-2) をみたす．また，$F^* := \{m^* \mid m$ は standard monomial$\}$ の各元は standard monomial に $B[t, t^{-1}]$ の unit をかけたものなので，F^*は$\widehat{R}\otimes_{B[t^{-1}]}B[t, t^{-1}]$ において $B[t, t^{-1}]$ 上一次独立である．従って F^*は$\widehat{R}$において $B[t^{-1}]$ 上一次独立である．また，I_jの元が $\{m \mid m$ は standard monomial で $w(m) \geq j\}$ の B-linear combination で表せることから，$\widehat{R}$の元が F^*の元の $B[t^{-1}]$-linear combination で表されることがわかる．

5 は $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(A) = \widehat{R}/t^{-1}\widehat{R}$であることと，(15) において，$w(n) - w(m_{i,n})$ が常に負であることからわかる．∎

このことから，ただちに次がいえる．

系 16 ([DEP, Proposition 5.1] 参照). 1. A_{dis}が reduced ring であれば，A も reduced ring.

2. $a \in A$ が modulo HA で non-zero-divisor であれば，a は A において non-zero-divisor.

証明. 1 は明らか．

2. a の $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(A)$ における leading form を a^*とすれば，a^*は modulo HA_{dis}で non-zero-divisor になる．よって A_{dis}の構造から，a^*は A_{dis}の non-zero-divisor である．従って，a は A の non-zero-divisor. ∎

また，$H = \{h_1, \ldots, h_r\}$ に関する Koszul complex を $K_\bullet(\underline{h}; -)$，Koszul homology を $H_\bullet(\underline{h}; -)$ で表せば，

定理 17 ([DEP, Theorem 7.1] 参照). $\deg h_i = w(h_i)$ により A_{dis}の grading を定義すれば，各 i に対し $H_i(\underline{h}; A)$ の filtration $\{F^j\}$ で次の条件をみたすものが存在する．

1. $F^0 = H_i(\underline{h}; A)$.
2. $\bigcap_{j \geq 0} F^j = 0$.
3. F^j/F^{j+1}は $H_i(\underline{h}; A_{\mathrm{dis}})_j$の subquotient.

証明. 定理 14 およびその証明の記号を使う．完全系列

$$0 \longrightarrow \widehat{R}(1) \xrightarrow{t^{-1}} \widehat{R} \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

(次数は t に関する次数で定義する．また，$G := \mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(A)$) により，次のような Koszul homology の exact sequences が得られる．

$$\begin{array}{l} H_i(\underline{h}^*; \widehat{R})_1 \longrightarrow H_i(\underline{h}^*; \widehat{R})_0 \longrightarrow H_i(\underline{h}^*; G)_0 \\ H_i(\underline{h}^*; \widehat{R})_2 \longrightarrow H_i(\underline{h}^*; \widehat{R})_1 \longrightarrow H_i(\underline{h}^*; G)_1 \\ H_i(\underline{h}^*; \widehat{R})_3 \longrightarrow H_i(\underline{h}^*; \widehat{R})_2 \longrightarrow H_i(\underline{h}^*; G)_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{18}$$

$H_i(\underline{h}^*;\hat{R})_0 = H_i(\underline{h};A)$ であることに注意し，

$$F^j := \mathrm{Im}(H_i(\underline{h}^*;\hat{R})_j \to H_i(\underline{h}^*;\hat{R})_{j-1} \to \cdots \to H_i(\underline{h}^*;\hat{R})_0)$$

とおく．明らかに $\{F^j\}$ は $H_i(\underline{h};A)$ の filtration で，$F^0 = H_i(\underline{h};A)$ である．また，F^j/F^{j+1} は $\mathrm{Cok}(H_i(\underline{h}^*;\hat{R})_{j+1} \to H_i(\underline{h}^*;\hat{R})_j)$ の準同型像なので，完全系列 (18) により $H_i(\underline{h}^*;G)_j = H_i(\underline{h};A_{\mathrm{dis}})_j$ の subquotient である．

次に $\bigcap F^j = 0$ を示す．$N = \bigcap t^{-j}H_i(\underline{h}^*;\hat{R})$ おとくと，Krull の intersection theorem により

$$rN = 0, \qquad r \equiv 1 \pmod{(t^{-1})}$$

をみたす $r \in \hat{R}$ が存在する．r の 0 次の斉次成分を a で表せば，$a \equiv 1 \pmod{HA}$ なので，系 16 により a は A の non-zero-divisor になる．よって r は $A[t,t^{-1}]$ の non-zero-divisor になり，従って $\hat{R}$ の non-zero-divisor である．従って $N = 0$．$\bigcap F^j \subset N$ なので，$\bigcap F^j = 0$．∎

系 19. B が体のとき多項式環 $S = B[x_1,\ldots,x_r]$ 上の加群としての Betti number を $\beta_i(-)$ で表せば，各 i に対し，$\beta_i(A) \le \beta_i(A_{\mathrm{dis}})$．

系 20. A_{dis} が Cohen-Macaulay(Gorenstein) であれば，A もそう．

参考文献

[DEP] DeConcini, C., Eisenbud, D. and Procesi, C.: "Hodge Algebras." Astérisque **91** (1982)

[G] Gräbe, H.-G.: *Über Streckungsringe.* Beiträge zur Algebra und Geometrie **23** (1986), 85–100

[M] Miyazaki, M.: *An Example of an ASL on a Distributive Lattice whose Straightening Relations do not give a Presentation.* Bulletin of Kyoto University of Education Ser. B **83** (1993), 81–84

[T] Trung, N. V. : *On the presentation of Hodge algebras and the existence of Hodge algebra structures.* Comm. Algebra **19** (1991), 1183–1195

MULTI-REES 代数の COHEN-MACAULAY 性について

中村幸男

東京都立大学理学部

1. 序文

$(A, \mathfrak{m})$ を d-次元の Noether 局所環, I を A のイデアルとする. r を正整数とし, I の r 次 multi-Rees 代数とは

$$R(I;r) := A[It_1, It_2, ..., It_r]$$

で定義される A-代数のこととする. ここで t_1, t_2, ..., t_r は A 上の不定元とした. $r=1$ のときは, 単に $R(I)$ と書く, これは普通の Rees 代数に他ならない. 以下, イデアル I には特に断わらない限り, $I \not\subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Assh} A} \mathfrak{p}$ という条件を付けることにする. これは, $\dim R(I) = d+1$ という条件と同値であり, このとき $\dim R(I;r) = d+r$ となっている. 本稿では, この multi-Rees 代数の Cohen-Macaulay 性について述べて行きたいと思う. まず知られている事実としては,

命題 1.1 ([GH], [HHR]).
(a) $R(I)$ が *Cohen-Macaulay* 環であれば, 任意の $r>0$ に対して, $R(I;r)$ *Cohen-Macaulay* 環である.
(b) $R(I;r)$ が *Cohen-Macaulay* であれば, 任意の $s \geq r$ に対して $R(I^s)$ は *Cohen-Macaulay* である.

本稿では上の命題の逆について述べてみたいと思う. つまり, ある multi-Rees 代数 $R(I;r)$ が一度 Cohen-Macaulay であれば, どんな条件のもとで, もとの Rees 代数 $R(I)$ の Cohen-Macaulay 性が導かれるか? または, Rees 代数 $R(I^s)$ の Cohen-Macaulay 性から, いつ multi-Rees 代数 $R(I;r)$ の Cohen-Macaulay 性が導かれるかというものである.

残念ながら, この逆問題は一般には成立しない. 反例を挙げる前に, multi-Rees 代数の homological な特徴付けでもあり, 後に使うことになる次の定理を引用しておく.

定理 1.2 ([HHR]). *A の次元を d とする. このとき, 正整数 r に対して次は同値である.*
(a) $R(I;r)$ が *Cohen-Macaulay* 環.
(b) $[H^i_M(R(I))]_n = (0)$ *for all* $i < d+1$ *and* $n \notin \{-r+1, ..., -1\}$.
(c) $[H^i_M(G(I))]_n = (0)$ *for all* $i < d$ *and* $n \notin \{-r, \ldots, -1\}$, かつ $a(G(I)) < 0$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

ここで M は $R(I)$ の極大な graded イデアル, $G(I)$ は associated graded ring とする. $a(G(I))$ は $G(I)$ の a-invariant を意味し, これは次の様に定義されるものである; graded $R(I)$-加群 X に対し, $a_i(X) := \min\{n | [H^i_M(X)]_n \neq (0)\}$ と書き, 特に $a(X) := a_{\dim X}(X)$ と記す事にする.

命題 1.1 は, 定理 1.2 から容易に従う. また, 定理 1.2 より, ある multi-Rees 代数が Cohen-Macaulay であることと, $\mathrm{Proj}(R(I))$ が Cohen-Macaulay スキームかつ, 各 $a_i(R(I))$ が負であることとが同値 (A が Gorenstein 環の準同型像くらいを仮定して) と解る.

例 1.3. *A を Buchsbaum 環で, $2 \leq \mathrm{depth} A < d$ となるものとし, I をパラメーターイデアルとれば, $R(I)$ は Cohen-Macaulay ではないが, $r \geq d-1$ に対して $R(I;r)$ は Cohen-Macaulay である.*

例 1.4. *k を体, $A = k[[X,Y,Z]]/(XY-Z^2)$, $I = (X^2, Y^2, XZ, YZ)A$ とする. このとき, どんな $r > 0$ に対しても, $R(I;r)$ は Cohen-Macaulay となり得ないが, $s \geq 2$ に対して, $R(I^s)$ は Cohen-Macaulay である.*

このように私たちの問題には一般には反例があるのだが, いくらかの条件を仮定して次の主張が得られた.

定理 1.5. *A が 2 次元 Cohen-Macaulay 局所環で, I が高さ正のイデアルであるとき, 次は同値である.*

(a) *ある r に対して, $R(I;r)$ が Cohen-Macaulay 環.*
(b) *$R(I)$ が Cohen-Macaulay 環.*

定理 1.6. *I は 3 次元 Cohen-Macaulay 局所環 A のイデアルとする. I が整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルであるか, または剰余環 A/I が 1 次元 Cohen-Macaulay 環となっている場合, 次は同値である.*

(a) *ある r に対して, $R(I;r)$ が Cohen-Macaulay 環.*
(b) *$R(I)$ が Cohen-Macaulay 環.*

定理 1.7. *$\mathrm{depth} G(I) = t$ として, 次の (i) または (ii) を仮定する.*

(i) $a_n(G(I)) < 0$ *for all* $n = t + 2i < d$
(ii) $a_n(G(I)) < 0$ *for all* $n = t + 2i + 1 < d$

但し i は整数. このとき次は同値である.

(a) *ある r に対して, $R(I;r)$ が Cohen-Macaulay 環.*
(b) *ある $R(I^s)$ が Cohen-Macaulay 環.*

上の定理の仮定はちょっと判定しにくいものではあるが, 最も簡単な場合として, 次の系を得る.

系 1.8. *$\mathrm{depth} G(I) \geq d-1$ ならば, 次は同値である.*

(a) *ある r に対して, $R(I;r)$ が Cohen-Macaulay 環.*
(b) *ある $R(I^s)$ が Cohen-Macaulay 環.*

2. 証明

この節では, 定理 1.5, 1.6, 1.7 の証明を与える. これらの主張を示すのに, $A(X)$ (X は A 上の不定元) のテンサー積を経由して, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限体と仮定してよい. 以下, $R = R(I)$, $G = G(I)$ と書くこととし, R は多項式環 $A[t]$ の部分環とみることにする.

補題 2.1. *A は Cohen-Macaulay 環で, $I \not\subseteq \sqrt{(0)}$ とする. もし $t = \mathrm{depth} G < d$, ならば $a_t < a_{t+1}$ である.*

証明. $n \geq a_{t+1}$ ととる. このとき 2 つの単射 $[H_M^t(G)]_n \to [H_M^{t+1}(R_+)]_{n+1}$ と $[H_M^{t+1}(R_+)]_{n+1} \to [H_M^{t+1}(R)]_{n+1}$ があり, また, $[H_M^{t+1}(R_+)]_{n+2} \to [H_M^{t+1}(R)]_{n+1}$ が全射ということを用いて, $[H_M^t(G)]_n = (0)$ を得る.

補題 2.2. *A は Cohen-Macaulay 環で,$\dim A/I \leq 1$, $a_1(G) < 0$, $\mathrm{depth} G > 0$ と仮定する. $a \in I$ が I の上表元ならば, at は G-正則元である.*

証明. $X := [(0) :_G at]$ とする. 十分大きい n について, $X_n = (0)$ であることに注意する. $H_M^i(X) = \sum_{n \geq 0} H_{\mathfrak{m}}^i(X_n)$ なので, $H_M^i(X) = (0)$ $(i \geq 2)$ を得る. また $\mathrm{depth} G > 0$ より, $H_M^0(X) = (0)$ である. 今, 単射 $H_M^1(X) \to H_M^1(G)$ があるので $H_M^1(X) = (0)$ も従う. よって $X = (0)$ である.

命題 2.3. *A は Cohen-Macaulay で $\dim A \geq 2$ とする. $\dim A/I \leq 1$ とし, $\mathrm{depth} G \geq d-1$, とし $a(G) \leq 1-d$ とする. このとき G は Cohen-Macaulay である.*

証明. d に関する帰納法. $d = 2$ とする. $\mathrm{depth} G \geq 1$ である. もし, $\mathrm{depth} G = 1$ ならば, $a_1(G) < a_2(G) < 0$ より, G-正則となる $at \in R$ が存在する. 完全列 $0 \to G(-1) \to G \to G/atG \to 0$ より, 単射 $H_M^0(G/atG) \to H_M^1(G)$ を得る. $a_1(G) \leq -2$ より, $H_M^0(G/atG) = (0)$. 故に, $\mathrm{depth} G \geq 2$ を得る.

$d \geq 3$ の場合. $\mathrm{depth} G \geq 2$ で $a_1(G) = -\infty$ より, G-正則となる $at \in R$ が存在する. $B = A/(a)$ は $d-1$ 次元 Cohen-Macaulay 環で, $\dim B/IB \leq 1$, $\mathrm{depth} G(IB) \geq d-2$, $a(G(IB)) = a(G)+1 \leq 2-d$ となり, 帰納法の仮定により, $G(IB)$ は Cohen-Macaulay. 故に G が Cohen-Macaulay である.

この命題から, 定理 1.5 は直ちに従う.

補題 2.4. *A を 1-次元 Cohen-Macaulay 環, I は A のイデアルで剰余環 A/I が 1-次元 Cohen-Macaulay 環となるものとする. もし, $a(G) \leq 1$ ならば G は Cohen-Macaulay である.*

証明. $I \not\subseteq \sqrt{(0)}$ のとき. もし, $\mathrm{depth} G = 0$ なら, 補題 2.1 より, $a_0(G) = 0$ となるはずである. しかしながら, 自然な埋め込み $G_+ \to G$ は, 同型 $H_M^0(G_+) \cong H_M^0(G)$ を導くので, これは矛盾. $I^r \neq (0)$, $I^{r+1} = (0)$ とする. $r > 0$ としてよい. $[H_M^i(G)]_r \cong H_{\mathfrak{m}}^i(I^r)$ であり, $a_1(G) \leq 1$ となることから, $r = 1$. 故に, $G \cong A/I \oplus I$. これは Cohen-Macaulay である.

定理 *1.6* の証明. I が整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合. J を I の minimal reduction とする時, $r_J(I) \leq \max\{a_i(G) + i | 0 \leq i \leq 3\}$ が成り立つことを注意しておく ([T]). $R(I;r)$ が Cohen-Macaulay と仮定すると, $r_J(I) \leq 2$ である. 故に, $I^{n+1} \cap J = JI^n$ $(\forall n \geq 2)$. あと $I^2 \cap J = JI$ がいえれば G が Cohen-Macaulay となり, R も Cohen-Macaulay となる. 今, J は正則列で生成されているので, [I] より, $I^2 \cap J = JI$ が従う.

A/I が 1 次元 Cohen-Macaulay 環の場合. $R(I;r)$ が Cohen-Macaulay と仮定する. $a_1(G) < 0$ で $\mathrm{depth} G > 0$ なので, $a \in I$ を上表元ととれば, $at \in R$ は G-正則元である. $B = A/(a)$ とおき, $b \in I$ を IB の上表元となるようにとる. $\overline{G} = G(IB)$ とおき, $\overline{G}$ が Cohen-Macaulay であることを示せば十分である. $\overline{G}$ が Cohen-Macaulay でないと仮定する. もし $\mathrm{depth}\overline{G} = 0$ ならば, $a_0(\overline{G}) < a_1(\overline{G}) \leq 0$ であり, $a_0(\overline{G}) = -\infty$ と

なり矛盾する. depth$\overline{G}=1$ と仮定する. このとき, $a_1(\overline{G})<0$ であり, 補題 2.3 より, bt は $\overline{G}$-正則元となる. すなわち at, bt は G-正則列となる. $C=A/(a,b)$ とおくと, これは 1 次元 Cohen-Macaulay 環で, C/IC も Cohen-Macaulay で, $a_1(G(IC))\leq 1$ である. よって, 補題 2.4 より $G(IC)$ は Cohen-Macaulay, 故に $\overline{G}$ が Cohen-Macaulay となる.

補題 2.5. ある $s>0$ に対して, *$R(I^s)$ が Cohen-Macaulay と仮定する. このときもし $a_{i-1}(G)<0$ かつ $a_i(G)\geq 0$ ならば, $a_i(G)<a_{i+1}(G)$ である.*

証明. $a_{i-1}(G)<0$ より, 任意の $n\geq 0$ に対して, $[H^i_M(R_+)]_{n+1}\to[H^i_M(R)]_n$ は単射となる. これと, 同型 $[H^i_M(R_+)]_{n+1}\cong[H^i_M(R)]_{n+1}$ より, $[H^i_M(R)]_n=(0)$ を得る. 今, $a_i(G)\geq 0$ と $a_i(G)\geq a_{i+1}(G)$ とが同時に起こったとすると, $n\geq a_i(G)$ に対して, 単射 $[H^i_M(G)]_n\to[H^{i+1}_M(R_+)]_{n+1}$ ($\cong[H^{i+1}_M(R)]_{n+1}$) があり, また全射 $[H^{i+1}_M(R_+)]_{n+2}\to[H^{i+1}_M(R)]_{n+1}$ がある. これは, $[H^i_M(G)]_{a_i(G)}=(0)$ をもたらし, 矛盾.

定理 *1.7* の証明. $R(I^s)$ が Cohen-Macaulay ならば, R は R_+ に関して generalized Cohen-Macaulay. つまり, $[H^i_M(R)]_n=(0)$ for all $n\ll 0$ and $i<d+1$ である. このことから $[H^i_M(G)]_n=(0)$ for all $n\ll 0$ and $i<d$ がいえる. また一般に $[a(G)/s]=a(G(I^s))$ が成立ち, $a(G)<0$ が従う. あとは, 各 $a_i(G)<0$ ($i<d$) がいえればよい. しかしそれは, 定理 1.7 の (i) または (ii) を仮定すれば, 補題 2.5 より保証される.

References

[GN] S. Goto and K. Nishida, *The Cohen-Macaulay and Gorenstein Rees algebras associated to filtrations*, Mem. Amer. Math. Soc. **526** (1994).

[HHR] M. Herrmann, E. Hyry and J. Ribbe, *On the Cohen-Macaulay and Gorenstein properties of multi-Rees algebras*, Manus. Mat. **79** (1993), 343-377.

[I] S. Itoh, *Integral closure of ideals generated by regular sequences*, J. of Algebra **117** (1988), 390-401.

[KN] T. Korb and Y. Nakamura, *On the Cohen-Macaulayness of multi-Rees algebras and Rees algebras of poewers of ideals*, preprint.

[T] N.V. Trung, *Reduction exponent and degree bound for the defining equations of graded rings*, Proc. of the AMS **101** (1987), 229-236.

Equi-multiple なイデアルを center にした blow-up で得られるマコーレー化について

蔵野 和彦 (kurano@math.metro-u.ac.jp)
東京都立大学 理学部 数学教室

1 序

(A, m) がネーター局所環とする。スキームの射 $\pi : X \to \mathrm{Spec}(A)$ が双有理な固有射で X が Cohen-Macaulay (各点の局所環が Cohen-Macaulay) であるとき、π は A のマコーレー化 (Macaulayfication) であるということにする。

現在わかっているマコーレー化には、$X = \mathrm{Proj}(R(L))$ であり、L が equi-multiple ($\mathrm{ht}_A L = \dim G(L) \otimes A/m$) なイデアルであるものが多い (川崎氏の最新の結果 [5] では、こうはならないが)。ただし、ここで $R(L) = A[Lt] \subseteq A[t]$ は A のイデアル L に関するリース環であるとする。例えば、Brodmann が指摘しているが (川崎氏の論文 [5] では、証明が付けられている)、$\mathrm{Spec}(A)$ の non-Cohen-Macaulay locus の次元が 1 以下である場合は、equi-multiple なイデアルによる blow-up でマコーレー化が得られることが証明できる。さらに、私がマコーレー化に興味を持つきっかけでもある最近の tight closure の理論を使ったマコーレー化 (Huneke-Smith [6], Aberbach [1]) も、equi-multiple なイデアルによる blow-up となっている。

以下の私の研究の目的は、equi-multiple なイデアルを center にした blow-up で得られるスキームの Cohen-Macaulay 性を解析し、それによって、tight closure の理論がマコーレー化の構成に何故役に立ったのか説明づけることにある。詳しくは、[4] 参照。

以下、次のことを最後まで仮定する。

(A, m) を Gorenstein 局所環の準同型像で、$\dim A = d + s$ とする。L を A のイデアルで、$\mathrm{ht}_A L = \dim G(L) \otimes A/m = d > 0$ (つまり、L は equi-multiple) を充たすものとする。

ここで、$z_1, \ldots, z_s \in A$ を、A/L のパラメーター系となるように取る。($\dim A/L = s$ に注意。このとき、$z_1, \ldots, z_s$ は、A のパラメーター系の一部になることがわかる。)

2 Equi-multiple なイデアルによる blow-up の一般論

この章での我々の目的は、上の状況で、いつ $\mathrm{Proj}(R(L))$ が Cohen-Macaulay になるかを調べることである。

Equi-multiple なイデアルによる blow-up の議論を始める前に、blow-up の Cohen-Macaulay 性の一般論に関する注意をしておく。

注意 1 I を A のイデアルとする (equi-multiple は仮定しない)。$R(I)_+ = \oplus_{n>0} R(I)_n$、$G(I)_+ = \oplus_{n>0} G(I)_n$ とおく。ここで、次数環 (または、次数加群) T に対して、T_n はその n 次斉次成分を表わすものとする。また、M を $R(I)$ の (唯一つの) 斉次極大イデアルとする。つまり、$M = mR(I) + R(I)_+$ である。次の 8 つの条件を考える。

(1) $\mathrm{Proj}(R(I))$ は、Cohen-Macaulay。

(2) $\mathrm{NCM}(R(I)) \subseteq V(R(I)_+)$。ただし、ここで、

$$\mathrm{NCM}(R(I)) = \{P \in \mathrm{Spec}(R(I)) \mid R(I)_P \text{ is not Cohen-Macaulay}\}$$

は、$R(I)$ の non-Cohen-Macaulay locus とし、$V(R(I)_+) = \{P \in \mathrm{Spec}(R(I)) \mid P \supseteq R(I)_+\}$ とおく。

(3) $m \gg 0$ と $i \leq \dim A$ に対して、$H^i_M(R(I))$ は、$R(I)_+^m$ で消える。

(4) $i \leq \dim A$ であるとき、$H^i_M(R(I))$ は finitely graded である。つまり、有限個の n を除いて $[H^i_M(R(I))]_n = (0)$ である。

(5) $\mathrm{Proj}(G(I))$ は、Cohen-Macaulay。

(6) $\mathrm{NCM}(G(I)) \subseteq V(G(I)_+)$。

(7) $m \gg 0$ と $i < \dim A$ に対して、$H^i_M(G(I))$ は、$G(I)_+^m$ で消える。

(8) $i < \dim A$ であるとき、$H^i_M(G(I))$ は finitely graded である。

このとき、

$$(3) \Longleftrightarrow (4) \Longrightarrow (1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (5) \Longleftrightarrow (6) \Longleftarrow (7) \Longleftrightarrow (8)$$

が成立する。

さらに、A が等次元で、I は A のどの極小素イデアルにも含まれないと仮定すれば、(1) から (8) はすべて同値である。

このとき、次が成立する。

定理 2 上の状況の下で、次は同値。

(1) $\mathrm{Proj}(R(L))$ は Cohen-Macaulay。

(2) 次の (a), (b) が成立する。

(a) $n \gg 0$ に対して $\mathrm{depth}\, L^n/L^{n+1} = s$ である。(つまり、$n \gg 0$ に対して、$z_1, \ldots, z_s$ は L^n/L^{n+1}- 正則列である。

(b) $\mathrm{Proj}(R(\overline{L}))$ は Cohen-Macaulay。ここで、$\overline{A} = A/(z_1, \ldots, z_s)$, $\overline{L} = L\overline{A}$ とする。

つまり、 Proj($R(L)$) の Cohen-Macaulay 性を判定するためには、定理 2 の (2) の (a) と (b) を確かめればよい。

命題 4 では、定理 2 の (2) の (b) が成立するためのある充分条件を与える。そのために、 d- 列、 u.s.d- 列の概念を定義する。 d- 列、 u.s.d- 列等の基本的な性質については、後藤 - 山岸 [2] を参照。

定義 3 B を可換環、 $x_1, \ldots, x_m$ を B の元、 E を B- 加群とする。

(1) $1 \leq i \leq j \leq m$ に対して、

$$(x_1, \ldots, x_{i-1})E \underset{E}{:} x_i x_j = (x_1, \ldots, x_{i-1})E \underset{E}{:} x_j$$

が成立するとき、 $x_1, \ldots, x_m$ は E 上の d- 列であるという。

(2) 勝手な自然数 $n_1, \ldots, n_m$ と、任意の $\{1, \ldots, m\}$ 上の置換 σ に対して、 $x_{\sigma(1)}^{n_1}, \ldots, x_{\sigma(m)}^{n_m}$ が E 上の d- 列であるとき、 $x_1, \ldots, x_m$ は E 上の u.s.d- 列という。

このとき、次が成立する。

命題 4 定理 2 と同じ仮定の下で (今、 $\dim \overline{A} = d > 0$ であり、 $\overline{L}$ は maximal primary ideal であることに注意)、さらに、次の 3 条件のうちの一つが成立するとする。

(I) $\overline{L}$ は $\overline{A}$ 上の u.s.d- 列で生成される。

(II) $\overline{L}^{r+1} = q\overline{L}^r$ を充たす整数 $r \geq 0$ とイデアル $q = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}) \subseteq \overline{L}$ が存在し、かつ、 $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}$ は、 $\overline{L}^r$ 上の u.s.d- 列である。

(III) A/m が代数的閉体、 $\overline{L}^{r+1} = q\overline{L}^r$ を充たす整数 $r \geq 0$ とイデアル $q = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}) \subseteq \overline{L}$ が存在し、かつ、 $q = (\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_d})$ を充たす $\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_d}$ は必ず $\overline{L}^r$ 上の d- 列である。

このとき、定理 2 の (2) の (b) は成立する。つまり、 Proj($R(\overline{L})$) は Cohen-Macaulay である。

命題 4 の (I) の場合は [2] で、命題 4 の (II) の場合は山岸 [4] の appendix により $R(I)$ と $G(I)$ のローカル・コホモロジーが計算可能である。命題 4 の (I), (II) の場合はこの計算結果と注意 1 より直ちに Proj($R(I)$) が Cohen-Macaulay であることがわかる。

命題 4 の (III) の場合は、ローカル・コホモロジーの計算を経由せずに証明する。

3 Tight closure とマコーレー化

以下、上の定理 2、命題 4 を tight closure で得られたイデアルでの blow-up の Cohen-Macaulay 性の判定に適用する。

p を素数とし、以下のすべての環は標数が p であると仮定する。

まず、 tight closure, test element などの言葉の定義から始める。これらの正確な定義や基本的な性質については Hochster-Huneke [3] を参照。

定義 5 B が環、J が B のイデアルとする。$B^\circ = B \setminus \cap_{P \in \mathrm{Min}(B)} P$ とおく ($\mathrm{Min}(B)$ は、B の極小素イデアルの集合)。また、$J^{[p^e]} = (x^{p^e} \mid x \in J)$ とおく。このとき、

$$J^* = \{x \in B \mid \text{ある } c \in B^\circ \text{ が存在して、} e \gg 0 \text{ に対して } cx^{p^e} \in J^{[p^e]} \text{ が成立する。}\}$$

とおき、これを J の tight closure という。(J^* は B のイデアルであり、$J \subseteq J^* \subseteq \overline{J}$ を充たすことが知られている。ただし、$\overline{J}$ はイデアル J の integral closure とする。)

また、$c \in B^\circ$ が、任意の b のイデアル J と任意の $x \in J^*$ に対して $cx^{p^e} \in J^{[p^e]}$ $(\forall e \geq 0)$ を充たすとき、c は test element であるという。

また、次の定理 ([3] の Theorem 7.6, [6] の Theorem 2.3) は、具体的な計算において非常に役に立つものである。

定理 6 (C, m) を標数 p の等次元なエクセレント局所環とする。$x_1, \ldots, x_d$ を、C のパラメーター系とする。I と J を、多項式環 $D = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_d]$ のモノミアルイデアルとする。(D は、自然に C の部分環の構造を持つことに注意。)

このとき、

$$\begin{aligned} (IC)^* \underset{C}{:} JC &= ((I \underset{D}{:} J)C)^*, \\ (IC)^* \cap (JC)^* &= ((I \cap J)C)^* \end{aligned}$$

が成立する。

今後は、今までの仮定に加えて、さらに次を仮定する。

A は、エクセレント正則局所環の像とし、剰余体 A/m は代数的閉体と仮定する。さらに、A は、標数 $p > 0$ の体を含む整閉整域とする。また、$y_1, \ldots, y_d$ は A のパラメーター系の一部で、これらはすべて test element ([3] 参照) と仮定する。さらに、$d \geq 3$ とする。$I = (y_1, \ldots, y_d)$, $L = I^*$ とおく。

[6] の Lemma 3.1 によると、このとき任意の自然数 n に対して $L^{n+1} = I^n L = (I^n)^*$ が成立し、特に L は equi-multiple である。

このとき、次が成立する。

補題 7 L は、命題 4 の条件 (III) を充たす。($r = 1$, $q = I\overline{A}$ として。)

定理 2、命題 4、補題 7 によって、今の状況で、$\mathrm{Proj}(R(L))$ が Cohen-Macaulay であるための必要充分条件は、定理 2 の (2) の (a) が成立することである。

ところが、任意の自然数 n と、$i = 1, \ldots, s$ に対して、

$$L^n \subseteq L^n \underset{A}{:} z_i = (I^n)^* \underset{A}{:} z_i = ((y_1, \ldots, y_d))^* \underset{A}{:} z_i = ((y_1, \ldots, y_d))^* = L^n$$

が成立し ($y_1, \ldots, y_d, z_1, \ldots, z_s$ は A のパラメーター系であり、これに対して定理 6 を使う)、従って z_i は A/L^n- 正則であることがわかる。このことより、z_i はすべての非負整数 n に対して L^n/L^{n+1}- 正則となる。

このことから、直ちに次が証明できる。

定理 8 $s = 0, 1$ であるとき、Proj$(R(L))$ は Cohen-Macaulay。($s = 0$ のときは、[6]、$s = 1$ のときは、[1], [4])

実は、定理 8 では、剰余体 A/m は代数的閉体と仮定する必要はない。実際、[4] の論文と appendix では、$s = 0, 1$ の場合にその仮定をしないでリース環 $R(L)$ の局所コホモロジー群が計算されている。それを使えば、注意 1 より直ちに定理 8 が出てくる。

参考文献

[1] I. M. ABERBACH, Arithmetic Macaulayfication using ideals of dimension one, preprint.

[2] S. GOTO AND K. YAMAGISHI, The theory of unconditioned strong d-sequences and modules of finite local cohomology, preprint.

[3] M. HOCHSTER AND C. HUNEKE, Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 31–116.

[4] K. KURANO, On Macaulayfication obtained by a blow-up whose center is an equi-multiple ideal,
K. YAMAGISHI, Unconditioned strong d-sequences and local cohomology of Rees and associated graded modules (appendix), preprint.

[5] T. KAWASAKI, On Macaulayfication of certain quasi-projective schemes, preprint.

[6] C. HUNEKE AND K. E. SMITH, A tight closure approach to arithmetic Macaulayfication, preprint.

局所環の COHEN-MACAULAY 化

川崎健

東京都立大学

1995年11月21日

1. 序論

本稿は川崎 [9, 10] の内容の概説である．Noether スキーム X の **Cohen-Macaulay 化**とは双有理固有射 $Y \to X$ で Y が Cohen-Macaulay スキームであるものを言う．この概念は 1978 年 Faltings [4] によって導入され，彼はまた双対化複体をもつ Noether 環上の準射影スキームの Cohen-Macaulay 化をその non-Cohen-Macaulay locus が高々1 次元の時構成した．もちろん特異点解消は Cohen-Macaulay 化であり，当時既に標数 0 の体上の代数多様体などについては特異点解消の存在が知られていた．しかし Faltings が Cohen-Macaulay 化を構成した方法は一切標数に依存せず，不等標数の時にも通用する．そこで Cohen-Macaulay 化の研究は一般のスキームの特異点解消に役立つと考えられる．

この他にも Cohen-Macaulay 化は Cohen-Macaulay でない局所環の研究 [5, 13] や，双対化複体の存在に関する Sharp の予想 [2, 3] などにも関連し多くの研究者の興味を引いてきた．最近でも Huneke-Smith [8], Aberbach [1], 蔵野等の研究がある．そこで私は non-Cohen-Macaulay locus が 2 次元の時 Cohen-Macaulay 化を構成することを試み次の結果を得た．

定理 1.1. *A を双対化複体を持つ Noether 環，X をその上の準射影スキームとする．この時 X は余次元関数 d を持つ [7, p. 283]．もし*

(1) *X の non-Cohen-Macaulay locus は高々2 次元*

(2) *$d(p) + \dim \overline{\{p\}}$ は X の non-Cohen-Macaulay locus 上で局所的定数*

ならば X は Cohen-Macaulay 化を持つ．

もし X の non-Cohen-Macaulay locus が高々1 次元ならば, 条件 (2) は常に成立している．従ってこの定理は Faltings の結果を含んでいる．

本稿では簡単のため局所環の spectrum に話題を限って，その Cohen-Macaulay 化の構成の概要を述べる．以下 $(A, \mathfrak{m})$ を d 次元 Noether 局所環で双対化複体を持つものとする．一般に Spec A の non-Cohen-Macaulay locus は閉集合とは限らない．しかし双対化複体が存在するならばそれは閉集合である．そこで s で X の non-Cohen-Macaulay locus の次元を表すものとする．さらに全ての素因子 $\mathfrak{p}$ は $\dim A/\mathfrak{p} = d$ を満たすと仮定する．A が双対化複体を持つ—従って形式的ファイバーは全て Gorenstein—からこれは A が unmixed と仮定することと同じである．Noether 局所環の Cohen-Macaulay 化を構成するにあたって unmixed な場合に帰着する方法があるのでこの仮定は不自然なものではない．

2. Schenzel の定理

この節では Cohen-Macaulay 化で重要な役割を果す Schenzel の定理について述べる．

定義 2.1. 有限生成 A 加群 M に対してイデアル $\mathfrak{a}(M)$ を

$$\mathfrak{a}(M) = \prod_{i=0}^{\dim M-1} \operatorname{ann} H^i_{\mathfrak{m}}(M)$$

で定める．

$D^\bullet$ を A の基本的双対化複体とすると

$$\mathfrak{a}(M) = \prod_{i=0}^{\dim M-1} \operatorname{ann} H^{-i}(\operatorname{Hom}(M, D^\bullet))$$

でもある．これから $\dim A/\mathfrak{a}(M) < \dim M$ がわかる．また $H^{-d}(D^\bullet)$ はいわゆる正準加群であり，A が unmixed であることに注意するとその support は $\operatorname{Spec} A$ と一致する．よって

$$V(\mathfrak{a}(A)) = \bigcup_{i=0}^{d-1} \operatorname{Supp} H^{-i}(D^\bullet)$$

は $\operatorname{Spec} A$ の non-Cohen-Macaulay locus と一致する．とくに $s = \dim A/\mathfrak{a}(A)$ であり，$s=0$ であることと A が generalized Cohen-Macaulay であることが同値である．
次の定理は 1979 年 Schenzel [11] によって提出され, 後に彼自身によって一般化された [12].

