可換環論シンポジウム報告集

1980年12月16日～19日

於　関西地区大学セミナーハウス

序

この報告集は1980年12月16日～19日まで，関西地区セミナーハウスで行なわれた"可換環論シンポジューム"の講演の記録である。参加者は46名で，朝早くから深夜まで，非常に活発な講演，討論が行なわれました。特に今回はショートコミュニケーションというものを試みてみましたが，小人数で，しかも関心の高い人々の集まりの中，若い人中心の講演を素材にした討論は，予定以上のものとなりました。スケジュール以外にも個人的なディスカッションは基より，28人まで宿泊の出来るB28の建物のロビーでは夜の2時までに渡る，数学及びそれ以外の熱心な討論がもたれました。

特に最後の松村先生のアメリカの可換環の状報につづく，中井先生の実にセンセーショナルな報告があり，世界の可換環論は今まさに激動の中にあるとの感をいだかきました。そして日本の可換環もがんばらなくてはと思い，下山いたしました。

次回には又一年間の各自の研究の成果をも

って集まりたいものです。

なおこの会を開くにあたって、その資金を東大の岩堀先生ならびに阪大の中井先生の科研費によってまかなわれたことを報告いたします。ここに新らためてお礼を述べさせていただきます。またすばらしい会場を提供していただいた関西地区大学セミナーハウス及び職員の方々に深く感謝いたします。

目次

付 : シンポジウムのスケジュール.

局所環のPoincaré Series予想の否定的解決について

小林美治

§1. 序. 最近、局所環のPoincaré seriesが有理的であろうという、Serre-Kaplansky予想と呼ばれる20数年来の問題に否定的解決が与えられた(Anick [1], Löfwall-Roos [12])。この小論では、Löfwall-Roosの方法に添って、細部は筆者自己流のやり方で、なるべく初等的でわかりやすく、予想に対する反例を構成してみたい。

$(R, \mathfrak{m})$を局所環とし、$k = R/\mathfrak{m}$とおく。このとき、$\mathrm{Tor}_n^R(k, k)$はk上の有限次元vector空間だから、形式的べき級数

$$P_R(Z) = \sum_{n \geq 0} (\dim_k \mathrm{Tor}_n^R(k, k)) Z^n$$

が定義される。これをRの<u>Poincare series</u>と呼ぶ。Serreの有名な定理([17])から、

$$R\text{ が regular} \iff P_R(Z)\text{ が多項式}.$$

したがって，Rがregularでなければ$P_R(Z)$は無限級数になるが，それほど出鱈目な級数にはならないだろうと考えるのは自然である。

<u>Serre-Kaplansky</u> 予想（[17, chap IV]）．一般に$P_R(Z)$はZの有理関数である。

この予想をめぐって，Tate [21] の仕事を出発点として，以来，多くの研究が発表されているが，その歴史的経過については，ここではほとんど触れない。今回の解決の直前までの研究の流れの概観は，亡くなられた松岡先生がマセマティクス [14] に要領の良い解説をされているので，それを見られたい。1つだけ，Levin [9] による次の結果に言及しておこう。

<u>定理</u>（Levin）．(R, m)を局所環とする。このとき，十分大きいrに対し，

$$\frac{1}{P_R(Z)} - \frac{1}{P_{R/m^r}(Z)}$$

はZの有理関数になる。

この定理によって，問題はRがartinianの場合に帰着される。実際，今回の解決ではartinian局所環

で予想に対する反例が構成されたのである。

Poincaré series と関連して，次数環の Hilbert series というものがある。A を体 k 上の有限生成の graded algebra とする。A の n 次成分 A_n は k 上の有限次元 vector 空間だから（$A_0 = k$ とする），形式的べき級数

$$H_A(Z) = \sum_{n \geq 0} (\dim_k A_n) Z^n$$

が定義される。これを A の <u>Hilbert</u> <u>series</u> と呼ぶ。A が有限表示のときは，$H_A(Z)$ は Z の有理関数になるのではないかと，Govorov（[4]，[5]）が予想した。良く知られているように，A が可換の時はこの予想は正しい（例えば [13] §13）。これには Shearer [20] と Уфнаровский [22]，[23] によって反例が与えられた（筆者の"数学"の記事 [7] も見られたい）。次の節で，ある特殊な場合における，Poincaré series と Hilbert series の結び付きが示される。それを利用して，反例が作られるのである。

さて，問題は Topology のある種の問題とも関連するが（実際，Serre はそれとの関連でこの予想を考えたのである），それについて述べるのは筆者の手に

余る。興味のある人は，Roos [15], [16]; Serre [19] 及び Anick [1] を見られたい。特に，[16] は最新の結果に基づく，これらの問題全般に渡る，申し分のない解説である。

§2. Löfwall の公式. k を体とし，V をその上の r 次元 vector 空間で生成元に次数 1 を与え，graded vector space と考える。W を $V \otimes V$ ($\otimes$ は今後断らない限り k 上で取る) の d 次元 subspace とする。W の直交補空間 $W^\perp$ は自然に $(V\otimes V)^* = V^* \otimes V^*$ の sub-space と見る (V^* は次数 -1 の元を基底にもつ graded vector space)。k 上の 2 つの graded algebras R と A を次のように定義する。

$$R = R(W) = k \oplus V \oplus \frac{(V\otimes V)}{W} = T(V)\Big/\Big(W + \sum_{n\geq 3} V^{\otimes n}\Big),$$

$$A = A(W) = T(V^*)/(W^\perp),$$

ここに，$T(V)$ は V の Tensor algebra，(W') は W' で生成される両側 ideal を表わす。

今，$x_1, \cdots, x_r$ を V の基底，$x_1^*, \cdots, x_r^*$ をそれに

対応するV^*の基底とする($\deg x_i = 1$, $\deg x_i^* = -1$)。

$U = R \otimes A$ とおき d を U において、$\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes x_i^*$ を右からかける写像とすれば、d は graded left R-module の morphism である。簡単な計算で、$d^2 = 0$ がわかる。$U_n = R \otimes A_n$ とすれば、$U = \bigoplus_{n \geq 0} U_n$ は graded left R-module の free complex である。次に、U の dual complex $U^* = \bigoplus_{n \geq 0} U_n^*$ を取る。すなわち、

$$U_n^* = \mathrm{Hom}_R(U_{-n}, R) = R \otimes A_n^*,$$
$$A_n^* = (A_{-n})^* = \mathrm{Hom}_k(A_{-n}, k).$$

d^* は U^* の次数 -1 の微分である。具体的に書けば、

$$d^* f(m) = \sum_{i=1}^{r} x_i f(m x_i^*), \quad f \in U_n^*, \quad m \in A_{n-1},$$

U^* の Homology 群 $H_n(U^*)$ も graded right R-module である。その p 次成分を $H_n(U^*)_p$ と表わす。次は [6] で行われているのと同じ様に直接計算で示すことができる。

<u>補題</u> 1. $H_0(U^*)_0 = k$ で、その他 $H_n(U^*)_p \neq 0$ となり得るのは、$H_n(U^*)_{n+2}$ $(n > 0)$ のみである。

特に，$H_n(U^*)$はk上のvector空間である。

補題1により，U^*はk上のminimal right R-free complexである。このcomplexはLöfwall [10], [11] に依るものであるが，その原典はFröberg [3] にあることを注意しておく。

さて，$C_{n+1} = H_n(U^*) = H_n(U^*)_{n+2}$ $(n \geq 1)$，とおけば，exact sequence

$$(1)\quad 0 \to A^*_{n+1} \to V \otimes A^*_n \to \frac{V \otimes V}{W} \otimes A^*_{n-1} \to C_n \to 0 \quad (n \geq 2)$$

を得る。$\alpha_n : C_n \to \frac{V \otimes V}{W} \otimes A^*_{n-1}$を1つの$k$-linear sectionとする。$\alpha_n$は$R$-homでもあることに注意する。

$L.$をkのminimal right R-free resolutionとしよう。そのとき，$c_n L. = \underbrace{L. \oplus \cdots \oplus L.}_{c_n}$ ($c_n = \dim_k C_n$) はC_nのresolutionである。β_nをaugmentation $\varepsilon_n : c_n L_0 \to C_n$と$\alpha_n : C_n \to R_2 \otimes A^*_{n-1} \subset U^*_{n-1}$の合成とする。次の大きなdiagramを考えよう。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & c_{n-1}L_1 \arrow[dr] & & & & c_2L_1 \arrow[dr] & & & \\
 & c_nL_0 \arrow[dr, "\beta_n"] & c_{n-1}L_0 \arrow[dr, "\beta_{n-1}"] & & & & c_2L_0 \arrow[d, "\beta_2"] & & \\
\cdots \arrow[r] & U_{n+1}^* \arrow[r] & U_n^* \arrow[r] & U_{n-1}^* \arrow[r] & U_{n-2}^* \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & U_2^* \arrow[r] & U_1^* \arrow[r] & U_0^* \arrow[r] & k
\end{tikzcd}
$$

これがまた k の minimal resolution を与える。
したがって，

(2) $L_n \cong U_n^* \oplus c_nL_0 \oplus c_{n-1}L_1 \oplus \cdots \oplus c_0L_n$

を得る。ここで，便宜上 $c_0 = c_1 = 0$ としている。

$b_n = \dim_k \operatorname{Tor}_n^R(k,k)$, $a_n = \dim_k A_n^*$ とおけば，

(1) 及び (2) より，それぞれ

$$c_n = a_{n+1} - r a_n + d a_{n-1}$$

$$b_n = a_n + b_0 c_n + \cdots + b_n c_0$$

を得る。$H_{A^*}(Z) = \sum_{n\geq 0} a_n Z^n$, $P_R(Z) = \sum_{n\geq 0} b_n Z^n$

であるから，$C(Z) = \sum_{n\geq 0} c_n Z^n$ とおいて

$$
\begin{cases}
ZC = H - rZH + dZ^2H - 1 \\
P_R = H + P_R C
\end{cases}
$$

を得る。よって，

定理（Löfwall）. 節の初めの条件のもとに，

$$P_R(Z) = \frac{Z H_{A^*}(Z)}{1 + Z - H_{A^*}(Z)(1 - rZ + dZ^2)}$$

が成立する。したがって，$H_{A^*}(Z)$ が rational のときに限って，$P_R(Z)$ は rational である。

例（Shearer [20]）. $A = T(W)/(W)$ が rational でない Hilbert series をもつような，V 及び $W \subset V \otimes V$ が存在する。

上の定理と例によって，直ちに Kostrikin-Šafarevič 予想（[8]）と呼ばれているものに対する反例が与えられる。

系 1（Löfwall [11]）. 体 k 上の有限次元 nilpotent algebra N で Poincaré series $P_{k \oplus N}$ が rational でないものが存在する。

上の N は非可換であるが，可換なものが作れれば，それが Serre-Kaplansky 予想の反例になる。さて，$[x, y] = xy - yx$，$]x, y[= xy + yx$ という記号

を用いよう。定理でRが可換になるための条件を考えれば直ちに，

系 2 (Löfwall-Roos)．Vを$x_1, \cdots, x_r$を基底とするk上のvector空間とする。$]x_i, x_j[$ $(i \neq j)$及び，x_i^2の形の元の一次結合のいくつかで生成される$V \otimes V$のsubspace Wで$A = T(V)/(W)$がrationalでないHilbert seriesをもつものが存在すれば，それに対応する$R = R(W^\perp)$はrationalでないPoincaré seriesをもつ局所環である。

§3. Lie algebraのEnveloping algebra.

Löfwall-Roosは前系の$T(V)/(W)$をそのまま扱っているが，$]x_i, x_j[$の一次結合のみを考えて，次の原理で通常のLie algebraのenveloping algebraの問題に帰着したほうがわかりやすいであろう。

$W \subset V \otimes V$の基底を$\{ \sum_{ij} a_{ij}^k]x_i, x_j[\mid k = 1, \cdots, d \}$ $(a_{ij}^k \in k)$とする。$\overline{W}$を$\{ \sum_{i,j} a_{ij}^k [x_i, x_j] \}$で生成される$V \otimes V$のsubspaceとする。

<u>補題</u> 2. $A=T(V)/(w)$, $\bar{A}=T(V)/(\bar{w})$ とおけば, $H_A(Z)=H_{\bar{A}}(Z)$ である。

証明は, monomial $x_{\alpha(1)}\cdots x_{\alpha(n)}$ に対し, $\mathrm{sgn}\,\alpha$ をかけてやる写像を linear に拡張して, graded vector space の同型: $A\to\bar{A}$ が作れることからわかる。

さて, 上の $\bar{A}$ は $x_1,\cdots,x_r$ を生成元とし, d 個の 2次の関係式で定義される (graded) Lie algebra の enveloping algebra である。 graded Lie algebra L に対しても, その Hilbert series H_L が同様に定義されるが, H_L と L の enveloping algebra $U=U(L)$ の Hilbert series H_U は Poincaré-Birkhoff-Witt (例えば [2]) により結びついている。

$L=\bigoplus_{n\geq 0}L_n$ を graded Lie algebra とし, $L_0=0$, $l_n=\dim_k L_n<\infty$ としよう。 L の斉次基底 $\{w_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に全順序を与えておこう。 L の enveloping algebra U の n 次成分 U_n は

$$\left\{w_{\lambda_1}\cdots w_{\lambda_m}\;\middle|\;\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_m,\ \sum_{i=1}^{m}\deg x_{\lambda_i}=n\right\}$$

を k 上の基底にもつ。 これより U の Hilbert series H_U は

$$H_U(Z) = \prod_{n\geq 0} \frac{1}{(1-Z^n)^{l_n}}$$

で与えられる。したがって、我々の目的のためには、次の要請に答えられればよい。

"次数1の有限個の生成元と、2次の有限個の関係で定義される graded Lie algebra $L = \bigoplus_{n\geq 0} L_n$ で、

$$\prod_{n\geq 0} \frac{1}{(1-Z^n)^{l_n}} , \quad l_n = \dim_k L_n$$

が rational でないものを作れ!"

次の節でこれを実行しよう。

§4. 反例の構成. Löfwall-Roos [12] は可換な Lie algebra を核とする拡大を考えたが、ここでは、簡単な2つの Lie algebra の半直積で、必要な性質をもつものを構成しよう。簡単のため、$[x, y]$ を単に xy と書くことにする。

L を $\{e_i, e_i', f_{2i+1}\}_{i=1,2,\cdots}$ を基底とする体 k 上の Lie algebra で演算は次のように定義されるものとする。

$$\begin{cases} e_i e_j = e_i' e_j' = \begin{cases} (-1)^i f_{i+j} & \text{if } i+j \text{ is odd} \\ 0 & \text{if } i+j \text{ is even,} \end{cases} \\ e_i e_j' = e_i f_{2j+1} = e_i' f_{2j+1} = f_{2i+1} f_{2j+1} = 0. \end{cases}$$

Mを$\{y, z\}$で生成される free Lie algebra と1次元 Lie algebra kx の直積とする。

Lは$\{e_i, e_i'\}_{i=1,2,\cdots}$を生成元とし、次の関係、で定義される Lie algebra であることを見るのは難しくない。

$$(3) \quad \begin{cases} e_i e_j' = 0 \\ e_i e_{j+1} = -e_{i+1}' e_j' \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots).$$

Mはもちろん、$\{x, y, z\}$を生成元とし、関係、

$$(4) \quad xy = xz = 0$$

で定義される。

Lの微分$D_x, D_y, D_z \in \mathcal{D}(L)$をそれぞれ次のように定義する。

$$D_x(e_i) = e_{i+1}, \quad D_x(e_i') = e_{i+1}', \quad D_x(f_{2i+1}) = 0$$

$$D_y(e_i) = e_{i+1}', \quad D_y(e_i') = e_{i+1}, \quad D_y(f_{2i+1}) = 0$$

$$D_z(e_i) = e_{i+1}, \quad D_z(e_i') = 0, \quad D_z(f_{2i+1}) = 0$$

$[D_x, D_y] = [D_x, D_z] = 0$ であるから, $\theta(w) = D_w$ ($w = x, y, z$) となるような Lie algebra の準同型 $\theta: M \to \mathcal{D}(L)$ が存在する。

さて, $\bar{L}$ を θ に関する L による M の半直積 ([2, §1]) としよう。 $\bar{L}$ は $\{e_1, e_1', x, y, z\}$ を生成元とし, 次の関係 (5) で定義される有限表示の Lie algebra である。それには (5) から (3), (4) の式をすべて導けばよいのであるが, 計算により直接示すことができるので, 読者にまかせよう。

$$(5) \begin{cases} xe_1 = ye_1' = ze_1 \\ xe_1' = ye_1 \\ e_1e_1' = xy = xz = ze_1' = 0. \end{cases}$$

ここで, $\deg e_1 = \deg e_1' = \deg x = \deg y = \deg z = 1$ と次数付ければ, $L, M, \bar{L}$ は graded Lie algebra であり, L の n 次成分 L_n の次元は $2 + \varepsilon(n)$ である。ここに, $\varepsilon(n)$ は n が偶数のとき 0, 奇数のとき 1 とする。 したがって, L の enveloping algebra の Hilbert series は

$$\prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - Z^i)^2} \cdot \frac{1}{1 - Z^{2i+1}}$$

であるが，これは rational でない（超越的である！）。

一方，M の enveloping algebra は $k\langle X, Y\rangle$ の $k[Z]$ であるから（$k\langle X_1, X_2, \cdots\rangle$ は $X_1, X_2, \cdots$ を変数とする k 上の非可換な多項式環を表わす），その Hilbert series は

$$\frac{1}{1-2Z}\cdot\frac{1}{1-Z}$$

である。したがって，L の enveloping algebra A の Hilbert series $H_A(Z)$ は

$$H_A(Z)=\frac{1}{(1-2Z)(1-Z)}\prod_{i\geq 1}\frac{1}{(1-Z^i)^2(1-Z^{2i+1})}$$

であり，これも rational でない。こうして，所定の性質をもつ Lie algebra L が構成された。

A の有限表示を具体的に与えれば，

$$A=\frac{k\langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\rangle}{\begin{pmatrix}[X_1,X_3]-[X_2,X_4],\ [X_1,X_3]-[X_1,X_5],\ [X_2,X_3]-[X_1,X_4] \\ [X_1,X_2],\ [X_3,X_4],\ [X_3,X_5],\ [X_2,X_5]\end{pmatrix}}$$

§2 の関係でこれに対応する (graded) local ring R は

$$R=\frac{k[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]}{(X_1X_3+X_2X_4+X_1X_5,\ X_2X_3+X_1X_4,\ X_4X_5,\ X_1^2,\cdots,X_5^2)}$$

である。こうして有理的でない Poincaré series をもつ，具体的な局所環 R が得られた。

最後に次のことに注意しておこう。上のように作られた R は Artinian であるから Cohen-Macaulay である。ところが，Tate [21] により complete intersection は rational な Poincaré series をもつ。次の疑問が生ずるのは自然である。Gorenstein 局所環の Poincaré series は rational か？ しかし，これにも反例が与えられたという（Roos [16] を見よ）。

文　献

[1] D.Anick, Construction d'espaces de lacets et d'anneaux locaux à séries de Poincaré-Betti non rationnalles, C. R. Acad. Sc. Paris 290 (1980), 729-732.

[2] N.Bourbaki, Éléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie, Chap. I, Paris Hermann, 1960.

[3] R.Fröberg, Determination of a class of Poincaré series, Math. Scand. 37 (1975), 29-39.

[4] V.E.Govorov, Graded algebras, Math. Notes 12, 552-682, translated from Mat. Zametki 12 (1972),197-204.

[5] ________, On the dimension of graded algebras, Math. Notes 14, 678-682, translated from Mat. Zametki 14 (1973), 209-216.

[6] Y.Kobayashi, The Hilbert series of some graded algebras and the Poncaré series of some local rings, Math. Scand. 42 (1978), 19-33.

[7] ________, 有理的でないHilbert 級数をもつ次数環, 数学 32 (1980), 82-84.

[8] A.I.Kostrikin-I.R.Šafarevič, Homology groups of nilpotent algebras (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR 115 (1957), 1066-1069.

[9] G.Levin, Local rings and Golod homomorphisms, J. Algebra 37 (1975), 266-289.

[10] C.Löfwall, On the subalgebra generated by the one-dimensional elements of the Yoneda Ext-algebra, Reports, Univ. Stockholm no.5, 1976.

[11] ________, Une algèbre nilpotente dont la série de Poincaré-Betti est non ratio~~nal~~nelle, C. R. Sc. Paris 288 (1979), 327-330.

[12] C.Löfwall-J.-E.Roos, Cohomologie des algèbres de Lie graduees et séries de Poincaré-Betti non rationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris 290 (1980), 733-736.
[13] H.Matsumura, 可換環論, 共立出版, 1980.
[14] T.Matsuoka, 可換環のホモロジー, マセマティクス 4 (1980), 293-303.
[15] J.-E. Roos, Relations between the Poincaré-Betti series of loop spaces and of local rings, Lect. Notes Math. 740, Springer-Verlag,(1979), 285-322.
[16] _______, Homology of loop spaces and of local rings, Reports, Univ. Stockholm no.15, 1980.
[17] J.-P.Serre, Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noetheriens, Proc. Int. Symp. Tkyo-Nikko,(1955), 175-189.
[18] _______, Algèbre locale. Multiplicités, Lect. Notes Math. 11, Springer-Verlag, 1965.
[19] _______, Une exemple de série de Poincaré non rationnelle, Indag. Math. 41 (1979), 469-471.
[20] J.B.Shearer, A graded algebra with a non-rational Hilbert series, J. Algebra 62 (1980), 228-231.
[21] J.Tate, Homology of noetherian rings and local rings, Illinois J. Math. 1 (1957), 14-27.
[22] V.A.Ufnarovskij, The growth of algebras, Moscow Univ. Math. Bull. 33, 47-52, translated from Vestnik Moskov. Univ. (1978), 59-65.
[23] _______, On the Poincaré series of graded algebras (Russian), Mat. Zametki 27 (1980), 21-32.

Birational integral extension における双対性(duality)

大阪大学 理 吉田憲一

A をネーター整域で、商体の中での整閉包を $\bar{A}$ と書く。$\mathfrak{P}$ を A の素イデアルで、$ht\,\mathfrak{P} > 1$ だが $\operatorname{depth} A_{\mathfrak{P}} = 1$ であるものを考えると、この様な $\mathfrak{P}$ は、$\bar{A}$ が finite A-module であれば有限個しか存在しない。又、a を A の non-zero element とするとき、Krull-Altitude-Theorem によって aA の minimal prime divisors はすべて ht が 1 である。A が integrally closed でなければ、aA には embedded prime divisor がある可能性があるが、実はある principal ideal の embedded prime divisor となり得る素イデアルも有限個となるのである。それは $ht\,\mathfrak{P} > 1$ だが $\operatorname{depth} A_{\mathfrak{P}} = 1$ なる素イデアルは次のたくさんの同値条件で特徴づけられる。

命題; A をネーター整域で、$\bar{A}$ は finite A-module とする。このとき $ht\,\mathfrak{P} > 1$ なる素イデ

アル　に対して　次は同値

(i)　depth $A_{\mathfrak{p}} = 1$.

(ii)　$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(\overline{A}/A)$.

(iii)　ある元 $\alpha \in Q(A)$ があって，$\mathfrak{p} = I_\alpha$
$= \{a \in A \ ; \ a\alpha \in A\}$。

(iv)　ある元 $\alpha \in Q(A)$ があって，$\mathfrak{p}$ は I_α の prime divisor.

(v)　A と $\overline{A}$ の中間環があって，それを B，$\mathfrak{f}(B/A)$ (conductor ideal) は $\mathfrak{p}$ を prime divisor にもつ。

(vi)　A と $\overline{A}$ の中間環があって，それを B，$\mathfrak{f}(B/A) = \mathfrak{p}$.

(vii)　A の元 a $(\neq 0)$ があって，$\mathfrak{p}$ は aA の prime divisor (従って embedded).

(viii)　a を $\mathfrak{p}$ に含まれる non-zero な元とすれば，$\mathfrak{p}$ は aA の prime divisor.

(ix)　ある divisorial ideal $\mathfrak{a}$ ($\overset{\text{i.e.}}{\Leftrightarrow}$ $A:(A:\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$) があって，$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}$ の prime divisor。

(x)　$\mathfrak{p}$-primary ideal で divisorial なものが存在する。

(xi)　$\mathfrak{p}$ は divisorial。

少々技術的な事になるが，次の定義によってよえられる，A上のrings（これを以下ではcover-ringとよぼう）はbirational integralなextensionを研究するのに有効だと思う。

定義；RをAと$\bar{A}$との中間環でかつfinite A-moduleなものとする。このとき

$$F_i(A,R) = \{ \alpha \in R \ , \ ht\, I_\alpha \geq i+1 \}$$

はAとRの中間環である。

$$D_i(A,R) \overset{def}{=} \{ \mathfrak{p} \in Ht_i(A) \ ; \ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}(F_i(A,R)/A) \}。$$

$$D(A,R) = \cup D_i(A,R) .$$

この時

命題 (i) $ht\, \mathfrak{a}(F_i(A,R)/A) \geq i+1$。

従って $\mathfrak{p} \in D_i(A,R)$ ならば，$\mathfrak{p}$は$\mathfrak{a}(F_i(A,R)/A)$のminimal prime divisorである。

(ii) ある自然数dがあって，$F_d(A,R) = A$。

(iii) $D(A,R) = Ass_A(R/A)$

特に$D(A,\bar{A})$は先の命題の同値条件に入る。

以前$F_i(A,R)$の定義をiに関する帰納的な

方法で，$\mathcal{F}_i(A, R) = \mathcal{F}_{i-1}(A, R) \cap \bigcap_{\mathfrak{z} \in \mathcal{D}_{i-1}(A, R)} A_{\mathfrak{z}}$

と定めたが，これと同じである。

この subrings $\{\mathcal{F}_i(A, R)\}$ を使って seminormality や root closedness の判定法を得る事が出来るが，今回のセミナーでは先の命題の同値の (Xi) に注目して話をしたい。

$\mathfrak{a}$ を A の ideal とすれば $\mathfrak{a} : \mathfrak{a} = \{\alpha \in Q(A);\ \alpha\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}\}$ は A を含む ring であるが，

補題；A がネーター的であれば，$\mathfrak{a} : \mathfrak{a}$ は $\bar{A}/A$ の中間環である。

証明 $\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \subseteq A : \mathfrak{a} \subseteq A : xA \subseteq \frac{1}{x}A$, ここで x は $\mathfrak{a}$ に含まれる non-zero な元。A はネーター的故 $\mathfrak{a} : \mathfrak{a}$ は finite A-module 故，A 上 integral，従って $\mathfrak{a} : \mathfrak{a}$ は $\bar{A}/A$ の中間環．

従って $\bar{A}$ を finite A-module とすれば，$\bar{A} = \mathfrak{f} : \mathfrak{f}$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(\bar{A}/A)$.

定義；A の ideal $\mathfrak{a}$ を conductor ideal という

ぶのは、$\bar{A}/A$ の中間環 B があって、$\mathfrak{a} = \mathfrak{f}(B/A)$.

命題、$\mathfrak{a}$ を conductor ideal とすれば、$\mathfrak{a}$ は divisorial である。又 $\mathfrak{a} : \mathfrak{a} = A : \mathfrak{a}$、そして $\mathfrak{a} = \mathfrak{f}(A:\mathfrak{a}/A)$.

証明、$\mathfrak{a} = A : B$ 故 $\mathfrak{a}$ は divisorial である。

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{a} = (A : B) : \mathfrak{a} = A : \mathfrak{a}B = A : \mathfrak{a}.$$

$$\mathfrak{f}(A:\mathfrak{a}/A) = A : (A : \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}.$$

従って conductor ideals と divisorial over-rings は1対1に対応する。

定理：conductor ideals と divisorial over-rings は1対1に対応する。

証明；$\mathfrak{a}$ を conductor ideal とすれば $A : \mathfrak{a}$ は divisorial over-ring であり、$\mathfrak{f}(A:\mathfrak{a}/A) = \mathfrak{a}$

従って $A : \mathfrak{a} = A : \mathfrak{b}$ ならば $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

B, C を divisorial over-ring で $A : B = A : C$ とすれば $A : (A : B) = A : (A : C)$ より $B = C$。

以後一つの conductor ideal $\mathfrak{f}$ を fixed.

$R = A : \mathfrak{f}$ とおく。以下では R/A の中間環で divisorial なものと、$\mathfrak{f}$ を含む conductor ideals との間の duality を考える。

補題; I を R の ideal とすれば、$\mathfrak{f} :_A I = \{ a \in A \,;\, aI \subseteq \mathfrak{f} \}$ は conductor ideal.

証明. $A + I$ は R/A の中間環で $\mathfrak{f}\left((A+I)/A \right) = \mathfrak{f} :_A I$.

定理 $\mathfrak{a} = \mathfrak{f} :_A I$ ならば $B = A : \mathfrak{a}$ とおくとき,

(i) $\mathfrak{f}(R/B) = \mathfrak{f} : \mathfrak{a}$

(ii) $\mathfrak{f} :_A (\mathfrak{f} : \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$

証明. (i) $\mathfrak{f}(R/B) \ni {}^\forall \alpha$, $\mathfrak{a} \ni {}^\forall x$ で $x\alpha \in \mathfrak{f}$?

$\Leftrightarrow$ $R \ni {}^\forall \beta$ で $x\alpha\beta \in A$? であるが $\mathfrak{f}(B/A) = \mathfrak{a} \ni x$ で $\alpha\beta \in \mathfrak{f}(R/B) \subset B$ 故 $x\alpha\beta \in A$. $\therefore$ $\mathfrak{f}(R/B) \subseteq \mathfrak{f} : \mathfrak{a}$.

次に $\mathfrak{f} : \mathfrak{a}$ が R の ideal である事を示す。

$\mathfrak{f} : \mathfrak{a} \subseteq A : \mathfrak{a} = B \subseteq A : \mathfrak{f} = R$

$\mathfrak{f} : \mathfrak{a} \ni {}^\forall \alpha$, $R \ni {}^\forall \beta$ $\mathfrak{a} \ni {}^\forall x$ とすれば $x\alpha \in \mathfrak{f}$

故 $x\alpha\beta \in \mathfrak{f}$ $\therefore$ $\alpha\beta \in \mathfrak{f} : \mathfrak{a}$

$\mathfrak{f}$; $\mathfrak{a}$ は B に含まれる R の ideal 故 $\mathfrak{f} : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{f}(R/B)$

よって $\mathfrak{f} : \mathfrak{a} = \mathfrak{f}(R/B)$ を得る。

(ii) $\mathfrak{a} \ni {}^{\forall} x$, $\mathfrak{f} : \mathfrak{a} \ni {}^{\forall} \alpha$ ならば $x\alpha \in \mathfrak{f}$

$\therefore \quad \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{f} :_A (\mathfrak{f} : \mathfrak{a})$

一方 $\mathfrak{f} : \mathfrak{a} = \mathfrak{f} : (\mathfrak{f} :_A I) \supseteq I$ 故

$\mathfrak{f} :_A (\mathfrak{f} : \mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{f} :_A I = \mathfrak{a}$

従って $\mathfrak{f} :_A (\mathfrak{f} : \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ を得る。

系. conductor ideal が duality $\mathfrak{f} :_A (\mathfrak{f} : \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ をみたすための同値条件は、${}^{\exists} I \subset R$ ideal で $\mathfrak{a} = \mathfrak{f} :_A I$。

定理; C を R/A の中間環で divisorial なものとして、$I = \mathfrak{f}(R/C)$ であれば、(i) $\mathfrak{f} :_A I = \mathfrak{a}$, $B = A : \mathfrak{a}$ とおけば $B \subseteq C$ (ii) $I = \mathfrak{f}(R/B)$ (iii) duality $I = \mathfrak{f} : (\mathfrak{f} :_A I)$ がみたされる。

証明, $\mathfrak{f}(C/A) = \mathfrak{c}$ とおけば、C は divisorial だから $C = A : \mathfrak{c}$。$C \supseteq A + I$ 故 $\mathfrak{c} = A : C \subseteq$

$A : A + I = \mathfrak{f} :_A I = \mathfrak{a} \qquad \therefore \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$

よって $C = A : \mathfrak{c} \supseteq A : \mathfrak{a} = B$ を得る。

$C \supseteqq B$ 故 $I = \mathfrak{k}(R/C) \supseteqq \mathfrak{k}(R/B) \supseteqq I$

従って (ii) を得る。

(iii) を示す。 $B = A : \mathfrak{a}$ 故 先の定理より

$\mathfrak{k}(R/B) = I = \mathfrak{k} : \mathfrak{a} = \mathfrak{k} : (\mathfrak{k} :_A I)$

系；R の ideal I が duality $I = \mathfrak{k} : (\mathfrak{k} :_A I)$ をみたすための同値条件は，R/A の中間環で divisorial なるのがあって，I はそれによる conductor ideal である。

証明．$\mathfrak{a} = \mathfrak{k} :_A I$ とおくと，$\mathfrak{a}$ は conductor ideal $B = A : \mathfrak{a}$ は divisorial over ring。$\mathfrak{k}(R/B) = \mathfrak{k} : \mathfrak{a}$ 故 $\mathfrak{k} : \mathfrak{a} = I$ から $\mathfrak{k}(R/B) = I$。

命題，$\mathfrak{J} \in \mathrm{Ass}_A(R/A)$ ならば R/A の中間環 B で $\mathfrak{k}(B/A) = \mathfrak{J}$ となるものが存在する。

証明。$\mathfrak{J} \in \mathrm{Ass}_A(R/A)$ 故，$\exists \alpha \in R$ で $I_\alpha = \mathfrak{J}$。

今 $R \cap (A : \mathfrak{J}) \subseteqq \mathfrak{J} : \mathfrak{J}$ を示そう。$\supseteqq$ は明らか。

$R \cap (A : \mathfrak{J}) \ni {}^\forall \alpha$，$\mathfrak{J} \ni {}^\forall x$，$\alpha$ は A 上 integral 故

$a_1, \cdots, a_n \in A$ で $\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$。

従って $(x\alpha)^n + x a_1 (x\alpha)^{n-1} + \cdots + x^n a_n = 0$．

ここで $x \in \mathfrak{J}$ で $x\alpha \in A$ 故 $x\alpha \in \mathfrak{J}$ を得る。よって $R \cap (A : \mathfrak{J})$ は A を proper に含む over-ring. $B = R \cap (A : \mathfrak{J})$ とおけば $\mathfrak{f}(B/A) = \mathfrak{J}$。従って $\mathfrak{J}$ は conductor ideal だから $\mathfrak{J} : \mathfrak{J} = A : \mathfrak{J}$。

以下では R/A の divisorial over-rings を求める事を考えて行きたい。

補題; $A \subset B \subset C$ で B は A 上 divisorial over-ring, C は B 上 divisorial over-ring とすれば, C は A 上 divisorial over-ring

証明; $\mathfrak{f}(B/A) = \mathfrak{a}$　$\mathfrak{f}(C/B) = I$ とおく, まず $\mathfrak{a}I \subsetneq A$ は $I \subset B$ 故, 従って $C = B : I = (A : \mathfrak{a}) : I$ $= A : \mathfrak{a}I$ から C は A 上 divisorial.

命題; $\mathrm{Ass}_A(R/A) = \{\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_t\}$, $ht\,\mathfrak{J}_1 \leq \dots \leq ht\,\mathfrak{J}_t$, とする。このとき $A_j(R) = R \cap \bigcap_{i<j} A_{\mathfrak{J}_i}$ とおけば, $A_j(R)$ は A 上の divisorial over-ring.

証明は省略する。

定義より $A_{\mathfrak{p}_j} \supsetneqq A_{j+1}$ である。今 $P_j = \mathfrak{p}_j A_{\mathfrak{p}_j} \cap A_{j+1}$ とおけば、$\mathrm{Ass}_{A_{j+1}}(A_j/A_{j+1}) = \{P_j\}$.

そこで我々は $\mathrm{Ass}_A(R/A) = \{\mathfrak{p}\}$ の case について考える。まず $A : \mathfrak{p} = A_1$ は A 上の divisorial over-ring である。$\mathfrak{p}$ 上の R の prime ideals を $P_1, \dots, P_n$ とし、$P_i \cap A_1 = \mathfrak{p}_i'$ とする。

補題 $\mathfrak{p}_1', \dots, \mathfrak{p}_n'$ の中で $\mathrm{Ass}_{A_1}(R/A_1)$ に入るものが無ければ $R = A_1$

証明. $\mathfrak{f}(R/A_1) = \mathfrak{f} : \mathfrak{p}$ で $\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{p}$ に属する primary ideal, 従って $\mathfrak{f} : \mathfrak{p}$ は $P_1, \dots, P_n$ のみを prime divisor に持つ。今 $\mathfrak{p}_1', \dots, \mathfrak{p}_n'$ の中で $\mathrm{Ass}_{A_1}(R/A_1)$ の中に入るものがないとすれば、$\mathfrak{f} : \mathfrak{p} = (1)$, $\therefore$ $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}$ 故 $R = A_1$。

そこで $\mathfrak{p}_1' \in \mathrm{Ass}_{A_1}(R/A_1)$ として、$A_2 = A_1 : \mathfrak{p}_1'$ と順次くりかえすとき

命題 $\exists d$; integer で $A_d = R$

証明は省略。

このとき各 A_j は A 上の divisorial over-ring である。しかし $A \subset A_1 \subset \cdots \subset A_d$ が一番最大の列を与えるかどうかは不明だが、A_1 が最小のものであることは明らかである。

まだまだ追究せねばならぬ事は多く、たとえば conductor ideals は有限個しかないのではあるまいかとも思ったりもしているが、まだわからない。中間環は無限個あるが divisorial なものは有限個という例はいくらでもあるのでこの様に考えた。又 conductor ideals はすべて $\mathfrak{A} :_A I$ なのかどうかもわからない。今後に残された問題は多い。

$R[X]$ の R-form.

富山大 教育 浅沼照雄

commutative ring R 上の polynomial ring $R^{[n]} = R[X_1, \ldots, X_n]$ について 2, 3 の問題を考えてみる。これについて R が性質 P をみたせば $R^{[n]}$ も性質 P をみたすかという問題がまず考えられ実際いろいろな P について調べられている。ここでは R-algebra A を与えてある条件をみたすとき A が polynomial ring になるかどうかという問題を考えてみる。

Definition 1. $\mathfrak{p}$ を R の任意の prime ideal とする。このとき

$$Q(R) = \text{total quotient ring of } R,$$

$$\tilde{R} = \text{integral closure of } R \text{ in } Q(R),$$

$$k(\mathfrak{p}) = Q(R/\mathfrak{p}),$$

$$j(\mathfrak{p}) = \widetilde{R/\mathfrak{p}},$$

と def. する。ゆえ $j(\mathfrak{p})$ は

$$R \xrightarrow{\text{canonical}} R/\mathfrak{p} \hookrightarrow j(\mathfrak{p}) \hookrightarrow k(\mathfrak{p})$$

で自然に $k(\mathfrak{p})$ の sub-R-algebra になる。

Definition 2. R-algebra A が NR-polynomial algebra in n-variables であるとは任意の prime ideal $\mathfrak{p} \subset R$ について

$$\bar{j}(\mathfrak{p}) \otimes_R A \cong_{\bar{j}(\mathfrak{p})} \bar{j}(\mathfrak{p})^{[n]}$$

がなりたつときをいう。

Example. k を alg. closed field, R を $\dim R = 1$ なる affine k-domain とする。すると以下の (a) 及び (b) は同値.

(a) A は NR-polynomial R-algebra in n-variables.

(b) $\tilde{R} \otimes_R A \cong_{\tilde{R}} \tilde{R}^{[n]}$.

Proof. (a) ⇒ (b) は def. より明らか.

(b) ⇒ (a); $\mathfrak{p}$ を R の任意の prime ideal とすると $\mathfrak{p}$ は (0) 又は max. ideal. ゆえ $\bar{j}(\mathfrak{p}) = \tilde{R}$ 又は $\bar{j}(\mathfrak{p}) = k$. ところで $\tilde{R}$ は R の integral extension ゆえ $\tilde{R}$ の prime ideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ で $\tilde{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}$ なるものが存在する。明らかに $\bar{j}(\mathfrak{p}) = \tilde{R}/\tilde{\mathfrak{p}}$ がなりたち (b) より

$$\bar{j}(\mathfrak{p}) \otimes_R A \cong \tilde{R}/\tilde{\mathfrak{p}} \otimes_R A \cong \tilde{R}/\tilde{\mathfrak{p}} \otimes_{\tilde{R}} \tilde{R}^{[n]} \cong \bar{j}(\mathfrak{p})^{[n]}.$$

ゆえ A は NR-polynomial R-algebra in n-variables である。 q.e.d.

さて NR-polynomial algebra について次の Theorem は基本的である。

Theorem 1. R を reduced noetherian ring, A を NR-polynomial R-algebra in n-variables で次の (1) 又は (2) をみたす。

(1) A は f.g. (finitely generated の略) flat R-algebra.

(2) $\tilde{R}$ は f.g. R-algebra (i.e., R は Y. Mori-ring)

このとき次の (a) 及び (b) がなりたつ。

(a) $\Omega_R(A)$ は f.g. projective A-module.

(b) $\Omega_R(A) \oplus M$ が free A-module なる任意の f.g. projective A-module M について ℓ, m が存在して

$$Sym_A(M)^{[\ell]} \cong_R R^{[m]}$$

がなりたつ。ここで $Sym_A(M)$ は M の symmetric A-algebra を表わし $Sym_A(M)$ は

自然な map $R \longrightarrow A \longrightarrow Sym_A(M)$ で R-algebra と見なす。

ゆえとくに

(c) $\Omega_R(A)$ が free A-module ならば m が存在して

$$A^{[m]} \cong_R R^{[n+m]}$$

となる。

この Theorem 1 の逆は一般にはなりたたない。

Example. R を normal domain で non-free な f.g. projective R-module N をもつものとする。このとき $A = Sym_R(N)$ とおけば A は R 上の polynomial ring ではない。ゆえ N R-polynomial algebra ではない。又明らかに A は Theorem 1 の条件 (1) 及び (2) をみたす。更に (a) (b) をみたすことがわかっている。

上の Example において R が local でないということが必要である。

Problem. R を local と仮定したとき Theorem 1 の逆がなりたつか？

これについては次のTheorem 2がなりたつ。

Theorem 2. Rが reduced noetherian ring とすると次の (a) 及び (b) は同値.

(a) Aは NR-polynomial R-algebra in one-variable かつ $\Omega_R(A)$ は A-free.

(b) $A^{[m]} \cong R^{[m+1]}$ for some m.

さて Theorem 1の応用として以下の Theorem 3, 4 などがなりたつ.

Definition. R-algebra A についてある f.g. integral extension S over R が存在して $S \otimes_R A \cong_S S^{[n]}$ なるとき A を $R^{[n]}$ の R-form という。

Theorem 3. Rが reduced noetherian ring で $\mathbb{Q}$ を含むものとする。このとき $R[X]$ ($\cong R^{[1]}$) の R-form A について次の (a) 及び (b) は同値.

(a) $\Omega_R(A)$ は A-free

(b) $A \cong R[X]$.

Theorem 4. Rが reduced noetherian local ring であるとき次の (a) 及び (b) は同値.

(a) A は $R[X]$ の sub-R-algebra で $R[X]$ は A上 f. flat である。

(ii) A は NR-polynomial R-algebra in one-variable で Theorem 1 の (1) の仮定をみたす。

最後に次の問題は未解決.

Problem. R を noetherian local domain, A を f.g. flat R-algebra で任意の prime ideal $\mathfrak{p} \subset R$ について $k(\mathfrak{p}) \otimes_R A \cong k(\mathfrak{p})^{[n]}$ なるものとする。このとき A は NR-polynomial algebra になるだろうか?

References

[1]. On NR-polynomial algebras. preprint.

[2] On rank one invertible algebras. preprint.

T. Asanuma.

Weakly normal ring について

広島大理　柳原弘志

§0. 序

可換環Aとその整拡大環Bに対し，AがBでweakly normal（以後WNとかく）であるという概念は最初Andreotti と Bombieri の論文[1]で導入され，その後Traverso[7]により少し弱い型のseminormal（以後SNとかく）という概念に置きかえられて，そのような環のもつ性質が研究された。Aが標数0の体を含むときには，WNとSNは全く同じものであるが，一般には一致しない。しかし，WNとSNは非常に密接な関係があり，SNに関して成立つ結果が多くの場合，WNに対しても類似のものが得られる。例えば最近出版されたManaresiの論文[6]は Greco と Traverso の論文[2]のSNからWNへの書き直しである。Manaresiはこの結果を得るためにWeak normalizationの新しい特徴付けを与えたのであるが，我々はここでもう一つの特徴付けを，Aが標数$p>0$の体を含む場合にいわゆるSNに関する"Hamann criterion"

に対応する結果を用いて与える．Manaresiの特徴付けと異なり，我々の扱う場合はAが標数$p>0$の体を含んでいるが，この場合に限れば，種々の基本的性質を得るのに，我々の特徴付けは有用であると思われる．後半は，Traversoによって与えられたglueingの概念を拡張し，いわゆる環のseminormal拡大に関する構造定理の類似が得られることを示す。

§1. Hamann criterion

はじめにWN及びSNの定義から復習する．A，Bは上記の通りとするとき

$${}^{*}_{B}A = \{ b \in B \mid \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A),\ \exists m \in N,\ (b_{\mathfrak{p}})^{p^m} \in A_{\mathfrak{p}} + R(B_{\mathfrak{p}}) \}$$

をAのBにおけるweak normalizationという。ただし，$R(B_{\mathfrak{p}})$は$B_{\mathfrak{p}}$のJacobson根基，pは$k(\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$のcharacteristic exponentとする．特に，$A = {}^{*}_{B}A$のとき，AはBでWNであるという．同様に，

$${}^{+}_{B}A = \{ b \in B \mid b_{\mathfrak{p}} \in A_{\mathfrak{p}} + R(B_{\mathfrak{p}}),\ \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \}$$

をAのBにおけるseminormalizationといい，$A = {}^{+}_{B}A$のとき，AはBでSNであるという。

容易に分るように，${}^{*}_{B}A$，${}^{+}_{B}A$は共にBの部分環で

$A \subset {}^{+}_{B}A \subset {}^{*}_{B}A \subset B$ なる関係がある．よって，AがBでWNなら，AはBでSNとなる．更に，Aが標数0の体を含めば，上で言及したようにWNとSNは同じ概念である．したがってWNとSNの差が現れるのはAが標数0の体を含まぬ場合，特にAが標数$p>0$の体を含む場合である．先ず，このような場合に，AがBでWNとなる一つの判定条件を与えてみる．これはSNの場合のいわゆるHamann criterion（cf. [3]，[4]，[5]）に対応するものである。そのために次の定義を導入する：

Bを環，Aをその部分環とする。相異なる1より大きい自然数 e, f に対し，$b^e \in A$，$b^f \in A$ なるBの元 b は常にAに属するとき，"AはBで (e, f)-closed である"という．又1より大きい自然数 n に対し，$b^n \in A$ なるBの元 b は常にAの元であるとき，"AはBで n-closed（又は n-root closed）である"という．

このとき，SNに関するHamann criterionは次のように述べられる．

<u>定理</u>　A, Bは上記の通りとするとき，次は互に同値である：

(i) AはBでSNである.

(ii) Bの元bに対し, Aの$A[b]$における導手が$A[b]$のradical idealである.