定理 2.2. M を有限生成 A 加群，$x_1, \ldots, x_n$ をそのパラメーター系とすると

$$(x_1, \ldots, x_{i-1})M : x_i \subseteq (x_1, \ldots, x_{i-1})M : \mathfrak{a}(M) \quad (1 \leq \forall i \leq n).$$

Schenzel がこの定理を提出したときは homological 予想への応用を念頭に置いていたようである．ところが Cuong はこの定理を用いて A 上に長さ $d-s$ の u.s.d 列[6] が存在することを示した．すなわち A の部分パラメーター系 $x_{s+1}, \ldots, x_d$ を $\mathfrak{a}(A)$ の中からとると u.s.d 列となる．彼はこれを Cohen-Macaulay 化のために使おうと考えた．

さらに詳しく言うと A のパラメーター系を

$$
(2.3)\qquad \begin{cases} x_{s+1},\ldots,x_d \in \mathfrak{a}(A); \\ x_i \in \mathfrak{a}(A/(x_{i+1},\ldots,x_d)) \quad (i \le s) \end{cases}
$$

を満たすようにとると次が成立する．

補題 2.4. 1) 任意の正整数 $n_1, \ldots, n_d$と $x_{s+1}, \ldots, x_d$の置換に対して $x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}$ は d列．

2) $\mathfrak{q} = (x_{s+1},\ldots,x_d)$ とおくと任意の正整数 $n_1, \ldots, n_d, n$ に対して $x_1^{n_1}, \ldots, n_s^{n_s}$ は $A/\mathfrak{q}^n$上の d列．

(2.3) は Cuong の与えた p-standard パラメーター系の定義を少し変えたもので，補題の 1) は彼が与えたものである．

3. Cohen-Macaulay 化の構成

この節では $s = 0, 1, 2$ の時 Spec A の Cohen-Macaulay 化を構成する．

$s = 0$ の時，先に述べたように A は generalized Cohen-Macaulay であり，この時 Faltings の Cohen-Macaulay 化の構成方法は後藤 [5]，Schenzel [13], 後藤・山岸 [6] によって再構成された．すなわち $x_1, \ldots, x_d$を A のパラメーター系とする時, ある正整数 n があって $x_1^n, \ldots, x_d^n$は u.s.d 列となる．そして$\operatorname{Proj} A[x_1^n t,\ldots,x_d^n t]$ は Cohen-Macaulay スキームとなる．ただしここで t は不定元．

次に $s \ge 1$ の時を考える．$x_1, \ldots, x_d$を(2.3) を満たす A のパラメーター系，$\mathfrak{q} = (x_{s+1},\ldots,x_d)$, $B = A[\mathfrak{q}/x_{s+1}]$ と置く．

$s = 1$ の時の Faltings の Cohen-Macaulay 化の構成は 3 段階に分れる．

Step A. $x_1, \ldots, x_d$により強い仮定を課して

$$
(3.1)\qquad H^p_{\mathfrak{n}} H^q_{\mathfrak{m}}(B) = 0 \quad (q = 0 \text{ または } p < d-2)
$$

$$
(3.2)\qquad H^1_{\mathfrak{m}}(B) \text{ は有限生成 } B\text{加群}
$$

を示す．ここで $\mathfrak{n}$ は Bの極大イデアル．$\sqrt{(x_1,x_2)B} = \sqrt{\mathfrak{m}B}$に注意すればさらに

$$
(3.3)\qquad (x_1^n, x_2^n) H_{\mathfrak{m}}(B) = 0 \quad (\exists n \gg 0)
$$

がわかる．

Step B. (3.1)–(3.3) から$\operatorname{Proj} B[x_1^n t, x_2^n t]$ が *Cohen-Macaulay* スキームであることを示す．

Step C. これらの操作を $B = A[\mathfrak{q}/x_2]$ のみでなく $A[\mathfrak{q}/x_3], \ldots, A[\mathfrak{q}/x_d]$ にも同様に行ない，得られた *Cohen-Macaulay* スキームをはり合わせて $\operatorname{Spec} A$ の *Cohen-Macaulay* 化を得る．

そこで私は u.s.d 列の理論を用いて Step Aの証明をやり直した．すなわち

Step A′. $s \geq 1$ の時，$1 \leq k \leq s$ とすると

$$H_{\mathfrak{n}}^p H_{(x_k,\ldots,x_d)}^q(B) = 0 \quad (q = 0 \text{ または } p < d - s - 1) \tag{3.4}$$

$$H_{(x_k,\ldots,x_d)}^1(B) \text{ は有限生成 } B \text{加群} \tag{3.5}$$

$$(x_{k+q-1}, \ldots, x_d) H_{(x_k,\ldots,x_d)}^q(B) = 0 \quad (q < s - k + 2) \tag{3.6}$$

となる．

特に $k = s$ と置けば (3.4)–(3.6) は (3.1)–(3.3) とそっくりである．従って Step B, Cと組み合わせて次が得られる．

定理 3.7. $s \geq 1$ のとき

$$X = \operatorname{Proj} A[(x_s, \ldots, x_d)(x_{s+1}, \ldots, x_d)t]$$

とおくと

$$\operatorname{depth} \mathcal{O}_{X,p} \geq d - s + 1 \quad (p \in X \text{は閉点}).$$

特に $s = 1$ の時 Xは *Cohen-Macaulay* スキーム．

以下 $s \geq 2$ とする．すると Step A′は Step A以上の情報をもたらす．そこで Step B の証明をやり直して次が得られる．

Step B′. $C = B[x_{s+1}/x_s]$ または $B[x_s/x_{s+1}]$ と置く．$\mathfrak{l}$ を Cの極大イデアルとすると(3.4)–(3.6) で $k = s - 1$, s と置いたものから

$$H_{\mathfrak{l}}^p H_{(x_{s-1},\ldots,x_d)}^q(C) = 0 \quad (q = 0 \text{ または } p < d - s) \tag{3.8}$$

$$(x_{s-1}, \ldots, x_d) H_{(x_{s-1},\ldots,x_d)}^1(C) = 0 \tag{3.9}$$

がわかる．

さらに

$$(x_s, \ldots, x_d)(x_{s+1}, \ldots, x_d) : \langle x_{s-1} \rangle$$

の reduction を計算して

$$H_{(x_{s-1},\ldots,x_d)}^1(C) \text{ は有限生成 } C \text{加群} \tag{3.10}$$

であることを得る．

そこで Cに Step Bを適用して $s = 2$ の時の Cohen-Macaulay 化が得られる．すなわち

定理 3.11. $s \geq 2$ の時

$$X = \operatorname{Proj} A[(x_{s-1}, \ldots, x_d)(x_s, \ldots, x_d)(x_{s+1}, \ldots, x_d)t]$$

と置けば

$$\operatorname{depth} \mathcal{O}_{X,p} \geq d - s + 2 \quad (p \in X \text{は閉点}).$$

特に $s = 2$ の時 X は *Cohen-Macaulay* スキーム.

このように Step A′と 2 回の Step Bによって $s = 2$ の時 $\operatorname{Spec} A$ の Cohen-Macaulay 化が構成できた. これから $s \geq 3$ の時も Step A′と s 回の Step Bによって $\operatorname{Spec} A$ の Cohen-Macaulay 化ができるのではないかと思われる. つまり

予想 3.12. $s \geq 3$ の時

$$X = \operatorname{Proj} A[(x_1, \ldots, x_d) \cdots (x_{s+1}, \ldots, x_d)t]$$

は *Cohen-Macaulay* スキームであろう.

References

1. Ian M. Aberbach, *Arithmetic Macaulayfications using ideals of dimension one*, preprint, 1995
2. Yoichi Aoyama and Shiro Goto, *Some special cases of a conjecture of Sharp*, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), 613–634.
3. ———, *A conjecture of Sharp—the case of local rings with* dim nonCM ≤ 1 *or* dim ≤ 5, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of Masayoshi Nagata, 1987, pp. 27–34.
4. Gerd Faltings, *Über Macaulayfizierung*, Math. Ann. **238** (1978), 175–192.
5. Shiro Goto, *Blowing-up of Buchsbaum rings*, Commutative Algebra: Durham 1981, London Math. Soc. Lect. Notes, vol. 72, Cambridge Univ. Press, 1982, pp. 140–162.
6. Shiro Goto and Kikumichi Yamagishi, *The theory of unconditioned strong d-sequences and modules of finite local cohomology*, unpublished.
7. Robin Hartshorne, *Residue and duality*, Lecture Notes in Math. vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, New-York, 1966.
8. Craig Huneke and Karen E. Smith, *Tight closure approach to arithmetic Macaulayfication*, Ill. J. Math. (to appear).
9. Takesi Kawasaki, *On Macaulayfication of certain quasi-projective schemes*, preprint, 1995.
10. ———, *On Macaulayfication of certain quasi-projective schemes*, Ph.D. thesis, Tokyo Metropolitan University, 1995.
11. Peter Schenzel, *Dualizing complexes and system of paramters*, J. Algebra **58** (1979), 495–501.
12. ———, *Cohomological Annihilators*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **91** (1982), 345–350.
13. ———, *Standard system of parameters and their blowing-up rings*, J. Reine Angew. Math. **344** (1983), 201–220.

192-03 東京都八王子市南大沢 1-1 東京都立大学数学教室
E-mail address: kawasaki@math.metro-u.ac.jp

NOTE ON GRADING INTEGRAL DOMAINS *

Ryûki MATSUDA
Department of Mathematics, Ibaraki University

A torsion-free cancellative commutative semigroup (written additively) $S \supsetneqq \{0\}$ is called grading monoid. This is the same saying that S is a subsemigroup$\supsetneqq \{0\}$ of a torsion-free abelian group. This is also the same saying that S is a subsemigroup $\supsetneqq \{0\}$ of a totally ordered abelian group. A more proper name is wanted for grading monoid. By a graded integral domain $\oplus_S R_s$, we mean an integral domain graded by a grading monoid S with the assumption that each R_s is non-zero. The semigroup ring $D[S]$ of S over a domain D is an example of graded integral domains. General refrerences on grading monoids S, S-graded domains and semigroup rings are [7] and [3]. Let $f = \sum a_i X^{s_i}$ ($a_i \in D$ and $s_i \in S$) be an element of $D[S]$. The a_i have been regarded more important than the s_i. But both are equivalent in some aspects. Therefore giving various definitions of terms in ring theories for grading monoids may be of some conveniences.

Cohn[2] defined inert and strongly inert. Thus we define an extension of domains $D \subset E$ to be inert if whenever $0 \neq xy \in D$ for some $x, y \in E$, then $xu, yu^{-1} \in D$ for some unit u of E. We define $D \subset E$ to be strongly inert if whenever $0 \neq xy \in D$ for some $x, y \in E$, then $x, y \in D$. Let Γ be a grading monoid with submonoid S. Then Γ is called extension semigroup of S, and S is called simply subsemigroup of Γ. We define $S \subset \Gamma$ to be inert or strongly inert analogously.

In [1], Anderson-Anderson investigate different ways to regrade $\oplus_S R_s$. Among other theorems, they proved the following,

Theorem 1([1]). $\oplus_S R_s \subset \oplus_\Gamma R_\alpha$ is strongly inert if and only if $S \subset \Gamma$ is strongly inert.

It would be very interesting to determine necesary and sufficient conditions for $\oplus_S R_s \subset \oplus_\Gamma R_\alpha$ to be inert[1].

---

*このノートは Kobe J. Math. 12 (1995) に発表された同名の論文の解説です.

The quotient group $\{s_1 - s_2 \mid s_i \in S\}$ of S is denoted by $\mathrm{q}(S)$. Let $x \in \oplus_S R_s$, with $x = x_1 + \cdots + x_n$, where $0 \neq x_i \in R_{s_i}$ for each i and $s_i \neq s_j$ for $i \neq j$. Then the subset $\{s_1, \cdots, s_n\}$ of S is also called support of x, and is denoted by $\mathrm{Supp}_e(x)$. Let I_1, I_2 be subsets of $\mathrm{q}(S)$. Then the subset $\{x_1 + x_2 \mid x_i \in I_i\}$ of $\mathrm{q}(S)$ is denoted by $I_1 + I_2$. $\underbrace{I + \cdots + I}_{n}$ is denoted by nI for $I \subset \mathrm{q}(S)$. The subset $\{\alpha \in I \mid I_1 + \alpha \subset I_2\}$ is denoted by $(I_2 : I_1)_I$. The subset $\{t \in S \mid R_t$ contains a unit of $\oplus_S R_s\}$ is denoted by $S^{(0)}$.

Lemma 2. Assume that $\oplus_S R_s \subset \oplus_\Gamma R_\alpha$ is inert. Let I_1, I_2 be non-empty finite subsets of Γ such that $I_1 + I_2 \subset S$. Then we have $(S : I_1)_{\Gamma^{(0)}} + (S : I_2)_{\Gamma^{(0)}} \ni 0$.

For the proof, we choose $F_1, F_2 \in \oplus_\Gamma R_\alpha$ such that $\mathrm{Supp}_e(F_1) = I_1$, $\mathrm{Supp}_e(F_2) = I_2$. Then $F_1 F_2 \in \oplus_S R_s$. Hence we have $F_1 u, F_2 u^{-1} \in \oplus_S R_s$ for some unit $u \in R_{\alpha_1}$ of $\oplus_\Gamma R_\alpha$. Then $\alpha_1 \in (S : I_1)_{\Gamma^{(0)}}$ and $-\alpha_1 \in (S : I_2)_{\Gamma^{(0)}}$.

An element α of an extension semigroup Γ of S is called integral over S if $n\alpha \in S$ for some $n \in \mathbf{N}$. Integrally closed and integral closure are defined analogously.

Lemma 3. Assume that $\oplus_S R_s \subset \oplus_\Gamma R_\alpha$ is inert. Then S is integrally closed in Γ.

For the proof, assume that $0 \neq \alpha_1 \in \Gamma$ is integral over S. We have $n\alpha_1 \in S$ for some $n \in \mathbf{N}$. Choose $0 \neq x \in R_{\alpha_1}$. We have $\oplus_S R_s \ni 1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{n-1})$. Hence there exists a unit $u \in R_{\alpha_2}$ of $\oplus_\Gamma R_\alpha$ such that $(1-x)u, (1+x+\cdots+x^{n-1})u^{-1} \in \oplus_S R_s$. Then it follows $\alpha_1 \in S$.

Lemma 4. Let f, g be non-zero elements of $\oplus_S R_s$ and set $\mid \mathrm{Supp}_e(g) \mid = k$. Then we have $k\,\mathrm{Supp}_e(f) + \mathrm{Supp}_e(g) = (k-1)\mathrm{Supp}_e(f) + \mathrm{Supp}_e(fg)$.

The proof is analogous with that of [4, 6.2.Proposition]. Lemma 4 is the semigroup version of "Dedekind-Mertens Lemma".

An additive homomorphism v of a torsion-free abelian group G to a totally orderd abelian group is called valuation on G. The subsemigroup $\{x \in G \mid v(x) \geq 0\}$ of G is called the valuation semigroup associated with v.

Lemma 5. Let $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ be the set of valuation semigroups on $\mathrm{q}(\Gamma)$ containing S. Then $\bigcap_\lambda V_\lambda$ is the integral closure of S in $\mathrm{q}(\Gamma)$.

The proof is a modification of that for domains for grading monoids.

We may conjecture that almost all multiplicative ideal theories hold for S[5]. Furthermore it is expected that ideal theories of S are simpler than those of domains. Therefore we may say that investigating grading monoids may also be of preparatory for theories of domains in some aspects. Is the conjecture right? It does not seem easy to answer the question of what "multiplicative ideal theory" is.

Lemma 6. Assume that S is integrally closed in Γ. Assume that $(S : I_1)_{\Gamma^{(0)}} + (S : I_2)_{\Gamma^{(0)}} \ni 0$ for every non-empty finite subsets I_1, I_2 of Γ such that $I_1 + I_2 \subset S$. Then $\oplus_S R_s \subset \oplus_\Gamma R_\alpha$ is inert.

For the proof, assume that $0 \neq F_1F_2 \in \oplus_S R_s$ for some $F_1, F_2 \in \oplus_\Gamma R_\alpha$. We have $(m+1)\mathrm{Supp}_e(F_1)+\mathrm{Supp}_e(F_2) = m\mathrm{Supp}_e(F_1)+\mathrm{Supp}_e(F_1F_2)$ for some $m \in \mathbf{N}$ by Lemma 4. Let $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ be the set of valuation semigroups on $\mathrm{q}(\Gamma)$ containing S. We have $(m+1)\mathrm{Supp}_e(F_1)+\mathrm{Supp}_e(F_2) + V_\lambda = m\ \mathrm{Supp}_e(F_1)+\mathrm{Supp}_e(F_1F_2) + V_\lambda$ for each λ. It follows that $\mathrm{Supp}_e(F_1)+ \mathrm{Supp}_e(F_2) + V_\lambda = \mathrm{Supp}_e(F_1F_2) + V_\lambda \subset V_\lambda$ for each λ. Lemma 5 implies that $\mathrm{Supp}_e(F_1)+\mathrm{Supp}_e(F_2) \subset S$. By the assumption, there exists $\alpha_1 \in (S : \mathrm{Supp}_e(F_1))_{\Gamma^{(0)}}$ with $-\alpha_1 \in (S : \mathrm{Supp}_e(F_2))_{\Gamma^{(0)}}$. We choose a unit $u \in R_{\alpha_1}$ of $\oplus_\Gamma R_\alpha$. Then $F_1u, F_2u^{-1} \in \oplus_S R_s$.

Lemmas 2, 3 and 6 imply the following,

Theorem 7. The extension $\oplus_S R_s \subset \oplus_\Gamma R_\alpha$ is inert if and only if S is integrally closed in Γ and $(S : I_1)_{\Gamma^{(0)}} + (S : I_2)_{\Gamma^{(0)}} \ni 0$ for every non-empty finite subsets I_1, I_2 of Γ such that $I_1 + I_2 \subset S$.

Theorem 7 was reported on Colloq.Res.Ins.Math.Sci., Kyoto Univ.910 (1995),55-59 without being putted well in order.

In the case of the semigroup ring $D[S]$, $S^{(0)}$ coincides with the units $\mathrm{U}(S)$ of S.

Corollary 8. The extension $D[S] \subset D[\Gamma]$ is inert if and only if S is integrally closed in Γ and $(S : I_1)_{U(\Gamma)} + (S : I_2)_{U(\Gamma)} \ni 0$ for every non-empty finite subsets I_1, I_2 of Γ such that $I_1 + I_2 \subset S$.

The conditions in Corollary 8 for $D[S] \subset D[\Gamma]$ to be inert is independent of D.

Let $f = a_1X^{\alpha_1} + \cdots + a_nX^{\alpha_n} \in D[S]$, where $0 \neq a_i \in D$ for each i and $\alpha_i \neq \alpha_j$ for $i \neq j$. Then the subset $\{a_1, \cdots, a_n\}$ of D is called support of f, and is denoted by $\mathrm{Supp}_c(f)$. Let I_1, I_2 be subsets of the quotient field $\mathrm{q}(D)$ of D. Then the subset $\{x_1x_2 \mid x_i \in I_i\}$ of $\mathrm{q}(D)$ is denoted by I_1I_2. $\underbrace{II\cdots I}_{n}$ is denoted by I^n for $I \subset \mathrm{q}(D)$. The subset $\{x \in I \mid I_1x \subset I_2\}$ is denoted by $(I_2 : I_1)_I$. The units of D is denoted by $\mathrm{U}(D)$. $D - \{0\}$ is denoted by $D^{\times}$. Let E be a domain with subdomain D.

Lemma 9. Assume that the extension $D[S] \subset E[\Gamma]$ is inert. Then we have

(1) $(S : I_1)_{U(\Gamma)} + (S : I_2)_{U(\Gamma)} \ni 0$ for every non-empty finite subsets I_1, I_2 of Γ such that $I_1 + I_2 \subset S$.

(2) $(D : I_1)_{U(E)} \cdot (D : I_2)_{U(E)} \ni 1$ for every non-empty finite subsets I_1, I_2 of $E^{\times}$ such that $I_1I_2 \subset D$.

The proof is a modification of Lemma 2 for domains.

Lemma 10. Assume that the extension $D[S] \subset E[\Gamma]$ is inert. Then we have

(1) S is integrally closed in Γ.

(2) D is integrally closed in E.

The proof is a modification of Lemma 3 for domains.

Lemma 11. The four conditions of Lemmas 9 and 10 are sufficient for $D[S] \subset E[\Gamma]$ to be inert.

The proof is a modification of Lemma 6 for domains.

Lemmas 9, 10 and 11 imply the following,

Theorem 12. The extension $D[S] \subset E[\Gamma]$ is inert if and only if the followings hold.

(1) S is integrally closed in Γ.

(2) D is integrally closed in E.

(3) $(S : I_1)_{U(\Gamma)} + (S : I_2)_{U(\Gamma)} \ni 0$ for every non-empty finite subsets I_1, I_2 of Γ such that $I_1 + I_2 \subset S$.

(4) $(D : I_1)_{U(E)} \cdot (D : I_2)_{U(E)} \ni 1$ for every non-empty finite subsets I_1, I_2 of $E^\times$ such that $I_1 I_2 \subset D$.

Corollary 13. $D[S] \subset E[S]$ is inert if and only if D is integrally closed in E and $(D : I_1)_{U(E)} \cdot (D : I_2)_{U(E)} \ni 1$ for every non-empty finite subsets I_1, I_2 of $E^\times$ such that $I_1 I_2 \subset D$.

The conditions in Corollary 13 for $D[S] \subset E[S]$ to be inert is independent of S.

Theorem 14. The extension $D[S] \subset E[\Gamma]$ is strongly inert if and only if $D \subset E$ is strongly inert and $S \subset \Gamma$ is strongly inert.

The proof is similar with the aboves.

REFERENCES

[1] D.D.Anderson and D.F.Anderson, Grading integral domains, Comm. Algebra 11(1983),1-19.

[2] P.Cohn, Bezout rings and their subrings, Proc.Cambridge Phil.Soc.64 (1968),251-264.

[3] R.Gilmer, Commutative Semigroup Rings, The Univ.of Chicago Press, Chicago,1984.
[4] R.Gilmer and T.Parker, Divisibility properties of semigroup rings, Michigan Math. Journ. 21(1974),65-86.
[5] R.Matsuda, Torsion-free abelian semigroup rings IX, Bull.Fac.Sci., Ibaraki Univ.26(1994),1-12.
[6] D.Northcott, A generalization of a theorem on the content of polynomials, Proc.Cambridge Phil.Soc.55(1959),282-288.
[7] D.Northcott, Lessons on Rings,Modules and Multiplicities, Cambridge Univ.Press, Cambridge,1968.

Three types of invariants in Cohen-Macaulay approximations

Kiriko Kato
Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University, Kyoto, 606-01, Japan
Tel: +81-75-753-7265 Fax: +81-75-753-7272
e-mail: kiriko@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 Introduction

Let $(R, \mathfrak{m}, k)$ be a complete Gorenstein local ring, and let M be a finitely generated R-module. The following exact sequences are known to exist :

$$0 \to Y_M^R \to X_M^R \overset{\rho_M}{\to} M \to 0, \tag{1.1}$$

$$0 \to M \overset{\zeta^M}{\to} Y_R^M \overset{u_M}{\to} X_R^M \to 0, \tag{1.2}$$

where X_M^R, X_R^M are maximal Cohen-Macaulay modules and Y_M^R, Y_R^M are modules of finite projective dimension. The sequences (1.1) and (1.2) are called a Cohen-Macaulay approximation and a finite projective hull respectively. If X_M^R and Y_M^R (resp. X_R^M and Y_R^M) have no direct summand in common, according to the inclusion map appeared in the sequence (1.1) (resp. the projection map in the sequence (1.2)), we say that it is the minimal Cohen-Macaulay approximation (resp. the minimal finite projective hull), which exists uniquely up to isomorphisms. We may assume henceforth the minimality of (1.1) and (1.2), omitting common summands if necessary.

On researching Cohen-Macaulay approximations, there arises a natural question: *If $X_M \cong X_N$, $Y_M \cong Y_N$, do two modules M and N share any common property?* We discuss the problem within the framework of the theory of triangulated categories that consists of the category of Cohen-Macaulay modules, that of finite projective modules, and that of finitely generated modules over R in this case. In addition to above two exact sequences (Cohen-Macaulay approximation and finite projective hull), in the section 2 we construct another exact sequence "original extension" which is the dual of the other two. The notion of original extensions enables us to consider two R-modules with $X_M \cong X_N$, $Y_M \cong Y_N$ as two elements of an R-module $\mathrm{Ext}_R^1(Y^M, \Omega_R^1(X^M))$.

Since $\Omega_R^1(Y^M) \cong Y_M$ and $\Omega_R^1(X^M) \cong X_M$ up to free summands, this is an answer to the above question.

Section 3 is a short note about three types of invariants with respect to these three types of sequences, which the author could not talk about at the Symposium.

We had to omit many part, so please see [4] for details if you are interested in this theory.

2 Original extensions

Definition 2.1 *For a finite R-module M, an original extension of M is the exact sequence*

$$0 \to X \xrightarrow{\xi} M \oplus P \xrightarrow{\zeta} Y \to 0 \tag{2.3}$$

with a Cohen-Macaulay module X, a free module P, and a finite projective dimensional module Y.

An original extension (2.3) is called minimal if it satisfies the following conditions:

1) A Cohen-Macaulay module X is stable.

2) There exists no common summand with P and Y through ζ.

3) For any original extension $0 \to X' \to M \oplus P' \to Y' \to 0$ of M, linear maps $a : P \to P'$, $b : Y \to Y'$, and $c : X \to X'$ exist and make the following diagram commutative.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X' & \to & M \oplus P' & \to & Y' & \to & 0 \\ & & \uparrow c & & \uparrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} & & \uparrow b & & \\ 0 & \to & X & \to & M \oplus P & \to & Y & \to & 0. \end{array} \tag{2.4}$$

Theorem 2.2 *For an R-module M, there exists a minimal original extension of M.*

proof) We shall show how to construct the minimal original extension, though we don't write the whole proof here. For the minimal projective hull (1.2) of M, take a chain map $u_{M\bullet} : I_{M\bullet} \to G_{M\bullet}$ such that $\mathrm{H}_{-1}(u_{M\bullet}) = u_M$ for the minimal free resolutions $I_{M\bullet}(-1)$ of Y^M and $G_{M\bullet}(-1)$ of X^M.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{\zeta^M} & Y_R^M & \xrightarrow{u_M} & X_R^M & \to & 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & I_{M\bullet}(-1) & \xrightarrow{u_{M\bullet}(-1)} & G_{M\bullet}(-1) & & \end{array} \tag{2.5}$$

The exact sequence of the complexes

$$0 \to G_{M\bullet} \to Cone\ (u_{M\bullet})_\bullet(-1) \to I_{M\bullet}(-1) \to 0$$

induces the exact sequence

$$0 \to \Omega_1^R(X^M) \to \operatorname{Coker} d_{u_{M}0} \to Y^M \to 0.$$

And we have $\operatorname{Coker} d_{u_{M}0} \cong M \oplus G_{M-1}$ from the split exact sequence

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \mathrm{H}_{-1}(Cone\,(u_{M\bullet})_\bullet) & \to & \operatorname{Coker} d_{Cone\ (u_{M\bullet})_0} & \to & \operatorname{Im} d_{Cone\ (u_{M\bullet})_{-1}} & \to 0 \\ \| & & & & \| & \\ M & & & & Cone\ (u_{M\bullet})_{-2} \cong G_{M-1} & \end{array}$$

since

$$\mathrm{H}_i(Cone\ (u_{M\bullet})_\bullet) \cong \begin{cases} \operatorname{Ker} u_M \cong M & (i=-1) \\ \operatorname{Coker} u_M = 0 & (i=-2) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

Consequently, we obtain an original extension of M

$$0 \to \Omega_1^R(X^M) \xrightarrow{\xi} M \oplus G_{M-1} \xrightarrow{\zeta} Y^M \to 0. \tag{2.6}$$

After omitting a common free summand of G_{M-1} and Y^M from (2.6), we have an original extension (2.7) of M satisfying the conditions (1) and (2) of the above definition.

$$0 \to \Omega_1^R(X^M) \xrightarrow{\xi} M \oplus P \xrightarrow{\zeta} Z^M \to 0. \tag{2.7}$$

It remains to check the property 3) to see the minimality of (2.7). Suppose there exists another original extension of M

$$0 \to X' \xrightarrow{\xi'} M \oplus P' \xrightarrow{\zeta'} Y' \to 0. \tag{2.8}$$

We shall show the existence of maps that make the diagram (2.4) commutative. On the proof, we may assume X' is stable. It follows from the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X' & \xrightarrow{\xi'} & M \oplus P' & \to & Y' & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \| & & \uparrow & & \\ 0 & \to & C' & \xrightarrow{\xi''} & M \oplus P' & \to & Z' & \to & 0, \end{array}$$

where $X' = C' \oplus V$ with a stable Cohen-Macaulay module C' and a free module V, and Z' is of finite projective dimension because of the induced exact sequence $0 \to V \to Z' \to Y' \to 0$.

Let $G_\bullet(-1)$ be the minimal free resolution of $\Omega_R^{-1}(X')$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to & G_0 & \to & & G_{-1} & & \\
& & & \nearrow & & \searrow & \\
& & X' & & & & \Omega_R^{-1}(X') \\
& \nearrow & & & & & & \searrow \\
0 & & & & & & & & 0
\end{array}
$$

Put $\tilde{F}_\bullet := F_{M\bullet} \oplus P'_\bullet$ where $F_{M\bullet}$ is the minimal free resolution of M and $P'_\bullet$ is a trivial complex :

$$
\begin{array}{cccc}
P'_\bullet : & P' & = & P' \\
& (0-th) & & (-1-st)
\end{array}
$$

We can take a chain map $\tilde{w}_\bullet : G_\bullet \to \tilde{F}_\bullet$ such that $\mathrm{H}_0(\tau_0\tilde{w}_\bullet) = \xi$ by the following method. We obtain the map as $\tilde{w}_\bullet = x_{M\bullet} \oplus x_{P'\bullet}$. First $x_{M\bullet} : G_\bullet \to F_{M\bullet}$ is naturally induced by the composite map $\xi_M : X' \xrightarrow{\xi} M \oplus P' \twoheadrightarrow M$; $x_{M-1} = 0$ and $\mathrm{H}_0(\tau_0 x_{M\bullet\bullet}) = \xi_M$. On the other hand, we define a chain map $x_{P\bullet} : G_\bullet \to P'_\bullet$ as $x_{P0} := \xi_P d_{G0}$, $x_{P-1} := \mathrm{Hom}_R(z, R)$ and $x_{P'i} := 0$ to have $\mathrm{H}_0(\tau_0 x_{P'\bullet\bullet}) = \xi_{P'}$ where ξ_P is the composite $X' \xrightarrow{\xi} M \oplus P' \twoheadrightarrow P'$ and z is the map that makes the following diagram commutative:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(G_{-1}, R) & \xleftarrow{z} & \mathrm{Hom}_R(P', R) \\
\uparrow & & \| \\
\mathrm{Hom}_R(X', R) & \xleftarrow{\mathrm{Hom}_R(\xi_{P'}, R)} & \mathrm{Hom}_R(P', R).
\end{array}
$$

The exact sequence of complexes

$$0 \to \tilde{F}_\bullet \to Cone\ (\tilde{w})_\bullet(-1) \xrightarrow{\tilde{u}_\bullet(-1)} G_\bullet(-1) \to 0,$$

brings the exact sequence of homologies

$$0 \to M \to \mathrm{H}_{-1}(Cone\ (\tilde{w})_\bullet) \to \Omega_R^{-1}(X') \to 0 \tag{2.9}$$

because $\mathrm{H}_i(Cone\ (\tilde{w})_\bullet) = 0\ (i \neq -1)$.

We claim that the above sequence (2.9) is the minimal finite projective hull of M. By definition, $\Omega_R^{-1}(X')$ is a stable Cohen-Macaulay module, so it suffices to show that $\mathrm{H}_{-1}(Cone\ (\tilde{w})_{\bullet\bullet})$ is of finite projective dimension. Truncations $\sigma : \tilde{F}_\bullet \to \tau_0\tilde{F}_\bullet$ and $\tau : G_\bullet \to \tau_0 G_\bullet$ induces a surjective chain map $Cone\ (\tilde{w}_\bullet)_\bullet \to Cone\ (\tau_0\tilde{w}_\bullet)_\bullet$ as in the diagram (2.10)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \tilde{F}_\bullet & \to & Cone\ (\tilde{w}_\bullet)_\bullet & \to & G_\bullet(-1) & \to & 0 \\
& & \downarrow{\scriptstyle \sigma_\bullet} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_\bullet(-1)} & & \\
0 & \to & \tau_0\tilde{F}_\bullet & \to & Cone\ (\tau_0\tilde{w}_\bullet)_\bullet & \to & \tau_0 G_\bullet(-1) & \to & 0.
\end{array} \tag{2.10}
$$

More precisely, we get the following commutative diagram whose rows and columns are exact.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & Cone\ (\tilde{w})_0 & & Cone\ (\tau_0\tilde{w})_0 & & \\
 & & 0 & & \| & = & \| & & \\
 & & & & F_{M1}\oplus G_0 & & F_{M1}\oplus G_0 & & \\
 & & \downarrow & & \left(\begin{smallmatrix} d_{\tilde{F}1} & \tilde{w}_0 \\ 0 & d_{G0}\end{smallmatrix}\right)\downarrow & & \downarrow (d_{\tilde{F}1}\tilde{w}_0) & & \\
 & & & & Cone\ (\tilde{w})_{-1} & & Cone\ (\tau_0\tilde{w})_{-1} & & \\
0 & \to & G_{-1} & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1\end{smallmatrix}\right)} & \| & \to & \| & \to & 0 \\
 & & & & \tilde{F}_0\oplus G_{-1} & & \tilde{F}_0 & & \\
 & & \downarrow \tilde{w}_{-1} & & (d_{\tilde{F}0}\tilde{w}_{-1})\downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & Cone\ (\tilde{w})_{-2} & & & & \\
 & & P' & = & \| & & 0 & & \\
 & & & & P' & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Giving the -1-th truncation and taking homology, we get the sequence

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & G_{-1} & \to & \operatorname{Coker} d_{Cone\ (\tilde{w})_0} & \to & \operatorname{Coker} d_{Cone\ (\tau_0\tilde{w})_0} & \to & 0. \\
 & & & & \wr\| & & & & \\
 & & & & \mathrm{H}_{-1}(Cone\ (\tilde{w})_\bullet)\oplus P' & & & &
\end{array}
\tag{2.11}
$$

Since the bottommost row of (2.10) induces the exact sequence of homologies of the complexes (2.8), $\mathrm{H}_i(Cone\ (\tau_0\tilde{w})_\bullet)=0$ for $i\neq -1$ and $\mathrm{H}_{-1}(Cone\ (\tau_0\tilde{w})_\bullet)=\operatorname{Coker} d_{Cone\ (\tau_0\tilde{w})_0}\cong Y'$. So the sequence (2.11) tells us $\Omega^1_R(\mathrm{H}_{-1}(Cone\ (\tilde{w})_\bullet))\cong\Omega^1_R(Y')$ up to free summands, which implies that $\mathrm{H}_{-1}(Cone\ (\tilde{w})_\bullet)$ is of finite projective dimension, hence is isomorphic to Y^M.

As

$$
\mathrm{H}_i(Cone\ (\tilde{w})_\bullet)\cong\begin{cases} Y^M & i=-1 \\ 0 & i=\neq -1\end{cases},
$$

and

$$
\mathrm{H}_i(Cone\ (\tau_0\tilde{w})_\bullet)\cong\begin{cases} Y' & i=-1 \\ 0 & i=\neq -1\end{cases},
$$

we have isomorphisms of complexes

$$
\begin{aligned}
Cone\ (\tilde{w}_\bullet)_\bullet &\cong I_{M\bullet}\oplus T_{W\bullet}, \\
Cone\ (\tau_0\tilde{w}_\bullet)_\bullet &\cong I'_\bullet\oplus T_{W'\bullet}
\end{aligned}
$$

where $I_{M\bullet}(-1)$ is the minimal free resolution of Y^M, $I'_\bullet(-1)$ is that of Y', while $T_{W\bullet}$ and $T_{W'\bullet}$ are the direct sums of trivial complexes.

Adding these split morphisms to the rightmost rectangular of (2.10), we have the following diagram.

$$\begin{tikzcd}
I_{M\bullet} \arrow[rrrr, "u_\bullet"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\lambda_\bullet"] & & & & G_\bullet \arrow[dd, "\tau_\bullet"] \\
& I_{M\bullet}(-1)\oplus T_{W\bullet} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d] & Cone\ (\tilde{w}_\bullet)_\bullet \arrow[urr] \arrow[d, "\theta"] & & \\
I'_\bullet \arrow[rrrr, "u'_\bullet"] \arrow[ur, phantom] & I'_\bullet \oplus T_{W'\bullet} \arrow[r, phantom, "\cong"] & Cone\ (\tau_0\tilde{w}_\bullet)_\bullet \arrow[drr] & & \tau_0 G_\bullet
\end{tikzcd} \tag{2.12}$$

Notice that $u_\bullet$ here is nothing but $u_{M\bullet}$.

We have the diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & G_\bullet & \to & Cone\ (u_{M\bullet})_\bullet(-1) & \to & I_{M\bullet}(-1) & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \tau_\bullet} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_\bullet(-1)} & & \\
0 & \to & \tau_0 G_\bullet & \to & Cone\ (u'_\bullet)_\bullet(-1) & \to & I'_\bullet(-1) & \to & 0
\end{array} \tag{2.13}$$

The topmost row of (2.13) induces the exact sequence

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathrm{H}_0(\tau_0 G_\bullet) & \to & \mathrm{H}_{-1}(\tau_{-1} Cone\ (u_{M\bullet})_\bullet) & \to & \mathrm{H}_{-1}(\tau_{-1} I_{M\bullet}) & \to & 0, \\
 & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \\
 & & \Omega^1_R(X^M) & & M\oplus G_{-1} & & Y^M & &
\end{array}$$

which is (2.6) by definition.

The bottommost row of (2.13) induces the exact sequence

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathrm{H}_0(\tau_0 G_\bullet) & \to & \mathrm{H}_{-1}(Cone\ (u'_\bullet)_\bullet) & \to & \mathrm{H}_{-1}(I'_\bullet) & \to & 0, \\
 & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \\
 & & X' & & M\oplus P' & & Y' & &
\end{array}$$

which is (2.8) from the basic property of the mapping cone.

Our task is now to explicitly describe the maps between each pair of modules in (2.6) and (2.8), which we will omit. (q.e.d.)

Notice that (2.6) is itself minimal unless M includes a Cohen-Macaulay module as a direct summand.[1] While the minimal original extension of a stable Cohen-Macaulay module C is as follows:

$$0 \to C = C \to 0 \to 0 \to 0.$$

Remark 2.3 *The minimal original extension of the direct sum $M \oplus N$ of modules is the direct sum of the minimal original extension of M and that of N.*

[1]This is obtained through discussions with Dr. K. Kawasaki and Dr. K. Yanagawa.

Theorem 2.4 *The minimal original extension of an R-module M is unique up to isomorphism. In other word, if two original extensions of M; $0 \to X \to M \oplus P \to Y \to 0$ and $0 \to X' \to M \oplus P' \to Y' \to 0$ are both minimal, linear maps a, b and c in the diagram (2.4) are isomorphisms.*

Let $0 \to X \to M \oplus P \to Y \to 0$ be an original extension of an R-module M that is not necessarily minimal. We observe that

$$X \cong \Omega^1_R(X^M) \text{ up to free summands,}$$

and

$$0 \to G_{M-1} \to Y^M \oplus P \to Y \to 0$$

from the argument in the proof of Theorem 2.2. For a given Cohen-Macaulay module X and a finite projective dimensional module Y, each element of $\mathrm{Ext}^1_R(Y, X)$ corresponds to a stable module M with the property $X_M \cong X$ and $Y_M \cong \Omega^1_R(Y)$ up to free summands.

Any non-minimal Cohen-Macaulay approximation or finite projective hull of M is a direct sum of the minimal one and a trivial free complex, though it is not always the case for a non-minimal original extension. Meanwhile, for certain type of modules, a non-minimal original extension includes the minimal original extension as a direct summand.

Lemma 2.5 *Let $0 \to X \to M \oplus P \to Y \to 0$ be an original extension of an R-module M. If $\mathrm{Ext}^1_R(Y, R) = 0$, then $Y \cong Y^M$ up to free summands.*

3 Invariants

Definition 3.1 *For any Cohen-Macaulay approximation of M*

$$0 \to Y \to X \to M \to 0,$$

put $e_R(M) := \mu(Y) - \mu(X) + \mu(M)$, $e^{i+1}_R(M) := e_R(\Omega^i_R(M))$ for $i \geq 0$, and $e^0_R(M) := \mu(M) - w(M)$.

For any finite projective hull of M

$$0 \to M \to Y \to X \to 0,$$

Put $w_R(M) := \mu(M) - \mu(Y) + \mu(X)$, and $w^i_R(M) := w_R(\Omega^i_R(M))$ for $i \geq 0$.

For any original extension of M

$$0 \to X \to M \oplus P \to Y \to 0,$$

Put $u_R(M) := \mu(X) - \mu(M \oplus P) + \mu(Y)$, and $u^i_R(M) := w(\Omega^i_R(M))$ for $i \geq 0$.

Notice that those invariants are uniquely determined by M independent of the choice of a sequence. In addition, the following are straightforward from the definition.

1)

$$e^i_R(M \oplus N) = e^i_R(M) + e^i_R(N) \quad for\ i \geq 0.$$

$$e^{i+j}_R(M) = e^{i'+j'}_R(M) \quad for\ i+j = i'+j',\ i,j,i',j' \geq 0.$$

And moreover, $e^i_R(M) = \delta^i_R(M)$ where $\delta^i(-)$ denotes Auslander's delta-invariant.

2)

$$w^i_R(M \oplus N) = w^i_R(M) + w^i_R(N) \quad for\ i \geq 0.$$

$$w^{i+j}_R(M) = w^{i'+j'}_R(M) \quad for\ i+j = i'+j',\ i,j,i',j' \geq 0.$$

3)

$$u^i_R(M \oplus N) = u^i_R(M) + u^i_R(N) \quad for\ i \geq 0.$$

$$u^{i+j}_R(M) = u^{i'+j'}_R(M) \quad for\ i+j = i'+j',\ i,j,i',j' \geq 0.$$

Remark 3.2

$$\begin{aligned}
\beta^i_R(M) &= w^i_R(M) + e^i_R(M) \\
\beta^{i+1}_R(X^M) &= u^i_R(M) + w^i_R(M) \\
\beta^{i+1}_R(Y^M) &= e^{i+1}_R(M) + u^i_R(M)
\end{aligned}$$

where $i \geq 0$ and β^i_R denotes the i-th Betti number. Moreover, $\beta^0(Y^M) = \beta^0(X^M) + e^0_R(M)$, which is well known. So we put $u^{-1}_R := \beta^0(X^M)$ for convenience.

Example 3.3 *If M is a Cohen-Macaulay module with codimension r, that is, $\mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0$ for $i \neq r$, we have*

$$\begin{aligned}
e^i_R(M) &= e^{r-i}_R(M^\vee), \\
w^i_R(M) &= u^{r-1-i}_R(M^\vee) \quad for\ 0 \leq i \leq r
\end{aligned}$$

and

$$u^j_R(M) = w^{r-1-j}_R(M^\vee) \quad for\ -1 \leq j \leq r-1.$$

Let $n : L \to M$ be a homomorphism of modules, and let $F_{L\bullet} \twoheadrightarrow L$, $F_{M\bullet} \twoheadrightarrow M$, $I_{L\bullet}(-1) \twoheadrightarrow Y^L$, $I_{M\bullet}(-1) \twoheadrightarrow Y^M$ $G_{L\bullet}(-1) \twoheadrightarrow X^L$ and $G_{M\bullet}(-1) \twoheadrightarrow X^M$ be the minimal free resolutions. We first take a chain map $n_{F\bullet} : F_{L\bullet} \to F_{M\bullet}$ with $\mathrm{H}_0(n_\bullet) = n$, then two more chain maps $n_{I\bullet} : I_{L\bullet} \to I_{M\bullet}$ and $n_{G\bullet} : G_{L\bullet} \to G_{M\bullet}$ induced by the next diagrams.

$$\begin{array}{ccccccc} L & \to & M & & X_L & \to & X_M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y^L & \to & Y^M & & L & \to & M \end{array}$$

Since

$$\mathrm{H}_i(Cone\ (n_\bullet)_{\bullet\bullet}) \cong \begin{cases} \mathrm{Coker}\, n & i=-1 \\ \mathrm{Ker\, n} & i=0 \\ 0 & i \neq 0,-1 \end{cases},$$

$\tau_0 Cone\ (n_\bullet)$ is a free resolution of the module $\mathrm{Coker}\, d_{Cone\ (n_\bullet)_1}$. With respect to the invariants of this module, we have the relations between those of L and M, which is an extended version of [3] Proposition 3.4.

Lemma 3.4 *Under the situation as above, the following formulae hold.*

1)

$$\begin{aligned} e^n_R(\mathrm{Coker}\, d_{Cone\ (n_F)_1}) &= e^{n+1}_R(M) + e^n(L) \\ &-\mathrm{rk}(n_{Fn} \otimes k) + \mathrm{rk}(n_{Gn} \otimes k) - \mathrm{rk}(n_{In} \otimes k) \end{aligned} \tag{3.14}$$

for $n \geq 1$. The lefthand-side of (3.14) is $e^n_R(\mathrm{Ker}\, n)$ if n is surjective, while it is $e^{n+1}_R(\mathrm{Coker}\, n)$ if n is injective.

$$e^0_R(\mathrm{Coker}\, d_{Cone\ (n_F)_1}) = e^1_R(M) + e^0(L) + \mathrm{rk}(n_{G0} \otimes k) - \mathrm{rk}(n_{I0} \otimes k). \tag{3.15}$$

The lefthand-side of (3.15) is $e^0_R(\mathrm{Ker}\, n \oplus F_{M0})$ if n is surjective. If n is injective, it is $e^1_R(\mathrm{Coker}\, n)$ and

$$e^0_R(\mathrm{Coker}\, n) = e^0_R(M) + \mathrm{rk}(n_{G-1} \otimes k) - \mathrm{rk}(n_{I-1} \otimes k).$$

2)

$$\begin{aligned} w^n_R(\mathrm{Coker}\, d_{Cone\ (n_F)_1}) &= w^{n+1}_R(M) + w^n_R(L) \\ &-\mathrm{rk}(n_{Fn+1} \otimes k) - \mathrm{rk}(n_{Gn} \otimes k) + \mathrm{rk}(n_{In} \otimes k) \end{aligned} \tag{3.16}$$

for $n \geq 0$. The lefthand-side of (3.16) is $w^n_R(\mathrm{Ker}\, n)$ if n is surjective, while it is $w^{n+1}_R(\mathrm{Coker}\, n)$ if n is injective.

3)

$$\begin{aligned} u^n_R(\mathrm{Coker}\, d_{Cone\ (n_F)_1}) &= u^{n+1}_R(M) + u^n_R(L) \\ &+\mathrm{rk}(n_{Fn+1} \otimes k) - \mathrm{rk}(n_{Gn+1} \otimes k) - \mathrm{rk}(n_{In} \otimes k) \end{aligned} \tag{3.17}$$

for $n \geq 0$. The lefthand-side of (3.17) is $u^n_R(\mathrm{Ker}\, n)$ if n is surjective, while it is $u^{n+1}_R(\mathrm{Coker}\, n)$ if n is injective.

We use this method especially on the lifting problem. Let $R := S/xS$ with a Gorenstein local ring S and a non-zero-divisor x. For an R-module M, the relation between invariants of M as an$R$-module and those as S-module is described via Eisenbud operators $\partial_{F_M.}$, $\partial_{I_M.}$, and $\partial_{G_M.}$ with respect to S, x. (For the details of the lifting theory, see [2] and [5].)

Corollary 3.5

$$e_S^n(M) = e_R^n(M) + e_R^{n-1}(M) - \mathrm{rk}(\partial_{F_M n} \otimes k) + \mathrm{rk}(\partial_{G_M n} \otimes k) - \mathrm{rk}(\partial_{I_M n} \otimes k).$$

$$w_S^n(M) = w_R^n(M) + w_R^{n-1}(M) - \mathrm{rk}(\partial_{F_M n+1} \otimes k) - \mathrm{rk}(\partial_{G_M n} \otimes k) + \mathrm{rk}(\partial_{I_M n} \otimes k).$$

$$u_S^n(M) = u_R^n(M) + u_R^{n-1}(M) + \mathrm{rk}(\partial_{F_M n+1} \otimes k) - \mathrm{rk}(\partial_{G_M n+1} \otimes k) - \mathrm{rk}(\partial_{I_M n} \otimes k).$$

References

[1] M.Auslander and R.O.Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations,* Soc. Math. de France, Mem **38**(1989), 5-37.

[2] M.Auslander, S.Ding, and Ø.Solberg, *Liftings and weak liftings of modules,* J.Algebra **156** (1993), 273-317.

[3] K.Kato, *Vanishing of free summands in Cohen-Macaulay approximations,* Communications in Algebra, Vol.23.No.7, 2617-2717, 1995.

[4] K.Kato, *Cohen-Macauly approximations from the viewpoint of triangulated category,* preprint, 1995.

[5] Y.Yoshino, *The theory of L-complexes and weak liftings of complexes,* preprint, 1994.

Some remarks on index and generalized Loewy length of a Gorenstein local ring

MITSUYASU HASHIMOTO and AKIRA SHIDA

Nagoya University College of Medical Technology
1–1–20 Daikominami, Higashi-ku, Nagoya 461
hasimoto@math.nagoya-u.ac.jp
and
Department of Mathematics, School of Science, Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464–01 JAPAN
a-shida@math.nagoya-u.ac.jp

1 Introduction

Throughout this note, the word "ring" will mean commutative noetherian ring with 1.

Let R be a Gorenstein local ring. M. Auslander introduced the notion of δ-invariant $\delta_R(M)$ for a finitely generated R-module M. It is defined as the smallest integer μ such that there exists an epimorphism $X \oplus R^\mu \to M$ with X a maximal Cohen-Macaulay module which has no non-zero free summand. In the studying of δ-invariant, Ding [10, 11, 12, 13] studied the notion of index. The index of R, denoted by $\mathrm{index}(R)$, is defined as the smallest positive integer such that $\delta_R(R/\mathfrak{m}^n) > 0$. He compared $\mathrm{index}(R)$ with the generalized Loewy length $\ell\ell(R)$ of R, which is defined as the minimum of the Loewy lengths of $R/\mathbf{x}R$ for all systems of parameters $\mathbf{x}$ of R, and he conjectured (and proved for some special cases) that $\mathrm{index}(R) = \ell\ell(R)$ in general (see (2.7) and (3.1)).

In this note, we first remark that the generalized Loewy length is not stable even under a finite étale extension, but stable under completion (section 3). We need at least to assume that the residue field of R is infinite to study Ding's conjecture.

Next, we prove that the minimal Cohen-Macaulay approximation, which is indispensable when we study δ-invariants, of a finitely generated module M over a Cohen-Macaulay local ring R is preserved by an extension by a Gorenstein local homomorphism $R \to S$ under the assumption $\mathrm{Tor}_i^R(S, M) = 0$ $(i > 0)$ (4.3). If R is Gorenstein moreover, then the higher delta invariants are also preserved (4.6).

This unifies two known important cases: the flat case and the case $S = R/xR$ with x both R-regular and M-regular. We note that many of the notion and the results on flat morphisms have been generalized to the situation of finite flat dimension ([4], [5], [3]).

Let $(R, \mathfrak{m})$ and $(S, \mathfrak{n})$ be Gorenstein local rings, and $\varphi : R \to S$ a local homomorphism of finite flat dimension (i.e., the flat dimension of S as an R-module is finite). Recently, the second author proved the following.

Theorem 1.1 [18, (3.7)] *Let $\varphi : R \to S$ be as above. Then we have*

$$\operatorname{index}(R) \leq \operatorname{index}(S).$$

□

This can be seen as a sort of flat descent (generalized to the finite flat dimension context). A good property 'index $\leq n$' of S is inherited by R for any n. In section 5, assuming S is R-flat, we prove $\operatorname{index}(S) \leq \operatorname{index}(R) \cdot \ell\ell(F)$ ($F := S/\mathfrak{m}S$), which can be seen as a counterpart of the theorem above. This is our main theorem.

Furthermore, this inequality shows that if the closed fiber F is a regular local ring, we have $\operatorname{index}(R) = \operatorname{index}(S)$ as might be expected.

We cannot expect that the fiber ring $F = S/\mathfrak{m}S$ has a small index even if S has a small index. This can be seen by the following example: $R = k[[x^t]] \subset k[[x]] = S$, where t is an arbitrary positive integer. However, if S is artinian, then we have an inequality: $\ell\ell(R) + \ell\ell(F) - 1 \leq \ell\ell(S) \leq \ell\ell(R) \cdot \ell\ell(F)$. This will be proved in section 6 for artinian rings which are not necessarily Gorenstein.

2 Preliminaries

Unless otherwise specified, we assume that $(R, \mathfrak{m}, k)$ is a Cohen-Macaulay local ring with the canonical module K_R. By $\hat{R}$ we mean the completion of R with respect to the maximal ideal $\mathfrak{m}$. For an R-module M, $\hat{M}$ denotes $\hat{R} \otimes_R M$. For a proper ideal I of R, we denote the associated graded module $\bigoplus_{i \geq 0} I^i M / I^{i+1} M$ by $\operatorname{Gr}_I M$. Let $(S, \mathfrak{n})$ be a local ring, and $\varphi : R \to S$ a homomorphism. We say that φ is *local* when $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$.

Proposition 2.1 *Let R be a Cohen-Macaulay local ring, X a maximal Cohen-Macaulay R-module, and Y (resp. Z) a finitely generated R-module of finite injective (resp. projective) dimension. Then we have* (a) $\operatorname{Ext}^i_R(X, Y) = 0$ *for $i > 0$.*
(b) $\operatorname{Tor}^R_i(Z, X) = 0$ *for $i > 0$.*

Proof. (a) is noted in [19]. (b) is a slight generalization of [17, (2.6)], and follows easily from [8]. □

Let M be a finitely generated R-module. A sequence of finitely generated R-modules

$$0 \to Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M \to 0 \tag{2.2}$$

is called a *Cohen-Macaulay approximation* if X is a maximal Cohen-Macaulay R-module, Y is of finite injective dimension, and the sequence is exact. The Cohen-Macaulay approximation (2.2) is said to be *minimal* when X and Y have no nonzero direct summand in common through f. It is said to be *right minimal* when g is right-minimal, that is, for any non-isomorphic map $\varphi : X \to X$, we have $g \circ \varphi \neq g$.

The next lemma and its corollary seem to be well-known, but we state them with proofs. Complete case (which is essential) is found in [20].

Lemma 2.3 *Let*

$$\mathbb{A} := 0 \to Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M \to 0$$

be a sequence of finitely generated R-modules. Then, the following conditions are equivalent.

rmin $\mathbb{A}$ *is a right minimal Cohen-Macaulay approximation of M.*

min $\mathbb{A}$ *is a minimal Cohen-Macaulay approximation of M.*

$\widehat{\textbf{rmin}}$ $\widehat{\mathbb{A}}$ *is a right minimal Cohen-Macaulay approximation of $\hat{M}$.*

$\widehat{\textbf{min}}$ $\widehat{\mathbb{A}}$ *is a minimal Cohen-Macaulay approximation of $\hat{M}$.*

Proof. It is easy to see that $\widehat{\mathbb{A}}$ is a Cohen-Macaulay approximation if and only if $\mathbb{A}$ is a Cohen-Macaulay approximation. Thus, the problem is the minimality.

rmin $\Rightarrow$ min. Assume that $X = X_0 \oplus X_1$ and $0 \neq X_0 \subset \operatorname{Im} f$. We define $\varphi : X \to X$ by $\varphi(x_0 + x_1) = x_1$ for $x_0 \in X_0$ and $x_1 \in X_1$. Then, we have $g \circ \varphi = g$, and φ is not isomorphic.

min $\Rightarrow$ $\widehat{\textbf{min}}$. See (4.3) below.

$\widehat{\textbf{min}}$ **$\Rightarrow$ $\widehat{\textbf{rmin}}$**. We may assume $\hat{R} = R$ and $\widehat{\mathbb{A}} = \mathbb{A}$. Assume that $\varphi \in \operatorname{End}_R(X)$ is not an isomorphism, and $g \circ \varphi = g$. We have $X \neq 0$, and hence $M \neq 0$ by minimality of $\mathbb{A}$. We set Λ to be the sub-R-algebra of $\operatorname{End}_R(X)$ generated by R and φ. Note that Λ is commutative, and is module finite over R. As φ preserves the kernel of g, we may and shall regard Y and M as Λ-modules so that f and g are Λ-linear. Note that $\varphi \in \Lambda$ acts as an identity map on M. By Nakayama's lemma, φ is not contained in the radical of Λ, since $\varphi(M) = M$ and $M \neq 0$. As φ is not a unit in Λ (since φ is not an isomorphism on X), we have that Λ is not local. It follows that Λ has a non-trivial idempotent, say $e \neq 0, 1$, since R is henselian. With replacing e with $1 - e$ if necessary, we may assume that the image of e in $\Lambda/(1 - \varphi)\Lambda$, which is local, is a unit. As e acts as an automorphism on M, it is easy to see that $X_0 := \operatorname{Im}(1 - e) = \operatorname{Ker} e$ is a non-zero direct summand of X which is contained in $\operatorname{Im} f$.

$\widehat{\textbf{rmin}}$ **$\Rightarrow$ rmin** Assume that $\varphi \in \operatorname{End}_R(X)$ is non-isomorphic and that $g \circ \varphi = g$. Then, $\hat{\varphi}$ is non-isomorphic and $\hat{g} \circ \hat{\varphi} = \hat{g}$. □

Corollary 2.4 *Let M be a finitely generated R-module. Then, there exists a minimal Cohen-Macaulay approximation of M, uniquely up to isomorphism.*

Proof. A Cohen-Macaulay approximation of M exists, see [1]. Removing non-zero common direct summands through f if any, we obtain a minimal one from this. The uniqueness of the right minimal Cohen-Macaulay approximation is shown by a standard comparison argument in [1]. □

For an R-module M, we define the *f-rank* of M, denoted by $\text{f-rank}_R M$, to be the number $\max\{i \mid R^i \text{ is a direct summand of } M\}$.

Definition 2.5 Let R be a Cohen-Macaulay local ring with K_R, and let $0 \to Y \to X \to M \to 0$ the minimal Cohen-Macaulay approximation of M over R. We define the *δ-invariant* of M, denoted by $\delta_R(M)$, as $\text{f-rank}_R X$. And we define *index* of a Gorenstein local ring R, denoted by index(R), as the integer $\min\{n \mid \delta_R(R/\mathfrak{m}^n) \neq 0\}$. For a non-negative integer n, the δ-invariant of the nth syzygy $\Omega_R^n(M)$ of M is denoted by $\delta_R^n(M)$, and we call it the *nth δ-invariant* of M.

Proposition 2.6 [10] *Let R be a Gorenstein local ring and $M(\neq 0) \in \mathrm{mod}(R)$. Then*
(a) *If $\mathrm{pd}_R M$ is finite, then $\delta_R(M) = \mu(M)(> 0)$, where $\mu(M)$ is the minimal number of generators of M.*
(b) *If $M \to N \to 0$ is exact, then $\delta_R(M) \geq \delta_R(N)$.*

□

Next we define the generalized Loewy length.

Definition 2.7 Let M be an R-module of finite length. The *Loewy length* of M, denoted by $\ell\ell_R(M)$, is the smallest integer n such that $\mathfrak{m}^n M = 0$. We define the *generalized Loewy length* of R, which is also denoted by $\ell\ell(R)$, is the minimum of all integers $\ell\ell_R(R/(\mathbf{x}))$, where $\mathbf{x}$ is a system of parameter of R.

3 Remarks on generalized Loewy length

Remark 3.1 Ding proved that index$(R) \leq \ell\ell(R)$ for any Gorenstein local ring R [11]. He conjectured that index$(R) = \ell\ell(R)$ for arbitrary Gorenstein local ring R. He claimed that the conjecture is true when the associated graded ring $\mathrm{Gr}_\mathfrak{m} R$ of R is a Cohen-Macaulay ring [12]. He also claimed that the conjecture is true when R is gradable and $\operatorname{depth} \mathrm{Gr}_\mathfrak{m} R \geq \dim R - 1$ [13]. These are certainly true when $R/\mathfrak{m}$ is infinite.

If we drop the condition on the residue field, there is a counterexample to the conjecture.

Example 3.2 Let $k = \mathbb{F}_2$, and $K = \mathbb{F}_4$, where $\mathbb{F}_q$ is the q-element field. When we set $S = k[[x,y]]$, $f = xy(x+y) \in S$ and $R = S/(f)$, then we have

$$4 = \ell\ell(R) > \ell\ell(K \otimes_k R) = \mathrm{index}(K \otimes_k R) = \mathrm{index}(R) = 3.$$

Proof. As the rings in consideration are hypersurfaces, we have that indices equal to multiplicities [10], and we have index$(K \otimes_k R) = $ index$(R) = 3$. Let $\omega \in K \backslash k$, and set $z = x - \omega y$. Then, we have $\ell\ell((K \otimes_k R)/(z)) = 3$. Hence, we have $\ell\ell(K \otimes_k R) = 3$. As we have $\ell\ell(R/(x - y^2)) = 4$, we have $\ell\ell(R) \leq 4$.

It remains to show that $\ell\ell(R) > 3$. Assume the contrary. Then, there exists some R-regular element $z \in \mathfrak{m}$ such that $\mathfrak{m}^3 \subset (z)$, where $\mathfrak{m} = (x,y)R$. We set $r = \max\{i \mid z \in \mathfrak{m}^i\}$. It is easy to see that $r \leq 2$.

If $r = 2$, then $z\bar{R}$ is annihilated by $\mathfrak{m}^2$, where $\bar{R} = R/\mathfrak{m}^4$. Hence, we have

$$3 = l_R(R/\mathfrak{m}^2) \geq l_R(\bar{R}z) \geq l_R(\mathfrak{m}^3 \bar{R}) = l_R(\mathfrak{m}^3/\mathfrak{m}^4) = 3.$$

This shows $z\bar{R} = \mathfrak{m}^3 \bar{R}$, and hence $z \in \mathfrak{m}^3$. This contradicts to $r = 2$.

Consider the case $r = 1$. Take any preimage $\zeta \in S$ of z. With letting an appropriate element in $\mathrm{GL}_2(k)$ act on S, we may assume that $\zeta = x - g(x,y)$ with $g \in ((x,y)S)^2$ without loss of generality. As $R/(z)$ is a hypersurface, it suffices to show that $l_R(R/(z)) \geq 4$ to lead a contradiction. When we set $R' = S/(\zeta)$, then R' is a discrete valuation ring, and $R/(z) = R'/(\bar{f})$, where $\bar{f} = \bar{x}\bar{y}(\bar{x}+\bar{y})$ is the image of f in R'. On the other hand, we have $\bar{y} \in (x,y)R'$, $\bar{x}+\bar{y} \in (x,y)R'$ and $\bar{x} = \bar{g} \in ((x,y)R')^2$. Hence, we have $\bar{f} \in ((x,y)R')^4$ and we have $l(R'/(\bar{f})) \geq 4$. □

As we have seen, generalized Loewy length is not stable under a finite étale extension. However, it is stable under completion.

Lemma 3.3 *We have* $\ell\ell(R) = \ell\ell(\hat{R})$.

Proof. If $\mathbf{x}$ is a system of parameter of R such that $\ell\ell(R) = \ell\ell_R(R/\mathbf{x}R)$, then we have $\ell\ell(\hat{R}) \leq \ell\ell_{\hat{R}}(\hat{R}/\mathbf{x}\hat{R}) = \ell\ell_R(R/\mathbf{x}R) = \ell\ell(R)$. So it suffices to show $\ell\ell(R) \leq \ell\ell(\hat{R})$.

Let $n = \ell\ell(\hat{R})$, and take a system of parameters $(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_d}) \subset \hat{R}$ such that $\mathfrak{m}^n\hat{R} \subset (\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_d})$, where $d = \dim R$. Then for each $\hat{x_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, d)$, we can choose an element $x_i \in R$ such that $x_i - \hat{x_i} \in \mathfrak{m}^{n+1}\hat{R}$. We claim that $\mathfrak{m}^n \subset (x_1, x_2, \cdots, x_d)$. In fact since $\mathfrak{m}^n\hat{R} \subset (\hat{x_1}, \hat{x_2}, \ldots, \hat{x_d}) \subset (x_1, x_2, \ldots, x_d)\hat{R} + \mathfrak{m}^{n+1}\hat{R}$, we have

$$\mathfrak{m}^n\hat{R} \subset \bigcap_{i>0}((x_1, x_2, \ldots, x_d)\hat{R} + \mathfrak{m}^{n+i}\hat{R}) = (x_1, x_2, \ldots, x_d)\hat{R}.$$

Hence, we have

$$\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^n\hat{R} \cap R \subset (x_1, x_2, \ldots, x_d)\hat{R} \cap R = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$$

as desired. □

4 A Gorenstein homomorphism and minimal Cohen-Macaulay approximations

Let $\varphi : R \to S$ be a flat local homomorphism of Gorenstein local rings. If $0 \to Y \to X \to M \to 0$ is a (minimal) Cohen-Macaulay approximation over R, then so is $0 \to S \otimes_R Y \to S \otimes_R X \to S \otimes_R M \to 0$. In particular, the (higher) δ-invariants are preserved by this base extension. In this section, we generalize this to the context of morphisms of finite flat dimension (4.3), (4.6). The case $S = R/xR$ with x both R- and M-regular ([2, (5.1)], [21, (1.8)]), as well as the flat case ([21, (1.5), (1.7)]), has been well-known.

First, we introduce the notion of Gorenstein local homomorphism (see [4]). Let $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ be a local homomorphism. We say that φ is a *Gorenstein local homomorphism* if φ is of finite flat dimension (i.e., $\mathrm{fd}_R S < \infty$), and $\mu_R^i = \mu_S^{i+s}$ for some s and arbitrary $i \geq 0$, where $\mu_R^i = \dim_k \mathrm{Ext}_R^i(k, R)$ is the i-th Bass number. Next, we define a Cohen factorization which was introduced in [6].

Definition 4.1 Let $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ be a local homomorphism of local rings. We say φ is *factorizable* if it can be decomposed as $\varphi = \sigma\tau$ with $\tau : R \to T$ flat and $T/\mathfrak{m}T$ a regular local ring, $\sigma : T \to S$ surjective and T a complete local ring; often we shall refer to such a situation by saying that $\varphi = \sigma\tau$ is a *Cohen factorization.*

It is known that if S is a complete local ring, then there exists a Cohen factorization (see [6, (1.1)]). Let $\varphi : R \to S$ be a local homomorphism, and $\varphi = \sigma\tau$ its Cohen factorization. Then, φ is of finite flat dimension if and only if so is σ [6, (3.3)]. Note also that, if φ is module finite, then we have

$$\mathrm{fd}_R S < \infty \iff \mathrm{Tor}_i^R(S, R/\mathfrak{m}) = 0 \text{ for } i \gg 0 \iff \mathrm{pd}_R S < \infty.$$

By [4, (4.2),(4.6)], φ is Gorenstein if and only if so is σ.

Lemma 4.2 *Let $\varphi : R \to S$ be a local homomorphism of Cohen-Macaulay local rings. We assume that $\mathrm{fd}_R S < \infty$. Let X be a maximal Cohen-Macaulay R-module. Then we have $\mathrm{Tor}_i^R(S, X) = 0$ for $i > 0$. We also have $S \otimes_R X$ is a maximal Cohen-Macaulay S-module.*

Proof. We may assume that S is complete. If S is R-flat, then the assertion is obvious. Consider the general case. Take a Cohen factorization $\varphi = \sigma\tau$. As the lemma is true for τ, we may replace φ by σ, and we may assume that φ is surjective. Now, the vanishing $\mathrm{Tor}_i^R(S, X) = (i > 0)$ is (2.1) (b). As for the last assertion, the same proof in [18, (3.1)] works. □

Proposition 4.3 *Let $\varphi : R \to S$ be a Gorenstein local homomorphism of Cohen-Macaulay local rings, and M a finitely generated R-module. Furthermore, we assume that R has the canonical module K_R, and $\mathrm{Tor}_i^R(S, M) = 0$ for all $i > 0$. If $0 \to Y \xrightarrow{f} X \to M \to 0$ is the minimal Cohen-Macaulay approximation of M over R, then the sequence*

$$0 \to S \otimes_R Y \xrightarrow{S \otimes_R f} S \otimes_R X \to S \otimes_R M \to 0 \tag{4.4}$$

is the minimal Cohen-Macaulay approximation of $S \otimes_R M$ over S.

Remark 4.5 When φ is surjective and $S = R/I$, then, for $r \geq 0$, we have $\mathrm{Tor}_i^R(S, M) = 0$ $(i > r)$ if and only if $\mathrm{depth}_R(I, M) \geq \mathrm{pd}_R S - r$ (depth sensitivity of perfect ideals, see [9]). In particular, the Tor-independence assumption $\mathrm{Tor}_i^R(S, M) = 0$ $(i > 0)$ above is equivalent to $\mathrm{depth}_R(I, M) = \mathrm{pd}_R S$. Generalizing this to imperfect case, the second author proved the following, which we only state the result here: Let R be a (not necessarily Cohen-Macaulay) ring, I an ideal of R of finite projective dimension, and $S = R/I$. If M is a finitely generated R-module with $M/IM \neq 0$, then we have

$$\sup\{i \mid \mathrm{Tor}_i^R(S, M) \neq 0\} = \sup\{\mathrm{pd}_{R_\mathfrak{p}} S_\mathfrak{p} - \mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{supp}(M/IM)\}.$$

Corollary 4.6 *In the proposition, assume moreover that R is Gorenstein. Then we have*

$$\text{f-rank}_S(S \otimes_R X) = \text{f-rank}_R X. \tag{4.7}$$

In particular, we have $\delta_S^n(S \otimes_R M) = \delta_R^n(M)$.

Proof. The equality (4.7) follows from the proposition and [18, (3.1)]. As we have $\mathrm{Tor}_i^R(S, M) = 0$ $(i > 0)$ by assumption, we have $\Omega_S^n(S \otimes_R M) \cong S \otimes_R \Omega_R^n(M)$, and we have $\delta_S^n(S \otimes_R M) = \delta_R^n(M)$. □

Proof of Proposition 4.3 Since it is sufficient to prove that

$$0 \to \hat{S} \otimes_R Y \xrightarrow{\hat{S} \otimes_R f} \hat{S} \otimes_R X \to \hat{S} \otimes_R M \to 0$$

is the minimal Cohen-Macaulay approximation of $\hat{S} \otimes_R M$, we may assume that S is complete.

We proceed in several steps.

(step 0) Note that $\mathrm{Tor}_i^R(S, K_R) = 0$ for $i > 0$ by (4.2). We have that $S \otimes_R K_R \cong K_S$, since φ is Gorenstein ([4, (5.1)]).

(step 1) Since $\mathrm{Tor}_i^R(S, M) = 0$ for $i > 0$ by assumption and $\mathrm{Tor}_i^R(S, X) = 0$ by (4.2), we have $\mathrm{Tor}_i^R(S, Y) = 0$ for $i > 0$.

(step 2) We show that $S \otimes_R Y$ is of finite injective dimension over S. First note that a module Y is of finite injective dimension if and only if there exists an exact sequence

$$0 \to I_n \stackrel{\varphi_n}{\to} I_{n-1} \stackrel{\varphi_{n-1}}{\to} \cdots \stackrel{\varphi_1}{\to} I_0 \stackrel{\varphi_0}{\to} Y \to 0 \tag{4.8}$$

such that I_j is a finite direct sum of K_R $(j = 0, 1, \ldots, n)$.

As the modules in (4.8) are Tor-independent of S by (step 0) and (step 1), the sequence

$$0 \to S \otimes_R I_n \xrightarrow{S \otimes_R \varphi_n} S \otimes_R I_{n-1} \xrightarrow{S \otimes_R \varphi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{S \otimes_R \varphi_1} S \otimes_R I_0 \xrightarrow{S \otimes_R \varphi_0} S \otimes_R Y \to 0$$

is exact.

Here $S \otimes_R I_j$ is a finite direct sum of K_S by (step 0). Thus, we conclude that $S \otimes_R Y$ is of finite injective dimension as an S-module.

(step 3) We know from (step 2) that $S \otimes_R Y$ is of finite injective dimension. Since $S \otimes_R X$ is a maximal Cohen-Macaulay S-module by (4.2), and (4.4) is an exact sequence by $\mathrm{Tor}_1^R(S, M) = 0$, we have that (4.4) is a Cohen-Macaulay approximation of $S \otimes_R M$ over S.

(step 4) Next, we show that the canonical homomorphism

$$S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(K_R, Y) \to \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R K_R, S \otimes_R Y) \tag{4.9}$$

given by $a \otimes f \mapsto a \cdot (S \otimes_R f)$ for $a \in S$ and $f \in \mathrm{Hom}_R(K_R, Y)$ is surjective. As this is obvious when S is R-flat, we may assume that φ is surjective (consider the Cohen-factorization of φ) so that $S = R/I$ for a proper ideal I of R of finite projective dimension. Note that

$$0 \to I \otimes_R Y \to Y \to S \otimes_R Y \to 0 \tag{4.10}$$

is exact since $\mathrm{Tor}_1^R(S, Y) = 0$, and that $\mathrm{Tor}_i^R(I, Y) \cong \mathrm{Tor}_{i+1}^R(S, Y) = 0$ for $i > 0$.

Let $\mathbb{F}$ be a finite free resolution of I. Then, as we have that $\mathbb{F} \otimes_R Y \to I \otimes_R Y$ is quasi-isomorphic and that each term of $\mathbb{F} \otimes_R Y$ is of finite injective dimension, we have that the injective dimension of $I \otimes_R Y$ is finite. From the exact sequence (4.10), we obtain an exact sequence

$$\mathrm{Hom}_R(K_R, Y) \to \mathrm{Hom}_R(K_R, S \otimes Y) \to 0 = \mathrm{Ext}_R^1(K_R, I \otimes_R Y)$$

by (2.1) (a). This shows that the map (4.9) is surjective.

(step 5) By an argument similar to (step 4), we also have that the canonical map

$$S \otimes_R \operatorname{Hom}_R(X, K_R) \to \operatorname{Hom}_S(S \otimes_R X, S \otimes_R K_R) \tag{4.11}$$

is surjective.

(step 6) Lastly, we prove that the sequence (4.4) is minimal. Assume the contrary. Then there exist $\sigma \in \operatorname{Hom}_S(S \otimes_R X, S \otimes_R K_R)$ and $\tau \in \operatorname{Hom}_S(S \otimes_R K_R, S \otimes_R Y)$ such that $\sigma \circ (S \otimes_R f) \circ \tau$ is the identity map of $S \otimes_R K_R$.