(iii) $n \geqq 2$に対し, AはBで$(n, n+1)$-closedである.

(iv) 互に素な自然数e, f ($e \neq f$, $e, f \neq 1$)に対し, AはBで(e, f)-closedである.

これに対応するWNの場合の結果として, 次の定理が得られる.

<u>定理</u>　A, Bは上記の通りとし, Aは標数$p>0$の体を含むものとする. 次は同値である:

(i) AはBでWNである.

(ii) AはBでp-closedである.

<u>系</u>　A, Bは定理と同じものとするとき,

$${}^{*}_{B}A = \{ b \in B \mid b^{p^e} \in A \text{ for some } e \}.$$

Aが標数$p>0$の体を含む場合, この様な特徴付けを用いると, Greco-Traverso[2]で得られたSNに対する

結果の多くがWNに対しても成り立つことが比較的容易に示される．

次に問題になるのは，Aが体を含んでいない場合にHamann criterionはいかなるものかということであるが，これについては次の結果が分っている．

定理　A，Bは上記の通りとし，次の条件を満たしているならAはBでWNである：

(i) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$に対し，$k(\mathfrak{p})$の標数が0なら，$A_{\mathfrak{p}}$は$B_{\mathfrak{p}}$でSNである．

(ii) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$に対し$k(\mathfrak{p})$の標数が$p>0$なら$A_{\mathfrak{p}}$は$B_{\mathfrak{p}}$で p-closedである．

この定理の逆は成り立たない。すなわち，AがBでWNであっても，(ii)の成り立たない場合がある．例えば，$B=\mathbb{Z}[X]$，$A=\mathbb{Z}[X^p]$とすれば反例になっている。ここで，pは任意の素数である。

§2. Glueingの一般化

A，Bを可換環とし，AがBの部分環で，Bは有限

A-加群であるとする。$\mathfrak{p}$ を A の素イデアル，$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ を B の素イデアルで A との交わりが $\mathfrak{p}$ になるもの全体とする。$\mathfrak{q}_i$ を $\mathfrak{P}_i$-準素イデアルで $\mathfrak{q}_i \supset \mathfrak{p}B$ となるものとする。そして，$k(\mathfrak{p}) = Q(A/\mathfrak{p})$，$Q_i = Q(B/\mathfrak{q}_i)$ とおく。ここで，環 R に対し $Q(R)$ は R の全商環を意味する。今，$S = A/\mathfrak{p} - \{0\}$ とおくとき，S の元の自然準同型 $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{q}_i$ による像は $B/\mathfrak{q}_i$ の零因子でないことが容易に分るから，各 i $(1 \leqq i \leqq n)$ に対し，$j_i : k(\mathfrak{p}) \to Q_i$ なる自然な単射を得る。更に，

$$f : k(\mathfrak{p}) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} Q_i$$

を，f と標準射 $p_i : \prod_{j=1}^{n} Q_j \to Q_i$ との合成が j_i となるように定義する。このとき，$L = {}^{*}_{\pi Q_i}k(\mathfrak{p})$ とおく。ただし，f によって $k(\mathfrak{p})$ とその像 $f(k(\mathfrak{p}))$ を同一視しておく。容易に分るように，L は $k(\mathfrak{p})$ 上純非分離的である $\prod_{i=1}^{n} Q_i$ の最大の部分体になる。特に $k(\mathfrak{p})$ の標数が 0 のときは $L = k(\mathfrak{p})$ となる。今，K を $k(\mathfrak{p})$ を含む L の部分体とし，次のような可換環の pull-back 図式を考える：

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & B \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ K & \xrightarrow[\psi]{} & \prod_{i=1}^{n} Q_i \end{array}$$

ここで，ψ は自然な埋込み $K \hookrightarrow L \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} Q_i$ であり，

ϕ は $\rho_i\phi$ が $B \to B/\mathfrak{q}_i \hookrightarrow Q(B/\mathfrak{q}_i) = Q_i$ に等しくなるようなものである。このとき，i は単射で，$i(D)=\{b\in B \mid \phi(b)\in K\}$ $=\phi^{-1}((\prod_{i=1}^{n} B/\mathfrak{q}_i)\cap K)$ となることが容易に分る。この $i(D)$ を"B から $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n$ に関して，K 上貼り合わせて得られる環"，又は単に"K 上の $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n$ の貼り合わせ"と呼ぶ。特に，$K=L$（或いは，$K=k(\mathfrak{p})$）のとき，$i(D)$ を"$\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n$ の弱い貼り合わせ"（或いは，"貼り合わせ"）とよび，更に，$\mathfrak{q}_i=\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ のとき，$\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n$ の弱い貼り合わせ（或いは貼り合わせ）を単に"$\mathfrak{p}$ 上の B の弱い貼り合わせ"（或いは，"貼り合わせ"）と呼ぶ。

以後，$i(D)$ と D を同一視する。

命題. $A, B, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}_i, K, D$ は上と同じとする。このとき次が成り立つ。

(i) $\mathfrak{p}'=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ は D の素イデアルである。

(ii) $\mathfrak{q}_j\cap D=\mathfrak{p}'$ $(j=1,2,\ldots,n)$

(iii) $\mathfrak{p}'$ は A との交わりが $\mathfrak{p}$ になる D の唯一つの素イデアルである。

(iv) $k(\mathfrak{p}')=Q(D/\mathfrak{p}')$ は K の部分体で $k(\mathfrak{p})$ を含む。

この命題の性質(i)〜(iv)は逆にDを特徴付ける，すなわち，次が成り立つ．

<u>命題</u>． $A, B, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}_i, K, D$ は上と同じとし，D' を A を含む B の部分環で次をみたすものとする：

(i) D' の素イデアル $\mathfrak{P}$ で A との交わりが $\mathfrak{p}$ となるものは唯一つ存在する．

(ii) $\mathfrak{P} = D' \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i)$．

(iii) $Q(D'/\mathfrak{P})$ は K の部分体である．

このとき，D' は D の部分環である．すなわち，D は(i),(ii),(iii)を満たす最大の B の部分環である．

最後にWNに対する"構造定理"を述べる．

<u>定理</u>． A をネーター環，B を A の拡大環で A 上有限加群となっているものとする．もし A が B でWNなら，B の部分環の列

$$B = B_0 \supset B_1 \supset \cdots \supset B_{n-1} \supset B_n = A$$

で，B_{i+1} が B_i から A の素イデアル上の弱い貼り合わせによって得られるものが存在する．

参考文献

[1] A. Andreotti & E. Bombieri, "Sugli omeomorfismi delle varietà algebriche", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 23 (1969), 430 − 450.

[2] S. Greco & C. Traverso, "On seminormal schemes", Composito Math., 40 (1980), 325 − 365.

[3] R, Gilmer & R. C. Heitmann, "On Pic(R[X]) for R seminomal, (to appear)

[4] E. Hamann, "On the R-equivalence of R[X]", J. Alg. 35 (1975), 1 − 17.

[5] J. V. Leahy & M. A. Vitulli, "Seminomal rings and weakly normal varieties", preprint.

[6] M, Manaresi, "Some properties of weakly normal varieties," Nagoya Math. J., 77 (1980), 61 − 74.

[7] C. Traverso. "Seminormality and Picard group". Ann, Scuola Norm. Supe. Pisa, 24 (1970), 585 − 595.

(S_2)-拡大環をもつネーター環について

奈良大・理　伊藤史朗

以後環Aの拡大環とはAとAの全商環$Q(A)$との中間の環のことであると約束する。Serreの条件(S_1)をみたすnoeth.環Aが(S_2)をみたす有限拡大環をもつ必要十分条件については，最近私が得た次の定理がある。

Theorem. Aを(S_1)をみたすnoeth.環，$\Delta = \{P \in Spec(A) \mid ht\,P \geq 2,\ depth\,A_P = 1\}$とおくと次の主張は同値である：

(1) Aは有限(S_2)拡大環をもつ．

(2) Δは有限集合であって，各$\mathfrak{q} \in Spec(A)$に対し$(A_\mathfrak{q})^g$は$A_\mathfrak{q}$上essentially finite．

ここでは，Aが局所整域のときはΔの有限性は不要であることを中心に上の定理の別証明等を述べたいと思う．

§1. global transform について

Noeth.環Aのglobal transform A^gとは次のようなAと$Q(A)$との中間の環のことである。$A^g = \{x \in Q(A) \mid x \in A$ or $\dim A/A:_A x$

$=0\}$。定義より容易に $A^g=A \Leftrightarrow$ 任意の極大 ideal M について $\operatorname{depth} A_M \neq 1$ となっていることがわかる。又，Matijevic により

(1.1) A と A^g との中間の環 B と A の正則元 t に対し B/tB は有限生成 A-加群

となることが知られている。従って A が局所環であれば B は半局所環であり，A が整域であれば B は noeth. となる。

次に A を noeth. 局所環，$\dim A \geqq 2$，$\operatorname{depth} A = 1$ とし，A と $\overline{A}$ ($= A$ の $Q(A)$ における整閉包）との中間の環 C に対し次のことが成立する（[N, Theorem (1.6)]，[I, (2.11)]）。

(1.2) $B = A^g \cap C$ とおくと C の高さ 1 の極大 ideal N について

$$B_{N\cap B} = C_{N\cap B} = C_N.$$

従って

(1.3) C が次のいづれかの場合：

(a) $C = \overline{A}$,

(b) C は noeth. であって高さ $\geqq 2$ の極大 ideal N について $\operatorname{depth} C_N \geqq 2$

であれば，$t \in B$ の正則元で，t を含む B の極大 ideal 全体が丁度 B の高さ 1 の極大 ideal 全体と一致するようにとれば

$$A^g = B_t$$

となる。とくに A が finite (S_2)-拡大環をもてば A^g は A 上

essentially finite となる。 2 A が unibranched (で $\dim A \geqq 2$) であれば A^g は A 上 integral である。

§2. A^g が A 上 essentially finite となるための条件

最初に:

(2.1) A を noeth. 局所環, C を A と A^g との中間の環で A 上有限 (加群として) とすると 次は同値である:

(a) C の高さ $\geqq 2$ の極大 ideal N について depth $C_N \geqq 2$.

(b) ある積閉集合 $S \subset C$ が存在して $A^g = S^{-1}C$.

(c) ある $t \in C$ が存在して $A^g = C_t$.

上の事実を用いると

(2.2) Proposition. (A, m), (A', m') を noeth. 局所環, $f: A \to A'$ を flat local hom. $m' = \sqrt{mA'}$ とする。さらに depth $A \geqq 1$, A' は regular local ring の residue ring であるとすると次の三条件は同値。

(a) A^g は A 上 essentially finite.

(b) A'^g は A' 上 essentially finite.

(c) A' の emb. prime ideal P に対し $\dim A'/p \geqq 2$.

証明. (a) $\Rightarrow$ (b) は $A'^g = A^g \otimes_A A'$ であることより明らか. (b) $\Rightarrow$ (a), (c) は (2.1) より出る. (c) $\Rightarrow$ (b): global transform

の定義をふり返ることにより A' は $\dim A'/p=1$ となる min. prime ideal P をもたない場合に帰着できる。この場合は EGA IV (5.11.1) により A'^{g} は A' 上 finite.

Corollary　A の formal fibres が (S_1) をみたせば A の prime ideal P に対し $(A_P)^{s}$ は A_P 上 essentially finite.

Corollary　A を geom. unibranched local domain で $\dim A \geqq 2$ とすると　$A^{(1)}$ が A 上 finite $\Leftrightarrow$ 任意の $P \in \mathrm{Spec}(A)$ に対し $(A_P)^{g}$ は A_P 上 essentially finite

証明. $(\Rightarrow)$: $A^{(1)}$ は (S_2) をみたすので §1 の最後に述べた事実により主張は成立. $(\Leftarrow)$: P を A の prime ideal で $\mathrm{ht}\, P \geqq 2$, P' を $P\hat{A}$ の min. prime ideal とする。EGA IV (18.9.7.1) より $\mathrm{Spec}(\hat{A}_{P'}) - \{P'\hat{A}_{P'}\}$ は connected であるから, $A'=\hat{A}_{P'}$ の min. prime ideal Q で $\dim A'/Q=1$ となるものは存在しない。よって (2.2) より A' の ass. prime ideal Q について $\dim A'/Q \geqq 2$. EGA IV (7.2.3) より $A^{(1)}$ は A 上 finite.

§3. essential finiteness と環の拡大.

(3.1) Lemma.　$A \subseteq B$ を共に noeth. domain で B は A 上 finite とする。このとき B^{g} は A^{s} 上 finite.

証明.　B はある free A-module A^{n} に含まれるとしてよい。この

とき $B^g \subset (A^g)^n$ となる。A^g は noeth. であったから B^g は finite A^g-module となる。

<u>Corollary</u>. A^g が A 上 essentially finite $\Rightarrow$ B^g は B 上 essentially finite.

<u>Corollary</u>. さらに B は unibranched, $\dim A \geq 2$ とすると A^g が A 上 essentially finite $\Rightarrow$ B^g は B 上 finite.

以上の結果を用いると次の命題が証明出来る。

<u>Proposition</u>. A を noeth. 局所整域とすると次の主張は同値.

(a) A は finite (S_2)-拡大環をもつ

(b) 任意の $P \in \mathrm{Spec}(A)$ に対し $(A_P)^g$ は A_P 上 ess. finite.

<u>証明</u>. (a) $\Rightarrow$ (b) は §1 の最後に述べてある。

(b) $\Rightarrow$ (a): A の finite な拡大環 B で geom. unibranched なものをとる。(3.1) の Cor. 及び (2.1) の Cor. より $B^{(1)}$ は B 上 finite. 従って $B^{(1)}$ がもとめるものの1つである。

(整域の場合の) Theorem の証明: (2) $\Rightarrow$ (1) を示せばよい。A の finite な拡大環 B で各 $P \in \Delta$ に対し B_P は geom. unibranched なものをとる。このとき $\forall P' \in \mathrm{Spec}(B)$ such that $\mathrm{ht}\, P \geq 2$ に対し $(B_{P'})^g$ は $B_{P'}$ 上 finite, $\Delta' = \{P' \in \mathrm{Spec}(B') \mid \mathrm{ht}\, P' \geq 2,$

depth $B_{p'} = 1\}$ は有限集合となる。 $\mathfrak{a} = \bigcap_{p' \in \Delta'} p'$ とおき

B の $\mathfrak{a}$-transform を考えると これは B 上 finite ([N, (2.6.2)]),

又 $B^{(1)} = B$ の $\mathfrak{a}$-transform である。よって $B^{(1)}$ がもとめるも

のである。

References

[I] S. Itoh ; Z-transforms and overrings of a noetherian ring, Hiroshima Math. J. Vol. 10 (1980)

[N] J. Nishimura, On ideal transform of noetherian rings, I, II, J. Math. Kyoto Univ. 19 (1979), 20 (1980)

[EGA] A Grothendieck, Eléments de geometrie algebrique, Publ. IHES. 24

[M] J. Matijevic, Maximal ideal transforms of noetherian rings, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976).

Multicross singularityについて

広島大理　大石 彰

§0. 序. Seminormal ring(半正規環)及び, weakly normal ring(弱正規環)と呼ばれる環については,現在まで色々なことが知られています.(ここではそれらについては述べないので, Greco-Traverso[2], Manaresi[4], 大石[6]等を参照して下さい.)

所で, seminormal ringの理論で重要なのは,素イデアルの貼り合わせ(gluing)という概念です.(例えば,構造定理により, seminormal Mori ringは, normal ringから有限回の貼り合わせで得られる.)これは幾何的な概念で, seminormal ringの例を沢山作ってみせるのに有効です.一番簡単なのは極大イデアルの貼り合わせ(即ち,点を貼り合わせる)で得られる場合で,このとき事情は非常に簡単でよく分る.そこで,その次に簡単な貼り合わせはどのようなものか,ということですが,最近LeahyとVitulliが,有限個のアフィン空間をそれらに共通なアフィン部分空間で貼り合わせ,その特異点と解析的に同型となる特異点を考え,それを"multicross singularity(多重交叉特異点)"と呼んだ．

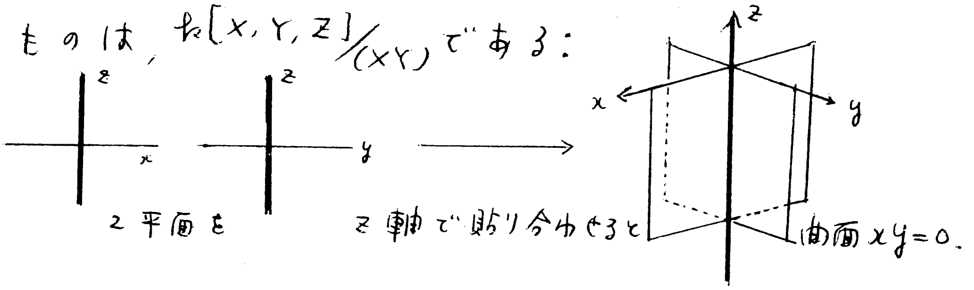
ここでは，この概念を一般のネーター局所環に拡張し，それらの色々な環論的性質(いつMacaulay etcになるか等)を調べ，かつそれを一般のseminormal ringの研究に利用しよう，というのが目的です．

そのために先ず，「有限個の環を，ある環に沿って貼り合わせる」ということを考えます．「貼り合わせ」は環論的に見れば「引き戻し(pull-back)」に他ならないから，それをpull-back図式を使って定義する訳です．次に，有限個の正則整域を或る正則整域に沿って貼り合わせた"multiglued ring(多重貼付環)"というものを考え，それと形式的に同型な局所環のことを"multi-cross local ring(多重交叉局所環)"と定義します．

§1. 本論. $B_1, \cdots, B_r$ $(r \geqq 2)$ 及び C が環で，全射準同型 $B_i \to C$ が与えられているとする．但し，全てが同型ではないとする．$B = \prod_{i=1}^{r} B_i$, $D = \prod^{r} C$ とおき，環 A を次のpull-back図式で定義する：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & \prod B_i = B \arrow[d] \\ C \arrow[r, "(\text{対角射})"'] & \prod C = D. \end{tikzcd}$$

このとき，A は「$\{B_1, \cdots, B_r\}$ から $\{B_i \to C\}$ に沿って貼り合わせて得られた環」と言う．例えば，$\{k[X,Z], k[Y,Z]\}$ を $\{k[X,Z] \to k[Z], k[Y,Z] \to k[Z]\}$ に沿って貼り合わせたものは，$k[X,Y,Z]/(XY)$ である：



与えられた B_i, C についてのデータから A についての情報が色々得られるが，ここでは省略する．

<u>定理-定義</u>．A が被約なネーター環で $\mathrm{Min}(A) = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r\}$ $(r \geqq 2)$ とする．このとき，次の条件は同値：

(1) A は有限個の正則整域をある正則整域に沿って貼り合わせて得られる環（即ち，上の記号で，B_i, C が全て正則整域）．

(2) $\exists\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ s.t. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i + \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ for all i，かつ $A/\mathfrak{p}_i$, $A/\mathfrak{p}$ は正則．

(3) $\exists\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ s.t. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j$ $(i \neq j)$ で，A は weakly normal（又は seminormal）かつ $A/\mathfrak{p}_i$, $A/\mathfrak{p}$ は正則．

(4) $\exists\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ s.t. $0 \to A \to \prod_{i=1}^{r} A/\mathfrak{p}_i \xrightarrow{p} \prod^{r-1} A/\mathfrak{p} \to 0$

が完全，但し，$p(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_r) = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_r - \bar{x}_1)$，かつ $A/\mathfrak{z}_i$，$A/\mathfrak{z}$ が正則．

このとき，A は multiglued ring（多重貼付環），$\mathfrak{z}$ をその center（中心）と言う．（便宜上，正則整域も，multiglued ring と呼ぶ．）

このとき，$B = \prod_{i=1}^{r} A/\mathfrak{z}_i$ が A の整閉包，$\mathfrak{z} = c(B/A)$（B の A への導手），かつ $A = A_B^+(\mathfrak{z})$，即ち，A は B から $\mathfrak{z}$ 上の貼り合わせで得られる環である．更に，A は universally catenary な weakly normal（従って seminormal）Mori ring で，$\operatorname{depth} A_{\mathfrak{z}} = 1$ であることも分る．A が局所環なら A は解析的不分岐（即ち $\hat{A}$ が被約）で，$\hat{A}$ も multiglued ring である．

<u>定義</u>．ネーター局所環 A は，完備化 $\hat{A}$ が multiglued ring のとき，multicross local ring（多重交叉局所環）と言う．

<u>例</u>．$n \geq 2$，$m \geq 0$，$r \geq 2$ を整数，$\{I_s \mid 1 \leq s \leq r\}$ を $\{1, 2, \cdots, n\}$ の分割，k を体として，

$$B_s = k[X_i ; i \in I_s, Y_1, \cdots, Y_m] \to C = k[Y_1, \cdots, Y_m]$$

を，$X_i \mapsto 0$ で定まる自然な準同型とすると，$\{B_s\}$ から，$\{B_s \to C\}$ に沿って貼り合わせて得られる環（これは multiglued ring）は，

$$A = k[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m] / (X_i X_j \mid i \in I_s, j \in I_t, s \neq t).$$

同様に，k が付値体（付値は自明でもよい）のとき，上の多項式環を収束巾級数環でおきかえて，

$$A = k\langle\langle X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m \rangle\rangle / (X_i X_j \mid i \in I_s, j \in I_t, s \neq t)$$

も multiglued ring である。

逆に，A が k 上の locality で剰余体が k，又は A が analytic k-algebra のときは，A が multicross local ring $\Leftrightarrow$ $\hat{A}$ は $k[[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m]] / (X_i X_j \mid i \in I_s, j \in I_t, s \neq t)$ の形の環と同型，が分る。

この最後の事実は，我々の定義した multicross local ring が，Leahy-Vitulli が（標数 0 の）代数的閉体上の locality に対して定義した multicross local ring の定義と一致していることを示している。

<u>命題</u> multicross local ring は weakly normal な Mori ring である。

定理. $(A, \mathfrak{m})$ が multiglued local ring で，正則でないとし，$\mathfrak{z}$ を center，$d = \dim A/\mathfrak{z}$ とおくと，

(1) $\operatorname{depth} A = d + 1$.

(2) A が equidimensional $\Leftrightarrow$ $H^k_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ for all $k \neq \operatorname{depth} A, \dim A$.

(3) A が Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow$ $\operatorname{ht} \mathfrak{z} = 1$.

(4) A が Cohen-Macaulay でないとき，A が Buchsbaum $\Leftrightarrow$ A が equidimensional かつ $\mathfrak{z} = \mathfrak{m}$（即ち $\operatorname{depth} A = 1$）．更にこのとき "Buchsbaum 不変量" $I(A) = (n-1)(n-2)(r-1)/2$，但し，$n = \dim A$，$r = \# \operatorname{Min}(A)$.

(5) A が Gorenstein $\Leftrightarrow$ A が complete intersection $\Leftrightarrow$ A が Cohen-Macaulay で，既約成分は丁度2個．

(6) $\operatorname{Min}(A) = \{\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_r\}$ とすると，

$$\operatorname{emdim}(A) = \sum_{i=1}^{r} \dim A/\mathfrak{z}_i - (r-1)d.$$

系. $(A, \mathfrak{m})$ が multicross local ring のとき，

(1) A が equidimensional, universally catenary $\Leftrightarrow$ $H^k_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ for all $k \neq \operatorname{depth} A, \dim A$.

(2) A が Gorenstein $\Leftrightarrow$ A が complete intersection $\Leftrightarrow$ A は Cohen-Macaulay で，高々2個の analytic branch

をもつ.

例. Aがk上のlocalityで剰余体がk, 又はanalytic k-algebraでmulticross local ringであるとすると,

AがCohen-Macaulay $\Leftrightarrow$ $\hat{A} \cong k[[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m]]/(X_iX_j \mid i \neq j)$

AがGorenstein $\Leftrightarrow$ $\hat{A} \cong k[[X_1, X_2, Y_1, \cdots, Y_m]]/(X_1X_2)$.

定理. $(A, \mathfrak{m})$が正則でないmulticross local ringでdepth $A = 1$とすると, $G(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$はmultiglued ring, $R(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n$はweakly normal ringである.
更に, AがCohen-Macaulay (resp. Gorenstein) $\Leftrightarrow$ $G(A) = k[X_1, \cdots, X_n]/(X_iX_j \mid i \neq j)$ (resp. $G(A) = k[X, Y]/(XY)$).

定義. 環Aは, 整閉包が正則環のとき, smooth normalizationを持つと言う.

定義. 環Aの整閉包をBとして, 任意の$\mathfrak{n} \in \mathrm{Max}(B)$に対し, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$とおいて$A/\mathfrak{m} = B/\mathfrak{n}$が成り立つとき, Aはrational normalizationを持つと言う.

例えば，剰余体が代数的閉体であるような局所環は rational normalization を持つ．従って代数的閉体上有限生成な環や，その極大イデアルによる局所化，又，代数的閉体上の analytic algebra 等は rational normalization を持つ．

<u>命題</u>．$(A, \mathfrak{m})$ が smooth かつ rational な normalization を持つ Mori ring で isolated singularity (i.e., $A_{\mathfrak{p}}$ が正則 for all $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$) であるとすると，

A が multicross $\Leftrightarrow$ A が seminormal．

<u>系</u>．(Davis) A が rational normalization を持つ 1 次元 Mori local ring のとき，

A が multicross $\Leftrightarrow$ A が seminormal．

次の定理 (multicross local ring の特徴付け) は Leahy-Vitulli による定理を，我々の定義した multicross local ring の場合に拡張したものである：

<u>定理</u>．A が $\overbrace{\text{excellent}}^{\text{被約な}}$ local ring のとき，A が

multicross であるためには，A が次の3つの条件を満たすことが必要十分である：

(1) A は smooth, rational normalization B を持つ，

(2) $\Omega_{B/A} = 0$，

(3) A が normal でないとき，$c = c(B/A)$ とおくと，B/c は自由 A/c-加群で，A/c は正則局所環である．

次に，以上の結果を使って代数多様体の weakly normal singularity について調べる．X が代数的閉体 k 上の被約代数的スキーム，X_0 をその閉点全体の集合とする．

系．$S = \{ x \in X_0 \mid \mathcal{O}_{X,x} \text{ は multicross} \}$ は X_0 の開集合である．

<u>命題</u>．$F_0 = X_0 - S$ とおく．$\mathrm{char}(k) = 0$ か，又は X が quasi-normal (即ち，(S_2) かつ (Gor_1)) のときには，X が weakly normal $\Leftrightarrow \mathrm{codim}(F_0, X_0) \geqq 2$．

次の定理の(2)は Cumino-Manaresi による結果を我々の multicross local ring を使って示したもので

ある：

<u>定理</u>. X は (S_2) を満たすとする.

(1) $\mathrm{char}(k)=0$ のとき, X が weakly normal
$\Leftrightarrow$ $\exists U$: X の開集合 s.t. $\mathrm{codim}(X-U, X) \geqslant 2$ かつ
$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong k[[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m]]/(x_i x_j \mid i \neq j)$ for all
$x \in \mathrm{Sing}(U) \cap X_0$.

(2) (Cumino-Manaresi) X が weakly normal
かつ quasi-normal $\Leftrightarrow$ $\exists U$; X の開集合 s.t.
$\mathrm{codim}(X-U, X) \geqslant 2$ かつ $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong k[[x_1, \cdots, x_n]]/(x_1 x_2)$
for all $x \in \mathrm{Sing}(U) \cap X_0$.

(以上の話について, 証明等詳しいことを知りたい方は, 大石[6]を参照して下さい.)

参考文献.

[1] C. Cumino and M. Manaresi, On the singularities of weakly normal varieties, to appear.

[2] S. Greco and C. Traverso, On seminormal schemes, Compositio Math. 40 (1980), 325-365.

[3] J. L. Leahy and M. A. Vitulli, Weakly normal varieties: The multicross singularity and some vanishing theorems on local cohomology, preprint.

[4] M. Manaresi, Some properties of weakly normal varieties, Nagoya Math. J. 77 (1980), 61–74.

[5] 大石, On seminormal rings (general survey), 数理研講究録 No. 374 (1980), 1–17.

[6] 大石, Multiglued rings and multicross local rings, manuscript.

(December, 1980)

On the root closedness in formal power series rings

Osaka univ. Hiroshi Inagaki

Let B be a ring and A a subring of B. For a positive integer n, we say that A is n-root closed in B if α is an element of B with $\alpha^n \in A$, then $\alpha \in A$. If A is n-root closed for any positive integer n, then we call A root closed in B. Brewer, Costa, and McCrimmon (J. of Alg. 58) have shown that if A is root closed in B then A[X] is root closed in B[X] by an arithmetical method. Replacing the polynomial extension by the formal power series extension we take up the problem: Is A[[X]] root closed in B[[X]] when A is root closed in B?

This question is not affirmative in general. But if we impose an additional assumption; B is integral over A, then the assertion is true. This is our main theorem. For this proof the subrings $F_i(A,B)$ introduced by K. Yoshida play an important role. Indeed A is root closed in B if and only if $F_i(A,B)$ is root closed in $F_{i-1}(A,B)$ for all i. In this seminar we give a criterion of the root closedness using the subrings $F_i(A,B)$ and subsets $D_i(A,B)$ of Spec A.

In this paper we assume that A is a noetherian domain whose integral closure $\bar{A}$ is a finite A-module and B is an extensional domain over A.

Proposition. Let $C = \{\alpha \in B;\ \alpha$ is integral over $A\}$. Then A is root closed in B if and only if A is root closed in $C \cap Q(A)$ and $Q(A)$ is root closed in $Q(C)$.

Therefore we may separetely syudy the root closedness in the case (i) birational and integral extension of rings and (ii) fields extension.

Case (i); the following is a creiterion of the root closedness.

Proposition. Let B be an intermediate ring between A and $\bar{A}$. Then A is root closed in B if and only if the following conditions are satisfied;

(i) A is seminormal in B,

(ii) for any i and any $p \in D_i(A,B)$, there exists only one prime ideal P of $F_{i-1}(A,B)$ lying over p, and

(iii) the residue field $\kappa(p)$ is root closed in $\kappa(P)$.

Case (ii); Let K be an extensional field over a field k. Denote the separable closure of k in K by k_s and the purely inseparable closure of k in K by k_i.

Proposition. Let K be a finite algebraic extension of k. Then k is root closed in K if and only if k is root closed in k_s and $k_i = k$.

Theorem. If A is root closed in B, then $A[X]$ is root closed in $B[X]$. Moreover if B is integral over A, then $A[[X]]$ is root closed in $B[[X]]$.

Remark. In this theorem the condition that B is integral over A cannot be omitted. Let $A = k[t]$ and $B = k[t,\frac{1}{t}]$, where k is a field with char $k \neq 2$. Then A is integrally closed in B, so is root closed in B. But $A[[X]]$ is not root closed in $B[[X]]$. Indeed let $f(X) = t + \sum_{j\geq 1} \frac{x_j}{t^{2j-1}} X^j$, where x_j's are elements of k and satisfy that $x_1 \neq 0$ and $2x_n + \sum_{j=1}^{n-1} x_j x_{n-j} = 0$. Then $f(X) \notin A[[X]]$ and $f(X)^2 = t^2 + 2x_1 X \in A[[X]]$.

Since $\bar{A}$ is a finite A-module, we have $\overline{A[[X]]}$ $= \bar{A}[[X]]$. Hence the following is obtained.

Corollary. If A is root closed in $Q(A)$, then $A[[X]]$ is root closed in $Q(A[[X]])$.

Let char $A = p > 0$. With respect to the p-root closedness, our problem is easily seen by an arithmetical method in general. Recently Yanagihara and Ooishi have informed us that the p-root closedness and the weakly normality are equivalent.

Birational integral extensions of rings and Picard groups

阪大 理　小野田信春

A を reduced Noetherian ring，$A[X]$ を A 上の多項式環とする．このとき，$\mathrm{Pic}\,A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}\,A[X]$ となるための必要十分条件は，A が seminormal ring になることである．この定理は最初 Traverso が [4] において証明したが，そのときは A の整閉包 $\bar{A}$ が finite A-module であるという仮定を入れていた．以下では，この仮定を除いた場合の定理の証明を（少し一般化した定理を証明することにより）与えてみたい．

1. 主定理

以下で取り扱う環は全て可換で単位元 1 をもつと仮定する．このとき，次の定理が成り立つ．

<u>Theorem</u>　A を reduced Noetherian ring，B を A の birational integral extension ring とする．ここで次の（自然

な準同型よりなる)可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Pic}\,A & \xrightarrow{j_A} & \mathrm{Pic}\,A[X] & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\,j_A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathrm{Pic}\,B & \xrightarrow{j_B} & \mathrm{Pic}\,B[X] & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\,j_B \end{array}$$

このとき、

φ が injection $\Leftrightarrow$ A は B の中で seminormal

一般に、M を $A[X]$-module とするとき、M が extended であるとは、ある A-module N があって、$M \cong N \otimes_A A[X]$ となることをいう。ここで、M が invertible $A[X]$-module ならば、N は invertible A-module である。従って定理は、invertible $A[X]$-module M について、$M \otimes_{A[X]} B[X]$ が extended ならば M 自身 extended であるということと、A が B の中で seminormal であるということとが同値であるということを主張している。ところで、容易にわかるように、invertible $A[X]$-module M に対し、$M \otimes_{A[X]} B[X]$ が extended $\Leftrightarrow$ ある中間環 $A \subseteq C \subseteq B$, C は finite A-module, があって、$M \otimes_{A[X]} C[X]$ が extended.
よって、定理を証明するに際しては、B を finite A-module と仮定しても構わない。そこで、以下では B は finite

A − module であるとする.

2. 定理の証明

まず、次の lemma を用意する.

<u>Lemma</u> $A \subseteq C \subseteq B$ を任意の中間環とし、$\mathfrak{c} = I(C/A)$ (= conductor ideal) とおくとき.

$$0 \to \operatorname{Coker} j_A \to \operatorname{Coker} j_{A/\mathfrak{c}} \oplus \operatorname{Coker} j_C \quad (\text{exact})$$

$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{c}$ は radical ideal of C

<u>証明</u>.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
A/\mathfrak{c} \arrow[r] & C/\mathfrak{c}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A[X] \arrow[r] \arrow[d] & C[X] \arrow[d] \\
A/\mathfrak{c}[X] \arrow[r] & C/\mathfrak{c}[X]
\end{tikzcd}$$

なる pull-back diagram を考え、これから得られる Mayer-Vietoris sequence を作ると次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
U(A) \arrow[r] \arrow[d] & U(A/\mathfrak{c}) \oplus U(C) \arrow[r] \arrow[d] & U(C/\mathfrak{c}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic} A \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic} A/\mathfrak{c} \oplus \operatorname{Pic} C \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic} C/\mathfrak{c} \arrow[d] \\
U(A[X]) \arrow[r] \arrow[d] & U(A/\mathfrak{c}[X]) \oplus U(C[X]) \arrow[r] \arrow[d] & U(C/\mathfrak{c}[X]) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic} A[X] \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic} A/\mathfrak{c}[X] \oplus \operatorname{Pic} C[X] \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic} C/\mathfrak{c}[X] \\
0 \arrow[r] & \dfrac{U(A/\mathfrak{c}[X])}{U(A/\mathfrak{c})} \arrow[r, "\sigma"] & \dfrac{U(C/\mathfrak{c}[X])}{U(C/\mathfrak{c})} \arrow[r] & \operatorname{Coker} j_A \arrow[r] & \operatorname{Coker} j_{A/\mathfrak{c}} \oplus \operatorname{Coker} j_C &
\end{tikzcd}$$

このとき、容易にわかるように、σ : surjection $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{b}$: radical ideal of C. 従って lemma がいえる.

<u>定理 $\Rightarrow$ の証明</u>　$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, j_A \longrightarrow \mathrm{Coker}\, j_B$ (exact) として、任意の中間環 $A \subseteq C \subseteq B$ を考える。このとき、$0 \to \mathrm{Coker}\, j_A \to \mathrm{Coker}\, j_C$ (exact) ゆえ lemma より、$I(C/A)$ は radical ideal of C となる。C は任意ゆえ、従って A は B の中で seminormal である.

<u>定理 $\Leftarrow$ の証明</u>　A : seminormal in B とすると、$^\exists$sequence of subrings of B, $A = A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_1 \subset A_0 = B$, A_{i+1} ; obtained from A_i glueing over some $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$.
$0 \to \mathrm{Coker}\, j_A \to \mathrm{Coker}\, j_B$ (exact) をいうには、$0 \to \mathrm{Coker}\, j_{A_{i+1}} \to \mathrm{Coker}\, j_{A_i}$ (exact) for $^\forall i$ をいえばよいから、最初から A は B から $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ 上 glueing して得られると仮定してよい。このとき、

$A = \{ b \in B \mid sb \in A \ {}^\exists s \in A \setminus \mathfrak{p} \}$, $I(B/A) = \mathfrak{p}$.

よって lemma より、$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, j_A \xrightarrow{(\psi, \varphi)} \mathrm{Coker}\, j_{A/\mathfrak{p}} \oplus \mathrm{Coker}\, j_B$ (exact). ただし、$\psi : \mathrm{Coker}\, j_A \to \mathrm{Coker}\, j_{A/\mathfrak{p}}$ は natural hom. である。そこで φ : injection をいうには、次の

ことがいえればよい：　$\varphi(\alpha)=0 \Rightarrow \psi(\alpha)=0 \quad (\alpha \in \mathrm{Coker}\, j_A)$
すなわち、invertible $A[X]$-module M に対し、$M \otimes_{A[X]} B[X]$: extended $\Rightarrow$ $M/\mathfrak{g}M$: extended.　ところで、すぐわかるように、$M \otimes_{A[X]} B[X]$: extended $\Rightarrow$ $M/\mathfrak{g}M \otimes_{A/\mathfrak{g}[X]} B/\mathfrak{g}[X]$: extended.
また、一般に、M が extended $A[X]$-module $\Leftrightarrow$ M_m が extended $A_m[X]$-module for $^\forall m$: maximal ideal of A となることに注意する（[3]参照）。　以上をまとめると結局、次の事実が示せれば、証明は完結する。

<u>Lemma</u>　A を local domain, $A \subset B$ を finite extension of rings で、$A = \{ b \in B \mid ab \in A \ \ 0 \neq {}^\exists a \in A \}$ をみたすものとする。$\mathfrak{a}$ を invertible (integral) $A[X]$ ideal とするとき、

$$\mathfrak{a}B[X] = bB[X] \quad ({}^\exists b \in B) \Rightarrow \mathfrak{a} = aA[X] \quad ({}^\exists a \in A)$$

<u>証明</u>　次の順に示せばよい。

1°)　$\mathfrak{a} \cap A = \mathfrak{a}_0$　とするとき、$\mathfrak{a}B[X] \cap A = \mathfrak{a}_0$

証明は省略する。

2°)　$bB \cap A = \mathfrak{a}_0$

これは1°)より明らかである。

3°)　$\mathfrak{a}/X\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$

実際　$\mathfrak{a}B[X] = \mathfrak{b}B[X] \Rightarrow \mathfrak{a}/X\mathfrak{a}\cdot B = \mathfrak{b}B$.　よって．$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}B \cap A = \mathfrak{a}/X\mathfrak{a}\cdot B \cap A \supseteq \mathfrak{a}/X\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}$。

4°)　$\mathfrak{a} = aA[X]$　$(^{\exists} a \in A)$

実際　$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}/X\mathfrak{a}$ は invertible ideal of A であり．A は local ゆえ．$\mathfrak{a}_0 = aA$　$(^{\exists} a \in A)$．よって．2°) より．$\mathfrak{b}B \cap A = aA$．すると．容易にわかるように．このとき　$\mathfrak{a} = aA[X]$　となる．以上で証明できた．

参考文献

[1] H. Bass : Algebraic K-theory, Benjamin, New York.

[2] R. Gilmer - R.C. Heitmann : On Pic(R[X]) for R seminormal, J. Pure Applied Alg. 16 (1980), 251-257.

[3] D. Quillen : Projective modules over polynomial rings, Invent. Math. 36 (1976), 167-171.

[4] C. Travelso : Seminormality and Picard groups, Annali della Scoula Norm. Sup. - Pisa 24 (1970), 585-595.

（追記） F. Ischebeck : Zwei Bemerkungen über seminormale Ringe, Math. Z. 152 (1977) 101-106 に同一の定理が取り扱われていることを．大石彰さんに教わりました．

DOMAINS WITH TRIVIAL IDEAL-TRANSFORMS

Takasi SUGATANI (Toyama Univ.)

Let R be an integral domain and K be field of quotients. Let I be an ideal of R. The ideal-transform of I, denoted by $T(I)$, is the set of elements x of K such that $xI^n \subseteq R$ for some positive integer n. Clearly $T(I)$ is an overring of R.

1. The following facts are well known on ideal-transforms: Let I be an ideal of R.

(a) If I is finitely generated, say $a_1, \ldots, a_r$, then $T(I)$ coincides with the intersection of $T(a_i)$'s, $i = 1,\ldots,r$.

(b) If I is finitely generated, and it is contained in the intersection of the non-zero prime ideals, then $T(I)$ coincides with K.

(c) If the radical of I is finitely generated, then $T(I)$ coincides with the ideal-transform of the radical of I.

In the above statements, the assumptions are essential; that is, I is finitely generated in (a) and (b), and the radical of I is finitely generated in (c). J. Brewer and L. Ramella pointed out this with non-discrete valuation rings of rank one.

2. We consider the following conditions on R:

(P): For each principal ideal $I \neq R$, $T(I)$ coincides with K.

(Q): For each ideal $I \neq R$, $T(I)$ coincides with K.

Though these conditions might be too strong, it is of interest to characterize such domains by its structure as follows:

R satisfies the condition (P) if and only if it is either one-dimensional local or a field.

R satisfies the condition (Q) if and only if it is local with maximal ideal, say m, in which the following holds: For each non-zero principal ideal I, there is a power m^n of m such that $m^n \subseteq I$.

3. We remark the followings.

(1) Every Noetherian one-dimensional local domain satisfies the condition (Q). This was already known (J. Matijevic).

(2) A one-dimensional local domain does not satisfy the condition (Q) if and only if it does not hold any of (a), (b) or (c) without the finiteness assumptions.

(3) In one-dimensional local domain R, we have the followings on the ideal-transforms:

If R satisfies the condition (Q), then $T(I)$ coincides with K for $I \neq R$.

If R is a non-discrete valuation ring, then $T(I)$ is either R itself or K.

(*) If R is one-dimensional local domain which neither satisfies the condition (Q) nor is a non-discrete valuation ring, then $T(I) = ?$

High order derivation の延長について

山内紀夫（聖徳学園女子短大）

High order derivation の integral closure への延長について Vigué と Becker による結果を紹介する。まず high order derivation の定義を述べておく。

k を ring, A を k-algebra, q を自然数とする。k-linear map $D: A \to A$ が k-derivation of order q であるとは $\forall x_0, \cdots, x_q \in A$ について

$$D(x_0 \cdots x_q) = \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_s} x_{i_1} \cdots x_{i_s} D(x_{i_0} \cdots \hat{x}_{i_1} \cdots \hat{x}_{i_s} \cdots x_q)$$

が成立つことをいう（$q=1$ のときが通常の derivation）

k-derivation of order q の全体を $\mathrm{Der}_k^{(q)}(A)$ で表すとこれは自然に A-module になっている。

以下 k は体, $ch(k)=0$, A は noetherian domain とし $\bar{A}$ で A の商体の中での integral closure を表す。

さて次の問題を考える： $\mathrm{Der}_k^{(q)}(A) \subset \mathrm{Der}_k^{(q)}(\hat{A})$ となる（i.e. A の derivation が $\hat{A}$ に延長できる）ための条件は何か？

$q=1$ のときは常に成立することが知られている（Seidenberg）．又 A が (R_1) をみたせば $\forall q$，$\mathrm{Der}_k^{(q)}(A) \subset \mathrm{Der}_k^{(q)}(\hat{A})$ であることは次の２つの事に注意すれば容易にわかる

・$S \subset A$ が積閉集合のとき $\mathrm{Der}_k^{(q)}(A) \subset \mathrm{Der}_k^{(q)}(S^{-1}A)$

・A が (R_1) をみたせば $\hat{A} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}:\text{prime} \\ ht(\mathfrak{p})=1}} A_{\mathfrak{p}}$

A が analytic space の local ring のとき上の逆も成立している．最初に Vigué による curve の場合についての結果を述べると

<u>定理</u>　A を analytic curve の local ring $\hat{A} = \mathbb{C}\langle\langle t \rangle\rangle$，$N_0$ を「$n \geq N_0 \Rightarrow t^n \in A$」である自然数とする．このとき $\forall d \geq N_0$，$\forall k_0 \leq -d$ について　$\exists D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}^{(d)}(A)$　s.t.

$$D(t^n) = \sum_{k \geq k_0} P_k(n) t^{n+k},$$

P_k は polynomial in n, $P_{k_0} \neq 0$.

この定理から $\forall q$, $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}^{(q)}(A) \subset \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}^{(q)}(\hat{A})$ が成立つのは $A = \hat{A}$ という trivial な場合しかないことがわかる。D の構成は次の様な方針による。

$A \cap \mathbb{C}[t]$ の $\mathbb{C}$-vector space の basis として

$p_0 = 1, p_1, \cdots, p_s, t^{N_0}, t^{N_0+1}, \cdots\cdots$

をとる。ただし、$p_1, \cdots, p_s$ は polynomial で $\deg p_i < N_0$,

$0 < v(p_1) < v(p_2) < \cdots < v(p_s) < N_0 - 1$

(v は t-adic valuation)

を充たすものである。$v(p_j) = n_j$ とおく。

さて

$$D_0(t^n) = \sum_{k_0 \leq k < k_1} P_k(n) t^{n+k} \quad (k_0, k_1 \in \mathbb{Z}, P_k : \text{polynomial})$$

で定義される $\mathbb{C}$-linear map D_0 で次の２条件を充たしているものを考える。

$(\mathrm{i})_{k_1}$. $\forall p_r$ $(0 \leq r \leq s)$ について $D_0(p_r)$ は $\bmod t^{\inf(N_0, n_r + k_1)}$ で $\{p_j\}$ の linear compination.

(ii)$_{k_1}$ $\forall n \geq N_0$ について $D_0(t^n)$ は $\mathrm{mod}\ t^{\inf(N_0, n+k_1)}$ で $\{P_j\}$ の linear combination.

このとき $\mathrm{mod}\ t^{\inf(N_0, n_r+k_1+1)}$ で考えることによって polynomial P_{k_1} を適当にえらんで

$$D_0'(t^n) = \sum_{k_0 \leq k \leq k_1} P_k(n) t^{n+k}$$

としたとき D_0' が (i)$_{k_1+1}$, (ii)$_{k_1+1}$ を充たすようにすることができる. $k_1 = k_0$ (i.e $D_0 = 0$) からはじめてこの操作をくりかえすことにより ($k_1 = N_0$ まで) D を求めることができる.

Becker は高次元の場合に, curve に帰着することによって次の結果を得ている.

<u>定理</u> X を (irreducible) analytic space. $x \in X$, $A = \mathcal{O}_{X,x}$ とするとき

$$\forall q, \ \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}^{(q)}(A) \subset \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}^{(q)}(\hat{A})$$

$\Leftrightarrow$ A は (R_1) を充たす.

References

· J. Becker Higher derivations and integral closure (Am. J. of Math. vol. 100 (1978))

· J. P. Vigué Operateurs differentiels sur les espaces analytiques, Invent. Math. vol. 20. 1973

ASL (Algebras with Straightening Law) に関するいくつかの問題について.

渡辺敬一（名工大）

"不変式論"に於て、不変式環の生成元と関係式を決定するとき，ほとんど必らず，"straightening law"が登場する。これが最近 De Concini, Eisenbud, Procesi によって公理化され，"Algebras with Straightening Law"という概念が作られた。この公理化によって，"不変式論"に登場する不変部分環や，Grassmann Variety，Flag variety，Pfaffian variety などの座標環が partially ordered set（以下 poset と略す）と対応づけられ，更には simplicial complex の概念を通じて topology とも関係して来る。例えば，ある ASL が Cohen-Macaulay 環であるという事は，対応する poset が"Cohen-Macaulay である"という(概念を作り出し、かつ）事から導びかれる。つまり，一群の，"……は Cohen-Macaulay 環である"という命題たちの証明は対応する poset が Cohen-Macaulay poset であるという事の証明に帰着できる。逆に，（特に次元の低い場合には）poset の構造は環の構造よりわか

りやすいので，poset を与える事により，"良い"環の例を大量に構成できるのではないかという期待もかけられる。（実際 Eisenbud 氏は，"ASLという概念で，大量の rational singularity の例が作れる筈だ"と云っていた。）とにかく，ASLという概念は何やら非常に魅力的なもののようである。では，ASLという概念を研究して見ようではないか！

この稿の目的は（盲人が象に触れている類いになる恐れは非常に強いのだが），ASLの環論的側面に於ける"素朴な"問題をいくつか提出し，ASL研究の同好の士を募る事にある。ASLという概念の解説は，Eisenbud [1] が非常に秀れているので，興味をもたれた方は，是非，[1] または [2] を読んでいただきたい。なお，この稿には，（余りあてにならない）予想の類いばかりが多く，(著者による) きちんとした結果が全然ない事をお断りしておく。

§1. 定義と主な性質.

R を（可換で単位元をもつ）環，A を（可換な）R-algebra とする。H を A に含まれる有限 poset（partially ordered set）とする。Hの元の積を monomial，

$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in H$，$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_n$ のとき $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ を

standard monomial という。（1 も standard mono.）

$\alpha, \beta \in H$，$\alpha \not\geq \beta$，$\alpha \not\leq \beta$ のとき $\alpha \not\sim \beta$ とかく。

定義 1. A が ASL on H over R とは，

（ASL1）A は free R-module で，standard monomial たちを free basis としてもつ．

（ASL2）. $\alpha \not\sim \beta$ のとき，（ASL1）より，

$$\alpha\beta = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \gamma_{i1}\gamma_{i2}\cdots\gamma_{ik_i} \quad (r_i \in R,\ \gamma_{i1} \le \gamma_{i2} \le \cdots)$$

と standard monomial の和で書ける筈だが，このとき，$\forall i$，$\gamma_{i1} \le \alpha, \beta$．但し，$\alpha\beta = 0$ は許すが，右辺に定数（R の元）が出る（$k_i = 0$ となる事）は許さない．

（例えば，$\gamma \le \alpha, \beta$ なる $\gamma \in H$ が存在しなければ $\alpha\beta = 0$ となるしかない）．

Remark 2. 次の事柄がわかっている．（A は ASL on H over R とする）．

(i) $A = R[X_\alpha \mid \alpha \in H]/\mathfrak{a}$ と書くとき，$\mathfrak{a}$ は（ASL2）に対応する元で生成されている。特に $\mathfrak{a}$ は $\#\{\{\alpha, \beta\} \mid \alpha \not\sim \beta\}$ 個の元で生成されている。（一般には minimal generator とは限らないが）．

(ii) A が reduced $\Longleftrightarrow$ R が reduced.

(iii) $I \subset H$ が条件 "$\alpha \in I$, $\beta \in H$, $\beta \leq \alpha \Rightarrow \beta \in I$" をみたすとき，$I$ を ideal という．I が ideal のとき，$\mathfrak{a}_I = (\alpha \mid \alpha \in I)$ とおくと，$A/\mathfrak{a}_I$ は ASL on $H \setminus I$ over R となる。また，$\alpha \in H$ が H の極小元のとき，$0 : \alpha = (\beta \in H \mid \beta \not\geq \alpha)$ このように，ring の operation のいくつかが poset の言葉に翻訳可能となる。

<u>例</u> (i) H が任意の poset のとき，$R[H] = \dfrac{R[X_\alpha \mid \alpha \in H]}{(X_\alpha X_\beta \mid \alpha \not\sim \beta)}$ を <u>discrete</u> ASLと呼ぶ．

(ii) H が totally ordered, $\#(H) = n$ のとき，ASL on H over R は $R[X_1, \cdots, X_n]$ のみ．逆に，$\#(H) = n$, $\forall \alpha \neq \beta \in H$, $\alpha \not\sim \beta$ のとき，ASL on H over R は，

$R[H] \cong R[X_1, \cdots, X_n]/(X_i X_j \mid i \neq j)$ のみ．

(iii) X を $n \times m$ 行列，成分はすべて変数とする。$(X = (x_{ij}))$. $R\left[x_{ij} \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{smallmatrix}\right]$ は，H を $\{X$ の小行列式$\}$ とおいて，ASL on H over R となる．順序は，$\left(\begin{smallmatrix}\{i_1, \cdots, i_r\} \text{行} (i_1 \leq \cdots \leq i_r) \\ \text{と} \{j_1, \cdots, j_r\} \text{列をとった} r \times r \\ \text{小行列式を} (i_1 \cdots i_r \mid j_1 \cdots j_r) \text{とおく}\end{smallmatrix}\right)$

$(i_1 \cdots i_r \mid j_1 \cdots j_r) \leqq (i'_1 \cdots i'_s \mid j'_1 \cdots j'_s) \Leftrightarrow s \leqq r$, かつ，

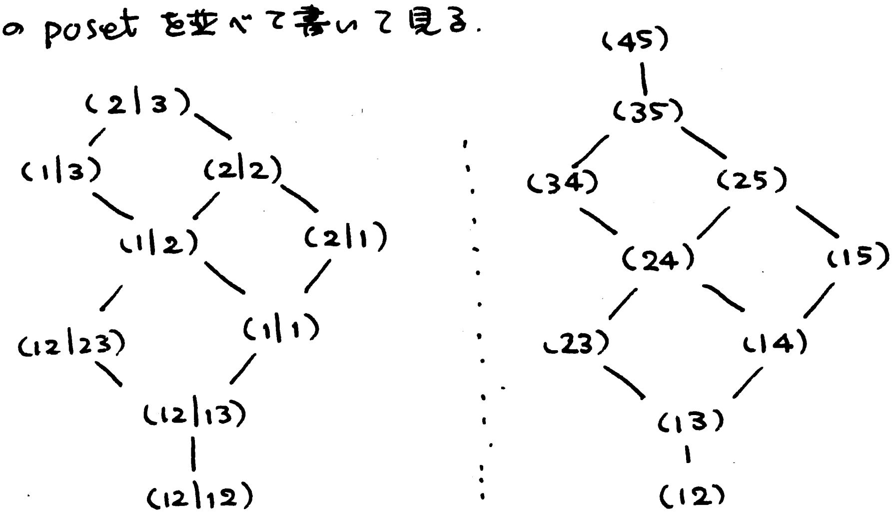
$i'_1 \geqq i_1, \cdots, i'_s \geqq i_s$, $j'_1 \geqq j_1, \cdots, j'_s \geqq j_s$ で定める。一旦この事がわかると，(証明は [3] 参照) $1 < t \leqq \min\{m, n\}$ に対して，$t \times t$ 小行列式全体で生成する ideal で割った

環もASLになる.

(iv) $\overset{k\text{を体,}}{\mathrm{Grass}(n,d)}$ を k^n の d 次元 linear subspaces のなす Grassmann 多様体とすると，$\mathrm{Grass}(n,d)$ の "Plücker embedding" による同次座標環は ASL. $H=\{d\times d$ 小行列式（行列 $X=(x_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le d}}$ の）$\}$，順序は，

$(i_1\cdots i_d)\leqq(j_1\cdots j_d) \iff i_1\le j_1,\ \dots,\ i_d\le j_d$.

因みに，(iii)で $n=3$, $m=2$ の時と，(iv)で $n=5$, $d=2$ の時の poset を並べて書いて見る.



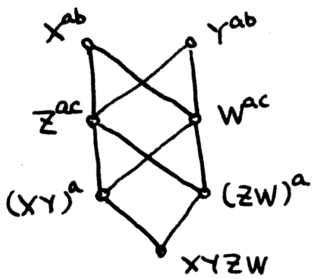
二つの poset は，右から一番上の (45) を除けば同型だが，一般に，$R[X_{ij} \mid {\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}]$ に対応する poset と，$\mathrm{Grass}(n+m,n)$ に対応する poset は，後者の最大元を除けば同型で，この事は，前者が後者の specialization で得られるという事と，次の事から説明される.

◇ A が ASL on H over R で，A が唯一つの最大元 α

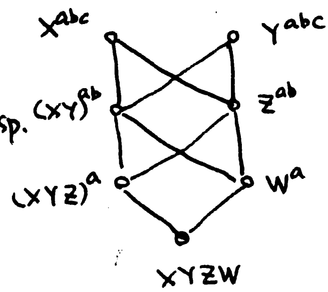
をもつとき，α は A の non-zero divisor で，$A[\alpha^{-1}]$ (resp. $A/(\alpha-1)$) は，ASL on $H-\{\alpha\}$ over $R[\alpha,\alpha^{-1}]$ (resp. R) である。

また，(iv) の例に於て，poset の ideal で割った環の例として，"Schubert subvariety の同次座標環" があげられる。

(v) $R=\mathbb{C}$，A を $\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n]$ の有限 Abel 群による不変部分環で完全交叉となるものとすると，A は ASL over $\mathbb{C}$ になる。例えば $n=4$，$A=\mathbb{C}[X^{ab}, Y^{ab}, (XY)^{a}, Z^{ac}, W^{ac}, (ZW)^{a}, XYZW]$ (resp. $A=\mathbb{C}[X^{abc}, Y^{abc}, (XY)^{ab}, Z^{ab}, (XYZ)^{a}, W^{a}, XYZW]$) のとき，poset は



(resp.



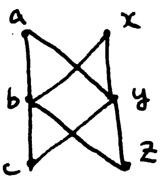
).

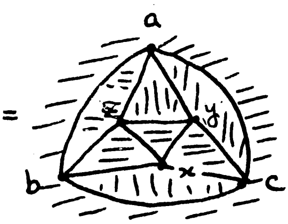
一般に，任意の (体 k 上の) normal semigroup ring (i.e. $k[X_1,\cdots,X_n]$ の monomials で生成された subring で，normal なもの) は k 上の ASL になる？（これは仙台の Symposium の際に川又氏に質問された事である。）

§2. Discrete ASL と simplicial complex.

Δ を頂点 $\{1, 2, \cdots, n\}$ をもつ simplicial complex とする。(即ち、Δ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の部分集合の集合で、"$\sigma \in \Delta$, $\tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in \Delta$" をみたす)。このとき、$R[X_1, \cdots, X_n]$ の ideal I_Δ を、$I_\Delta = (X_{i_1} \cdots X_{i_s} \mid \{i_1, \cdots, i_s\} \notin \Delta)$ と定義し、$R[\Delta] = R[X_1, \cdots, X_n]/I_\Delta$ とおく。

H が finite poset のとき、$\Delta(H) = \{H\text{の全順序部分集合}\}$ とおく事により、complex $\Delta(H)$ が得られ、$R[\Delta(H)] = R[H]$ (discrete ASL) となる事は見易い。

例. $H =$ 

のとき、$\Delta(H) =$ 

で、これは球面の三角形分割を与えている。(Δ と、Δ の "geometric realization" を同一視している。)

$$R[H] = R[\Delta(H)] = R[a, b, c, x, y, z]/(ax, by, cz).$$

(逆に simplicial complex Δ に対し、poset $H = H_\Delta$ を $H_\Delta = \Delta$, $\sigma \geqq \tau$ in $H_\Delta \Leftrightarrow \sigma \subset \tau$ で定義でき、$R[\Delta]$ は ASL on H_Δ over R となる。但し、$R[\Delta]$ と $R[H_\Delta]$ (discrete ASL) は一般に異り、$\Delta(H_\Delta)$ は Δ の重心細分である。)

$R[\Delta]$ がいつ Cohen-Macaulay (以下 C-M と略)

ring になるかは Δ の topology で完全に決まっている。

即ち，（$R = k$，体のとき）

Th.（Reisner）$k[\Delta]$ が C-M $\Longleftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \forall \sigma \in \Delta \ (\sigma = \phi \text{ も含む}), \\ \tilde{H}^i(lk_\Delta(\sigma), K) = 0 \text{ for} \\ \quad 0 \leq i < \dim lk_\Delta(\sigma) \end{array}\right.$

（但し，$lk_\Delta(\sigma) = \{\tau \in \Delta \mid \sigma \cap \tau = \phi, \sigma \cup \tau \in \Delta\}$.）

Proposition（Munkres）. $k[\Delta]$ が C-M.

$\Longleftrightarrow$ $\forall p \in |\Delta|$. $H^i(|\Delta|, |\Delta| - p ; k) = 0$ $(i \neq \dim|\Delta|)$ かつ
$\tilde{H}^i(|\Delta|, k) = 0$ for $i \neq \dim|\Delta|$.

（但し，$|\Delta|$ は Δ の underlying topological space を表す。）

$\Delta = \Delta_H$ のとき（即ち．discrete ASL $k[H]$ に対し），

$k[\Delta] = k[H]$ が C-M. か否かは，

Proposition. $k[H]$ が C-M. $\Longleftrightarrow$ $\forall$open interval L of $\hat{H} = H \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$, $\tilde{H}^i(\Delta_L ; k) = 0$ $(i \neq \dim \Delta_L)$.

例.（$\dim k[H] = \dim \Delta_H + 1 = H$ の max. chain の長さである事に注意しよう．但し，$\begin{smallmatrix}\circ\\|\\\circ\\|\\\circ\end{smallmatrix}$ の長さは 3 とする.）

$\dim k[H] = 1 \Rightarrow \Delta_H$ は 有限個の 点 $\Rightarrow k[H]$ は C-M.

$\dim k[H] = 2$ のとき，$k[H]$ が C-M $\Longleftrightarrow$ H は（Δ_H は）連結

H が C-M poset/k（$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $k[H]$ が C-M）ために，

いくつかの判定条件が考え出されている．その一つに，

"wonderful poset" (又は locally semimodular poset) の概念がある。(H が wonderful なら任意の体 k に対し, $k[H]$ は C-M. しかし, 逆は成立しないらしい…[4]参照).

<u>定義.</u> H が wonderful $\Longleftrightarrow$ $\forall$closed interval $[\alpha,\beta] \subset H \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\forall \xi, \eta, \zeta$ s.t. $\xi \gtrdot \zeta$, $\eta \gtrdot \zeta$, $\exists \omega \in [\alpha, \beta]$, $\omega \gtrdot \xi$, $\omega \gtrdot \eta$.

(但し, $\alpha \gtrdot \beta \Longleftrightarrow \alpha \geqq \beta$, $\alpha \neq \beta$ かつ $\alpha \gneqq \gamma \gneqq \beta$ なる $\gamma \in H$ はない).

"古典的な" ASL に対応する poset はすべて wonderful である事が知られている.

さて, A を ASL on H over k (k は体) とする.

(一般に, A: ASL on H over R のとき, A が C-M (resp. Gorenstein) $\Longleftrightarrow$ R が C-M (resp. Gorenst.) かつ $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $A \otimes_R k(\mathfrak{p})$ が C-M (resp. Gorenst.); $A \otimes_R k(\mathfrak{p})$ は ASL on H over $k(\mathfrak{p})$ だから, 体として良い.) 簡単のため,

A が <u>positively graded</u> $\Longleftrightarrow$ $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ は graded ring, $A_0 = k$, H の元及び ASL-2 の relation は同次元. としておこう. このとき,

<u>Th.</u> A が positively graded ASL on H over k のとき, もし $k[H]$ が C-M. (resp. Gorenst.) なら A も so.

("A が positively graded" という仮定は必要かどうか? 少くともこの仮定ナシでも反例はまだないと理解している.)

"$k[H]$ が Gorenstein" の方もわかっている.

Th (Hochster [5]). Δ が simplicial complex, $\dim\Delta \geqq 1$ のとき次は同値.

(1) 任意の体 k に対し, $k[\Delta]$ は Gorenstein

(2). 〃 $k[\Delta]$ は C.-M. かつ, $\forall\sigma\in\Delta$, $\dim\sigma = \dim\Delta - 2$, $L_\Delta(\sigma)$ は円又は高々 3つの頂点をもつ線分.

ところで, "$k[\overset{H}{\Delta}]$ が Gorenstein $\Rightarrow$ A (ASL) が Gorenst." の方のありがた味は "wonderful poset" 程はない. 例えば,

§1の例 (iii), (iv) はあきらかに (又は, 良く知られている通り) Gorenstein 環だが, 対応する $k[H]$ は Gorenstein 環でない. (例えば左の図で, $(2|3)$ と $(1|1)$ にはさまれた開区間は 4つ の頂点をもつ線分である.)

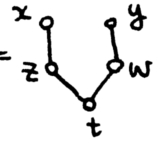
しかしながら,

系. $|\Delta|$ が sphere ならば, $k[\Delta]$ は Gorenstein である。(k は任意の体.)

§3. いくつかの問題.

1°. 与えられた poset H に対して, ASL on H over k (体) (で integral domain) となる A が存在するための条件は何か?

"Hの極小元が一つだけ"という条件が必要条件である事は自明だが、十分条件でない事は次の例が示す。

例.(小山陽一)　$H=$ 

とすると、整域となる ASL on H over k はない。($k[H] \cong \dfrac{k[x,y,z,w,t]}{(x,z)\cap(y,w)}$ は rigid singularity だから.)

($\dim k[H]=2$, H が unique min. elem. をもつとき、

$H=$  で、整域となる ASL on H over k は存在する。)

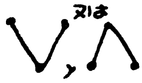
2°. C-M poset H を与えたとき、positively graded ASL on H over k で Gorenstein 環となるものが存在するための条件は何か?

A を positively graded ASL on H over k とし、$P(A,t)=\sum_{n=0}^{\infty} \dim A_n \cdot t^n$ を考えると、$P(A,t)$ は、H 及び $\deg(\alpha)$ $(\alpha \in H)$ たちで完全に決まり、もし A が Gorenstein なら、$P(A,t^{-1})=(-1)^d \cdot t^a \cdot P(A,t)$ である事がわかっている(我々の場合、更に $a \leqq 0$ である.)また、A が整域のとき、$P(A,t^{-1})=(-1)^d \cdot t^{-a} \cdot P(A,t)$ $(\exists a\in \mathbb{Z})$ なら、A は Gorenstein となる。(Stanley, [6].)

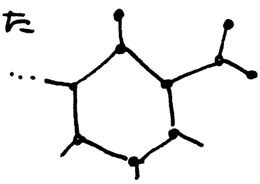
$\forall\alpha\in H$, $\deg\alpha=1$ とし, c_i を H の長さ i の chain の個数とおくと, ($c_0=1$ とおく).

$$P(A,t)=\sum_{i=0}^{d} c_i\left(\frac{t}{1-t}\right)^i$$

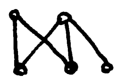
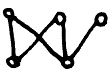
となる事が ASL-1 よりすぐわかる. dim A が小さいとき, この条件 $P(A,t^{-1})=(-1)^d\cdot t^{-a}\cdot P(A,t)$ をみたす H を探してみると, dim A = 1 のとき, H = {•} 又は {•　•}

dim A = 2 のとき, H =  $(a=-2)$,  $(a=-1)$

または条件 $c_1=c_2$ となる。これをみたす Δ_H は, circle に枝が生えた



のようなものである。

しかし, まだ"本当に枝の生えた" (例えば, ,  など) H に対して, Gorenstein となる ASL の例はまだ発見できていない.

3°. ASL が integral domain なら rational singularity か? (ch $k=0$).

ASL が integral domain なら F-pure か (ch $k=p>0$)?

A が normal で, $\pi: Y\to \mathrm{Spec}(A)$ を A の resol. としたとき (proper, birational), $R^q\pi_*\mathcal{O}_Y=0$ ($\forall q>0$) となるとき, A が rational singularity であるという.

また，$ch(A)=p>0$ で，Frobenius map $F: A \longrightarrow A$ が pure であるとき，A が F-pure という．

"A が normal" も仮定しないで，いきなり "rational singularity" というのだから，ずい分思い切った予想だが．(もっとも，Eisenbud は "H が wonderful poset のとき" という制限つきでこの予想を述べている。)，ASL が整域になるという事の意味がはっきりして来れば解けるのではないかなどと考えている。なお，A が positively graded, integral domain で，$\mathrm{Spec}(A)-\{A_+\}$ が rational singularity をもつ事がわかれば，A 自身も rational singularity をもつ事が云える（[7]）．

4°. 2次元，3次元の ASL integral domain にはどんなものがあるか？ 例えば，$\dim A = 2$ のとき，"cyclic group による quotient singularity" と，"ASL domain" は一致するのではないか？ など．

5°. ASL の概念の拡張について．

ASL の axiom のマネをして，次のようなものを考えて見たらどうだろう．

Δ を simplicial complex，Δ の頂点の集合を V とする。$\alpha_1^{a_1}\cdots\alpha_s^{a_s}$ ($\alpha_i \in V$) $(a_1,\dots,a_s>0)$ は $\{\alpha_1,\dots,\alpha_s\}\in\Delta$ の

とき "standard monomial" と呼ぶことにする。Aが AQSL on Δ over R とは

(AQSL-1) A は free R-mod. で、standard monomials を free basis としてもつ。

(AQSL-2) $\alpha \in V$ に対し、$\deg(\alpha) > 0$ が与えられる。standard monomial の degree は $\deg(\alpha_1^{a_1} \cdots \alpha_s^{a_s}) = a_1 \deg(\alpha_1) + \cdots + a_s \cdot \deg(\alpha_s)$ のように定める。このとき、

$\alpha_1 \cdots \alpha_s$ が non-standard monomial ($\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} \notin \Delta$) のとき、$\alpha_1 \cdots \alpha_s = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$, $x_i \in R$, m_i は standard monomial で、$\deg m_i > \sum_{i=1}^{s} \deg(\alpha_i)$ ($\forall i$).

このとき A は $\deg(\alpha)$ ($\alpha \in V$) より定まる filtration をもち、$G^{\cdot}(A) \cong R[\Delta]$ となる。従って $R = k$ (体), $k[\Delta]$ が C-M (resp. Gorenstein) のとき、A も so である。

例. $\Delta =$  のとき、$A = k[x, y, z]/(xyz + x^p + y^q + z^r)$

$(1/p + 1/q + 1/r < 1)$.

この例を一般化して、"$|\Delta|$ が sphere で、A が AQSL on Δ over $\mathbb{C}$ かつ A が isolated sing. をもつとき、A は elliptic Gorenstein singularity である" という事を示したいのだが …。

REFERENCES.

[1]. D. Eisenbud: Introduction to Algebras with Straightening Laws, in "Ring Theory and Algebra, III", Dekker, 1980.

[2] C. De Concini, D. Eisenbud and C. Procesi: Algebras with Straightening Laws, to appear.

[3] —— : Young diagrams and determinantal varieties, Invent. Math. 56 (1980), 129~165.

[4] K. Baclawski: Cohen-Macaulay ordered sets, J. Alg. 63 (1980), 226~258.

[5] M. Hochster: Cohen-Macaulay rings, combinatorics and simplicial complexes, in "Ring Theory and Algebra, II", Dekker, 1975.

[6] R. Stanley: Hilbert Functions of Graded Algebras, Adv. in Math. 28 (1978), 57~83.

[7] K. Watanabe: Rational singularities with $\mathbb{C}^*$-action, preprint.

ON THE NUMBER OF BASIC RELATIONS OF AN IDEAL OF A LOCAL RING

By Junzo Watanabe

Let $R=k[X, Y]$ and $A=k[X, Y, Z]$ be the polynomial rings in 2 and in 3 variables over a field k, and define the homomorphism $\phi : R \to A$ by $\phi(X)=XZ$ and $\phi(Y)=YZ$. We wish to determine the third betti number of the A-module of the form $A/\phi(\underline{a})A$, where $\underline{a}$ is an ideal of R generated by monomials.

In §1 we treat the second betti number of an ideal quite generally over a local ring in the hope that the investigation of this § is of independent interest. In §2 we make use of the results of §1 to express the third betti number of the module described above in terms of the graph $i \to \deg h_i$, where h_i's are the minimal set of monomials of R that generate $\underline{a}$.

§1. Let $(A, \underline{m}, k)$ be a Noetherian local ring. For an ideal I of A we define

$$\mu(I) = \dim_k \mathrm{Tor}_1^A(k, A/I) \quad \text{and}$$

$$\nu(I) = \dim_k \mathrm{Tor}_2^A(k, A/I).$$

Thus $\mu(I)$ is the number of basic generators and $\nu(I)$ is the number of basic relations of I. Let $m=\mu(I)$ and $n=\nu(I)$.

Then we have an exact sequence of free modules

$$A^n \xrightarrow{\mathbf{M}} A^m \xrightarrow{\mathbf{F}} A$$

such that $\operatorname{Im}\mathbf{F} = I$. We define the relation module of I to be $\operatorname{Ker}\mathbf{F}$ and denote it by $R(I)$. To be more specific $R(I)$ is the kernel:

$$0 \to R(I) \to A^m \to I \to 0.$$

It is unique up to isomorphisms. We call the matrix $\mathbf{M}$ above a relation matrix of I with respect to $\mathbf{F}$, or simply a relation matrix of $\mathbf{F}$. (To specify $\mathbf{F}$ is to specify a set of generators of I.) Note that the rows of $\mathbf{M}$ form a minimal generating system of the module $R(I)$.

PROPOSITION 1.1. Let $I = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ with $m=\mu(I)$, and let $I' = (f_2, \ldots, f_m)$. Then we have an exact sequence

$$0 \to R(I') \to R(I) \to I' : f_1 \to 0.$$

PROOF. We may assume

$$R(I) = \{[b_1 \ b_2 \ \ldots \ b_m] \in A^m \mid \sum_1^m b_i f_i = 0\}$$

$$R(I') = \{[b_2 \ \ldots \ b_m] \in A^{m-1} \mid \sum_2^m b_i f_i = 0\}.$$

Define $R(I') \to R(I)$ by $[b_2 \ \ldots \ b_m] \to [0 \ b_2 \ \ldots \ b_m]$, and $R(I) \to I' : f_1$ by the projection to the first factor. Then it is straightforward to verify these maps (are well defined and) make the sequence exact.

COROLLARY 1.2. In the same notation as above we have

$$\mu(I' : f_1) \le \nu(I) \le \nu(I') + \mu(I' : f_1).$$

PROOF. $R(I)$ can be generated by the preimages of generators of $I':f_1$ and the images of $R(I')$. Moreover the preimage of a minimal generating set of $I':f_1$ can be a part of a minimal generating set of $R(I)$. Hence the assertion is clear.

The next corollary is a restatement of what we have just said in the proof of Corollary 1.2.

COROLLARY 1.3. In addition to the notation of Proposition 1.1, let $I':f_1 = (b_1, \ldots, b_r)$ with $\mu(I':f_1)=r$. Further let

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathbf{M'} \\ 0 & \\ \hline b_1 & \\ b_2 & \\ \vdots & b_{ij} \\ b_r & \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right\} n'=\nu(I') \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}b\\b\\\vdots\\b\end{array}}\right\} r \end{array},$$

where $\mathbf{M'}$ is a relation matrix of I' with respect to the generators given and b_{ij} are elements of A such that

$$b_i f_1 + \sum_{j=2}^{m} b_{ij} f_j = 0 .$$

Then, regarding $\mathbf{M}$ as a homomorphism $A^{n'+r} \to A^m$, we have $\mathrm{Im}\mathbf{M} \cong R(I)$. Moreover if $\nu(I)=\nu(I')+\mu(I':f_1)$, $\mathbf{M}$ is a relation matrix of I with respect to $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

PROPOSITION 1.4. Either of the following is a sufficient condition for $\nu(I) = \nu(I') + \mu(I':f_1)$.

(i) $\mu(I':f_1) = 1$ and $I':f_1$ contains a non-zero-divisor.

(ii) With a suitable choice of b_{ij} in Corollary 1.3, it is possible to find a non-zero-divisor x which is a non-unit such that $b_{ij} \in (x)$ for all i, j.

PROOF is omitted. We remark, however, that (ii) is satisfied for example when $I':f_1 = I'$ and f_1 is a non-zero-divisor of A. In fact in this case r=m-1 and $[b_{ij}]$ can be $f_1\mathbf{E}_{m-1}$ (i.e., $b_{ii}=f_1$ and the others are all 0). Hence $b_{ij} \in (f_1)$.

REMARK 1.5. With the same notation as before let $\mathbf{M}^*$ be the submatrix of $\mathbf{M}$ consisting of the last r rows, and suppose $[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_r]$ is a relation of (b_i), i.e., $\Sigma q_i b_i = 0$. Then since the rows of $\mathbf{M}^*$ are relations of (f_i) it is obvious that $[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_r]\circ\mathbf{M}^*$, being a linear combination of the rows of $\mathbf{M}^*$, is a relation of $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ with 0 in the first factor. In this sense we may regard $\mathbf{M}^*$ as a homomorphism $\mathbf{M}^* : R(I':f_1) \to R(I')$. Let ψ be the composition of $\mathbf{M}^*$ with the natural surjection:

$$\begin{tikzcd} & R(I') \arrow[dr] & \\ \psi : R(I':f_1) \arrow[ur, "\mathbf{M}^*"] \arrow[rr] & & R(I')\otimes_A k \end{tikzcd}$$

Then it is easy to see that

$$\nu(I') + \mu(I':f_1) - \nu(I) = \dim_k \mathrm{Im}\psi.$$

§2. Let $A=k[X, Y, Z]$ be the 3-dimensional polynomial ring over a field k. For a homogeneous ideal of A, we define

$$\tau(I) = \dim_k \mathrm{Tor}_3^A(k, A/I).$$

Thus we may write a minimal free resolution of A/I as

$$0 \to A^{\tau(I)} \to A^{\nu(I)} \to A^{\mu(I)} \to A \to 0.$$

For example $\tau(I)=0$ if and only if $\mathrm{hd}\, A/I\leq 2$

Let $R=k[X, Y]$ and let $\phi:R \to A$ be the homomorphism defined by $\phi(X)=XZ$, $\phi(Y)=YZ$. Let $\underline{a}$ be the ideal of R generated by the monomials

$$h_i = X^{a_i}Y^{b_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

where we assume without loss of generality that

$$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_m \quad \text{and}$$
$$b_1<b_2<\cdots\cdots<b_m .$$

In this case $\mu(\underline{a})=m$.

Now let $f_i = \phi(h_i) = X^{a_i}Y^{b_i}Z^{d_i}$ $(d_i=a_i+b_i)$ and $I = (f_1, f_2, \ldots\ldots, f_m)A$.

It is easy to see that $\mu(I)=m$. Assume $m\geq 2$, and let

$$I'= (f_2,\ldots, f_m)A.$$

Let us consider $I':f_1$. As is easily seen $I':f_1$ is generated by monomials, hence this is generated by

$$\{ g\in A \mid gf_1\in (f_i) \ \text{ for some } \ i=2, 3, \ldots, m \}$$

Thus $I':f_1$ is generated by the monomials

$$g_i = \frac{\text{L.C.M.}(f_1, f_i)}{f_1}, \quad i=2,3,\ldots,m.$$

(L.C.M.=Least Common Multiple.)

We want to choose the subsequence of $\{g_i\}$, so that they form a minimal generating set of $I':f_1$. Note that

$$g_i = \frac{\text{L.C.M.}(f_1,\ f_i)}{f_1} = \frac{X^{\max\{a_1,a_i\}} Y^{\max\{b_1,b_i\}} Z^{\max\{d_1,d_i\}}}{X^{a_1} Y^{b_1} Z^{d_1}}$$

$$= \begin{cases} Y^{b_i-b_1} Z^{d_i-d_1} & \text{if } d_i \geq d_1 , \\ Y^{b_i-b_1} & \text{if } d_i < d_1 . \end{cases}$$

Assume $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots\ldots, g_{i_r}$ is the subsequence of g_i which form a minimal generating set of the ideal $I':f_1$, and consider their exponents. Then one sees that since b_i-b_1 is monotone increasing the degree of g_{i_j} with respect to Z should be monotone decreasing. (In fact if $\geq$ occurred in the same direction, one monomial would be divided by the other.) Thus the indices of g_{i_j} are determined by the statement:

$i_1, i_2, \ldots\ldots, i_r$ is the longest subsequence of 2, 3, ..., m, with respect to the property that $d_{i_1}-d_1 > d_{i_2}-d_1 > \ldots\ldots > d_{i_r}-d_1$ in which only the last term $d_{i_r} - d_1$ is possibly non-positive.

Note $i_1=2$. Also, $r=1$ if $d_1 \geq d_2$. This will be illustrated by the figures below.

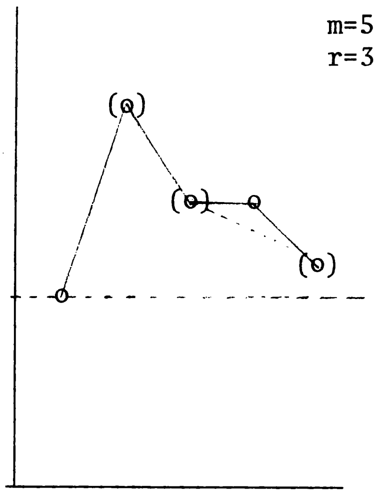


Fig. I

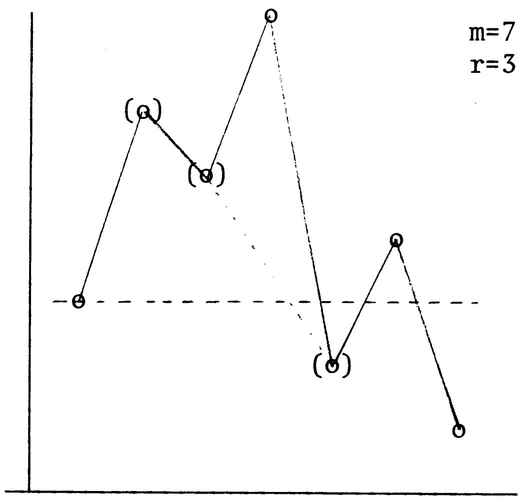


Fig. II

o denotes d_i

(o) denotes d_{i_j}

d_{i_j} should be monotone decreasing, and all the d_{i_j} except d_{i_r} (=the last of d_{i_j}) should be above d_1.

We are now able to determine the number $\tau(I)$ by induction on $\mu(I)$ according to the following

THEOREM 2.1. Let $I=(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ and $I'=(f_2, \ldots\ldots, f_m)$ be as above. Then,

(i) $\nu(I) = \nu(I') + \mu(I':f_1)$

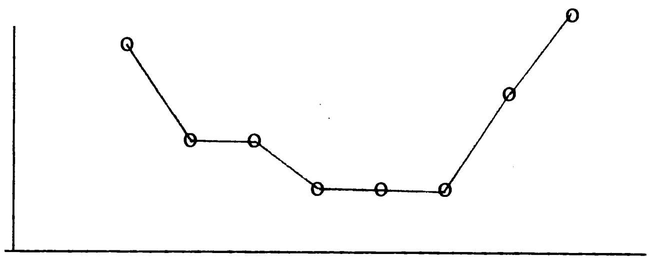
(ii) $\tau(I) = \tau(I') + \mu(I':f_1) - 1$

PROOF. We can verify Proposition 1.4. (ii) directly to obtain (i). (ii) follows immediately from (i) because of Euler-Poincare characteristic being 0.

Obviously $\tau(I)=0$ if $\mu(I)=2$. Hence one sees easily, by induction, that

COROLLARY 2.2. $\tau(I)=0$ iff the graph $i \to d_i$ has at most one minimum.

For example, (any part of) the following graph has this property.



Corollary 2.2 was proved by a different method in:
J. Watanabe, Counting the number of basic invariants for $G \subset GL(2, k)$ acting on $k[X, Y]$, To appear in Nagoya Math. J.

Theorem 2.1 in a more general situation has been obtained by H. Tanimoto, also by a different method.

$k[X, Y, Z]$ の monomial ideal の既約分解と、その応用について.

谷本　洋　　名大・理

以下, kを体, Aをk上3変数の多項式環$k[X, Y, Z]$とし, $\mathfrak{a}$をAの monomial ideal とする。$\mathfrak{a}$の minimal basis を $M_1, \cdots, M_m$, $M_i = X^{\alpha_i} Y^{\beta_i} Z^{\gamma_i}$ とする。

$\alpha_1 > \cdots > \alpha_m$, $\beta_1 < \cdots < \beta_m$, $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$ for $^\forall i$ を仮定するとき, グラフ $i \longmapsto \gamma_i$ の性質に着目して, 渡辺純三氏は, 次を示している。

<u>定理 ([1])</u> 次は同値：

(1) $hd_A(A/\mathfrak{a}) = 2$

(2) グラフ $i \longmapsto \gamma_i$ に "極大" がない。

さらに, 渡辺氏が今回のシンポジュームで講演されるなかに, $\tau(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}_3^A(k, A/\mathfrak{a})$ がグラフ $i \longmapsto \gamma_i$ による数であり, その数も, 具体的にグラフより求められることが, 示されている。そこで, 以下, $\mathfrak{a}$の minimal basis の指数の条件をなるべく弱くして, $\tau(\mathfrak{a})$をグラフ $i \longmapsto \beta_i$, $i \longmapsto \gamma_i$ から求める方法を考察する。

そのために, まずRをk上n変数多項式環$k[X_1, \cdots, X_n]$

で $X_i^{\infty}=0$ とする。$\mathfrak{a}$ をその monomial ideal とするとき，次のことがわかる：

補題 1 $\mathfrak{a}$ は，$(X_1^{f_1}, \cdots, X_n^{f_n})$ $(0<f_i \leqq \infty \text{ for } {}^{\forall}i)$ の形のいくつかの既約 ideal の共通部分として，一意的に表わせる。これらを $\mathfrak{a}$ の component という。特に，$0<f_i<\infty$ for ${}^{\forall}i$ であれば，これを maximal component という。

定理 2 次は，同値：

(1) $\mathfrak{a}$ が，component $\mathfrak{q}=(X_1^{f_1}, \cdots, X_n^{f_n})$ を持つ。

(2) (i) ${}^{\forall}X_1^{\alpha_1}\cdots\cdots X_n^{\alpha_n} \in \mathfrak{a}$ について，${}^{\exists}i$ s.t. $\alpha_i \geqq f_i$

(ii) ${}^{\forall}i$ について，${}^{\exists}X_1^{\beta_1}\cdots\cdots X_n^{\beta_n} \in \mathfrak{a}$ s.t. $\beta_i=f_i$,

$\beta_j<f_j$ for ${}^{\forall}j \neq i$

(3) (2) が，$\mathfrak{a}$ の minimal basis について成立する。

(2) (ii) のように，$X_i^{f_i}$ に対して（一意的ではないが）存在する元 $X_1^{\beta_1}\cdots\cdots X_n^{\beta_n}$ は，$\mathfrak{q}$ を定めていると考えられるから，$\mathfrak{q}$ の X_i 項を characterize する元という。そこで話を $n=3$ の時に戻せば，$\tau(\mathfrak{a})$ は，$\mathfrak{a}$ の maximal components の数に等しいから，定理 2 を利用して，$\mathfrak{a}$ の components を考察すればよい。

そこで，まず，$\alpha_1 > \cdots > \alpha_m$，$\beta_1 < \cdots < \beta_m$ で必ずしも $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$ でないと仮定する。すると，次がわかる：

<u>定理 3</u>　次をみたす数列 $i_1 = 1 < i_2 < \cdots < i_r = m$ をとる：

$$\begin{cases} \text{(i)} & \gamma_{i_1} \geqq \cdots \geqq \gamma_{i_j} \leqq \cdots \leqq \gamma_{i_r} \quad \text{for } 1 \leqq {}^{\exists}j \leqq r \\ \text{(ii)} & i_a < l < i_{a+1} \text{ なる } l \text{ が存在すれば，} \gamma_l > \max\{\gamma_{i_a}, \gamma_{i_{a+1}}\} \end{cases}$$

$I = \{M_t \mid t \neq i_j,\ j = 1, \cdots, r\}$ とおく。さらに，I 上つぎの同値関係を考える：　$M_i, M_j \in I$ について，

$$M_i \sim M_j \iff \begin{cases} i = j \text{ 又は，} \gamma_i = \gamma_j,\ i \leqq {}^{\forall}l \leqq j \\ l \in \{1, \cdots, m\} \text{ について，} \gamma_l \geqq \gamma_i \end{cases}$$

すると，　$\tau(\mathfrak{a}) = \#(I/\sim)$

次に，一般の monomial ideal $\mathfrak{a}$ について，$\tau(\mathfrak{a}) = 0$ すなわち，$\mathfrak{a}$ が maximal component を持たない条件を求める。$\mathfrak{a}$ を全く一般にすると，記述が，少し複雑になるので，以下，$\alpha_1 > \cdots > \alpha_m$ を仮定する。$J = \{j \mid \beta_j = \max\{\beta_i\}\}$ とおく。$j_0 = \min\{j \in J\}$ とする。すると，

<u>補題 4.</u>　$J \neq 1, m$ のとき，次は，同値：

(1) M_{j_0} は，$\mathfrak{a}$ のどの maximal component も characterize しない。

(2) $\gamma_i \geqq \min\{\gamma_k \mid k > j_0,\ k \notin J\}$ for ${}^{\forall}i < j_0$

そこで，$K=\{k \mid \gamma_k = \max\{\gamma_i\}\}$ とおき，次の2つの型に分けて考える：

(C_1)：(i) <u>$J \ni 1$ のとき</u>，$\alpha_1=\max\{\alpha_i\}$，$\beta_1=\max\{\beta_i\}$ ゆえ，定理2より，M_1 は，$\mathfrak{a}$ のどの maximal component も characterize しない。しかも，$\mathfrak{a}$ の任意の maximal component を $(X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma)$ とすれば，$\alpha \leqq \alpha_1$ ゆえに，$\mathfrak{a}$ の maximal component を考えるとき，ideal $(M_2, \cdots, M_m)$ を考えればよい。よって，M_1 は，除去してよい。

(ii) <u>$K \ni 1$ or $J \cap K \ni m$ のとき</u>も，同様に，M_1，M_m を除去できる。

(C_2)：(i) <u>$J \not\ni 1, m$ のとき</u>，$j_0=\min\{j \in J\}$ とする。M_{j_0} が，補題4の条件をみたすとき，M_{j_0} は，$\mathfrak{a}$ のどの maximal component も characterize しない。そして，(C_1) と同様に，M_{j_0} を除去できる。

(ii) <u>$K \not\ni 1, m$ のとき</u>，$k_0=\min\{k \in K\}$ とすれば，M_{k_0} が，β_{j_0} について補題4の条件をみたすとき，(i) と同様に M_{k_0} を除去できる。

そこで，(C_1)，(C_2) を何回か繰り返して，除去し続け，(C_1)-type か (C_2)-type で除去できる元 M_i を c-element と呼ぶ。すると，

<u>定理 5</u>　$\tau(\mathfrak{a}) = 0 \iff {}^{\forall}M_i$: c-element

特に，$\mathfrak{a}$ が (X^s) なる component を持たないための条件は，$\exists M \in \mathfrak{a}$ s.t. $X \nmid M$ ．よって，次が従う：

<u>系 6</u>　$A/\mathfrak{a}$ が 1 次元 Cohen-Macaulay ring

$$\iff \begin{cases} (1) & {}^{\forall}M_i : \text{c-element} \\ (2) & \min\{\alpha_i\} = \min\{\beta_i\} = \min\{\gamma_i\} = 0 \end{cases}$$

[文献]

[1] J. Watanabe, Counting the number of basic invariants for $G \subset GL(2, k)$ acting on $k[X, Y]$, to appear

A characterization of 2-dim Cohen Macaulay semigroup rings.

東京理科大学 理学部 三浦晋示

ここでは K を任意の体とし $K[X,Y]$ を2変数の多項式環としたとき、$R=K[X^{\alpha_1}Y^{\beta_1},\cdots,X^{\alpha_n}Y^{\beta_n}]$ $(\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{N},\ n>0)$ なる形の $K[X,Y]$ の部分環が C-M であるかないかの有限回での判定を与えることを目標とし さらに $R=K[X^{\alpha_1}Y^{\beta_1},X^{\alpha_2}Y^{\beta_2},X^{\alpha_3}Y^{\beta_3}]$ としたとき $R[X^{\alpha_4}Y^{\beta_4}]$ がどの様なとき C-M となるかを考える

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ $\mathbb{N}^+=\{1,2,\cdots\}$, $\mathbb{Q}_0^+=\{x\in\mathbb{Q},x\geq0\}$

とし R において $X^{\alpha_i}Y^{\beta_i}$ を $(\alpha_i,\beta_i)=f_i\in\mathbb{N}^2$ と対応させ

H を f_i $(i=1,2,\cdots,n)$ の生成する semigroup とする また H で生成する $\mathbb{Z}^2$ の subgroup を L と書く.

$H=\langle f_1,f_2,\cdots,f_n\rangle$ と書けるが $f_1,\cdots,f_n$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の元と考えたとき，任意の2つが一次従属となるとき R は K 自身か $\mathrm{krull\ dim}\,R=1$ の整域となるのでいつも C-M.

そうでないとき $H\ni\exists f,g$ f,g は $\mathbb{Q}$ 上一次独立，かつ

$f\mathbb{Q}_0^++g\mathbb{Q}_0^+\supseteq H$ が存在するがこの f,g は

$f_i\ (i=1,\cdots,n)$ の中からとれる　これらを $f_1=f,\ f_2=g$

とする．このとき $X^{\alpha_1}Y^{\beta_1},\ X^{\alpha_2}Y^{\beta_2}$ は R の s.o.p

となり Krull dim $R=2$　　この場合の R について

次の Prop. が知られている．

Prop.　次の条件は同値．

(i)　R : C-M

(i)′　$w\in H$, $w+g\in f+H$　　$\Rightarrow w\in f+H$.

(ii)　$w\in L$　$w+g\in H,\ w+f\in H$　　$\Rightarrow w\in H$.

(iii)　$\{w\in L \mid w+nf,\ {}^{\exists}n\in\mathbb{N}\}\cap\{w\in L\mid w+ng\in H,\ {}^{\exists}n\in\mathbb{N}\}=H$

(iv)　$(f+H)\cap(g+H)\subseteq(f+g+H)$.

ここで　次の条件 (v) が 上の (i)〜(iv) と同値である

ことを得た．

(v)　$S(\alpha,\beta)\subseteq T(\alpha)\cup T(\beta)\cup\{(f+g+\ell)+f\mathbb{N}+g\mathbb{N}\mid \ell\in H\}$

for $\forall(\alpha,\beta)\in D\times D$

ただし．　$H=\langle f,g,f_3,\cdots,f_n\rangle$

$s(\alpha):=$　　$s\cdot\alpha\in f\mathbb{N}+g\mathbb{N}$ となる最小の $s>0,\ s\in\mathbb{N}$.