By (step 4) and (step 5), we can write $\sigma = \sum_i a_i(S \otimes_R \sigma_i)$ and $\tau = \sum_j b_j(S \otimes_R \tau_j)$ for some $\sigma_i \in \operatorname{Hom}_R(X, K_R)$, $\tau_j \in \operatorname{Hom}_R(K_R, Y)$ and $a_i, b_j \in S$. As we have $\sigma \circ (S \otimes_R f) \circ \tau = \mathrm{id}$, we have $S \otimes_R (\sum_i \sum_j a_i b_j(\sigma_i \circ f \circ \tau_j)) = 1$ in $\operatorname{Hom}_S(S \otimes_R K_R, S \otimes_R K_R) \cong S$. This shows that, at least for one (i,j), we have that $\sigma_i \circ f \circ \tau_j \in \operatorname{Hom}_R(K_R, K_R) = R$ is not contained in the maximal ideal $\mathfrak{m}$, because φ is local. This shows that Y and X have the common direct summand K_R through f, and this is a contradiction. $\square$

5 Main theorem

Our main result in this note is the following.

Theorem 5.1 *Let $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ be a flat local homomorphism of Gorenstein local rings, and $F = S/\mathfrak{m}S$ be the closed fiber. Then we have*

$$\operatorname{index}(S) \leq \operatorname{index}(R) \cdot \ell\ell(F).$$

Proof. We proceed in two steps.

(step 1) We first prove (5.1) for $d = \dim F = 0$. Let $f = \ell\ell(F)$ and $r = \operatorname{index}(R)$. By definition of Loewy length, we have $\mathfrak{n}^f \subset \mathfrak{m}S$, and it follows $\mathfrak{n}^{fr} \subset \mathfrak{m}^r S$. Since there is an epimorphism $S/\mathfrak{n}^{fr} \to S/\mathfrak{m}^r S \cong S \otimes_R R/\mathfrak{m}^r$, we know that $\delta_S(S/\mathfrak{n}^{fr}) \geq \delta_S(S/\mathfrak{m}^r S)$ by (2.6). But (4.6) shows $\delta_S(S/\mathfrak{m}^r S) = \delta_R(R/\mathfrak{m}^r) > 0$, and this shows that $\operatorname{index}(S) \leq \operatorname{index}(R) \cdot \ell\ell(F)$.

(step 2) Next we prove (5.1) in general. Let $f = \ell\ell(F)$. Then we can find a system of parameters $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_d \in F$ such that $\ell\ell(\overline{F}) = \ell\ell(F)$, where $\overline{F} = F/(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_d)F$. We set $\overline{S} = S/(x_1, x_2, \ldots, x_d)S$, where x_i is a preimage of $\overline{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$, and define the local homomorphism $\psi : R \to \overline{S}$ as the composite $R \xrightarrow{\varphi} S \to \overline{S}$, where the second arrow is the natural map. Then $x_1, x_2, \ldots, x_d$ is an S-regular sequence and ψ is flat by Corollary of Theorem 22.5 in [16].

By (step 1), we have $\operatorname{index}(\overline{S}) \leq \operatorname{index}(R) \cdot \ell\ell(\overline{F})$. Thus we know that $\operatorname{index}(S) \leq \operatorname{index}(\overline{S}) \leq \operatorname{index}(R) \cdot \ell\ell(\overline{F}) = \operatorname{index}(R) \cdot \ell\ell(F)$ by (1.1). $\square$

Corollary 5.2 *Let $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ be a flat local homomorphism of Gorenstein local rings and $F = S/\mathfrak{m}S$ a regular local ring. Then we have*

$$\operatorname{index}(R) = \operatorname{index}(S).$$

Proof. This is clear because of (5.1), (1.1) and the fact $\ell\ell(F) = 1$. $\square$

In what follows, k denotes a field.

Example 5.3 Let r and f be positive integers, and set

$$R = k[[X]]/(X^r) \subset S = k[[X, Y]]/(X^r, Y^f).$$

Then, S is R-flat, and the closed fiber is $F = k[[Y]]/(Y^f)$. Then $\operatorname{index}(R) = r$, $\operatorname{index}(S) = r + f - 1$, and $\ell\ell(F) = f$. Therefore, we have $\operatorname{index}(S) \leq \operatorname{index}(R) \cdot \ell\ell(F)$, and equality holds if and only if $r = 1$ or $f = 1$.

Example 5.4 With the same r, f and R as in (5.3), we set $S = k[[X, Y]]/(X^r, X - Y^f) \cong k[[Y]]/(Y^{fr})$. Then, S is flat over R, and we get $F = k[[Y]]/(Y^f)$ and $\operatorname{index}(S) = fr$. Therefore, we have $\operatorname{index}(S) = \operatorname{index}(R) \cdot \ell\ell(F)$.

Example 5.5 Let $A = k[[t, X, Y]]/(X^r, tX - Y^f)$, with $r, f > 0$. Then, we have $\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{m}, \mathfrak{p}\}$, where $\mathfrak{m} = (t, X, Y) \supset \mathfrak{p} = (X, Y)$. Then, we have $\operatorname{index} A = \ell\ell(A) = r + f - 1$, and $\operatorname{index} A_{\mathfrak{p}} = \ell\ell(A_{\mathfrak{p}}) = fr$. In particular, index and generalized Loewy length are not upper semi-continuous when $r, f \geq 2$. They are not lower semi-continuous in general, either. When we set $A = k[[X, Y]]/(X^2 - Y^3)$, then we have $\operatorname{index} A = \ell\ell(A) = 2$ and $\operatorname{index} Q(A) = \ell\ell(Q(A)) = 1$.

We say that a $\mathbb{Z}$-graded k-algebra $R = \bigoplus_i R_i$ is *homogeneous* when R is generated by finite degree one elements over $R_0 = k$. The *Hilbert series* $H_R(t)$ of R is defined by $H_R(t) := \sum_{i \geq 0} \dim_k R_i t^i \in \mathbb{Z}[[t]]$. It is known that $Q_R(t) := (1 - t)^d H_R(t) \in \mathbb{Z}[t]$, where $d = \dim R$. The degree of $Q_R(t)$ is denoted by $s(R)$. In [15], a graded analogue of δ-invariants, indices, and generalized Loewy lengths are discussed. Herzog [15] proved that for a homogeneous Gorenstein k-algebra R, we have $\operatorname{index}(R) = s(R) + 1 = \ell\ell(R)$, provided k is infinite. This result is generalized by Ding in [13].

Example 5.6 Let R and F be Gorenstein homogeneous k-algebras. Then, $S := R \otimes_k F$ is flat over R with the fiber F, and we have $\operatorname{index}(S) = \operatorname{index}(R) + \operatorname{index}(F) - 1$.

Proof. We may extend the base field k if necessary, and may assume that k is infinite by (5.2). Obviously, we have $H_S(t) = H_R(t) H_F(t)$. The equality follows from this and Herzog's theorem. $\square$

6 Loewy lengths of artinian modules

In this section, R is a local ring which is not necessarily Cohen-Macaulay. Let $I \subset \mathfrak{m}$ be an ideal of R. We set $G = \operatorname{Gr}_I R$, and let $\mathfrak{M}$ denotes the graded maximal ideal of G. As for G-modules, we only consider graded ones. The Loewy length $\ell\ell_G(H)$ of an artinian G-module is the smallest integer n such that $\mathfrak{M}^n H = 0$ (if one prefers local rings, then he or she might consider $G_{\mathfrak{M}}$). For an R-module M and $m \in M$, we denote the initial form of m in $\operatorname{Gr}_I M$ by $\operatorname{in}_I(m)$.

Lemma 6.1 *Let M be an artinian R-module. Then we have $\ell\ell_G(\operatorname{Gr}_I M) \leq \ell\ell_R(M)$.*

Proof. There exists some $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ such that $\mathrm{in}_I(x_1), \ldots, \mathrm{in}_I(x_r)$ generates $\mathfrak{M}$. We set $\ell\ell(\mathrm{Gr}_I M) = s + 1$. Then, there exists some $1 \le i_1, \ldots, i_s \le r$ and $m \in M$ such that $\mathrm{in}_I(x_{i_1}) \cdots \mathrm{in}_I(x_{i_s}) \cdot \mathrm{in}_I(m) \neq 0$. This shows

$$\mathrm{in}_I(x_{i_1} \cdots x_{i_s} m) = \mathrm{in}_I(x_{i_1}) \cdots \mathrm{in}_I(x_{i_s}) \cdot \mathrm{in}_I(m) \neq 0,$$

and hence $x_{i_1} \cdots x_{i_s} m \neq 0$. □

Lemma 6.2 *Let M be an artinian R-module. If $I = \mathfrak{m}$, then we have $\ell\ell_G(\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}} M) = \ell\ell_R(M)$.*

Proof. Assume that $\mathfrak{M}^s \mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}} M = 0$. Then we have $\mathfrak{m}^s M / \mathfrak{m}^{s+1} M = 0$, and hence $\mathfrak{m}^s M = 0$. From this and (6.1), the result follows. □

Proposition 6.3 *Let $(R, \mathfrak{m})$ and $(S, \mathfrak{n})$ be local rings, and $R \to S$ a flat local homomorphism with the artinian closed fiber $F = S/\mathfrak{m}S$. For an artinian R-module M, we have*

$$\ell\ell_R(M) + \ell\ell(F) - 1 \le \ell\ell_S(S \otimes_R M) \le \ell\ell_R(M) \cdot \ell\ell(F).$$

Proof. We set $k = R/\mathfrak{m}$, $R' = \mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}} R$, $M' = \mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}} M$ and $S' = \mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}S} S$. The graded maximal ideals of R' and S' are denoted by $\mathfrak{m}'$ and $\mathfrak{n}'$, respectively. Then, $S' \cong F \otimes_k R'$ is flat over R', and we have an S'-isomorphism $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}S}(S \otimes_R M) \cong F \otimes_k M'$. We set $f = \ell\ell(F)$ and $r = \ell\ell_R(M)$. Then, we have

$$(\mathfrak{n}')^{f+r-2}(F \otimes_k M') \supset \mathfrak{n}^{f-1} F \otimes_k (\mathfrak{m}')^{r-1} M' \neq 0$$

by (6.2). Hence, we have

$$\ell\ell_S(S \otimes_R M) \ge \ell\ell_{S'}(\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}S}(S \otimes_R M)) > f + r - 2$$

by (6.1), and the first inequality follows.

As we have

$$\mathfrak{n}^{rf}(S \otimes_R M) \subset \mathfrak{m}^r(S \otimes_R M) = 0,$$

the second inequality is obvious. □

Corollary 6.4 *Let $R \to S$ be a flat homomorphism of artinian local rings with the fiber F. Then, we have*

$$\ell\ell(R) + \ell\ell(F) - 1 \le \ell\ell(S) \le \ell\ell(R) \cdot \ell\ell(F).$$

□

Examples can be found in section 5.

Acknowledgment

The authors are grateful to Professor S. Goto for suggesting us the possibility of an inequality for indices which involves the fiber ring. Our special thanks are also due to Professor Y. Yoshino and Professor K. Yoshida for valuable advice.

References

[1] M. Auslander and R. O. Buchweitz, The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations, *Mém. Soc. Math. France* **38** (1989), 5–37.

[2] M. Auslander, S. Ding and Ø. Solberg, Liftings and weak liftings of modules, *J. Algebra* **156** (1993), 273–317.

[3] L. L. Avramov, Locally complete intersection homomorphisms and vanishing of André-Quillen homology, *in* "Commutative algebra: extended abstracts of an international conference, Jul. 27 – Aug. 1, 1994, Vechta, Germany," ed. by W. Bruns, J. Herzog, M. Hochster and U. Vetter, Vechtaer Universitätsschriften; Bd. **13**, 1994, pp. 20–24.

[4] L. L. Avramov and H.-B. Foxby, Locally Gorenstein homomorphisms, *Amer. J. Math.* **114** (1992), 1007–1047.

[5] L. L. Avramov and H.-B. Foxby, Cohen-Macaulay properties of ring homomorphisms, preprint.

[6] L. L. Avramov, H.-B. Foxby and B. Herzog, Structure of Local Homomorphisms, *J. algebra* **164** (1994), 121–145.

[7] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen-Macaulay rings," Cambridge University Press, 1993.

[8] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, What makes a complex exact?, *J. Algebra* **25** (1973), 259–268.

[9] D. A. Buchsbaum and D. S. Rim, A generalized Koszul complex. II: Depth and multiplicity, *Trans. Amer. Math. Soc.* **3** (1964), 197–225.

[10] S. Ding, Cohen-Macaulay approximation and multiplicity, *J. Algebra* **153** (1992), 271–288.

[11] S. Ding, A note on the index of Cohen-Macaulay rings, *Comm. Algebra* **21** (1993), 53–71.

[12] S. Ding, The associated graded ring and the index of a Gorenstein local ring, *Proc. Amer. Math. Soc.* **120** (1994), 1029–1033.

[13] S. Ding, Auslander's δ-invariants of Gorenstein local rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1994), 649–656.

[14] M. Hashimoto and A. Shida, Some remarks on index and generalized Loewy length of a Gorenstein local ring, preprint.

[15] J. Herzog, On the index of a homogeneous Gorenstein ring, *Contemp. Math.* **159** (1994), 95–102.

[16] H. Matsumura, "Commutative ring theory," Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[17] R. Y. Sharp, Finitely generated modules of finite injective dimension over certain Cohen-Macaulay rings, *Proc. London Math. Soc.* (3) **25** (1972), 303–328.

[18] A. Shida, On indices of local rings along local homomorphism, to appear in *Comm. Algebra.*

[19] Y. Yoshino, "Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings," Cambridge University Press, 1990.

[20] Y. Yoshino, Cohen-Macaulay Approximations, *in* "Proc. 4th symposium on representation theory of algebras, 1993, Izu, Japan," pp. 119–138, in Japanese.

[21] Y. Yoshino, On the higher delta-invariants of a Gorenstein local ring, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*

p 進単位球体の部分集合の凸性

石田正典　　東北大学 大学院 理学研究科

1　点集合としての p 進単位球

R を完備な離散的付値環とし t をその極大イデアルの生成元とする．次を仮定する．

(1) 商体 $K := Q(R)$ は標数 0 である．

(2) 剰余体 $k := R/(t)$ は有限体である．

素数 p についての p 進整数環 $\mathbf{Z}_p$ はこのような離散的付値環の例である．

$\overline{K}$ を K の代数的閉包とする．$r \geq 0$ を整数とするとき点集合としての r 次元単位球体 $\mathbf{B}^r(\overline{K})$ を射影空間 $\mathbf{P}^r(\overline{K})$ の部分集合として

$$\mathbf{B}^r(\overline{K}) := \mathbf{P}^r(\overline{K}) \setminus \Sigma(K)$$

と定義する．ここで $\Sigma(K)$ は $\mathbf{P}^r(\overline{K})$ の中の K 上定義されたすべての超平面の和集合である．この集合は Drinfel'd [D] で導入されているので Drinfel'd 空間と呼ばれることが多い．

この集合 $\mathbf{B}^r(\overline{K})$ が線形群 $\mathrm{GL}(r+1, K)$ の $\mathbf{P}^r(\overline{K})$ への作用で不変であることは定義から明らかである．

このように $\mathbf{B}^r(\overline{K})$ の定義は簡単であるが補集合として与えられているので，どのような点がこれに入っているかは見にくい．栗原及び Mustafin は２０年ほど前

に $\mathbf{B}^r(\overline{K})$ が $\overline{K}$ 値の点集合となるような R 上の正則スキーム X を構成した [K], [M1]. このスキーム X を $t=0$ で定義される閉部分スキームに沿って完備化してできた形式スキーム $\mathcal{X}$ を R 上の単位球体という. 特に $R=\mathbf{Z}_p$ であるときに, これを p 進単位球体という. この形式スキームの射影空間 $\mathbf{P}^r_R$ からのブローアップによる作り方と, その自己同型群については [I] に書いた.

V を $\{x_0,\cdots,x_r\}$ を基底とする K ベクトル空間とする. $\mathbf{P}^r(\overline{K})$ は 0 でない K 線形写像 $u:V\to\overline{K}$ 全体を$\overline{K}\setminus\{0\}$ の元によるスカラー倍を法として割ったものと考えられる. このとき, $\overline{R}$ を R の $\overline{K}$ での整閉包とすると次が成り立つ.

Theorem 1.1 $u:V\to\overline{K}$ を 0 でない K 線形写像とするとき, つぎは同値である.

(1) u で代表される $\mathbf{P}^r(\overline{K})$ の点が $\mathbf{B}^r(\overline{K})$ に属する.

(2) u は単射である.

(3) $u^{-1}(\overline{R})$ は V の階数 $r+1$ の有限生成部分 R 加群である.

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2). (1) であれば, すべてが 0 でない任意の $a_0,\cdots,a_r\in K$ に対して $a_0u(x_0)+\cdots+a_ru(x_r)\neq 0$ となる. これは $u(x_0),\cdots,u(x_r)$ が K 上一次独立であることを示しているので u の像は $r+1$ 次元の K ベクトル空間であり u は単射である. これを逆にたどれば (2) $\Rightarrow$ (1) もいえる.

(2) $\Rightarrow$ (3). $K':=K(u(x_0),\cdots,u(x_r))$ とおく. $R':=\overline{R}\cap K'$ は R の K' での整閉包であるから有限生成 R 加群である. u が単射であれば $u^{-1}(\overline{R})$ は R' の部分 R 加群に同型であるから, これも有限生成 R 加群である. また, 任意の $x\in V$ に対して十分大きな $n\in\mathbf{Z}$ をとれば $u(t^nx)\in\overline{R}$ であるから $u^{-1}(\overline{R})$ の階数は最大の $r+1$ である.

(3) $\Rightarrow$ (2). $\operatorname{Ker} u$ は K ベクトル空間であるが u が単射でなければ 1 次元以上あって R 加群としては有限生成ではない. したがって, それを含む $u^{-1}(\overline{R})$ も有限

生成ではない． *q.e.d.*

なお，仮定の (2) から K'/K は無限次の拡大であるから上の定理から $\mathbf{B}(\overline{K})$ にはたくさん点があることがわかる．

2 Bruhat-Tits 複体と凸性

V の階数 $r+1$ の有限生成部分 R 加群全体を $\tilde{\Delta}_{K,0}$ とする．$M_1, M_2 \in \tilde{\Delta}_0$ に関する同値関係 $M_1 \sim M_2$ を $a \in K \setminus \{0\}$ が存在して $M_2 = aM_1$ であることと定義する．$M \in \tilde{\Delta}_0$ に対して，その同値類を $[M]$ と書く．また，この同値関係による同値類全体の集合を $\Delta_{K,0}$ とおく．$\Delta_{K,0}$ を頂点集合とする単体的複体である Bruhat-Tits 複体 Δ_K が次のように定義される．

$\alpha \in \Delta_{K,0}$ に対して M_α と書いたときは同値類 α に属する V の部分 R 加群の一つを表わすものとする．Δ_0 の有限部分集合

$$\{\alpha_0, \cdots, \alpha_d\}$$

が必要なら番号を適当に付け直して $M_{\alpha_0}, \cdots, M_{\alpha_d}$ をうまくとることにより

$$M_{\alpha_0} \supset \cdots \supset M_{\alpha_d} \supset tM_{\alpha_0}$$

とできるときに，これを Δ_K の d 次元の単体と定義する．$M_{\alpha_0}/tM_{\alpha_0}$ が $r+1$ 次元の k ベクトル空間であることから単体の次元は r 以下であることがわかる．

$\mathbf{B}^r(\overline{K})$ の点 x に対して Δ_K の単体を次のように対応させる．$u : V \to \overline{K}$ を x の代表元とする．定理 1.1 により $a \in \overline{K} \setminus \{0\}$ に対して $u^{-1}(a\overline{R}) = (a^{-1}u)^{-1}(\overline{R})$ は $\tilde{\Delta}_{K,0}$ に属する．$v_{\overline{K}}$ を $v_{\overline{K}}(t) = 1$ となるような $\overline{K}$ の付値とすると $v_{\overline{K}}(a) \leq v_{\overline{K}}(b)$ であれば $u^{-1}(a\overline{R}) \supset u^{-1}(b\overline{R})$ で $u^{-1}(a\overline{R})$ の同値類は $v_{\overline{K}}(a) \bmod 1$ にのみ依存することがわかる．したがって

$$\{[u^{-1}(a\overline{R})]\,;\, a \in \overline{K} \setminus \{0\}\}$$

が Δ_K に属する単体であることがわかる．これを $\sigma(x)$ と書くことにする．

$\Delta_{K,0}$ の二点 α, β に対してセグメント $\mathrm{Seg}_K(\alpha,\beta) \subset \Delta_{K,0}$ を

$$\mathrm{Seg}_K(\alpha,\beta) := \{[aM_\alpha + M_\beta]\,;\, a \in K \setminus \{0\}\}$$

で定義する．M_β をその同値類のなかで M_α に含まれる最大のものをとり，M_α の基底 $\{y_0, \cdots, y_r\}$ を適当にとればアーベル群の基本定理により $M_\beta = Rt^{e_0}y_0 + \cdots + Rt^{e_r}y_r$ で $0 = e_0 \le e_1 \le \cdots \le e_r$ となるようにできる．このとき $\mathrm{Seg}_K(\alpha,\beta)$ は $e_r + 1$ 個の元からなる集合 $\{[t^i M_\alpha + M_\beta]\,;\, i = 0, \cdots, e_r\}$ に等しい．

$\Delta_{K,0}$ の部分集合 S は，任意の二点 $\alpha, \beta \in S$ に対して $\mathrm{Seg}_K(\alpha,\beta) \subset S$ となるときに凸部分集合と呼ぶ．任意の数の凸部分集合の交わりは凸である．したがって $\Delta_{K,0}$ の部分集合の凸閉包も自然に定義できる．また，Bruhat-Tits 複体の各単体は凸である．

Δ_K の部分複体 Σ が凸であるとは，

(1) Σ の頂点集合 S は凸であって

(2) Δ_K の単体 σ の頂点集合が S に含まれれば $\sigma \in \Sigma$

であることと定義する．

$\mathbf{B}^r(\overline{K})$ の部分集合に直接凸性を定義することは困難であるが，Σ が凸であるときに $\{x \in \mathbf{B}^r(\overline{K})\,;\, \sigma(x) \in \Sigma\}$ を凸と考えることにより非常に大雑把ではあるが凸集合を定義できる．これは次のように K の有限次拡大体を考えることによりいくぶん改善される．

K' を $\overline{K}/K$ の中間体で K'/K が有限次拡大であるとし，$R' := \overline{R} \cap K'$ および $V' := V \otimes_K K'$ とする．R は完備であるから R' も離散的付値環となる．したがって V' の R' 部分加群を考えることにより $\Delta_{K',0}$ を頂点集合とする Bruhat-Tits 複体 $\Delta_{K'}$ も同様に定義される．$M_0, \cdots, M_d \in \tilde{\Delta}_{K,0}$ および $a_0, \cdots, a_d \in K' \setminus \{0\}$ があって $M' = a_0 M_0 \otimes_R R' + \cdots + a_d M_d \otimes_R R'$ となるような M' で代表されるような $\Delta_{K',0}$

の元全体を $\Delta_{K'/K,0}$ で表わす．V の部分 R 加群 M に対して $M\otimes_R R' \subset V\otimes_R R'$ を対応させることにより $\tilde{\Delta}_{K,0} \subset \tilde{\Delta}_{K',0}$ および$\Delta_{K,0} \subset \Delta_{K',0}$ と考える．容易にわかるように $\Delta_{K'/K,0}$ は $\Delta_{K,0}$ の $\Delta_{K',0}$ の中での凸閉包である．$\Delta_{K'}$ の単体で頂点がすべて $\Delta_{K'/K,0}$ に属するようなもの全体からなる $\Delta_{K'}$ の部分複体を $\Delta_{K'/K}$ と定義する．

s を離散的付値環 R' の極大イデアルの生成元とし $v(s) = 1/e$ とする．すなわち，e は拡大 R'/R の分岐指数である．

Lemma 2.1 $M' \in \tilde{\Delta}_{K',0}$ とし，各 $0 \le i \le e-1$ に対して $M_i := s^i M' \cap V$ とおく．このとき M' の同値類が $\Delta_{K'/K,0}$ に属するための必要十分条件は

$$M' = \sum_{i=0}^{e-1} s^{-i} M_i \otimes_R R'$$

となることである．

Proof. 各 i について $M_i \in \tilde{\Delta}_{K,0}$ であるから十分性は定義から明らかである．

必要性を示そう．右辺を M'' とおく．各 i について $s^{-i}M_i \subset M'$ であるから $M'' \subset M'$ である．$N_0,\cdots,N_d \in \tilde{\Delta}_{K,0}$ および $a_0,\cdots,a_d \in K' \setminus \{0\}$ により $M' = a_0N_0\otimes_R R' + \cdots + a_dN_d\otimes_R R'$ となっているとする．各 $0 \le j \le d$ について $0 \le i \le e-1$ を適当にとれば $v(s^i a_j) \in \mathbf{Z}$ となる．このとき各 j について $s^i a_j N_j \subset s^i M' \cap V = M_i$ であるから $a_j N_j \subset s^{-i} M_i \subset M''$ であり $M' \subset M''$ となる．　*q.e.d.*

$\{\alpha_0,\cdots,\alpha_r\}$ を Δ_K の r 次元の単体とし $M_{\alpha_0} \supset \cdots \supset M_{\alpha_r} \supset tM_{\alpha_0}$ となっているとする．M_{α_0} の基底 $\{y_0,\cdots,y_r\}$ を適当にとることにより，各 $0 \le i \le r$ について

$$M_{\alpha_i} = Rty_0 + \cdots + Rty_{i-1} + Ry_i + \cdots + Ry_r$$

と出来る．この $r+1$ 個の点の $\Delta_{K',0}$ での凸閉包は整数列 $0 = e_0 \le e_1 \le \cdots \le e_r < e$ により

$$R's^{e_0}y_0 + \cdots + R's^{e_r}y_r$$

と表される R' 加群の同値類全体からなることがわかる．さらに，これらの $\Delta_{K',0}$ の点を頂点とする $\Delta_{K'}$ の最大の部分複体は単体 $\{\alpha_0, \cdots, \alpha_r\}$ の A_n 型の Weyl chamber による正則分割となる．ここでは各辺が e 個に等分されているので $1/e$ 細分と呼ぶことにする．

Theorem 2.2 $\Delta_{K'/K,0}$ の点はすべてある Δ_K の単体の凸包に含まれ$\Delta_{K'/K}$ は Δ_K の $1/e$ 細分となる．

Proof. $\gamma = \{\gamma_0, \cdots, \gamma_d\}$ が $\Delta_{K'/K}$ の単体で

$$M'_{\gamma_0} \supset \cdots \supset M'_{\gamma_d} \supset sM'_{\gamma_0}$$

であるとする．各 M'_{γ_j} が補題 2.1 による表示で

$$M'_{\gamma_j} := \sum_{i=0}^{e-1} s^{-i} M_i^j \otimes_R R'$$

となったとする．このとき各 i, j に対して $N_{(d+1)i+j} := M_i^j$ とおけば，各 $0 \leq i \leq e-1$ について $s^i M'_{\gamma_d} \supset s^{i+1} M'_{\gamma_0}$ であることから

$$N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_{de+e-1} \supset tN_0$$

となる．これらの R 加群の中には同一のものもあり得るので，それらを整理すると Δ_K の一つの単体が定まる．この単体を含む Δ_K の r 次元単体 σ を考えればγ が σ の $1/e$ 細分の単体であることがわかる． *q.e.d.*

単体的複体 $\Delta_{K'/K}$ は $\Delta_{K'}$ で凸であるからその中での凸性は $\Delta_{K'}$ の部分複体として凸であることと同じである．これに対応する $\mathbf{B}^r(\overline{K})$ の部分集合も凸と考えると，先に Δ_K の凸部分複体から定義した凸部分集合族よりもきめの細かい凸部分集合族が得られる．このことをすべての有限次拡大 K'/K について考えてその極限をとることにより $\mathbf{B}^r(\overline{K})$ の部分集合の凸性を定義するのが適当と考えられる．しか

し，これによってユークリッド空間の中の凸体に関連した理論，あるいは類似の理論が得られるのかどうかは今のところ不明である．

参考文献

[D] V. G. Drinfel'd, Elliptic Modules, Math. USSR Sbornik, **23**, (1974), 561-592.

[I] 石田正典, p 進単位球体の中の凸体, 短期共同研究「トーリック多様体の幾何と凸多面体」報告集, 1995.

[IK] M.-N. Ishida and F. Kato, The strong rigidity theorem for nonarchimedean uniformization, preprint.

[K] A. Kurihara, Construction of p-adic unit balls and the Hirzebruch proportionality, Amer. J. Math., **24**, (1980), 129-174.

[M1] G.A. Mustafin, Nonarchimedean uniformization, Math. USSR, Sbornik, **34**, (1978), 187-214.

[M2] D. Mumford, An algebraic surface with K ample, $(K^2) = 9$, $p_g = q = 0$, in Contribution to Algebraic Geometry, Johns Hopkins Univ. Press, 233-244, 1979.

Distributive lattices and their associated rings

佐賀大教育　　寺井直樹

L を有限分配束、A を 体 上の$\sharp(L)$-変数の多項式環 $k[X_\alpha|\alpha \in L]$ とする。本論説においては、L に対応する 2 つの環を考える。1 つは $\mathcal{R}_k[L]$ で次のように定義する。

$$\mathcal{R}_k[L] \ = A/(X_\alpha X_\beta - X_{\alpha\wedge\beta}X_{\alpha\vee\beta} \mid \alpha \not\sim \beta)$$

ただし、$\alpha \not\sim \beta$ は、α と β が L において、比較不可能であることを意味する。このとき、$\mathcal{R}_k[L]$ は、典型的な ASL の例であり、またアファイン半群環とも思える。詳しくは、[Hi$_1$] を御参照下さい。$\mathcal{R}_k[L]$ の第 2 Betti 数が体 k に依存しないことが、予想されているのであるが、ここでは、L が、平面的であるときに、$\mathcal{R}_k[L]$ の第 2 Betti 数を組合せ論的公式で表すことによって、そのことを示す。L が平面的であるとき、$\mathcal{R}_k[L]$ は、2-minor の ladder determinantal ring と見なせる。したがって、上の結果は、蔵野氏の結果 ([Ku]) の 2-minor の場合の一般化ともみなせる。

2 つめの環 $k[L]$ は、次のように定義される。

$$k[L] \ = A/(X_\alpha X_\beta \mid \alpha \not\sim \beta)$$

これを L の Stanley-Reisner 環という。Stanley-Reisner 環の Betti 数は、代数的な手法からだけでなく、トポロジーや組合せ論の手法を用いて、研究されてきている。本論説では、極小自由分解の、comparability graph の連結度への応用について述べる。これは、日比孝之氏 (大阪大) との共同研究である。整数 i を $1 \le i < v$ で 固定する。1 次元単体的複体 (グラフ)Δ に対して、Δ から任意に (i-1) 個以下の頂点 (とそれに隣接する辺 (1-face)) を取り除いても、それが連結であるとき、Δ はi-連結 (i-connected) であると言う。単体的複体Δ の 1-骨格 (1-skeleton) とは

$$\Delta^{(1)} = \{\sigma \in \Delta \ ; \ \sharp(\sigma) \le 2\}$$

で 定まる 1 次元部分複体である。半順序集合 Pの順序複体の 1-骨格を Pの comparability graph といい、Com(P) とあらわす。そこで、極小自由分解の手法を用いて、ランク $d-1$ の非平面的分配束の comparability graph が d-連結であることを示す。

§1. Preliminaries

We recall basic definitions and properties in commutative ring theory and in combinatorics. Refer to [Hi_1] for further information. See also [Bu-He], [Hi_2] and [St_1] as gereral references.

(1.1) Let $A = k[X_1, X_2, \ldots, X_v]$ denote the polynomial ring in v-variables over a field k, which will be considered to be the graded algebra $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ over k with the standard grading, i.e., Deg $X_i = 1$ for each i. Let $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{Q}$, $\mathbf{N}$) denote the set of integers (resp. rational numbers, non-negative integers). We write $A(j)$, $j \in \mathbf{Z}$, for the graded module $A(j) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} [A(j)]_n$ over A with $[A(j)]_n := A_{n+j}$. Let I be an ideal of A generated by homogeneous polynomials and R the quotient algebra A/I. When R is regarded as a graded module over A with the quotient grading, it has a graded *finite free resolution*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{h,j}} \xrightarrow{\varphi_h} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{1,j}} \xrightarrow{\varphi_1} A \xrightarrow{\varphi_0} R \longrightarrow 0; \qquad (1)$$

where each $\bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{i,j}}$, $1 \leq i \leq h$, is a graded free module of rank $0 \neq \sum_{j \in \mathbf{Z}} \beta_{i,j} < \infty$, and where every φ_i is degree-preserving. Moreover, there exists a unique such resolution which minimizes each $\beta_{i,j}$; such a resolution is called *minimal.* If a finite free resolution (1) is minimal, then the *homological dimension* $\mathrm{hd}_A(R)$ of R over A is the non-negative integer h and $\beta_i = \beta_i^A(R) := \sum_{j \in \mathbf{Z}} \beta_{i,j}$ is called the i-th *Betti number* of R over A.

(1.2) All partially ordered sets ("poset" for short) to be considered are finite. A *poset ideal* in a poset P is a subset I such that $\alpha \in I, \beta \in P$ and $\beta \leq \alpha$ together imply $\beta \in I$. A *clutter* is a poset in which no two elements are comparable. A *lattice* is a poset L such that any two elements α and β of L have a greatest lower bound $\alpha \wedge \beta$, and a least upper bound $\alpha \vee \beta$. A subposet P of a lattice L is called a *sublattice* of L if both $\alpha \wedge \beta$ and $\alpha \vee \beta$ belong to P for all α, $\beta \in P$. We say that a lattice L is *distributive* if the equalities $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ and $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ hold for all α, β, $\gamma \in L$. The following theorem is very importamt in lattice theory. See, e.g., [St_2, p106].

Fundamental theorem for finite distributive lattices. *For every finite distributive lattice L there exists a unique poset P such that $D = J(P)$, where $J(P)$ is a poset which consists of all poset ideals of P, ordered by inclusion.*

A distributive lattice $D = J(P)$ is called *planar* if P contains no three-element clutter. A*boolean* lattice is a distributive lattice $L = J(P)$ such that P is a clutter.

(1.3) Let L be a finite distributive lattice and A the polynomial ring $k[X_\alpha | \alpha \in L]$ over a field k with the standard grading, i.e., Deg $X_\alpha = 1$ for each $\alpha \in L$. We define $\mathcal{R}_k[L]$ to be the quotient algebra

$$\mathcal{R}_k[L] \ = A/(X_\alpha X_\beta - X_{\alpha\wedge\beta} X_{\alpha\vee\beta} \mid \alpha \not\sim \beta)$$

of A, where we write $\alpha \not\sim \beta$ if α and β are incomparable in L. The algebra $\mathcal{R}_k[L]$ is a graded algebra with the quotient grading. A monomial $X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \cdots X_{\alpha_q}$ of $\mathcal{R}_k[L]$ is called *standard* if $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_q$ in L. The set of standard monomials is a basis of $\mathcal{R}_k[L]$ as a vector space over k.

A minimal free resolution of $\mathcal{R}_k[L]$ over A is of the form

$$\cdots \to A(-3)^{\beta_{2,3}} \oplus A(-4)^{\beta_{2,4}} \to A(-2)^{\beta_1} \to A \to \mathcal{R}_k[L] \to 0.$$

It is known that $\beta_{2,3}$ can be computed by combinatorics on L; in particular $\beta_{2,3}$ is independent of the base field k. We then focus our attention on $\beta_{2,4}$.

(1.4) We prepare some notation and terminology to state our result on β_{2_4}. Let L be a lattice. Let α and β with $\alpha \leq \beta$ be elements in L. We say that α and β are *changeable* in L if there exist γ and δ with $\gamma \not\sim \delta$ in L such that $\gamma \wedge \delta = \alpha$ and $\gamma \vee \delta = \beta$. A sublattice C of L is said to be *closed* in L if the following condition is satisfied: if $\alpha, \beta \in C$ and $\gamma, \delta \in L$, and if $\gamma \wedge \delta = \alpha$, $\gamma \vee \delta = \beta$, then $\gamma, \delta \in C$. Let B be a subposet of L. We define the *closure* $C_L(B)$ of B in L to be the minimal closed sublattice including B in L.

We study two partial orders " $\leq_{\text{comp}}$ " and " $\leq_{\text{rlex}}$ " on $\mathbf{N}^2$ defined by

$$\begin{aligned} (a,\ b) \leq_{\text{comp}} (c,\ d) \ &\Leftrightarrow \ a \leq c \text{ and } b \leq d; \\ (a,\ b) \leq_{\text{rlex}} (c,\ d) \ &\Leftrightarrow \ b < d, \text{ or } b = d \text{ and } a \leq c. \end{aligned}$$

Let L be a planar distributive lattice and $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_q$, with each $\alpha_i \in L$, a "multichain" of L. Set $C = C_L(\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q\})$. We now define type C (or type $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_q$) by

$$\text{type } C = \min_{f \ \leq_{\text{rlex}}} \{f(\alpha_q) \in \mathbf{N}^2\},$$

where $f : C \hookrightarrow \mathbf{N}^2$ runs through all order-preserving inclusion maps with respect to " $\leq_{\text{comp}}$ " from C to $\mathbf{N}^2$ with $\alpha_1 \mapsto (1,1)$. We then fix an order-preserving inclusion map $f : C \hookrightarrow \mathbf{N}^2$ with $\alpha_1 \mapsto (1,1)$ and $\alpha_q \mapsto$ type $C = (i,j)$. We identify C with the image $f(C) \subset \mathbf{N}^2$ and may regard C as a sublattice of $\mathbf{N}^2$. We then say that C is a *one-sided ladder* if $(i,1) \in C$ or $(1,j) \in C$, which is independent of the choice of inclusion maps f satisfying the above conditions.

(1.5) A *simplicial complex* Δ on the *vertex set* $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$ is a collection of subsets of V such that (i) $\{x_i\} \in \Delta$ for every $1 \le i \le v$ and (ii) $\sigma \in \Delta$, $\tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in \Delta$. Each element σ of Δ is called a *face* of Δ. Let $\sharp(\sigma)$ denote the cardinality of a finite set σ. We set $d = \max\{\sharp(\sigma) \mid \sigma \in \Delta\}$ and define the *dimension* of Δ to be $\dim \Delta = d - 1$. Given a subset W of V, the *restriction* of Δ to W is the subcomplex

$$\Delta_W = \{\sigma \in \Delta \mid \sigma \subset W\}$$

of Δ. In particular, $\Delta_V = \Delta$ and $\Delta_\emptyset = \{\emptyset\}$.

Let $\tilde{H}_i(\Delta; k)$ denote the i-th *reduced simplicial homology group* of Δ with the coefficient field k. Note that $\tilde{H}_{-1}(\Delta; k) = 0$ if $\Delta \ne \{\emptyset\}$ and

$$\tilde{H}_i(\{\emptyset\}; k) = \begin{cases} 0 & (i \ge 0) \\ k & (i = -1). \end{cases}$$

Hochster's formula [Hoc, Theorem (5.1)] is that

$$\beta_{i_j} = \sum_{W \subset V,\ \sharp(W) = j} \dim_k \tilde{H}_{j-i-1}(\Delta_W; k).$$

Thus, in particular,

$$\beta_i^A(k[\Delta]) = \sum_{W \subset V} \dim_k \tilde{H}_{\sharp(W)-i-1}(\Delta_W; k).$$

§2. Second Betti numbers

We state one of our main theorems .

(2.1) THEOREM. *Let L be a planar distributive lattice. Then $\beta_{2,4} = \beta_{2,4}^A(\mathcal{R}_k[L])$ is equal to the number of sequences $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in L^4$ with $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 \le \alpha_4$ such that* (i) *α_1 and α_2 are changeable*; (ii) *α_3 and α_4 are changeable*; (iii) *$C_L(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\})$ is not a one-sided ladder. In particular, the second Betti number $\beta_2^A(\mathcal{R}_k[L])$ is independent of the base field k.*

A combinatorial technique developed by Eagon and Roberts [Ea-Ro] is indispensable to prove Theorem (2.1). Such technique is also essential in Andersen [An], where she studies a counterexample to a certain problem on a resolution of a determinantal ideal of a generic symmetric matrix.

(2.2) (See [Ha, pp. 48–49].) Let $R = k[m_1, \cdots, m_v] \subset k[T_0, \cdots, T_r]$ be a semigroup ring over a field k, where $m_i = T_0^{a(i)_0} \cdots T_r^{a(i)_r}$ is a monomial for each $1 \le i \le v$. Let $A = k[X_1, \cdots, X_v]$ be a polynomial ring. We define $\deg X_i = (a(i)_0, \cdots, a(i)_r) \in \mathbf{N}^{r+1}$. Then A is an $\mathbf{N}^{r+1}$-graded algebra over k, and the surjective map $A \to R$ given by $X_i \mapsto m_i$ is a homomorphism of $\mathbf{N}^{r+1}$-graded algebras over k. Hence, there is a unique $\mathbf{N}^{r+1}$-graded minimal free resolution of R as an A-module, and $\operatorname{Tor}_i^A(k, R)$ is also $\mathbf{N}^{r+1}$-graded for every $i \ge 0$.

We express $\operatorname{Tor}_i^A(k, R)$ in terms of reduced homology of a certain simplicial complex. Let $\lambda = (\lambda_0, \cdots, \lambda_r) \in \mathbf{N}^{r+1}$. We define a simplicial complex Σ_λ as follows. The vertex set is (a subset of) $\{X_1, \cdots, X_v\}$. A subset $\{X_{i_1}, \cdots, X_{i_s}\}$ $(1 \le i_1 < \cdots < i_s \le v)$ is an $(s-1)$-face of Σ_λ if and only if the monomial $m_{i_1} \cdots m_{i_s}$ divides $T^\lambda = T_0{}^{\lambda_0} \cdots T_r{}^{\lambda_r}$ and $T^\lambda / m_{i_1} \cdots m_{i_s} \in R$.

(2.3) LEMMA (cf. [St$_1$,Theorem 7.9]). *We have an isomorphism as vector spaces*

$$[\operatorname{Tor}_i^A(k, R)]_\lambda \cong \tilde{H}_{i-1}(\Sigma_\lambda, k),$$

for all $i \ge 0$ and all $\lambda \in \mathbf{N}^{r+1}$.

(2.4) We now apply Lemma (2.3) to our problem on $\mathcal{R}_k[L]$. Let $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_r\}$ be an arbitrary poset and $L = J(P)$ the associated distributive lattice. It is known, e.g., [H$_1$] that

$$\mathcal{R}_k[L] \cong \; k[T_0^{r+1-\sharp(\alpha)} \textstyle\prod_{p_i \in \alpha} T_i \;\mid \alpha \text{ is a poset ideal of } P].$$

Here the right-hand side is an affine semigroup ring contained in the polynomial ring $k[T_0, T_1, \cdots, T_r]$. We define $\deg T_i = (0, \cdots, \overset{i}{\check{1}}, \cdots, 0)$. Then $\mathcal{R}_k[L]$ has a structure of $\mathbf{N}^{r+1}$-graded module over the polynomial ring $A = k[X_\alpha \mid \alpha \in L = J(P)]$ with each $\deg X_\alpha = \deg(T_0^{r+1-\sharp(\alpha)} \prod_{p_i \in \alpha} T_i)$, and there exists an $\mathbf{N}^{r+1}$-graded minimal free resolution of $\mathcal{R}_k[L]$ over A. We define a simplicial complex Σ_λ as above and Deg $T^\lambda = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_r}{r+1}$. Hence, we have Deg $X_\alpha = 1$ for every $\alpha \in L$ and the above $\mathbf{N}^{r+1}$-graded minimal free resolution of $\mathcal{R}_k[L]$ over A can be regarded as $\mathbf{N}$-graded minimal free resolution of $\mathcal{R}_k[L]$ over A.

(2.5) LEMMA.

$$\beta_{2,4} = \sum_{\text{Deg } T^\lambda = 4} \dim_k \tilde{H}_1(\Sigma_\lambda;\ k).$$

We say that a simplicial complex Σ is spanned by $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_s\}$ if $\Sigma = \mathbf{2}^{\sigma_1} \cup \cdots \cup \mathbf{2}^{\sigma_s}$, where $\mathbf{2}^\sigma$ is the family of all subsets of σ.

Since there exists a natural bijection between $\{\lambda \in \mathbf{N}^{r+1} \mid (\mathcal{R}_k[L])_\lambda \neq 0\}$ and the set of standard monomials $\{M = X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \cdots X_{\alpha_s} \mid \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_s\}$ in $\mathcal{R}_k[L]$, we often write Σ_M or $\Sigma_{\alpha_1 \cdots \alpha_s}$ instead of Σ_λ, if $\deg M = \lambda$.

(2.6) LEMMA. *The simplicial complex Σ_M is spanned by all subsets $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t\} \subset L$ such that $\prod_{j=1}^{t} (X_{\beta_j})^{e_j} = M$ in $\mathcal{R}_k[L]$ for some integers $e_j > 0$, $1 \leq j \leq t$.*

(2.7) LEMMA. *The vertex set of the simplicial complex $\Sigma_{\alpha_1 \cdots \alpha_s}$ is $C_L(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\})$, where $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_s$ in L.*

In what follows, suppose that L is a planar distributive lattice.

(2.8) LEMMA. *Let C be the closure $C_L(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\})$ of $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ with $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_s$ in L. If* type *C is (a, b), then $a, b \leq s$.*

We now give a sketch of proof of Theorem (2.1). First, by Lemma (2.5), what we must compute is the reduced homology group $\tilde{H}_1(\Sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4};\ k)$ for every $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\}$ with $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$ in L. Let C denote $C_L(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\})$. Then, by Lemma (2.8), type C is one of the following: (1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4, 2), (4, 3) and (4, 4). For each case, with one-by-one checking we easily see that $\tilde{H}_1(\Sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}; k) \cong k$ if α_1 and α_2 are changeable; α_3 and α_4 are changeable; and C is not a one-sided ladder, and that $\tilde{H}_1(\Sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}; k) = 0$ otherwise. Q. E. D.

§3. Connectivity of comparability graghs of distributive lattices

In this section we survey a joint work with Prof. Takayuki Hibi. See [T-H] for the detailed information.

(3.1)A *chain* of a poset P is a totally ordered subset of P. The *length* of a chain C is $\ell(C) := \sharp(C) - 1$. The *rank* of a poset P is defined to be $\mathrm{rank}(P) := \max\{\ell(C)\ ;\ C$ is a chain of $P\}$. Given a poset P, we write $\Delta(P)$ for the set of all chains of P. Then $\Delta(P)$ is a simplicial complex on the vertex set P, which is called the *order complex* of P. The *comparability graph* $\mathrm{Com}(P)$ of a poset P is the 1-skeleton $\Delta^{(1)}(P)$ of the order complex $\Delta(P)$. When $x \leq y$ in a poset P, we define the closed interval $[x, y]$ to be the subposet $\{z \in P\ ;\ x \leq z \leq y\}$ of P.

A chain $C : \hat{0} = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{s-1} < \alpha_s = \hat{1}$ of a distributive lattice L is called *essential* if each closed interval $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ is a boolean lattice. In particular, all maximal chains of L is essential. Moreover, the chain $\hat{0} < \hat{1}$ of L is essential if and only if L is a boolean lattice. An essential chain

$\mathcal{C} : \hat{0} = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{s-1} < \alpha_s = \hat{1}$ is called *fundamental* if, for each $1 \leq i < s$, the subchain $\mathcal{C} - \{\alpha_i\}$ is not essential.

(3.2) LEMMA. *Let Δ be a simplicial complex on the vertex set V with $\sharp(V) = v$ and i an integer with $1 \leq i < v$. Then the 1-skeleton $\Delta^{(1)}$ of Δ is i-connected if and only if $\beta_{v-i,v-i+1}(k[\Delta]) = 0$.*

Proof. The 1-skeleton $\Delta^{(1)}$ is i-connected if and only if, for every subset W of V with $\sharp(W) = i - 1$, we have $\tilde{H}_0(\Delta^{(1)}_{V-W}; k)$ $(= \tilde{H}_0(\Delta_{V-W}; k)) = 0$. Moreover, by virtue of Eq. (2), $\tilde{H}_0(\Delta_{V-W}; k) = 0$ for every subset W of V with $\sharp(W) = i - 1$ if and only if $\beta_{v-i,v-i+1}(k[\Delta]) = 0$ as desired. Q. E. D.

The following Lemma 3.3 is discussed in [Hi$_3$].

(3.3) LEMMA ([Hi$_3$]). *Let L be a ditributive lattice of rank $d - 1$ with $\sharp(L) = v$ and $\Delta = \Delta(L)$ its order complex. Then the $(v - d, v - d + i)$-th Betti number $\beta_{v-d,v-d+i}(k[\Delta])$ is equal to the number of fundamental chains of L of length $d - i - 1$.*

We are now in the position to give the main result of the this chapter.

(3.4) THEOREM. *Suppose that a finite distributive lattice L of rank $d - 1$ is non-planar. Then the comparability graph* $\mathrm{Com}(L)$ *of L is d-connected.*

Proof. Let $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_{d-1}\}$ denote a poset with $L = J(P)$ and $\mathcal{M} : \hat{0} = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{d-2} < \alpha_{d-1} = \hat{1}$ an arbitrary maximal chain of L. We may assume that each α_i is the poset ideal $\{p_1, p_2, \cdots, p_i\}$ of P. Since L is non-planar, there exists a three-element clutter, say, $\{p_l, p_m, p_n\}$ with $1 \leq l < m < n \leq d - 1$. Hence, for some $l \leq i < m$, p_i and p_{i+1} are incomparable in P, and for some $m \leq j < n$, p_j and p_{j+1} are incomparable in P. Let $l \leq i < m$ (resp. $m \leq j < n$) denote the least (resp. greatest) integer i (resp. j) with the above property. Then $\beta = \{p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{i+1}\}$ and $\gamma = \{p_1, \cdots, p_{j-1}, p_{j+1}\}$ both are poset ideals of P. Moreover, $\alpha_{i-1} < \beta < \alpha_{i+1}$ in L with $\beta \neq \alpha_i$ and $\alpha_{j-1} < \gamma < \alpha_{j+1}$ in L with $\gamma \neq \alpha_j$. Thus the closed intervals $[\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}]$ and $[\alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}]$ both are boolean. Hence, if $i + 1 \leq j - 1$, then the chain $\mathcal{M} - \{\alpha_i, \alpha_j\}$ is essential. On the other hand, if $i + 1 > j - 1$, i.e., $i = m - 1$ and $j = m$, then $p_l < p_{l+1} < \cdots < p_{m-1}$ and $p_{m+1} < p_{m+2} < \cdots < p_n$ in P; thus $\{p_{m-1}, p_m, p_{m+1}\}$ is a clutter of P. Hence the closed interval $[\alpha_{m-2}, \alpha_{m+1}]$ of L is boolean, and the chain $\mathcal{M} - \{\alpha_{m-1}, \alpha_m\}$ is essential. Consequently, there exists no fundamental chain of L of length $d - 2$. Thus, by Lemma 5.2, $\beta_{v-d,v-d+1}(k[\Delta(L)]) = 0$.

Hence, by Lemma 5.1 again, the comparability graph $\mathrm{Com}(L) = \Delta^{(1)}(L)$ of L is d-connected as desired. Q. E. D.

References

[An] J. L. Andersen, "Determinantal rings associated with symmetric matrices: a counterexample," Ph D. Thesis, Univeristy of Minnesota, 1992.

[Br–He] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen-Macaulay Rings," Cambridge University Press, Cambridge / New York / Sydney, 1993.

[Ea-Ro] J. A. Eagon and J. Roberts, *Weyman's bicomplex for determinantal ideals,* preprint.

[Ha] M. Hashimoto, *Resolutions of determinantal ideals – A counterexample on symmetric matrices*, in "Proc. of the 26th Symposium on Ring Theory" (K. Masaike, K. Yamagata eds.), Okayama, 1993, pp. 43–51.

[Hi_1] T. Hibi, *Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws,* in " Commutative algebra and combinatorics" (M. Nagata and H. Matsumura, eds.), Advanced Studies in Pure Math., Vol. 11, Kinokuniya, 1987, pp. 93 – 109.

[Hi_2] T. Hibi, "Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes," Carslaw Publications, Glebe, N.S.W., Australia, 1992.

[Hi_3] T. Hibi, *Face number inequalities for matroid complexes and Cohen–Macaulay types of Stanley–Reisner rings of distributive lattices*, Pacific J. Math. **154** (1992), 253-264.

[Hi_4] T. Hibi, *Cohen–Macaulay types of Cohen–Macaulay complexes*, J. Algebra **168** (1994), 780–797.

[Hi_5] T. Hibi, *Canonical modules and Cohen–Macaulay types of partially ordered sets*, Advances in Math. **106** (1994), 118–121.

[Hoc] M. Hochster, *Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, in "Ring Theory II" (B. R. McDonald and R. Morris, eds.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., No. 26, Dekker, New York, 1977, pp.171 – 223.

[Ku] K. Kuraro, *The first syzygies of determinantal ideals,* J. Algebra **124** (1989), 414-436.

[St_1] R. P. Stanley, "Combinatorics and Commutative Algebra," Birkhäuser, Boston / Basel / Stuttgart, 1983.

[St_2] R. P. Stanley, "Enumerative Combinatorics, Volume I," Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, Calif., 1986.

[T–H] N. Terai and T. Hibi, *Finite free resolutions and 1-skeletons of simplicial complexes*, Preprint.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF EDUCATION
SAGA UNIVERSITY
SAGA , JAPAN
E-mail address: terai@cc.saga-u.ac.jp

Terminal Singularity と Frobenius 写像

(渡辺　敬一・東海大・理・情報数理)

標数 0 の体上の代数幾何学で，様々な特異点の族が定義され，minimal model theory などで重要な役割を果たしている．一方，標数 $p>0$ の Frobenius 写像を用いて F-regular, F-rational, F-pure 等の環の族が定義されている．

これらの族の間の関係として，今迄次の対応が知られて来た

$$\text{F-rational} \Longrightarrow \text{rational singularity}$$
$$\text{strongly F-regular} \Longrightarrow \text{log-terminal}$$
$$\text{F-pure} \Longrightarrow \text{log-canonical}$$

(正確には下の 2 つは canonical class が有限位数 [代数幾何の用語では $\mathbb{Q}$-Gorenstein] のとき．逆対応もいろいろな場合にわかっている．)

今日の主題は terminal singularity に対応する環を Frobenius 写像で定義できないか？ということである．なお，以下に於て，大前提として

F は $finite\ map$, local ring の剰余体は無限体

を仮定する．また，環の標数はすべて p とし，文字 q は必ず p の巾を表すとする．

定義. ring A に於て，Sing(A) を定義する radical イデアルを I とする．このとき，

A が F–terminal $\Longleftrightarrow$ $\forall q \gg 0, \exists c \in I^q$, such that $A \to A^{1/q}$ sending 1 to $c^{1/q}$ splits.

このとき，A の任意のイデアル J に対し，"$z \notin J$ なら $cz^q \notin J^{[q]}$" であることを注意しておこう．(但し $J^{[q]} = (a^q | a \in J)$．)

また，splitting の injective envelope による判定法により，定義の条件は $(A, \mathfrak{m})$ が d 次元 local のとき (normal は常に仮定)，$z \in H^d_{\mathfrak{m}}(K_A)$ を socle の生成元とするとき，

$$\forall q \gg 0, \exists c \in I^q, \text{ such that } cz^q \neq 0 \text{ in } H^d_{\mathfrak{m}}(K_A^{(q)})$$

と言い換えられる ([HR])．(divisorial ideal L に対して $L^{(i)}$ は L^i の reflexive hull を表すとする．)

F–terminal ring の性質

1.　F–terminal $\Longrightarrow$ strongly F–regular (定義からは明らかではないが) 従って normal, Cohen-Macaulay．また，定義より F–terminal という性質は局所化により保たれる．

[証明]　$c \in I^q$ を「定義」で取った元とすると，[HH–2] 3.3. の議論より $\forall d \in A^0$, $\exists q$ such that $A \to A^{1/q}$ sending 1 to $d^{1/q}$ splits.

2.　regular $\Longrightarrow$ F–terminal.　また，$(A, \mathfrak{m})$ が F–terminal local で $\dim A = \mathrm{d}$ のとき，$\mathfrak{m}$ の minimal reduction を J とすると (J は parameter ideal で $\mathfrak{m}$ が J 上 integral) $\mathfrak{m}^{d-1} \subset J$.

従って，$\dim A \leq 2$ のとき，F–terminal $\Longrightarrow$ regular である．

[証明]　A が regular なら,「定義」で $c = 1$ と取れ，$A \to A^{1/q}$ は flat より split する．以下では，常に regular でない環に対して議論することにする．

また "Briançon–Skoda" type の定理より，イデアルの integral closure に対して，$\mathfrak{a}$ が n 個の元で生成されるならば,

$$\forall \lambda \geq 1,\ \overline{\mathfrak{a}^{n+\lambda-1}} \subset (\mathfrak{a}^{\lambda})^*$$

が成立する ([HH–1], 5.4, ( )* はイデアルの tight closure)．$\mathfrak{a} = J$ としてこれを適用すると，今 1．により A は strongly F–regular ですべてのイデアルに対して $J^* = J$ だから $\mathfrak{m}^{d+\lambda-1} \subset J^{\lambda}$ である．

さて，$\mathfrak{m}^{d-1} \not\subset J$ として，$z \in \mathfrak{m}^{d-1}$, $z \notin J$ とする．定義より $\exists c \in I^{[q]} \subset \mathfrak{m}^q$, $cz^q \notin J^{[q]}$ の筈である．

一方 $cz^q \in \mathfrak{m}^{dq} \subset J^{d(q-1)+1}$ (Briançon–Skoda) だが $J^{d(q-1)+1} \subset J^{[q]}$ でこれは矛盾．

3．系．　$(A, \mathfrak{m})$ が d 次元 F–terminal local で $d \leq 3$ (resp. Gorenstein で $d \leq 4$) なら associated graded ring $G_{\mathfrak{m}}(A)$ は Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein).

特に 3 次元 Gorenstein F–terminal reing は "double point" (2 次式で定義される超曲面).

[証明]　**2** より 4 次元 Gorenstein の場合以外は明らか．4 次元 Gorenstein の時は次の Lemma で示せる（証明略）．

Lemma.　Let $(A, \mathfrak{m})$ be a Gorenstein local ring and J be a minimal reduction of $\mathfrak{m}$. If $\mathfrak{m}^3 \subset J$, then $\mathfrak{m}^3 = \mathfrak{m}^2 J$.

5.　$A = \oplus_{n \geq 0} A_n$ が $A_0 = k$ (体) の Noeterian graded ring で A が F–terminal なら $a(A) \leq -2$ 逆に，このような normal graded ring A が A_1 で生成され A が Gorenstein, Proj(A) が regular, $a(A) \leq -2$ なら F–terminal.

[証明]　証明は定義と次数の計算よりすぐに出る．

6. K_A が有限位数を持つとき，"F–terminal $\Longrightarrow$ terminal"．即ち，$f : X \longrightarrow Y := \mathrm{Spec}\,(A)$ が proper birational map, X は normal とする．

$$K_X = f^*(K_Y) + \sum a_i E_i,$$

とおくとき，もし A が F–terminal ならば $\forall a_i > 0$.

[証明] F–regular (resp. F–pure) なら log-terminal (resp. log-canonical) の証明は [W-3] 参照．本質的にそれと同じ．

7. ("Fedder type Criterion") $A = B/J$, $(B, \mathfrak{n})$ が regular local, $\tilde{I}/J$ が $\mathrm{Sing}(A)$ を定義するとき，

$$A \text{ が } \mathrm{F-terminal} \Longleftrightarrow \forall q \gg 0,\ [J : J^{[q]}] \not\subset [\mathfrak{n}^{[q]} : \tilde{I}^q]$$

特に $J = (f)$ のとき，右辺の条件は $f^{q-1} \notin [\mathfrak{n}^{[q]} : \tilde{I}^q]$.

[注] F–pure のとき右辺の条件は "$[J^{[q]} : J] \not\subset \mathfrak{n}^{[q]}$" ([F-1])，F–regular のときは

"$\forall c \neq 0,\ \exists q,\ c[J : J^{[q]}] \not\subset \mathfrak{n}^{[q]}$" で与えられる．

[証明] B, A の剰余体の injective envelope をそれぞれ $E_B(B/\mathfrak{n}) = E_B$, $E_A(A/\mathfrak{m}) = E_A$ と置く．z を E_B の socle ($[0 :_{E_B} \mathfrak{n}]$) の生成元とする．すると，$Ann_B(F^e(z)) = \mathfrak{n}^{[q]}$ ($q = p^e$) である．また，$A \to A^{1/q}$ sending 1 to $c^{1/q}$ の splitting は $cF^e(z) \neq 0$ と同値である．$E_A \cong [0 :_{E_B} J]$ より，$E_A \otimes_A A^{1/q} \cong (E_A \otimes_B B^{1/q}) \otimes A^{1/q} \cong [0 :_{E_B} J^{[q]}]/J[0 :_{E_B} J^{[q]}] \cong [0 :_{E_B} J^{[q]}]/[0 :_{E_B} [J^{[q]} :_B J]_{E_B}]$ となる．一方 $Ann_B(F^e(z)) = \mathfrak{n}^{[q]}$ より，$cF^e(z) \neq 0$ in $E_A \otimes_A A^{1/q}$ は $c\mathfrak{n}^{[q]} \not\subset [J^{[q]} :_B J]_{E_B}$ と同値．

8. x が A の非零因子，A は Gorenstein または strongly F–regular かつ K_A の位数が有限とする．$\mathrm{Sing}(A/xA)$ を定義するイデアルが $\mathrm{Sing}(A)$ を定義するイデアルの像になっているとき，A/xA が F–terminal $\Longrightarrow$ A は F–terminal.

更に $x \in I$ のとき，A/xA が F–rational $\Longrightarrow$ A は F–terminal.

[証明] A が Gorenstein のとき，$J = (x, x_2, \ldots, x_d)$ を A の parameter ideal とする．また，A/J の socle の生成元を z と置く．A/xA が F–rational より，$\exists c \in I$, $c \neq 0, cz^q \notin (x, J^{[q]})$ が言える．これより $cx^{q-1} \notin J^{[q]}$ が得られる．

A が Gorenstein でないときは A の代りに K_A を考える．A が strongly F–regular だから $K_A^{(i)}$ はすべて Cohen-Macaulay module で $K_A^{(q)}/xK_A^{(q)} \cong (K_{A/xA})^{(i)}$ が成立している．

9. 特に，$A = k[[X, Y, Z, W]]/(f(X, Y, Z) + Wg(X, Y, Z, W))$ が孤立特異点で $k[[X, Y, Z]]/(f)$ が rational double point のとき，A を cDV (compound Du Val)

特異点というが，**8** より cDV 特異点は (いくつかの例外的 p を除いて — $p>5$ なら十分) F–terminal.

3 次元 Gorenstein F–terminal ring は **6** より terminal なので，3 次元 terminal singularity の分類が使え，cDV 特異点に限ることが示せる．また，(まだ完全には確認していないが)，**7** を使っても cDV 特異点に限ることが示せると思う．

10.　n を正整数，a,b を n と互いに素な整数とする．
$A=k[[X^i,Y^j,Z^k|i+aj+bk\equiv 0 \bmod n]]$ (勿論，$(n,p)=1$ のときは $\mathrm{diag}(\xi,\xi^a,\xi^b)$ で生成される cyclic group (ξ は 1 の原始 n 乗根，a,b は n と互いに素) の invariant subring) とするとき，

$$A \text{ が } \mathrm{F-terminal} \Longleftrightarrow X,Y,Z \text{ のある 2 次式が } A \text{ の元}$$

[証明]　$K_A=(X^i,Y^j,Z^k|i+aj+bk\equiv 0 \bmod n,\ i,j,k>0)$, $K_A^{(q)}=(X^i,Y^j,Z^k|i+aj+bk\equiv 0 \bmod n,\ i,j,k\geq q)$ と思える．$J=(X^n,Y^n,Z^n)$ と置いて Frobenius 写像 $K_A/JK_A\to K_A^{(q)}/J^{[q]}K_A^{(q)}$ を見ればすぐに出る．

11.　$(A,\mathfrak{m})$ は d 次元 normal local ring, L を A の divisorial (reflexive) ideal, r を class group $Cl(A)$ での $cl(L)$ の位数とする．$B=\oplus_{i\in\mathbb{Z}_r}I^{(i)}u^i$ (但し，$I^{(r)}=wA$ のとき $u^r=\epsilon w^{-1}$ とおき (ϵ は A の unit) B は normal とする．もし A が F–terminal で $\forall c\in I, c\neq 0$, B_c が regular とする．このとき B も F–terminal.

[証明]　$K_B=\mathrm{Hom}_A(B,K_A)$ で，$H^d_\mathfrak{m}(K_B)$ の socle z は $H^d_\mathfrak{m}(K_A)$ の socle と同じで次数 0 にあるので (証明は [NW])，$c\in I$ に対して $cz^q\neq 0$ という条件は A で考えても B で考えても同じになる．また条件より IB は B の singular locus を定義する ideal に含まれる．

こう書いて行くと，3 次元のとき，“terminal singularity” と “F–terminal ring” は ($p>5$ のとき) 非常に良く一致していると思う．もちろん，**6** の逆が ($p\gg 0$ のとき) 示せれば良いのだがそこまで望むのは虫が良すぎる様な気もする．

この理論を発展，整理するに当って，原伸生，後藤四郎，森重文の各氏から有益な助言を頂いたことを感謝させて頂きます．

References

[F-1] Fedder,R., F-purity and rational singularity, Trans. A. M. S. **278** (1983), 461-480.

[F-2] Fedder, R., F-purity and rational singularity in graded complete intersection rings, Trans. A.M.S., **301** (1987), 47-62.

[HH-1] Hochster, M. and Huneke, C.: Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem, J. of Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31-116.

[HH-2] Hochster, M. and Huneke, C.: Tight closure and strong F-regularity, Mém. Soc. Math. France **38** (1989), 119-133.

[HR] Hochster, M. and Roberts, J.L.: The purity of the Frobenius and local cohomology, Adv. in Math. **21** (1976), 117-172.

[KMM] Kawamata, Y., Matsuda, K. and Matsuki, K.: Introduction to the Minimal Model Problem, Adv. Studies in Pure Math. **10** (1987), 283-360, Algebraic Geometry, Sendai, 1985.

[MR] Mehta, V.B., and Ramabathan, A.: Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties, Ann. of Math., **122** (1985), 27-40.

[NW] Nakakoshi, K. and Watanabe, K.-i.: Cyclic covers of F-pure and F-regular rings, in preparation.

[S] Smith, K.E., F-rational rings have rational singularities, preprint.

[TW] Tomari, M., Watanabe, K.-i.: Normal $\mathbb{Z}_r$-graded rings and normal cyclic covers, Manuscripta math. **76**, (1992) 325-340.

[W-1] Watanabe, K.-i.: F-regular and F-pure normal graded rings, J. of Pure and Appl. Alg. **71** (1991), 341-350.

[W-3] Watanabe, K.-i., F-regular and F-pure rings vs. log-terminal and log-canonical singularities, preprint.

Cofiniteness of local cohomology modules for ideals of dimension one

Ken-ichi Yoshida (吉田 健一)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1 Introduction

A をネーター環とする。A のイデアル I と A 加群 M に対して,

$$\mathrm{H}_I^i(M) = \varinjlim_k \mathrm{Ext}_A^i(A/I^k, M)$$

とおく。一般に, 関手 $\mathrm{H}_I^i(-)$ は, 関手 $\Gamma_I(-) = \varinjlim_k \mathrm{Hom}_A(A/I^k, -)$ の i 番目の右導来関手である。

A をネーター局所環とし, $\mathfrak{m}$ をその極大イデアル, $k = A/\mathfrak{m}$ を剰余体とする。もし, M が有限生成 A 加群ならば, そのとき, $\mathrm{Supp}_A(\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^j(M)) \subseteq V(\mathfrak{m})$ であり, $\mathrm{Ext}_A^i(A/\mathfrak{m}, \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^j(M))$ はすべての i, j に対して, 有限生成 A 加群である。

Grothendieck [Gr2] は次の予想を立てた。

もし I が A のイデアルで M が有限生成 A-加群ならば, そのとき $\mathrm{Hom}_A(A/I, \mathrm{H}_I^i(M))$ は任意の i に対して, 有限生成 A-加群である。

この予想は一般には正しくない。実際, *Hartshorne* [Ha2] は次の反例を与えた。

k を体とし, $A = k[[X, Y, Z, W]]$, $I = (X, Z)A$, $\quad M = A/(XY - ZW)A$ とおく。このとき, $\mathrm{Hom}_A(A/I, \mathrm{H}_I^2(M))$ は有限生成でない。

[Ha2] において, 彼は A-加群 W が I*-cofinite* であるとは, $\mathrm{Supp}_A(W) \subseteq V(I)$ かつ $\mathrm{Ext}_A^i(A/I, W)$ がすべての i に対して有限生成であることと定義した。

上記の例においては, $\dim A/I = 2$ であることに注意して, 次の問いを考える。

A を局所環とし, I を A のイデアルで $\dim A/I = 1$ とする。このとき, 有限生成 A-加群 M に対して, いつ $\mathrm{H}_I^i(M)$ は 全ての i に対して, *I-cofinite* であるか？

この問いに関して, *Hartshorne* [Ha2, Corollary (7.7)] は次を示した：A を完備正則局所環とし, I を 1 次元の素イデアルとするとき, $\mathrm{H}_I^i(M)$ は, 任意の有限生成 A-加群 M に対して, I-cofinite である。*Huneke* と *Koh* [HK, Theorem (4.1)] はこれを A が完備 Gorenstein 局所整域の場合に拡張し, 任意の有限生成 A-加群 N s.t. $\mathrm{Supp}_A(N) \subseteq V(I)$ に対して, $\mathrm{Ext}_A^i(N, \mathrm{H}_I^j(M))$ が有限生成であることを示した。さらに, *Delfino* [D] は, [HK, Theorem (4.1)] の結果を完備局所整域の場合にまで拡張した。

我々は彼らの証明を改良して, 次の定理を得た。

定理 1.1 A を任意の局所環, I を A の 1 次元のイデアルとする。このとき, 有限生成 A-加群 M と有限生成 A-加群 N s.t. $\mathrm{Supp}_A(N) \subseteq V(I)$ に対して, $\mathrm{Ext}_A^i(N, \mathrm{H}_I^j(M))$ は有限生成 $(\forall i, j)$ である。

次の補題は基本的である。

補題 1.2 ([D, Lemma 2], [HK, Lemma (4.2)]) A をネーター環とし, I を A のイデアルとする。$p \geq 0$ を整数とする。このとき, A-加群 V に対して, 次の条件は同値である。

(1) $\mathrm{Ext}_A^t(A/I, V)$ は有限生成 A-加群 $(\forall t \leq p)$ である。

(2) $\mathrm{Ext}_A^t(A/\sqrt{I}, V)$ は有限生成 A-加群 $(\forall t \leq p)$ である。

(3) $\mathrm{Supp}_A(N) \subseteq V(I)$ なる任意の有限生成 A-加群 N に対して, $\mathrm{Ext}_A^t(N, V)$ は有限生成 A-加群である。

証明 [D, Lemma 2] による。 **QED**

定理 (1.5) の証明の出発点は Hartshorne によって証明された次の結果である。

命題 1.3 (R. Hartshorne) R を完備正則局所環とし, $J = \sqrt{J}$ を R の 1 次元のイデアルとする。M を任意の有限生成 R-加群とするとき, $\mathrm{Ext}_R^i(R/J, \mathrm{H}_J^j(M))$ は有限生成 R-加群 $(\forall i, j)$ である。

我々の定理 (1.1) の証明には, この結果の他, Delfino [D, Theorem 3] の証明の中で基本的なアイデアが与えられている, 次の命題が必要である。

命題 1.4 R を局所環とし, J, $\mathfrak{a}$ を R のイデアルとする。$A = R/\mathfrak{a}$, $I = JA$ とおくとき, 任意の A-加群 W に対して, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathrm{Ext}^i_R(R/J, W)$ は, すべての i に対して有限生成 R-加群である。

(2) $\mathrm{Ext}^i_A(A/I, W)$ は, べての i に対して有限生成 A-加群である。

この命題の証明及び, 定理 (1.1) の証明は次の第 2 節で与えられる。
また, 第 3 節では次の問いを考え, 1 つの解答を得る。(定理 (3.2) を参照)

問い 1.5 A を正則局所環とし, I をそのイデアルとする。このとき, $\mathrm{H}^i_I(A)$ はいつすべての i に対して, I-cofinite であるか？

2 Proof of Theorem(1.1)

定理 (1.1) の証明の前に, まず, 命題 (1.4) の証明を与えよう。

命題 (1.4) の証明 次のスペクトル系列を考える。

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p_A(\mathrm{Tor}^R_q(A, R/J), W) \Longrightarrow E^n = \mathrm{Ext}^n_R(R/J, W)$$

(cf. [Ro, Theorem (11.65)])。

(1) $\Longrightarrow$ (2) : (cf. [D, Theorem 3]) 仮定により, $E^n = \mathrm{Ext}^n_R(R/J, W)$ は各 n に対して, 有限生成。(2) を見るためには, すべての p, q に対して, E_2^{pq} が有限生成であることを示せば良い。それを非負整数 p についての数学的帰納法で示す。

最初に, $p = 0$ とする。$E_2^{00} \cong \mathrm{Hom}_R(A/I, W)$ は有限生成 (補題 (1.2))。さらに, $\mathrm{Supp}_A(\mathrm{Tor}^R_q(A, R/J)) \subseteq V(I)$ だから, $E_2^{0q} = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Tor}^R_q(A, R/J), W)$ は全ての q に対して, 有限生成 (補題 (1.2))。

次に, $p = 1$ とする。$E_2^{10} \cong E_\infty^{10}$ は E^1 の部分加群だから, それも有限生成。上の議論により, E_2^{1q} は有限生成 $(\forall q)$。

最後に, $t \geq 2$ とし, E_2^{pq} は 有限生成 ($0 \leq \forall p < t$, $\forall q < t$) と仮定しよう。このとき, E_2^{tq} が有限生成 ($\forall q$) を示さなければならない。(1.2) より, E_2^{t0} が有限生成であることを示せば十分である。

各 $p < t$ に対して, E_r^{pq}($r \geq 3$) は E_2^{pq} の部分加群の準同型像だから, それも有限生成であり, 特に, E_∞^{pq} もそう。他方,

$$E_r^{t0} = E_{r-1}^{t0} \big/ \mathrm{Im}\, d_{r-1}^{t-r+1,r-2} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{Im}\, d_{r-1}^{t-r+1,r-2} \cong E_{r-1}^{t-r+1,r-2} \big/ \ker d_{r-1}^{t-r+1,r-2}$$

だから, E_r^{t0} が有限生成であることと E_{r-1}^{t0} が有限生成であることとは同値である。さらに, E_∞^{t0} は E^t の部分加群だから, それも有限生成。ゆえに, E_2^{t0} が有限生成であることを結論することが出来る。