D　$:=\{\sum_{i=3}^{n}s_if_i \mid 0\leq s_i\lneq s(f_i),\ i=3,\cdots,n\}$

$(\alpha,\beta)\in D^2$ とするとき

$T(\alpha)\ :=\{t\alpha+f\mathbb{N}+g\mathbb{N}\mid 0\leq t\lneq s(\alpha)\}$

$T^*(\alpha)\ :=\{t\alpha\mid 0\leq t\lneq s(\alpha)\}$

$S(\alpha,\beta):=\left\{(t\alpha+f\mathbb{N}+g\mathbb{N})\cap(u\beta+f\mathbb{N}+g\mathbb{N})\ \middle|\ \begin{matrix}0\leq t\lneq s(\alpha)\\ 0\leq u\lneq s(\beta)\end{matrix}\right\}$

ー注意ー　　$f\mathbb{N}+g\mathbb{N}$ を $\ast$ と書く．

① $s(\alpha)$ は有限な値．

② $\bigsqcup_{V\in T(\alpha)} V = \alpha\mathbb{N} + f\mathbb{N} + g\mathbb{N}$ で 左辺は disjoint

③ $a, b \in H$ のとき $a + \mathfrak{A} = b + \mathfrak{A} \iff a = b$

④ $(a+\mathfrak{A}) \cap (b+\mathfrak{A}) \subseteq H$ の左辺は ϕ or $\exists! c \in H$
$c + \mathfrak{A}$ の形。特に $S(\alpha, \beta)$ の元はそう。

⑤ $n=4$ の場合のみ $D = \{\sum_{i=3}^{4} t_i f_i \mid 0 \leq t_i < \Delta(f_i)\ i=3,4\}$
は $D^* = \{t_i f_i \mid 0 \leq t_i < \Delta(f_i),\ i=3,4\}$ として よく
条件 (v) は
$$S(t_3 f_3, t_4 f_4) \subseteq T(t_3 f_3) \cup T(t_4 f_4) \cup \{(f+g+l) + \mathfrak{A} \mid l \in H\}$$
$$0 \leq t_i < \Delta(f_i),\ i=3,4$$
でよい。

次に $R = K[X^{\alpha_1}Y^{\beta_1}, X^{\alpha_2}Y^{\beta_2}, X^{\alpha_3}Y^{\beta_3}]$ は条件
(v) により いつも C-M であるが
$f = (\alpha_1, \beta_1)$, $g = (\alpha_2, \beta_2)$, $f_3 = (\alpha_3, \beta_3)$
f, g は s.o.p に対応するとする
ここで s.o.p を変えない $R[X^{\alpha_4}Y^{\beta_4}]$ なる
R への添加 (すなわち $(\alpha_4, \beta_4) = f_4 \in (f\mathbb{Q} + g\mathbb{Q}) \cap \mathbb{N}^2$)
で f_4 がどの様な点のとき $R[X^{\alpha_4}Y^{\beta_4}]$ が
C-M となるかを考える。

$\{t \mid tf_3 + f - g \in (f\mathbb{Q} + g\mathbb{Q}) \cap \mathbb{N}^2,\ 0 \leq t < \Delta(f_3)\}$
$\{u \mid uf_3 + g - f \in (f\mathbb{Q} + g\mathbb{Q}) \cap \mathbb{N}^2,\ 0 \leq u < \Delta(f_3)\}$
(それぞれ $\exists t^*, u^* \in \mathbb{N}$ $\{t \mid t^* \leq t < \Delta(f_3)\}$
$\{u \mid u^* \leq u < \Delta(f_3)\}$ と書ける)
これら 2つの集合が空集合 ($t^* = u^* = \Delta(f_3)$ と考える)
の場合は 任意の $(f\mathbb{Q} + g\mathbb{Q}) \cap \mathbb{N}^2$ の点を f_4
とするとき $R[X^{\alpha_4}Y^{\beta_4}]$ は いつも C-M。

又、$t^* \leq t < \Delta(f_3)$ $[u^* \leq u \leq \Delta(f_3)]$ なる
各 t $[u]$ に対して
$\max\{m_t \mid tf_3 + f - m_t g \in (f\mathbb{Q} + g\mathbb{Q}) \cap \mathbb{N}^2\} = m_t^*$
$[\max\{m_u \mid uf_3 + g - m_u f \in (f\mathbb{Q} + g\mathbb{Q}) \cap \mathbb{N}^2\} = m_u^*]$
とし
$V = \{tf_3 + nf - m_t g \mid t^* \leq t < \Delta(f_3), 1 \leq m_t \leq m_t^*, n \in \mathbb{N}^+\}$
$\cup \{uf_3 + ng - m_u f \mid u^* \leq u < \Delta(f_3), 1 \leq m_u \leq m_u^*, n \in \mathbb{N}^+\}$
とおくとき
V の点はすべて $R[X^{\alpha_4} Y^{\beta_4}]$ が C-M でないものを与える 又
$T^*(\alpha) \cap V \neq \phi$ かつ $^\exists t_\alpha \in T^*(\alpha) \cap V$
$t_\alpha \notin \{f + g + f\mathbb{N} + g\mathbb{N} + f_3\mathbb{N}\}$
なる $\alpha \in (f\mathbb{Q} + g\mathbb{Q}) \cap \mathbb{N}^2$ も C-M でない点を与える
これら以外の $(f\mathbb{Q} + g\mathbb{Q}) \cap \mathbb{N}^2$ の点はすべて
$R[X^{\alpha_4} Y^{\beta_4}]$ を C-M とする.

な来に $\Delta(f_3)\cdot f_3 + f\mathbb{N} + g\mathbb{N}$ の元はすべて
C-M を与える. 又, $\{f, g, f+g\} \ni \Delta(f_3)\cdot f_3$ のときは
任意の $(f\mathbb{Q} + g\mathbb{Q}) \cap \mathbb{N}^2$ の点は C-M を与え $\{f, g, f+g\} \not\ni \Delta(f_3)\cdot f_3$
13-11 のときは C-M とならない点が存在する。

① $R = k[X^3, Y^3, XY]$ とすると
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ に対して $R[X^\alpha Y^\beta]$ は C-M.

② $R = k[X^3, Y^3, XY^2]$ とすると
$R[X^{5+3n} Y]$ $(n \in \mathbb{N})$ は C-M でなく
$\alpha \neq 5 + 3n$ or $\beta \neq Y$ $\quad {}^\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}$
なら $R[X^\alpha Y^\beta]$ は C-M である.

③ $T^*(\alpha) \cap V \neq \phi$ でかつ α が C-M を与える
ものとして
$R = k[X^2, Y^5, XY^3]$ とするとき
$R[X^3 Y]$ は C-M

Spec R の連結性と既約性について

愛知教育大学　金光三男

環はすべて1をもつ可換環とする。必ずしもネーター環とは限らない環Rに対して、Spec Rがザリスキ位相で連結であるときや、Rが *locally integral domain* のとき、いつRは整域となるかを問題にする。特に、A.V. Geramita と C. Small は1976年にでた共著[3]において、Rが *locally integral domain* で Spec R が連結のとき、Rが整域になるかどうかまだ知られていないようだと書いている(この問題を Geramita と Small の問題と呼ぶことにする)。Geramita と Small の問題は、Rがネーター環のとき成立することは明らかである。ネーター環でないときでもRのクルル次元が0のときも明らかに正しい。しかし一般には正しくない(Jensen の例が反例になる)。ここでは、これらの問題が成立する環についてや、Spec Rが連結で Max Rがネーター空間であるときRについていえる性質などを考察する。

S. Greco は R がネーター環のとき、Spec R が連結なら depth が 1 以下の点の局所環が整域かどうかで R が整域か否か判定できることを示した。

<u>定理 1</u>（[6]）. R をネーター環とする。このとき次は同値である。

(1). R は整域

(2). R は locally integral domain で Spec R が連結

(3). Spec R は被約でかつ既約

(4). Spec R は連結かつ depth $R_{\mathfrak{p}} \leqq 1$ なるときはつねに $R_{\mathfrak{p}}$ は整域

(5). Spec R は被約かつ連結で $\max\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{depth} R_{\mathfrak{q}} = 1\}$ の任意の元 $\mathfrak{p}$ に対して $R_{\mathfrak{p}}$ は整域

この証明は次のことが本質的には使われている。

<u>Hartshorne の連結性定理</u>

X が連結で locally noetherian scheme で Y をその closed subscheme とする。このとき、Y の任意の元 x に対して depth $\mathcal{O}_{X,x} \geqq 2$ なら X − Y は連結である。但し、$\mathcal{O}_X$ は X の構造層で $\mathcal{O}_{X,x}$ はその x における茎とする。

定理1の(1), (2), (8) の同値性はよく知られている。(5)から(1)は、ある仮定の下で連結空間 Spec R が既約になることを示す次の補題が使われている。

補題2. ([L6]). Rがネーター環でセールの条件S_1をみたすとする。更に、$\dim R \geqq 1$ で Spec Rは連結とする。このとき、Spec Rが既約であることは、depth が1のすべての点での構造層の茎の Spec が既約であることと同値(包含関係で極大な点のみでいえれば十分)。

系3. Rが正則環(一般にネーター環で locally integral domain)のとき次は同値である。

(1). Rが整域

(2). Spec Rが連結

(3). Spec Rが既約

系4. Rがネーター正規環又は Cohen-Macaulay 環(一般にS_2をみたすネーター環)のとき次は同値である。

(1). Rは整域

(2). Spec R は連結で $\mathrm{ht}\, \mathfrak{p} \leqq 1$ なる$\mathfrak{p}$に対して$R_{\mathfrak{p}}$は整域

系3でネーターという仮定を除いたものを考える。

補題5. Rを環とする。任意の$\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} R$に対して、ホモロジー次元 $hd_R(R/\mathfrak{p})\leqq 1$なら、$R$は locally regular ring で $\dim R\leqq 1$.

注意. 任意の$\mathfrak{p}^*\in \operatorname{Spec} R[X]$に対して、$hd_R(R[X]/\mathfrak{p}^*)\leqq 1$ なら、補題5 の仮定が成立する。

補題5と注意によって

命題6. Rがネーター環とし、条件(☆)を上の注意の仮定と同じとおく。このとき、(☆)の下で、$\operatorname{Spec} R$が連結なることとRが整域であることは同値である。

注意. 命題6 で(☆)における $R[X]$ の代りに R 又は $R[[X]]$ としても同様のことがいえる。

命題6より、必ずしもネーター環でない環に対して、

$w.gl.\dim R \leqq 1$ 又は $gl.\dim R \leqq 1$ のとき、Spec R が連結ならRは整域か？という問題がでてくるがこれに関連して、

<u>定理7.</u> Spec R が連結のとき、次の各場合にRは整域になる。

(1). Rが semi-hereditary 環

(2). Rが arithmetical ring で $w.gl.\dim R < \infty$ で Rの全商環 $Q(R)$ の任意の準素イデアル($\neq 0$)が極大イデアルになる.

(3). $w.gl.\dim R \leqq 1$ で次の(i)又は(ii)が成立する。

(i). $w.gl.\dim Q(R[X]) = 0$.

(ii). 任意のRの元 x に対して $\mathrm{Ann}(x)$ が有限生成イデアル。

この定理に関連して

環Rの2個の元で生成されるイデアルがすべて射影イデアル(resp. 平坦イデアル)なら、Rは semi-hereditary 環(resp. すべてのイデアルが平坦イデアル)であることが知られている。

また、[12] によれば、任意の有限生成イデアル$\mathfrak{a}$に対してある自然数nがあって$\mathfrak{a}^n$が射影イデアルでかつRが被約であることはRがsemi-hereditary環と同値になる。

更にまた、Rがvon Neumann regular ringのとき、R上の無限変数多項式環$R[\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}]$の任意の有限生成イデアルのannihilatorは単項イデアルである([4])。

<u>注意.</u> 後で述べる定理より、よく知られた次の事実が証明できる。即ち、

w.gl.dim $R \leqq 1$のとき次のことは同値である。

(1). Rが準局所環

(2). Rがvaluation domain.

しかし、(1)の代りにSpec Rが連結とすると、RがPrüfer domainのときを考えれば、必ずしもこのことは成立しない。

定理7の(3)は次の補題を使っても証明できる。

<u>補題8.</u> w.gl.dim $R \leqq 1$でSpec Rが連結ならSpec$Q(R)$

も連結である。

次に locally integral domain について更に考察しよう。

<u>命題9</u>. (*)を1つの巾等元から生成される単項イデアルについて昇鎖律が成立するという条件とする。このとき、環Rにおいて(*)が成立することと

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots\cdots \oplus R_n$$ (どの$\mathrm{Spec}\, R_i$も連結)であることは同値である。

<u>系10.</u> Rが条件(*)をみたし、Rの直和分解にでてくる環はどれも Geramita と Small の問題が成立すると仮定する(例えばRがネーター環のとき)。このとき、Rが locally integral domain であることと、Rが有限個の整域の直和に書けることとは同値である。

<u>注意1</u>. もちろん、系10は仮定なしでは正しくない。次のJensenの例はこれを示している。このJensenの例のRは locally integral domain で Spec Rが連結だが、

Rは整域ではない。よって、これはまた Geramita と Small の問題の反例になっている。

<u>Jensen の例</u>. 実直線上の pairwise disjoint intervals の族で次の性質をもつものを考える。(1). どの区間の end points も有理点である。(2). 任意の２つの異なる区間の間に他の区間がある(下に有向集合)。Rを連続関数でほとんどすべての区間で有理定数でその有限個の区間上では $f(X)\in\mathbb{Q}[X]$ で与えられる環とする。但し $\mathbb{Q}$ は有理数体とする。このときRは Bezout 環で $w.gl.\dim R=1$ で $gl.\dim R\leqq 2$. 更に、Rは定理7の(3)より連接環でないことがいえる。

<u>注意 2.</u> 系10の仮定の下で(実は仮定はなくてよいのだが) $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[X]$ を施すとRが locally integral domain であることと $R[X]$ もそうであることは同値であることがでてくる。

<u>注意 3.</u> 系10に関連して、次のことは同値である。

(1). $R=R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_n$ どの R_i も整域

(2). Rは locally integral domain かつ minSpecR が有限集合

ここで(2)において $\min\mathrm{Spec}R$ が compact とするとこれは(1)と同値とはならない。その例として、R を von Neumann regular ring で $\mathrm{Spec}R$ がネーター空間でないものを考えればよい。von Neumann regular ring R に対して、$\mathrm{Spec}R$ がネーター空間なることと、R がネーター環であることは同値である。

<u>注意4.</u> 注意3の(1)においてどの R_i も整域という代りにどの $\mathrm{Spec}R_i$ も連結とすると、注意3の例によって同値性は成立しないことがわかる。

(2)の条件から R のどの元 x に対しても $\mathrm{Ann}(x)$ は一つの巾等元で生成されることがわかる。

今度は、$\mathrm{Spec}R$ の連結性がどんなとき $\mathrm{Spec}R/\mathfrak{a}$ にも保存されるか考えて見よう。

<u>例1.</u> R が単項イデアル整域のとき $\mathrm{Spec}R/\mathfrak{a}$ が連結となるのは $\mathfrak{a}$ が 0 又は素元の巾で生成されることと同値である。しかし、R を素元分解環とすると必ずしもこれは成立しない。例えば、$R=k[X, Y]$ を体 k 上の2変数

多項式環とし、$\mathfrak{a} = (XY)$ とすると、$\mathrm{Spec}\, R/\mathfrak{a}$ は連結だが、XY は素元の巾ではない。この $R/\mathfrak{a}$ は quasi-normal 即ち、$\mathrm{Pic}(R/\mathfrak{a}) \cong \mathrm{Pic}((R/\mathfrak{a})[T, T^{-1}])$ をみたすが、not locally unibranch である（[7]）。

<u>例2</u>．（[11]）．$X = \mathrm{Spec}\, R$ を連結 $\mathfrak{a}(\neq R)$ を R のイデアルとする。任意の連結なアフィン・スキーム $X' = \mathrm{Spec}\, B$ と任意の整射 $f\,;\, X' \longrightarrow X$ に対して、$f^{-1}(\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{a})) = \mathrm{Spec}(B/\mathfrak{a}B)$ がつねに連結なら、$\mathrm{Spec}\, R/\mathfrak{a}$ が連結である。

その他、群と関連して $\mathrm{Spec}\, R$ が連結になる例として、

<u>例3</u>．（[9]）．G を有限群とし、$\Omega(G)$ をバーンサイド環とする。このとき、G が可解群であることと $\mathrm{Spec}(\Omega(G))$ が連結であることは同値である。p を素数とするとき、$G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ なら、$\Omega(G) \cong \mathbb{Z}[T]/(T(T-p))$．

<u>例4</u>．（[8]）．G を有限群、p を素数，$R(G)$ が指標環のとき．$A = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} R(G)$ とおくと次は同値である。

(1). $\mathrm{Spec}\,A$ が連結

(2). G が p-群

(3). A が局所環

また次の例は明らかである。

<u>例5.</u> $R_1 \subset R_2 \subset \cdots\cdots \subset R_n \subset \cdots\cdots$ どの $\mathrm{Spec}\,R_i$ も連結なら、$\mathrm{Spec}(\varinjlim R_i)$ も連結である。

次に $\mathrm{Spec}\,R$ 又は $\mathrm{max}\,R$ がネーター空間であることを仮定して $\mathrm{Spec}\,R$ が連結空間であることからどんなことがいえるかを考える。

そのため、まずネーター空間の例をあげよう。

<u>例1</u>. ([1]). 次の同値な条件の一つが成立すれば、$\mathrm{Spec}\,R$ はネーター空間.

(1). R の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a}$ に含まれる有限生成イデアル $\mathfrak{b}$ が存在して ${}^\forall a \in \mathfrak{a}$ に対して $a^k \in \mathfrak{b}$.

(2). R の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a}[[X]] \subset \sqrt{\mathfrak{a}R[[X]]}$.

(3) $^{\forall}\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ に対して $\mathfrak{p}[[X]] = \sqrt{\mathfrak{p}R[[X]]}$.

特に、(2)において常に等号が成立するならRはネーター環となる。また、$\dim R[[X]] < \infty$ ならRは上の同値な条件をみたし従ってSpec Rはネーター空間になる。

例2.([5]). RがLaskerian ringならSpec Rはネーター空間である。またR[[X]]がZ.D.環でもそうである。

例3.([14]). Rが半局所的被約ネーター環とし、$\overline{R}$をその整閉包とする。このとき、Spec $\overline{R}$ はネーター空間である。

例4.([10]). Spec Rが有限集合とする。max(R[X])がネーター空間であることは、max(R[X])が次元が1以下の空間の有限個のdisjoint unionでかけることと同値である。

max Rがネーター空間でSpec Rが連結ならRのpure idealはあまり多くは存在しないことや、almost Artinian moduleに関して次のことがいえる。

その前に定義として、Mが almost Artinian R-module とは、Mの零でない任意の部分加群Nに対してM/NがアルティンR-加群のときをいう。Rが単項イデアル整域なら、R自身 almost Artinian ring である。

命題11. Rが体でない環とし、$\mathfrak{a}$を0でないイデアルでジャコブソン根基に含まれるとする。$\mathfrak{a}$が almost Artinian R-module で $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a})$が有限生成イデアルなら$\dim R \geqq 1$である。

$Q(R)$をRの全商環とし、$(X, \mathcal{O}_X)$をRに付随したアフィンスキーム、$\tilde{J}$をRのジャコブソン根基Jに付随したX上の層とする。$Q(R)$が almost Artinian R-module であることを環付空間の言葉で述べる。

定理12. $Q(R)$が almost Artinian R-module であることと次の(a)又は(b)のどちらかが成立することは同値である。

(a). $\operatorname{Spec} R$がネーター空間かつT_1-空間で各閉点x

に対して茎$\tilde{J}_x$が有限生成イデアル

(b). (i). Spec R が連結で max R がネーター空間

(ii). 各閉点xに対して$\mathcal{O}_{X,x}$がネーター整域

(iii). minSpec R が局所閉集合.

(iv). Rの pseudo-radical のある元f $(\neq 0)$が存在して minSpec$\left(R/(f)\right)$が有限集合.

(v). 単項イデアル定理（ネーターは仮定しない）が成立

系13. 定理12で max R の代りに Spec R がネーター空間とすると (iv), (v) はなくてよい。

系14. Rがネーター環のとき、Rが almost Artinian 環であることは次の(1)又は(2)が成立することと同値である。

(1). Spec R が T_1-空間

(2). Spec R が連結で各閉点xに対して$\mathcal{O}_{X,x}$が整域でかつ minSpec R が局所閉集合.

最後に Geramita と Small の問題に帰る。

定理 15. 次の各場合に Geramita と Small の問題は成立する。

(1). Max R はネーター空間

(2). R の各元 x に対して $\mathrm{Ann}(x)$ は有限生成イデアル

特に、R が連接環即ち $\mathcal{O}_X$ が連接層

(3) minSpec R が compact 時に R の極小素イデアルが有限個

(4). $Q(R)$ の任意の準素イデアル ($\neq 0$) が極大イデアルである。特に、$Q(R)$ が von Neumann regular ring

(5). 少なくとも一つ有限生成である極小素イデアルが存在する。

定理15 の (2) に関連して、連接環の例もあげておく。

例 1. ネーター環や semi-hereditary ring (特に、von Neumann regular ring) また von Neumann regular ring や Prüfer domain 上の有限変数の多項式環やネーター環上の (無限変数) 多項式環などは [13] にあげてあるように連接環である。

例2.（[2]）. Rが被約環で $\mathrm{Spec}\,R - \mathrm{minSpec}\,R$ の各元が有限生成なら、Rは連接環である。

参考文献

[1]. J.T. Arnold : Prime ideals in power series rings, Conference on commutative algebra. Springer lecture note 311 1973

[2]. J.E. Caring and W.V. Vasconcelos: Projective ideals in rings of dimension one, Proc. Amer. Math. Soc. 71 1978 169−173.

[3]. A.V. Geramita and C. Small : Introduction to homological methods in commutative rings, Queen's papers in pure and app. math. No.43 Queen's Univ. 1976.

[4]. R. Gilmer : Polynomial rings over a commutative von Neumann regular ring, Proc. Amer. Math. Soc. 49 1975 294−296.

[5]. R. Gilmer and W. Heinzer: The Laskerian property, power series rings and Noetherian spectrum,

Proc. Amer. Math. Soc. 79 1980 13–16.
[6]. S. Greco: On the theory of branches; Int. symp. of alg. geom. Kyoto 1977 477–493.
[7]. S. Greco: Seminormality and quasi-normality of group rings, J. Pure and App. alg. 18 1980 129–142.
[8]. 近藤庄一；有限群の指標環の性質(二) 早大数学論文集.
[9]. H. Krämer: On the singularities of the Burnside ring of a finite group, Papers from the open house for algebraists No. 17. Arhus univ. 1970
[10]. Y. Lequain and A. Simis: Projective modules over $R[X_1,\dots,X_n]$, R a Prüfer domain, J. Pure and app. alg. 18 1980 165–171.
[11]. 松村英之: Henselization について 代数学シンポジューム(岡山) 1968
[12]. A.G. Naoum: A note on semi-hereditary ring, Abst. Amer. Math. Soc. 1980 vol. 1
[13]. 大石彰：絶対純粋加群と連接環 可換環論若手シン

ポジウム報告集(軽井沢) 1978

[14]. H. Seydi: La théorie des anneaux japonais, Colloque d'algèbre de Rennes 1972.

Local Cohomology Modules of Complexes and Homological Conjectures

名大　吉野雄二

§0.　Peskine－Szpiro [5] に始まる可換環の homological conjecture は，Hochster が体を含む local ring について，Big C-M module の存在を証明したことによって，等標数の場合には，一応の決着がついたと考えられている。(cf. Hochster [3])　ここでは，不等標数の場合も含めた一般の局所環にも通用する（と思われる）新しい approach の方法の一つについて説明したいと思う。

§1.　先ず，homological conjectures について復習しておこう。主な予想を書き下すと次のようになる。

(A, m, k) を d 次元の Noether 局所環とするとき，

(Big C-M)：　任意の A の巴系 $\underline{x} = \{x_1 \cdots x_d\}$ について，$\underline{x}$ を正則列にもつ A-module M が存在して，$mM \neq M$?

(NIC)：　$F_. : 0 \to F_r \to \cdots \to F_0 \to 0$ を finite free complex over A で，$H.(F.) \neq 0$，$\ell(H_i(F.)) < \infty$ $(\forall i)$ ならば，$r \geq d$?

(BC)： 有限生成A module Mで，injective dimension 有限なものが存在すれば，AはC-M？

(HC)： 長さ有限なA-module Mで，projective dimension 有限なものが存在すれば，AはC-M？

(MC)： 任意のAの巴系 $\underline{x} = \{x_1 \cdots x_d\}$について，
$$\left(\prod_{i=1}^{d} x_i\right)^n \notin (x_1^{n+1}, \cdots, x_d^{n+1})A \qquad (\forall n) ?$$

(DS)： Rをregular local ring．AがRのfinite ring extensionのとき，$R \oplus A$？

これらの予想の間の包含関係は次の図式にまとめられる。(cf. Hochster [3])

$$\begin{array}{l} (\text{Big C-M}) \Rightarrow (\text{NIC}) \Rightarrow (\text{BC}) \Rightarrow (\text{HC}) \\ (\text{Big C-M}) \Rightarrow (\text{MC}) \Rightarrow (\text{DS}) \end{array}$$

そして，予想の正否について，私が知っているものを並べると次の様になる。

(1) [Hochster] 全ての予想は，$\dim A \leqslant 2$ あるいは，局所環Aがessentially equicharacteristicのとき正しい。但し，ここで，Aがess. equichar. とは，Aのideal $\mathfrak{a}$が存在して，$\dim A/\mathfrak{a} = \dim A$ かつ $A/\mathfrak{a}$が等標数となるときを言う。

(2) (NIC)の結論は，$r+1 \geqslant d$ とすればいつでも成立．

する。とくに，（BC）の結論を $\dim A \leqslant \operatorname{depth} A+1$ とすればいつでも正しい。

(3)　$\dim A=3$ なら（NIC）以下は成立する。

(4)　A が Buchsbaum 環（$H_{m}^{d-1}(A)$ が k-vector space で十分）なら，（HC）は成立する。

その他，環 A に色々と制限を設けて個々の予想を確めてみると，それらが一般的に肯定的であることを確信できるであろう。しかし，証明は？，となるとどれも当惑するばかりである。実際，（DS）は，R が $\mathbb{Z}[X, Y]$ の局所環の時でさえ，open である。

次の節では，もう一つ新しい予想（それは，一見，証明し易い様に思える）を考えてみよう。

§2　全ての予想は，局所環を完備化しても構わないことに注意する。それ故，A は正則局所環の準同型像であるとしても，homological conjectures を考える上では，一般性を失わない。そこで，以下では，その様な局所環について考える。このとき，A には，dualizing complex $D_A^{\cdot}$ が存在する。$D_A^{\cdot}$ は，次の様な complex として定義されるものである。

「$d=\dim A$ のとき，$\operatorname{Ext}_A^i(k, D_A) \cong \begin{cases} k & (i=d) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$

を満たす bounded complex $D_A^{\cdot}$ で，$H^i(D_A^{\cdot})$ が全ての i について有限生成となるものである。』

$D_A^{\cdot}$ は，minimal injective complex として取るのが通例である。さて，$D_A^{\cdot}$ は，$\mathrm{RHom}(D_A^{\cdot}, D_A^{\cdot}) \cong A$ をみたし，local duality は，

『$R\Gamma_m(X) \cong \mathrm{RHom}(X, D_A^{\cdot})^{\vee}[-d]$ for every bounded complex X with finite homologies』

と書かれる。

dualizing complex については，Foxby [2] あるいは，最近の P. Roberts の Montréal 大学でのセミナーノート [6] に易しく説明してあるので，それを読むことをお勧めする。

さて，A の canonical module Ω_A は，次の様に定義される。

$$\Omega_A = H^0(D_A^{\cdot})$$

$D_A^{\cdot}$ は augmentation $\varepsilon : \Omega_A \to D_A$ をもつことに注意しておこう。A が C-M 環であるためには，この ε が quasi-isomorphic であることが必要十分であり，その時 Ω_A は，Kunz-Herzog の意味での canonical module と一致する。

さて，augmentation ε より，次の A-module の準同

型が得られる。即ち

$$\sigma_A \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ext}_A^d(k, \varepsilon) : \mathrm{Ext}_A^d(k, \Omega_A) \to \mathrm{Ext}_A^d(k, D_A^{\cdot})$$

私が、この報告で提出したい新しい予想とは次の事である。

<u>予想（D）</u>； $\sigma_A \neq 0$?

一般に、$\mathrm{Ext}_A^d(k, D_A^{\cdot}) \cong k$ なので、$\sigma_A \neq 0$ は、σ_A が surjective であることと同値である。上の予想（D）が正しければ、次の予想（D'）が成立する。

<u>予想（D'）</u>； natural map $\varphi_A : \mathrm{Ext}_A^d(k, \Omega_A) \to H_m^d(\Omega_A)$ について、$\varphi_A \neq 0$?　$\left(= \varinjlim \mathrm{Ext}_A^d(A/m^n, \Omega_A)\right)$

実際、次の図式が可換であることによる。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ext}_A^d(k, \Omega_A) & \xrightarrow{\sigma_A} & \mathrm{Ext}_A^d(k, D_A^{\cdot}) & \xrightarrow{\sim} & k \\
\varphi_A \downarrow & \square & \downarrow & \square & \downarrow \text{natural} \\
H_m^d(\Omega_A) & \longrightarrow & H_m^d(D_A^{\cdot}) & \underset{\text{local duality}}{\xrightarrow{\sim}} & E_A(k)
\end{array}$$

<u>定理 1</u>. 局所環 A について、予想の間に次の関係がある。

$$(D) \Rightarrow (D') \begin{array}{l} \Rightarrow (MC) \\ \Rightarrow (NIC) \end{array}$$

（証明）（D）⇒（D'）は上で見た。（D'）⇒（MC）を示そう。

先ず、$\underline{x} = \{x_1 \cdots x_d\}$ を A の任意の巴系とする。

$\alpha : K(\underline{x} : A) \to k$ を augmentation とするとき、これによって、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ext}^d_A(k, \Omega_A) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^d_A(K(\underline{x}: A), \Omega_A) & = & \Omega_A/\underline{x}\Omega_A \\
\varphi_A \downarrow & \square & \downarrow & & \psi \downarrow \\
H^d_{\mathfrak{m}}(\Omega_A) & \xrightarrow[f]{} & \varinjlim_\nu \mathrm{Ext}^d_A(K(\underline{x}^{(\nu)}: A), \Omega_A) & = & \varinjlim_\nu \Omega_A/\underline{x}^{(\nu)}\Omega_A
\end{array}$$

ここで f が同型であることは、よく知られている。

$\varphi_A \neq 0$ ならば、この図式より、$\psi \neq 0$ である。写像 ψ は、

$$\Omega_A/\underline{x}\Omega_A \xrightarrow[\xi]{} \Omega_A/\underline{x}^{(2)}\Omega_A \xrightarrow[\xi]{} \Omega_A/\underline{x}^{(3)}\Omega_A \xrightarrow[\xi]{} \cdots \longrightarrow \varinjlim_\nu \Omega_A/\underline{x}^{(\nu)}\Omega_A$$

と分解できる。但し、ξ は $(\prod_{i=1}^d x_i)$ 倍する写像である。

したがって、$\psi \neq 0$ は、$\exists y \in \Omega_A$ s.t. $(\prod_1^d x_i)^n y \notin \underline{x}^{(n+1)}\Omega_A$ $(\forall n > 0)$ を意味している。とくに、$(\prod_1^d x_i)^n \notin \underline{x}^{(n+1)}A$ $(\forall n > 0)$

これは、(MC) である。

(D') ⇒ (NIC) の証明は、上程、容易ではないが、同じような方法によって、formal な計算のみによって出るので、それは、読者に委ねることにする。■

予想 (D) は、一見単純な内容しか持たない様に思えるが、実は、その正否を問うことは、とてつもなく難しい問題であることが少し考えてみると分るであろう。

次の節では、この予想 (D) が (Big C-M) からの帰結として得られることを示そう。

§3

__補題1__. A が C-M 環なら、予想 (D) が成立する。

(証明) この時、ε は quasi-isom. 故、σ_A は実は同型である。■

さて，$0 \to Syz_d^A k \to F_{d-1} \to \cdots \to F_0 \to k \to 0$ を exact sequence で各 F_i が A − free とするとき，任意の bounded complex X について，A − module homomorphism；

$$\tau_A(X) : \mathrm{Ext}_A^0(Syz_d^A k, X) \to \mathrm{Ext}_A^d(k, X)$$

が得られることに注意しておこう。

<u>補題2</u>　$\tau_A(D_A^{\cdot}) \neq 0 \iff \sigma_A \neq 0$

（証明）次の可換図式がある。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_A^0(Syz_d^A k, \Omega_A) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}_A^0(Syz_d^A k, D_A^{\cdot}) \\ \tau_A(\Omega_A)\downarrow & \square & \downarrow \tau_A(D_A^{\cdot}) \\ \mathrm{Ext}_A^d(k, \Omega_A) & \xrightarrow[\sigma_A]{} & \mathrm{Ext}^d(k, D_A^{\cdot}) \end{array}$$

ここで，$\tau_A(\Omega_A)$ が全射であることは容易に分る。そして，それによって結論を得る。■

<u>補題3</u>　$(A, m) \to (B, n)$ が finite local homom. で，$\dim A = \dim B = d$ のとき，$\sigma_B \neq 0 \Rightarrow \sigma_A \neq 0$

（証明）補題2より，$\tau_B(D_B^{\cdot}) \neq 0$ から $\tau_A(D_A^{\cdot}) \neq 0$ を導けばよい。　次の A − module としての可換図式がある。

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & Syz_d^A(A/m) & \to & F_{d-1} & \to & \cdots\cdots & \to & F_0 & \to & A/m & \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \to & Syz_d^B(B/n) & \to & L_{d-1} & \to & \cdots\cdots & \to & L_0 & \to & B/n & \to 0 \end{array}$$

但し，各 F_i は A − free，各 L_i は B − free で，横二行はそれぞれ exact である。　これより，$D_B^{\cdot} = R\mathrm{Hom}_A(B, D_A)$ を使って，次の図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^0_B(\mathrm{Syz}^B_d(B/n), D_B^{\cdot}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\tau_B(D_B^{\cdot})"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Ext}^0_A(\mathrm{Syz}^B_d(B/n), D_A^{\cdot}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Ext}^0_A(\mathrm{Syz}^A_d(A/m), D_A^{\cdot}) \arrow[d, "\tau_A(D_A^{\cdot})"] \\
\mathrm{Ext}^d_B(B/n, D_B^{\cdot}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ext}^d_A(B/n, D_A^{\cdot}) \arrow[r, "g"'] & \mathrm{Ext}^d_A(A/m, D_A^{\cdot})
\end{tikzcd}$$

ここで，gは．$A/m \hookrightarrow B/n$ を A-module として $E_A(A/m)$で dualを取ったものに等しいから．gは全射である。よって．この図式から．$\tau_B(D_B^{\cdot})$：全射 $\Rightarrow$ $\tau_A(D_A^{\cdot})$：全射 が出る。■

<u>系1</u>．(a) 補題3より．予想(D)を示すのに．Aは，complete normal local domainとしてかまわない。

(b) とくに．補題1と合わせて，$\dim A \leq 2$ なら．予想(D)が成立する。

<u>補題4</u>　Rをd次元<u>正則</u>局所環，Mを有限生成R加群で，$f: R \to M$ をR準同型とする。この時．次は同値である。

(a) f は pure である。

(b) 写像の合成 $\psi: \mathrm{Ext}^d_R(k, R) \xrightarrow[\mathrm{Ext}^d(k,f)]{} \mathrm{Ext}^d_R(k, M) \xrightarrow[\text{natural}]{} H^d_m(M)$ が0でない。

(証明) 容易なので略す。

<u>Proposition 1</u>．Aが完備局所整域のとき．次は同値である。

(a) $\sigma_A \neq 0$ i.e. 予想(D)がAにおいて成立する。

(b) (R, n)を正則局所環で，$R \subset A$ を finite ring extension $k = R/n = A/m$ とするとき．次のR-modulesとしての可換図式：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R^d \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & R^d \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Syz}_d^A k \arrow[r] & F_{d-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(但し、上行は k の R-free resolution，下行は、A-mod. の exact sequence で各 F_i は A-free.)

において、f はいつも pure である。

(c) exact sequence $0 \to \mathrm{Syz}_d^A k \to F_{d-1} \to \cdots \to F_0 \to k \to 0$

(但し各 F_i は A-free) から得られる写像；

$$\rho : H_m^0(k) \longrightarrow H_m^d(\mathrm{Syz}_d^A k)$$

は 0 でない。

(証明) (a)⇔(b) 先ず次の可換図式に注目する。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_A^0(\mathrm{Syz}_A^d k, D_A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\tau_A(D_A)"] & \mathrm{Ext}_R^0(\mathrm{Syz}_A^d k, D_R) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_R^0(f,R)"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}_R^0(R, R) = R \arrow[d, "\tau_R(D_R)"] \\
\mathrm{Ext}_A^d(k, D_A) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ext}_R^d(k, D_R) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ext}_R^d(k, D_R) = k
\end{tikzcd}$$

ここで、補題 1．2．より $\tau_R(D_R)$ は全射である。すると、

(a) ⇔ $\tau_A(D_A)$ が全射．⇔ $\mathrm{Ext}_R^0(f. R)$ が全射．⇔ f: pure.

(b)⇔(c) は、次の図式による。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_R^d(k, R) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_R^d(k,f)"'] & \mathrm{Ext}_R^d(k, \mathrm{Syz}_d^A k) \arrow[r, "\text{natural}"'] & H_m^d(\mathrm{Syz}_d^A k) \\
\mathrm{Ext}_R^0(k, k) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\cong"] & \mathrm{Ext}_R^0(k, k) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] & H_m^0(k) \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

補題 4. より f が pure ⇔ 上の行の 2 つの写像の合成が 0 でない。⇔ $\rho \neq 0$ ∎

(註) Proposition の (a)⇔(b) より、$\overbrace{\text{A が完備局所整域の}}^{\text{予想(D)は}}$

とき、Hochster の canonical element conjecture と同値であることが分る。(See Hochster [4])

<u>定理 2.</u> $(A, \mathfrak{m}, k)$ を完備局所整域とする。

もし、『∃ A-modules の exact sequence：

$$0 \to C_d \to C_{d-1} \to \cdots \to C_0 \to N \to 0 \quad (d = \dim A)$$

s.t. $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_A N$ で、$0 \neq \alpha \in N$ を $\mathfrak{m} \cdot \alpha = 0$ としたとき、

上の exact seq. よりえられる写像 $\psi : H^0_{\mathfrak{m}}(N) \to H^d_{\mathfrak{m}}(C_d)$

について $\psi(\alpha) \neq 0$.』

ならば、この環 A について予想 (D) が成立する。

(証明)

$f : k \hookrightarrow N$ を $f(1) = \alpha$ で定義する。これより、次の図式を可換にする A 準同型がえられる。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & \mathrm{Syz}^A_d k & \to & F_{d-1} & \to & \cdots & \to & F_0 & \to & k & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
0 & \to & C_d & \to & C_{d-1} & \to & \cdots & \to & C_0 & \to & N & \to & 0
\end{array}$$

(但し、上の行は exact で各 F_i は A-free)

これから次の可換図を得る。

$$\begin{array}{ccc}
H^0_{\mathfrak{m}}(k) & \xrightarrow[\rho]{} & H^d_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Syz}^A_d k) \\
{\scriptstyle H^0_{\mathfrak{m}}(f)}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle H^d_{\mathfrak{m}}(g)} \\
H^0_{\mathfrak{m}}(N) & \xrightarrow[\psi]{} & H^d_{\mathfrak{m}}(C_d)
\end{array}$$

仮定より、$\psi(\alpha) \neq 0$ だから、$\rho \neq 0$. よって、Prop. 1. より $\sigma_A \neq 0$ が分る。■

もし，Aが big C-M module M をもてば，上の定理の仮定をみたす様な exact sequence を構成することができる。実際，その時，$\underline{x}$ を A の適当な A の巴系とおいて，定理の N として，$M/\underline{x}M$ を，$0 \to C_\alpha \to \cdots \to C_0$ として，Koszule complex $K(\underline{x} : M)$ と置けばよい。

なぜならば，Foxby [1] の P 23. (1.3) より $K(\underline{x} : M) \to M/\underline{x}M \to 0$ は exact であり，又，そのことから，$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0 \Leftrightarrow i = \alpha$ が容易に分るので，これらを合わせて，

$$\Psi : H^0_{\mathfrak{m}}(M/\underline{x}M) \longrightarrow H^\alpha_{\mathfrak{m}}(K_\alpha(\underline{x} : M))$$

が単射であることが分るからである。したがって，次の事が示された。

<u>系 1</u>. A が完備局所整域のとき，

$$(\text{Big C-M}) \Rightarrow (\text{D})$$

<u>系 2</u>. A が essentially equicharacteristic ならば，この環 A において予想 (D) は成立する。

次の節では，局所環 A が不等標数の場合も含めて，一般の場合には，予想 (D) が，どの程度成立するか，考えてみよう。

§4.

<u>Proposition 2</u> (A, m, k) を d 次元局所環で $H^{d-1}_m(A)=0$ ならば、この環 A において予想 (D), (NIC), (MC) は成立する。

(証明) 前頁の系2より、$\mathrm{ch}\, k = p > 0$, $p \in A$ は non-unit で $\dim A/(p) = d-1$ としてよい。$\bar{A} = A/(p)$ とおくと、$D_{\bar{A}} = \mathrm{RHom}_A(\bar{A}, D_A)[1]$ より、次の可換図をえる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^0_A(\mathrm{Syz}^A_d k, D_A) \arrow[r, "h"'] & \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Syz}^A_{d-1} k, D_A) \arrow[rr] & & \mathrm{Ext}^d_A(k, D_A) \\
& \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Syz}^{\bar{A}}_{d-1} k, D_A) \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Ext}^0_{\bar{A}}(\mathrm{Syz}^{\bar{A}}_{d-1} k, D_{\bar{A}}) \arrow[r, "\tau_{\bar{A}}(D_{\bar{A}})"'] & \mathrm{Ext}^{d-1}_{\bar{A}}(k, D_{\bar{A}}) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

$\bar{A}$ 上では、系2より予想 (D) が成立するから $\tau_{\bar{A}}(D_{\bar{A}})$ は全射である。そこで、上の図式より $\tau_A(D_A) \neq 0$ を言うためには、図中 h が全射であれば十分である。しかし、それは、$H^{d-1}_m(A)=0$ より容易に分ることである。∎

その他、予想 (D) について、現在筆者が持っている結果は、次の様なものである。

『A を d 次元 $(d \geq 3)$ の normal domain とする。もし、$\mathrm{depth}\, \Omega_A \geq 3$ あるいは、$\mu^d(m, \Omega_A) < d$ なら、A についての予想 (D) は、$(d-1)$ 次元の局所環についての (D) に帰着する。』

最後に、予想（D）よりもっと強い予想を提出して、この報告を終えることにしよう。

<u>予想（SD）</u>：A が complete normal domain のとき、

$$\alpha \underset{def}{=} \mathrm{Ext}_A^0(D_A, \varepsilon) : \mathrm{Ext}_A^0(D_A, \Omega_A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^0(D_A, D_A) \cong A$$

は全射であるか？

予想（SD）が正しければ、（D）が成立することを見るのは、容易である。又、（SD）は次のことと同値である。

『$I^{\cdot}$ を Ω_A の injective resolution とするとき、次の図式を可換にする A-homomorphisms が存在するか？

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \to & \Omega_A & \to & D_A^0 & \to & D_A^1 & \to & \cdots & \to & D_A^d & \to & 0 & & \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \Omega_A & \to & I^0 & \to & I^1 & \to & \cdots & \to & I^d & \to & I^{d+1} & \to & \cdots
\end{array}$$

』

この予想（SD）がどの程度成りたつものか、今のところ全然知らない。

しかし、Big C-M module の存在を排除して、(MC)や(NIC)の証明を目指すとき、（D）よりも、この（SD）の型の予想の方が証明しやすいと思われるのだが……。

References

[1] H.B.Foxby : On the μ^i in a minimal injective resolution II. Math. Scand. 41 (1977) 19-44

[2] H.B.Foxby : Bounded Complexes of flat modules. Jour. of Pure and Appl. Alg. Vol.15 (1979) 149-172

[3] M.Hochster : Topics in the hommological theory of modules over commutative rings. Regional conf. Ser. in Math. No.24 (1975)

[4] M.Hochster : Canonical Element in Local Cohomology Modules and the Direct Summand Conjecture. Preprint

[5] C.Peskine-L.Szpiro : Dimension projective finie et cohomologie locale. IHES. Publ. Math. No.42, Paris (1973) 323-395

[6] P.Roberts : Homological invariants of modules over commutative rings. Séminaire de Mathématiques supérieures. Université de Montréal (1980)

2つの予想の同値性

東京理科大・理　大井武男

直和因子予想 (Hochster) と Raynaud, Gruson の問題 ([R.-G] の Questions (1.4.3.2)) の同値性を証明する。これにより [R.-G] 予想は体を含む場合は正しいことがわかる。

(直和因子予想) R を regular local, S を module-finite な拡大環とする。そのとき R は S の直和因子である (R-加群として)。

([R.-G] 予想) A を noeth. ring, B を A の integral extension とする。そのとき $A \subset B$ は "flatness" を下げる。すなわち $M \otimes_A B : B\text{-flat} \Rightarrow M : A\text{-flat}$.

§1. 問題の Reduction

(1) S は有限表示 R-加群だから R は complete regular local としてよい。さらに $(0) = R \cap P$ なる S の素 ideal P (lying-over) をとることにより S は整域としてよい。

(2) 平坦性は局所的性質で $A_{\mathfrak{p}} \subset B_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \otimes_A B$, $\hat{A}_{\mathfrak{p}} \subset \hat{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{p}}$ ($\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$) は共に整拡大だから A は complete local ring としてよい。$A_{red} = A/I \subset B/IB$ も整拡大だから A は reduced としてよい（∵ もし $M \otimes_A B$: B-flat, M/IM : A/I-flat ならば M は A-flat）。
さらに次の LEMMA により A は整域としてよい。
(1) と同様に B も整域としてよい。

<u>LEMMA</u>. C を comm. ring（必ずしもネーターでない），I, J を C のイデアル，M を C-加群とする。そのとき

$$\left(\begin{array}{l} M/IM \ :\ C/I\text{-flat} \\ M/JM \ :\ C/J\text{-flat} \end{array}\right) \Longrightarrow M/(I\cap J)M : C/I\cap J\text{-flat}.$$

<u>PROOF</u>. M, C の代わりに $M/(I\cap J)M$, $C/I\cap J$ を用いることにより $I \cap J = (0)$ としてよい。そのとき I は C/J-加群だから下の comm. diagram が成立：

$$\begin{tikzcd}
I \otimes_C M \arrow[rr, "f"] \arrow[d, equal] & & M \arrow[ddd] \\
I \otimes_{C/J} M/JM \arrow[d, "\wr"] & & \\
& & \text{(canonical maps)} \\
I+J/J \otimes_{C/J} M/JM \arrow[rr, "g"] & & M/JM
\end{tikzcd}$$

M/JM : C/J-flat より g は単射, 故に f が単射 (i.e. $\mathrm{Tor}_1^C(C/I, M) = 0$). 一方, M/IM : C/I-flat だから, $\mathrm{Tor}_1^C(N, M) = 0$ for any C/I-module N. 同様にして, $\mathrm{Tor}_1^C(L, M) = 0$ for any C/J-module L. 任意の C-加群 P に対して, 次の完全系列

$$0 \longrightarrow IP \longrightarrow P \longrightarrow P/IP \longrightarrow 0$$

をとると, IP が C/J-加群であることから $\mathrm{Tor}_1^C(P, M) = 0$ を得る. 故に M は C-flat. q.e.d.

§2. Ring Extension についての注意

C を commutative ring, D を C の拡大環として次の5つの条件を考える; ① Property C extension ② Pure extension ③ Direct summand; C は D の直和因子 ④ 条件(0) : $M \neq 0 \Rightarrow M \otimes_C D \neq 0$ ⑤ 条件(P) : $M \otimes_C D$: D-flat $\Rightarrow M$: C-flat.

このとき, ③ ⇒ ② ⇒ ①, ⑤ ⇒ ④, ② ⇒ ⑤ はいつでも成立するが, C が noeth. complete local なら ② ⇒ ③ が成立つ. ∵) E を C の剰余体の C 上の injective hull とする. 仮定より

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E \otimes_C D \quad (\text{exact})$$

E が injective module だから

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_C(E\otimes_C D, E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(E,E) \to 0 \quad (\text{exact}) \\
\downarrow\wr & \circlearrowleft & \downarrow\wr \\
\mathrm{Hom}_C(D,C) & \longrightarrow & C \\
\Psi & & \Psi \\
f & \longmapsto & f(1)
\end{array}$$

これは C が D の直和因子であることを示している.

さらに C が complete gorenstein local なら ①⇒⑤

∵ $E=\varinjlim_{k\to\infty} E_k$, $E_k = \mathrm{Hom}_C(C/I_k, E)$ (I_k は irreducible) で $E_k \simeq C/I_k$ は単項生成 C-加群だから, Property C より $0\to E\to E\otimes_C D$ (exact) がでる.

[R.-G] の Corollaire (1.2.10) より C がネーター環のとき, ④⇒⑤ (したがって同値) が成立つ.

§3. 直和因子予想 ⇒ [R.-G] 予想の証明

A を complete local domain, B を A 上整な拡大整域とする. $R(\subset A)$ を complete regular local で, A がそれ上 finite なものとする. このとき B は R 上 finite な ring extensions の direct limit で表わせるから, 仮定より $R\subset B$ は pure extension である. R は complete local だから, R は B の直和因子になる.

したがって，Hom の usual duality により

$$0 \neq \mathrm{Hom}_R(B,R) \simeq \mathrm{Hom}_A(B, \mathrm{Hom}_R(A,R))$$

を得る．ここで finite A-加群 $\mathrm{Hom}_R(A,R)$ は torsion-free である．∵ $0 \neq a \in A$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A,R)$, $a\varphi = 0$ とする．r を a の R 上の最小多項式の定数項とすると $r \neq 0$ で $r \in aA$．したがって $r\varphi = 0$，これは $\varphi = 0$ を示す．故に，ある自然数 m が存在して $\mathrm{Hom}_R(A,R) \subset A^m$ (not natural inclusion)．これは $\mathrm{Hom}_A(B,A) \neq 0$ を意味し，[R.-G] の Remarque (1.2.11) より $A \subset B$ は条件 (O)，したがって条件 (P) をみたす．

q.e.d.

§4．[R.-G] 予想 ⇒ 直和因子予想の証明

体を含む場合は問題ないので，体を含まない場合 (unequicharacteristic case) について考えればよい．

$R, \mathfrak{m}$ を complete regular local, $R = D[[x_1, \cdots, x_r]]$, t を D の素元とする．S を the integral closure of R in the algebraic closure of the field of quotients of R とする．そのとき R が S の直和因子であることを示せば十分である．

仮定より $R \subset S$ descends the flatness. $E = E_R(R/m)$ は R-flat でないから $0 \neq E \otimes_R S$ (もし 0 なら E は R-flat). したがって $0 \neq \mathrm{Hom}_R(E \otimes_R S, E) \approx \mathrm{Hom}_R(S, R)$.

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathrm{Hom}_R(S,R) & \longrightarrow & R \\ & \Psi & & \Psi \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = f(1) \end{array}$$

とおくと, S は ring だから $\varphi \neq 0$, したがって $\mathrm{Im}\,\varphi \neq 0$

$\mathrm{Im}\,\varphi = R$ ($\Leftrightarrow E \to E \otimes_R S$ が injective) であることを証明すればよい. $\mathrm{Im}\,\varphi \subset m$ と仮定する. そのとき R の finite extension T ($R \subset T \subset S$) が存在して,

$$\begin{array}{cccc} \varphi_T : & \mathrm{Hom}_R(T,R) & \longrightarrow & R \\ & \Psi & & \Psi \\ & f & \longmapsto & f(1) \end{array}$$

は全射でない. 明らかに $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{Im}\,\varphi_T \subset m$.

一方, $R_d = D[[y_1, \cdots, y_r]]$, ここに y_i は $y_i^{d_i} = x_i$ なる S の元, として次の可換図式を作る:

$$\begin{array}{ccc} T \otimes_R R_d & \longrightarrow & TR_d \subset S \\ \cap & & \cap \\ \Phi(T) \otimes_R R_d & \xrightarrow{\sigma} & \Phi(T) R_d \end{array}$$

ここに σ は $\Phi(T)$ と $\Phi(R_d)$ が linearly disjoint over $\Phi(R)$ なら同型. これは適当な $d = (d_1, \cdots, d_r)$ に

より実現される。例えば, d_1 として $[亜(T):亜(R)]$ と互いに素な素数をとると, $X^{d_1}-x_1$ は 亜(T) 上既約であるか又は 亜(T) は x_1 の d_1 乗根の一つを含む (後者は不可能)。しかも各 i について, $d_i \to \infty$ のように選べる。そのような d に対して

$$
\begin{tikzcd}
\varphi_T \otimes 1_{R_d} : \mathrm{Hom}_R(T,R)\otimes_R R_d \arrow[r] \arrow[d, equal] & R_d \\
\mathrm{Hom}_{R_d}(TR_d, R_d) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$\mathrm{Im}(\varphi_T \otimes 1_{R_d}) = (\mathrm{Im}\,\varphi_T)R_d \subset \mathfrak{m}R_d = (t, y_1^{d_1}, \cdots, y_r^{d_r}).$$

一方, 代数的対象 S/R, S/R_d は同一視できる。$R_d \subset TR_d \subset S$ に対応して $R \subset U \subset S$ (Uは一意的とは限らない) が存在する。φ, S etc は R のみによって決まることに注意。以上より

$$\mathrm{Im}\,\varphi \subset \bigcap_{\text{such } d} (t, x_1^{d_1}, \cdots, x_r^{d_r}) = tR$$

を得る。$\mathrm{Im}\,\varphi = tI$ (I は R の ideal) とおくと t は S-regular だから $\mathrm{Im}\,\varphi = I$ $\therefore tI = I$, $I = 0$.

これは $\mathrm{Im}\,\varphi \neq 0$ に反する。 q.e.d.

参考文献

[R.-G] M. Raynaud and L. Gruson, Critéres de platitude et de projectivé, Seconde partie, Inventiones Math., 13, 1-89 (1971).

canonical module の話 —— Schenzel の結果の紹介

青山 陽一 (愛媛大・理)

文 献

[1] Y. Aoyama : *On the depth and the projective dimension of the canonical module*, Japan. J. Math. 6 (1980) 61-66.

[2] H. Bass : *On the ubiquity of Gorenstein rings*, Math. Z. 82 (1963) 8-28.

[3] R. Fossum, H.-B. Foxby, P. Griffith and I. Reiten : *Minimal injective resolutions with applications to dualizing modules and Gorenstein modules*, Publ. Math. I. H. E. S. 45 (1975) 193-213.

[4] H.-B. Foxby : *Gorenstein modules and related modules*, Math. Scand. 31 (1972) 267-284.

[5] S. Goto and K. Watanabe : *On graded rings I*, J. Math. Soc. Japan 30 (1978) 179-213.

[6] A. Grothendieck : *Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents*, Sém. Bourbaki Ex. 149, Mai 1957.

[7] A. Grothendieck : *Local cohomology*, Lect. Notes Math. 41, Springer Verlag, 1967.

[8] J. E. Hall and R. Y. Sharp : *Duality for a commutative noetherian

ring which possesses a dualizing complex, Quart. J. Math. Oxford (2) 30 (1979) 283 - 299.

[9] R. Hartshorne: *Residues and duality*, Lect. Notes Math. 20, Springer Verlag, 1966.

[10] J. Herzog, E. Kunz et al.: *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings*, Lect. Notes Math. 238, Springer Verlag, 1971.

[11] I. Reiten: *The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules*, Proc. A.M.S. 32 (1972) 417 - 420.

[12] P. Schenzel: *Zur lokalen Kohomologie des kanonischen Moduls*, Math. Z. 165 (1979) 223 - 230.

[13] P. Schenzel: *Applications of dualizing complexes to Buchsbaum rings*, Preprint.

[14] P. Schenzel: *On Buchsbaum rings and their canonical modules*, Preprint.

[15] J.-P. Serre: *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. 61 (1955) 197 - 278.

[16] R.Y. Sharp: *Gorenstein modules*, Math. Z. 115 (1970) 117 - 139.

[17] R.Y. Sharp: *On Gorenstein modules over a complete Cohen-Macaulay local ring*, Quart. J. Math. 22 (1971) 425 - 434.

[18] R.Y. Sharp: *A commutative noetherian ring which possesses a dualizing complex is acceptable*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

82 (1977) 197 - 213.

[19] R.Y. Sharp: *Necessary conditions for the existence of dualizing complexes in commutative algebra*, Sém. Alg. P. Dubreil 1977/8, Lect. Notes Math. 740, 213 - 229, Springer Verlag, 1979.

[20] R.Y. Sharp: *Dualizing complexes for commutative noetherian rings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78 (1975) 369 - 386.

---

canonical module の定義は [10] 5 Vortrag を見て下さい。

A を *local ring* で，*canonical module* K を持つものとする。第一回可換環論シンポジウム（1978，軽井沢）で筆者は次が成立することを報告した：

$$A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(K, K) \Leftrightarrow \hat{A} \text{ が } (S_2) \text{ を満たす。}$$

（$\hat{A}$ は A の *completion*）

（[1] Prop. 2）

Schenzel は，この命題を系として含む，一般の (S_n) 条件を *canonical module* の言葉で表わす定理を得た（[12]）。また，*Buchsbaum local ring* の *canonical module* (*if exists*) が *Buchsbaum* であること，*ring* が (S_2) を満たせば逆が成立することを示した（[14]）。

ここでは，上記の Schenzel の結果の紹介をすること

にしたい。

Schenzel の証明は，dualizing complex の手法を用いるものである。dualizing complex については，[9]或いは[20]を参照して下さい。（手取り早くは[20]がよい）
なお，complex及びその isomorphism等は derived category の中で考えるものとする。

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を local ring，$\dim A = d$，E を k の injective envelope とする。dualizing complex $D^{\cdot}$ for A が存在したとする。$D^{\cdot}$ は次の形であるとしてよい（J.E.Hall）：

$$\begin{cases} D^{i} = 0 & \text{for } i < -d,\ i > 0. \\ D^{i} = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \\ \dim A/\mathfrak{p} = -i}} E_A(A/\mathfrak{p}) & \text{for } -d \leq i \leq 0. \end{cases}$$

$H^{-d}(D^{\cdot})$ は A の canonical module である（K と書く）。
$J^{\cdot}$ を，$K[d] \hookrightarrow D^{\cdot}$ による factor complex とおく。

$0 \to K[d] \to D^{\cdot} \to J^{\cdot} \to 0$ exact より，
natural exact sequence $0 \to H^{-1}_{\mathfrak{m}}(J^{\cdot}) \to H^{d}_{\mathfrak{m}}(K) \to E \to H^{0}_{\mathfrak{m}}(J^{\cdot}) \to 0$
と natural isomorphism $H^{d+1-i}_{\mathfrak{m}}(K) \cong H^{-i}_{\mathfrak{m}}(J^{\cdot})$ for $i \geq 2$ を得る。([12])
また，次の biregular spectral sequence が存在する：([12])

$$E_2^{p,q} = H^{p}_{\mathfrak{m}}(H^{q}(J^{\cdot})) \Longrightarrow E^{n} = H^{n}_{\mathfrak{m}}(J^{\cdot}) \ .$$

定理（[12] (2.2)）．A を equidimensional local ring, $\dim A = d$, dualizing complex $D^\cdot$ が存在するとする。正整数 n に対し，次は同値である：

(i) A は (S_n) を満たす。i.e. $\operatorname{depth} A_{\mathfrak{p}} \geq \min\{n, \dim A_{\mathfrak{p}}\}$ for $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$。

(ii) natural map $H^d_{\mathfrak{m}}(K) \to E$ が bijective (resp. surj. for $n=1$) かつ $H^i_{\mathfrak{m}}(K) = 0$ for $d-n+2 \leq i < d$。

証明には，次の補題を使う。

補題（[12] (2.1)）．$\dim A = d$, dualizing complex が存在するとする。正整数 n に対し，次は同値である。

(a) A は equidimensional で (S_n) を満たす。

(b) $\dim H^{-i}(J^\cdot) \leq i - n$ for $0 \leq i < d$。

(ii) の条件は，$H^i_{\mathfrak{m}}(J^\cdot) = 0$ for $0 \leq i < n$ と同値であるから，補題 (a)⇒(b) と前述の spectral sequence を使って (i)⇒(ii) が示される。(ii)⇒(i) は induction on dim A で，補題 (b)⇒(a) を使って示される。

系（[12] (3.2)）．$A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(K, K) \iff$ A が (S_2) を満たす

$A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(K,K) \iff$ natural map $H^d_{\mathfrak{m}}(K) \to E$ が bijective より，定理よりすぐに出る。

また，上の定理の dual な結果もある。

定理（[12] (2.3)）． $\dim A = d$, dualizing complex for A が存在し，A は (S_2) を満たすとする。このとき，整数 $n \geq 2$ に対し次は同値である：

(i) $H^i_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ for $d-n+2 \leq i < d$.

(ii) $\operatorname{depth} K_{\mathfrak{p}} \geq \min\{n, \dim A_{\mathfrak{p}}\}$ for $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$。

次に Buchsbaum ring に関する結果を紹介する。

$C^{\bullet}$ を complex，r を整数とするとき，

$\tau^r C^{\bullet}$ で complex $\cdots \to C^i \to \cdots \to C^{r-1} \to \operatorname{Im}(C^{r-1} \to C^r) \to 0 \to 0 \to \cdots$

を示し，

$\tau_r C^{\bullet}$ で complex $\cdots \to 0 \to 0 \to \operatorname{Im}(C^r \to C^{r+1}) \to C^{r+1} \to \cdots \to C^i \to \cdots$

を示すことにする。

次の Buchsbaum module の characterization が重要である。

（[13] or [14] (2.3)）． A local ring, M f.g. A-module, $\dim M = d$ とするとき，

M Buchsbaum $\Leftrightarrow$ $\tau^d \underline{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ が k-vector spaces からなる complex に isomorphic

A が dualizing complex $D^{\bullet}$ を持つときは，上の条件は，

$\tau_{-d} \underline{R}\operatorname{Hom}(M, D^{\bullet})$ が k-vector spaces からなる complex に isomorphic

に同値である。

定理([14](3.3)). A Buchsbaum local ring, $\dim A = d$, canonical module K を持つとする。このとき, K は Buchsbaum であり, $H^i_{\mathfrak{m}}(K) \cong H^{d-i+1}_{\mathfrak{m}}(A)$ $(2 \leq i < d)$ as k-vector spaces である。

証明のためには, A complete としてよい。従って, A は dualizing complex $D^{\cdot}$ を持つとしてよい。$K \cong H^{-d}(D^{\cdot})$ であるから, $0 \to K[d] \to D^{\cdot} \to \tau_{-d} D^{\cdot} \to 0$ exact を得, これより, $0 \to \underline{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(K[d]) \to \underline{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(D^{\cdot}) \to \underline{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(\tau_{-d} D^{\cdot}) \to 0$ exact を得る。$\underline{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(D^{\cdot})$ は E に isomorphic, よって, $\underline{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(\tau_{-d} D^{\cdot})$ は, $\underline{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(K[d]) \to E$ の mapping cone に isomorphic。E は deg 0 の部分だけであるから, $\tau^{-1}\underline{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(\tau_{-d} D^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} (\tau^{d}\underline{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(K))[d+1]$ を得る。ここで前述の Buchsbaum module の characterization を使い, K Buchsbaum を得る。local cohomology については上の同型と k-vector spaces の complex に同型であることより判る。

逆については,

定理([14](3.4)). A local ring, dualizing complex $D^{\cdot}$ を持ち, (S_2) を満たすとする。このとき K が Buchsbaum ならば, A も Buchsbaum である。

(S_2) 条件より, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $K_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の canonical module となる。これより, $\forall \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{p}}$ C.-M. が判る。更に,

$\tau_{-d}D^{\cdot}$ の cohomology module が finite length であることが判る。後は先の定理の証明の逆をたどるような議論で出来る。（(S_2) を使う）

以上が Schenzel の結果で紹介したいものである。Schenzel の証明を見ていると，(S_2) という条件がかなり重要なものであることが判る。

一般に次のことは知られている。

Gorenstein ring の homomorphic image $\Rightarrow$ dualizing complex が存在する $\Rightarrow$ canonical module が存在する。

逆がどうかは判っていない。ring が C-M. の場合には，canonical module が存在 $\Leftrightarrow$ Gorenstein の homomorphic image が知られている。（[4] and [11]）また最近，Sharp 等によって，dualizing complex を持つ ring が調べられている。例えば，dualizing complex が存在 $\Rightarrow$ acceptable （[18]）が判っている。最後に Sharp による次の予想を書いて，このノートを終りにしたい。

Conjecture（[19]）．dualizing complex が存在する $\Rightarrow$ Gorenstein ring の homomorphic image．

Quasi-Cohen-Macaulay ringsについて.

神戸大.教養 竹内康滋

1976年に,Schenzelはquasi-Cohen-Macaulay ringの概念を与えている.

以下,$(A, \mathfrak{m})$はd-dimensional local ringとする.

定義. $H_{\mathfrak{m}}^{i}(A)$の長さが有限$(i \neq d)$なるとき,Aはquasi-Cohen-Macaulayであるという.

quasi-Cohen-Macaulay ringの性質を調べるのに,regular sequenceの拡張概念であるfilter-regular sequenceは重要な役割を演ずる.

定義. $x_1, \cdots, x_r \in \mathfrak{m}$に対して,整数$n \geq 0$が存在して,$x_i$は$A/(x_1, \cdots, x_{i-1}) : \mathfrak{m}^n$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$の非零因子であるとき,$x_1, \cdots, x_r$をn-A-sequenceと呼ぶ.Schenzel, TrungそしてCuongは,これをfilter-A-sequenceと呼んでいる.

明らかに,0-A-sequenceはA-sequenceを,

1-A-sequence は weak A-sequence を意味する.

まず, filter-A-sequence の性質について述べよう.

定理 1. (1) $\mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}\}$ のとき, $x_1, \cdots, x_r$ が $\mathfrak{z}$ からとった filter-A-sequence ならば, それらの natural image $\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_r \in A_{\mathfrak{z}}$ は $A_{\mathfrak{z}}$-sequence をなす.

(2) 任意の filter-A-sequence は, 長さ d の f-A-sequence まで拡張出来る.

定理 2. filter-A-sequence $x_1, \cdots, x_r$ $(r<d)$ について

(1) ideal $(x_1, \cdots, x_r)$ の minimal prime over-ideal $\mathfrak{z}$ に対して, $A_{\mathfrak{z}}$ は Cohen-Macaulay

(2) $\mathrm{ht}(x_1, \cdots, x_r) = r$.

系 $\mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}\}$ について, $A_{\mathfrak{z}}$ が Cohen-Macaulay であるために, filter-A-sequence $\underline{x}$ が存在して, $\mathfrak{z}$ は $\underline{x}$ の minimal prime over-ideal になることが必要かつ十分な条件である.

regular sequence と同様に つぎのことが成立

する.

(1) m-A-sequence は, m-$\hat{A}$-sequence をなす.

(2) 長さ d の filter-A-sequence は, reducing s.o.p. をなす

(3) filter-A-sequence は, s.o.p. の一部をなす.

filter-A-sequence に対する Koszul complex の homology module の長さについて

定理 4. filter-A-sequence $x_1, \cdots, x_r$ について,

$$l(H^p_m(A/(x_1, \cdots, x_r)) \leq \sum_{i=p}^{r+p} \binom{r}{i-p} l(H^i_m(A)), \quad (p \geq 0)$$

$$l(H_1(x_1, \cdots, x_r, A)) \leq \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} l(H^i_m(A))$$

定理よりすぐ解ることは

系. $r = \operatorname{depth} A$ のとき, 長さが r 未満の filter-A-sequence は, つねに A-sequence である.

補題. $x_1, \cdots, x_d$ を s.o.p とする. $\underline{x}^{(n)}_\pi = (x^{n_1}_{\pi(1)}, \cdots, x^{n_{d-1}}_{\pi(d-1)})$ とおく. 整数 $n \geq 0$ が存在

して、すべての $n_i \geq n$ とすべての $x \in \mathfrak{m}^n$（ただし、$\mathrm{ht}(x_1, \cdots x_{d-1}, x) = d$）に対して、

$$\underline{x}_{\pi}^{(n)} : x_{\pi(d)}^{n_d} = \underline{x}_{\pi}^{(n)} : x$$

が成立するとする（ただし、π は $1, \cdots, d$ の置換をすべて動く）。このとき、$x_1^{n_1}, \cdots, x_d^{n_d}$ は n-A-sequence.

補題　整数 $n \geq 0$ および s. o. p. $x_1, \cdots, x_d$ が存在して、

$$\underline{x}_r^{(n)} : x_{r+1}^{n_{r+1}} = \underline{x}_r^{(n)} : \mathfrak{m}^n = \underline{x}_r^{(n)} : \mathfrak{m}^{n+1}$$

が、すべての $n_i \geq n$ および $r = 0, 1, \cdots, d-1$ について成立するとき、$\mathfrak{m}^n H_{\mathfrak{m}}^i(A) = 0 \quad (i \neq d)$

以上の結果から次の定理の (1), (2), (3) の同値は容易にえられる

定理 5.　d-dimensional local ring $(A, \mathfrak{m})$ について、つぎは同値である

(1) A は quasi-Cohen-Macaulay

(2) 整数 $n \geq 0$ および s. o. p. $x_1, \cdots, x_d$ が存在して、$\underline{x}_{r-1}^{(n)} : x_r^{n_r} = \underline{x}_{r-1}^{(n)} : \mathfrak{m}^n$ がすべての $n_i \geq n$ および $r = 1, 2, \cdots, d$ について成立する。

(3) 整数 $n \geq 0$ が存在して，$\mathfrak{m}^n H_1(x_1, \dots, x_r, A) = 0$ がすべての s.o.p. $x_1, \dots, x_d$ および $r = 1, 2, \dots, d$ について成立する．

(4) 整数 $n > 0$ が存在して，すべての s.o.p. $x_1, \dots, x_d$ およびすべての $n_i \geq n$ について

$$l(A/(x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})) - e_0((x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d}), A)$$

は A の invariant．

定理5は，Schenzel, Trung, Cuong によって得られた結果を，少々 modify した．

上定理を Buchsbaum ring に応用すると．

定理6．d-dimensional local ring $(A, \mathfrak{m})$ は，s.o.p. $x_1, \dots, x_d$ をもち，任意の自然数 n_i について，$x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d}$ は weak A-sequence をなすものとする．このとき，A が Buchsbaum になるために，任意の s.o.p. $y_1, \dots, y_d$ について

$$H^i_{\mathfrak{m}}(A/\underline{y}_r) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(A/\underline{y}_{r-1}) \oplus H^i_{\mathfrak{m}}(A/\underline{y}_{r-1})$$

$(i = 0, 1, \dots, d-r-1)$ なることが必要かつ十分条件である．

主な文献のみを述べると

[1] B. Renschuch; Weitere Bemerkungen zu einem Problem der Schnittheorie und über ein Maß von A. Seidenberg für die Imperfektheit, J. Algebra 37, 447-471, 1975

[2] V. P. Schenzel; Einige Anwendungen der local-en Dualitat und verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Modulen, Math. Nachr. 69, 227-242, 1976.

[3] V. P. Schenzel, N. V. Tring und N. T. Cuong; Verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Modulen, Math. Nachr. 85, 57-73, 1978.

[4] J. Stükrad und W. Vogel; Eine Verallgemeine-rung der Cohen-Macaulay Ringe und Anwendun-gen auf ein Problem der Multiplizitatstheorie, J. Math. Kyoto Univ. 13, 513-529, 1973.

[5] Y. Takeuchi; Filter-regular sequences, quasi-Cohen-Macaulay rings and Buchsbaum rings (forthcoming).

On the system of parameters for Buchsbaum modules and the generalized modules. by Naoyoshi Suzuki (静岡薬科大学)

In this talk we would like to discuss how the system of parameters behave on each step of generalization of corresponding modules from Buchsbaum modules. Several facts are quoted from [1] which is a preliminary version of the article (by the authors of [1]) on Buchsbaum modules. Since [1] contains no proofs at all, we'll give proofs of several key propositions which are not published yet in any form (even in preprint).

Throughout $(A, \mathfrak{m}, k)$ is a Noetherian local ring and M a finitely generated A-module.

§1. System of parameters for Buchsbaum modules and the generalized modules.

(1.1) Definition (1) $x\ (\in \mathfrak{m})$ is weakly M-regular $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$

$$\mathfrak{m}[0:x]_M = 0 .$$

(2) $x_1,\dots,x_r\ (\in \mathfrak{m})$ is a weak M-sequence $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ for $\forall i=1,\dots,r$, x_i is weakly regular on $M_{i-1} = M/(x_1,\dots,x_{i-1})M$.

(3) $x_1,\dots,x_r\ (\in \mathfrak{m})$ is a subsystem of parameters for M (s.s.o.p.)

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $x_1, \cdots, x_r$ can be extended to a s.o.p. for M.

(1.2) Definition. M is a Buchsbaum module $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ any s.o.p. for M is a weak M-sequence.

The basic characterizations are

(1.3) Theorem ([1]). The followings are equivalent, ($d = \dim M > 0$).

(i) M is a Buchsbaum module.

(ii) $\exists \{x_1, \cdots, x_t\}$ a minimal generating system of $\mathfrak{m}$ such that

1) any d elements of $\{x_1, \cdots, x_t\}$ is a s.o.p. for M,

2) For any $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq t$ and for any $r_1, \cdots, r_d \in \{1, 2\}$, $x_{i_1}^{r_1}, \cdots, x_{i_d}^{r_d}$ is a weak M-sequence.

(iii) $\exists\, I(M)\ (\in \mathbb{N})$ an invariant of M such that for $\forall\, \underline{x}$ s.o.p. for M, $l_A(M/(\underline{x})M) - e_0(\underline{x}; M) = I(M)$.

(iv) the completion of M is a Buchsbaum module over the completion of A.

(v) The natural limit map $\lambda_M^i : H^i(\mathfrak{m}; M) \to H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ is surjective for any $i \neq d$, where $H^i(\mathfrak{m}; M) := H^i(\mathrm{Hom}_A(K_\cdot(\mathfrak{m}; A), M))$.

The statement (v) in (1.3) implies that $\mathfrak{m} H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ for any $i < d$. Unfortunately the converse is not true. In fact we have a quite interesting characterization of such:

(1.4) Theorem ([1]). The following conditions are equivalent:

(i) $\mathfrak{m} H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ for $\forall i < d = \dim M$.

(ii) $\exists \underline{x} \subset \mathfrak{m}^2$ a weak M-sequence.

(iii) $\underline{x} \subset \mathfrak{m}^2$ a s.o.p. for $M \Rightarrow \underline{x}$ is a weak-M-sequence.

(1.5) Remark. A very special type of modules is Buchsbaum if it satisfies (1.4): if $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ for $i \neq \dim M$, depth M, M is Buchsbaum if and only if $\mathfrak{m} H^t_{\mathfrak{m}}(M) = 0$, $t = \operatorname{depth} M$.

We will further weaken the condition.

(1.6) Definition. M is a generalized Buchsbaum module $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\ell_A(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) < \infty$ for $\forall i < d$.

The characterizations are given below:

(1.7) Theorem. Let $d = \dim M > 0$, the followings are equivalent.

(i) M is a generalized Buchsbaum module.

(ii) $\exists \mathfrak{q}\ (\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m})$ and $\exists \underline{x} = \{x_1, \dots, x_d\}$ a s.o.p. for M such that $\mathfrak{q}\,((x_1^n, \dots, x_{i-1}^n)M : x_i^n) \subseteq (x_1^n, \dots, x_{i-1}^n)M$ for $\forall i = 1 \dots d$, $\forall n$.

(iii) $\exists \mathfrak{q}\ (\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m})$ such that for $\forall \underline{x}$ a s.o.p. for M,

$$\mathfrak{q}\,((x_1, \dots, x_{d-1})M : x_d)_M \subseteq (x_1, \dots, x_{d-1})M.$$

(iv) $\exists s(M) \in \mathbb{N}$ and $\exists \underline{x}$ a s.o.p. for M such that for $\forall n$,

$$\ell_A(M/(x_1^n,\dots,x_d^n)M) - e_0(x_1^n,\dots,x_d^n;M) \leqq s(M).$$

(v) $\exists\, t(M) \in \mathbb{N}$ such that for $\forall\, \underline{x}$ s.o.p. for M,

$$\ell_A(M/(\underline{x})M) - e_0(\underline{x};M) \leqq t(M).$$

If this is the case, $\exists\, n \gg 0$ such that for $\forall\, \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}^n$ parameter ideal, $\ell_A(M/\mathfrak{q}M) - e_0(\mathfrak{q};M) = \sum_{i=0}^{d-1}\binom{d-1}{i} h^i_{\mathfrak{m}}(M)$.

The following lemma plays the key role in connecting conditions given interms of local cohomology with those of s.o.p. for M.

(1.8) Lemma. Let M be a generalized Buchsbaum module. If $x \in \mathfrak{m}$ is such that $\dim M/xM = \dim M - 1$, then $[0:x]_M \subset H^0_{\mathfrak{m}}(M)$.

For instance, we have various numerical facts.

(1.9) Proposition. Let M be a generalized Buchsbaum module and $\underline{x} = \{x_1,\dots,x_d\}$ a s.o.p. for M. Then

(i) $M/(x_1,\dots,x_r)M$ is a generalized Buchsbaum module and $h^p_{\mathfrak{m}}(M/(x_1,\dots,x_r)M) \leqq \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i} h^{i+p}_{\mathfrak{m}}(M)$, for $\forall\, r = 1,\dots,d$.

(ii) $h_p(x_1,\dots,x_r;M) \leqq \sum_{i=0}^{r-p}\binom{r}{p+i} h^i_{\mathfrak{m}}(M)$ for $\forall\, p \geqq 1$, $1 \leqq \forall\, r \leqq d$. Here $h^p_{\mathfrak{m}}(\ ) =$ length of $H^p_{\mathfrak{m}}(\ )$ and $h_p(\underline{x};\ ) =$ length of $H_p(\underline{x};\ )$ the p-th homology module of Koszul complex.

(iii) $I(\underline{x};M) := \ell_A(M/(\underline{x})M) - e_0(\underline{x};M) = \ell_A([0:x_d]_{M/(x_1,\dots,x_{d-1})M})$.

The modules satisfying the condition (iii) above (for $\forall \underline{x}$ s.o.p. for M) have their own class, called the filtered modules (f-module for short).

(1.10) Theorem. $\dim M \geqq 1$. The followings are equivalent.

(i) For $\forall\, \underline{x}=\{x_1,\dots,x_r\}$ s.s.o.p. for M, $(r=1,\dots,d)$,

$$[0:x_r]_{M/(x_1,\dots,x_{r-1})M} \subseteq H^0_{\mathfrak{m}}(M/(x_1,\dots,x_{r-1})M).$$

(ii) $\dim M = \dim A/\mathfrak{p} + \dim M_{\mathfrak{p}}$ for $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ and for $\forall \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, $M_{\mathfrak{p}}$ is C-M..

(iii) For any $\underline{x}$ s.o.p. for M,

$$l_A(M/(\underline{x})M) - e_0(\underline{x};M) = l_A([0:x_d]_{M/(x_1,\dots,x_{d-1})M}).$$

(1.11) Remarks (i) generalized Buchsbaum modules are f-modules, (ii) If the completion of M is f-module, then so is M itself. (iii) If A is a quotient of C-M. local ring, the converse is also true in (ii). Of course converse assertion is not true in general: in fact there is a 2-dimensional local domain hence is a f-ring, but the completion has an embedded prime and by ii) of (1.10) cannot be f-ring.

We close this section with another characterization of Buchsbaum modules by the Koszul homology.

(1.12) Theorem ([2]). The followings are equivalent.

(i) M is a Buchsbaum module.

(ii) For $\forall\, \underline{x} = \{x_1, \cdots, x_r\}$ s.s.o.p. for M, $(\underline{x}' := \{x_1, \cdots, x_{r-1}\})$,

(ii-1) $\mathfrak{m} H_1(\underline{x}; M) = 0$ and

(ii-2) $$H_1(\underline{x}'; M) = [0 : x_r^\lambda]_{K_1(\underline{x}'; M)/B_1(\underline{x}'; M)}$$
$$= [0 : \mathfrak{m}]_{K_1(\underline{x}'; M)/B_1(\underline{x}'; M)} \quad \text{for } \forall \lambda \in \mathbb{Z}_+.$$

(ii)′ For $\forall\, \underline{x} = \{x_1, \cdots, x_r\}$ s.s.o.p. for M and for $\forall\, p \geq 1$,

(ii′-1) $\mathfrak{m} H_p(\underline{x}; M) = 0$ and, with $\underline{x}' := \{x_1, \cdots, x_{r-1}\}$,

(ii′-2) $$H_p(\underline{x}'; M) = [0 : x_r^\lambda]_{K_p(\underline{x}'; M)/B_p(\underline{x}'; M)}$$
$$= [0 : \mathfrak{m}]_{K_p(\underline{x}'; M)/B_p(\underline{x}'; M)} \quad \text{for } \forall \lambda \in \mathbb{Z}_+.$$

(iii) For any $\underline{x}$ s.s.o.p. for M, $\mathfrak{m} H_1(\underline{x}; M) = 0$.

(iii)′ For any $\underline{x}$ s.s.o.p. for M and for $\forall\, p \geq 1$, $\mathfrak{m} H_p(\underline{x}; M) = 0$.

(iv) For any $\underline{x}$ s.o.p. for M, $\mathfrak{m} H_1(\underline{x}; M) = 0$.

(iv)′ For any $\underline{x}$ s.o.p. for M and for $\forall\, p \geq 1$, $\mathfrak{m} H_p(\underline{x}; M) = 0$.

(1.13) Corollary. Let M be a Buchsbaum module and $\underline{x}$ a s.o.p. for M, $h_p(x_1, \cdots, x_d; M) = \sum_{i=0}^{d-p} \binom{d}{p+i} h_{\mathfrak{m}}^i(M)$ for $\forall\, p \geq 1$, and $I(\underline{x}; M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} h_{\mathfrak{m}}^i(M)$.

§2. Proofs.

One of main purpose of this section to prove (1.8) and (1.9). Others are to give proof of (1.4) and to introduce a criterion Buchsbaum modules given by N.V. Trung in preprint, as an easy consequence of which (ii)$\Rightarrow$(i) of (1.3) follows.

We begin with the following general lemma.

(2.1) Lemma. Assume that A is complete (or a quotient of a Gorenstein local ring), put $D_A^i(\ ) := \mathrm{Hom}_A(H_{\mathfrak{m}}^i(\ ), E_A(k))$. For any $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M)$, and $\forall i$,

$$D_A^i(M) \otimes_A \widehat{A_{\mathfrak{p}}} \cong D_{A_{\mathfrak{p}}}^{i-\dim A/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})$$

here $\wedge$ denotes the $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$-adic completion.

Proof. Use local duality theorem.

(2.2) Corollary. Let A be as above. Then M is generalized Buchsbaum module if and only if $M_{\mathfrak{p}}$ is C-M. for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp} M \setminus \{\mathfrak{m}\}$ and for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp} M$;

$\dim A/\mathfrak{p} + \dim M_{\mathfrak{p}} = d = \dim M$.

Consequently, $\mathrm{ass}_A(M) \subset \{\mathfrak{m}\} \cup \mathrm{assh}_A(M)$, where $\mathrm{assh}_A(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}_A(M);\ \dim A/\mathfrak{p} = \dim M\}$.

~~Proof~~. (If part.) Assume **that** $\exists\, \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ such that $(D^i_A(M))_{\mathfrak{p}} \neq (0)$ for some $i < d$, then by (2.1), $D^{i-\dim A/\mathfrak{p}}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq (0)$ and $M_{\mathfrak{p}}$ is C-M., and

$\dim M_{\mathfrak{p}} = \dim M - \dim A/\mathfrak{p}$, hence $i = d$; contradiction.

(Only if part.) Let $n = \dim A/\mathfrak{p} > 0$; if $i+n < d$, then

$$D^i_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \cong D^{i+n}_A(M) \otimes_A \widehat{A_{\mathfrak{p}}} = (0)$$

and $\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} \geqq d-n$. While if $D^i_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq (0)$, then $i+n \geqq d$ and also $i \leqq \dim M_{\mathfrak{p}}$, hence $\dim M_{\mathfrak{p}} + n \geqq d$ and $\dim M_{\mathfrak{p}} + n = d$. $d-n \leqq \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} \leqq i \leqq \dim M_{\mathfrak{p}} = d-n$, and $M_{\mathfrak{p}}$ is C-M.. Q.E.D.

We are now ready to give

(2.3) Proof of (1.8). Assume contrary; $[0:x]_M \nsubseteq H^0_{\mathfrak{m}}(M)$, we may pass to completion. There exists $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A([0:x]_M)$, $\neq \mathfrak{m}$ and besides minimal. Then by (2.2), $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}\, M$ and $\mathfrak{p} \in \mathrm{assh}\, M$. On the other hand $x \in \mathfrak{p}$, contradicting the choice of x.

(2.4) Proof of (1.9)

(i) Let $x \in \mathfrak{m}$ be any such that $\dim M/xM = d-1$, then from the exact sequences

$$0 \to [0:x]_M \to M \to xM \to 0 \text{ and}$$

$$0 \to xM \to M \to M/xM \to 0, \quad \text{we have}$$

for $i = 0, 1, \cdots, d-2$, since $l_A([0:x]_M) < \infty$,

$$0 \to H^i_{\mathfrak{m}}(M)/xH^i_{\mathfrak{m}}(M) \to H^i_{\mathfrak{m}}(M/xM) \to [0:x]_{H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)} \to 0.$$

(ii) For $p=1, r=1$, $H_1(x_1; M) = [0:x_1]_M \subseteq H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Generally

$$0 \to \frac{H_p(x_1, \cdots, x_{r-1}; M)}{x_r H_p(x_1, \cdots, x_{r-1}; M)} \to H_p(x_1, \cdots, x_r; M) \to [0: x_r]_{H_{p-1}(x_1, \cdots, x_{r-1}; M)} \to 0.$$

Now the assertion is valid easily. Here note also that (1.12) and the exact sequence above lead (1.13) straigh.

(iii) Since $I(\underline{x}; M) = \sum_{p=1}^{d} (-1)^{p+1} h_p(\underline{x}; M)$, also by the exact sequence above; for $p \geqq 2$,

$$h_p(x_1, \cdots, x_d; M) = l_A(H_p(x_1, \cdots, x_{d-1}; M)) + l_A(H_{p-1}(x_1, \cdots, x_{d-1}; M))$$
$$- [\, l_A(x_d H_p(x_1, \cdots, x_{d-1}; M)) + l_A(x_d H_{p-1}(x_1, \cdots, x_{d-1}; M))]$$

and $h_1(x_1, \cdots, x_d; M) = l_A(H_1(x_1, \cdots, x_{d-1}; M)) - l_A(x_d H_1(x_1, \cdots, x_{d-1}; M))$
$+ \, l_A([0: x_d]_{M/(x_1, \cdots, x_{d-1})M})$, and the assertion is an easy consequence of calculation.

(2.5) Proof of (1.4). Essential parts are (i) $\Rightarrow$ (iii) and (iii) $\Rightarrow$ (i).

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i)</u>: Let $\underline{x} = \{x_1, \cdots, x_d\} \subset \mathfrak{m}^2$ be a weak M-sequence.

at first, since $[0:\mathfrak{m}^2]_M \subset [0:x_1]_M$ and $\mathfrak{m}[0:\mathfrak{m}^2]_M=0$.
Let $\forall m \in H^0_{\mathfrak{m}}(M)$, then $\mathfrak{m}^{\nu} m=0$. If $\nu \geqq 3$, then $(\mathfrak{m}^{\nu-2})m \subset [0:\mathfrak{m}^2]_M$ and $\mathfrak{m}^{\nu-1}m = \mathfrak{m}(\mathfrak{m}^{\nu-2}m)=0$, so we may assume $\nu \leqq 2$ and $m \in [0:\mathfrak{m}^2]_M$ and $\mathfrak{m}m=0$. Namely $\mathfrak{m}H^0_{\mathfrak{m}}(M)=0$. Thus the case $d=1$ is also over.

Now let $d \geqq 2$, for $M_1=M/x_1M$, by the induction assumption, $\mathfrak{m}H^i_{\mathfrak{m}}(M_1)=0$ for $i=0,\dots,d-2$. We have

$$\begin{tikzcd} H^i_{\mathfrak{m}}(M_1) \arrow[r] & H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(x_1M) \arrow[r] & H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M) \ :\ \text{exact}. \\ & H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, "x_1"'] & \end{tikzcd}$$

Consequently $\mathfrak{m}[0:x_1]_{H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)}=0$, for $i=0,\dots,d-2$. Since $x_1 \in \mathfrak{m}^2$, $\mathfrak{m}[0:\mathfrak{m}^2]_{H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)}=0$ and since $H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)$ is artinian, just the same argument as above leads us to the required result: $\mathfrak{m}H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)=0$ for $i=0,\dots,d-2$.

<u>(i)$\Rightarrow$(iii).</u> If $x \in \mathfrak{m}$ is such that $\dim M/xM=d-1$, then $[0:x]_M=[0:x^2]_M=H^0_{\mathfrak{m}}(M)=[0:\mathfrak{m}]_M$, the case $d=1$ is over and let $d \geqq 2$. Let $\{x,y\}$ be any s.s.o.p for M with $y \in \mathfrak{m}^2$, then it is easily deduced that

$$H^0_{\mathfrak{m}}(M/xM)=[0:\mathfrak{m}^2]_{M/xM}=[0:y]_{M/xM}=[0:y^2]_{M/xM} \quad \text{—(\#)}$$

Now assume that $\mathfrak{a} := [0 : H^0_{\mathfrak{m}}(M_1)]_A \subsetneqq \mathfrak{m}$,

$\exists\, \alpha \in \mathfrak{m} \setminus \left(\bigcup_{\mathrm{assh}\, M} \mathfrak{p}\right) \cup \left(\bigcup_{\mathrm{assh}\, M_1} \mathfrak{q}\right) \cup \mathfrak{a}$. Let $\bar{m} = m \bmod x_1 M$ be arbitrary in $H^0_{\mathfrak{m}}(M_1)$, then

$m \in [(x_1M + H^0_{\mathfrak{m}}(M)) : \langle \mathfrak{m} \rangle]_M := \{n \in M ;\ \exists\, \nu \geq 1 \text{ with } \mathfrak{m}^{\nu} n \subset x_1M + H^0_{\mathfrak{m}}(M)\}$.

Since x_1 is also a s.s.o.p. for $\tilde{M} = M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$, it is $\tilde{M}$-regular and $H^i_{\mathfrak{m}}(\tilde{M}) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ for $\forall i \geq 1$ and

$$0 \to H^0_{\mathfrak{m}}(\tilde{M}/x_1\tilde{M}) \to H^1_{\mathfrak{m}}(\tilde{M}) \xrightarrow{\cdot x_1} H^1_{\mathfrak{m}}(\tilde{M}) \quad \text{: exact},$$

hence $\mathfrak{m} H^0_{\mathfrak{m}}(\tilde{M}/x_1\tilde{M}) = \mathfrak{m} H^0_{\mathfrak{m}}(M/x_1M + H^0_{\mathfrak{m}}(M)) = 0$.

$m \in [x_1M + H^0_{\mathfrak{m}}(M) : \mathfrak{m}]_M$ and $\alpha m = x_1 n + t$ for some $n \in M$ and $t \in H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. $x_1 \alpha m = x_1^2 n$ and $n \in [\alpha M : x_1^2]_M$.

By (#) with $(x, y) = (\alpha, x_1)$, $n \in [\alpha M : x_1]_M$ and $x_1 n = \alpha u$ for some $u \in M$. $t = \alpha m - x_1 n = \alpha(m - u) \in \alpha M$.

$t \in \alpha M \cap H^0_{\mathfrak{m}}(M) = \alpha M \cap [0 : \alpha]_M$ with $[0 : \alpha]_M = [0 : \alpha^2]_M$, and $t = 0$, i.e., $\alpha m = x_1 n \in x_1 M$ and $\alpha H^0_{\mathfrak{m}}(M_1) = 0$, a contradiction.

We have proved that $\{x_1, x_2\}$ forms a weak M-sequence. To proceed further it suffices to show that $\mathfrak{m} H^i_{\mathfrak{m}}(M_1) = 0$ for $i = 1, \dots, d-2$. Since we have the exact sequence

$$0 \to H^0_{\mathfrak{m}}(M) \to M/x_1M \to \tilde{M}/x_1\tilde{M} \to 0,$$

$H^i_{\mathfrak{m}}(M_1) \simeq H^i_{\mathfrak{m}}(\tilde{M}/x_1\tilde{M})$ for $\forall i \geq 1$, we may assume that

$H^0_{\mathfrak{m}}(M)=0$, and any $x\in\mathfrak{m}$ with $\dim M/xM=\dim M-1$ is M-regular. Now let i be any $1\leqslant i\leqslant d-2$, and $\mathfrak{a}:=[0:H^i_{\mathfrak{m}}(M)]_A$. Suppose $\mathfrak{a}\subsetneqq\mathfrak{m}$,

$$\exists\alpha\in\mathfrak{m}\setminus\Big(\bigcup_{\mathrm{assh}M}\mathfrak{p}\Big)\cup\Big(\bigcup_{\mathrm{assh}M_1}\mathfrak{q}\Big)\cup\mathfrak{a}.$$

Note that for any s.s.o.p. $\{x,y\}$ for M with $y\in\mathfrak{m}^2$,

$$\mathfrak{m}^2H^i_{\mathfrak{m}}(M/xM)=0 \text{ and } [0:y]_{H^i_{\mathfrak{m}}(M/xM)}=[0:y^2]_{H^i_{\mathfrak{m}}(M/xM)} \quad \text{——}(\#\#)$$

Let $\{E^\cdot;e^\cdot\}$ and $\{F^\cdot,f^\cdot\}$ be the minimal injective resolutions of M and $M_1=M/x_1M$, respectively. Let $z\in H^0_{\mathfrak{m}}(E^i)$ be arbitrary such that

$$\bar{z}=z \bmod x_1H^0_{\mathfrak{m}}(E^i)\in\mathrm{Ker}(H^0_{\mathfrak{m}}(f^i)).$$

$H^0_{\mathfrak{m}}(e^i)(z)=x_1w$ for some $w\in H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i+1})$ with $H^0_{\mathfrak{m}}(e^{i+1})(w)=0$.

Since $\mathfrak{m}H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)=0$, $\exists\, u\in H^0_{\mathfrak{m}}(E^i)$ such that

$$\alpha w=H^0_{\mathfrak{m}}(e^i)(u) \quad \text{——}(*).$$

$$H^0_{\mathfrak{m}}(e^i)(\alpha z)=\alpha x_1w=H^0_{\mathfrak{m}}(e^i)(x_1u) \quad \text{——}(**)$$

$\alpha z-x_1u\in\mathrm{Ker}\,H^0_{\mathfrak{m}}(e^i)$. Since $\mathfrak{m}H^i_{\mathfrak{m}}(M)=0$,

$x_1^2u-\alpha zx_1\in x_1\mathrm{Ker}\,H^0_{\mathfrak{m}}(e^i)\subset\mathrm{Im}\,H^0_{\mathfrak{m}}(e^{i-1})$ and

$x_1^2u\in\alpha H^0_{\mathfrak{m}}(E^i)+\mathrm{Im}\,H^0_{\mathfrak{m}}(e^{i-1})$, what is the same to say,

$x_1^2(u \bmod \alpha H^0_{\mathfrak{m}}(E^i))\in\mathrm{Im}\,H^0_{\mathfrak{m}}(f^{i-1})$. while $(*)$ implies that $(u \bmod \alpha H^0_{\mathfrak{m}}(E^i))\in\mathrm{Ker}\,H^0_{\mathfrak{m}}(f^i)$. Apply $(\#\#)$ with $(x,y)=(\alpha,x_1)$, $x_1(u \bmod \alpha H^0_{\mathfrak{m}}(E^i))\in\mathrm{Im}\,H^0_{\mathfrak{m}}(f^{i-1})$

$x_1 u \in \alpha H^0_{\mathfrak{m}}(E^i) + \operatorname{Im} H^0_{\mathfrak{m}}(e^{i-1})$ and $\exists v \in H^0_{\mathfrak{m}}(E^i)$ s.th.

$$x_1 u - \alpha v \in \operatorname{Im} H^0_{\mathfrak{m}}(e^{i-1}) \text{ ——— } (***).$$

By $(**)$, $H^0_{\mathfrak{m}}(e^i)(\alpha v) = H^0_{\mathfrak{m}}(e^i)(x_1 u) = H^0_{\mathfrak{m}}(e^i)(\alpha z)$,

$\alpha(v - z) \in \operatorname{Ker} H^0_{\mathfrak{m}}(e^i) \cap \alpha H^0_{\mathfrak{m}}(E^i) \subset \operatorname{Im} H^0_{\mathfrak{m}}(e^{i-1})$,

since $[0:\alpha]_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} = [0:\alpha^2]_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} = H^i_{\mathfrak{m}}(M)$. With $(***)$

$\alpha z - x_1 u = (\alpha z - \alpha v) + (\alpha v - x_1 u) \in \operatorname{Im}(H^0_{\mathfrak{m}}(e^{i-1}))$, that is

$\alpha\,(z \bmod x_1 H^0_{\mathfrak{m}}(E^i)) \in \operatorname{Im} H^0_{\mathfrak{m}}(e^{i-1})$ or

$\alpha\, H^i_{\mathfrak{m}}(M_1) = 0$; contradicting the choice of α.

(Q.E.D.)

We now proceed the remaining task, the introduction of a criterion of Buchsbaum modules by N. V. Trung which seems quite imeresting and useful. Here $U(N) := \bigcup_{n \geq 1} [N : \mathfrak{m}^n]_M$ for a submodule N of M.

Main results are

(2.6') Theorem. (Th.4 [3]). M is Buchsbaum if and only if $\exists\, N \subset U(0)$ such that (i) $\mathfrak{m} N = (0)$,
(ii) M/N is a Buchsbaum module,
(iii) $\exists\, B$ a finite generating set for $\mathfrak{m}$ such that

$$N \cap (a_1, \cdots, a_d) M = (0) \quad \text{for } \forall \{a_1, \cdots, a_d\} \subset B.$$

(2.7) Theorem (Th.5 [3]). M is Buchsbaum if and only if $\exists\, b_1, \cdots, b_d \in \mathfrak{m}^2$ an weak M-sequence and $\exists\, B$ a finite generating set for $\mathfrak{m}$ such that for $\forall i = 0, \cdots, d-1$,

$$U((b_1,\cdots,b_i)M) \cap (b_1,\cdots,b_i,a_1,\cdots,a_{d-i})M \subseteq (b_1,\cdots,b_i)M$$

for $\forall \{a_1,\cdots,a_{d-i}\} \subset B$.

It is now easy to prove (i)$\Leftrightarrow$(ii) (1.3). In fact, we must only check the following

(2.8) Lemma. Assume that $\mathfrak{m} H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ and that both $\{a_1,\cdots,a_{i-1},a_i\}$ and $\{a_1,\cdots,a_{i-1},a_i^2\}$ are weak M-sequences, then $H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cap (a_1,\cdots,a_i)M \subset H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cap (a_1,\cdots,a_{i-1})M$.

Proof. $M_{i-1} := M/(a_1,\cdots,a_{i-1})M$. Since

$[0 : \mathfrak{m}]_{M_{i-1}} \subset [0 : a_i]_{M_{i-1}} \subset [0 : a_i^2]_{M_{i-1}} \subset [0 : \mathfrak{m}]_{M_{i-1}}$,

if $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_i a_i \in H^0_{\mathfrak{m}}(M)$, then

$$\alpha_i a_i^2 \in (a_1,\cdots,a_{i-1})M \quad \text{and} \quad \alpha_i a_i \in (a_1,\cdots,a_{i-1})M$$

and $x \in (a_1,\cdots,a_{i-1})M \cap H^0_{\mathfrak{m}}(M)$.

[References] [1] "Theory der Buchsbaum-Moduln" by J. Stückrad, P. Schenzel, W. Vogel (preprint der Sektion Mathematik Nr. 23/24, Martin-Luther-Univ.)
[2] "On the Koszul Complex generated by a s.o.p. over a Buchsbaum module". by N. Suzuki (静岡薬大 一般教養 研究紀要 Vol. 8 ('79).)
[3] "Some criterions for Buchsbaum modules" by N.V. Trung (preprint).

Cohen-Macaulayness of Rees algebras of local rings

池田 信 (名大，理)

(A, m, k) を Noetherian local ring とする。

$R(A) = \bigoplus_{n \geq 0} m^n$ を A の Rees algebra という。ここでは $R(A)$ の C-M 性について調べる。A が C-M のときには後藤氏と下田氏による次の結果がある。

<u>Theorem</u> (A, m, k) を C-M local ring, $d = \dim A > 0$ とすると次は同値.

(1) $R(A)$ は C-M。

(2). $G(A) = \bigoplus_{n \geq 0} m^n/m^{n+1}$ が C-M かつ $a(G(A)) < 0$

ただし $a(G(A)) = \max\{n \mid [H_P^d(G(A))]_n \neq 0\}$

, $P = G(A)_+$ 。

本稿の目的は上の結果の一般化を考察することである。

§1 Main result.

(A, m, k) を Noetherian local ring で $\# k = \infty$

とする。$\mathfrak{q}=(a_1,\dots,a_d)$,（$d=\dim A$）が $\mathfrak{m}$ の minimal reduction であるとは，$\mathfrak{m}^n=(a_1,\dots,a_d)\mathfrak{m}^{n-1}$ となる $n\in\mathbb{N}$ が存在することである。（$\#k=\infty$ だからこのような $a_1,\dots,a_d\in\mathfrak{m}$ は存在する。）.

<u>Main Theorem</u>　$(A,\mathfrak{m},k)$ を Noetherian local ring，$d=\dim A>0$ とする。このとき次は同値。

(1) $R(A)$ は C-M.

(2). a)　A は Buchsbaum

b)　$0\leqq i<d$ に対し.

$$\left[H^i_P(G(A))\right]_n=\begin{cases}H^i_{\mathfrak{m}}(A) & n=-1\\ 0 & n\neq-1\end{cases}$$

c). $a(G(A))<0$

さらに $\#k=\infty$ とすると上の条件 c) は，次の c)′ でおきかえることができる。

c)′ $\mathfrak{m}^d=\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{d-1}$ となる $\mathfrak{m}$ の minimal reduction $\mathfrak{q}$ が存在する。

Buchsbaum ring の理論は C-M ring の理論の一般化として Vogel, Stückrad, Schenzel, 後藤, 下田, 鈴木らによって研究されている。　Rees algebra の C-M 性.

と関連して Buchsbaum ring が自然に現れるということは興味深い。（Buchsbaum ring については本報告集の鈴木氏の論説を参照）

次に non C-M local ring であって Rees algebra が C-M ring となる例を示す。

Exampl：k：体

$$A = k[[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]]/(X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3, (Y_1, Y_2, Y_3)^2)$$

とすると，A は non C-M, Buchsbaum で $R(A)$ は C-M。

Corollary (A, m, k) を Buchsbaum local ring で $\mathrm{emb}\,A = e(A) + d + I(A) - 1$ とする。このとき

$$R(A) : \text{C-M} \Longleftrightarrow H^i_m(A) = 0 \quad i \neq 2, d$$

ここで $\mathrm{emb}(A)$ は A の embedding dimension, $e(A)$ は multiplicity.

この Corollary は次の後藤氏の結果を用いれば容易に証明される。

Theorem（後藤）A を Buchsbaum ring で $\mathrm{emb}\,A = e(A) + d + I(A) - 1$ とすると $0 \leqq i < d$ に対し

$$[H^i_P(G(A))]_n = \begin{cases} H^i_m(A) & n = 1-i \\ 0 & n \neq 1-i \end{cases}$$

Remark（後藤氏による）： 上記のCorollaryによってR(A)がC-MであってA自身はC-Mでないようなlocal ringはかなり多く存在することが知られる。

Example： $d\geq 3$を整数，Bをd次元のregular local ring Mをd次元のBuchsbaum B-moduleで$H_{n}^{i}(M)=0$ $i\neq 2, d$となるものとする，ここでnはBのmaximal ideal。このとき

$$A=B\times M \quad (\text{idealization})$$

とするとAはCorollaryの条件を満すBuchsbaum ringである。

§2 R(A)のmultiplicity

R(A)を1変数多項式環A[X]の部分環$A[\{aX \mid a\in m\}]$と同一視する。この§では$\#k=\infty$とする。

$q=(a_1,\cdots,a_d)$をAのminimal reductionとし，

$Q=(a_1, a_2-a_1X, \cdots, a_d-a_{d-1}X, a_dX)$とおく。

このときQはR(A)のmaximal homogeneous ideal

$M=mR(A)+mXR(A)$のminimal reductionである。よってR(A)がC-Mであるための必要十分条件

は $e(R(A)) = \ell(R(A)/Q)$ である，ただし $e(R(A))$ は $R(A)_M$ の multiplicity である。 $e(A)$ と $e(R(A))$ の関係は次の Proposition で与えられる。

<u>Proposition</u> $(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noetherian local ring $d = \dim A > 0$ とする。このとき $d\,e(A) = e(R(A))$

次に $\ell(R(A)/Q)$ を計算してみよう。これは一般にはうまく計算できないが A が C-M，または $\dim A = 3$ のときには次のようになる。

(1) A が C-M のとき

$$\ell(R(A)/Q) = d\,e(A) + \sum_{n=1}^{d} \ell\left(\frac{\mathfrak{q}\cap\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{n-1}}\right) + \sum_{n\geq d} \ell\left(\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{n-1}}\right)$$

よって

$R(A)$: C-M $\iff$ $\mathfrak{m}^d = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^{d-1}$ かつ $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{m}^n = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^{n-1}$ for $\forall n>0$.

$\iff$ $\mathfrak{m}^d = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^{d-1}$ かつ $G(A)$ が C-M.

(2) $\dim A = 3$ のとき

$\ell(R(A)/Q) = 3\ell(A/\mathfrak{q}) - \ell(I/\mathfrak{m}^2) + 3$，ただし

$\mathfrak{q} = (a_1, a_2, a_3)$，$I = (a_1, a_2) : a_3 + (a_2, a_3) : a_1 + (a_1, a_3) : a_2 + \mathfrak{m}^2$

これから次の定理が得られる。

Theorem $(A, \mathfrak{m}, k)$を3次元 Noetherian local ring

$\mathfrak{q} = (a_1, a_2, a_3)$を$\mathfrak{m}$の minimal reduction とする。

$I = (a_1, a_2) : a_3 + (a_2, a_3) : a_1 + (a_1, a_3) : a_2 + \mathfrak{m}^2$ とおく。この

とき，　$R(A)$: C-M $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{m}^3 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^2$ かつ $\ell(I/\mathfrak{m}^2) = 3(\ell(A/\mathfrak{q}) - e(A)) + 3$。

Corollary $\dim A = 3$, $\mathrm{emb}\, A \leqq 5$, $R(A)$: C-M $\Rightarrow$ A : C-M。

main Th より $R(A)$ が C-M ならば A, $G(A)_\mathfrak{p}$ はともに Buchsbaum である，さらに $\dim A = 3$ とすると A の Poincaré series $P_A(t) = \sum_{n \geqq 0} \ell(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) t^n$ は

$$P_A(t) = \frac{1 + (\mathrm{emb}\, A - 3)t + (e(A) + 2 - \mathrm{emb}\, A)t^2}{(1-t)^3}$$

これより次の結果が得られる。

Corollary $\mathrm{emb}\, A = 6$　Aは not C-M であって $R(A)$ は C-M とすると

(1) $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}$

(2) $G(A) \cong k[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]/\mathfrak{a}$，ただし

$$\mathfrak{a} = \left(X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3,\ Y_iY_j - \sum_{k=1}^{3} a_{ijk} X_k,\ (1 \leqq i \leqq j \leqq 3)\right)$$

Reference

[1] S. Ikeda, Cohen-Macaulayness of Rees algebras of local rings, preprint.

[2] S. Goto and Y. Shimoda, On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings, preprint.

A/a^nA の Cohen-Macaulay と Gorenstein について

都立大　下田保博

(A, m) を Noetherian local ring で d をその次元とする。$a \in m$ を system of parameters の一部になる元とせよ。もし a が N.Z.D. ならば、A/aA が Cohen-Macaulay (以下略して C-M) のときには A 自身も C-M になることはよく知られている結果である。

<u>問題</u>　a が必ずしも N.Z.D. と仮定しないとき、A/a^nA が C-M ring になるのはどのようなときか。

上のことがらに関して私の結果と後藤さんの手紙による結果について述べて行く。

まず最初に

<u>Lemma 1</u>　A/a^nA が $(d-1)$ 次元 C-M ring となることが任意の自然数 n に対して成り立つならば、A の depth は少なくとも $(d-1)$ になる。

(proof)　$d=1$ のときはいうことはない。

$d>1$ とする。今 $b_2, \cdots, b_d$ を A/aA における image が system of parameters (以下略して s.o.p) になるような元とする。このとき, $b_2, \cdots, b_d$ の A/a^nA ($\forall n \geqq 1$) に対しての image もまた s.o.p. になることに注意すれば, A/a^nA は C-M ring より $b_2, \cdots, b_d$ の A/a^nA での image は A/a^nA-regular sequence となる。従って i を $2 \leqq i \leqq d$ なる数とすると,

$$
\begin{aligned}
(b_2, \cdots, b_{i-1}) : b_i &\subseteq (a^n, b_2, \cdots, b_{i-1}) : b_i \\
&= (a^n, b_2, \cdots, b_{i-1})
\end{aligned}
$$

よって
$$
\begin{aligned}
(b_2, \cdots, b_{i-1}) : b_i &\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (a^n, b_2, \cdots, b_{i-1}) \\
&= (b_2, \cdots, b_{i-1})
\end{aligned}
$$

ゆえに $b_2, \cdots, b_d$ は A-regular sequence となる。よって $\operatorname{depth} A \geqq d-1$.

<u>Corollary 2</u> $d \geqq 2$ とする。s.o.p. の一部になるような任意の元 a に対して A/aA が C-M ring ならば, A 自身も C-M ring になる。

(proof) Lemma 1 より N.Z.D. b_2 がとれる。このとき, この b_2 は s.o.p. の一部になるから結論がいえる。

上のCorollaryはすべてのs.o.p.の一部になる元を調べたのであるが、1つの元に対しては、

<u>Theorem 3</u> 次は同値

(1) $\exists a \in \mathfrak{m}$ s.t. $A/a^n A$ が任意の自然数 n に対して C−M ring of dim $d-1$.

(2) 次のいずれかが成り立つ

(a) A は C−M ring

(b) $(0) \subsetneq I \subsetneq A$ なる ideal I が存在して次をみたす。

(i) I は $(d-1)$ 次元 C−M A-module

(ii) A/I は d 次元 C−M ring.

(proof) (1) $\Rightarrow$ (2) ; A は C−M ring でないとする。そうすると a は zero divisor である。また Lemma 1 により $\operatorname{depth} A = d-1$ となっていることに注意しよう。

今 A は Noetherian よりある整数 k が存在して

$$0 : a \subsetneq 0 : a^2 \subsetneq \cdots \subsetneq 0 : a^k = 0 : a^{k+1} = \cdots$$

となる。そこで (b) をいうためには a のかわりに a^k を考えることにより $0 : a = 0 : a^2$ であると仮定してもさしつかえないであろう。$I = 0 : a$ とおく。

さて，$0 \longrightarrow aA/a^2A \longrightarrow A/a^2A \longrightarrow A/aA \to 0$

なる exact sequence に対して，$A \longrightarrow aA/a^2A$ の kernel が $I+aA$ になる（実際，$x \in A$ で $ax \in a^2A$ ならば $ax = a^2y$．∴ $a(x-ay)=0$ より $x \in I+aA$.）から，

$$0 \longrightarrow A/I+aA \longrightarrow A/a^2A \longrightarrow A/aA \to 0$$

なる exact sequence を得る。このとき depth を計算すれば，$\operatorname{depth} A/I+aA \geqq d-1$ となる。ところで，$r \in I \cap aA$ をとれば，$r = \lambda a$ で $ra=0$ より $\lambda a^2 = 0$．∴ $\lambda \in 0 : a^2 = 0 : a = I$．∴ $r=0$．

従って a は A/I -regular element になるから，$\operatorname{depth} A/I \geqq d$．一方 $\dim A/I = d$ より $\dim A/I = \operatorname{depth} A/I = d$ がいえて，A/I は d 次元 C-M ring となる。

次に $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \to 0$ なる exact sequence に local cohomology $H_m^i(\cdot)$ を apply することにより，

$$H_m^i(I) \cong H_m^i(A) = \begin{cases} 0 & (i \leqq d-2) \\ H_m^{d-1}(A) & (i = d-1) \end{cases}$$

が得られる。ところで，$I = 0 : a$ であったので $a \in 0 : I$ で，a は $\dim A/aA = d-1$ なる元である

ことに注意すれば I が $(d-1)$ 次元 C−M A−mod になることがわかる。

(2) $\Longrightarrow$ (1)：A が C−M ring のときは明らか。そこで (b) が成り立つものとする。$\dim I = d-1$ より $0 : I$ の中に s.o.p. の一部になるような $\mathfrak{m}$ の元 a がとれる。このとき、A/I は d 次元 C−M ring より a は A/I − regular element になることに注意しよう。

今 n を 1 以上の任意の整数とする。次のような exact sequence

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "a^n"] & A \arrow[r] \arrow[d, "a^n"] & A/I \arrow[r] \arrow[d, "a^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
(*) \quad 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & A/a^nA \arrow[r] \arrow[d] & A/I+(a^n) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

にヘビの Lemma を用いることにより (*) の exact sequence が得られる。ところで $\operatorname{depth} A/I+(a^n) = d-1$ で I は $(d-1)$ 次元 C−M A−mod より、求める

結果が得られる。

Example 4　Aが C−M ringでなくても $A/\mathfrak{a}^n A$ が C−M ringとなる例を挙げておく。kを任意の体，X，Y，Z をk上の独立変数とし，$A = k[[X, Y, Z]]/(X)\cap(Y, Z)$，$a = Y$ とすればよい。

さて，Theorem 3では $A/a^n A$ を調べたのであるが，A/aA についてはどうなるか。このことに関してまず次のLemmaがある。

Lemma 5　$a \in \mathfrak{m}$ が $0 : a = 0 : a^2$ をみたすものとする。depth A/a^2A が $d-1$ 以上ならば，depth A/aA も $d-1$ 以上となる。

(proof)　$I = 0 : a$ とおく。$I = (0)$ ならば明らか。$I \neq (0)$ とする。$d = 1$ ならばいうことはない。そこで $d > 1$ とする。今 depth $A/aA = t$ とし，$t < d-1$ とせよ。

$$0 \longrightarrow A/I+(a)A \longrightarrow A/a^2 \longrightarrow A/a \longrightarrow 0$$

となる exact sequence で depth を調べれば、$\operatorname{depth} A/_{I+(a)} = t+1$. 従って $\operatorname{depth} A/_{I} = t+2$ となる。次に

$$0 \longrightarrow {}^{I+(a^2)A}/_{(a^2)A} \longrightarrow A/_{a^2A} \longrightarrow A/_{I+a^2A} \longrightarrow 0$$

$$\text{\rotatebox{90}{$\cong$}}$$

$$I/_{I\cap(a^2)A} \cong I$$

となる exact sequence から $\operatorname{depth} I \geqq t+1$ を得る。上と同様の exact sequence

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A/_{aA} \longrightarrow A/_{I+aA} \longrightarrow 0$$

でも depth を比較することにより $\operatorname{depth} A/_{aA} \geqq t+1$ となり矛盾が生ずる。従って $\operatorname{depth} A/_{aA} \geqq d-1$.

<u>proposition 6</u> $a \in m$ を $0 : a = 0 : a^2$ なる元とせよ。このとき次は同値

(1) $A/_{a^2A}$ は $(d-1)$ 次元 C-M ring.

(2) $A/_{a^nA}$ は任意の自然数 n に対して $(d-1)$ 次元 C-M ring.

(proof) (1) $\Rightarrow$ (2) をいえばよい。Lemma 5 より $\operatorname{depth} A/_{aA} = d-1$ となる。$I = 0 : (a)$ とおく。次の 4 つの exact sequence を考える。

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow A/I+aA \longrightarrow A/a^2A \longrightarrow A/aA \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow A/aA \oplus A/I \longrightarrow A/I+aA \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow I \longrightarrow A/a^nA \longrightarrow A/I+(a^n)A \longrightarrow 0 \end{cases}$$

まず第一列より depth $A/I+aA = d-1$. ∴ depth $A/I = d$. 二列より depth $A \geq d-1$ となるから三列を用いて depth $I \geq d-1$. 従って第四列より depth $A/a^nA = d-1$ を得る. よって A/a^nA は C-M ring.

<u>Example 7</u>. proposition 6 において $0:a = 0:a^2$ は必要である。実際, k を任意の体とする。

$$A = k[[X, Y, Z]]/(X^2Y^2, XZ)$$

$a = Y$ とおく。A/a^2A は C-M ring だが, A/a^3A は C-M ring とはならない。

次に A/aA が Gorenstein ring になる場合を考えよう。まず次の結果が成り立つ。

<u>proposition 8</u> 任意の自然数 n に対して

$A/\mathfrak{a}^n A$ が Gorenstein ring ならば A 自身も Gorenstein ring である。

(proof) Lemma 1 により、A-regular かつ $A/\mathfrak{a}^n A$-regular sequence $b_2, \cdots, b_d$ が存在する。このとき $\bar{A} = A/(b_2, \cdots, b_d)$ を考えると $\bar{A}/\mathfrak{a}^n\bar{A}$ は Gorenstein ring となる。従って $d=1$ のとき、A が C-M ring をいえば充分。また $0 : a = 0 : a^2$ と仮定してよい。このとき $(a^2, 0 : a) \cap (a) = (a^2)$ が成り立つ。実際、$r \in (a^2, 0 : a) \cap (a)$ とすれば、

$$r = \lambda a = t a^2 + y \qquad y \in 0 : a$$

と表わせる。よって $\lambda a^2 = t a^3$ から $\lambda - t a \in 0 : a^2 = 0 : a$. $\therefore\ \lambda a = t a^2$. $\therefore\ r \in (a^2)$.

今 $A/a^2 A$ は Gorenstein ring より $a^2 A$ は irreducible ideal. 従って $0 : a \subseteq a^2 A$ か $aA \subseteq a^2 A$. もし $a \in a^2 A$ なら $a=0$ となり矛盾。よって $0 : a \subseteq a^2 A$. このとき $0 : a = 0$ となるから、A は C-M ring で a は N.Z.D. になる。よって A は Gorenstein ring.

さて $0 : a = 0 : a^2$ をみたす a については

Theorem 9. $a \in \mathfrak{m}$ が $0 : a = 0 : a^2$ をみたすと仮定する。このとき、A/aA が $(d-1)$ 次元 Gorenstein ring ならば、A 自身も Gorenstein ring になる。

(proof) Lemma 1 と proposition 6 により、$d=1$ としてよい。このときには前の proposition 8 と同じ証明を用いれば結論が導びかれる。

Example 10. Theorem 9 で $0 : a = 0 : a^2$ は必要である。実際、k を体とするとき、

$$A = k[[X, Y, Z]]/(X) \cap (Y^2, Z^2), \quad a = Y$$

とおけばよい。さらに、$A/(a^2)$：Gorenstein ring であるということは、よく知られた命題

'A が C-M ring のとき、$A/\mathfrak{q}$ が Gorenstein ring となるある $\mathfrak{m}$-primary ideal $\mathfrak{q}$ が存在すれば、A は Gorenstein ring である'

というものに対する、A が C-M ring なしでは成立しないという例にもなっていることに注意する。

最後に上の Theorem の応用として

<u>Corollary 11</u>　$a\in m$ は $0:a=0:a^2$ をみたすものとする。さらに次の条件が成り立つものとする。

(1) A は equidimensional

(2) A/a^2A は $(d-1)$ 次元 C-M ring

(3) $Q(A/a^2A)$ は Gorenstein ring

このとき，A は C-M ring である。

(proof)　$I=0:a$ とおく。$I=(0)$ ならよい。そこで $I\neq(0)$ とする。A/a^2A は C-M ring より proposition 6 より A/a^nA は C-M ring. 従って Theorem 3 より I は $(d-1)$ 次元 C-M A-mod. よって $\exists\, \mathfrak{p}\in \mathrm{supp}\, I$ s.t. $\dim A/\mathfrak{p}=d-1$. $\therefore I_{\mathfrak{p}}\neq 0$. 今 $aI=0$ より $a\in\mathfrak{p}$ でなくてはならない。このとき $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1$ となる。実際，$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}+\dim A/\mathfrak{p}\leqq \dim A$ より $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}\leqq 1$. もし $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=0$ なら仮定(1)より $\dim A/\mathfrak{p}=d$. これは $\mathfrak{p}$ のとり方に反する。

従って $\mathfrak{p}$ は A/a^2A で minimal prime に対応するから仮定(3)より $A_{\mathfrak{p}}/a^2A_{\mathfrak{p}}$ は Gorenstein ring. また $(0:a)A_{\mathfrak{p}}=(0:a^2)A_{\mathfrak{p}}$ に注意すれば，Theorem 9 より $A_{\mathfrak{p}}$ は C-M ring. よって a は $A_{\mathfrak{p}}$-regular element. 今 $aI_{\mathfrak{p}}=(0)$ より $I_{\mathfrak{p}}=(0)$. これは

$\mathfrak{f}$のとり方に反する。従って $I=(0)$ となる。

<u>Example 12</u> 上のCorollaryで仮定(1)は必要である。実際，例として

$$A = k[[X, Y, Z]]/(X)\cap(Y,Z) \quad a = Y \text{ と}$$

おけばよい。

On the normality of certain algebras over commutative rings

東京理科大　山岸規久道

0. N.V. Trung は [1] において，次の問題を考えた。

<u>問題</u>　A：Noether 環，$A[X]=A[X_1,\cdots,X_r]$：A上の r 変数多項式環，$F\in A[X]$ とするとき，Aの性質はいつ $A[X]/(F)$ に移るか？

ここではこれに関連して，いくつかの A-algebra について Aの normality がいつ移るかを考える。

1. $A[X,Y]/(XY-a)$ について，次の結果を得た。

<u>定理1</u>　A：Noether domain，X, Y：A上の不定元 $0\neq a\in A$ とすると，次が成立する。

(i) $A[X,Y]/(XY-a)$：normal $\Leftrightarrow$ A：so

(ii) $A[X,Y]/(XY-a)$：factorial $\Leftrightarrow$ A：so かつ a：unit or prime

(iii) $A[X,Y]/(XY-a)$：regular $\Leftrightarrow$ A：so if a：unit
A, $A/(a)$：so if a：non-unit.

(証) (i): $\Leftarrow$ のみ。次の Lemma を用いる。

<u>Lemma</u> A: Noether domain, $0 \neq (a) \neq A$ なら

$$A = A_a \cap \left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/(a))} A_{\mathfrak{p}} \right).$$

(ii): $\Rightarrow$ のみ。

A: factorial は明らか。a: non-unit とし $a = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ を素元分解とする。$(X, p_1)T$ は (但し $T = A[X, Y]/(XY-a)$) T の ht 1 の prime. もし, $2 \leqq e_1 + \cdots + e_r$ なら claim から not-単項。

<u>Claim</u> $F, G \in A[X, Y]$, $\alpha \in A$, $FG \equiv \alpha \mod XY-a$ なら, $^\exists \beta, \gamma \in A$ $^\exists n \geqq 0$: $F \equiv \beta X^n$, $G \equiv \gamma Y^n \mod XY-a$ (又は $F \equiv \beta Y^n$, $G \equiv \gamma X^n \mod XY-a$).

2. $A[\frac{b_1}{a}, \cdots, \frac{b_m}{a}]$ について, 次の結果を得た。

<u>定理2</u> A: Noether domain, $0 \neq a \in A$, $b_1, \cdots, b_m \in A$ X: A 上の不定元 とする。このとき, $\sqrt{(a)} = (a)$ なら (i) $\Leftarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)。しかし, $\sqrt{(a)} = (a)$ でも (i) $\Rightarrow$ (ii) は正しくない。

(i) A: normal (ii) $A[\frac{b_1}{a}, \cdots, \frac{b_m}{a}]$: normal

(iii) $A[aX, b_1X, \cdots, b_mX]$: normal.

証明には次の Lemma を用いる。

Lemma (ア) A: any ring　$a, b \in A$ とする。

$\sqrt{(a)} = (a)$ なら, $(a) \cap (a,b)^n = (a)(a,b)^{n-1}$ for $^\forall n \geq 1$.

(イ) A: Noether domain, $0 \neq a \in A$ とする。

$\sqrt{(a)} = (a)$ なら, A: normal $\Leftrightarrow$ A_a: normal.

3. $A[X,Y,Z]/(XY-a, XZ-b)$ について, 次の結果を得た。

定理 3　A: Noether domain　X, Y, Z: A 上の不定元

$a, b \in A$, $a \neq 0$ とすると, 次が成立する。

$A[X,Y,Z]/(XY-a, XZ-b)$: normal

$\Leftrightarrow$ (ア) A: normal, (イ) $V_A((a,b))$: (S_3) かつ (R_2)

(ウ) $a, b \notin \mathfrak{p}^{(2)}$ for $^\forall \mathfrak{p} \in V_A((a,b))$ s.t. ht $\mathfrak{p} = 1$.

(証) $A[X,Y,Z]/(XY-a, XZ-b)$: (S_2) $\Leftrightarrow$ A: (S_2) かつ $V_A((a,b))$: (S_3).

$A[X,Y,Z]/(XY-a, XZ-b)$: (R_1) $\Leftrightarrow$ A: (R_1) かつ $V_A((a,b))$: (R_2) かつ (☆)

ここで (☆) とは;

(☆) $P \in V_{A[X,Y,Z]}((XY-a, XZ-b))$, ht $P \leq 3$ なら $XY-a, XZ-b \notin P^{(2)}$.

である。ところが (☆) $\Leftrightarrow$ (ウ) であるから定理を得る。

[1] N. V. Trung: Über die Übertragung der Ringeigenschaften zwischen R und $R[u]/(F)$, Math. Nachr. 92 (1979) 215-229.

de Rham-Witt complex について　桂英治

§0 歴史

標数 $p>0$ の上で "良い" コホモロジー群を定義しようというのが目的です。そのためのいくつかの試みを歴史からひろってみます。

1) Serre の Witt vector cohomology (cf [1])

k：標数 $p>0$ の体、X：k 上の代数多様体

$W_n(k)$：k 上の長さ n の Witt 環（定義は後にします。）とするとき、Serre は $H^i(X, W) \overset{\mathrm{def}}{=} \varprojlim_n H^i(X, W_n)$ と X の W に係数をもつコホモロジー群を定義しました。$H^i(X, W)$ は、いくつかの良い性質を持ちますが、十分ではありません。例ば、$H^i(X, W)=0$ $(i>\dim X)$ とか、$\mathrm{rank}\, H^1(X, W) \leqq 2\dim \mathrm{Alb}(X)$ 不等号は、通常 $<$ です。

2) アーベル多様体の Tate module (cf. [2])

X：abel 多様体；$p: X \longrightarrow X$：p 倍写像

${}_{p^n}X = \mathrm{Ker}(p^n)$ とするとき、$(\cdots \to {}_{p^n}X \xrightarrow{p} {}_{p^{n-1}}X \to \cdots \to {}_pX)$ は射影的系を作り、その逆極限 $T_p(X)$

$\overset{\mathrm{def}}{=} \varprojlim_{p^n} X$ は $\mathbb{Z}_p$ ($\cong W(\mathbb{F}_p)$) 上の加群になります。そこで、$L(X) = H^1(X, W) \oplus T_p(X^*)$ (X^* は X の双対アーベル多様体) とおくと、$L(X)$ は、さらに $\mathrm{rank}\, L(X) = 2\dim \mathrm{Alb}(X)$ が成り立ちます。

3) フロベニウスの作用

Frobenius 写像 $F : X \longrightarrow X$ の $H^i(X, W)$ および、$T_p(X)$ への作用を考えます。

定義 M : $\mathbb{Z}_p$-加群、$F : M \longrightarrow M$: 準同型とするとき、F の slope とは、$F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の固有値の p 進付値を言う。

すると、F の $H^i(X, W)$ への作用の slope は $[0, 1)$、$T_p(X^*)$ への作用の slope は、$[1, 2]$ に含まれます。言い換えると、$L(X)$ の分解は、F の固有空間への分解に対応しているともいえます。

4) 標数 0 の場合

X を $\mathbb{C}$ 上の代数多様体として $H^1(X, \mathbb{C})$ を考えると、これは、Hodge 分解 $H^{1,0} \oplus H^{0,1}$ をもちます。複素共役 $i \mapsto -i$ のこれらの上への作用を考えると、$H^{1,0}$ 上では、1、$H^{0,1}$ 上では、-1 に作用しています。

§1 Blochの方法 (cf. [3])

ほとんどいつでも標数 $p>0$ の上で考えています。

1)

$\mathbb{G}_m : \mathbb{F}_p\text{-alg} \longrightarrow Ab$ を環Rに対して、その可逆元の集合 $R^* = \mathbb{G}_m(R)$ を対応させる(共変)函手とします。Aを環とするとき、

$$W_n(A) = \mathrm{Ker}(\mathbb{G}_m(A[T]/(T^{n+1})) \to \mathbb{G}_m(A))$$

で定義します。(W_nの記号は、後で少し修正します。)

$W(A) = \varprojlim_n W_n(A)$ とします。$W(A)$の上には、自然に、次の作用が、あります。

i) $V_n : W(A) \longrightarrow W(A)$

$T \longmapsto T^n$ からinduceされる写像

$(V_n : W_m(A) \longrightarrow W_{mn+n-1}(A))$

ii) $a \in A$ とするとき $[a] : W(A) \longrightarrow W(A)$.

$T \longmapsto aT$ から、induceされる写像

iii) F_n : $V_n \circ F_n = \sum [\zeta_i]$ ζ_iは1のn乗根達を動く、によって定まる写像。

iii)は、一見、$\zeta_i \in A$ でないとうまくいかないように見えますが、いつでも定義されいます。

このW(A)は、ちょっと大きいので、その"p-part"をとります。

$$W^{(p)}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_m \operatorname{Ker} F_m \quad : (m, p) = 1 \text{ を動く.}$$

少し具体的に書くと、

$W(A) \cong (1 + TA[[T]])^*$ ですから、$f \in W(A)$ を $f = \prod_{n \geq 1} (1 - a_n T^n)^{-1}$ と表示したときに、

$$W^{(p)}(A) = \{ f = \prod (1 - a_n T^n)^{-1} \mid a_n = 0 \quad \text{if } (n, p) = 1 \}$$

以下単に、$W(A)$ で $W^{(p)}(A)$ のことを表わし、$f = \prod (1 - a_n T^{p^n})^{-1}$ のとき $f = (a_n)_{n \geq 0}$ と表わすことにすれば、V、F 等の作用は、

$$V : (a_0, a_1, \cdots) \longmapsto (0, a_0, a_1, \cdots)$$

$$F : (a_0, a_1, \cdots) \longmapsto (a_0^p, a_1^p, \cdots)$$

$$[a] : (a_0, a_1, \cdots) \longmapsto (a a_0, a^p a_1, \cdots, a^{p^n} a_n, \cdots)$$

となります。

$W_n(A) = W(A) / V^n W(A)$ とおきなおします。

詳しいことは成書を見て下さい。

2)

一般に $L : \mathbb{F}_p\text{-alg} \longrightarrow Ab$ を函手とするときに、

$C_n L(A) = \operatorname{Ker}(L(A[T]/(T^{n+1})) \to L(A))$ と

おいて、上の$\hat{\mathbb{G}}_m$と同じ構成法で、TCL（typical curve of L）という函手が定義されます。この上には、F, V, [a]が自然に作用していて、TCL(A)はW(A)加群になります。（$TC\hat{\mathbb{G}}_m = W$です。）

Lとして、何を選ぶかが問題になりますが、Blochは、Lとして、QuillenのK函手をとりました。K群については、定義するだけでも、少し大変なので、省略させていただきます。（cf [4]）

K_iのiの小さいところを抜きだすと、

$K_0(A) = \{$有限生成射影的A加群$\}/($同型類$)$

$\cong \mathbb{Z}$（もしAが局所環なら）

$K_1(A) = (\varinjlim_n GL(n, A))^{ab}$

$\cong A^*$（もし、Aが局所環なら）

ここで$\varinjlim$は、$GL(m, A) \hookrightarrow GL(n, A)$

$(m \leq n)$　　　$(*) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$

でとります。　$G^{ab} = G/[G, G]$

$K_2(A) \cong A^* \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A^* / \{a \otimes 1-a \ (a \in A^*, 1-a \in A^*)$ で生成される群$\}$

（もし、Aが局所環なら）

等となります。

定理（Van der Kallen）$\frac{1}{2} \in A$ のとき.

$$\Omega^1_{A/\mathbb{Z}} \cong \mathrm{Ker}\,(K_2(A[T]/(T^2)) \to K_2(A))$$

証明は、少々こみ入った計算を要するので省略します。（cf [5]）

$$A \cong \mathrm{Ker}\,(K_1(A[T]/(T^2)) \to K_1(A))$$

だったことを思い起せば、de Rham complex の始めの2項 $A \xrightarrow{d} \Omega^1_{A/\mathbb{Z}}$ が K_i から得られていることがわかります。

定義. $C_i = TCK_{i+1}$

C_i を係数とするコホモロジー群 $H^i(X, C_j)$ が、求めるものである、というのが Bloch の主張です。

C_i は、自然に、微分 d をもっていて、複体になっています。

定義はしたものの、K_i の計算が、難かしいので、少し抽象化して、解りやすくしたのが、次の Deligne-Illusie による定義です。ただ、少しばかり、自然性というか、必然性が失われる気もします。

§2. ∇-complex（cf [6], [7]）

定義 $\mathbb{Z}$次数付微分代数（略して adg）の射影的系 $((M_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ が DR (= deRham)-V complex であるとは．（ $R: M_{n+1} \longrightarrow M_n$ とします。）

V0) $\exists V : M_n^i \longrightarrow M_{n+1}^i \quad (i, n \in \mathbb{Z})$

加法的写像の族

V1) $M_n = 0 \quad (\forall n \leq 0)$

M_1^0 は $\mathbb{F}_p$-algebra.

$M_n^0 \cong W_n(M_1^0)$

$R: W_{n+1}(M_1^0) \longrightarrow W_n(M_1^0)$ 及び

$V: W_n(M_1^0) \longrightarrow W_{n+1}(M_1^0)$ は．

普通の Witt 環の写像と一致．

V2) $V(x\,dy) = Vx\, dVy \quad \forall x \in M_n^i,\ \forall y \in M_n^j.$

V3) $Vy\, d\underline{x} = V(x^{p-1} \cdot y)\, dV\underline{x}$

ここで $x \in M_1^0$ ， $y \in M_n^0$.

$\underline{x} = (x, 0, 0, \cdots \quad)$

を満たすことをいう。

このとき．

命題 忘却函手 $\text{DRV-complex} \longrightarrow \mathbb{F}_p\text{-alg}.$

$(M_\bullet) \longmapsto M_1^0$

は．右随伴 $A \longmapsto W_\bullet \Omega_A^\bullet$ をもつ。

(証明は、ほとんど標準的に $W_n\Omega^i_A$ を $\Omega^i_{W_n(A)}$ の商として、i, n の小さいところから順に構成していけばよい。)

定義 $\varprojlim_n W_n\Omega^\bullet_A \overset{\mathrm{def}}{=} W\Omega^\bullet_A$ を A の DR-W 商 complex という。

命題 標準全射

$$\pi_\bullet : \Omega^\bullet_{W_\bullet A} \longrightarrow W_\bullet\Omega^\bullet_A$$

が存在する。

さらに、π_0, π_1 は、同型である。

(証明は、$W_\bullet\Omega^\bullet$ の構成法をよく見ればよい。)

注意、$\mathrm{Ker}\,\pi_\bullet$ は、p-torsion element の閉包(適当な位相で)に一致している。例ば、$(V^n x)dx - p^n x\cdot dV^n x \in \mathrm{Ker}\,\pi_\bullet$

命題、$F\circ R : W_n A \longrightarrow W_{n-1} A$ は、次の条件を満たすように、一意的に、$F : W_\bullet\Omega^\bullet_A \to W_{\bullet-1}\Omega^\bullet_A$ に、拡張される。

i) $F(dx_{\le n}) = x_{\le n-1}^{p-1}\, dx_{\le n}$

ii) $FdV = d : W_n A \longrightarrow W_n\Omega^1_A$ $(\forall n \ge 1)$

このときさらに、次の可換図式がある。

$$
\begin{tikzcd}
W_n\Omega^i_A \arrow[r, "\mathbb{F}"] \arrow[d, Rightarrow, no head] & W_n\Omega^i_A \arrow[d, "\mathrm{proj}"] \\
W_n\Omega^i_A \arrow[r, "p^iF"] & W_{n-1}\Omega^i_A .
\end{tikzcd}
$$

ここで $\mathbb{F}$ は、$F: A \longrightarrow A$ から、$W_\bullet\Omega^\bullet$ の函手性によって導かれる写像。また $x=(x_0, x_1, \cdots)$ のとき $x_{\le n} = (x_0, \cdots, x_{n-1})$

(略証明) 一意性は、π_0 の全射性と $x = (x_0, \cdots, x_{n-1}) \in W_nA$ が一意に $x = (\underline{x}_0)_{\le n} + V(\underline{x}_1)_{\le n-1} + \cdots + V^{n-1}(\underline{x}_{n-1})_{\le 1}$ と書けることから出る。存在を言うには、

$$Fd : W_nA \longrightarrow W_{n-1}\Omega^1$$

を $Fdx = (x_0)^{p-1}_{\le n-1}\, d(\underline{x}_0)_{\le n-1} + d(x_1)_{\le n-1} + \cdots + dV^{n-2}(x_{n-1})_{\le 1}$

とおくと、Fd が W_nA から $F_*W_{n-1}\Omega^1_A$ への微分であること (i.e. $Fd(x+y) = Fdx + Fdy$ 及び $Fd(xy) = Fx \cdot Fdy + Fy\, Fdx$) より、

$$F : W_n\Omega^1_A \ (\simeq \Omega^1_{W_nA}) \longrightarrow W_{n-1}\Omega^1_A$$

を得る。後は、これを外積で $F': \Omega^\bullet_{W_nA} \longrightarrow W_{n-1}\Omega^\bullet_A$ に拡張して F' が $\mathrm{Ker}\,\pi$ で消えることを言えばよい。詳細は略)

Fは、Cartier 作用素の一般化にもなっている。

すなわち、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd} W_{n+1}\Omega^i_A \arrow[r, "F"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W_n\Omega^i_A \arrow[d] \\ \Omega^i_A \arrow[r, "C^{-1}"] & \Omega^i_A / d\Omega^{i-1}_A \end{tikzcd}$$

(Cartier 作用素 とは、次の性質を満たす、標準的な $A^{(p)}$ 加群の同型

$$C^{-1} : \Omega^i_{A^{(p)}} \longrightarrow H^i(F_*\Omega^{\circ}_A)$$

i) $C^{-1}(1) = 1$

ii) $C^{-1}(\omega \wedge \tau) = C^{-1}(\omega) \wedge C^{-1}(\tau)$

iii) $C^{-1}(dx) = x^{p-1}dx$ の class であった。)

次の完全系列が知られている。

定理. (Etale topology に関して) 完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n \longrightarrow W_n \xrightarrow{1-F} W_n \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A^{*}/A^{*p} \xrightarrow{d\log} W_n\Omega^1_A \xrightarrow{1-C^{-1}} W_n\Omega^1_A \longrightarrow 0$$

(etale top で exact とは、$\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A$、$\tilde{A}_{\mathfrak{p}}$ を $\mathfrak{p}$ での strict henselization とするとき、$\cdot \otimes \tilde{A}_{\mathfrak{p}}$ したものが

exact と同じ）

注意　系列の左項が K_0, K_1 に対応していることに注意。$i \geq 2$ のときの対応する完全系列は証明されていない。$SK_i \subset K_i$ を $\overbrace{K_1 \times \cdots \times K_1}^{i \text{コ}} \longrightarrow K_i$ の像で生成される部分群とするとき、

$$SK_i(A)/p^n SK_i(A) \longrightarrow W_n\Omega^i_A \xrightarrow{1-F} W_n\Omega^i_A \to 0$$

の完全性は知られている。

§ Filtration on $W_\bullet\Omega^\bullet_A$.

定義 - 定理　$\mathrm{Fil}^n W_r\Omega^\bullet_A = \mathrm{Ker}(W_r\Omega^\bullet_A \to W_n\Omega^\bullet_A)$

$$= V^n W_{r-n}\Omega^i_A + dV^n W_{r-n}\Omega^{i-1}_A$$

（証明略）

定理　標準射影

$$W_n\Omega^\bullet/pW_n\Omega^\bullet \longrightarrow \Omega^\bullet_X = W_n\Omega^\bullet/\mathrm{Fil}^1 W_n\Omega^\bullet$$

は quasi-isomorphism（すなわち、コホモロジー群の間の同型を導く。）

（略証）n について帰納して、$W_{n+1}\Omega^\bullet/pW_{n+1}\Omega^\bullet \to W_n\Omega^\bullet/pW_n\Omega^\bullet$ の quasi-iso 性、あるいは、次の図式から

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & gr^n W\Omega^i & \longrightarrow & W_{n+1}\Omega^i & \longrightarrow & W_n\Omega^i & \to 0 \\
& \downarrow 0 & & \downarrow p & & \downarrow p & \\
0 \to & gr^n W\Omega^i & \longrightarrow & W_{n+1}\Omega^i & \longrightarrow & W_n\Omega^i & \to 0
\end{array}$$

$gr^{n-1}W\Omega^i_X \xrightarrow{p} gr^n W\Omega^i$ の quasi-iso 性を言えばよい。 $x \in \Omega^i$ を $dV^{n+1}x \in pW_{n+2}\Omega^{i+1}$ なる元とすると、 $dx = F^{n+1}dV^{n+1}x = 0$ ∴ $x \bmod B\Omega^i \in \operatorname{im} C^{-1}$

従って、

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^i_X & \xrightarrow[VC^{-1}=p]{} & W_2\Omega^i \\
V^n \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow V^n \\
W_{n+1}\Omega^i & \xrightarrow{p} & W_{n+2}\Omega^i
\end{array}$$

より、 $V^{n+1}x \in p\, gr^n W\Omega^i$。

すなわち、 $gr^{n+1}W\Omega^{\cdot}/p\, gr^n W\Omega^{\cdot}$ は acyclic (終)

§3 具体的な表示

X を $\mathbb{C}$ 上の代数多様体とすれば、分解 $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \Omega^{\cdot}_X$ によって、コホモロジー群の同型

$$H^*(X^{an}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(X^{an}, \Omega^{an\cdot}_X)$$
$$\xrightarrow{\sim} H^*(X^{alg}, \Omega^{\cdot}_X)$$

があり、この右辺が代数的であることから、体 k の標数が 0 のときには、 $H^*(X, k) = H^*(X, \Omega^{\cdot}_{X/k})$ と定義

すればよかった。

標数 $p>0$ のときには、$d : \Omega^0_X = \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_X$ の核は大きすぎて、うまくいかない。$x^{p^n-1}dx$ 達が積分できるためには、$\frac{1}{p}$ の項をうまく導入する必要がある。

$X = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[T])$ のときには、次の定義になる。

定義　$E = \{ x \in \mathbb{Q}_p[T^{p^{-n}}] \mid x \in \mathbb{Z}_p[T^{p^{-n}}],\ dx \in \mathbb{Z}_p[T^{\pm p^{-n}}] \}$

とすると、

$$d : E \longrightarrow E\,dx$$

が良い性質を持っている。

一般に $A = \mathbb{F}_p[T_1, \cdots T_n, T_s^{-1}, \cdots T_n^{-1}]$ とするとき、

$$C = \varinjlim_{r \geq 0} \mathbb{Q}_p[(T_i^{p^{-r}})_{1 \leq i \leq n}, (T^{-p^{-r}})_{i \in [s,n]}]$$

として、$E^m = \{ x \in \Omega^m_C \mid x$ は整、dx は整$\}$

ここで x, dx が整とは、

$$x = \sum a_{i_1 \cdots i_m}(T)\ d\log T_{i_1} \cdots d\log T_{i_m}$$

としたときに その係数 $a_{i_1 \cdots i_m}(T)$ 達が $\mathbb{Z}_p[(T_i^{p^{-r}}), (T_i^{-p^{-r}})]$ に入ることを言う。

$E^\cdot$ に Filtration $\mathrm{Fil}^r E^i = V^r E^i + dV^r E^{i-1}$ を入れる。（$E^\cdot$ 上への F、V の作用は、係数ごとに作用させる。）

このとき

定理　$W_\bullet \Omega_A^\bullet \xrightarrow{\sim} E^\bullet$　同型

これは、ちょっとしんどい計算を要する。($E^\bullet$の基底をとって、具体的な計算 Fil^rに関する帰納 etc.)

さらに、

定理　$W_\bullet\Omega^\bullet \xrightarrow{\sim} C_\bullet$　(Bloch の $C_\bullet$)

証明は、上の定理と同様に、$E^\bullet$, $C_\bullet$ の基底を選んで計算することによって得られる。困難の第一の原因は、$C_\bullet$ 上に、apriori に、V-complex の構造が入っていないことに由来している。

§ スペクトル系列

定理：スペクトル系列

$$E_1^{i,j} = H^i(W\Omega_X^j) \Rightarrow \mathbb{H}^n(W\Omega^\bullet)$$

が存在する。これは、up to torsion で E_1で退化。

(略証)　$\mathbb{F}$ は、$H^i(W\Omega^j)/\mathrm{Torsion}$ 上で、p^iF と一致している。Vは、topologicaly nilpotent、$FV=p$ より、slope $\mathbb{F} \subset [i, i+1)$　$d_r : E_r^{i,j} \longrightarrow E_r^{i-r, j+r-1}$ 達は、$\mathbb{F}$と両立するから、$r \geq 1$ なら、これは 0。

References.

[1] J.P. Serre: Sur la topologie des varietes algébriques en characteristique p. Symp. Intern de toplogia algebraica, Mexico 1958 p24-53

[2] J.-P. Serre: Quelques propriétés des variétés abelienne en char. p. Am. J. Math 80 (1958) p 715- 739

[3] S. Bloch: Algebraic K-theory and cristalline cohomology. Publ. Math. IHÊS 47 (1978) 187-268

[4] D. Quillen: Higher algebraic K-theory I in Lect. Note in Math 341 (1973) Springer

[5] Van der Kallen: Le K_2 des nombres duaux. CRNS 273 (1971) p1204-1207.

[6] L. Illusie: Complexe de deRham-Witt. Astérisque 63 (1979) p83-112

[7] L. Illusie: Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4e serie 12 (1979) p501-661

Graded rings の deformations について

早大・理工　小山 陽一

§0 Introduction

R を体 k 上の reduced な local ring とする。R の order 1 の infinitesimal deformations (すなわち、$k[t]/t^2$ 上の defomations) 全体は、R-module structure をもち、

$$T^1_R \simeq \mathrm{Ext}^1_R(\Omega_{R/k}, R)$$

となる。また、obstruction module は、A を regular local ring とし、$R \simeq A/I$ とすると、

$$T^2_R \simeq \mathrm{Ext}^1_R(I/I^2, R)$$

となることが知られている ([3])。

R が k 上の graded ring の場合、T^1_R, T^2_R は graded modules となるが、これを Proj(R) 上の情報で記述することを考える。

2 次元の graded rings の deformations については、Pinkham [1], [2] により多くのことが知られている。

§1. T^i_R の計算

$k = \bar{k}$, $ch(k) = 0$

V : non-singular proj. variety $/k$.

$\mathcal{L}$: ample line bundle on V

$R := \bigoplus_{\nu \geq 0} H^0(V, \mathcal{L}^\nu)$, $\mathfrak{m} := R_+$

$X := \mathrm{Spec}(R)$, $x := [\mathfrak{m}]$

とする。このような graded ring R についての deformation を調べる。(X, x) が単に isolated singularity のとき、

Prop(1.1) (Schlessinger[4]) $U = X - \{x\}$ とすると

(1) $\mathrm{depth}_x X \geqq 2$ のとき

$$0 \to T_X^1 \to H^1(U, \Theta_U) \to H^1(U, \Theta_{A^n}|_U) \quad \text{(exact)}$$

$$T_X^2 \hookrightarrow H^1(U, N_U)$$

(2) $\mathrm{depth}_x X \geqq 3$ のとき

$$T_X^1 \simeq H^1(U, \Theta_U)$$

$$T_X^2 \simeq H^1(U, N_U)$$

この Prop. を用いて、R が graded な場合には、

Theorem (1.2) $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}} R \geqq 3$ のとき

$$(T_R^1)_\nu \simeq \ker(H^1(V, \Theta_V \otimes \mathcal{L}^\nu) \to H^2(V, \mathcal{L}^\nu))$$

とくに、$\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}} R \geqq 4$ ならば

$$(T_R^1)_\nu \simeq H^1(V, \Theta_V \otimes \mathcal{L}^\nu)$$

<u>Lemma (1.3)</u> (Schlessinger [4]) $L \xrightarrow{p} V$ を line bundle scheme, $U = L - \{0\text{-section}\}$ とすると,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_U \longrightarrow \Theta_U \longrightarrow p^*\Theta_V \longrightarrow 0$$

は exact となる。さらに, F を V 上の coherent sheaf とすると, $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対し

$$H^q(U, p^*F) \simeq \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} H^q(V, F \otimes L^\nu)$$

<u>proof of (1.2)</u>

$\operatorname{depth}_m R \geq 3$ より, $H^1_x(X, \mathcal{O}_X) = H^2_x(X, \mathcal{O}_X) = 0$。また, X は affine であることから, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$。したがって, $H^1(U, \mathcal{O}_U) = 0$ となる。(1.3) より

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H^1(U, \Theta_U) & \longrightarrow & H^1(U, p^*\Theta_V) & \longrightarrow & H^2(U, \mathcal{O}_U) \\ & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\ & \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} (T^1_R)_\nu & & \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} H^1(V, \Theta_V \otimes \mathcal{L}^\nu) & & \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} H^2(V, \mathcal{L}^\nu) \end{array}$$

となり, graded modules の exact sequence となる。ゆえに

$$(T^1_R)_\nu \simeq \ker(H^1(V, \Theta_V \otimes \mathcal{L}^\nu) \longrightarrow H^2(V, \mathcal{L}^\nu)).$$

$\operatorname{depth}_m R \geq 4$ のときは, $H^3_m(R) \simeq \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} H^2(V, \mathcal{L}^\nu) = 0$ よりいえる。

<u>Cor. (1.4)</u> $R^{(d)} := \bigoplus_{\nu \geq 0} R_{\nu d}$ とすると, $\operatorname{depth}_m R \geq 3$

のとき、$(T^1_{R(d)})_\nu \simeq (T^1_R)_{\nu d}$ となる。

<u>Theorem (1.5)</u> $\mathcal{L}$ を very ample とし、$V \xrightarrow{|\mathcal{L}|} \mathbb{P}^n$ とする。

このとき、$\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}} R \geqq 3$ ならば

$$(T^2_R)_\nu \simeq \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} H^1(V, N_{V/\mathbb{P}} \otimes \mathcal{L}^\nu)$$

<u>proof</u>

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_U \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \Theta_U \arrow[r] \arrow[d] & p^*\Theta_V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_U \arrow[r] & \Theta_{\mathbb{A}}|_U \arrow[r] \arrow[d] & p^*(\Theta_{\mathbb{P}}|_V) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N_{U/\mathbb{A}} \arrow[r, dashed, "\simeq"] \arrow[d] & p^*(N_{V/\mathbb{P}}) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

より、$N_{U/\mathbb{A}} \simeq p^*(N_{V/\mathbb{P}})$ となる。したがって、(1.1)、(1.3) のことから、

$$\begin{aligned}
T^2_R &\simeq H^1(U, N_{U/\mathbb{A}}) \\
&\simeq H^1(U, p^*(N_{V/\mathbb{P}})) \\
&\simeq \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} H^1(V, N_{V/\mathbb{P}} \otimes \mathcal{L}^\nu)
\end{aligned}$$

<u>Remark</u> この場合は、V の embedding が $\mathcal{L}$ に depend しており、$N_{V/\mathbb{P}}$ も $\mathcal{L}$ によって変化するので、(1.4) の様な主張は成立しない。

2. Application

以下、$k=\mathbb{C}$ として、3次元の graded C.M. ring となる場合について考える。

<u>Definition</u>　R が <u>rigid singularity</u> とは、$T^1_R = 0$ となることである。

(1.2) より、$H^1(V, \mathcal{L}^\nu)=0$, $H^1(V, \Theta_V \otimes \mathcal{L}^\nu)=0$ $(\forall \nu \in \mathbb{Z})$ となっていれば、R は rigid singularity となる。

<u>Theorem (2.1)</u>　(1) $V=\mathbb{P}^2$ のとき、任意の ample line bundle $\mathcal{L}$ に対して、R は rigid singularity となる。

(2) V が rational ruled surface $F_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ $(n \geq 1)$ のとき、C を minimal section, f を fibre とすると、$\mathcal{L} \sim aC + bf$ と書ける。このとき、

$$R \text{ が rigid} \iff a \geq 3,\ b > an$$

(3) V が $\deg \geq 5$ の Del Pezzo surface のとき、$\mathcal{L}$ を十分 ample にとれば、R は rigid singularity となる。

(証明略)

V を projective K3 surface とすると、任意の ample line bundle $\mathcal{L}$ に対し、R は Gorenstein となる。このとき、次の結果が得られる。

<u>Theorem (2.2)</u> V を projective K3-surface とするとき、

$$(T_R^1)_\nu \simeq H^1(V, \Theta_V \otimes \mathcal{L}^\nu)$$

(証明略)

さらに、K3 surface 上では、$\Theta_V \simeq \Omega_V^1$ となるので、Serre duality を用いて、次のようになる。

<u>Cor. (2.3)</u> $(T_R^1)_{-\nu} \simeq (T_R^1)_\nu^\vee$

$$\dim_k (T_R^1)_0 = 19$$

<u>Example</u> $V \subset \mathbb{P}^3$ を non-singular hypersurface, deg=4 とすると、V は K3-surface となる。H を hyperplane section とし、$\mathcal{L} = \mathcal{O}(rH)$ とおく。

(1) $r = 1$ のとき、R は hypersurface singularity となり、$\dim (T_R^1)_\nu$ は下図のようになる。

ν	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\dim (T_R^1)_\nu$	1	4	10	16	19	16	10	4	1

(2) $r = 2, 3, 4$ のとき、(1.4) より、$\dim (T_R^1)_\nu$ は、$r = 1$ の場合から得られる。

(3) $r \geqq 5$ のとき、$(T_R^1)_\nu = 0$ $(\nu \neq 0)$, $\dim (T_R^1)_0 = 19$ となる。特に、この場合は、singularity の deformations と V の deformations とが 1対1 に対応しており、この singularity は deformation で smooth にできないことがわかる。

Reference

[1] Pinkham, H., Deformations of algebraic varieties with $\mathbb{G}_m$-action, Asterisque 20 (1974)

[2] ———, Deformations of normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$-action, Math. Ann. 232 (1978) 65–84

[3] Lichtenbaum, S. - Schlessinger, M., The cotangent complex of a morphism, Tr. A.M.S. 128 (1967) 41–70

[4] Schlessinger, M., On rigid singularities Rice Univ. Studies 59 (1973) 147-162

曲面上の特異点の最大個数について

渡辺雅之（早大理工）

1. P^3内のn次曲面の上にisolatedなdouble pointがいくつあり得るかを考えよう。例えば3次曲面は最大4コ，4次曲面は最大16コのdouble pointsをもつ。一般に$n \geq 5$のとき，A. B. Bassetは，double pointsの個数dは次の不等式でおさえられることを示した。

$$\text{I)} \quad d \leq \frac{1}{2}n(n-1)^2 - 5 - \sqrt{n(n-1)(3n-14)+25} \qquad n \geq 5$$

これは次のようにして証明された。すなわち，ある点Pからあるplane πにむかって曲面Fをprojectする。そうするとF上のsingular pointsはπ上のbranch curveの上におちるが，そのcurveに対するPlücker公式から上の不等式が得られる。

Stagnaroにしたがい，ここでは次のような設定のもとで上の方法を実行してみよう。

まず次のように notation を定める。

F: m 次曲面 $\subset \mathbb{P}^3_k$ (k は標数 0 の代数閉体) で d コの conical な double points と multiplicity s の点 P をもち、それ以外では non singular.

ただし $s \geq 0$ とし、$s=0$ は $P \notin F$ を意味するものとする。

π: P を含まない plane

p; $F \to \pi$: P を center とした projection

Δ: p の branch locus $\subset \pi$

さて、ここで

① Δ は irreducible reduced curve

を仮定する。すると簡単な計算により

$$
(*)\left\{
\begin{aligned}
\deg\Delta &= m(m-1) - s(s+1) - s' \qquad \exists s' \geq 0 \\
d\Delta &= \text{degree of dual curve of } \Delta \\
&= m(m-1)^2 - s(s^2-1) - 2d - \lambda \qquad \exists \lambda \geq 0 \\
\mathrm{cusp}\,\Delta &= \#(\text{cusp singularities of } \Delta) \\
&= m(m-1)(m-2) - s(s+1)(s+2) - \mu \qquad \exists \mu \geq 0
\end{aligned}
\right.
$$

が得られる。~~さらに~~ ($\Delta \subset \pi$ に対する Plücker

② Δ は node, ordinary cusp, ordinary flex のみをもつ を仮定すると)

公式から

$\ast\ast)$ $2\,\mathrm{bit}\,\Delta = d\Delta(d\Delta-10)+8\deg\Delta-3\,\mathrm{cusp}\,\Delta$

$\mathrm{bit}\,\Delta = \#\{\text{bitangent points of } \Delta\} \geq 0$

となるが ここでさらに

③ $\mu=0$, $d\Delta>10$

を仮定すると $\ast)$, $\ast\ast)$ から d は次の不等式でおさえられることがわかる

$$\text{II)}\quad d \geqq \frac{1}{2}\left[n(n-1)^2-s(s^2-1)-5-\sqrt{n(n-1)(3n-14)-s(s+1)(3s-2)+25}\right]$$

残念ながら P を fix すると仮定の②③をみたすような projection p がとれるかどうかはまだわかっていない。しかし P を general な点にとれば（このときは $s=0$）①はみたされ、また②③も一般化された Plücker 公式を使うことによって回避できる。したがって $s=0$ については II）は常に成立するがこれは Basset の示した I）そのものである。

さて F を conical な double points のみをもつ n 次曲面で double points の個数を $D=d+1$ コとしよう。もしこのうちの一点 P からある plane への projection で

の(3)をみたすものがあるとすると、このときは $s=2$ となり II)から

III) $D \leqq 1+\frac{1}{2}\left[n(n-1)^2-11-\sqrt{n(n-1)(3n-14)+1}\,\right]$

となる。これはI)よりよい評価になっている。実際

	I)	III) ($s=2$)
$n=5$	$d \leqq 34$	$D \leqq 33$
6	66	65
7	114	112
8	181	179
⋮	⋮	⋮

しかし III)もまだ最良の評価とはいい難い。実際 $n=5$ に関しては最近 Beauville が $D \leqq 31$ を示している。(これは best possible) また $n \geqq 6$ についても、現在まで知られている example のもつ double points の最大個数は $n=6, 7, 8, \cdots\cdots$ についてそれぞれ 64, 90, 160, $\cdots\cdots$ である。

そこで次に example として 64 コの double points をもつ 6次曲面を実際に構成してみよう。

2. Examples.

次の形の polynomial で定義された曲面 F を考える.

$F = (f=0)$: $f = \alpha x_0^{2m} + 2\beta x_0^m + \gamma$

ただし α, β, γ は変数 x_1, x_2, x_3 に関する同次式で degree はそれぞれ $n-2m$, $n-m$, n.

$P = (1:0:0:0) \in F$

$\pi = (x_0 = 0) \subset \mathbb{P}^3_k$

このとき. $\mathrm{mult}_P F = n-2m$, したがって F を P から π へ向かって project すると degree $2m$ の finite map になり. その branch locus は π 上 $\Delta = \gamma^{m-1}\Phi^m$ で定義された curve になる. ただし $\Phi = \alpha\gamma - \beta^2$. このとき

Prop. 1) $A(\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3) \in F$: sing. pt with $A \neq P$, $\bar{x}_0 \neq 0$

$A'(0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3)$: projection による A の image

$\Rightarrow$ A' は $(\Phi = 0)$ の sing. pt.

逆に $A'(0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3) \in (\Phi = 0)$ の sing. pt with $\alpha(A') \neq 0$, A を A' の pre image

$\Rightarrow$ A は F の sing. pt.

さらに A, A' を上のようにとると

A: conical double pt of F

$\Leftrightarrow$ A': node of $(\Phi=0)$

A: biplanar double pt of F

$\Leftrightarrow$ A': double pt of $(\Phi=0)$ with coincident tangents

2) $m \geq 2$ として $B=(0:\overline{y}_1:\overline{y}_2:\overline{y}_3)$ とすると

B: sing. pt of F $\Leftrightarrow$ B: sing. pt of $(\gamma=0)$

さらに

$m=2$, $\beta(B)\neq 0$ のとき

B: conical double pt of F $\Leftrightarrow$ B: node of $(\gamma=0)$

B: biplanar double pt of F

$\Leftrightarrow$ B: double pt of $(\gamma=0)$ with coincident tangents

$m\geq 3$ のとき

B: biplanar double pt of F $\Leftrightarrow$ B: node of $(\gamma=0)$

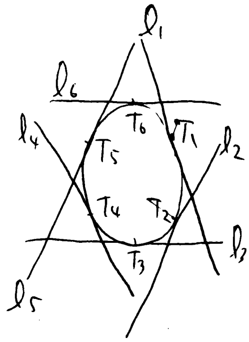
B: uniplanar double pt of F $\Leftrightarrow$ B: double pt of $(\gamma=0)$ with coincident tangents

($(\Phi=0)$ $(\gamma=0)$ は π 上の curve と考える)

まず かんたんな例から 構成してみよう。

◎ 16コの double pts をもつ4次曲面の例.

$\pi = (x_0=0)$ 上で irr. な conic α をいつ fix する. $l_1, l_2, \cdots, l_6$ を α に distinct な6点 $T_1, T_2, \cdots, T_6$ で接する line とし, $T_1, T_2, \cdots, T_6$ を通り α を component として含まない cubic を β とする. linear system



$$\Lambda = \{\lambda\beta^2 - l_1 l_2 \cdots l_6 \mid \lambda \in k\}$$

を考えると, Λ の member と α の intersection は $\sum_{i=1}^{6} 2T_i$ である. したがって Λ の member で $\exists B \in \alpha$ $B \neq T_i$ を通るものを選べば それは α を component として含む. i.e. $\exists \lambda_0 \in k$ $\exists \gamma$ $-\lambda_0\beta^2 - l_1 l_2 \cdots l_6 = -\alpha\gamma$

$\lambda_0 = 1$ としてよいから $\Phi = \alpha\gamma - \beta^2 = l_1 l_2 \cdots l_6$

したがって $F \equiv (\alpha x_0^2 - 2\beta x_0 + \gamma = 0) \subset \mathbb{P}^3_k$ と定義すれば Prop より F は16コの conical な double pts をもつ.

◎ 64コの conical な double pts をもつ6次曲面の例

$$\alpha = a x_1^2 + b x_2^2 - c x_3^2$$

$$\delta = b x_1^2 + a x_2^2 - c x_3^2$$

$$\rho = ab(a+b)(x_1^2 + x_2^2) - c(a^2+b^2)x_3^2$$

$\sigma = d(x_1^2 + x_2^2) - e x_3^2$

$$\begin{cases} a, b, c, d \in k - \{0\}, \quad a \neq b \\ e = -cd(a+b)/ab \\ a^2 + 3ab + b^2 = 0 \end{cases}$$

$\varphi = -80 a^2 b^2 c^2 d^2 [ab x_1^2 x_2^2 + c(a+b)(x_1^2 + x_2^2) x_3^2]$

このとき

Prop 2. 1) $(\alpha\delta\varphi - c^2(a-b)^2\rho^2\sigma^2 = 0) \subset \Delta$ は 26 コの nodes をもち それらは $(\rho\sigma = 0)$ 上にはない。

2) $(\delta\varphi = 0) \subset \Delta$ は 11 コの nodes をもち それらは 上の 2つの curve の上にはない

したがって

$\beta = c(a-b)\rho\sigma, \quad \gamma = \bar{c}\varphi$

$F_1 = (\alpha x_0^4 + 2\beta x_0^2 + \gamma = 0)$ とすると Prop 1) より、F_1 は 64 コの conical な double points をもつ

参考文献

Ezio Stagnaro Sul massimo di punti doppi isolati di una superficie algebrica di $\mathbb{P}^3$.

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Vol 60 (1978)

Ezio Stagnaro ; On the maximum number of isolated singularities of algebraic Curves and Surfaces and on Basset' limitation

A. B. Basset ; The maximum number of double points on a surface, Nature 73 (1906)

A. B. Basset ; On the singularities of surfaces Quart. Journ. 38 (1907)

H. D. Kreiss ; Über syzygetische Flächen Annali di Mat. (4) 41 (1955)

D. Gallarati ; Una superficie dell'ottavo ordine con 160 nodi, Atti. Acc. Ligure 14 (1957

幾何学的でない局所環の例について

高知大理学部　小駒哲司

体K上有限生成な環Rは、幾何学的環と呼ばれるが、これはよく知られた次のような性質を持っている。

(イ) 幾何学的環は、多項式環の剰余環という形であるから、正則環の準同型像である。特に素イデアル鎖条件を満たす。

(ロ) Jacobianによる判定条件より、regular locusはZarisky openとなっている。

(ハ) LをR-algebraであって、$k(\mathfrak{g}) = R_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}}$ ($\mathfrak{g} = \mathrm{Ker}(R \longrightarrow L)$) 上有限次代数拡大体となるものとすれば、RのLにおける整閉包$R'(\subset L)$は、有限R-加群となる。

さて、次のような形で知られている命題は多い。

環Rが(イ)(又は(ロ), (ハ)の一つ)を満たすとする。このとき、(P)であれば(Q)である。

ここでは、この最初の大前提を除いた場合、すなわち単に、

局所環Rが(P)であれば(Q)である。

ということが成立するかどうかを問題とする。できる場合はそれでよいのだが、できない場合には、そうでない例を構成する必要がある。そこで、今までに知られている幾何学的でない環の例について少し述べてみよう。その前に、Rが局所環の場合には、その完備化$\hat{R}$はやはり(イ)〜(ハ)の性質を満たすので、Rが幾何学的かどうかを考えるには、$\hat{R}$との関係を調べればよいことに注意しておく。

よく知られているのは、永田の例である[1]。それぞれの具体的問題に対し、いろいろ面白い例があるが、その完備化との関係から見るという立場に立って大ざっぱに言うと、それらの例は、その完備化を$\hat{S}/\mathfrak{a}$ ($\hat{S}$は完備正則局所環)と表わした時、$\mathfrak{a}$が$\hat{S}$の regular sequence で生成されるものである。このようなものしか構成されなかったのは、$\mathfrak{a}$をもっと複雑なイデアルにしようとすると、Rがネーターになるかわからなくなってしまうためであると思われる。又、永田による素イデアル鎖条件の成立しない例は、gluing が本質的であり、その正規化は素イデアル鎖条件の成立する環とな

る。故に、$\mathfrak{a}$の素因子の高さが等しくないようなものが存在するかという問題，例えば

(a) 整域Rで、その完備化$\hat{R}$は embeded prime divisor をもつようなものが存在するか。

(b) ネーター正規環で，素イデアル鎖条件を満たさぬ環が存在するか

などの問題が残った。

(a)の問題については、Ferrand-Reynaud によって、実際持つような例が構成されている。[2] しかしながら、存在はわかってもその完備化を$\hat{S}/\mathfrak{a}$と表わした時、$\mathfrak{a}$の様子が具体的にわかるものではないので，ここでの問題，すなわち，Rに更なる条件(P)であって(Q)でないを加えたものが構成できるかを考える場合、あまり役に立たない。

以下、最初の一般的問題に有力な構成法の概略をお話ししよう。以下のものを考える。

$$F_1, \dots, F_r \in (X, Y, Z)\mathbb{Z}[X, Y, Z]$$

k 体 $\#(k) \leq \aleph_0$。 $\{a_i, b_j, c_k \mid i, j, k \in \mathbb{N}\}$ 変数

$K = k(\{a_i, b_j, c_k\})$ $\quad S = K[x, y, z, w]_{(x, y, z, w)}$

ここで x, y, z, w は変数

$\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$：互いに素な，$S$ の素元の集合で $P_1 = w$

$\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$：ある正の整数の集合

$q_n = \prod_{i=1}^{n} P_i$,　　$g_n = x + \sum_{i=1}^{n} a_i q_i^{t_i}$

$h_n = y + \sum_{i=1}^{n} b_i q_i^{t_i}$,　　$l_n = z + \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^{t_i}$

$\omega_n^{(k)} = F_k(g_n, h_n, l_n) / q_n^{t_n}$　　$(1 \leq k \leq r)$

$A_n = S[\omega_n^{(1)}, \cdots, \omega_n^{(r)}]_{(x, y, z, w, \omega_n^{(1)}, \cdots, \omega_n^{(r)})}$

$A = \varinjlim_n A_n \subset L = Q^{-1}S$

(1) $t_{n+1} \geq t_n + 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ かつ，$\forall \mathfrak{g} \in \operatorname{Spec} \hat{S}$ $\operatorname{ht} \mathfrak{g} = 1$ について $\mathfrak{g} = P_m S$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在するように $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathfrak{P}$ を並べられれば A はネーター環となる。

(2) $P_n \notin (g_{n-1}, h_{n-1}, l_{n-1}) \hat{S}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ となるように $\mathfrak{P}$ を並べられれば $(g, h, l)\hat{S} \cap S = 0$ となる。但し，

$$g = x + \sum_{i=1}^{\infty} a_i q_i^{t_i},\quad h = y + \sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^{t_i},\quad l = z + \sum_{i=1}^{\infty} c_i q_i^{t_i} \in \hat{S}$$

(3) (1), (2) が成立すると

$$\hat{A} \simeq \hat{S} / (F_1(g, h, l), \cdots, F_r(g, h, l))\hat{S}$$

(4) $\mathcal{H}_n = \{F_1(g_n, h_n, l_n), \cdots, F_r(g_n, h_n, l_n)\}$

$\Pi_n = \{k \mid 1 \le k \le n,\ P_k S + \mathfrak{X}_n S$: Sの素イデアル$\}$

とおく、もし、$\mathcal{P}$の並べ方が $\forall n \in \mathbb{N}$ について

$P_n S + \mathfrak{X}_n S$ の極小素因子は、必ず $P_k S + \mathfrak{X}_n S$

$(k \in \Pi_n)$ の形をしている

が成立するようになっていると A は一意分解環となる。

次の例1, 2について, (1), (2), (3)が成立するように、$\mathcal{P}$を並べることが証明できる。[6]

例1、素イデアル鎖条件の成立しない正規環

$F_1(X, Y, Z) = XY$, $F_2(X, Y, Z) = XY$

Aが正規になることも示せる。

例2、完備化が embedded prime をもつ整域

$F_1(X, Y, Z) = X^2$, $F_2(X, Y, Z) = XY$

ところで、松村は次のことを問題とした。[3]

Rを reduced なネーター環とするとき

$E = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{ht} \mathfrak{p} > 1,\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R/xR,\ x : N.Z.D\}$

は有限か?

$\bar{R}$をRの全商環での正規化としたとき、$E \subset \operatorname{Ass}_R \bar{R}/R$

であるから, $\bar{R}$が有限R-加群であれば、Eは有限個で

ある。一方，Eisenbud-Goto は 次の一般化された定理を証明した。[4]

$$E_n = \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{ht}\mathfrak{p} > n,\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R R/(x_1,\dots,x_n)R \\ \text{for some regular sequence } x_1,\dots,x_n \end{array} \right\}$$

は，もし R が (S_n) かつ 正則環の準同型像となっていれば，$\#(E_n)$ は有限である。

以上のことにおいて，幾何的条件を除くと，局所環の場合でさえ成立しないことが，例2からわかる。

最後に，次の Murthy の定理[5] について考えよう。R は正則環の準同型像とする。このとき，もし R が Cohen Macaulay U.F.D であれば，R は Gorenstein となる。

例3．Gorenstein とならない C.M. U.F.D.

Gorenstein とならない curve，例えば

$$k[[t^3, t^4, t^5]] = k[[X, Y, Z]]/(F_1, F_2, F_3)$$

$$F_1 = X^3 - YZ, \quad F_2 = Y^2 - XZ, \quad F_3 = Z^2 - X^2Y$$

を考えよう。この F_1, F_2, F_3 について，(1)〜(4) が成立するように，$\wp$ を並べることができる。[7]

[1] M. Nagata, Local rings

[2] D. Ferrand, M. Raynaud, Fiber formelles d'un anneau local noetherian, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3 (1970) 295-311

[3] H. Matsumura & T. Ogoma, Remarks on associated prime ideals, to appear

[4] D. Eisenbud & S. Goto, Prime ideals associated with regular sequences, to appear

[5] M. P. Murthy, A note on factorial rings, Arch. Math. 15 418-420 (1964)

[6] T. Ogoma, Non-catenary pseud-geometric normal rings, Japan J. Math. 6 147-163 (1980)

[7] T. Ogoma, Cohen Macaulay factorial domain is not necessary Gorenstein, to appear

ネター環の完備化とその周辺

西村純一（京大・理）

1. 序.

ネター環論において．完備局所環のはたす役割は大きい。１９３０年代から．５０年代にかけ，クルル，ザリスキ．永田．等の努力により．多くの輝かしい．完備局所環の性質が知られている。また．彼らは．これらの性質を．一般のネター環研究＿特に．局所的性質の研究＿に．活用し．種々の重要な結果を得た。特に．1950年代、永田は．完備局所環の美しい特質を多数見いだし．そこで得た結果を．＿例えば．ネター整域の整閉包の有限性判定、等．の研究＿＿に利用した。彼は．整閉包に関し．良い性質をもつネター環を擬幾何学環と呼び．かつ．擬幾何学環の理論を作りあげた。

その後．グロタンディエックは．永田らの仕事を．彼のわく組み内でとらえなおし．ネター環（とくに．局所環）と、その極大イデアルによる完備化とをつなぐ．形式的ファイバー（formal fibres）の重要性に気づき．ネター環で．その各素イデアルにおける局所環の形式的ファイバーが．ある性質$\underline{P}$をみたすものを．$\underline{P}$-環と呼び

それら P-環の統一的研究を行なった。また、彼は、形式的平滑（formally smooth）という、概念も発展させ、たとえば、完備局所環の構造定理の新しい証明（構成）法も得ている。グロタンディエックは、P-環のうち、代数幾何学で要求される性質を、ほぼ満たすとおもわれる環を、特に、エクセレント環と名づけると共に、エクセレント環の理論を発展させた。その中で、エクセレント環は擬幾何学環であり、完備局所環はエクセレント環になることも示した。

ところで、可換環論においても、代数幾何学においても、そこに登場するネター環に対し、それの極大イデアルによる完備化のみを用いつづけることの不便さが気づかれ始めるとともに、ネター環の勝手なイデアルによる完備化の有用性も知られるようになってきた。しかし、（極大とはかぎらない）イデアルによる完備化を考える時、そのイデアルによって完備化された環が、どのような性質をもつか——たとえば、もとのネター環が、擬幾何学環や、エクセレント環であった場合、それらの、（ある）イデアルによる完備化も、また、それぞれ擬幾何学環や、エクセレント環になっているのかどうか…一般に、P-環の

イデアルによる完備化は、また、P-環になるのか……という.ことが、完備局所環の場合に相異して、必ずしも、明白ではないことが、大きな障害となってくる。

そこで、グロタンディエックは、EGA IV (7.3.8)において、次のような演習問題を提出した:

問題(1.1)　Aをネター環、IをAのイデアルとする。いま、AがP-環ならば、AのI-進位相による完備化A^*も、また、P-環となるか、

問題(1.2)　A, Iは、問題(1.1)と同じとする。いま

a)　AはI-進位相で(分離)完備、かつ、

b)　A/IはP-環となる、

ならば、A自身も、P-環となるか、

これらの問は、1960年代以降、多くの可換環論(可換代数)研究者の注意をひき、数々の結果が、得られてきた。次節以下では、上の問題への解答を得られた年順に追いつつ、できれば、今後に残された問題をも、あわせて考えてみたい。

2. マローの定理、

問題提出から、ほぼ10年間の空白の後…1973年、フ

ランスの環論研究者，マローは，次の単純明解な結果を得た：

<u>定理</u>(2.1)（マローの定理）　Aをネター環，IをAのイデアルとする。いま，

a)　Aは，I-進位相で(分離)完備，かつ，

b)　A/I は，擬幾何学環となる，

ならば，A自身も，擬幾何学環となる。

特に，擬幾何学環の(ある)イデアルによる完備化は，いつも擬幾何学環。

マローの定理およびその証明法は，次のテイトの補題を，うまく一般化したものと考えられる：

<u>定理</u>(2.2)（テイトの補題）　Aをネター整閉整域，xをAの非零元とする。いま，

a)　Aは xA-進位相で(分離)完備，かつ，

b)　xはAの素元で，A/xA は日本環(japanese ring)となるならば，A自身も，日本環となる。（尚，日本環より他に，いい訳語はないものか...）。

ところで，マローは，上記定理(2.1)の証明の中で，次にのべる森誉四郎の定理を(見つけだし，)利用してみせた：

定理(2.3)(森誉四郎の定理)　Aをネター整域、$\bar{A}$をAの(商体における)整閉包とする。いま、$\bar{A}$の任意の高さ1の素イデアル$\bar{\mathfrak{p}}$について、$\bar{A}/\bar{\mathfrak{p}}$がネター環となるならば、$\bar{A}$自身も、ネター環。

我々は、ネター整域の(商体における)整閉包は、いつもクルル環になる、という森-永田の定理を考慮にいれると、森の定理は、次のように拡張されることを示した：

命題(2.4)　Aをクルル環とする。いま、Aの任意の高さ1の素イデアル$\mathfrak{p}$について、$A/\mathfrak{p}$がネター環となるならば、A自身も、ネター環。

この命題を、我々は、クルル環の単項イデアルは、(それぞれ独立な離散付値環に対応する)有限個の高さ1の準素イデアル分解をもつ、というクルル環の著しい性質を用い、次の補題より導く：

補題(2.5)　Aをクルル環、$\mathfrak{p}$をAの高さ1の素イデアルとする。いま、$A/\mathfrak{p}$がネター環となるならば、任意の自然数eについて、$A/\mathfrak{p}^{(e)}$も、また、ネター環となる。

なお、命題(2.4)(および、補題(2.5))は、マローの定理(定理(2.1))、テイトの補題(定理(2.2))それぞれを一般化した命題(命題(2.6))を与えるとともに、2次元

ネター整域の（商体における）整閉包のネター性（森-永田の定理），または，それをもう少し拡張したハインツァーの定理（定理(2.7)）をも，直ちに導くことに注意されたい。参考のために，これらの命題を書いておこう：

<u>命題</u>(2.6)　Aをネター整域，xをAの非零元とする。いま，

a)　AはxA-進位相で（分離）完備，かつ，

b)　任意のxAの随伴素イデアル$\mathfrak{p}$について，$A/\mathfrak{p}$が日本環となる，

ならば，　A自身も，日本環。

<u>定理</u>(2.7)（ハインツァーの定理）　Aをネター整域，KをAの商体，LをKの有限次代数拡大とする。いま，クルル環Bで，$A \subseteq B \subseteq L$となれば，B自身も，ネター環。

また，マローの定理（定理(2.1)）は，半局所環については，次のようにも述べられる：

半局所環Aの形式的ファイバーが，幾何学的被約（geometrically reduced ── 以後，ネター環で，その（任意の）素イデアルにおける局所環の形式的ファイバーが，幾何学的被約なものを，N-環，と呼ぼう ──）ならば，Aの（ある）イデアルによる完備化も，また，N-環となる。（なぜなら，

半局所環が、擬幾何学環であることと、N-環であることとは、同値だから…)

マローは、次に、一般のN-環の(ある)イデアルによる完備化も、また、N-環になる、ことを証明しようと、多くの努力を払い、2, 3の十分条件を得ている….

3. ロットハウスの定理.

たしかに、マローの結果(定理(2.1))は、グロタンディエックの問題解決へ、一つの方向を与えた。たとえば、1974年、イタリアの若い環論研究者、バラブレガは、体(又は、ある種のエクセレント・デデキント整域)上有限生成環のイデアルによる完備化は、いつも、エクセレント環となる、という、松村、野村ら、名古屋大学グループや、セネガルのセイギらによって、主に、ヤコビアン判定法を用い、部分的に解かれていた命題が、一般に、正しいことを、マローの結果と、ヤコビアン判定法とを、うまく併用し、正則点の集合が、(ザリスキ位相で)いつも、(空でない)開集合を含むことを、まず、示し、かつ、形式的ファイバーの幾何学的正則性(geometrically regular — 以後、ネター環で、その(任意の)素イデアルにおける局

所環の形式的ファイバーが幾何学的正則となるものを、G-環と呼ぼう＿）も、正則点の集合が（空でない）開集合となることと、ある自明でないイデアルについて完備であること、より従うことも示し、証明した。このパラグレガの注意により、たとえば、擬幾何学(半)局所環が、いつも、正則点の集合を、開集合として含むなら、グロタンディエックの問題(1.1)，(1.2)は、(擬)エクセレント(半)局所環に関して、肯定的に解かれることも、明らかになった。しかし、ドイツの若い女性数学者、ロットハウスは、まず、擬幾何学局所環で、エクセレント環とならない例を構成し(1975年)、更に、擬幾何学局所環で、その正則点の集合が（空でない）開集合を含まない例も作りあげた(1978年)。これらの例は、エクセレント環（または、G-環）と、擬幾何学環とのへだたりの大きさを教えてくれ、問題(1.1)，(1.2)へのアプローチの方法を、根本からまえ直さざるをえなくした。

そして、ついに、1978年、またもや、ロットハウスは、(擬)エクセレント半局所環に関する、次の定理を得た：

定理(3.1)（ロットハウスの定理）　Aを半局所環、IをAのイデアルとする。いま、

a) AはI-進位相で(分離)完備，かつ，

b) A/I は，(擬)エクセレント環となる

ならば，A自身も，(擬)エクセレント環となる。

この定理(3.1)の証明の中で，ロットハウスは，次のアンドレの定理を，上手に使っている：

定理(3.2)（アンドレの定理） $(A, \mathfrak{m})$, $(B, \mathfrak{n})$ を局所環，φを，AからBへの(局所)環準同型とする。いま，

a) Aは，(擬)エクセレント環，かつ，

b) φは形式的平滑，

ならば，φの，Aの各素イデアルにおけるファイバーは，幾何学的正則となる。

なお，アンドレの定理の条件b)は，次の２条件と同値となる。

b-1) φは平坦，かつ，

b-2) Aの極大イデアルにおけるファイバー，$\bar{\varphi}: A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m}B$ は，幾何学的正則。

この定理(3.2)のアンドレ（および，セイグ）による証明法は，完備局所環の構造定理，完備局所環上の完備形式的平滑局所環の構造定理，ヤコビアン判定法，等，完備局所環の特質を，最大限に活用したものであることにも

注意しよう。

ここでは、少し長くなるので、ロットハウスの定理の証明の具体的内容には、ふれないが、そこで用いられるのと、ほぼ同じ証明法と、アンドレの定理の拡張とが、N-環、および、Z-環（—ネター環で、（任意の）素イデアルにおける局所環の、形式的ファイバーが、幾何学的正規（geometrically normal）になるものを、Z-環と呼ぼう—）の場合にも適用でき、結局、半局所環については、グロタンディエックの問題(1.1), (1.2)とも、N-環、Z-環、G-環すべてについて、肯定的に解くことができる。つまり：

<u>定理</u>(3.3)（マロー、ロットハウス）　Aを半局所環、IをAのイデアルとする。いま、

a)　Aは、I-進位相で、(分離)完備、かつ、

b)　A/I は、N-環（または、Z-環、G-環）となる、

ならば、A自身も、N-環（または、Z-環、G-環）となる。

4.　反例。

マロー、ロットハウスの結果以降、(半局所環とは限らない）一般のネター環についてのグロタンディエックの問題(1.1), (1.2)への、解答を求めようと、多くの努力がなさ

れ．次のような十分条件も．得られた：

<u>命題</u>(4.1)　Aをネター環．IをAのイデアルとする。いま．

a)　Aは．I-進位相で．(分離)完備．

b)　A/Iは．G-環(または．Z-環．N-環)．かつ．

c)　Aの任意の極大イデアル m および．IA_m を含む．A_m の任意のイデアル J とについて．J による．m での形式的ストーク．$A_{\{m\}} = \varinjlim_{f \notin m} A_f^*$ (ただし．A_f^* は．A_f の J-進位相による．完備化)．が．G-環(または．Z-環．N-環)となる．

ならば．A自身も．G-環(または．Z-環．N-環)となる。

もっと素朴に．ネター環Aと．そのイデアルIとについて．もしも．AがI-進位相で．(分離)完備なら．Iと共通部分をもたない．Aの積閉集合Sをとれば．Aから．A_S の I_S-進位相による完備化への自然な準同型は．いつも．正則写像になっているのでは．とも予想されていた。

しかし．残念なことに．1979年．一般のネター環では．グロタンディエックの問題(1.1)．(1.2)のどちらも成立しない．例が．偶然みつかり．否定的に解かれた。

我々は、次の様な例をみつけた：

例(4.2)　1次元ネター整域Aで、G-環ではあるが、A上1変数巾級数環 A[[X]] は、N-環にさえならないものがある。

この例は、また：

・1次元局所整域で、その完備化が、自明でない巾零元をもつもの。

・2次元局所整域で、その(商体における)整閉包と、元の整域との中間環として、非ネターなものをもつ、もの。

にも、なっている。

さらに、我々の構成法は、次のような例も与える：

・2次元局所整閉整域で、その完備化が、自明でない、巾零元をもつもの。

・3次元局所整域で、その(商体における)整閉包が、ネター環とは、ならないもの。

(これらの例は、整閉性を示すのが、少々長くなるが、作り方は、永田の例より、はるかに単純、かつ、簡単であることに注意しておこう。)

このように、グロタンディエックの問題(1.1),(1.2)は、必ずしも、一般には、成立しないことが、わかってきた。

しかし、一般のネター環においても、たとえば、マローの定理(定理(2.1))のように、正規点の集合が(空でない)開集合を含む、等、大域的(?)条件をつけ加えれば、うまくいく場合もある。もちろん、エクセレント環の場合も、正則点の集合が(空でない)開集合を含めば、肯定的であることは、すでに注意した。また、Z-環についても、正則点の集合が(空でない)開集合を含めば、問題(1.1),(1.2)は、肯定的に解かれることも、知られている。(cf. 広中の補題.)。

また、G-環, Z-環について、問題(1.1),(1.2)を考えるとき、擬幾何学環(または、N-環)の仮定のもとでは肯定的に解けるのか、どうか、考えてみる価値は、多いにあろう。

5. 現在.

さて、1980年、ロットハウスは、次の定理も得た:

定理(5.1)(ロットハウス). Aをネター環、IをAのイデアルとする。いま、

a) $\dim A < \infty$.

b) Aは強鎖状(universally catenarian).

c) Aは標数0の体を含む.

d) Aは. I-進位相で. (分離)完備. かつ.

e) A/I は. (擬)エクセレント環となる.

ならば. A自身も. エクセレント環となる。

この定理の証明には. 広中の特異点解消定理が. 本質的に. 用いられている。また. 一般に, エクセレント(局所)環について. 特異点解消問題が. 肯定的に解かれれば. 直ちに. 上の定理は. 一般の場合に拡張される. ことも. 示されている。定理の証明の詳細は. もちろん. 省くが. 次の3つの命題が. 大事な役をはたしていることに注意しておこう:

<u>命題</u>(5.2)(cf. 広中の特異点解消定理) Aをネター整域. $\mathfrak{p}$をAの(指定された)素イデアル. とする。いま.

a) Aは. 強鎖状.

b) Aは標数0の体を含む.

c) $A_{\mathfrak{p}}$は. エクセレント局所環となる.

ならば. 固有. 双有理写像 $X \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Spec}(A)$ で. $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ が Xの正則点の集合に含まれる. ものがある。

<u>命題</u>(5.3) Aをネター整域, IをAの(ジャコブソン根基に含まれる)イデアル, また, $\mathfrak{p}$をIを含むAの素イデ

アルとする。いま．

a) Aは．強鎖状．

b) Aは．標数0の体を含む．

c) A/I は．(擬)エクセレント環．

d) Aから．(AのIによる完備化) A^* への自然な写像は．正則．

e) $A_{\mathfrak{p}}$ は．エクセレント局所環．かつ．

f) $\mathfrak{p}$ に含まれない．任意のイデアル J について．AのJ-進位相による完備化が．(いつも)．エクセレント環．となる．

ならば、Aの正則点の集合は．(空でない)開集合を含む。

<u>命題</u>(5.4)　Aをネター整域．$\mathfrak{p}$ をAの素イデアルとする。いま．

a) $\mathfrak{p}$ = (Aのジャコブソン根基)．

b) $\dim A < \infty$．

c) Aは．強鎖状．

d) Aは．$\mathfrak{p}$-進位相で．(分離)完備．

e) $A/\mathfrak{p}$ は．(擬)エクセレント環．かつ．

f) $\mathfrak{p}$ に含まれない．任意のイデアル J について．AのJ-進位相による完備化が．(いつも)．エクセレント環．

となるならば、$A_{\mathfrak{p}}$ は、エクセレント局所環。

上の 3つの命題のうち、最後の命題(5.4)の証明が一番重要、かつ、困難(ただし、広中の特異点解消定理をのぞいて)であることは、明らかであろう。残念ながら、この命題(5.4)の証明の具体的方法(技術)についても、紹介するだけの余裕がないが、マローの定理(定理(2.1))、半局所環の場合のロットハウスの定理(定理(3.1))、および、補題(2.5)を、十分に、活用していることを付記しておこう。(この命題(5.4)には、広中の定理は、本質的には、使われない。)

このように、現時点では、一応、エクセレント環の場合にも、問題(1.1)、(1.2)は、ほぼ、全面的に肯定的に解けそうな様子を示している。しかし、正標数(および、体を含まない場合)の特異点解消問題のムツカシサを、考えると、道は、まだ、まだ、遠い……もっとも、他のルートを通って、速く、確実に、目的地へ、たどり着く、方法があるのでは….,そのための、新しいアイデアに満ちあふれた、解決法がみつかるのでは… という気もしてくるのだけれど…..

24-12-80.

J. Nishimura

ON INVARIANTS OF UNIPOTENT GROUPS

慶大・工　中島晴久

§1. Introduction. Vを標数$p(\geqq 0)$の体k上の有限次元vector空間，Gを$GL(V)$の部分群とする。GはVの対称多元環$k[V]$に自然に作用するがこのGの作用で不変な多項式全体の作る$k[V]$の部分環を$k[V]^G$で表わす。例えばGが有限群のとき$k[V]^G$はk上のaffine環である（E. Noether）。さて次の問題を考えよう。

Problem 1.1. $k[V]^G$はいつ多項式環となるか？

これに対して，

Theorem 1.2 (Chevalley-Serre, cf. [2,3,16]). Gが有限群で$|G|$がkのunitならば$k[V]^G$が多項式環となるにはGが$GL(V)$のpseudo-reflectionで生成されることが必要十分である。

Theorem 1.3 (Serre, cf. [2,16]). 一般にGが有限群で$k[V]^G$が多項式環ならばGはpseudo-reflectionで生成される。

が知られている。(1.3)はpurity of branch lociから得られるが，無限群Gに関してはたとえ標数0の代数閉体

上でも成立しない。

この稿では(1.1)を、無限群についてとり扱う試みに触れ、有限 p-群に対して解決する。もちろん有限 p-群でさえ、(1.1)の modular 表現下での研究の方法はきわめて複雑であり、ここではその方針を述べることしかできない。詳細は[6,7,8]を参照されたい。

§2. Groups generated by axial elements. この section では基礎体の標数は0であるとし、$GL(V)$の部分群Gに関して"有限群"という仮定は設定しない。Chevalley の定理は最近 Wagner により一般化された。

Theorem 2.1 (Wagner, cf. [17]). Gが axial elements で生成されるならば$k[V]^G$は多項式環である。

以下のごとく Chevalley の証明を見直すと自然にこの定理が得られよう。

(2.2) $g_i \in k[V]^G$, $h_i \in k[V]$ $(1 \leq i \leq m)$を homogeneous polynomial とし、h_iがすべて0ということはあり得ないものとする。もし$g_1h_1 + \cdots\cdots + g_mh_m = 0$が成り立つならばいずれかが0でない homogeneous polynomial h_i'が、$k[V]^G$の中に存在して、$g_1h_1' + \cdots\cdots + g_mh_m' = 0$と $\deg h_i$

$\geq \deg h_i'$ $(1 \leq i \leq m)$ をみたす。

$\max\{\deg h_i : 1 \leq i \leq m\}$ に関する帰納法を用いると (2.2) は容易に示される。

(2.3) $f_i \in k[V]^G$ $(1 \leq i \leq d)$ を homogeneous polynomial とし、$\deg f_i \leq \deg f_{i+1}$ $(1 \leq i < d)$ となっているものとしよう。$A = k[f_1, \cdots, f_d]$ とおき t を $\deg f_d$ 以上の整数とする。更に $k[V]^G$ の degree が t よりも小なる全ての homogeneous polynomial が A に含まれるものと仮定する。もしも T が $k[V]^G$ の degree t の homogeneous polynomial で A 上代数的ならば T は A の元である。

Proof. U_i $(1 \leq i \leq k)$ を A に入る homogeneous polynomial で $U_0 \neq 0$ と $U_0T^k + U_1T^{k-1} + \cdots + U_k = 0$ をみたすとする。かような表示を与える k の中で minimal なものをとり、又、この固定された k に対し、$\deg U_0$ が minimal になるように U_j をとり直す。$\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ を V の k-basis とする。明らかに $\frac{\partial}{\partial X_i}$ を作用させて次を得る;

(2.3.1) $\frac{\partial U_0}{\partial X_i}T^k + \left(kU_0\frac{\partial T}{\partial X_i} + \frac{\partial U_1}{\partial X_i}\right)T^{k-1} + \cdots + \left(U_{k-1}\frac{\partial T}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i}\right) = 0$,

(2.3.2) $\frac{\partial U_j}{\partial X_i} = \frac{\partial U_j}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial X_i} + \cdots + \frac{\partial U_j}{\partial f_d}\frac{\partial f_d}{\partial X_i}$.

$\frac{\partial U_j}{\partial f_i} \in A$ で $\frac{\partial f_j}{\partial X_i}$, $\frac{\partial T}{\partial X_i}$ は degree $< t$ なる homogeneous polynomial である。ある $1 \leq i_0 \leq n$ について (2.3.1) の T^j の係数

のいずれかが non-zero になるとしよう。しからば (2.2) を適用できて, $\{U_i\}$ のとり方に矛盾することがわかる。それ故に (2.3.1) の T^d の係数は 0 である。すなわち

$$(2.3.3)\quad \frac{\partial U_0}{\partial X_i}=0 \quad (1\leqq i\leqq n)$$

$$(2.3.4)\quad \ell U_0\frac{\partial T}{\partial X_i}+\frac{\partial U_1}{\partial X_i}=0 \quad (1\leqq i\leqq n).$$

(2.3.3) は $U_0\in k$ を意味し, T は A 上 integral である。ところが自明な関係

$$(2.3.5)\quad \sum_{1\leqq i\leqq n}\left(\ell U_0\frac{\partial T}{\partial X_i}+\frac{\partial U_1}{\partial X_i}\right)X_i=\ell t U_0T+U_1\cdot \deg U_1$$

から $\ell t U_0 T+U_1\cdot\deg U_1=0$ を得, (2.3) が示された。

(2.4) ここで (2.1) を証明する。$a=\mathrm{trans.deg}_k\, k[V]^G$ とおき, homogeneous polynomial f_{i+1} $(i<a)$ を $k[V]^G$ から, $A_i=k[f_1,\cdots,f_i]$ 上 transcendental でしかもそのようなものの中から degree が最小となるものを選ぶ。もちろん $f_1,\cdots,f_a$ は k 上代数的に独立で degree は順次大きくなる。もしも $A_a\subsetneqq k[V]^G$ ならば $T\notin A_a$ なる $k[V]^G$ の homogeneous polynomial で degree が minimal なものをとる。$\deg T=t$ とおき, $t\geqq \deg f_a$ ならば (2.3) を用いて $T\in A_a$ が出る。それ故ある $1\leqq j\leqq a$ が存在して $\deg f_{j-1}\leqq t<\deg f_j$ となる。このとき T は A_{j-1} 上 algebraic でしかも degree $<t$ なる $k[V]^G$ の homogeneous polynomial は A_{j-1}

に属する。従って(2.3)から $T\in A_{j-1}$ となり矛盾を得る。つまり $k[V]^G = k[f_1,\cdots,f_n]$ である。

なお(2.1)は[11]において拡張されるであろう([8]も参照)。

simply connectedな代数群について(1.1)が調べられつつある(Schwarz)。とりわけ Luna, Vinberg, Schwarz らの reductive な代数群の orbit space に関する研究が重要である(e.g. [5, 15, 14])。

§3. Elementary abelian p-groups. 以降、簡単のため $k = \mathbb{F}_p$ とする。

V/V^G が non-zero trivial kG-module となるような G と G-faithful kG-module V の pair を (V, G) で表わし couple と呼ぶ。(V, G) の次元を $\dim V/V^G$ で定義する。H が G の subgroup で U が V の kH-submodule のときに (U, H) は (V, G) の subcouple であると言われる。もしも (V, G) の subcouple (V_i, G_i) $(1\leq i\leq m)$ が $G = \bigoplus_{1\leq i\leq m} G_i$, $V^G \subsetneqq V_i \subseteqq V^{G_j}$ $(1\leq i, j\leq m\ ;\ i\neq j)$, $V/V^G \left(= \sum_{1\leq i\leq m} V_i/V^G\right) = \bigoplus_{1\leq i\leq m} V_i/V^G$ をみたすならば (V, G) は (V_i, G_i) $(1\leq i\leq m)$ に分解するという。もちろん decomposable あるいは indecomposable な couple はこの分解の概念に従って定められる。

reducible な群 G について (1.1) を考察するに際し、次の定理が基本的な役割を演じる。

Theorem 3.1 (cf. [6]). (V, G) を indecomposable couple とせよ。このとき $k[V]^G$ が多項式環となるには $\dim(V, G) = 1$ となることが必要十分である。

次の特殊な場合を考える；(V, G) が1次元の subcouple $(V^G \oplus W_i, H_i)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ に分解するような subcouple (V, H) を含むとせよ。ただし $H = \mathrm{Ker}(G \to GL(V/W))$ で W は V^G の余次元 1 の subspace である。又 $|H_i| = p^t$ $(1 \leqq i \leqq m)$ で $m \geqq 2$ とする。Z, T_i, X_j を $V^G = W \oplus kZ$, $W = \bigoplus_{1 \leqq i \leqq d} kT_i$ そして $kX_j = W_j$ をみたすように定義する。$F_i = F_i(X_i)$ を $\prod_{\sigma \in H_i} X_i^{\sigma}$ で定める H_i の invariant とする。又、任意の integer $n \geqq 0$ について、$c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$ ならば $\|c\| = \sum_{1 \leqq i \leqq n} c_i$ とおき、e_i $(1 \leqq i \leqq n)$ を $\mathbb{Z}^n$ の standard basis とする。更に $G \setminus H$ の中に $\lambda_{ij} = (\sigma_j - 1)X_i \bmod W / Z \bmod W$ とおくとき $(\lambda_{ij}) \in GL_m(k)$ となるような pseudo-reflection σ_j $(1 \leqq j \leqq m)$ が存在すると仮定する。

(3.2) $\Gamma = \{ c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{Z}^m : 0 \leqq c_i < p,\ \|c\| > 1 \}$

とおき、$\bigoplus_{c \in \Gamma} k[V]^G F_1^{c_1} \cdots F_m^{c_m}$ の中から g_1 をとる。$(\sigma_j - 1) g_2 \in k[V]^G$ $(1 \leqq j \leqq m)$ をみたす $g_2 \in k[V]$ について $g_1 + g_2 \in k[V]^G$

が成り立つならば $g_1=0$ である。

$I=\{1,2,\dots,m\}$ の元 i,j にかんして $\sum_{\sigma\in H_i}(1-\sigma)(V^G\oplus W_i)$ $=\sum_{\sigma\in H_j}(1-\sigma)(V^G\oplus W_j)$ が成立するときに $i\sim j$ と書き i と j とは equivalent であると言おう。この equivalence class を I_α $(1\leqq\alpha\leqq\nu)$ で表わす。I_α に対して I の subset J_α で、$|I_\alpha|$ $=|J_\alpha|$ かつ小行列 $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in I_\alpha\times J_\alpha}$ が non-singular となるようなものが存在する。$(\lambda_{ij})_{(i,j)\in I_\alpha\times J_\alpha}$ が monomial であると仮定してよい。次を示したい。

Proposition 3.3. $k[V]^G$ が多項式環ならば (V,G) は decomposable である。

従って $k[V]^G$ が多項式環であるとする。もちろん $k[V]^H$ も多項式環であり $k[V]^G/\langle V^G\rangle^G\cong(k[V]^H/\langle W\rangle^H)^{G/H}/Z(k[W]^H/\langle W\rangle^H)^{G/H}$ となる。(3.2) より、適当な $h_{ij}\in k[V^G]$ をとって $f_i=F_i^p+\sum_{1\leqq j\leqq m}F_jh_{ij}$ $(1\leqq i\leqq m)$ とおくと f_i は homogeneous polynomial で $k[V]^G=k[V^G][f_1,\dots,f_m]$ をみたす。$h_{ij}=0$ $(i\neq j)$ 言うのであるが、$i=1$ の場合だけとり扱えば十分であろう。T_i $(1\leqq i\leqq \lambda)$ が $\sum_{\sigma\in H_1}(\sigma-1)(V^G\oplus W_1)$ を張るものとし、$Z_j=Z+\sum_{1\leqq u\leqq d}b_{ju}T_u\in(\sigma_j-1)V$ となる $b_{ju}\in k$ を選ぶ。$c\in\mathbb{N}^d$, と $g\in k[V^G]_{(p^{t+1})}$ について g を T_i $(1\leqq i\leqq d)$ と Z の polynomial とみなすときの $T_1^{c_1}T_2^{c_2}\cdots T_d^{c_d}Z^{p^{t+1}-\|c\|}$ の係数を $\Phi_c(g)$ で

表わす（$\mathbb{N}$は non-negative integer の集合）。時に $a_i(c)=$
$\Phi_c(Z^{p^t}h_{1i})$ とおく。

(3.4) c を $\mathbb{N}^d$ の元で $\|c\|<{}^t$ なるものとする。このとき．

$$a_i(c)=\begin{cases}-1 & \text{もし } i=1 \text{ で } c=0 \text{ ならば} \\ 0 & \text{その他。}\end{cases}$$

(3.5) L を $\underbrace{\{0\}\times\cdots\times\{0\}}_{t\text{回}}\times\mathbb{N}^{d-t}$ の元 c で

$$\|c\|=\omega_0 p^t+\sum_{1\leqq i\leqq t}\omega_i(p^t-p^{i-1})\neq 0$$

をみたすもの全体からなる部分集合とする。ただし $\omega_i\in\mathbb{Z}$，$\omega_i\leqq 0$ $(0\leqq i\leqq t-1)$ で $0<\omega_t<p$ と仮定する。$c\in L$ ならば $a_j(c)=0$ $(1\leqq j\leqq m)$ である。

Proof. $c=(c_1,\cdots,c_d)\in L$ を $\|c\|>\|c'\|$ なる $c'\in L$ に対しては $a_j(c')=0$ $(1\leqq j\leqq m)$ をみたすような元とする。$p^{t+1}>\|c\|$ および $(c_1,\cdots,c_t)=0$ から $\Phi_c(F_1((1-\sigma_j)x_1)^p)=0$ と $\Phi_c(F_1(Z)h_{11})=a_1(c)$ が出る。一方 $F_i(Z)=Z^{p^t}+\sum_{1\leqq j\leqq t}F_{ij}Z^{p^{t-j}}$ と $F_{ij}\in k[[T]]$ を用いて表現できるから．$\beta_i(\cdot)\in k$ により

$$\Phi_c(F_i(Z)h_{1i})-a_i(c)=\beta_i(0)a_i(0)+\sum_{\substack{c'\in L\\ \|c\|>\|c'\|}}\beta_i(c')a_i(c')$$

が $1<i\leqq m$ について成立する。(3.4)より．

$$\Phi_c((F_i(Z)+\sum_{1\leqq u\leqq d}\theta_{ju}F_i(T_u))h_{1i})=a_i(c)\text{。}$$

つまり $\Phi_c(F_1((1-\sigma_j)x_1)^p)=\sum_{1\leqq i\leqq m}\Phi_c(F_i((\sigma_j-1)x_i)h_{1i})$ は $\sum_{1\leqq i\leqq m}\lambda_{ij}a_i(c)=0$ $(1\leqq j\leqq m)$ に帰着し．それ故 $a_i(c)=0$

$(1 \leqq i \leqq m)$ である。

(3.6) $d > t$, $I_{\lambda_0} \ni 1$, $I \neq I_{\lambda_0}$ ならば $i \in I - I_{\lambda_0}$ に対して $a_i(p^t e_j) = 0$ $(t+1 \leqq j \leqq d)$ が成り立つ。

Proof. $\zeta_v = \{v p^t - (v-1) p^{t-1}\} e_{t+1} \in \mathbb{Z}^d$ $(1 \leqq v \leqq p)$, $a_i(\zeta_p) = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$ とおく。$u \neq t+1$ では $\Phi_{\zeta_v}(A_i(T_u) h_{1i}) = 0$ であるから

$$\Phi_{\zeta_v}\Big(\sum_{1 \leqq i \leqq m} A_i((\sigma_j - 1) X_i) h_{1i}\Big) = \sum_{1 \leqq i \leqq m} \lambda_{ij} \Phi_{\zeta_v}(A_i(Z) h_{1i})$$

$$+ \sum_{i \in \tilde{I}} \lambda_{ij} b_{j t+1} \Phi_{\zeta_v}(A_i(T_{t+1}) h_{1i})$$

$$= \sum_{i \in \tilde{I}} \lambda_{ij} \{a_i(\zeta_v) + b_{j t+1} a_i((v-1)$$

$$(p^t - p^{t-1}) e_{t+1}) + \sum_{i \in I - \tilde{I}} \lambda_{ij} \{a_i(\zeta_v) - a_i(\zeta_{v-1})\}.$$

ここで $\tilde{I} = \{i : \bigoplus_{u \neq t+1} k T_u \geqq \sum_{\sigma \in H_i} (\sigma - 1)(\upsilon^q \oplus \varpi_i)\}$。しかし (3.5) から $a_i((v-1)(p^t - p^{t-1}) e_{t+1}) = 0$ $(2 \leqq v \leqq p)$ である。それ故. $2 \leqq v \leqq p$, $1 \leqq j \leqq m$ について.

$$(0 =) \Phi_{\zeta_v}(A_1((1 - \sigma_j) X_1)^p) = \Phi_{\zeta_v}\Big(\sum_{1 \leqq i \leqq m} A_i((\sigma_j - 1) X_i) h_{1i}\Big)$$

$$= \sum_{i \in \tilde{I}} \lambda_{ij} a_i(\zeta_v) + \sum_{i \in I \setminus \tilde{I}} \lambda_{ij} \{a_i(\zeta_v) - a_i(\zeta_{v-1})\}$$

が出るが、これより $a_i(p^t e_{t+1}) = 0$ $(i \in I \setminus \tilde{I})$ である。$(I \setminus I_{\lambda_0}) \cap \tilde{I}$ が non-empty ならば i_0 をとる。$\bigoplus_{u \neq t+2} k T_u \not\geqq \sum_{\sigma \in H_{i_0}} (\sigma - 1)(\upsilon^q \oplus \varpi_{i_0})$ と仮定しておく. $\zeta'_v = p^t e_{t+1} + (v-1)(p^t - p^{t-1}) e_{t+2}$ $(1 \leqq v \leqq p)$ とおく。明らかに

$$\Phi_{\zeta'_v}\Big(\sum_{1 \leqq i \leqq m} A_i((\sigma_j - 1) X_i) h_{1i}\Big) = \sum_{1 \leqq i \leqq m} \lambda_{ij} \Big\{\Phi_{\zeta'_v}(A_i(Z) h_{1i}) + \sum_{u = t+1, t+2} b_{ju} \Phi_{\zeta'_v}(A_i(T_u) h_{1i})\Big\}$$

を $2 \leqq \nu \leqq p$ について得る。一方、$\Phi_{\zeta'_\nu}(\bar{f}_i(T_u)h_{1i})$ $(u = s+1, s+2)$

は $c = (0, \cdots, 0, c_{s+1}, \cdots, c_d)$, $\|c\| = (\nu-1)(p^s - p^{s-1})$ なる $a_i(c)$

の linear combination であるから

$$\Phi_{\zeta'_\nu}(\bar{f}_{i_0}(Z)h_{1i_0}) = a_{i_0}(\zeta'_\nu) - a_{i_0}(\zeta'_{\nu-1}) \quad (2 \leqq \nu \leqq p).$$

しかし $\Phi_{\zeta'_\nu}(\sum_{1\leqq i\leqq m} \bar{f}_i((\alpha_j - 1)X_i)h_{1i}) = \Phi_{\zeta'_\nu}(\bar{f}_1((1-\alpha_j)X_1)^p) = 0$ $(2$

$\leqq \nu \leqq p$; $1 \leqq j \leqq m)$ であり、

$$a_{i_0}(p^s e_{s+1}) = a_{i_0}(\zeta'_1) = \cdots\cdots = a_{i_0}(\zeta'_p) = 0$$

を得る。残りの主張も同様に示される。

(3.7) s_0 を $I_{s_0} \ni 1$ なる index とし、$\tau_j = \alpha_j \alpha_{j_0}^{n_j}$ $(1 \leqq j \leqq m)$

とおく。ただし $j_0 \in J_{s_0}$, $n_j \in \mathbb{N}$ で $\lambda_{1j_0} \neq 0$, $n_j \lambda_{1j_0} = -\lambda_{1j}$

をみたすとする。

$$\begin{aligned}\Phi_{p^s e_i}(\bar{f}_u((\alpha_j - 1)X_u)h_{1u}) &= \lambda_{uj}\,\Phi_{p^s e_i}(\bar{f}_u(Z + \sum_{1\leqq \nu\leqq d} b_{j\nu}T_\nu)h_{1u}) \\ &= \lambda_{uj}\,a_u(p^s e_i)\end{aligned}$$

が $2 \leqq u \leqq m$ について成り立ち、$s+1 \leqq i \leqq d$ ならば (3.6) から

$$\begin{aligned}(0=)\,\Phi_{p^s e_i}(\bar{f}_1((1-\alpha_j)X_1)^p) &= \sum_{1\leqq u\leqq m} \Phi_{p^s e_i}(\bar{f}_i((\alpha_j - 1)X_u)h_{1u}) \\ &= \lambda_{1j}\{a_1(p^s e_i) + b_{ji}\,a_1(0)\} \\ &\quad + \sum_{u\in I_{s_0}-\{1\}} \lambda_{uj}\,a_u(p^s e_i).\end{aligned}$$

$(\lambda_{u\nu})_{(u,\nu)\in I_{s_0}\times J_{s_0}}$ が monomial matrix であるから、$a_j(p^s e_i) =$

0 $(s+1 \leqq i \leqq d$; $2 \leqq j \leqq m)$ となる。だから

$$a_1(p^s e_i) = -b_{ji}\,a_1(0) = b_{ji} \quad (s+1 \leqq i \leqq d)$$

が $\lambda_{1j} \neq 0$ なる $1 \leqq j \leqq m$ について得られ．τ_j の定義より $(\tau_j - 1)X_1$ は $\bigoplus_{1 \leqq i \leqq t} kT_i$ $(1 \leqq j \leqq m)$ に含まれる。$H_1(T_i) = 0$ $(1 \leqq i \leqq t)$ を用いて，我々は

$$\tau_j(f_1) = \tau_j(H_1)^p + \sum_{1 \leqq i \leqq m} \tau_j(H_i) h_{1i}$$

$$= H_1^p + H_1 h_{11} + \sum_{2 \leqq j \leqq m} \tau_j(H_i) h_{1i}$$

を知っているから結局，ある $k[\varpi]$ の homogeneous polynomial g_{ij} に対して

$$(0 =)(\tau_j - 1) f_1 = \sum_{2 \leqq i \leqq m} (c_{ij} H_i(Z) + g_{ij}) h_{1i}$$

が成立する。ただし $c_{ij} = (\tau_j - 1) X_i \bmod \varpi / Z \bmod \varpi$ とおく。すると，$H_i(Z) \equiv Z^{p^*} \bmod \langle \varpi \rangle$ 故に，この system は $h_{1i} = 0$ $(2 \leqq i \leqq m)$ を導く。つまり $i \neq j$ ならば $h_{ij} = 0$ である。従って G は $k[V]^{G_1} = k[V^G][f_1, X_2, X_3, \cdots, X_m]$, $k[V]^{G_2} = k[V^G][X_1, f_2, f_3, \cdots, f_m]$ なる部分群 G_1, G_2 を有する。もちろん (V, G) は $(V^G \oplus kX_1, G_1)$ と $(V^G \oplus \bigoplus_{2 \leqq i \leqq m} kX_i, G_2)$ に分解するので (3.3) が示された。

(3.1) は invariants にかんする微妙な考察を重ねて，(3.3) を用い証明される。

couple の invariant theory は群の cohomology についての検討を要求されない (1.1) のような問題の攻略にあたってきわめて powerful な道具と理論のあるべき姿を提

供する。しかし $k[V]^G$ がもっと弱い環である場合、couple の議論は標数 $p>0$ の体上の invariant theory の中でも特異な位置を占め、美しい展開が期待される (cf.[13])。

§4. Coregular representations of p-groups. 特に断わらない限り G は $GL(V)$ の p-subgroup であるものとしよう。

Theorem 4.1 (cf. [7, 9]). V と G の pair について次の条件は同値である。

(1) $k[V]^G$ は多項式環である。

(2) $\bigoplus_{1\leq i\leq j} kx_i$ $(1\leq j\leq n)$ が V の kG-submodule となるような V の basis $\{x_1, \cdots, x_n\}$ が存在して、しかも

$$\prod_{1\leq i\leq n} |Gx_i| = |G|$$

なる等式をみたす。

G が $GL(V)$ の p-Sylow subgroup であるときには Bertin により $k[V]^G$ が polynomial ring になることが知られていた (cf. [1])。一般に G が pseudo-reflection で生成された p-群であっても $k[V]^G$ は Buchsbaum 環にさえならない (cf. [10])。

(4.2) W を V の kG-submodule とする。$k[V]^G$ が多項式環ならば $k[V]^G/\langle W\rangle^G$ もまた k 上の多項式環である。

さて、$\{x_1, \cdots, x_n\}$ を、$\bigoplus_{1\leq i\leq j} kx_i$ $(1\leq j\leq n)$ が V の kG-

submoduleとなるような basis とする。この basis について次の2つの命題が得られる。

Proposition 4.3. 次の条件は同値である。

(1) $\prod_{1\leqq i\leqq n} |GX_i| = |G|$.

(2) $GX_i = G_i X_i$, $G_i X_j = \{X_j\}$ $(i \neq j)$ となるような G の subgroups G_i $(1\leqq i\leqq n)$ が存在する。

(3) $k[V]^G = k[f_1, \cdots, f_n]$ で f_i が $k[V]$ において X_i により割り切れるような homogeneous polynomial $f_i \in k[X_1, \cdots, X_i]$ が存在する。

(2) ⇒ (1) ⇒ (3) は易しい。(3) ⇒ (2) において Serre の結果 (1.3) が用いられる。

Proposition 4.4. 次の条件は同値である。

(1) $k[V]^G$ は多項式環である。

(2) $S \cap \sum_{1\leqq i\leqq j} k[V]X_i = \sum_{1\leqq i\leqq j} Sf_i$ $(1\leqq j\leqq n)$ となるような $k[V]^G$ の n 次元の graded polynomial subalgebra $S = k[f_1, \cdots, f_n]$ が存在する。ただし f_i は homogeneous polynomial である。

さて次の記号と用語を適用する: $V_0 = V$ とおき整数 $j \geqq 1$ に対し $V^j = V_{j-1}^G$, $V_j = V_{j-1}/V^j$ とおく。G は unipotent である故、十分大なる j について $V_j = V^j = 0$ である。$\underline{X} = \{X_i : i \in I\}$ を V の k-basis とする。$\underline{X}$ が G に対する k-basis が

であるとは $V^j \neq 0$ なる各 $j(\geq 1)$ について $\underline{X}$ の subset で V_{j-1} における canonical image が V^j の basis となるようなものが存在するときにいう。

(4.1) は次のより強い結果の系として得られる。

Theorem 4.5. V と G の pair に関して次の条件は同値である。

(1) $k[V]^G$ は多項式環である。

(2) G にかんする V の k-basis $\{X_i : i \in I\}$ が存在して、

$$\prod_{i \in I} |GX_i| = |G|$$

をみたす。

この定理の (1) ⇒ (2) を示せば十分である。従って $k[V]^G$ が多項式環であると仮定し (2) の主張を $|G|$ にかんする帰納法で示すことになる。

$G = \{1\}$ なら自明、$G \neq \{1\}$ とする。$m = \max\{j : V^j \neq 0\}$ とおき、$\dim V^{m-1}/M = 1$ となる V^{m-1} の subspace M をとる。H を、G の自然な作用の下で $\varphi_{m-2}^{-1}(M)$ により生成される $k[V]$ の prime ideal の inertia group とせよ。ここに φ_{m-2} は $V \to V_{m-2}$ なる canonical epimorphism である。そのとき、M をとりかえれば $|G| > |H|$ と仮定できる。H は inertia group であるから ramification theory により

$k[V]^H$ も polynomial ring である。それ故，帰納法の仮定を用いて

$$\prod_{i\in I} |HY_i| = |H|$$

をみたすような H にかんする V の k-basis $\{Y_i : i\in I\}$ を得る。一方 (3.1), (4.2), (4.3) 等を用いて次を得る。

Proposition 4.6. もし G にかんする V の k-basis $\{Z_i : i\in I\}$ が

$$\prod_{i\in I} |HZ_i| = |H|$$

をみたすならば

$$\prod_{i\in I} |GZ_i'| = |G|$$

となるような G にかんする V の k-basis $\{Z_i' : i\in I\}$ が存在する。

この主張は見かけ以上に invariant についての考察に深く依存している。その証明でも (3.1) は重要な意味を有する。

(4.5) の証明には結局

$$\prod_{i\in I} |HZ_i| = |H|$$

が成立するような G にかんする V の k-basis $\{Z_i : i\in I\}$ の構成が本質的である。

$$J = \{i\in I : |HY_i| < |HY_{j(i)}| \text{ となる } j(i)\in I \text{ がある}\}$$

とおき更に $U = \bigoplus_{i\in J} kY_i$ とする。U は V の kG-submodule に

なる。(4.4) より $k[U]^G$ は多項式環である。G の U での stabilizer を G_U とすると $|G/G_U| < |G|$ であるから再び帰納法の仮定を用いて

$$\prod_{i\in J} |GZ_i| = |G/G_U|$$

となる G/G_U にかんする U の k-basis $\{Z_i : i\in J\}$ を選べる。明らかに $\{Z_i : i\in J\}$ を含む G にかんする V の k-basis が存在するが我々は次を証明でき、(4.5) の証明が終わる。

Lemma 4.7. Z_i $(i\in I\setminus J)$ を適当にとると

$$\prod_{i\in I\setminus J} |HZ_i| = |H\cap G_U|$$

をみたすような G にかんする V の k-basis $\{Z_i : i\in I\}$ ができる。

(4.7) はきわめて長く複雑な計算の末に示される。

(3.1), (4.5) を利用して、一般の reducible な群 G についての問題 (1.1) の研究を irreducible な群の場合へ帰着する "原理" が証明されるであろう (cf. [12])。ところで irreducible な pseudo-reflection で生成された有限群は root system, Weyl 群の理論を有限体上に拡張して分類されつつあるし、有限個の pattern を除いて (1.1) はすでに検討してある。従って Coxeter [4] 以降 30 年にして代数的に独立な basic invariant の system

を有する有限群の分類が任意の体上で完成するのも近い将来であると言えるような状況になってきた。

References

1. M.-J. Bertin, Sous-anneaux d'invariants d'anneaux de polynomes, C. R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965), 5655-5658.
2. N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chs. 4, 5 et 6, Herman, Paris, 1968.
3. C. Chevalley, Invariants of finite groups generated by reflections, Amer. J. Math., 67 (1955), 778-782.
4. H. S. M. Coxeter, The product of generators of a finite group generated by reflections, Duke Math. J., 18 (1951), 765-782.
5. D. Luna, Slices étales, Bull. Soc. math. France, Mémoire, 33 (1973), 81-105.
6. H. Nakajima, Modular representations of abelian groups with regular rings of invariants, to appear.
7. ———, Modular representations of p-groups with regular rings of invariants, to appear.
8. ———, On Stanley's theorem, to appear.
9. ———, Regular rings of invariants of unipotent groups, to appear.
10. ———, On some invariant subrings of polynomial rings in positive characteristics, to appear.
11. ———, Invariants of groups generated by axial elements, in preparation.
12. ———, A reduction principle of invariant theory in positive characteristics, in preparation.
13. ———, Invariants of finite abelian groups generated

transvections, II, in preparation.

14. È. B. Vinberg, The Weyl group of a graded Lie algebra, Math. USSR Izvestija, 10 (1976), 463-495.

15. G. W. Schwarz, Covering smooth homotopies of orbit spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1977), 1028-1030.

16. J.-P. Serre, Groupes finis d'automorphismes d'anneaux locaux réguliers, Colloq. d'Alg. E. N. S., 1967.

17. A. Wagner, Invariants of groups generated by reflections or transvections, to appear.

Del Pezzo Surface 上の Curve の分類について

（大阪大・吉田忍）

§1. k を標数が任意の代数的閉体とする。Curve および Surface とは次元が 1 および 2 の k 上 projective な scheme のことである。

r を $0 \leq r \leq 8$ なる整数とする。$P_1, \cdots, P_r$ を projective plane $\mathbb{P}^2$ の non-special な r 個の点とする。（i.e., いかなる 3 点も同一直線上になく いかなる 6 点も同一 2 次曲線上にない。）

Morphism $\pi : X(r) \to \mathbb{P}^2$ を，$P_1, \cdots, P_r$ を center とする blowing up とする。$E_1, \cdots E_r$ を π の exceptional curve としそれらの linear equivalent class を $e_1, \cdots, e_r$ とする。L を $\mathbb{P}^2$ の line とし $\pi^* L$ の class を l と書く。

<u>Definition.</u> Surface $X(r)$ を Del Pezzo Surface とよぶ。

<u>Proposition 1.</u> Del Pezzo Surface $X(r)$ について次のことが成り立つ。

(1) $\mathrm{Pic}(X(r)) \cong \mathbb{Z} \cdot l \oplus \mathbb{Z} \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_r$.

これらの intersection pairing は次式で与えられる。

$(l^2)=1$, $(e_i^2)=-1$, $(l\cdot e_i)=0$, $(e_i\cdot e_j)=0$ $(i\neq j)$.

(2) $X(r)$ の canonical divisor を $K(r)$ と書くと

$K(r)\sim -3l+\sum_{i=1}^{r}e_i$.

(3) $X(r)$ 上の effective divisor D を $D\sim al-\sum_{i=1}^{r}b_ie_i$ とおくと D の arithmetic genus は

$$P_a(D)=\frac{1}{2}(a-1)(a-2)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}b_i(b_i-1) .$$

Remark. $X(r)$ の anti-canonical divisor $-K(r)$ は ample である。X を anti-canonical divisor が very ample な nonsingular rational surface とすれば X は $X(r)$ $(r=0,1,\cdots,8)$ か $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ のいずれかに同型である。(

Proposition 2. $X(r)$ $(1\leq r\leq 8)$ 上の第1種の exeptional curve $L\sim al-\sum_{i=1}^{r}b_ie_i$ は以下に挙げるものに限る。ただし $b_1\geqq b_2\geqq\cdots\geqq b_r$ とし，$X(r-1)$ から得られる curve は省く。

e_1 on $X(1)$, $l-e_1-e_2$ on $X(2)$, $2l-e_1-\cdots-e_5$ on $X(5)$,

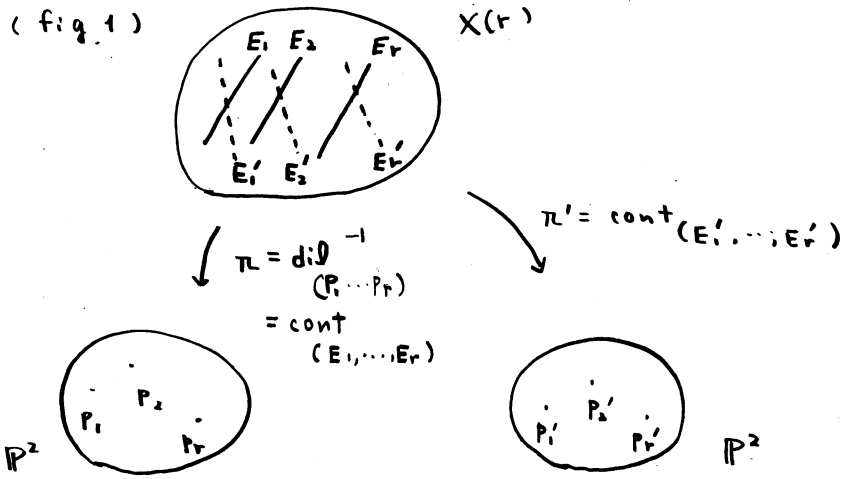
$3l-2e_1-e_2-\cdots-e_7$ on $X(7)$.

$X(r)$ 上の第1種 exeptional curve のうち互いに交わらない r 本を選べば，この r 本を contract

することにより morphism $\pi' : X(r) \to \mathbb{P}^2$ をうる.

この morphism を1つの representation map とよぶことにする. (fig. 1)

(fig. 1)



このとき $\mathrm{Pic}\, X(r) \cong \mathbb{Z}\cdot l' \oplus \mathbb{Z}\cdot e_1' \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} e_r'$

だから $X(r)$ 上の divisor D は適当な整数 $a, b_1, \cdots, b_r, a', b_1', \cdots, b_r'$ でもって $a l - \sum_{i=1}^{r} b_i e_i$ とも $a' l' - \sum_{i=1}^{r} b_i' e_i'$ とも表わされる.

<u>Definition</u>. 2つの vector $(a, b_1, \cdots, b_r), (a', b_1', \cdots, b_r') \in \mathbb{Z}^{r+1}$ が similar とは $X(r)$ 上の適当な divisor D と representation map $\varphi, \varphi' : X(r) \to \mathbb{P}^2$ が存在して $D \underset{\varphi}{\sim} a l - \sum_{i=1}^{r} b_i e_i$, $D \underset{\varphi'}{\sim} a' l' - \sum_{i=1}^{r} b_i' e_i'$ と表わされるときにいう.

<u>Proposition 3</u>. rを3以上とすると

$$(a, b_1, \cdots, b_r) \sim (a+c, b_1+c, b_2+c, b_3+c, b_4, \cdots, b_r).$$

ただし $c = a - b_1 - b_2 - b_3$.

Linear map $\varphi : \mathbb{Z}^{r+1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{r+1}$ を

$$\varphi((a, b_1, \cdots, b_r)) = (a+c, b_1+c, b_2+c, b_3+c, b_4, \cdots, b_r)$$

(ただし $c = a - b_1 - b_2 - b_3$.) で定める。

<u>Proposition 4</u>. 2つのvector $v, v' \in \mathbb{Z}^{r+1}$ が similar $\Leftrightarrow$ 適当な置換 $s_1, \cdots, s_t \in \mathfrak{S}_r$ が存在して $v = s_1 \varphi s_2 \varphi \cdots s_{t-1} \varphi s_t (v')$ とできる.

§2. gを与えられた整数とする. $D \sim a\ell - \sum_{i=1}^{r} b_i e_i$ が exeptional curve を component にもたない effective divisor とする. <u>Proposition 4</u> により representation map をとりかえて $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_r \geqslant 0$, $a \geqslant b_1 + b_2 + b_r$ とできる。

以下 $r = 8$ とし $X(8)$ 上の divisor について考える。

<u>Condition (*)</u>. $(a, b_1, \cdots, b_8) \in \mathbb{Z}^9$ が condition(*) をみたすとは $a \geqslant 1$, $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_8 \geqslant 0$, $a \geqslant b_1 + b_2 + b_3$ となるときにいう.

Effective divisor $D \sim a\ell - \Sigma b_i e_i$ が $P_a(D) = g$ を満たし $(a, b_1, \cdots, b_8)$ が condition (*) をみたすとすると $(a, b_1, \cdots, b_8)$ に関する必要条件が次の section で述べるように求まる．

§ 3. $w(a, b_1, \cdots, b_8) = \frac{1}{2}(a-1)(a-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} b_i(b_i - 1)$ とおく．

<u>Lemma</u>. $v = (a, b_1, \cdots, b_8) \in \mathbb{Z}^9$ が condition (*) をみたすとすれば 次の(1)，(2) が成り立つ．

(1) $a \geqq 7$，$b_3 \geqq 2$ のとき

(i) $w(v) \geqq \frac{1}{18}a^2 - \frac{1}{6}a + 1$ または

(ii) $w(v) \geqq 3a - 16$.

(2) $b_3 \leqq 1$ のとき

(iii) $b_1 \leqq 1$ ならば $w = \frac{1}{2}(a-1)(a-2)$,

(iv) $2 \leqq b_1 \leqq a-2$ ならば $w \geqq a-3$,

(v) $b_1 \geqq a-1$ ならば $w = 0$.

<u>Corollary</u>. $v = (a, b_1, \cdots, b_8) \in \mathbb{Z}^9$ が condition (*) をみたすとする．次の(1)，(2)，(3) が成り立つ．

(1) $w(v) = 0$ ならば v は次のいずれか．

$v = (a, a-1, 1, 0, \cdots, 0)$，$v = (a, a-1, 1, 1, 0, \cdots, 0)$,

$v = (1, 0, \cdots, 0)$，$v = (1, 1, 0, \cdots, 0)$,

$v=(2,0,\cdots,0)$, $v=(2,1,0,\cdots,0)$, $v=(2,1,1,0,\cdots,0)$.

(2) $w(v)=1$ とすれば $v=(3,\underbrace{1,\cdots,1}_{t},0,\cdots,0)$ $(0\leq t\leq 8)$.

(3) $w(v)=2$ とすれば v は次のいずれか。

$v=(4,2,\underbrace{1,\cdots,1}_{t},0,\cdots,0)$ $(0\leq t\leq 7)$,

$v=(5,3,2,0,\cdots,0)$, $v=(6,2,\cdots,2)$.

Remark. g を任意に与えたとき $w(v)=g$ となる v を計算することができる。上の Corollary はその例で (1), (2) は [ ] で述べられた事実に一致する。

References.

[1] R. Hartshorne : Algebraic Geometry, Springer (1977).

[2] Yu. I. Manin : Cubic forms, Noth-Holland (1974).

[3] M. Nagata : On rational surfaces I, II, Mem. Coll. Sci. Kyoto (A) 32 (1960), 351-370, and 33 (1960), 271-293.

プログラム

12月16日

小林善治（徳島大・教育）：局所環のPoincaré Series 予想の否定的解決について　1935 〜 2040

吉田憲一（阪大・理）：Birational integral extensionにおける双対性　2045 〜 2145

12月17日

浅沼照雄（富山大・教育）：R[X]のR-form：900〜945

柳原弘志（広島大・理）：Weakly normal ringについて　950 〜 1030

伊藤史朗（広島大・理）：(S_2)-拡大環をもつネーター環について　1040 〜 1120

大石彰（広島大・理）：Multicross singularityについて　1130 〜 1210

稲垣宏（阪大・理）：On the root closedness in formal power series ring.　1415 〜 1445

小野田信春（阪大・理）：Birational integral extensions of rings and Picard groups　1450〜1520

渡辺敬一（名工大）：ASL（Algebras with Straightening Laws）に関するいくつかの問題について　1530 〜 1615

渡辺純三（名大・理）：On the number of basic relations of an ideal of a local rings. 1625~1655

金光三男（愛知教育大）：Spec(R)の既約性と連結性について 1705~1745

"Short Communications" 1930ごろ~ 2200ごろ

才Ⅰ会場

菅谷 孝（富山大・理）：Domains with trivial ideal transform.

山内紀夫（聖徳学園女子短大）：高次微分の延長

才Ⅱ会場

坂口通則（広島修道大）：Generalized Cohen-Macaulay modules.

山岸規久道（理科大・理）：On the normality of certain algebras over commutative rings.

谷本 洋（名大・理）：k[X, Y, Z]のmonomial idealの既約分解とその応用.

三浦晋示（理科大・理）：A characterization of 2-dim. Cohen-Macaulay semigroup rings.

才Ⅲ会場

小山陽一（早大・理工）：Graded rings or deformation.

成瀬 弘（東大・理）：Weyl 群の W-graph による表現.

渡辺雅之（早大・理工）：曲面上の特異点の個数について.

吉田 忍（阪大・理）：Del Pezzo surface 上の curve の分類.

12月 18日.

吉野雄二（名大・理）：Homological conjecture について 900～935

大井武男（理科大・理）：二つの予想について 945～1030

青山陽一（愛媛大・理）：Canonical modules の話 1040～1125

竹内康滋（神戸大・教養）：Quasi Cohen-Macaulay Rings について 1135～1215

鈴木直義（静岡薬大）：On the system of parameters for Buchsbaum modules and the generalized modules 1505～1550

池田 信（名大・理）：Rees Algebra の Cohen-Macaulay 性 1600～1645

下田保博（都立大・理）：$A/\mathfrak{a}^n A$ の C-M 性と Gorenstein 性 1655～1745

12月 19日

桂 英治 (筑波大): de Rham-Witt complex について
900〜950

小駒 哲司 (高知大・理): 幾何学的でない局所環の例について
1000〜1050

西村純一 (京大・理): Noether 環の完備化とその周辺
1055〜1130

松村英之 (名大・理): アメリカの可換環論の現状報告
1135〜1205

(その後, 中井喜和 (阪大・理): アメリカからの宮西氏の便りの紹介 があった.)