(2) $\Longrightarrow$ (1) : 仮定から, E_2^{p0} は有限生成 ($\forall p$)。したがって, (1.2) より, E_2^{pq} も有限生成 ($\forall q$)。ゆえに, E_r^{pq} ($r \geq 3$) もそう。特に, E_∞^{pq} もそう。

他方, 各 n に対して, $E^n = \mathrm{Ext}_R^n(R/J, W)$ は次のようなフィルターを持つ。

$$E^n = E_0^n \supseteq E_1^n \supseteq \cdots \supseteq E_n^n \supseteq E_{n+1}^n = 0, \qquad E_p^n/E_{p+1}^n \cong E_\infty^{p,n-p}.$$

ゆえに, E^n も有限生成 ($\forall n$) である。 **QED**

定理 (1.1) の証明 (1.2) より, $I = \sqrt{I}$ としてよい。M を有限生成 A-加群とする。

最初に, A が完備である場合を考える。このとき, $A = R/\mathfrak{a}$, R は完備正則局所環と表せる。さらに, $I = J/\mathfrak{a}$ と表すとき, $\dim R/J = \dim A/I = 1$ である。命題 (1.3) から, $\mathrm{Ext}_R^i(R/J, \mathrm{H}_J^j(M))$ は有限生成 R-加群 ($\forall i, j$)。$W = \mathrm{H}_J^j(M) \cong \mathrm{H}_I^j(M)$ は A-加群だから, (1.4) を適用して, $\mathrm{Ext}_A^i(A/I, \mathrm{H}_I^j(M))$ が有限生成 A-加群であることを得る。

一般の場合, $\widehat{A}$ を A の $\mathfrak{m}$-進完備化とすると, $\mathrm{Ext}_A^i(A/I, \mathrm{H}_I^j(M)) \otimes \widehat{A}$ は有限生成 $\widehat{A}$-加群。A がネーター環で, $\widehat{A}$ は A 上忠実平坦だから, $\mathrm{Ext}_A^i(A/I, \mathrm{H}_I^j(M))$ 自身有限生成 A-加群である。 **QED**

この節の終りに, 命題 (1.4) の応用例をひとつあげておく。そのためにイデアル I の arithmetical rank の定義を参照しておく。

$$\mathrm{ara}(I) = \inf\left\{ n \,\middle|\, \exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in A \text{ such that } \sqrt{(a_1, \cdots, a_n)A} = \sqrt{I} \right\}.$$

$\mathrm{ara}(I) = 1$ のとき, 命題 (1.4) と [Ha2, Cor.(6.3)] から, 容易に次を得る。

例 2.1 $\mathrm{ara}(I) \leq 1$ とする。このとき, 任意の 有限生成 A-加群 M と A-加群 N s.t. $\mathrm{Supp}_A(N) \subseteq V(I)$ に対して, $\mathrm{Ext}_A^i(N, \mathrm{H}_I^j(M))$ は有限生成 A-加群 ($\forall i, j$) である。

3 Vanishing and cofiniteness

この節において, 我々は次の問いを考察する。

問い 3.1 A を正則局所環とし, I を A のイデアルとする。このとき, いつ全ての i に対して $\mathrm{H}_I^i(A)$ はいつ I-cofinite か？

この問いに対して, 次のような解答を得た。

定理 3.2 A を正則局所環とし, I を A のイデアルとする。$h = \operatorname{ht} I$ とおく。このとき, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\operatorname{Hom}_A(A/I, \mathrm{H}_I^i(A))$ は, すべての $i \geq h+1$ に対して有限生成である。

(2) $\mathrm{H}_I^i(A) = 0 \quad (\forall i \neq h)$。

さらに, これらが成立するとき, A/I は等次元で, $\mathrm{H}_I^h(A)$ は I-cofinite である。

この定理は次の結果に基づく。

定理 3.3 (cf. [HK, Theorem (2.3)]) A を正則局所環とし, I を A のイデアルとする。r を $r > \operatorname{bight}(I)$ となる整数とする。もし, $\operatorname{Hom}_A(A/I, \mathrm{H}_I^i(A))$ が有限生成 A-加群 ($\forall i \geq r$) ならば, $\mathrm{H}_I^i(A) = 0 \quad (\forall i \geq r)$ である。

注意 1

$$\operatorname{bight} I = \max\{\operatorname{ht} P \mid P \in \operatorname{Min}_A(A/I)\}.$$

定理 (3.2) の証明 (1.2) より, $I = \sqrt{I}$ として良い。任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して, $b(\mathfrak{a}) = \operatorname{bight} \mathfrak{a} - \operatorname{ht} \mathfrak{a}$ とおく。

(1) を仮定する。まず, A/I が等次元, すなわち, $b(I) = 0$ であることを示す。$b = b(I) > 0$ とし, $b(\mathfrak{a}) < b$ なる任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対しては結論が正しいと仮定しよう。$I = U \cap J$ と書く。ここに,

$$U = \bigcap \{P \mid P \in \operatorname{Min}_A(A/I), \operatorname{ht} P < \operatorname{bight} I\} \subseteq \mathfrak{m}$$

かつ

$$J = \bigcap \{P \mid P \in \operatorname{Min}_A(A/I), \operatorname{ht} P = \operatorname{bight} I\} \subseteq \mathfrak{m}.$$

必要ならば, 素イデアル $P \in \operatorname{Min}_A(A/U+J)$ で局所化して, $\sqrt{U+J} = \mathfrak{m}$ と仮定して良い。このとき, $1 \leq \dim A/J < \dim A/U$ に注意。

Hartshorne–Lichtenbaum の vanishing theorem (cf. [CS])(HLVT と略す) から, $\mathrm{H}_U^d(A) = \mathrm{H}_J^d(A) = 0$ を得る。続いて, local cohomology に関する Mayer–Vietoris sequence (cf. [BR]) を用いると,

$$0 = \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A) \to \mathrm{H}_U^{d-1}(A) \oplus \mathrm{H}_J^{d-1}(A) \to \mathrm{H}_I^{d-1}(A) \to \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^d(A) \cong E_A \to 0 \quad (\mathrm{ex}).$$

よって, $\operatorname{Hom}_A(A/U, \mathrm{H}_U^{d-1}(A)) \subseteq \operatorname{Hom}_A(A/I, \mathrm{H}_I^{d-1}(A))$ は有限生成であり, $\operatorname{bight} U < d-1$ だから, $\mathrm{H}_U^{d-1}(A) = 0$ ([HK, Theorem (2.3)])。

今, $\dim A/J \geq 2$ と仮定してみる。このとき, $\operatorname{bight} J = \operatorname{ht} J \leq d-2$。上記の議論によって, $\mathrm{H}_J^{d-1}(A) = 0$ を得る。すると, $\mathrm{H}_I^{d-1}(A) \cong E_A$。しかしながら, $\widehat{A}/I\widehat{A} \cong \operatorname{Hom}_{\widehat{A}}(\operatorname{Hom}_{\widehat{A}}(\widehat{A}/I\widehat{A}, E_{\widehat{A}}), E_{\widehat{A}})$ は有限生成でないから, 矛盾を得る。したがって, $\dim A/J = 1$ である。

先の完全列に, 関手 $\operatorname{Hom}_A(A/J, -)$ を施して, 次を得る。

$$\begin{array}{lllll} 0 & \to & \operatorname{Hom}_A(A/J, \mathrm{H}_J^{d-1}(A)) & \to & \operatorname{Hom}_A(A/J, \mathrm{H}_I^{d-1}(A)) \\ & \to & \operatorname{Hom}_A(A/J, E_A) & \to & \operatorname{Ext}_A^1(A/J, \mathrm{H}_J^{d-1}(A)) \\ & \to & \operatorname{Ext}_A^1(A/J, \mathrm{H}_I^{d-1}(A)) & \to & 0 \quad (\mathrm{ex}). \end{array}$$

(1.3) から, $\operatorname{Ext}_A^i(A/J, \mathrm{H}_J^{d-1}(A)) \quad (\forall i)$ は有限生成である。一方, 仮定から, $\operatorname{Hom}_A(A/J, \mathrm{H}_I^{d-1}(A))$ も有限生成だから, $\operatorname{Hom}_A(A/J, E_A)$ もそう。これは矛盾である。ゆえに, $b(I) = 0$ が得られる。

[HK, Theorem (2.3)] から, $\mathrm{H}_I^i(A) = 0 \ (\forall i > h)$。他方, $\operatorname{grade} I = h$ だから, 明らかに $\mathrm{H}_I^i(A) = 0 \ (\forall i < h)$ であり, (2) を得る。

逆に, (2) を仮定する。このとき, (1) は明らかに従う。さらに, 次のスペクトル系列

$$E_2^{pq} = \operatorname{Ext}_A^p(A/I, \mathrm{H}_I^q(A)) \Longrightarrow E^n = \operatorname{Ext}_A^n(A/I, A).$$

を考えると, 条件 (2) から, このスペクトル系列は退化し, $E_2^{ph} \cong E^{p+h}$。特に, $E_2^{ph} = \operatorname{Ext}_A^p(A/I, \mathrm{H}_I^h(A))$ は全ての p に対して有限生成である。 **QED**

次の結果は, 定理 (3.2) の条件を満たすイデアルについての必要条件を補足する。

系 3.4 (3.2) の記号のもとで, $\operatorname{Hom}_A(A/I, \mathrm{H}_I^i(A))$ がすべての $i \geq h+1$ に対して, 有限生成であると仮定する。このとき, $\operatorname{Spec}(A/I)$ は余次元 1 において連結 (connected in codim 1) である (cf. [Ha1])。

証明 任意の $p \in V(I)$ s.t. $\operatorname{ht}(P/I) > 1$ に対して, $\operatorname{Spec}(A/I)_P \setminus \{PA_P\}$ が連結であることを言えば良い (cf. [Ha1, Prop. (1.3)])。この証明において, $P = \mathfrak{m}$ かつ $\dim A/I \geq 2$ として良い。このとき, 仮定から, $\mathrm{H}_I^{d-1}(A) = \mathrm{H}_I^d(A) = 0$。$A$ は正則局所環だから, $\operatorname{Spec}(A/I) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ は連結である ([HL, (2.9)],[HH, (3.3)])。 **QED**

定理 (3.2) から得られる系を 2 つあげておく。まず, $\dim A/I = 2$ のとき, [HL, Theorem (2.9)] から, 次を得る。

系 3.5 (cf. [HK, Theorem (3.6)]) k を分離的閉体 (separably closed field) とし, $A = k[[x_1, \cdots, x_d]] \ (d \geq 2)$ とする。このとき, $\dim A/I = 2$ となる任意のイデアル I に対して, 次は同値である。

(1) $\mathrm{Hom}_A(A/I,\, \mathrm{H}_I^{d-1}(A))$ は有限生成である。

(2) $\mathrm{H}_I^{d-1}(A) = 0$。

(3) $\mathrm{Spec}(A/I) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ は連結。

さらに, このとき, $\mathrm{H}_I^i(A) = 0\ (\forall\, i \neq d-2)$ かつ $\mathrm{H}_I^{d-2}(A)$ は I-cofinite である。

また, $\mathrm{ht}\, I = 1$ のときは次を得る。

系 3.6 A を正則局所環とし, I を高さ 1 のイデアルとする。このとき, 次は同値である。

(1) $\mathrm{Hom}_A(A/I,\, \mathrm{H}_I^i(A))$ は有限生成 $(\forall\, i \geq 2)$。

(2) A/I は等次元。

(3) $\mathrm{ara}(I) = 1$。

(4) $\mathrm{H}_I^i(A) = 0 \quad (\forall\, i \neq 1)$.

例 3.7 A を局所環とし, I をイデアル $(h = \mathrm{ht}\, I)$ とする。このとき, 次が成立する。

(1) I が集合論的完全交叉 (set-theoretic complete intersection), すなわち, $\mathrm{ara}(I) = h$ ならば, $\mathrm{H}_I^i(A) = 0 \quad (\forall\, i \neq h)$ である。

(2) (cf. [PS, Ch.III, Prop.(4.1)]) A が正標数の正則局所環で, A/I が Cohen-Macaulay ならば, $\mathrm{H}_I^i(A) = 0 \quad (\forall\, i \neq h)$ である。

(3) (cf. [HK]) k を標数 0 の体とし, $A = k[[x_1, \cdots, x_6]]$ とする。

$$P = I_2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

とおくと, P は Cohen-Macaulay 素イデアルで, $\mathrm{ht}\, P = 2$, $\dim A/P = 4$ である。また, $\mathrm{H}_P^3(A) \neq 0$ である。

したがって, A/I が等次元で, $\mathrm{Spec}(A/I)$ が余次元 1 において連結であっても定理 (3.2) を成立させることは出来ない。

今, 一般に, 局所環 A とそのイデアル I $(\mathrm{ht}\, I = h)$ に対して, 次の 3 条件を考える。

(1) $\mathrm{Hom}_A(A/I,\ \mathrm{H}_I^i(A))$ は有限生成 $(\forall i \geq h+1)$ である。

(2) $\mathrm{H}_I^i(A)$ は有限生成 $(\forall i \geq h+1)$ である。

(3) $\mathrm{H}_I^i(A) = 0 \quad (\forall i \geq h+1)$。

一般に, (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1) は明らかに成立するが, (2) $\Longrightarrow$ (3) もつねに正しい ([Yos])。また, 定理 (3.2) により, A が正則局所環のときは 3 条件は全て同値である。しかし, 次の例が示すように, 正則局所環でないときは, (1) $\Longrightarrow$ (2) は必ずしも成立しない。

例 3.8 k を体とし, $A = k[[x_1, \cdots, x_n]]/(x_1x_2\cdots x_n)$, $\quad I = (x_2, \cdots, x_n)A$ かつ $P = x_1A$ とおく。n を 2 以上の整数として, $d = n-1 = \dim A$ とおく。このとき, A は完備 Gorenstein 局所環 で, $\dim A/I = 1$, $\mathrm{ht}\, I = d-1$。定理 (1.1) から, $\mathrm{Hom}_A(A/I,\ \mathrm{H}_I^d(A))$ は有限生成 A-加群であるが, $\dim A/I + P = 0$ だから, HLVT により $\mathrm{H}_I^d(A) \neq 0$ (cf. [CS]) である。

References

[BR] M. Brodmann and J. Rung, *Local cohomology and the connectedness dimension in algebraic varieties*, Comment. Math. Helv. 61 (1986) 481–490.

[CS] F. W. Call and R. Y. Sharp, *A short proof of the Local Lichtenbaum-Hartshorne Theorem on the vanishing of local cohomology*, Bull. London Math. Soc. 18 (1986) 261–264.

[D] D. Delfino, *On the cofiniteness of local cohomology modules*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 115 (1994) 79–84.

[Gr1] A. Grothendieck, *Local cohomology, notes by R. Hartshorne*, Lecture notes in Mathematics. 862, (Springer–Verlag, 1966).

[Gr2] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théormes de Lefshetz locaux et globaux*, S.G.A. II, (North–Holland, 1968)

[Ha1] R. Hartshorne, *Complete intersections and connectedness*, Amer. J. Math. 84 (1962) 497–508.

[Ha2] R. Hartshorne, *Affine Duality and Cofiniteness*, Invent. Math. 9 (1970) 145–164.

[HH] M. Hochster and C. Huneke, *Indecomposable Canonical Modules and Connectedness*, Comp. Math. 159 (1994) 197–208.

[HK] C. Huneke and J. Koh, *Cofiniteness and vanishing of local cohomology modules*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 110 (1991) 421–429.

[HL] C. Huneke and G.Lyubeznik, *On the vanishing of local cohomology modules*, Invent. Math. 102 (1990) 73–93.

[PS] C. Peskine and L. Szpiro, *Dimension Projective Finie et Cohomologie Locale*, I.H.E.S. 42 (1973) 323–395.

[Ro] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, (Academic Press, 1979).

[Yos] K. Yoshida, *Cofiniteness of local cohomology modules for ideals of dimension one*, Preprint.

Graduate School of Polymathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya, 464-01, Japan
Email address : yoshida@math.nagoya-u.ac.jp

Castelnuovo-Mumford regularity and arithmetic degree

宮崎　誓 (Chikashi Miyazaki)
長野工業高等専門学校
381 長野市徳間 716
miyazaki@ei.nagano-nct.ac.jp

本稿では、次数環（射影代数多様体）の Castelnuovo-Mumford regularity の上限をその次数環（射影代数多様体）の基本的な不変量で表す問題を考え、また、Castelnuovo-Mumford regularity と arithmetic degree との関係を述べる。これは、Wolfgang Vogel との共同研究[1][15, 16] によるものである。

1 Castelnuovo-Mumford regularity の上限

基礎体 K（任意標数）上の多項式環を $S = K[X_0, \cdots, X_N]$ とし、$\deg X_i = 1$ として次数環の構造をいれる。また、$\mathfrak{m} = (X_0, \cdots, X_N)$ とする。I を S の同次イデアル（以下では、すべて homogeneous case を扱い、単にイデアルという。他の語法もこれに従う。）とし、$R = S/I$, $\dim R = d$ とおく。次数環 R が m-regular であるとは、

$$[H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_\ell = 0$$

for all i, ℓ with $i + \ell > m$ が成り立つときをいう (cf. [18])。これは、すべての p に対して S-加群 R の p-th シジジー加群の最小の生成元の次数が $p + m$ 以下であることと同値である (cf. [3])。R が m-regular となる最小の m を R の Castelnuovo-Mumford regularity といい、$\operatorname{reg} R$ と書く。

以下では、R を locally Cohen-Macaulay かつ equi-dimensional（即ち、$\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(R)) < \infty$, $i \neq d$）と仮定する。

さて、整数 $k \geq 0$, $1 \leq r \leq d$ に対して、R が (k, r)-Buchsbaum という概念を導入する (cf. [4, 8, 10, 12, 13])。R が (k, r)-Buchsbaum であるとは、R の任意のパラメータ

[1]著者は Postdoctoral fellowship による援助をいただいた Massey University に感謝いたします。

$f_1, \cdots, f_d$ に対して、

$$\mathfrak{m}^k H^i_{\mathfrak{m}}(R/(f_1, \cdots, f_j)R) = 0$$

for all i, j with $j \leq r-1$ and $i+j < d$ が成り立つときをいう。$(0,r)$-, $(1,d)$-, $(k,1)$-Buchsbaum は、それぞれ、Cohen-Macaulay, Buchsbaum, k-Buchsbaum と同じである。

さて、X を 代数閉体 K 上の $\mathrm{Proj}\, S = \mathbf{P}^N_K$ の射影部分代数多様体とし、その定義イデアルを I とし、座標環を $R = S/I$ とする。ここでは、R は整域である。X の Castelnuovo-Mumford regularity を $\mathrm{reg}\, X = \mathrm{reg}\, R + 1$ と定義する。さらに、X は非退化、即ち、I の最小生成元の次数は 2 次以上とする。$\mathrm{reg}\, X$ の上限を X の基本的な不変量である $\mathrm{codim}\, X$ および $\deg X$ を用いて表す問題は、Eisenbud-Goto [3] で述べられた

$$\mathrm{reg}\, X \leq \deg X - \mathrm{codim}\, X + 1$$

という予想を巡って、研究されてきた。この辺の状況は、例えば、Bayer-Mumford [2] に書かれている。

また、X が arithmetically Buchsbaum、即ち、R が Buchsbaum のとき、

$$\mathrm{reg}\, X \leq \lceil (\deg X - 1)/\mathrm{codim}\, X \rceil + 1$$

ということは、Stückrad-Vogel [23, 24] によって示された。(このことは、Goto による Buchsbaum 加群の構造定理 [5] からも得られる。) そこで、R のコホモロジー的性質が Cohen-Macaulay または Buchsbaum から離れれば、$\mathrm{reg}\, X$ についての拘束条件が弱くなることは予想される。そこで、locally Cohen-Macaulay and equi-dimensional の refinement である (k,r)-Buchsbaum という言葉で表すという問題を考える。つまり、X を (k,r)-Buchsbaum、即ち、R を (k,r)-Buchsbaum とするとき、

$$\mathrm{reg}\, X \leq \lceil (\deg X - 1)/\mathrm{codim}\, X \rceil + C(k, r, \dim X),$$

と書いて、$C(k, r, \dim X)$ の上限を考える。ここで、$C(k, r, \dim X)$ は、k, r, $\dim X$ のみに依存する定数とする。以下、$k \geq 1$ と仮定する。まず、Nagel-Schenzel [20] (やや弱い形で、Hoa-Miyazaki [9]) によって $C(k, 1, \dim X) \leq (2\dim X - 1) \cdot k - d + 1$ が示され、最近、Nagel-Schenzel [21] が $C(k, 1, \dim X) \leq \dim X \cdot k$ を示した。一方、Hoa-Vogel [10] は、$C(k, r, \dim X) \leq (r-1) \cdot k + (\dim X + 2 - r)(\dim X + 1 - r)/2 - \dim X + 1$ を示した。

そこで、次の Theorem 1.1 が、我々の主定理である。

Theorem 1.1([15, (3.2),(3.3)]). 上の条件で、次が成立する。

$$C(k, r, \dim X) \leq \dim X \cdot k - r + 1$$

$$C(1, r, \dim X) \leq \lceil d/r \rceil$$

上記の定理を証明するために、$\operatorname{reg} R$ の上限を、a-invariant(cf. [6]) を用いて表す。ここで、次数環 A の a-invariant は、

$$a(A) = \max\{\ell \in \mathbf{Z} | [H_{\mathfrak{m}}^{\dim A}(A)]_\ell \neq 0\}$$

である。さて、我々は、[14] で得られた R の (k, r)-Buchsbaum 性についてのスペクトル系列を用いた判定法を用いて、まず、次の Theorem 1.2, Theorem 1.3 を得た。

Theorem 1.2([15, (2.8)]). k および r を $k \geq 1, 1 \leq r \leq d$ を満たす整数とする。$x_1, \cdots, x_r$ を R の1次のパラメータ系の一部とし、R を (k, r)-Buchsbaum とすると、

$$\operatorname{reg}(R) \leq a(R/(x_1, \cdots, x_r)R) + (d - r) + (d - \operatorname{depth} R)k - r$$

が成り立つ。

Theorem 1.3([15, (2.10)]). r を $1 \leq r \leq d$ を満たす整数とする。$x_1, \cdots, x_r$ を R の1次のパラメータ系の一部とし、R を (k, r)-Buchsbaum とすると、

$$\operatorname{reg}(R) \leq a(R/(x_1, \cdots, x_r)R) + (d - r) + \lceil (d - \operatorname{depth} R)/r \rceil - 1$$

が成り立つ。

ここで、Ballico [1] によって導入された semi-uniform position という概念を使って得られる次の補題 (cf. [21, (4.6)]) (基礎体の標数が 0 のときは、Uniform Position Principle として、よく知られている。) 及び Theorem 1.2, Theorem 1.3 を用いて、主定理 Theorem 1.1 が証明される。

Lemma 1.4. X を代数閉体 K 上の非退化射影代数多様体とし、R をその座標環とする。このとき、

$$a(R) + \dim R \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil$$

が成り立つ。

そこで、Theorem 1.1 で得られた $C(k, r, \dim X)$ が best possible かどうか、は重要な問いかけである。(もちろん、Buchsbaum の場合は、構造がはっきりしているので、もっと一般の場合にどうかということである。) Miyazaki-Vogel [15, (4.1),(4.2)] で述べたように、$k = 1, 2$ かつ $r = 1$ ($k = 2$ の場合は、[15] にもう少し考えて) の場合は、Theorem 1.2 に関しては、すべての次元の sharp な例が存在する。$r = 1$ のときの現在の予想は、次の通りである。

Conjecture 1.5. Theorem 1.1 の条件で、

$$C(k, 1, \dim X) \leq \dim X \cdot \lceil (k+1)/2 \rceil$$

が成り立つ。

また、X が、arithmetically Buchsbaum のときは、

$$\operatorname{reg} X \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + 1$$

が成り立つが、この等号が成立する X を求める問題は、自然に考えられるところである。これについては、Nagel [19] が、Cohen-Macaulay の場合、また、Yanagawa [27] が、Buchsbaum curve の場合について述べているので、そちらを参照されたい。もっと一般に、Lemma 1.4 の等号が成り立つ場合については、(Uniform Position にある 0 次元スキームについては、Maroscia [11] の結果があるが、) 一般次元では、よく知られていないと思う。

2 Arithmetic degree と Castelnuovo-Mumford regularity

ここでは、Miyazaki-Vogel [16] で得られたいくつかの結果、特に、arithmetic degree と Castelnuovo-Mumford regularity との関係について述べる。arithmetic degree とは、"embedded component 込みの degree" のことで、Bayer-Mumford [2] で定義され、最近、[16, 17, 25, 26] などで、研究されている。(この概念は、既に、Hartshorne [7] に萌芽されている。)

$S = K[X_0, \cdots, X_N]$ を多項式環、I を S の (同次) イデアルとする。また、$R = S/I$ とする。ここで、I の minimal primary decomposition $I = \cap(Q)$ を固定する。I の associated prime P に対して、それに対応する primary ideal Q をとる。さて、P の I についての length multiplicity $\operatorname{mult}_I(P)$ を次のように定義する。まず、J を I の primary ideal Q_1 で、$\sqrt{Q_1}$ が P に真にふくまれるすべての (先程、固定した) Q_1 の intersection とする。(P が isolated prime の時は、$J = (1)$ である。) そこで、$\operatorname{mult}_I(P)$ を次の maximal strictly increasing chain of ideals の長さ ℓ:

$$Q \cap J = J_\ell \subset J_{\ell-1} \subset \cdots \subset J_0 = J$$

とする。ここで、$J_k, 1 \leq k \leq \ell - 1$ は、ある P-primary Q_k に対して、$J_k = Q_k \cap J$ を満たすものとする。primary decomposition は unique ではないが、$\operatorname{mult}_I(P)$ は P, I のみに依存する。

さて、r を $r \geq -1$ なる整数とする。I の r-th arithmetic degree (算術的次数) を

$$\text{arith-deg}_r(I) = \sum \operatorname{mult}_I(P) \cdot \deg(P)$$

と定義する。ここでは、右辺の Σ は I の associated prime P で $\dim(S/P) = r+1$ を満たすすべての P についての和である。

このとき、[2, (3.6)] を改良して、次の主定理を得た。

Theorem 2.1([16, (3.1)]). r を非負整数とするとき、

$$\text{arith-deg}_r(I) \le \Delta^r P(R,\ell)$$

for all $\ell \ge \operatorname{reg} R$、が成立する。ここで、$P(R,\ell)$ は、R の Hilbert 多項式、$\Delta^r P(R,\ell)$ はその多項式の r-回差分である。

上の定理は、次元についての帰納法により示される。その際、Theorem 2.2 が有用である。これ自身 embedded component についてのある種の Bezout の定理と捉えられる。

Theorem 2.2([16, (2.1),(2.4)]). r を非負整数とし、f を S の斉次元で、$\deg(f) \ge 1$ とする。さて、$\dim(S/P) \ge r+1$ を満たすすべての I の素因子 P に対して、$f \notin P$ であると仮定する。そのとき、

$$\text{arith-deg}_{r-1}(I,f) - \text{arith-deg}_{r-1}(I_{\ge r+1}, f) \ge \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(I)$$

が成り立つ。また、等号が成り立つための条件は、$\dim(S/P) = r+1$ となる I の素因子 P に対しても、$f \notin P$ が成り立つことである。ここで、$I_{\ge r+1}$ は、I の（最初に準素イデアル分解を固定したときの）準素イデアル Q で $\dim(S/I) \ge r+2$ を満たす Q たちの交わりである。

さらに、K が無限体で $r \ge 1$ のとき、generic な 1 次の元（超平面切断） h に対して、

$$\text{arith-deg}_{r-1}(I,h) = \text{arith-deg}_r(I)$$

が成立する。

Theorem 2.2 で、h が S/I の零因子でないときでさえ、

$$\text{arith-deg}_{r-1}(I,h) > \text{arith-deg}_r(I)$$

となる例がある。([16, (5.1)]) この例が、我々の研究の出発点になった。また、[17] では、Theorem 2.2 をさらに精密化した結果を得ている。

参考文献

[1] E. Ballico, On singular curves in positive characteristic, Math. Nachr. 141(1989), 267-273.

[2] D. Bayer and D. Mumford, What can be computed in algebraic geometry? Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (ed. D. Eisenbud and L. Robbiano), pp. 1-48, Cambridge University Press, 1993.

[3] D. Eisenbud and S. Goto, Linear free resolutions and minimal multiplicity, J. Algebra 88(1984), 89-133.

[4] M. Fiorentini and W. Vogel, Old and new results and problems on Buchsbaum modules, I, Sem. Geom. Univ. Studi Bologna 1988-1991(1991), 53-61.

[5] S. Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules, Advanced Studies in Pure Mathematics 11, Commutative Algebra and Combinatorics, pp. 39-64, Kinokuniya/North Holland, 1987.

[6] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan 30(1978), 179-213.

[7] R. Hartshorne, Connectedness of the Hilbert scheme, Publ. I.H.E.S. 29(1966), 261-304.

[8] L. T. Hoa, R. M. Mirò-Roig and W. Vogel, On numerical invariants of locally Cohen-Macaulay schemes in $\mathbf{P}^n$, Hiroshima Math. J. 24(1994), 299-316.

[9] L. T. Hoa and C. Miyazaki, Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for generalized Cohen-Macaulay graded rings, Math. Ann. 301(1995), 587-598.

[10] L. T. Hoa and W. Vogel, Castelnuovo-Mumford regularity and hyperplane sections, J. Algebra 163(1994), 348-365.

[11] P. Maroscia, Some problems and results on finite sets of points in $\mathbf{P}^n$, Lecture Notes in Math. 997, Algebraic Geometry – Open Problems, pp. 290-314, Springer, 1983.

[12] C. Miyazaki, Graded Buchsbaum algebras and Segre products, Tokyo J. Math. 12(1989), 1-20.

[13] C. Miyazaki, Spectral sequence theory of graded modules and its application to the Buchsbaum property and Segre products, J. Pure Appl. Algebra, 85(1993), 143-161.

[14] C. Miyazaki, Spectral sequence theory for generalized Cohen-Macaulay graded modules, Commutative Algebra 1992 ICTP, Trieste, Italy (ed. A. Simis, N. V. Trung and G. Valla), pp. 164-176, World Scientific, Singapore, 1994.

[15] C. Miyazaki and W. Vogel, Bounds on cohomology and Castelnuovo-Mumford regularity, J. Algebra (to appear).

[16] C. Miyazaki and W. Vogel, Towards a theory of arithmetic degrees, preprint.

[17] C. Miyazaki, W. Vogel and K. Yanagawa, Associated primes and arithmetic degrees, in preparation.

[18] D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surface, Ann. Math. Studies 59, Princeton University Press, 1966.

[19] U. Nagel, On the defining equations and syzygies of arithmetically Cohen-Macaulay varieties in arbitrary characteristic, J. Algebra 175(1995), 359-372.

[20] U. Nagel and P. Schenzel, Cohomological annihilators and Castelnuovo-Mumford regularity, Contemp. Math. 159(1994), 307-328.

[21] U. Nagel and P. Schenzel, Degree bounds for generators of cohomology module and Castelnuovo-Mumford regularity, preprint.

[22] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications, Springer, 1986.

[23] J. Stückrad and W. Vogel, Castelnuovo bounds for certain subvarieties in $\mathbf{P}^n$, Math. Ann. 276(1987), 341-352.

[24] J. Stückrad and W. Vogel, Castelnuovo bounds for locally Cohen-Macaulay schemes, Math. Nachr. 136(1988), 307-320.

[25] B. Sturmfels, N. V. Trung and W. Vogel, Bounds on degrees of projective schemes, Math. Ann. 302(1995), 417-432.

[26] W. Vasconcelos, The reduction number of an algebra, Compositio Math. (to appear).

[27] K. Yanagawa, On the regularities of arithmetic Buchsbaum curves, Math. Z. (to appear).

Arithmetic degree
(非孤立素因子込みの "次数") について

柳川 浩二

名古屋大学 理学部 数学教室

yanagawa@math.nagoya-u.ac.jp

本稿の内容は, 宮崎 誓氏, W. Vogel 氏との共同研究である ([7] 参照).

1 準素分解と算術次数

k を体 (簡単の為 $\#k = \infty$ とする), $S = k[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ を $n+1$ 変数の多項式環とし, 各 x_i の次数を 1 として 次数付環とみなす. これの無縁イデアル を m と記す, つまり $m = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

M を有限生成の次数付加群としたとき, 良く知られているように $\deg M$ は, $\mathrm{Assh}(M) := \{P \in \mathrm{Ass}(M) \mid \dim S/P = \dim M\}$ の元における M の局所的な情報のみで決まってしまう. つまり,

$$\deg M = \sum_{P \in \mathrm{Assh}(M)} \ell(M_P) \deg(S/P)$$

である. もちろん $\ell(-)$ は, S_P 加群としての長さを表す. 本稿のテーマである "arithmetic degree (算術次数) " とは、 非孤立素因子も含め $\mathrm{Ass}(M)$ の全ての元における情報を考慮した "refine された" 次数であり, 最近では 主として computational な立場から, 活発に研究されている ([1, 8] 等).

各整数 $i \geq -1$ に対し,

$$M_{\leq i} := \{x \in M \mid \dim(S/\mathrm{ann}(x)) \leq i\},$$

と置くと, $M_{\leq i}$ は M の次数付部分加群であり $\mathrm{Ass}(M_{\leq i}) = \{P \in \mathrm{Ass}\, M \mid \dim S/P \leq i\}$ であって, なおかつ $M_{>i} := M/M_{\leq i}$ と置いた時に, $\mathrm{Ass}(M_{>i}) = \{P \in \mathrm{Ass}\, M \mid \dim S/P > i\} = \mathrm{Ass}\, M \setminus \mathrm{Ass}(M_{\leq i})$ となる.

定義 1.1 各 $r \geq -1$ に対し,

$$\begin{aligned}\text{arith-deg}_r(M) &:= \begin{cases} \deg(M_{\leq r+1}) & \dim M_{\leq r+1} = r+1 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \\ &= \sum_{P \in \mathrm{Spec}\, S,\ \dim S/P = r+1} \ell(H^0_P(M_P)) \cdot \deg(S/P).\end{aligned}$$

また 簡単の為, イデアル $I \subset S$ に対し, $\text{arith-deg}_r(S/I)$ を $\text{arith-deg}_r(I)$ と書く.

二つ目の等式で, 素イデアル P に対し $H^0_P(M_P) \neq 0$ は $P \in \text{Ass}(M)$ と同値であるし, $P \in \text{Min}\, M$ ならば $M_P = H^0_P(M_P)$ である. $\ell(H^0_P(M_P))$ を M の P における "length multiplicity" と呼ぶ. また, $d = \dim M$ とおくと, $\text{arith-deg}_{d-1} M = \deg M$ である (arithmetic degree に関しては, [1, 8] に於ける記号法に従ったが, 彼らは射影幾何的な次元を採用しているので, 環論的な Krull 次元とは, 番号付けが一つずれることに注意).

一見煩わしい定義であるが, 以下に示すように, 局所双対性をうまく利用して (準素分解を経由せずに) かなりの例まで $\text{arith-deg}_r(-)$ を, *Macaulay* 等のソフトを用いて具体的に計算できる (計算機を用いた準素分解は, computational commutative algebra の重要なテーマの一つで, 実際に実行可能なのだが, 大変 時間がかかるようである. [3] を参照). まず, 次の事実がある. 以下 $\text{codim}\, M := \dim S - \dim M = \text{ht}(\text{ann}(M))$ という記号を用いる.

命題 1.2 (c.f., [3, 4]) 任意の $i \geq 0$ について $\text{codim}(\text{Ext}^i_S(M,S)) \geq i$ である. また, $\text{codim}(\text{Ext}^i_S(M,S)) = i$ となる為の必要充分条件は, Mが 高さ i の素因子を持つ事である. さらに, $\text{ht}(P) = i$ なる S の斉次素イデアル P に対し, $P \in \text{Ass}(M)$ と $P \in \text{Min}(\text{Ext}^i_S(M,S))$ は 同値.

命題 1.3 (c.f., [9]) 任意の $r \geq -1$ について,

$$\begin{aligned}\text{arith-deg}_r(M) &= \begin{cases} \deg \text{Ext}^{n-r}_S(M,S) & \text{codim}(\text{Ext}^{n-r}_S(M,S)) = n - r \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \\ &= \deg(\text{Ext}^{n-r}_S(\text{Ext}^{n-r}_S(M,S),S).)\end{aligned}$$

以後しばらく, arithmetic degree に関して, これまでに得られている代表的な結果を紹介する.

まず, イデアルの arithmetic degree の上限を, 剰余環の (Castelnuovo–Mumford) regularity を用いて表すという方向の研究がいくつか存在する ([1, 6] 等). Bayer, Mumford や その周辺の人達は, regularity を 環の "複雑さ" を表す不変量と捉えているようなので, 自然な問題設定と言う気がする. ここではこれ以上触れないが, 本報告集の 宮崎誓氏のレポート等も参照して頂きたい.

以後 $\text{arith-deg}(I) := \sum_{r \geq -1} \text{arith-deg}_r(I)$ とおく.

定理 1.4 (Sturmfels et.al. [8, Theorem 3.1]) I を 単項式 $\{m_1, m_2, \cdots, m_s\}$ で生成された イデアル とすると,

$$\max\{\deg(m_i) \mid 1 \leq i \leq s\} \leq \text{arith-deg}(I) \leq (\prod_{i=1}^{s} \deg(m_i)) + s - \text{ht}(I)$$

が成り立つ.

上の不等式は (左右とも), 単項式イデアルでない場合には, 簡単な反例がある.

例 1.5 (i) 一般のイデアルの場合の左の不等式の反例; $S=k[x,y,u,v]$, $I=(x^2,xy,y^2,xu^t+yv^t)$ とすると, arith-deg$(I)=\deg(S/I)=2$ なので, $t\geq 2$ ならば, 左側の不等式が成立しない.

(ii) 右側の不等式の反例; 同じく $S=k[x,y,u,v]$ とし, $I=(xv-yu, x^{b-a}u^a-y^b, u^b-y^av^{b-a})$ と置く. arith-deg$_1(I)=\deg(S/I)=a+b$, arith-deg$_{-1}(I)=0$ であるが, 何と arith-deg$_0(I)=\binom{b-a+1}{3}$ であり, 右側の不等式が成立しない.

arithmetic degree は, Hilbert 概形の連結性を扱った Hartshorne の有名な論文 [5] で既に考察されている ("arithmetic degree" という用語は使われてないが). "普通の" degree は, Hilbert 多項式のみで決まるので, flat deformation で不変であるが, arithmetic degree は不変ではない. ただし, 命題 1.3 からも分かるように上半連続ではある (これが [5] における, arithmetic degree そのものに関する主結果であった). 特に 次の事が言える.

定理 1.6 (c.f., [8, 9]) $I\subset S$ を斉次イデアル, in(I) を (ある monomial order に関する) I の initial ideal とする. このとき,

$$\text{arith-deg}_r(\text{in}(I))\geq \text{arith-deg}_r(I).$$

Gröbner 基底と flat deformation の関係については, [1, 2] を参照して欲しい.

定理 1.6 に於ける不等式の ギャップは 一般には非常に大きい. 例えば, 例 1.5 (i) の S/I であるが, 適当な変数変換をした上で, reverse lexicographic order を入れて考えると,

$$\begin{aligned}
&\text{arith-deg}(\text{in}(I))\\
&\geq\ \text{in}(I) \text{ の極小生成元の内で最も次数の高いものの次数} \qquad (\text{定理 1.4 より})\\
&=\ \text{reg}(\text{in}(I))+1 \qquad (\text{"generic initial ideal" の基本的性質. [2] 参照})\\
&=\ \text{reg}(I)+1 \qquad (\text{上に同じ})\\
&\geq\ t+2
\end{aligned}$$

arith-deg$(I)=2$ であったから, その差はいくらでも大きく成り得る事が分かる.

今回の筆者の講演には登場しなかったが, geometric degree という類似の不変量も [1] て定義されている. これは, arithmetic degree から非孤立素因子の寄与を除いたものであり, 具体的には

$$\text{geom-deg}(M):=\sum_{P\in \text{Min}(M),\,\dim S/I=r} H^0_P(M_P)\deg(S/P)$$

で定義される. これは文字通り, arithmetic degree 程には 計算し易くないようである. 面白いことに, arithmetic degree とは逆に,

$$\text{geom-deg}_r(\text{in}(I))\leq \text{geom-deg}_r(I)$$

が成立している ([8]). 実際に 不等号となる例も, generic initial ideal の手法を用いて簡単に構成できる. 一般に, in(I) は I より "悪く" なるので, I では極小素因子であったものが, in(I) では非孤立素因子になる場合がある.

また, arithmetic degree は, "effective Nullstellensatz" と呼ばれる問題とも関連があり, 次が成り立つ. ただし, あまり sharp な上限ではない. [7] では, これをある程度改良している.

定理 **1.7** ([8, Theorem 2.2]) $I \subset S$ を斉次イデアル, $s = \text{arith-deg}(I)$ とすると,

$$(\sqrt{I})^s \subset I.$$

また, Vasconcelos [9] では, Noether の正規化と arithmetic degree との関連が, 考察されている.

2 算術次数と Bezout の定理

この節では, $f \in S$ を M-正則な斉次元 (実際には, もう少し弱い条件でも良い) とした時の, $\text{arith-deg}_r(M)$ と $\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM)$ との関係について, 基礎的な考察を行なう. 標語的に言えば, arithmetic degree に関する Bezout の定理である. この節の結果は, すべて [7] で得られたものである.

定理 **2.1** r を非負整数とし, $f \in S$ を $\dim(S/P) \geq r+1$ なる $P \in \text{Ass}(M)$ に含まれない斉次元とする. このとき,

$$\begin{aligned}
&\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) - \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(M) \\
&= \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_{\text{Ext}_S^{n-r}(M,S)}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_M) \\
&= \text{arith-deg}_{r-1}(M_{>r+1}/fM_{>r+1}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_M).
\end{aligned}$$

さらに, $P \subset S$ を $\dim S/P = r$ なる 斉次素イデアルとしたとき, $[0:f]_{\text{Ext}_S^{n-r}(M,S)}$ や $M_{>r+1}/fM_{>r+1}$ の P に於ける length multiplicity は,

$$H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P) \simeq H_P^1((M_{>r+1})_P)/fH_P^1((M_{>r+1})_P)$$

の S_P 加群としての長さで与えられる.

$H_P^1(M_P)$ は S_P 加群として 必ずしも有限生成ではないので, $H_P^1(M_P) \neq 0$ かつ $f \in P$ であっても, $H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P) \neq 0$ とは限らない. 一方, $(M_{>r+1})_P$ は, S_P 加群として Krull 次元 1 の素因子を持たないので, $H_P^1((M_{>r+1})_P)$ は S_P 加群として常に長さ有限 (特に有限生成) である. よって, $H_P^1((M_{>r+1})_P) \neq 0$ かつ $f \in P$ ならば 必ず $H_P^1((M_{>r+1})_P)/fH_P^1((M_{>r+1})_P) \neq 0$. また $(M_{>r+1})_P \neq 0$ であれば必ず, これの S_P 加群としての depth は 1 以上なので, 従って次の系を得る.

系 **2.2** 定理 2.1 と同じ状況で, 以下は同値.

(i) $\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) = \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(M)$

(ii) f が, $P \in \text{Ass}\, M \bigcup \text{Ass}(\text{Ext}_S^{n-r}(M,S))$ 且つ $\dim S/P = r$ なる P に含まれない.

(iii) f が, $\dim S/P = r$ であって $P \in \text{Ass}\, M$ 或いは $\text{depth}_{S_P}(M_{>r+1})_P = 1$ となる P に含まれない.

よって, 特に, $r \geq 1$ ならば, 一般の f について (i) の等号が成立.

定理 2.1 に ほぼ近い結果は [6] で既に得られており, これが今回の研究の出発点となったが, そこでは, $\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) > \text{arith-deg}_r M$ になる為の条件が 上の系の (ii) のようには具体的に求められておらず, 一般の f で等号が成立する事を示すにも, H. Flenner の別の結果 (本稿の 命題 2.6の後半に当たるもの) を必要とした.

系 2.2 を見ると, $\dim(S/I) = r$ なる斉次素イデアルに対して, $(M_{>r+1})_P \neq 0$ ならば $\text{depth}_{S_P}(M_{>r+1})_P \geq 2$ であるという条件が, ここでは重要であることが分かる. これは, Serre の S_2 条件より若干弱い条件である ($\text{Ass}(M)$ の元の高さが揃っていれば, もちろん同値). 次の結果を示すのも, 難しくない.

系 **2.3** I を S の斉次イデアル とする. もし S/I (resp. S/I^{sat}, ここで $I^{\text{sat}} := \bigcup[I : m^n]$) が Serre の S_2 条件を充たすならば, すべての $r \geq 0$ (resp. $r \geq 1$) に対して,

$$\text{arith-deg}_{r-1}(I + (f)) = \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(I)$$

が成立する. I が等次元 (すなわち, $\text{Ass}(S/I)$ の元が全て同じ高さを持てば), 逆も正しい.

例 **2.4** (i) $I \subset S$ が素イデアル, $f \notin P, r \geq 1$ であっても,

$$\text{arith-deg}_{r-1}(I + (f)) > \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(I)$$

となる例は多い. このとき f は, $(S/I)_P$ が Cohen–Macaulay でないような斉次素イデアル P に含まれる.

非常に簡単な例を挙げると, $X \subset \mathbf{P}^n$ を Cohen–Macaulay でない特異点 p を持つ既約かつ被約な曲面とした時, $\mathbf{P}^r$ の超曲面 F が X と正規交差しても, F が p を含めば $X \bigcap F$ は p を必ず embedded component に持ってしまい, $X \bigcap F$ の 0-次の arithmetic degree は 0 ではない (p における重複度が現れる). しかし, X 自身の 1-次の arithmetic degree は 0 である.

(ii) $S = k[x, y, z]$, $I = (x) \bigcap (x^2, y)$ とおく. 言うまでもなく S/I は等次元ではなく, よって Cohen–Macaulay でもないが, $(S/I)_{>1} \simeq k[y, z]$ なので, 系 2.2 から, $f \in S$ が S/I-正則ならば常に,

$$\text{arith-deg}_{r-1}(I + (f)) = \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(I)$$

が全ての r について成立. つまり, (i) での現象の “逆” は一般には (特に, 等次元でない場合には) 正しくない.

(iii) 上の (ii) のような状況で, 1 次元 (Krull 次元では 2 次元) の既約成分が, いわゆる “double line” ならば等号は成立しない. $S = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ とし, 斉次イデアル $Q = (x_0x_3 - x_1x_2, x_0^2, x_1^2, x_0x_1)$ を考える. Q は (x_0, x_1)-準素イデアルであり, “double line” の定義イデアルである. $I = Q \cap (x_0^2, x_1, x_2)$ とおく. I は 埋込成分であるような閉点を持った double line の定義イデアル である. *Macaulay* でも計算できるが, $\text{codim}(\text{Ext}_S^3(S/I, S)) = 3$ かつ $\deg \text{Ext}_S^3(S/I, S) = 1$ である. よって, $\text{arith-deg}_0(I) = 1$ (埋込成分の閉点の寄与がカウントされている). しかし, さらに計算を進めると $\text{Ass}(\text{Ext}_S^3(S/I, S)) \ni (x_0, x_1, x_2, x_3)$ (こ

れを見る為には $\mathrm{Ext}_S^4(\mathrm{Ext}_S^3(S/I,S),S))$ を計算して, 命題 1.2 を用いると良い). よって, 系 2.2 より, $f \in \mathfrak{m} \setminus (x_0, x_1, x_2)$ なる全ての斉次元 f に対し,

$$\text{arith-deg}_{-1}(I+(f)) > \deg(f)\cdot \text{arith-deg}_0(I)$$

であって, 等号は成立しない. これは, $(S/I)_{>1} = S/Q$ の depth が 1 である事からも分かる.

<u>定理 2.1 の証明の概略.</u> まず,

$$\begin{aligned} &\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) - \deg(f)\cdot \text{arith-deg}_r(M) \\ &= \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_{\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S)}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_M) \end{aligned}$$

であるが, 命題 1.2 に注意しながら Ext の長完全列を繰り返し扱う事で, 割と機械的に示せるので省略する.

次に, $[0:f]_{\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S)}$ の P における length multiplicity が, $H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P)$ の S_P 加群としての長さに等しい事をいう (この証明を通じて, P は $\dim S/P = r$ なる斉次素イデアルとする). 命題 1.2 から分かるように, $\dim[0:f]_{\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S)} \le r$ であるから, これの P に於ける length multiplicity は, $[0:f]_{\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S)} \otimes S_P$ の S_P 加群としての長さに等しい. ところが, 局所双対性より,

$$\mathrm{Ext}_S^{n-r}(M,S)\otimes S_P \simeq \mathrm{Ext}_{S_P}^{n-r}(M_P,S_P) \simeq (H_P^1(M_P))^\vee.$$

ここで $(-)^\vee$ は, 局所環 S_P の Matlis dual である. よって, 主張は Matlis dual の基本的な性質から従う.

次に, $H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P) \simeq H_P^1((M_{>r+1})_P)/fH_P^1((M_{>r+1})_P)$ であるが, 実はもっと強く $M_P = (M_{>r+1})_P$ が言える. 実際,

$$0 \to M_{\le r+1} \to M \to M_{>r+1} \to 0 \qquad \text{(完全)}$$

及び, $(M_{\le r+1})_P = 0$ から従う.

最後に,

$$\begin{aligned} &\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) - \deg(f)\cdot \text{arith-deg}_r(M) \\ &= \text{arith-deg}_{r-1}(M_{>r+1}/fM_{>r+1}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_M) \end{aligned}$$

を証明する. これまでに証明した事から, $M_{>r+1}/fM_{>r+1}$ の P に於ける length multiplicity が, N/fN の S_P 加群としての長さに等しい事をいえば充分である (ただし, $N := H_P^1((M_{>r+1})_P)$ と置いた). ここで N 自身 S_P 加群として長さ有限であるから, N/fN の長さは, $[0:f]_N$ の長さに一致する事に注意. $(M_{>r+1})_P \neq 0$ でさえあれば, これの S_P 加群としての depth は必ず 1 以上であるから,

$$0 \to (M_{>r+1})_P \to (M_{>r+1})_P \to (M_{>r+1}/fM_{>r+1})_P \to 0$$

に $H_P^*(-)$ を施せば, 求める結論が得られる. □

$\mathrm{Ass}(M)$ と $\mathrm{Ass}(M/fM)$ との関連も, $\mathrm{Ext}^*_S(M,S)$ からの情報で, 見ることが出来る. 一般に f を M-正則 ($M/H^0_m(M)$ 正則でも良い) であるような斉次元とすると,

$$\mathrm{Ass}(M/fM) \supset \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}(M)} \mathrm{Min}(S/P' + (f))$$

が成り立つ事に注意. 我々は, いつ等号が成立するかを, 具体的に知ることが出来る.

<u>定理</u> **2.5** f を M-正則であるような斉次元とする.

$$\mathrm{Ass}(M/fM) = \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}(M)} \mathrm{Min}(S/P' + (f))$$

となる為の必要充分条件は, f が, 全ての $0 \le i \le n$ に対し $\mathrm{Ext}^i_S(M,S)$ の 高さ $i+1$ の極小素因子に含まれない事である.

実は,

$$\mathrm{Ass}(M/fM) \setminus \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}(M)} \mathrm{Min}(S/P' + (f))$$

は, $\mathrm{Ext}^i_S(M,S)$ の高さ $i+1$ の極小素因子であって, f を含むもの全体からなる集合である.

上の定理の後者の条件を, 系 2.2 の (iii) ふうに読み換えると, f が, $\dim S/P = r$, $(M_{\le r+1})_P = 0$, $(M_{>r+1})_P \ne 0$ なおかつ $\mathrm{depth}_{S_P}(M_{>r+1})_P = 1$ であるような斉次素イデアル P に含まれないという事である.

次の結果 (の後半部分) は, H. Flenner からの "private communication" という形で, [6] で既に紹介されていた (彼の有名な "local Bertini" の論文に登場する手法からも証明できるらしい).

<u>命題</u> **2.6** f を $M/H^0_m(M)$ -正則であるような斉次元とする.

$$\mathrm{Ass}(M/fM) \setminus \{m\} \subset \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}(M)} \mathrm{Min}(S/P' + (f)) \qquad (**)$$

となる為の必要充分条件は, f が 全ての $0 \le i \le n-1$ に対し $\mathrm{Ext}^i_S(M,S)$ の 高さ $i+1$ の極小素因子に含まれない事である. 特に, 一般の f に対しては $(**)$ が成立.

証明は 2.5, 2.6 とも, 命題 1.2 を機械的に用いるだけであり, 難しくない.

上の結果は S を, 標準加群を持つ Cohen–Macaulay 局所環としても, 同様な事が成り立つ.

<u>例</u> **2.7** (i) $S = k[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$, $I := (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4)$ と置く. *Macaulay* でも計算できるが, $\mathrm{Ext}^2_S(S/I,S)$ は高さ 3 の素因子を持たず, $\mathrm{Ext}^4_S(S/I,S) = 0$, かつ $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\} = \mathrm{Ass}(\mathrm{Ext}^3_S(S/I,S))$ である. よって S/I に関して, 定理 2.5 の等号が成立する為の必要充分条件は, f が (x_1,x_2,x_3,x_4) に含まれない事である. (幾何的に言えば, $X := \mathrm{Proj}(S/I)$ は, $\mathbf{P}^4$ の中の, 一点 p ((x_1,x_2,x_3,x_4) に対応した閉点) で交わる二つの平面である. $\mathbf{P}^4$ の超曲面 F は, たとえ X の各既約成分 (二つの平面) と正規交差しても, $p \in F$ ならば, p は, $X \cap F$ の埋込成分である.

(ii) 例 2.4 (iii) に於いて, $\mathrm{Ext}^3_S(S/I,S)$ は, (x_0,x_1,x_2,x_3) を素因子に持つが, これは 極小素因子ではないので, 定理 2.5 に於ける等号は常に成立する.

参考文献

[1] D. Bayer and D. Mumford, What can be computed in algebraic geometry?, Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (ed. D. Eisenbud and L. Robbiano), pp. 1-48, Cambridge University Press 1993.

[2] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry, Springer–Verlag, (1995).

[3] D. Eisenbud, C. Huneke and W. Vasconcelos, Direct methods for primary decomposition, Invent. Math. **110** (1992), 207-235.

[4] T. Fujita, On L-dimension of coherent sheaves & Corrections, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, **28** (1981), 215–236 & **29** (1982), 719–720.

[5] R. Hartshorne, Connectedness of Hilbert scheme, Publications Math. I.H.E.S. **29** (1966), 261–304.

[6] C. Miyazaki and W. Vogel, Towards a theory of arithmetic degrees, preprint

[7] C. Miyazaki, W. Vogel and K. Yanagawa, Associated primes and arithmetic degrees, in preparation.

[8] B. Sturmfels, N.V. Trung and W. Vogel, Bounds on degrees of projective schemes, Math. Ann. **302** (1995), 417-432.

[9] W. Vasconcelos, The reduction number of an algebra, to appear in Compositio Math.

有向グラフに付随した環について

衛藤　和文

早稲田大学　教育学部

0　序

昨年の almost complete intersection monomial curve に関する講演 ([3]) において、その生成系を与えるような $\mathbf{Z}^r$ の元 $v_1, \cdots, v_r$ (正確にいえば、$F(v_1), \cdots, F(v_r)$ が、そのイデアルの生成系をなす) に関する条件の中で、それらに付随する有向グラフの条件が含まれていました。そこで、この $v_1, \cdots, v_r$ と有向グラフの対応、もしくは、$V = \langle v_1, \cdots, v_r \rangle$ と有向グラフの対応について、どのようなことがわかるかを調べてみたいと思ったのが、今回の講演のきっかけです。その結論としてえたのは、ある条件の下で、環 $A/I(V)$ の Macaulay type (もちろん、$A/I(V)$ が Cohen-Macaulay 環になるときに) が、有向グラフの Hamilton cycle の個数をおさえている、という結果です。このことについて報告します。

1　準備

定義 2 つの集合の組 G が有向グラフであるとは、

- G が有限集合 $Ver(G)$ をもつ.
  $Ver(G)$ の元を G の頂点 (vertex) という.
- もう一方の集合は、$Ver(G)$ の異なる 2 つの元の順序付きの組からなる. これを G の辺 (edge) という.
  $i, j \in Ver(G)$ に対し、i から j への辺を $i \to j$ であらわす.

$i, j \in Ver(G)$ に対し、i から j へ道 (path) があるとは、

異なる頂点 $i = i_0, i_1, \cdots, i_n \in Ver(G)$ と
辺 $i_{l-1} \to i_l$ $(l = 1, \cdots, n)$ と $i_n \to j$
が存在することである。

サイクル (cycle) とは、ある点 i から i 自身への path である。すべての G の点を通るようなサイクルをハミルトンサイクル (Hamilton cycle) という。

定義 G を有向グラフとし、$Ver(G) = \{1, 2, \cdots, r\}$ とする。G に対して、$\mathbf{Z}$ 係数の $r \times r$ 行列 $M = (m_{ij})$ を次のように定義する。

$$j \neq i \text{ のとき} \qquad m_{ij} = \begin{cases} (\text{負の数}) & \text{辺 } i \to j \text{ が存在するとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$m_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} m_{ij}$$

$v_1, \cdots, v_r$ を M の列ベクトルとする。そのとき明らかに、$\sigma_i(v_i) \geq 0$ (σ_i は i 番目の成分をあらわす)、$v_1 + v_2 + \cdots + v_r = 0$ である。

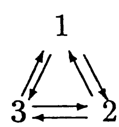
$$V(G) = \langle v_1, \cdots, v_r \rangle \subset \mathbf{Z}^r \text{ とおく。}$$

最後に $\mathbf{Z}^r$ の部分加群 V に対し、多項式環 $A = k[X_1, \cdots, X_r]$ のイデアル $I(V)$ を定義する (但し k は体)。

定義 $\mathbf{Z}^r$ の元 v に対し、多項式 $F(v)$ を

$$F(v) = \prod_{\sigma_i(v) < 0} X_i^{-\sigma_i(v)} - \prod_{\sigma_i(v) > 0} X_i^{\sigma_i(v)}$$

と定義し、$\mathbf{Z}^r$ の部分加群 V に対し、すべての $F(v)$ ($v \in V$) で生成される A のイデアルを $I(V)$ とおく。

例 G を  とする。

ベクトル v_1, v_2, v_3 を $(\sigma_i(v_j)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ で定義する。

このとき、

$$\begin{aligned} I(V(G)) &= (F(v_1), F(v_2), F(v_3)) \\ &= (X_2X_3 - X_1^2, X_1X_3 - X_2^2, X_1X_2 - X_3^2) \end{aligned}$$

となる (一般に、イデアル $I(V(G))$ が $F(v_1), F(v_2), \cdots, F(v_r)$ で生成されるとは限らない)。

ゆえに、環 $A/I(V(G))$ は、次元 1 の Cohen-Macaulay 環で、その type は 2 である。

まず、基本的な性質として、

補題 1.1 ([2, Proposition 2.1]) グラフ G について次は同値。

(1) *rank*$V(G) = r - 1$ かつ $V(G)$ は *positive,* すなわち、$A/I(V(G))$ は *positively graded ring*

(2) $Ver(G)$ の任意の *proper set* S に対して、S に含まれている頂点から、S に含まれていない頂点への *edge* が存在する

(3) G は *strongly connected,* すなわち、任意の 2 つの頂点に対して、それらをつなぐような (*directed*) *path* が存在する

(4) 任意の *edge* について、それを含むような *cycle* が存在する

この補題で注意しなければならないのは、G が strongly connected でないときは、Hamilton cycle が存在しないという点である。しかも、G が strongly connected のときは、$V(G)$ が positive, rank $= r - 1$ なので、環 $A/I(V(G))$ は自動的に、positively graded Cohen-Macaulay 環になってしまう。証明は、(1) と (2) の同値性が本質的である。

2 主定理

この節では、次の定理について、その証明の概略と、この定理に関係する例を与える。

定理 2.1 *G を strongly connected な有向グラフとする。このとき、G の Hamilton cycle の個数は、Cohen-Macaulay 環 $A/I(V(G))$ の Macaulay type に等しいか小さい。*

(証明の概略) $V = V(G) = \langle v_1, \cdots, v_r \rangle$ とする。但し、$v_1, \cdots, v_r$ は前の節で G に対して定義された $\mathbf{Z}^r$ の元。このとき、次の同型が存在.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}_A^{r-1}(A/I(V), A) &\cong \mathrm{Hom}_A(A/I(V), A/(F(v_2), \cdots, F(v_r)) \\
&\cong (F(v_2), \cdots, F(v_r)) : I(V)/(F(v_2), \cdots, F(v_r)) \\
&\cong (F(v_2), \cdots, F(v_r)) : (F(v_1))/(F(v_2), \cdots, F(v_r))
\end{aligned}$$

注意しなければいけないのは、最後の同型で、これは $I(V) = (F(v_1), \cdots, F(v_r))$ でなくても成り立ってしまう。

次に、最後にあらわれた加群の生成系は次の条件をみたす単項式 M_1 の自然な像からなる.

$$M_1 F(v_1) + M_{\tau(2)} F(v_{\tau(2)}) + \cdots + M_{\tau(r)} F(v_{\tau(r)}) = 0,$$

但し、$\tau \in S(r)$ (r 次対称群), $\tau(1) = 1$,

$$M_{\tau(i)} F_+(v_{\tau(i)}) = M_{\tau(i+1)} F_-(v_{\tau(i+1)}) \quad i = 1, \cdots, r-1,$$
$$M_1 F_-(v_1) = M_{\tau(r)} F_+(v_{\tau(r)}),$$
$$GCD(M_1, \cdots, M_r) = 1.$$

特に、その像が minimal generating system の一部となるような単項式 M_1 と $\tau \in S(r)$ が対応している。

そこで、この τ に関して、G の部分グラフ G_τ を次のように定義する：$v_1, \cdots, v_r$ を

$$v_1, v_{\tau(2)}, \cdots, v_{\tau(r)}, v_1, \cdots, v_{\tau(r)}$$

と並べる。j を固定して考える。2 番目にあらわれる v_j に関して、その v_j より前にある i (すなわち v_i が v_j の前にある) で、$\sigma_i(v_j) < 0$ となるものの中で、その v_j に一番近い v_i を選ぶ。このとき、辺 $i \to j$ を G_τ に入れる。その操作を各 j について行う。

τ すなわち M_1 について、部分グラフ G_τ が定義できたので、今度は、$\overline{M_1}$ (M_1 の $(F(v_2), \cdots, F(v_r)) : (F(v_1))/\sim$ における像) に対して、部分グラフを定義する。M_1 を $\bmod\ (F(v_2), \cdots, F(v_r))$ で動かして、それぞれの単項式に対応する τ を求め、G_τ を考えて、$\bigcup G_\tau$ を $\overline{M_1}$ に対応させる。

これによって、$A/I(V)$ の Macaulay type と同じもしくはそれ以下の個数の G の部分グラフの集合をえたことになる。(実は、$A/I(V)$ の最小生成系から G の部分グラフの集合への対応は 1 対 1 対応でないことが、[4] で示されている)

示すべきことは、 Hamilton cycle がその集合の中に含まれることであるが、これは容易に示される。 (証明終)

次の例は、Macaulay type と Hamilton cycle の個数が一致する例として知られている。

例　G を次のようなグラフとする。

$$
\begin{aligned}
&Ver(G) = \{1, 2, \cdots, r\} \quad (r \geq 3) \\
&\text{辺は}\ i \to i+1 \quad (i = 1, \cdots, r-1), \\
&\qquad i \to i+2 \quad (i = 1, \cdots, r-2), \\
&\qquad (r-1) \to 1,\ r \to 1,\ r \to 2.
\end{aligned}
$$

このとき、Hamilton cycle の個数は、r が奇数のときは 2、偶数のときは 1 である。

さらに奇数のときは、$I(V(G))$ は almost complete intersection である。偶数のときは、$\mu(I(V(G))) = r+1$ の Gorenstein イデアルである。

例　一般には、Macaulay type の方が、Hamilton cycle の個数より大きい。例えば、その対応するベクトルが、

$$
(\sigma_i(v_j)) = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}
$$

をみたすグラフ G を考える。このとき、G の Hamilton cycle の個数は 4 である。一方、$A/I(V(G))$ の Macaulay type は 5 となっている。実際、各 $(F(v_2), \cdots, F(v_r)) : (F(v_1))/(F(v_2), \cdots, F(v_r))$ の最小生成系に対応している G の部分グラフは、4 つの Hamiton cycle と部分グラフ

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dr] & \\
3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 5 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 3 \\
 & 4 \arrow[ur] & & 6 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

である。

参考文献

[1] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge University Press, 1993. Cambridge studies in adv. math. 39.

[2] K. Eto. Monoid rings associated with digraphs. (preprint).

[3] K. Eto. Almost complete intersection monomial curve について. In 第 16 回環論シンポジウム報告集, pages 111–118, 1995.

[4] K. Eto. 有向グラフに付随した環に関する注意. 早稲田大学教育学部学術研究数学編第 44 号, 1996. (to appear).

[5] F. Harary. *Graph theory.* Addison-Wesley, 1972.

2次元コーエン・マコーレー局所環の種数0のイデアルについて

横浜国立大学教育学部　　大石　彰

(R, m, k) が2次元コーエン・マコーレー局所環とする．簡単のため，剰余体kは無限体であるとする．Rのm－準素イデアルIに対して，$R(I)=\oplus_{n\geq 0} I^n$をIのリース環，$\pi: X=\mathrm{Proj}(R(I))\to \mathrm{Spec}(R)$をIを中心とするブロー・アップとして，

$$g(I)=\mathrm{length}(H^1(X, O_X))$$

をIの種数と言う（[2]）．ここでは次のことを問題とする．

問題．Iが$g(I)=0$を満たすとき，Iの数値不変量（例えばIの重複度$e(I)$）やIの接錐$G(I)=\oplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$などについて何が言えるか．特に，$G(I)$や一般に$G(I^n)$などがコーエン・マコーレー環またはゴレンスタイン環になるのはどのような場合か．

まず，$g(I)=0$となるイデアルの典型的な例を挙げよう．m－準素イデアルIは，$(x, y)I=I^2$となるx，y∈Iが取れるときに，安定（stable）であると言われる．Iが安定であるための同値条件として，次の二つものが知られている：
IのΔ－種数$g_{\Delta}(I) := e(I)+2\,\mathrm{length}(R/I)-\mathrm{length}(R/I^2)=0$；
Iの切断種数$g_s(I) := e_1(I)-e(I)+\mathrm{length}(R/I)=0$．
ここで，Iのヒルベルト・サミュエル関数$\mathrm{length}(R/I^n)$に対して，ある整数e_0，e_1，e_2が存在して，nが十分大きいときには，

$$\mathrm{length}(R/I^n)=e_0 n(n+1)/2-e_1 n+e_2$$

と書けることを思い出すと，

$$e_0=e(I),\ e_1=e_1(I),\ e_2=g(I)$$

が成り立っている．Iが安定ならば，$g(I)=0$で，$G(I)$はコーエン・マコーレー環である（[7]）．逆に，$g(I)=0$かつ$G(I)$がコーエン・マコーレー環ならば，Iが安定であることも知られている（[4]）．例えば，Rが正則局所環，または有理特異点のとき，任意の整閉m－準素イデアルは安定である．安定イデアルでないような$g(I)=0$なるイデアルの例としては，k[[X, Y]]のイデアル(X^4, X^3Y, XY^3, Y^4)を考えれば良い．

$g(I)=0$なるイデアルを調べる上で基本的となるのは次の事実である：

定理（成田，1963）．$g(I)=0$であるためには，ある（または十分大きな）自然数nに対して，I^nが安定であることが必要十分である．

すると，どのような自然数nに対してI^nが安定になるかということが問題となる．$\tilde{I}$をIのラトリフ・ラッシュ閉包$\bigcup_{n\geq 0}(I^{n+1}:I^n)$とする．$\tilde{I}$は十分大きな自然数$n$に対して$J^n=I^n$が成り立つようなイデアル$J$の中で最大なものである．コホモロジーを使えば，$\tilde{I}=H^0(X, IO_X)$と書くことが出来る．$\tilde{I}$は$I$上整なイデアルである．

定理１．次の条件は同値である：

（１）Iが安定である．

（２）$g(I)=0$かつ$\tilde{I}=I$である．

（３）$g(I)=0$かつ任意の自然数nに対して$(I^n)^{\sim}=I^n$である．

（４）$g(I)=0$かつ$\mathrm{depth}(G(I))\geq 1$である．

（５）$g(I)=0$かつ$G(I)$がコーエン・マコーレー環である．

［証明］（１）⇒（５）は既に述べた．（５）⇒（４），（３）⇒（２）は明らかである．また，$\mathrm{depth}(G(I))\geq 1$であるためには，任意の自然数$n$に対して$(I^n)^{\sim}=I^n$が成り立つことが必要十分であることが知られているから，（３）と（４）は同値である．従って，あとは（２）⇒（１）を示せば良い．これは次のことから従う：

補題．$\tilde{I}=I$ならば，$g_{\Delta}(I)\leq g(I)$が成り立つ．

［証明］$J=(x, y)$をIの極小還元とすると，Sally[6] により，$(xy)^{r-1}$倍写像$I^2/(x, y)I\to I^{2r}/(x^r, y^r)I^r)$の核は$J\tilde{I}/JI$に含まれ，これは仮定により零である．従って，

$$I^2/(x, y)I\to I^{2r}/(x^r, y^r)I^r$$

が単射であることから，写像

$$I^2/JI\to \lim_{n\to\infty} I^{2r}/(x^r, y^r)I^r=H^1(X, O_X)$$

が単射である．故に

$$g_{\Delta}(I)=\mathrm{length}(I^2/JI)\leq \mathrm{length}(H^1(X, O_X))=g(I).$$

が成り立つ．

定理２．$g(I)=0$とする．このとき，

（１）不等式$e(I)\leq\{r(R)+1\}\,\mathrm{length}(R/I)$が成り立つ．

（２）$\mathrm{Proj}(G(I))$，$\mathrm{Proj}(R(I))$，および$\mathrm{Proj}(F(I))$はコーエン・マコーレー・スキームである．但し，$F(I)=\oplus_{n\geq 0} I^n/mI^n$（$I$のファイバー錐）とおく．

(3) $H(n)=\mathrm{length}(R/I^n)$, $h(t)$ を $H(t)$ に伴う多項式とすると，任意の自然数 n に対して，$H(n)\geqq h(n)$ が成り立つ．

(4) 自然数 n に対して次の条件は同値である：

(a) I^n が安定である．

(b) $G(I^n)$ がコーエン・マコーレー環である．

(c) $(I^n)^\sim=I^n$ である．

(d) $H(n)=h(n)$ が成り立つ．

[証明] (1) $J=(x, y)$ を I の極小還元とする．$g(I)=0$ とすると，成田の定理により，ある I^n が安定であるから，

$$I^{2n}=(x^n, y^n)I^n\subset(x^n, y^n)$$

が成り立つ．これから，

$$I^2=I^{2n-(n-1)2}\subset(x, y)=J$$

が成り立つから

$$I/J\subset(J:I)/I\cong \mathrm{Hom}_{R/J}(R/I, R/J),$$

従って，

$$\begin{aligned}\mathrm{length}(I/J)&\leqq\mathrm{length}(\mathrm{Hom}_{R/J}(R/I, R/J))\\&\leqq\mathrm{length}(R/I)\ r(R/J)=\mathrm{length}(R/I)\ r(R),\end{aligned}$$

$\mathrm{length}(I/J)=\mathrm{length}(R/J)-\mathrm{length}(R/I)=e(I)-\mathrm{length}(R/I)$

より求める不等式を得る．

(2) I^n が安定ならば，$R(I^n)$ がコーエン・マコーレー環であることから

$$\mathrm{Proj}(R(I^n))\cong\mathrm{Proj}(R(I))$$

はコーエン・マコーレー・スキームで，従って，$\mathrm{Proj}(G(I))$ もコーエン・マコーレー・スキームである．$\mathrm{Proj}(F(I))$ がコーエン・マコーレー・スキームであることも同様にして示される．

(3)，(4) 仮定から $e_2=0$ であることから

$$\begin{aligned}H(n)-h(n)&=\mathrm{length}(R/I^n)-\{e_0n(n+1)/2-e_1n+e_2\}\\&=\mathrm{length}(R/I^n)-e_0n(n+1)/2+e_1n\\&=\mathrm{length}(R/I^n)-e(I^n)+e_1(I^n)\\&=g_s(I^n)\geqq 0\end{aligned}$$

が成り立ち，$H(n)=h(n)$ であるためには，$g_s(I^n)$ であること，即ち，I^n が安定であることが必要十分である（[3]）．(4) の他の同値条件は定理1から従う．

定理3．R がゴレンスタイン局所環で，$g(I)=0$ とする．このとき，

(1) 不等式 $e(I)\leqq 2\,\mathrm{length}(R/I)$ が成り立つ．

(2) 等式 $e(I)=2\,\mathrm{length}(R/I)$ が成り立てば，I は安定で $r(R/I)=\mu(I)-2$ が成り立つ．特に，R/I がゴレンスタイン環であるためには，$\mu(I)=3$ であることが必要十分である．

（3）$G(I)$ がゴレンスタイン環であるためには，I がパラメータ・イデアルであるか $e(I)=2\,\mathrm{length}(R/I)$ であることが必要十分である．このとき，任意の自然数 n に対して $G(I^n)$ がゴレンスタイン環である．

［証明］（1）は定理2の（1）から従う．

（2）$2\,\mathrm{length}(R/I^2) \geqq e(I^2)=4e(I)$ より $\mathrm{length}(R/I) \geqq 2e(I)$ で，

$$\begin{aligned} g_{\Delta}(I) &= e(I)+2\,\mathrm{length}(R/I)-\mathrm{length}(R/I^2) \\ &\leqq e(I)+2\,\mathrm{length}(R/I)-2e(I) \\ &= 2\,\mathrm{length}(R/I)-e(I)=0. \end{aligned}$$

従って，$g_{\Delta}(I)=0$ となるから，I は安定である．後半の主張の証明は省略する．

（3）いずれの条件の下でも I は安定であるから，主張は［4］から従う．

以上の定理は，$g(I)=0$ なる m－準素イデアル I に関するものであった．R が解析的不分岐な整閉局所環で，任意の整閉 m－準素イデアル I が安定かつ任意の自然数 n に対して I^n は整閉であるとき，R が擬有理局所環であると言う．例えば正則局所環は擬有理局所環である．R が擬有理局所環のとき，R の m－準素イデアル I に対して，上の考察を I の整閉包 $\bar{I}$ に適用することにより，I についての幾つかの性質を導くことが出来る．ここでは成り立つ事実を述べるだけにして，詳しい説明は省略する．

定理4．R が2次元擬有理局所環で正則局所環でないとする．このとき，

（1）不等式 $e(I) \leqq e(R)\,\mathrm{length}(R/I)$ が成り立つ．

（2）R が有理二重点とすると，不等式 $e(I) \leqq 2\,\mathrm{length}(R/I)$ が成り立つ．更に，I がパラメータ・イデアルでないとき，$G(I)$ がゴレンスタイン環であるためには，等式 $e(I)=2\,\mathrm{length}(R/I)$ が成り立つことが必要十分で，このとき I は安定な整閉イデアルで，任意の自然数 n に対して $G(I^n)$ がゴレンスタイン環である．

定理5．R が2次元正則局所環とすると，一般に不等式 $e(I) \leqq 2\,\mathrm{length}(R/I)-1$ が成り立つ．等式 $e(I)=2\,\mathrm{length}(R/I)-1$ が成り立てば，$G(I)$ はコーエン・マコーレー環で，任意の自然数 n に対して I^n は整閉である．$G(I)$ がゴレンスタイン環であるためには，I がパラメータ・イデアルであることが必要十分である．

参考文献

[1] W. Heinzer, B. Johnston, D. Lantz, and K. Shah, The Ratliff-Rush ideals in a noetherian ring: A survey, Lecture Notes in Pure Appl. Math. Vol. 149 (1993), 149-159.

[2] A. Ooishi, Genera and arithmetic genera of commutative rings, Hiroshima Math. J. 17 (1987), 47-66.

[3] A. Ooishi, Δ-genera and sectional genera of commutative rings, Hiroshima Math. J. 17 (1987), 361-372.

[4] A. Ooishi, Stable ideals in Gorenstein local rings, J. Pure Appl. Algebra 69 (1990), 185-191.

[5] A. Ooishi, Tangent cones at curve and surface singularities, J. Pure Appl. Algebra 95 (1994), 189-201.

[6] J. D. Sally, Ideals whose Hilbert function and Hilbert polynomial agree at n=1, J. Algebra 157 (1993), 534-547.

[7] G. Valla, On form rings which are Cohen-Macaulay, J. Algebra 58 (1979), 247-250.

Squarefree lexsegment ideals

日 比 孝 之
大阪大学大学院理学研究科数学教室

序．本稿は，Annetta Aramova, Jürgen Herzog との共同研究である．多項式環において，（斉次式，特に）単項式で生成されるイデアルがあったとき，その極小自由分解を構成し，ベッチ数列を計算することは，Hilbert, Macaulay の仕事に起源を有する伝統的な問題である．単項式イデアルの理論では，lexsegment および stable と呼ばれるイデアルの類が重要である．１９９０年，Eliahou と Kervaire [E-K] は stable イデアルの極小自由分解を具体的に構成することに成功した．更に，Gröbner 基底の理論と Eliahou-Kervaire 分解を使って，１９９３年，Bigatti [Big] と Hulett [Hul] は，それぞれ独立に，Hilbert 函数を固定したとき，ベッチ数列の上限は lexsegment イデアルで与えられることを示した．他方，いわゆる squarefree な単項式が生成するイデアルは，昨今，可換代数と組合せ論の両面から盛んに研究されている．本稿では，lexsegment および stable イデアルの squarefree 類似を考察し，squarefree lexsegment イデアルの組合せ論的側面として，単体的複体の facets の個数の上限について，幾つかの結果 [H-H] を述べるとともに，squarefree stable イデアルの 極小自由分解を具体的に構成する [A-H-H]．

§1. Upper bounds for the number of facets of a simplicial complex

Let $P = K[x_1, x_2, \ldots, x_v]$ denote the polynomial ring in v variables over a field K with the standard grading, i.e., each $\deg x_i = 1$ and write $K\{\Gamma\}$ for the quotient algebra $P/(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_v^2)$. We are interested in the dimensions of the annihilator ideals $0 :_{K\{\Gamma\}/I} m^j$ of $K\{\Gamma\}/I$, where m is the graded maximal ideal of $K\{\Gamma\}/I$. In particular, among all graded ideals I of $K\{\Gamma\}$ with a given Hilbert function, we determine the maximal dimension of the socles $0 :_{K\{\Gamma\}/I} m$ of $K\{\Gamma\}/I$. The graded ring $K\{\Gamma\}/I$ is studied in [A-H-H] when I is generated by (squarefree) monomials.

First, we recall some standard notation and terminology on graded rings and modules. When M is a $\mathbf{Z}$-graded module, where $\mathbf{Z}$ is the set of integers, we write M_i, $i \in \mathbf{Z}$, for the i-th graded component of M. Moreover, for every $a \in \mathbf{Z}$, we define $M(a)$ to be the $\mathbf{Z}$-graded module with graded components $M(a)_i = M_{a+i}$ for all $i \in \mathbf{Z}$. If M is a finitely generated $\mathbf{Z}$-graded module over the polynomial ring $P = K[x_1, x_2, \ldots, x_v]$, then the modules $\mathrm{Tor}_i^K(K, M)$ are finite-dimensional graded K-vector spaces. Then, we say that $\beta_{ij}(M) := \dim_K \mathrm{Tor}_i^K(K, M)_j$ is the (i,j)-th graded Betti number of M. Finally, when A is a graded ring over K and J is a graded ideal of A, we denote by $0 :_A J$ the annihilator of J in A.

Let $\binom{V}{q}$ denote the set of all squarefree monomials of degree $q \geq 1$ in the variables $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$. We write $\leq_{\mathrm{lex}}$ for the lexicographic order on $\binom{V}{q}$, i.e., if $S = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_q}$ and $T = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_q}$ are squarefree monomials belonging to $\binom{V}{q}$ with $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leq v$ and $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leq v$, then $S <_{\mathrm{lex}} T$ if $i_1 = j_1, \ldots, i_{k-1} = j_{k-1}$ and $i_k > j_k$ for some $1 \leq k \leq q$. A nonempty set $\mathcal{M} \subset \binom{V}{q}$ is called a *squarefree lexsegment set of degree q* if $T \in \mathcal{M}$, $S \in \binom{V}{q}$ and $T \leq_{\mathrm{lex}} S$ imply $S \in \mathcal{M}$. An ideal I of $K\{\Gamma\}$ generated by squarefree monomials is called a *squarefree lexsegment ideal* if, for every $1 \leq q \leq v$, $T \in I \cap \binom{V}{q}$, $S \in \binom{V}{q}$ and $T <_{\mathrm{lex}} S$ imply $S \in I$.

(1.1) THEOREM. (a) *Suppose that I is a graded ideal of $K\{\Gamma\}$ with $I_0 = I_1 = (0)$. Then, there exists a unique squarefree lexsegment ideal I^{lex} of $K\{\Gamma\}$ with the same Hilbert function as I.*

(b) *Let m be the graded maximal ideal of $K\{\Gamma\}$. Fix $j \geq 0$. Suppose that for every $i \geq 0$ we have*

$$\dim_K (I/m^j I)_i = \dim_K (I^{\mathrm{lex}}/m^j I^{\mathrm{lex}})_i.$$

Then for every $i \geq 0$ we have

$$\dim_K (I/m^{j+1} I)_i \leq \dim_K (I^{\mathrm{lex}}/m^{j+1} I^{\mathrm{lex}})_i.$$

(c) *Let $A = K\{\Gamma\}/I$ and $B = K\{\Gamma\}/I^{\mathrm{lex}}$. Fix $j \geq 0$. Suppose that for every $i \geq 0$ we have*

$$\dim_K (0 :_A m^j)_i = \dim_K (0 :_B m^j)_i.$$

Then for every $i \geq 0$ we have

$$\dim_K (0 :_A m^{j+1})_i \leq \dim_K (0 :_B m^{j+1})_i.$$

Proof. First, we choose any term order ρ for the monomials in the polynomial ring $P = K[x_1, x_2, \ldots, x_v]$ and we write $J \subset P$ for the preimage of I under the canonical epimorphism $P \to K\{\Gamma\}$. It is well known (e.g., [M–M], [B–H–V]) that P/J and $P/\mathrm{in}_\rho(J)$ have the same Hilbert function and that we have the inequality $\beta_{ij}(P/J) \le \beta_{ij}(P/\mathrm{in}_\rho(J))$ for every i and j.

We have the equalities $\beta_{1j}(P/J) = \dim_K(I/mI)_j$ if $j > 2$; $\beta_{12}(P/J) = \dim_K(I/mI)_2 - v$; and $\beta_{vj}(P/J) = \dim_K \mathrm{Soc}_{j-v}(P/J))$ for every $j > v$. Similar results hold for the ideal $\mathrm{in}_\rho(J) \subset P$ and its image I' in $K\{\Gamma\}$. Since $K\{\Gamma\}/I \simeq P/J$ and $K\{\Gamma\}/I' \simeq P/\mathrm{in}_\rho(J)$, it follows that $K\{\Gamma\}/I$ and $K\{\Gamma\}/I'$ have the same Hilbert function, and that $\dim_K(I/mI)_i \le \dim_k(I'/mI')_i$ and $\dim_K \mathrm{Soc}_i(K\{\Gamma\}/I) \le \dim_K \mathrm{Soc}_i(K\{\Gamma\}/I')$ for every i.

Thus, replacing I with I' and noting that I' is generated by squarefree monomials, we may assume from the beginning that I itself is generated by squarefree monomials.

Now since I is an ideal in $K\{\Gamma\}$ generated by squarefree monomials, the existence (and uniqueness) of I^{lex} is an immediate consequence of the Kruskal–Katona theorem which, stated in algebraic language, guarantees the following: Suppose that $L \subset K\{\Gamma\}$ be an ideal generated by squarefree monomials, all of the same degree, say q, and let L^{lex} denote the ideal generated by the squarefree lexsegment set $\mathcal{M}$ of degree q with $\sharp(\mathcal{M}) = \dim_K L_q$. Then $\dim_K L_{q+1} \ge \dim_K(L^{\mathrm{lex}})_{q+1}$. Thanks to this fact, given a squarefree ideal I of $K\{\Gamma\}$, if we consider for each i the vector space $V_i \subset K\{\Gamma\}$ spanned by the squarefree lexsegment set $\mathcal{M}_i$ of degree i with $\sharp(\mathcal{M}_i) = \dim_K I_i$, then $\bigoplus_{i\ge 0} V_i$ is an ideal of $K\{\Gamma\}$, which is just the desired I^{lex}. This construction also enables us to see that in each degree the number of generators of I^{lex} is greater than or equal to that of I, which proves the inequalities in (b) for $j = 0$.

Now suppose that $j > 0$. Our hypothesis implies that m^jI and m^jI^{lex} have the same Hilbert function. Therefore, since m^jI^{lex} is a lexsegment ideal, we conclude that $(m^jI)^{\mathrm{lex}} = m^jI^{\mathrm{lex}}$. Thus, as above, we deduce from the Kruskal–Katona theorem that in each degree the number of generators of m^jI^{lex} is greater than or equal to that of m^jI. In other words, we have $\dim_K(m^jI/m^{j+1}I) \le \dim_K(m^jI^{\mathrm{lex}}/m^{j+1}I^{\mathrm{lex}})$. This completes the proof of the inequalities in (b) as desired.

The inequalities (c) will turn out to be again a consequence of the Kruskal–Katona theorem, but not quite as straightforward. Let us first consider the canonical module ω_A of $A = K\{\Gamma\}/I$. We refer the reader to, e.g., [B–H] for basic facts about canonical modules. Since $K\{\Gamma\}$ is a Gorenstein ring (in fact, a complete intersection), we may represent ω_A, up to a shift, as a module of homomorphisms, that is to say, we have $\omega_A(-v) = \mathrm{Hom}_{K\{\Gamma\}}(A, K\{\Gamma\})$. The module $\mathrm{Hom}_{K\{\Gamma\}}(A, K\{\Gamma\})$ of homomorphisms may be naturally identified with the annihilator of I in $K\{\Gamma\}$. Hence, as a graded module, $\omega_A(-v)$ may be regarded as the ideal in $K\{\Gamma\}$ whose K-basis Ω is given by all squarefree monomials $T \in K\{\Gamma\}$ which annihilate I.

We claim that Ω is the set of all squarefree monomials $T^c \in K\{\Gamma\}$ such that $T \notin I$, where T^c is defined by $T^c = x_1 \cdots x_v/T$. In fact, suppose that $T \notin I$ and that $T^cS \ne 0$ for some squarefree monomial $S \in I$. Then, there exists a squarefree monomial U such that $T^cSU = x_1 \cdots x_v = TT^c$. Hence $T = SU$, and thus $T \in I$, a contradiction. Conversely, since $TT^c = x_1 \cdots x_v \neq 0$, if $T^cI = 0$ then $T \notin I$ as desired.

It follows from the identification of $\omega_A(-v)$ with the annihilator of I that $\dim_K(\omega_A)_i = \dim_K A_{-i}$ for every i. Thus, in particular, if $B = K\{\Gamma\}/I^{\text{lex}}$, then the ideals $\omega_A(-v)$ and $\omega_B(-v)$ have the same Hilbert function.

The reader verifies easily, by the above description of the canonical module, that $\omega_B(-v)$ is a squarefree lexsegment ideal of $K\{\Gamma\}$. In fact, if $\mathcal{M}$ is a squarefree lexsegment set of degree q and if $\mathcal{K}$ is the complement of $\mathcal{M}$ in the set of all squarefree monomials of degree q, then the set $\{T^c \,;\, T \in \mathcal{K}\}$ is again a squarefree lexsegment set of degree $v - q$. This observation is crucial, since it implies that $\omega_B(-v) = (\omega_A(-v))^{\text{lex}}$.

Finally we notice that, for every finite dimensional graded K-algebra C and for all integers $i, j \geq 0$ we have $\dim_K(0 :_C m^j)_i = \dim_K(\omega_C/m^j\omega_C)_{-i}$. Thus if we apply the arguments in the proof of (b) to the ideal $\omega_A(-v)$, then the assertion (c) follows immediately. Q. E. D.

By virtue of the Clements–Lindström theorem [C–L], the above Theorem (1.1) can be generalized to ideals of the quotient algebra $P/(x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_v^{a_v})$ with $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_v$.

We now discuss the combinatorial implication of the above result. Let Δ be a simplicial complex on the vertex set $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$, i.e., Δ is a collection of subsets of V such that (i) $\{x_i\} \in \Delta$ for every $1 \leq i \leq v$ and (ii) if $\sigma \in \Delta$ and $\tau \subset \sigma$ then $\tau \in \Delta$. Each element σ of Δ is called a *face* of Δ. A *facet* of Δ is a face σ of Δ such that $\tau \in \Delta$ and $\sigma \subset \tau$ imply $\sigma = \tau$. Let $f_i = f_i(\Delta)$ be the number of faces σ of Δ with $\sharp(\sigma) = i + 1$ and $n_i = n_i(\Delta)$ the number of facets σ of Δ with $\sharp(\sigma) = i + 1$. Here, $\sharp(\sigma)$ is the cardinality of a finite set σ. Note that $f_{-1} = 1$ and $n_{-1} = 0$. We say that $f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots)$ is the *f-vector* of Δ. Let $P = K[x_1, x_2, \ldots, x_v]$ denote the polynomial ring in v variables over a field K as before and define I_Δ to be the ideal of P generated by all squarefree monomials $x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_r}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq v$, with $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}\} \notin \Delta$. The quotient algebra P/I_Δ is called the *Stanley–Reisner ring* of Δ over K. We refer the reader to, e.g., [B–H], [H], [Hoc] and [Sta] for the detailed information about Stanley–Reisner rings.

Now, we write I'_Δ for the image of I_Δ in $K\{\Gamma\}$ and set $K\{\Delta\} = K\{\Gamma\}/I'_\Delta$. Then, the Hilbert function of $K\{\Delta\}$ coincide with the f-vector of Δ, i.e., $\dim_K(K\{\Delta\})_i = f_{i-1}(\Delta)$ for each $i \geq 0$. A simplicial complex Δ is called *lexsegment* if the ideal I'_Δ of $K\{\Gamma\}$ is a squarefree lexsegment ideal. Let Δ^{lex} denote the unique lexsegment simplicial complex with the same f-vector as Δ. Then, $(I'_\Delta)^{\text{lex}} = I'_{\Delta^{\text{lex}}}$.

Recall from, e.g., [H] or [B–H] that, given positive integers f and i, there exists a unique representation of f of the form

$$f = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{a_j}{j}$$

$$a_i > a_{i-1} > \cdots > a_j \geq j \geq 1.$$

We then define

$$\partial_{i-1}(f) = \binom{a_i}{i-1} + \binom{a_{i-1}}{i-2} + \cdots + \binom{a_j}{j-1}.$$

Also, we set $\partial_{i-1}(0) = 0$ for every $i \geq 1$. It is an excercise in combinatorics (see, e.g., [G–K]) to show that, if Δ is a lexsegment simplicial complex with $f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots)$, then $\partial_i(f_i) \leq f_{i-1}$ and $n_{i-1} = f_{i-1} - \partial_i(f_i)$ for each $i \geq 1$.

(1.2) COROLLARY. *Let Δ be a simplicial complex with f-vector $(f_0, f_1, \ldots)$. Then, for each $i \geq 1$, we have the inequality $n_{i-1} \leq f_{i-1} - \partial_i(f_i)$. Moreover, when Δ is lexsegment, the equality $n_{i-1} = f_{i-1} - \partial_i(f_i)$ holds for every $i \geq 1$.*

Proof. Since $\dim_K(0 :_{K\{\Delta\}} m)_i = n_{i-1}(\Delta)$, the inequality with $j = 0$ in (c) of Theorem (1.1) is equal to the required inequality $n_{i-1}(\Delta) \leq n_{i-1}(\Delta^{\mathrm{lex}})$ for every $i \geq 0$. Q. E. D.

The above inequalities are a part of a more general conjecture in [A–H–H] on graded Betti numbers of ideals of the form $(I_\Delta, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_v^2)$.

It would, of course, be of interest to find all possible sequences $(n_0, n_1, \ldots)$ arising from the simplicial complexes with a given f-vector.

We now introduce the concept of j-facets of simplicial complexes. We say that a face σ of a simplicial complex Δ is a *j-facet* if j is equal to the greatest integer $k \geq 0$ for which there exists a face τ of Δ such that $\sigma \bigcap \tau = \emptyset$, $\sigma \bigcup \tau \in \Delta$ and $\sharp(\tau) = k$. Thus, in particular, the 0-facets of Δ are just the facets of Δ. Let $n_i^j = n_i^j(\Delta)$ denote the number of j-facets σ of Δ with $\sharp(\sigma) = i + 1$. For example, if Δ be a simplicial complex with $f(\Delta) = (5, 7, 1)$, then $n_i^j(\Delta) = n_i^j(\Delta^{\mathrm{lex}})$ for every i and j. On the other hand, let Δ be a simplicial complex on the vertex set $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ with the facets $\{x_1, x_2\}$ and $\{x_3, x_4\}$. Then, the facets of Δ^{lex} are $\{x_1\}$, $\{x_2, x_4\}$ and $\{x_3, x_4\}$. Hence, $n_0^1(\Delta) = 4$, while $n_0^1(\Delta^{\mathrm{lex}}) = 3$. Hence, in general, the inequality $n_i^j(\Delta) \leq n_i^j(\Delta^{\mathrm{lex}})$ cannot be true if $j \geq 1$. However,

(1.3) COROLLARY. *Let Δ be a simplicial complex and Δ^{lex} the lexsegment simplicial complex with the same f-vector as Δ. Fix $j \geq 0$ and suppose that*

$$n_i^0(\Delta) + n_i^1(\Delta) + \cdots + n_i^{j-1}(\Delta) = n_i^0(\Delta^{\mathrm{lex}}) + n_i^1(\Delta^{\mathrm{lex}}) + \cdots + n_i^{j-1}(\Delta^{\mathrm{lex}})$$

for every $i \geq 0$. Then, we have the inequality

$$n_i^j(\Delta) \leq n_i^j(\Delta^{\mathrm{lex}})$$

for every $i \geq 0$.

Proof. Let $A = K\{\Gamma\}/I'_\Delta$ and $B = K\{\Gamma\}/I'_{\Delta^{\rm lex}} = K\{\Gamma\}/(I'_\Delta)^{\rm lex}$. Then $\dim_K(0 :_A m^j)_i = \sum_{k=0}^{j-1} n_{i-1}^k(\Delta)$ and $\dim_K(0 :_B m^j)_i = \sum_{k=0}^{j-1} n_{i-1}^k(\Delta^{\rm lex})$. Hence, we can apply (c) of the Theorem. Q. E. D.

Let Δ be a lexsegment simplicial complex with $f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots)$ and Δ' the subcomplex of Δ obtained by removing all facets of Δ. Then, Δ' is again lexsegment with $f(\Delta') = (\partial_1(f_1), \partial_2(f_2), \ldots)$ and, moreover, the facets of Δ' are just the 1-facets of Δ. Hence, it follows that $n_{i-1}^1(\Delta) = \partial_i(f_i) - \partial_i(\partial_{i+1}(f_{i+1}))$ for every i. In general, for every j and i, we have the formula

$$n_{i-1}^j(\Delta) = \partial_i(\partial_{i+1}(\cdots(\partial_{i+j-1}(f_{i+j-1}))\cdots)) - \partial_i(\partial_{i+1}(\cdots(\partial_{i+j}(f_{i+j}))\cdots)).$$

§2. Squarefree stable ideals and their resolutions

We now come to the definition of squarefree stable ideals. Let I be an ideal of $A = K[x_1, x_2, \ldots, x_v]$ which is generated by squarefree monomials. Then I is called a *squarefree stable ideal* if, for every squarefree monomial $T \in I$, we have

$$(x_jT)/x_{m(T)} \in I \text{ for each } j \leq m(T) \text{ such that } x_j \text{ does not divide } T.$$

The squarefree lexsegment ideals introduced in Section 1 are squarefree stable ideals. Hence all results of this section can be applied as well to squarefree lexsegment ideals.

The main goal of this section is to construct the explicit free resolutions of squarefree stable ideals, similar to the Eliahou–Kervaire resolutions of stable ideals. It will turn out that the new resolutions have the same formal structure as the classical Eliahou–Kervaire resolutions. In order to describe our resolutions we need to introduce some more notation.

Let as before $I \subset A$ be an ideal generated by squarefree monomials. We write $G(I)$ for the unique minimal set of monomial generators of I, and $Q(I)$ for the (finite) set of all squarefree monomials in I. In particular, $G(I) \subset Q(I)$. Suppose now that I is squarefree stable. Then it is immediately seen that, for every $S \in Q(I)$, there exists a unique pair (T, T^*) of squarefree monomials in A such that $T \in G(I)$, $S = TT^*$ and $\max(T) < \min(T^*)$. Thus, if we set $g(S) = T$, then we obtain a map $Q(I) \to G(I)$. Now, given $j \in \{1, 2, \ldots, v\}$ with $j \notin \mathrm{supp}(T)$ and $T \in Q(I)$, we set $T_j = g(x_jT)$ and $y(T)_j = (x_jT)/T_j$.

(2.1) THEOREM. *Suppose that $I \subset A$ is a squarefree stable ideal. Then A/I has a minimal multigraded free A-resolution (F, ∂) of the following form:*

(a) *Each F_i, $i > 0$, has a basis consisting of $f(\sigma; T)$ with $\sigma \subset \{1, 2, \ldots, v\}$ and $T \in G(I)$ such that $\sharp(\sigma) = i - 1$, $\max(\sigma) < m(T)$ and $\sigma \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset$;*

(b) *If* $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_v$ *denotes the canonical basis of* $\mathbf{Z}^v$, *then* $f(\sigma; T)$ *is homogeneous of multidegree* $\sum_{j\in\sigma} \epsilon_j + \sum_{j\in \mathrm{supp}(T)} \epsilon_j$;

(c) *The differentials of the resolution are given by*

$$\partial_1(f(\emptyset; T)) = T,$$

and by

$$\partial_i(f(\sigma;T)) = \sum_{j\in\sigma}(-1)^{\alpha(\sigma,j)}(-x_j f(\sigma - \{j\}; T) + y(T)_j f(\sigma - \{j\}; T_j))$$

for $i > 1$, *where we set* $\alpha(\sigma, j) = \sharp(\{i \in \sigma \ ; \ i < j\})$.

The proof of Theorem (2.1) is carried out in two steps. In the first step we determine cycles in the Koszul complex $K(x_1, x_2, \ldots, x_v; A/I)$ whose homology classes form a basis of the corresponding Koszul homology. This first step already gives us all the information to prove the assertions (a) and (b) as above. In the second step the differentials ∂_i of F are computed. This is done by using a technique developed in [A–H] which allows us to compute the differentials once the cycles (determined in step one) are known. This part of the proof is verbatim the same as that in [A–H] where the maps in the Eliahou–Kervaire resolutions were determined by this method. We omit its proof and refer the reader to [A–H] for the details.

We recall that $K_i(x_1, x_2, \ldots, x_v; A/I)$ is a free A/I-module with basis e_σ, $\sigma \subset \{1, 2, \ldots, v\}$, $\sharp(\sigma) = i$, where $e_\sigma = e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \ldots \wedge e_{j_i}$ for $\sigma = \{j_1, j_2, \ldots, j_i\}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_i$. The differential d of K is given by $d(e_\sigma) = \sum_{t\in\sigma}(-1)^{\alpha(\sigma,t)} x_t e_{\sigma-\{t\}}$.

We set $T' = T/x_{m(T)}$ for all $T \in G(I)$. It is further convenient to denote the image of a monomial $T \in A$ in any quotient ring of A again by T. We will keep this convention throughout the present paper.

(2.2) PROPOSITION. *Let* $I \subset A$ *be a squarefree stable ideal. Then, for every* $i > 0$, *a basis of the homology classes of* $H_i(x_1, x_2, \ldots, x_v; A/I)$ *is given by the homology classes of the cycles*

$$T' e_\sigma \wedge e_{m(T)}, \quad T \in G(I), \quad \sharp(\sigma) = i - 1, \quad \max(\sigma) < m(T), \quad \sigma \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset.$$

Proof. A minimal free A-resolution of A/I is multigraded; in other words, the differentials are homogeneous homomorphisms and, for each i, we have $F_i = \bigoplus_j A(-a_{ij})$ with $a_{ij} \in \mathbf{Z}^v$. Moreover, by virtue of [Hoc, Theorem (5.1)], all shifts a_{ij} are squarefree, i.e., $a_{ij} \in \mathbf{Z}^v$ is of the form $\sum_{t\in\tau} \epsilon_t$, where τ is a subset of $\{1, 2, \ldots, v\}$, and where, as before, $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_v$ is the canonical basis of $\mathbf{Z}^v$. Thus it follows that $H_i(x_1, x_2, \ldots, x_v) := H_i(x_1, x_2, \ldots, x_v; A/I)$ is multigraded k-vector space with $H_i(x_1, x_2, \ldots, x_v)_a = 0$ if $a \in \mathbf{Z}^v$ is not squarefree. Hence, if we want to compute the homology module $H_i(x_1, x_2, \ldots, x_v)$, it suffices to consider its squarefree multigraded components.

It is known (cf. [B–H, Corollary (1.6.13)]) that, for each $0 < j < v$, there exists an exact sequence whose graded part for each $a \in \mathbf{Z}^v$ yields the long exact sequence of vector spaces

$$\begin{aligned} \cdots \quad &\xrightarrow{x_j} H_i(x_{j+1}, \ldots, x_v)_a \longrightarrow H_i(x_j, \ldots, x_v)_a \longrightarrow H_{i-1}(x_{j+1}, \ldots, x_v)_{a-\epsilon_j} \\ &\xrightarrow{x_j} H_{i-1}(x_{j+1}, \ldots, x_v)_a \longrightarrow H_{i-1}(x_j, \ldots, x_v)_a \longrightarrow \cdots . \end{aligned}$$

We now show the following more precise result: For all $i > 0$, all $0 < j \leq v$ and all squarefree $a \in \mathbf{Z}^v$, $H_i(x_j, \ldots, x_v; A/I)_a$ is generated by the homology classes of the cycles

$$T' e_\sigma \wedge e_{m(T)}, \quad T \in G(I), \quad \sharp(\sigma) = i - 1$$

with

$$j \leq \min(\sigma), \quad \max(\sigma) < m(T), \quad \sigma \cap \operatorname{supp}(T) = \emptyset \quad \text{and} \quad \sigma \cup \operatorname{supp}(T) = a.$$

The proof is achieved by induction on $v - j$. The assertion is obvious for $j = v$. We now suppose that $j < v$. For such j, but $i = 1$, the assertion is again obvious. Hence we assume in addition that $i > 1$. We first claim that

$$H_{i-1}(x_{j+1}, \ldots, x_v)_{a-\epsilon_j} \xrightarrow{x_j} H_{i-1}(x_{j+1}, \ldots, x_v)_a$$

is the zero map. Since $a \in \mathbf{Z}^v$ is squarefree, the components of a are either 0 or 1. If the j-th component of a is 0, then $a - \epsilon_j$ has a negative component; hence $H_{i-1}(x_{j+1}, \ldots, x_v)_{a-\epsilon_j} = 0$. Thus we may assume the j-th component of a is 1. Then $a - \epsilon_j$ is squarefree and, by induction hypothesis, $H_{i-1}(x_{j+1}, \ldots, x_n)_{a-\epsilon_j}$ is generated by the homology classes of cycles of the form $T' e_\sigma \wedge e_{m(T)}$ with $j \notin \operatorname{supp}(T)$. Such an element is mapped to the homology class of $T' x_j e_\sigma \wedge e_{m(T)}$ in $H_{i-1}(x_{j+1}, \ldots, x_v)_a$. However, since I is stable, we have $T' x_j = 0$ as desired.

From these observations we deduce that we have short exact sequences

$$0 \longrightarrow H_i(x_{j+1}, \ldots, x_v)_a \longrightarrow H_i(x_j, \ldots, x_v)_a \longrightarrow H_{i-1}(x_{j+1}, \ldots, x_v)_{a-\epsilon_j} \longrightarrow 0$$

for all $i > 1$. The first map $H_i(x_{j+1}, \ldots, x_v)_a \to H_i(x_j, \ldots, x_v)_a$ of the above exact sequence is simply induced by the natural inclusion map of the corresponding Koszul complexes, while the second map $H_i(x_j, \ldots, x_v)_a \to H_{i-1}(x_{j+1}, \ldots, x_v)_{a-\epsilon_j}$ is a connecting homomorphism. Given the homology class of a cycle $z = T' e_\sigma \wedge e_{m(T)}$ in $H_{i-1}(x_{j+1}, \ldots, x_v)_{a-\epsilon_j}$, it is easy to see that, up to a sign, the homology class of the cycle $T' e_j \wedge e_\sigma \wedge e_{m(T)}$ in $H_i(x_j, \ldots, x_v)_a$ is mapped to $[z]$. This guarantees all of our assertions as required. Q. E. D.

Let us draw some immediate consequences of Proposition (2.2). Recall that the i-th Betti number of a graded A-module M is the nonnegative integer

$$\beta_i^A(M) = \dim_K \operatorname{Tor}_i^A(K, M)$$

and the *Poincaré series* of M is the formal power series

$$P_M^A(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^A(M)\lambda^i.$$

(2.3) COROLLARY. *Let $I \subset A$ be a squarefree stable ideal.*

(a) $\beta_i(I) = \sum_{T\in G(I)} \binom{m(T)-\deg(T)}{i}$ *for every $i \geq 0$. In particular, all the Betti numbers of I are independent of the base field k.*

(b) $P_I^A(\lambda) = \sum_{T\in G(I)}(1+\lambda)^{m(T)-\deg(T)}$.

(2.4) COROLLARY. *Let $I \subset A$ be a squarefree stable ideal. Then*

$$\operatorname{depth} A/I = v - \max\{m(T)\ ;\ T \in G(I)\} + \max\{\deg(T)\ ;\ T \in G(I)\} - 1.$$

In particular, if $v = \max\{m(T)\ ;\ T \in G(I)\}$ (which one may assume without loss of generality), then $\operatorname{depth} A/I = \max\{\deg(T)\ ;\ T \in G(I)\} - 1$.

(2.5) COROLLARY. *Let $I \subset A$ be a squarefree stable ideal and suppose that every element of $G(I)$ is of degree q. Then A/I has a q-linear resolution.*

In the following Corollary (2.6) we describe another important numerical invariant of graded modules for squarefree stable ideals. For a graded A-module M, let $t_i(M)$ denote the maximal integer $a \in \mathbf{Z}$ with $\operatorname{Tor}_i^A(K, M)_a \neq 0$. We say that

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{t_i(M) - i\ ;\ i \geq 0\}$$

is the *Castelnuovo–Mumford regularity* of M.

(2.6) COROLLARY. *Let $I \subset A$ be a squarefree stable ideal. Then*

$$\operatorname{reg}(I) = \max\{\deg(T)\ ;\ T \in G(I)\}.$$

In particular, if $v = \max\{m(T)\ ;\ T \in G(I)\}$, then $\operatorname{reg}(I) = \operatorname{depth} A/I + 1$.

Just as for stable monomial ideals (cf. [Pee]) we have

(2.7) COROLLARY. *Let $I \subset A$ be a squarefree stable ideal. Then A/I is a Golod ring, and the residue class field k* of A/I *has a resolution whose Poincaré series is given by*

$$P_K^{A/I}(\lambda) = \frac{(1+\lambda)^v}{1 - \sum_{T\in G(I)}(1+\lambda)^{m(T)-\deg(T)}\lambda^2}.$$

Proof. It follows from Proposition (2.2) that the product of any two cycles in $K(x_1, x_2, \ldots, x_v; A/I)$ is zero. Thus A/I is trivially a Golod ring (see [G–L, Corollary (4.2.4)]). The Poincaré series of a Golod ring is given by

$$P_K^{A/I}(\lambda) = \frac{(1+\lambda)^v}{1 - P_I^A(\lambda)\lambda^2}.$$

Hence the required result follows from Corollary (2.3). Q. E. D.

After distributing the first version of [A–H–H], we learned that resolutions of similar ideals (called "lex-seg with holes" and "lex-seg plus powers") are studied in [C–E] independently.

References

[A–H] A. Aramova and J. Herzog, Koszul cycles and Eliahou–Kervaire type resolutions, to appear.

[A–H–H] A. Aramova, J. Herzog and T. Hibi, Squarefree lexsegment ideals, preprint (May, 1995).

[Big] A. M. Bigatti, Upper bounds for the Betti numbers of a given Hilbert function, *Communications in Algebra* **21** (1993), 2317 – 2334.

[B–H] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen–Macaulay Rings," Cambridge University Press, Cambridge / New York / Sydney, 1993.

[B–H–V] W. Bruns, J. Herzog and U. Vetter, Syzygies and Walks, *in* "Commutative Algebra" (G. Valla, et al., Eds.), World Scientific, 1994, pp. 36 – 57.

[Bru–H] W. Bruns and T. Hibi, Stanley–Reisner rings with pure resolutions, *Commun. in Algebra* **23** (1995), 1201 – 1217.

[C–E] H. Charalambous and E. G. Evans, Jr., Resolutions obtained by iterated mapping cones, *J. Algebra* **176** (1995), 750 – 754.

[C–L] G. F. Clements and B. Lindström, A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay, *J. Combin. Theory* **7** (1969), 230 – 238

[E–K] S. Eliahou and M. Kervaire, Minimal resolutions of some monomial ideals, *J. Algebra* **129** (1990), 1 – 25.

[G–K] C. Greene and D. Kleitman, Proof techniques in the theory of finite sets, *in* "Studies in Combinatorics" (G.-C. Rota, ed.), Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1978, pp. 22 – 79.

[G–L] T. H. Gulliksen and G. Levin, "Homology of local rings," Queen's Papers in Pure and Appl. Math., No. 20, 1969.

[H–H] J. Herzog and T. Hibi, Upper bounds for the number of facets of a simplicial complex, *Proc. Amer. Math. Soc*, to appear.

[H] T. Hibi, "Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes," Carslaw Publications, Glebe, N.S.W., Australia, 1992.

[Hi] T. Hibi, Buchsbaum complexes with linear resolutions, *J. Algebra*, in press.

[Hoc] M. Hochster, Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, *in* "Ring Theory II" (B. R. McDonald and R. Morris, Eds.), Lect. Notes in Pure and Appl Math., No. 26, Dekker, New York, 1977, pp. 171 – 223.

[Hul] H. A. Hulett, Maximum Betti Numbers for a given Hilbert function, *Communications in Algebra* **21** (1993), 2335 – 2350.

[M–M] M. Möller and F. Mora, New constructive methods in classical ideal theory, *J. Algebra* **100** (1986), 138 – 178.

[Pee] I. Peeva, Strongly stable ideals, Ph. D. Thesis, Brandeis University, 1994.

[Sta] R. P. Stanley, "Combinatorics and Commutative Algebra," Birkhäuser, Boston / Basel / Stuttgart, 1983.

[T–H_1] N. Terai and T. Hibi, Computation of Betti numbers of monomial ideals associated with cyclic polytopes, *Discrete and Comput. Geom.*, in press.

[T–H_2] N. Terai and T. Hibi, Alexander duality theorem and second Betti numbers of Stanley–Reisner rings, *Advances in Math.*, to appear.

[T–H_3] N. Terai and T. Hibi, Finite free resolutions and 1-skeletons of simplicial complexes, *J. Algebraic Combin.*, to appear.

Department of Mathematics
Graduate School of Science
Osaka University
Toyonaka, Osaka 560, Japan
E-mail:hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp