研 究 集 会

第２３回 可換環論シンポジウム

２００１年１１月１９日～２２日

於　サンピア倉敷

平成１３年度 科学研究費 基盤研究（Ｂ）（１）
（課題番号 １２４４０００１　　代表　森田 康夫）

平成１３年度 科学研究費 基盤研究（Ｂ）（２）
（課題番号 １３４４００１５　　代表　渡辺 敬一）

序

第２３回可換環論シンポジウムは2001年11月19日から11月22日にかけて岡山県倉敷市のサンピア倉敷において開催されました。全国から多数の研究者・大学院生が参加し、合計２４の可換環にかかわるさまざまな内容の興味深い講演が行われました。この冊子は、シンポジウム期間中の講演をもとにして各講演者が執筆した原稿をそのまま縮小コピーしたものを収録し、シンポジウムの報告集として作成したものです。

このシンポジウムを開催するにあたり、東北大学の森田康夫氏を研究代表者とする科学研究費基盤研究（Ｂ）（１）（課題番号：１２４４００１）および日本大学の渡辺敬一氏を研究代表者とする科学研究費基盤研究（Ｂ）（２）（課題番号：１３４４００１５）からの御援助をいただきました。ここにあらためて感謝いたします。

2002年1月

広島大学　尼崎睦実

CONTENTS

BUCHSBAUMNESS IN THE FIBER CONES

KIKUMICHI YAMAGISHI

Himeji Dokkyo University

1. MAIN RESULT

Let $(A, \mathfrak{m})$ be a Noetherian local ring and E a finitely generated A-module. We always assume that the residue field $A/\mathfrak{m}$ is infinite. For an ideal $\mathfrak{a}$, we denote by $F_{\mathfrak{a}}(E)$ the *fiber cone* of E associated to $\mathfrak{a}$, namely,

$$F_{\mathfrak{a}}(E) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}^n E / \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n E.$$

In the ring case, i.e., $E = A$, there were already given several works on behaviours of the fiber cones $F_{\mathfrak{a}}(A)$, especially on the Cohen-Macaulayness of them, cf., see [CZ] [Sh] etc. Unfortunately, concerning on the Buchsbaumness of them, we had a quite few results, cf., see [G3]. On the other hand, however, the behaviours of fiber cones are very different between the ring case and the module case. For instance, it is well known that the fiber cone $F_{\mathfrak{q}}(A)$ associated to a parameter ideal $\mathfrak{q}$ of A is isomorphic to the polynomial ring over the residue field $A/\mathfrak{m}$, hence it is always a regular ring. But, the fiber cone $F_{\mathfrak{q}}(E)$ of E associated a parameter ideal $\mathfrak{q}$ of E is not necessarily even Cohen-Macaulay in general; see Section 3. So, in the module case, the behaviour of the fiber cone $F_{\mathfrak{a}}(E)$ is much more complicated.

Motivated these observations, we are here interested in the following problem.

Problem. Let E be a Buchsbaum A-module and $\mathfrak{a}$ an ideal of A such that $l_A(E/\mathfrak{a}E) < \infty$. Then, when does the fiber cone $F_{\mathfrak{a}}(E)$ obtain the Buchsbamness?

We need a few more notation. We define the $\mathbb{I}$-*invariant* of E, written $\mathbb{I}(E)$, as follows:

$$\mathbb{I}(E) := \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \cdot h^i(E),$$

where we put $h^i(E) := l_A(H^i_{\mathfrak{m}}(E))$ the length of the i-th local cohomology module $H^i_{\mathfrak{m}}(E)$ of E, and we write $s := \dim_A E$. Let $G_{\mathfrak{a}}(E) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}^n E/\mathfrak{a}^{n+1}E$ be the associated graded module of E with respect to an ideal $\mathfrak{a}$ and $R_{\mathfrak{a}}(E) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}^n E$ the Rees module of E associated to $\mathfrak{a}$, respectively. We usually write $R := R_{\mathfrak{a}}(A)$ the Rees algebra of $\mathfrak{a}$ and moreover $\mathfrak{N} := \mathfrak{m}R + R_+$ the unique homogeneous maximal ideal of R. A parameter ideal $\mathfrak{q}$ of E is said to be a minimal reduction of $\mathfrak{a}$ with respect to E, if $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{a}$ and $\mathfrak{a}^{r+1}E = \mathfrak{q}\mathfrak{a}^r E$ for some integer $r \geq 0$.

Then our main result Theorem 1 is stated as follows.

Theorem 1. *Let E be a Buchsbaum A-module of dimension $s > 0$ and $\mathfrak{a}$ an ideal of A such that $l_A(E/\mathfrak{a}E) < \infty$. Suppose that the following two conditions are fulfilled:*

(i) *the equality $\mathbb{I}(G_\mathfrak{a}(E)) = \mathbb{I}(E)$ holds:*

(ii) *$\mathfrak{a}^2 E = \mathfrak{q}\mathfrak{a}E$ holds for some minimal reduction $\mathfrak{q}$ of $\mathfrak{a}$ with respect to E.*

Then the following five statements are equivalent.

(1) *The positively graded submodule $F_\mathfrak{a}(E)_+$ is a Buchsbaum R-module.*

(2) *$a_1t, a_2t, \dots, a_st$ forms a USD-sequence on $F_\mathfrak{a}(E)_+$, where we put $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \dots, a_s)$.*

(3) *$H^p_\mathfrak{N}(F_\mathfrak{a}(E)_+) = [\quad]_{1-p}$ for all $0 \le p < s$.*

(4) *$H^0_\mathfrak{N}(F_\mathfrak{a}(E)) = [\quad]_0 + [\quad]_1$ and $H^p_\mathfrak{N}(F_\mathfrak{a}(E)) = [\quad]_{1-p}$ holds for all $1 \le p < s$.*

(5) *The submodule $\mathfrak{m}R_\mathfrak{a}(E)$ satisfies the following three conditions:*

  (a) *$H^1_\mathfrak{N}(\mathfrak{m}R_\mathfrak{a}(E)) = [\quad]_0 + [\quad]_1$;*

  (b) *$H^2_\mathfrak{N}(\mathfrak{m}R_\mathfrak{a}(E)) = [\quad]_0$;*

  (c) *if $s \ge 3$, then*

$$[H^p_\mathfrak{N}(\mathfrak{m}R_\mathfrak{a}(E))]_n = \begin{cases} H^{p-1}_\mathfrak{m}(E) & (n \in [3-p, -1]) \\ (0) & (n \notin [2-p, -1]) \end{cases}$$

for each $3 \le p \le s$.

When this is the case, the fiber cone $F_\mathfrak{a}(E)$ is Buchsbaum if and only if $H^0_\mathfrak{N}(F_\mathfrak{a}(E))$ is annihilated by $\mathfrak{N}$, that is, $\mathfrak{m}\mathfrak{a}^2E : \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{m}\mathfrak{a}E : \mathfrak{a}$ holds.

2. Outline of the proof of Theorem 1

For simplicity, we usually denote by $F(E)$, $R(E)$, $G(E)$ etc. omitting the letter of an ideal $\mathfrak{a}$ from our original notation above.

In this section, E is a Buchsbaum A-module of dimensin $s > 0$ and the following two conditions are fulfilled:

(i) the equality $\mathbb{I}(G(E)) = \mathbb{I}(E)$ holds:

(ii) $\mathfrak{a}^2E = \mathfrak{q}\mathfrak{a}E$ holds for some minimal reduction $\mathfrak{q}$ of $\mathfrak{a}$ with respect to E:

Then, we begin with recalling the following facts.

Lemma 2 ([N], see also [SY]). *The following statements are true.*

(1) *$G(E)$ is a Buchsbaum R-module such that*

$$[H^p_\mathfrak{N}(G(E))]_n = (0) \quad (n \ne -p,\ 1-p)$$

for $0 \le p < s$ and $a(G(E)) \le 1 - s$.

(2) *For any minimal reduction of $\mathfrak{a}$ with respect to E, say $\mathfrak{r} := (b_1, b_2, \dots, b_s)$, the equalities*

$$\mathfrak{a}^2E = \mathfrak{r}\mathfrak{a}E \quad \text{and} \quad (b_i^{n_i} \mid i \in I)E \cap \mathfrak{a}^nE = \sum_{i\in I} b_i^{n_i}\mathfrak{a}^{n-n_i}E$$

hold, where $I \subseteq [1, s]$, $n_i > 0$ and $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3 ([Y2]). *The following statements are true.*

(1)

$$[H^0_{\mathfrak{N}}(R(E))]_n = \begin{cases} H^0_{\mathfrak{m}}(E) & (n=0) \\ \mathfrak{a}E \cap H^0_{\mathfrak{m}}(E) & (n=1) \\ (0) & (else). \end{cases}$$

(2)

$$[H^1_{\mathfrak{N}}(R(E))]_n = \begin{cases} [H^1_{\mathfrak{N}}(G(E))]_0 & (n=0) \\ (0) & (else). \end{cases}$$

(3) $H^2_{\mathfrak{N}}(R(E)) = (0)$ *if* $s \geq 2$.

(4) *If* $3 \leq p \leq s$*, then*

$$[H^p_{\mathfrak{N}}(R(E))]_n = \begin{cases} H^{p-1}_{\mathfrak{m}}(E) & (n \in [3-p, -1]) \\ [H^{p-1}_{\mathfrak{N}}(G(E))]_{1-p} & (n = 2-p) \\ (0) & (else). \end{cases}$$

Now consider the following exact sequence of graded R-modules:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}R(E) \xrightarrow{\sigma} R(E) \longrightarrow F(E) \longrightarrow 0. \qquad (\sharp\ 1)$$

Then we have the long exact sequence of local cohomology modules of $F(E)$ as follows:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}R(E)) &\xrightarrow{\sigma^0} H^0_{\mathfrak{N}}(R(E)) \longrightarrow H^0_{\mathfrak{N}}(F(E)) \longrightarrow \cdots \\ \longrightarrow H^p_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}R(E)) &\xrightarrow{\sigma^p} H^p_{\mathfrak{N}}(R(E)) \longrightarrow H^p_{\mathfrak{N}}(F(E)) \longrightarrow \cdots \quad . \qquad (\sharp\ 2) \end{aligned}$$

According to Lemma 2 and Proposition 3, the long exact sequence of local cohomology modules ($\sharp$ 2) is divided into several parts as follows:

Lemma 4. *The following sequences of local cohomology modules are exact:*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}R(E)) &\xrightarrow{\sigma^0} H^0_{\mathfrak{N}}(R(E)) \longrightarrow H^0_{\mathfrak{N}}(F(E)) \\ \longrightarrow H^1_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}R(E)) &\xrightarrow{\sigma^1} H^1_{\mathfrak{N}}(R(E)) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{N}}(F(E)) \longrightarrow H^2_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}R(E)) \longrightarrow 0; \end{aligned} \qquad (\sharp\ 3)$$

and for each $2 \leq p < s$

$$0 \longrightarrow H^p_{\mathfrak{N}}(F(E)) \longrightarrow H^{p+1}_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}R(E)) \xrightarrow{\sigma^{p+1}} H^{p+1}_{\mathfrak{N}}(R(E)) \longrightarrow 0. \qquad (\sharp\ 4)$$

Proof. Look for the following commutative diagram of graded R-modules:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a}R(E) & \longrightarrow & R(E) & \longrightarrow & G(E) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m}R(E) & \xrightarrow{\sigma} & R(E) & \longrightarrow & F(E) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Let $2 \leq p < s$. By Lemma 2 and Proposition 3, the canonical map

$$H_{\mathfrak{N}}^{p+1}(\mathfrak{a}R(E)) \longrightarrow H_{\mathfrak{N}}^{p+1}(R(E))$$

is surjective. Hence this implies that σ^{p+1} is so.

Proof of Theorem 1. (1) $\Longrightarrow$ (2) is obvious. (2) $\Longrightarrow$ (3) is shown in the same argument as in [G2, Lemma (4.6)] using the USD-sequence property. (3) $\Longrightarrow$ (1) is already given by [G1, Proposition (3.1)].

(3) $\Longleftrightarrow$ (4) Look at the following exact sequence of graded R-modules.

$$0 \longrightarrow F(E)_+ \longrightarrow F(E) \longrightarrow \underline{E/\mathfrak{m}E} \longrightarrow 0. \qquad (\sharp\ 5)$$

By this exact sequence ($\sharp$ 5) we know that

$$H_{\mathfrak{N}}^{p}(F(E)_+) = [\quad]_{1-p} \quad \text{for all } 0 \leq p < s$$

if and only if

$$H_{\mathfrak{N}}^{0}(F(E)) = [\quad]_0 + [\quad]_1, \quad H_{\mathfrak{N}}^{p}(F(E)) = [\quad]_{1-p} \quad \text{for all } 1 \leq p < s.$$

(4) $\Longleftrightarrow$ (5) By the exact sequences ($\sharp$ 3) and ($\sharp$ 4) in Lemma 4 this is shown in a routine work.

Moreover it is also easy to see that the fiber cone $F(E)$ itself is Buchsbaum if and only if $\mathfrak{m}\mathfrak{a}^2E : \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{m}\mathfrak{a}E : \mathfrak{a}$ holds. This finishes the proof of Theorem 1.

3. The fiber cones associated to parameter ideals

Through this section E is always a Buchsbaum A-module of dimension $s > 0$. For a parameter ideal $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ of E, we define the submodule of E, say $\Sigma(a_1, \ldots, a_s; E)$, as follows:

$$\Sigma(a_1, \ldots, a_s; E) := \sum_{i=1}^{s} [(a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_s)E : a_i] + \mathfrak{q}E,$$

where the hat $\widehat{}$ on a_i means to omit this element a_i from the system $a_1, \ldots, a_s$. Usually we denote it by $\Sigma(\mathfrak{q}; E)$ simply. With this notation we have the following theorem

Theorem 5. *Let $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ be a parameter ideal of E. Then the following four statements are equivalent.*

(1) *The fiber cone $F_{\mathfrak{q}}(E)$ is a Cohen-Macaulay module over $R_{\mathfrak{q}}(A)$.*

(2) $\mathfrak{m}E \supseteq \Sigma(\mathfrak{q}; E)$.

(3) $\mu_A(\mathfrak{q}E) = s \cdot \mu_A(E)$.

(4) *$a_1, a_2, \ldots, a_s$ forms a USD-sequence on $\mathfrak{m}E$ and $\mathfrak{m}E \supset H_{\mathfrak{m}}^0(E)$.*

Proof. The equivalences $(2) \iff (3) \iff (4)$ are already given in [KY, Theorem 6 in Appendix].

$(4) \Longrightarrow (1)$ Look at the exact sequence as in ($\sharp$ 1)

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}R_{\mathfrak{q}}(E) \longrightarrow R_{\mathfrak{q}}(E) \longrightarrow F_{\mathfrak{q}}(E) \longrightarrow 0.$$

Since $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{q}}(E) = R_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{m}E)$ we can easily to check from our statement (4) that the submodule $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{q}}(E)$ statisfies all the requirements stated in (5) of Theorem 1, hence the fiber cone $F_{\mathfrak{q}}(E)$ is Buchsbaum by Theorem 1. Moreover, by the exact sequences as in ($\sharp$ 3) and ($\sharp$ 4), we also have that $\mathbb{I}(F_{\mathfrak{q}}(E)) = 0$; cf., see Theorem 11 below.

The last implication $(1) \Longrightarrow (2)$ can be shown by the direct calculation.

Corollary 6. *Let $a_1, a_2, \ldots, a_s$ be a system of parameters for E. Then the fiber cone $F_{(a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \ldots, a_s^{n_s})}(E)$ is Cohen-Macaulay if $n_1, n_2, \ldots, n_s \geq 2$ and* $\operatorname{depth}_A E > 0$.

Example 7. We can easily construct a counterexample on Corollary 6. Let $(A, \mathfrak{m})$ be a Cohen-Macaulay local ring of dimension $d \geq 2$. Suppose that A possesses maximal embedding dimension, that is, $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}$ for some minimal reduction $\mathfrak{q}$ of $\mathfrak{m}$, see [Sa]. Put $E := \mathfrak{m}$. Then we naturally have $F_{\mathfrak{q}}(E) \cong G_{\mathfrak{m}}(A)_+(1)$ as graded modules, where $G_{\mathfrak{m}}(A)_+$ denotes the unique homogeneous maximal ideal of the associated graded ring $G_{\mathfrak{m}}(A)$ of $\mathfrak{m}$. So we have

$$\operatorname{depth}_R F_{\mathfrak{q}}(E) = 1 < \dim_R F_{\mathfrak{q}}(E) = d,$$

thus it is not Cohen-Macaulay. Moreover, since $\Sigma(\mathfrak{q}; E) = \Sigma(\mathfrak{q})$ and since $\mathfrak{m}^2 \not\supseteq \mathfrak{q}$, we get obviously that

$$\mathfrak{m}E \not\supseteq \Sigma(\mathfrak{q}; E).$$

Therefore, this is just the required one.

4. Ideals possessing minimal multiplicity

Here, we try to extend the notion of minimal multiplicity into the module cases. Recall that, in 1999 S. Goto [G3] introcduced a notion called an $\mathfrak{m}$-primary ideal possessing minimal multiplicity in Cohen-Macaulay local rings. In the case where $(A, \mathfrak{m})$ is a Cohen-Macaulay local ring, an $\mathfrak{m}$-primary ideal $\mathfrak{a}$ of A is said to possess *minimal multiplicity* if

$$e_{\mathfrak{a}}(A) = \mu_A(\mathfrak{a}) + l_A(A/\mathfrak{a}) - \dim A.$$

This notion can be naturally extended for Buchsbaum rings. Namely, for an $\mathfrak{m}$-primary ideal $\mathfrak{a}$ in a Buchsbaum ring A, we say that $\mathfrak{a}$ possesses minimal multiplicity if

$$e_{\mathfrak{a}}(A) = \mu_A(\mathfrak{a}) + l_A(A/\mathfrak{a}) - \dim A - \mathbb{I}(A).$$

Using this new notion Y. Nakamura (in January 1997) succeeded to generalize the Stückrad's theorem in the case where the dimension of given local ring is very small.

However, we need to extend more this notion into the Buchsbaum module cases. Until the end of this section, let E be a Buchsbaum A-module and $\mathfrak{a}$ an ideal of A such that $l_A(E/\mathfrak{a}E) < \infty$. We define an new invariant $\rho(\mathfrak{a}; E)$ as follows:

$$\rho(\mathfrak{a}; E) := \sup\{\mu_A(\mathfrak{q}E) \mid \mathfrak{q} \text{ is a minimal reduction of } \mathfrak{a} \text{ with respect to } E\}.$$

Then, we have

$$\begin{aligned} e_{\mathfrak{a}}(E) &= e_{\mathfrak{q}}(E) = l_A(E/\mathfrak{q}E) - \mathbb{I}(E) \\ &= \mu_A(\mathfrak{a}E) + l_A(E/\mathfrak{a}E) - \mu_A(\mathfrak{q}E) - \mathbb{I}(E) + l_A(\mathfrak{m}IE/\mathfrak{m}\mathfrak{q}E) \\ &\geq \mu_A(\mathfrak{a}E) + l_A(E/\mathfrak{a}E) - \rho(\mathfrak{a}; E) - \mathbb{I}(E). \end{aligned}$$

Hence we introduce the following definition.

Definition 8. $\mathfrak{a}$ is said to possess *minimal multiplicity with respect to E* if the following equality holds:

$$e_{\mathfrak{a}}(E) = \mu_A(\mathfrak{a}E) + l_A(E/\mathfrak{a}E) - \rho(\mathfrak{a}; E) - \mathbb{I}(E).$$

In the case where $E = A$ it holds that $\rho(\mathfrak{a}; A) = \dim A$, hence this definition is a natural generalization of the notion for Buchsbaum rings. By this reason, we simply say that $\mathfrak{a}$ possesses minimal multiplicity, when $E = A$. Since the difference between the multiplicity $e_{\mathfrak{a}}(E)$ and the lower bound described above is just equal to $l_A(\mathfrak{m}\mathfrak{a}E/\mathfrak{m}\mathfrak{q}E) + \{\rho(\mathfrak{a}; E) - \mu_A(\mathfrak{q}E)\}$, this new notion is naturally characterized as follows.

Proposition 9. *The following two conditions are equivalent.*

(1) *$\mathfrak{a}$ possesses minimal multiplicity with respect to E.*
(2) *$\mathfrak{a}\mathfrak{m}E = \mathfrak{q}\mathfrak{m}E$ and $\mu_A(\mathfrak{q}E) = \rho(\mathfrak{a}; E)$ for some (hence every) minimal reduction $\mathfrak{q}$ of $\mathfrak{a}$ with respect to E.*

Let $K_\cdot(\mathfrak{q}; E)$ denote the Koszul complex over E generated by a minimal system of generators of $\mathfrak{q}$ in the usual sense. Moreover, $Z_\cdot(\mathfrak{q}; E), B_\cdot(\mathfrak{q}; E)$ and $H_\cdot(\mathfrak{q}; E)$ denote the cycle, boundary and homology of the Koszul complex, respectively. Since $B_1(\mathfrak{q}; E)$ is contained in $\mathfrak{q}K_1(\mathfrak{q}; E)$ and hence in $\mathfrak{m}K_1(\mathfrak{q}; E)$, we have the exact sequence

$$H_1(\mathfrak{q}; E) \longrightarrow K_1(\mathfrak{q}; E)/\mathfrak{m}K_1(\mathfrak{q}; E) \longrightarrow \mathfrak{q}E/\mathfrak{m}\mathfrak{q}E \longrightarrow 0.$$

According to [Su1, Sc1], the Buchsbaumness of E implies that the length of the 1-st Koszul homology module $H_1(\mathfrak{q}; E)$ becomes a constant value, thus we conclude that

$$s \cdot \mu_A(E) - \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s}{i+1} \cdot h^i(E) \;\leq\; \rho(\mathfrak{a}; E) \;\leq s \cdot \mu_A(E). \qquad (\sharp\, 6)$$

Example 10. (1) If E is free over A, then we have

$$\rho(\mathfrak{a}; E) = s \cdot \mu_A(E).$$

Thus, $\mathfrak{a}$ possesses minimal multiplicity with respect to E if and only if it is so (with respect to A).

(2) If A is a Buchsbaum ring of maximal embedding dimension, see [G1], then we have

$$e_{\mathfrak{m}}(A) = \mu_A(\mathfrak{m}) + l_A(A/\mathfrak{m}) - \rho(\mathfrak{m}; A) - \mathbb{I}(A),$$

thus $\mathfrak{m}$ possesses minimal multiplicity (with respect to A).

(3) If E is a linear maximal Buchsbaum A-module, see [Yo], then we have

$$\rho(\mathfrak{m}; E) = \mu_A(\mathfrak{m}E) = s \cdot \mu_A(E) - \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s}{i+1} \cdot h^i(E).$$

and thus we get

$$e_{\mathfrak{m}}(E) = \mu_A(\mathfrak{m}E) + l_A(E/\mathfrak{m}E) - \rho(\mathfrak{m}; E) - \mathbb{I}(E),$$

hence $\mathfrak{m}$ possesses minimal multiplicity with respect to E.

Theorem 11. *Suppose that the following three conditions are fulfilled:*

(i) *the equality* $\mathbb{I}(G(E)) = \mathbb{I}(E)$ *holds;*
(ii) $\mathfrak{a}$ *possesses minimal multiplicity with respect to* E*; and*
(iii) $\rho(\mathfrak{a}; E) = s \cdot \mu_A(E')$ *holds, where we put* $E' := E/H^0_{\mathfrak{m}}(E)$.

Then the fiber cone $F(E)$ *is a Buchsbaum* R*-module such that*

$$h^p(F(E)) = \begin{cases} h^0(E) - h^0(\mathfrak{m}E) + h^0(\mathfrak{a}E) & (p = 0) \\ l_A([H^p_{\mathfrak{N}}(G(E))]_{1-p}) & (1 \le p < s). \end{cases}$$

Proof. By the assumption (iii) we have $\mu_A(\mathfrak{q}E) = s \cdot \mu_A(E')$ for some minimal reduction $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ of $\mathfrak{a}$ with respect to E. Since $\mathfrak{q}E \cong \mathfrak{q}E'$ we obtain

$$\mu_A(\mathfrak{q}E') = s \cdot \mu_A(E').$$

By Theorem 5 above, $a_1, a_2, \ldots, a_s$ forms a USD-sequence on $\mathfrak{m}E'$. By the assumption (ii) we have $\mathfrak{a}\mathfrak{m}E = \mathfrak{q}\mathfrak{m}E$, hence $\mathfrak{m}R(E') = \mathfrak{m}R_{\mathfrak{q}}(E') \cong R_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{m}E')$ as graded modules. Thus it satisfies all the requirements stated in (5) of Theorem 1 from the USD-sequences arguments [GY]. Let $\phi : \mathfrak{m}R(E) \longrightarrow \mathfrak{m}R(E')$ be the canonical epimorphism induced by the projection $E \longrightarrow E'$. Now look at the exact sequence of graded R-modules

$$0 \longrightarrow \underline{\mathfrak{m}E \cap H^0_{\mathfrak{m}}(E)} \longrightarrow \mathfrak{m}R(E) \xrightarrow{\phi} \mathfrak{m}R(E') \longrightarrow 0.$$

Then it is a routine to check that the submodule $\mathfrak{m}R(E)$ also satisfies sll the requirements stated in (5) of Theorem 1. Moreover, since $H^1_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}R(E)) = H^1_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}R(E')) = (0)$, we have the following exact sequence from ($\sharp$ 3)

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}R(E)) \longrightarrow H^0_{\mathfrak{N}}(R(E)) \longrightarrow H^0_{\mathfrak{N}}(F(E)) \longrightarrow 0.$$

Thus we easily see $\mathfrak{N} \cdot H^0_{\mathfrak{N}}(F(E)) = (0)$. Thefore, by Theorem 1, the fiber cone $F(E)$ is a Buchsbaum module.

5. Generalization of Theorem 1

We shall try to extend the assumption (ii) given before Theorem 1 as follows. Let E still be a Buchsbaum A-module (of dimension $s > 0$) and $\mathfrak{a}$ an ideal of A such that $l_A(E/\mathfrak{a}E) < \infty$. Suppose that the following three conditions are satisfied:

(i) the equality $\mathbb{I}(G(E)) = \mathbb{I}(E)$ holds;
(ii') $\mathfrak{a}^2 E \subseteq \mathfrak{q}\mathfrak{a}E + H^0_{\mathfrak{m}}(E)$ holds for some minimal reduction $\mathfrak{q}$ of $\mathfrak{a}$ with respect to E;
(iii) $s \geq 2$.

Theorem 12. *Under the assumptions* (i), (ii') *and* (iii) *stated above, the following five statements are equivalent.*

(1) *The positively graded part $F(E)_+$ is a Buchsbaum module.*
(2) *$a_1t, a_2t, \ldots, a_st$ forms a USD-sequence on $F(E)_+$, where we put $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$.*
(3) *$H^0_N(F(E)_+) = [\ \ ]_1 + [\ \ ]_2$ such that $[H^0_N(F(E)_+)]_2 = \mathfrak{a}^2E \cap H^0_{\mathfrak{m}}(E)$ and $H^p_N(F(E)_+) = [\ \ ]_{1-p}$ holds for all $1 \leq p < s$.*
(4) *$H^0_N(F(E)) = [\ \ ]_0 + [\ \ ]_1 + [\ \ ]_2$ such that $[H^0_N(F(E))]_2 = \mathfrak{a}^2E \cap H^0_{\mathfrak{m}}(E)$ and $H^p_N(F(E)) = [\ \ ]_{1-p}$ holds for all $1 \leq p < s$.*
(5) *The submodule $\mathfrak{m}R(E)$ satisfies the following three conditions:*
  (a) *$H^1_N(\mathfrak{m}R(E)) = [\ \ ]_0 + [\ \ ]_1$;*
  (b) *$H^2_N(\mathfrak{m}R(E)) = [\ \ ]_0$;*
  (c) *if $s \geq 3$, then*

$$[H^p_N(\mathfrak{m}R(E))]_n = \begin{cases} H^{p-1}_{\mathfrak{m}}(E) & (n \in [3-p, -1]) \\ (0) & (n \notin [2-p, -1]) \end{cases}$$

for each $3 \leq p \leq s$,

Example 13. Let $k[[X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma]]$ be a formal power series ring over an infinite field k and let

$$B := k[[X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma]]/(X, Y, Z) \cap (\alpha, \beta, \gamma).$$

We choose the following 2-dimensional Buchsbaum ring and its system of parameters:

$$A := B/(Z+\gamma)^2B, \quad a := X + \alpha, \ b := Y + \beta.$$

Consider the next three ideals

$$(a, b, Z)A \subset (a, b, \alpha, \beta, Z)A \subset \mathfrak{m},$$

and denote by $\mathfrak{a}$ one of these three ideals. Then

(1) $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{q}\mathfrak{a} + H^0_{\mathfrak{m}}(A)$ where we put $\mathfrak{q} := (a, b)$, and $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{q} + H^0_{\mathfrak{m}}(A)$.
(2) $(a^2, b^2) \cap \mathfrak{a}^3 = (a^2, b^2)\mathfrak{a}$, hence the equality $\mathbb{I}(G_{\mathfrak{a}}(A)) = \mathbb{I}(A)$ holds.
(3) $H^p_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}R) = (0)$ for $p = 1, 2$.

Therefore, the fiber cone $F_{\mathfrak{a}}(A)$ is a Buchsbaum ring with $H^0_N(F_{\mathfrak{a}}(A)) = [\ \ ]_2$.

REFERENCES

[CZ] T. Cortadellas and S. Zarzuela, *On the depth of the fiber cone of Filtrations*, J. Algebra **198** (1997), 428–445.

[G1] S. Goto, *Buchsbaum rings of maximal embedding dimension*, J. Algebra **76** (1982), 383–399.

[G2] S. Goto, *Noetherian local rings with Buchsbaum associated graded rings*, J. Algebra **86** (1984), 336–384.

[G3] S. Goto, *Buchsbaumness in Rees algebras associated to ideals of minimal multiplicity*, J. Algebra **213** (1999), 604–661.

[GY] S. Goto and K. Yamagishi, *The theory of unconditioned strong d-sequences and modules of finite local cohomology*, preprint.

[H] C. Huneke, *The theory of d-sequences and powers of ideals*, Adv. in Math. **46** (1982), 249-279.

[N] Y. Nakamura, *On the Buchsbaum property of associated graded rings*, J. Algebra **209** (1998), 345–366.

[Sa] J. D. Sally, *On the associated graded ring of a local Cohen-Macaulay ring*, J. Math. Kyoto Univ. **17** (1977), 19–21.

[Sh] K. Shah, *On the Cohen-Macaulayness of the fiber cone of an ideal*, J. Algebra **143** (1991), 156–172.

[SV] J. Stückrad and W. Vogel, *Buchsbaum rings and applications*, Springer-Verlag, Berlin, New York, Tokyo, 1986.

[SY] Y. Shimoda and K. Yamagishi, *On the Buchsbaum associated graded modules with respect to* $\mathfrak{m}$*-primary ideals whose reduction numbers are at most one*, J. Algebra **234** (2000), 169–186.

[Y1] K. Yamagishi, *The associated graded modules of Buchsbaum modules with respect to* $\mathfrak{m}$*-primary ideals in the equi-*$\mathbb{I}$*-invariant case*, J. Algebra **225** (2000), 1–27.

[Y2] K. Yamagishi, *Buchsbaumness in Rees modules associated to ideals of minimal multiplicity in the equi-*$\mathbb{I}$*-invariant case*, preprint.

[Y3] K. Yamagishi, *Buchsbaumness in the Rees modules associated to* $\mathfrak{m}$*-primary ideals in the one-dimensional case*, preprint.

[Yo] K.-i. Yoshida, *On linear maximal Buchsbaum modules and the syzygy modules*, Comm. in Alg. **23** (1995), 1085–1130.

FACULTY OF ECONOINFORMATICS, HIMEJI DOKKYO UNIVERSITY, KAMIONO 7-2-1, HIMEJI-SHI, HYOGO 670-8524, JAPAN

E-mail address: yamagisi@himeji-du.ac.jp

A vanishing theorem of localized Chern characters

蔵野 和彦

1 Introduction

(A, m) はネーター局所環、$\mathcal{M}_A$ は有限生成 A-加群のカテゴリーであるとする。

Question 1.1 N は、長さ有限かつ射影次元有限な A-加群であるとする。もし、$M \in \mathcal{M}_A$ が $\dim M < \dim A$ を充たせば、$\chi_A(M, N) := \sum_i (-1)^i \ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(M, N)) = 0$ が成立するだろうか？

上の仮定の下では、$\dim M + \dim N < \dim A$ が成立することに注意。よって、Question 1.1 は、かつて Serre の intersection multiplicity に関する予想の特異点への一般化の中で予想されていたことに含まれる。(上のような N が存在すれば、New Intersection Theorem により A は、Cohen-Macaulay 環になることに注意。)

Question 1.1 を、Cohen-Macaulay 環でないときに考えると、次の Question 1.2 が自然と出てくる。$C^m(A)$ は全てのホモロジー加群の長さが有限であるような bounded な有限生成自由 A-加群の複体のカテゴリーとする。

Question 1.2 (A, m) はネーター局所環。$\mathbb{F}. \in C^m(A)$, $M \in \mathcal{M}_A$ とする。$\dim M < \dim A$ であるとき、$\chi_{\mathbb{F}.}(M) = 0$ が成立するか？

ただし、$\chi_{\mathbb{F}.}(M) := \sum_i (-1)^i \ell_A(H_i(\mathbb{F}. \otimes_A M))$ とする。

Example 1.3 (1) $\mathbb{F}.$ がパラメーターの Koszul 複体なら Question 1.2 は正しい。

(2) A が正則局所環なら Question 1.2 は正しい。(M の A-自由分解を取り、二重複体で考える。)

(3) 正則局所環 S と S 上の自由複体 $\mathbb{G}.$ で、A は S の準同型像であり $\mathbb{F}. = \mathbb{G}. \otimes_S A$ を満たす S と $\mathbb{G}.$ があるときは Question 1.2 は正しい。

(4) しかし、Question 1.1 には次のような反例がある。(Dutta-Hochster-MacLaughlin)

$A = \mathbb{Q}[x, y, z, w]_{(x,y,z,w)}/(xw - yz)$, $N = \mathrm{Coker}(A^{17} \xrightarrow{\phi} A^6)$ とする。ただし、ϕ は次の 6×17 行列に対応する線形写像とする。

$$
\begin{array}{l}
0, 0, 0, 0, 0, -z, 0, x, 0, 0, y, -w, 0, 0, y, 0, 0 \\
-y, 0, 0, 0, 0, 0, -z, 0, x, 0, 0, 0, -w, 0, 0, 0, 0 \\
0, -y, 0, 0, 0, 0, 0, -z, 0, x, 0, xz, 0, -w, 0, 0, 0 \\
0, 0, -y, 0, 0, 0, 0, 0, -z, 0, x, 0, xz, 0, -w, 0, 0 \\
x, 0, 0, -y, 0, 0, 0, 0, 0, -z, 0, 0, 0, 0, 0, x - w, 0 \\
0, x, 0, 0, -y, 0, 0, 0, 0, 0, -z, 0, 0, 0, 0, 0, x - w
\end{array}
$$

すると $\ell_A(N)=15$, $\mathrm{pd}_A(N)=3$ となる。$\mathbb{H}.$ は N の A-自由分解、$M_1=A/(x,y)$、$M_2=A/(x,z)$ とおく。すると、

$$\ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(M_1,N))=\begin{cases}6 & (i=0)\\ 7 & (i=1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}\qquad \ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(M_2,N))=\begin{cases}6 & (i=0)\\ 5 & (i=1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

従って $\chi_{\mathbb{H}.}(M_1)=-1$, $\chi_{\mathbb{H}.}(M_2)=1$ となる。

(この例では $\mu_A(N)=6$ であるが、$\mu_A(N)=1$ を充たすような例も存在する。ただし、$\mu_A(N)$ は A-加群 N の極小生成系の元数とする。)

ここで、「パラメーターの Koszul 複体と上の (4) の $\mathbb{H}.$ は、いったい何が違うのか?」、「上の (4) のような $\mathbb{H}.$ は、どのくらい多く存在するのか?」について考えたい。

2　準備と主定理

以下、(A,m) は d 次元ネーター局所環とする。(いつも、エクセレント正則局所環の像であると仮定する。)

$\mathrm{G}_0(A)$ は有限生成 A-加群の Grothendieck 群、$\mathrm{A}_*(A)=\oplus_{i=0}^d \mathrm{A}_i(A)$ は $\mathrm{Spec}(A)$ の Chow 群とする。このとき、特異リーマン・ロッホの定理 [1] により $\mathbb{Q}$-ベクトル空間の同型

$$\tau:\mathrm{G}_0(A)_{\mathbb{Q}}\to \mathrm{A}_*(A)_{\mathbb{Q}}$$

がある。

$\mathbb{F}.\in C^m(A)$ とする。このとき、$\chi_{\mathbb{F}.}(M)=\sum_i(-1)^i\ell_A(H_i(\mathbb{F}.\otimes_A M))$ によって、$\chi_{\mathbb{F}.}:\mathrm{G}_0(A)_{\mathbb{Q}}\to\mathbb{Q}$ が定義される。すると、$\mathbb{F}.$ の localized Chern character $\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)=\sum_{i=0}^d \mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.)$ が等式 $\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)\cdot\tau=\chi_{\mathbb{F}.}$ によって一意的に定まる。ただし、$\mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.):\mathrm{A}_i(A)_{\mathbb{Q}}\to\mathbb{Q}$ とする。

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{G}_0(A)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{A}_*(A)_{\mathbb{Q}}\\ {\scriptstyle \chi_{\mathbb{F}.}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{ch}(\mathbb{F}.)}\downarrow\\ \mathbb{Q} & = & \mathbb{Q}\end{array}$$

ここで、

$$\tau(M)=\tau_d(M)+\tau_{d-1}(M)+\cdots+\tau_0(M)\quad(\tau_i(M)\in\mathrm{A}_i(A)_{\mathbb{Q}})$$

とおくと、定義により直ちに

$$\chi_{\mathbb{F}.}(M)=\sum_{i=0}^d \mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.)(\tau_i(M))$$

が成立することがわかる。

ところで、$i>\dim M$ であるときは $\tau_i(M)=0$ となることが知られている (Theorem 18.3 (5) in [1])。よって、仮に $i\le\dim M$ を充たす全ての i に対して $\mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.)=0$ が充たされるとすれば、$\chi_{\mathbb{F}.}(M)=0$ が云えるわけである。

スキーム Y に対して、coherent $\mathcal{O}_Y$-加群の Grothendieck 群を $\mathrm{G}_0(Y)$ とする。非負整数 k に対して、

$F_k\,\mathrm{G}_0(Y)_{\mathbb{Q}} = \langle [\mathcal{F}] \mid \mathcal{F}$ は support の次元が k 以下の coherent $\mathcal{O}_Y$-加群 $\rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathrm{G}_0(Y)_{\mathbb{Q}}$

とおく。$\dim Y = s$ であるときは、

$$\mathrm{G}_0(Y)_{\mathbb{Q}} = F_s\,\mathrm{G}_0(Y)_{\mathbb{Q}} \supseteq F_{s-1}\,\mathrm{G}_0(Y)_{\mathbb{Q}} \supseteq \cdots \supseteq F_0\,\mathrm{G}_0(Y)_{\mathbb{Q}} \supseteq 0$$

となっている。

$\pi : Z \to \mathrm{Spec}(A)$ はスキームの射であるとする。$E := \pi^{-1}(m)$ とおく。このとき、$\mathbb{F}. \in C^m(A)$ であれば、$\mathrm{Supp}\, H_i(\pi^*\mathbb{F}.) \subseteq E$ が全ての i に対して成立する。よって、

$$\xi_\pi(\mathbb{F}.) := \sum_i (-1)^i [H_i(\pi^*\mathbb{F}.)] \in \mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}}$$

が成立する。

次が主定理である。

Theorem 2.1 (A,m) はネーター局所整域、$\mathbb{F}. \in C^m(A)$ とする。$\pi : Z \to \mathrm{Spec}(A)$ は正則 alteration とする。$E = \pi^{-1}(m)$ とおく。このとき、非負整数 k に対し、下の 4 条件は

$$(1) \Longleftrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longleftrightarrow (4)$$

を満たす。

(1) $\xi_\pi(\mathbb{F}.) \in F_{d-k}\,\mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}}$.

(2) $i = 0, 1, \ldots, k-1$ に対して、$\mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.) = 0$ as a bivariant class.

(3) $i = 0, 1, \ldots, k-1$ に対して、$\mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.) : \mathrm{A}_i(A)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ は 0 射。

(4) 次元が k 未満の任意の有限生成 A-加群 M に対して、$\chi_{\mathbb{F}.}(M) = 0$ が成立。

de Jong [3] の定理により、A が体、整数環、または完備離散付値環上本質的有限型の局所整域であれば、$\mathrm{Spec}(A)$ は正則 alteration を持つ。

bivariant class に関しては、[1] の 17 章参照。

最終章で定理の証明のアウトラインを述べる。

Remark 2.2 1. 上の定理で、条件 (2), (3), (4) は、正則 alteration $\pi : Z \to \mathrm{Spec}(A)$ とは無関係である。
よって、$\xi_\pi(\mathbb{F}.) \in F_{d-k}\,\mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}} \setminus F_{d-k-1}\,\mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}}$ を満たす k は正則 alteration π のとり方に依らず、複体 $\mathbb{F}. \in C^m(A)$ によって決まる。当然のことであるが、この k は、$d - k \le \dim E$ を充たす。

2. Theorem 2.1 で、(3) $\Longrightarrow$ (2) は不成立。例えば、$A = \mathbb{C}[x,y,z]_{(x,y,z)}/(x^3+y^3+z^3)$ のような簡単な環でも反例がある。
ただし、非特異射影代数多様体 X が $\mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbb{Q}}$ を充たす場合、X の affine cone A に対して、(3) $\Longrightarrow$ (2) が成立する。
(2) と (3) の違いは、雑に言うと 非特異射影代数多様体の有理同値と numerical 同値の違いに匹敵する。よって、この違いは、一般には非常に大きいと言わざるを得ない。

Example 2.3 (1) A 自身が正則局所環、または A 上有限加群で正則な over ring が存在するとする。このとき、それを $\mathrm{Spec}(A)$ の正則 alteration とみれば、$\dim E = 0$ となっている。よって、$\xi_\pi(\mathbb{F}.) \in F_0\,\mathrm{G}_0(E)_\mathbb{Q}$ となり、$k = d$ として (1), (2), (3), (4) が成立する。

(2) $\mathbb{F}.$ がパラメーターの Koszul 複体であるとき。$\pi : Z \to \mathrm{Spec}(A)$ は正則 alteration とする。すると、π^* の右完全性により $H_0(\pi^*\mathbb{F}.) = \pi^* H_0(\mathbb{F}.)$ であるので、$\mathrm{Supp}\,H_0(\pi^*\mathbb{F}.) = \pi^{-1}(m) = E$ が成立する。しかし、Koszul 複体の長さに関する帰納法により $\xi_\pi(\mathbb{F}.) \in F_0\,\mathrm{G}_0(E)_\mathbb{Q}$ が容易に証明できる。このように、複体 $\pi^*\mathbb{F}.$ のホモロジー自身は大きな support を持っている場合でも、交代和をとると小さくなることがある。

もっと一般に $\mathbb{F}.$ が Example 1.3 の (3) の条件を充たしているとき。このときも $\xi_\pi(\mathbb{F}.) \in F_0\,\mathrm{G}_0(E)_\mathbb{Q}$ となっていることが証明できる。(簡単ではない)

よって、これらの場合も $k = d$ として (1), (2), (3), (4) が成立する。

(3) $\mathbb{H}.$ は Dutta-Hochster-MacLaughlin の複体 (Example 1.3 (4)) であるとき。このときは、$\mathrm{ch}_0(\mathbb{H}.) = \mathrm{ch}_1(\mathbb{H}.) = 0$, $\mathrm{ch}_2(\mathbb{H}.) \neq 0$ となっている。(Corollary 3.1 参照) よって、定理により $\xi_\pi(\mathbb{H}.) \in F_1\,\mathrm{G}_0(E)_\mathbb{Q} \setminus F_0\,\mathrm{G}_0(E)_\mathbb{Q}$ であることがわかる。

(この場合、局所環 A は $X := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の affine cone である。よって、Remark 2.2 (2) で言及したが、X 上ではサイクルの有理同値と numerical 同値は一致しているので、Theorem 2.1 の 4 条件は同値になる。これを使うと、$\xi_\pi(\mathbb{H}.) \in F_1\,\mathrm{G}_0(E)_\mathbb{Q} \setminus F_0\,\mathrm{G}_0(E)_\mathbb{Q}$ が云えるのである。)

3 応用

主定理の応用を述べる。

この章では (A, m) は d 次元局所整域で、正則 alteration $\pi : Z \to \mathrm{Spec}(A)$ を持つとする。

$\mathbb{F}. \in C^m(A)$ に対して、$\mathrm{ch}_0(\mathbb{F}.)$ は $(\sum_i (-1)^i \mathrm{rank}_A F_i)$ 倍写像と一致する。よって、$d \geq 1$ のときは $\mathrm{ch}_0(\mathbb{F}.) = 0$ となる (as a bivariant class)。Theorem 2.1 を使うことにより、次の Roberts の定理 [6] の別証明を与えることができる。

Corollary 3.1 $\mathbb{F}. \in C^m(A)$ とする。$d \geq 2$ のときは $\mathrm{ch}_1(\mathbb{F}.) = 0$ となる。

これは、$d \geq 2$ のときに $\xi_\pi(\mathbb{H}.) \in F_{d-2}\,\mathrm{G}_0(E)_\mathbb{Q}$ を示すことにより、定理を通して証明される。Example 2.3 (3) で見た様に、$d \geq 3$ であっても $\mathrm{ch}_2(\mathbb{F}.) = 0$ とは限らない。$d \geq 4$ で $\mathrm{ch}_2(\mathbb{F}.) \neq 0$ を満たす例は現在のところ知られていない。

Roberts の定理 [6] は、$C^m(A)$ に属する複体だけでなく、スキーム上のあらゆる有界なベクトルバンドルの複体に対して示されている。実は、Theorem 2.1 も、スキーム上のあらゆる有界なベクトルバンドルの複体に対して証明できる。(ただし、正則 alteration の存在は仮定する。) その一般的な形の定理を使えば、Roberts の一般的な定理の方も証明できる。

[4] の中でネーター局所環のスペクトラムのサイクルに対して numerical 同値が定義されている。Chow 群をその numerical 同値で割ったものを $\overline{\mathrm{A}_*(A)_{\mathbb{Q}}} = \oplus_t \overline{\mathrm{A}_t(A)_{\mathbb{Q}}}$ とおく。定義から、「$\overline{\mathrm{A}_t(A)_{\mathbb{Q}}} = 0$ for $t = 0, \cdots, k$」であることは、「任意の $\mathbb{F}. \in C^m(A)$ に対して $\mathrm{ch}_t(\mathbb{F}.) = 0$ for $t = 0, \cdots, k$」であることと同値である。$\min\{t \mid \overline{\mathrm{A}_t(A)_{\mathbb{Q}}} \neq 0\} = s$ とする。すると、$\mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.) \neq 0$ を充たす $\mathbb{F}. \in C^m(A)$ が存在する。すると Theorem 2.1 により $\xi_\pi(\mathbb{F}.) \notin F_{d-s-1}\,\mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}}$ となるはずである。すると、$\dim E > d - s - 1$ となる。このことから直ちに次を得る。

Corollary 3.2 $\dim \pi^{-1}(m) \geq d - \min\{t \mid \overline{\mathrm{A}_t(A)_{\mathbb{Q}}} \neq 0\}$ が成立する。

Example 3.3 X を非特異射影代数多様体、A は X の affine cone であるとする。

1. $\mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbb{Q}}$ と仮定すれば、$\mathrm{A}_t(A)_{\mathbb{Q}} \simeq \overline{\mathrm{A}_t(A)_{\mathbb{Q}}}$ が全ての t に対して成立する [4]。
   ここで、$X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ としよう。ただし、$n \geq m \geq 1$ とする。すると、$d = m+n+1$ である。このとき、$\mathrm{CH}^{\cdot}(X) \simeq \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)$ が成立する。これを用いれば、$d - \min\{t \mid \overline{\mathrm{A}_t(A)_{\mathbb{Q}}} \neq 0\} = m$ となっていることが証明できる。
   この場合、A は $(m+1) \times (n+1)$ 変数行列の全ての 2×2 小行列で定義された環である。A を第一列で生成されたイデアルでブローアップすると特異点解消が得られ、その閉ファイバーは $E = \mathbb{P}^m$ である。
   よって、この特異点解消を選べば、Corollary 3.2 の不等式は等式になる。
2. しかし、次のように、どのような特異点解消を選んでもこの不等式は等式にならない例がある。
   X は $\mathbb{C}$ 上定義された $d-1$ 次元アーベル多様体であるとする。このとき、どのように A の正則 alteration π をとっても $\dim \pi^{-1}(m) = d-1$ となることが示される。
   ところが、hard Lefchetz 定理により、$\min\{t \mid \overline{\mathrm{A}_t(A)_{\mathbb{Q}}} \neq 0\} \geq d/2$ が証明される。すると、$d/2 \geq d - \min\{t \mid \overline{\mathrm{A}_t(A)_{\mathbb{Q}}} \neq 0\}$ となる。
   よって $d \geq 3$ の場合は Corollary 3.2 の不等式は決して等式にはならない。

Theorem 2.1 は support が大きな複体に対してもよく似たことが証明できる。それを使うと、次が証明できる。

Corollary 3.4 Y は $\mathrm{Spec}(A)$ の閉集合で $Z \setminus \pi^{-1}(Y) \to \mathrm{Spec}(A) \setminus Y$ は finite とする。このとき、$\dim \pi^{-1}(Y) \leq \frac{d}{2}$ ならば、A に対して vanishing theorem が成立する。(つまり、有限生成 A-加群 M, N が $\mathrm{pd}_A M < \infty$, $\mathrm{pd}_A N < \infty$, $\ell_A(M \otimes_A N) < \infty$, $\dim M + \dim N < \dim A$ を満たせば、$\sum_i (-1)^i \ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(M, N)) = 0$ が成立する。)

次のような環等に対しては、vanising theorem が成立することが知られている。A が (numerically) Roberts ring のとき。特異点の次元が 1 以下のとき。より一般に完全交叉でない閉集合の軌跡の次元が 1 以下のとき。

それ以外で、Corollary 3.4 の仮定を充たす例は存在する。

4 Dutta-Hochster-MacLaughlin のような例はどのくらい多くあるか？

(A,m) は d 次元局所整域、正則 alteration $\pi : Z \to \mathrm{Spec}(A)$ が存在するとする。$\xi_\pi : \mathrm{K}_0(C^m(A))_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}}$ を、$\xi_\pi(\mathbb{F}.) = \sum_i (-1)^i [H_i(\pi^*\mathbb{F}.)]$ で定める。(ここで、$\mathrm{K}_0(C^m(A))$ は $C^m(A)$ のグロタンディエク群とする。ただし、ここでの関係式は、複体の完全列から出てくるもの以外に、複体の quasi-isomorphism からも出てくることに注意。[2], [7])

Theorem 2.1 によれば、$\xi_\pi(\mathbb{F}.)$ の様子がわかれば、localized Chern character $\mathrm{ch}_i(\mathbb{F}.)$ の様子がわかるはずである。

Proposition 4.1 $d > 0$ とする。閉埋め込み $i : E = \pi^{-1}(m) \to Z$ から誘導される自然な射を $i_* : \mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{G}_0(Z)_{\mathbb{Q}}$ とおく。このとき、アーベル群の列

$$\mathrm{K}_0(C^m(A))_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\xi_\pi} \mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{i_*} \mathrm{G}_0(Z)_{\mathbb{Q}}$$

を見る。このとき、

(1) この列は複体である。(つまり、$i_*\xi_\pi = 0$ である)

(2) $Z \setminus E \simeq \mathrm{Spec}(A) \setminus \{m\}$ ならば、これは完全列。

Proof. $\mathbb{F}. \in C^m(A)$ をとる。このとき、

$$i_*\xi_\pi(\mathbb{F}.) = \sum_i (-1)^i [H_i(\pi^*\mathbb{F}.)] = \sum_i (-1)^i [\pi^* F_i] = (\sum_i (-1)^i \mathrm{rank}_A F_i) \cdot [\mathcal{O}_Z] = 0$$

によって (1) がわかる。

Thomason-Trobaugh [7] の K-理論の localization sequence により、

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathrm{K}_1(Z \setminus E)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(Z \text{ on } E)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(Z)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathrm{K}_1(\mathrm{Spec}(A) \setminus \{m\})_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(C^m(A))_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{K}_0(\mathrm{Spec}(A))_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

という完全列がある。ただし、$\mathrm{K}_0(\ )$ は、ベクトルバンドルのグロタンディエク群とする。

$d > 0$ であるので、α は 0 射である。また、$Z \setminus E \simeq \mathrm{Spec}(A) \setminus \{m\}$ と仮定すれば、$\mathrm{K}_1(\mathrm{Spec}(A) \setminus \{m\})_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{K}_1(Z \setminus E)_{\mathbb{Q}}$ は同型である。さらに、Z は正則スキームであるので $\mathrm{K}_0(Z \text{ on } E)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}}$ と $\mathrm{K}_0(Z)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{G}_0(Z)_{\mathbb{Q}}$ となり、(2) が示される。 **q.e.d.**

つまり、上の (2) の状況では $\mathrm{Im}(\xi_\pi)$ を調べるためには、$\mathrm{Ker}(i_*)$ を見ればよいことになる。

以下、$\mathrm{Ker}(i_*)$ が実際に計算できる例を与える。

Example 4.2 $2 \le m \le n$ とする。

$A = \mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \le i \le m;\ 1 \le j \le n]_{(\underline{x_{ij}})}/I_2((x_{ij}))$ とおく。$\pi : Z \to \mathrm{Spec}(A)$ は第一列で生成されたイデアル $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{m1})$ でのブローアップとする。すると、π は特異点解消であり、$Z \setminus E \simeq \mathrm{Spec}(A) \setminus \{m\}$ であることが示される。

さらに、このとき $i_*: \mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{G}_0(Z)_{\mathbb{Q}}$ は 0 射であることが確かめられる。すると、上の命題の (2) により $\xi_\pi: \mathrm{K}_0(C^m(A))_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}}$ は全射である。$E \simeq \mathbb{P}^{m-1}$ であるので、

$$\mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}} = F_{m-1}\,\mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}} \underset{\neq}{\supset} F_{m-2}\,\mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}} \underset{\neq}{\supset} \cdots \underset{\neq}{\supset} F_0\,\mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}} \underset{\neq}{\supset} (0)$$

を満たしている。

$X = \mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ とすると、A は X の affine cone である。このとき、$\mathrm{CH}^{\cdot}(X) \simeq \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)$ が成立するので、Theorem 2.1 の四条件はすべて同値である。(Remark 2.2 参照。)

Theorem 2.1 の (1) と (3) の同値性より次がわかる。$\dim A = m+n-1$ であることに注意。

- $\mathbb{F}. \in C^m(A)$ であり、M は有限生成 A-加群で $\dim M < n$ であれば、$\chi_{\mathbb{F}.}(M) = 0$ である。

- $n \leq q \leq m+n-1$ を満たすそれぞれの q に対して、次を満たす $\mathbb{F}. \in C^m(A)$ が存在する。「$\dim M < q$ を充たす有限生成 A-加群 M に対しては $\chi_{\mathbb{F}.}(M) = 0$ であり、$\chi_{\mathbb{F}.}(N) \neq 0$ を満たす q 次元の有限生成 A-加群 N が存在する。」

  (いつも $i_*: \mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{G}_0(Z)_{\mathbb{Q}}$ は 0 射になるわけではないことに注意。例えば、$\pi': Z' \to \mathrm{Spec}(A)$ は第一行で生成されたイデアル $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$ でのブローアップとすると、π' は特異点解消であり、$Z' \setminus E' \simeq \mathrm{Spec}(A) \setminus \{m\}$ である。ここで、$E' = \pi'^{-1}(m)$ とする。しかし、$m < n$ と仮定すれば、$\mathrm{G}_0(E')_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{G}_0(Z')_{\mathbb{Q}}$ は 0 射ではない。)

5　定理の証明

Theorem 2.1 の (3) と (4) が同値であるのは定義から明らかである。

(1) と (2) が同値であることの証明は面倒である。これは、省略する。

(1) $\Longrightarrow$ (3) を証明しよう。

$\pi: Z \to \mathrm{Spec}(A)$ は正則 alteration とする。$\xi_\pi(\mathbb{F}.) \in F_{d-k}\,\mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}}$ と仮定する。$0 \leq s < k$ としよう。(このとき、$\mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.) = 0$ を示したい。)

P は A の素イデアルで $\dim A/P = s$ と仮定する。このとき、$\mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.)([\mathrm{Spec}(A/P)]) = 0$ を云いたい。

ここで、Z の既約かつ被約な閉部分スキーム W で、π の W への制限が、W から $\mathrm{Spec}(A/P)$ への generically finite な射となるようなものをとる。すると、$\dim W = s$ であることに注意。

π の E への制限を $\pi': E \to \mathrm{Spec}(A/m)$ と書く。すると、localized Chern character の projection formula により、

$$\begin{aligned} & \pi'_*\mathrm{ch}_s(\pi^*\mathbb{F}.)\,([W]) \\ = \; & \mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.)\pi_*\,([W]) \\ = \; & [R(W):Q(A/P)] \cdot \mathrm{ch}_s(\mathbb{F}.)\,([\mathrm{Spec}(A/P])) \end{aligned}$$

となる。ここで、$R(W)$ は W の関数体、$Q(A/P)$ は A/P の商体であるとする。故に、$\mathrm{ch}_s(\pi^*\mathbb{F}.)\,([W]) = 0$ を証明すればよい。

$\mathbb{G}.$ を $\mathcal{O}_W$ の locally free $\mathcal{O}_Z$-resolution とする。ここで、Z は正則スキームなので、この resolution は有界であることに注意。このとき、$[W] = \mathrm{ch}_{d-s}(\mathbb{G}.)\,([Z])$ である。このとき、Roberts [5] によって証明されている localized Chern character の可換性により、

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{ch}_s(\pi^*\mathbb{F}.)\,([W]) \\
= \;& \mathrm{ch}_s(\pi^*\mathbb{F}.)\mathrm{ch}_{d-s}(\mathbb{G}.)\,([Z]) \\
= \;& \mathrm{ch}_{d-s}(\mathbb{G}.)\mathrm{ch}_s(\pi^*\mathbb{F}.)\,([Z])
\end{aligned}
$$

を得る。よって、$\mathrm{ch}_s(\pi^*\mathbb{F}.)\,([Z]) = 0$ を証明すればよい。

このとき [1] の Example 18.3.12 により

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{G}_0(Z)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_{Z/Z}} & \mathrm{A}_*(Z)_{\mathbb{Q}} \\
{\scriptstyle \chi_{\pi^*\mathbb{F}.}} \downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{ch}(\pi^*\mathbb{F}.)} \downarrow \\
\mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_{E/Z}} & \mathrm{A}_*(E)_{\mathbb{Q}}
\end{array}
$$

は可換である。ここで、$\tau_{Z/Z}, \tau_{E/Z}$ は、base regular scheme を Z として作った Z と E のリーマン・ロッホ射であり [1]、これらは同型である。すると、構成法から $\tau_{Z/Z}([\mathcal{O}_Z]) = [Z]$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{ch}(\pi^*\mathbb{F}.)\,([Z]) \\
= \;& \mathrm{ch}(\pi^*\mathbb{F}.)\tau_{Z/Z}\,([\mathcal{O}_Z]) \\
= \;& \tau_{E/Z}\chi_{\pi^*\mathbb{F}.}\,([\mathcal{O}_Z]) \\
= \;& \tau_{E/Z}\left(\sum_i (-1)^i [H_i(\pi^*\mathbb{F}.)]\right)
\end{aligned}
$$

であり、これは $\tau_{E/Z}\xi_\pi(\mathbb{F}.)$ と一致する。仮定により $\xi_\pi(\mathbb{F}.) \in F_{d-k}\,\mathrm{G}_0(E)_{\mathbb{Q}}$ であるので、$\tau_{E/Z}\xi_\pi(\mathbb{F}.) \in \oplus_{i=0}^{d-k}\mathrm{A}_i(E)_{\mathbb{Q}}$ となる。ところで、

$$
\mathrm{ch}(\pi^*\mathbb{F}.)\,([Z]) = \sum_{i=0}^{d} \mathrm{ch}_i(\pi^*\mathbb{F}.)\,([Z])
$$

である。ここで $\mathrm{ch}_i(\pi^*\mathbb{F}.)\,([Z]) \in \mathrm{A}_{d-i}(E)_{\mathbb{Q}}$ に注意。よって、$0 \le s < k$ のとき、$\mathrm{ch}_s(\pi^*\mathbb{F}.)\,([Z]) = 0$ であることがわかった。

参考文献

[1] W. Fulton, *Intersection Theory, 2nd Edition*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1997.

[2] H. Gillet and C. Soulé, *Intersection theory using Adams operations*, Invent. Math. **90** (1987), 243–278.

[3] A. J. DE JONG, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES 83 (1996), 51–93.

[4] K. KURANO, *Numerical equivalence defined on a Chow group of a Noetherian local ring*, in preparation.

[5] P. C. ROBERTS, *The vanishing of intersection multiplicities and perfect complexes*, Bull. Amer. Math. Soc. **13** (1985), 127–130.

[6] P. ROBERTS, *MacRae invariant and the first local chern character*, Trans. Amer. Math. Soc., **300** (1987), 583–591.

[7] R. W. THOMASON AND T. TROBAUGH, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories.* "The Grothendieck Festschrift", Vol. III, 247–435, Progr. Math., 88, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.

東京都立大学大学院理学研究科数学教室
192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1
kurano@comp.metro-u.ac.jp
http://www.comp.metro-u.ac.jp/~kurano

Hilbert functions and maximal Betti numbers of Artinian K - algebras with the weak Lefschetz property

張間忠人，Juan. C. Migliore，Uwe Nagel，渡辺純三

$R=K[x_0, x_1, ,,, , x_n]$を体 K 上の $n+1$ 変数多項式環，I を R の斉次イデアル，A=R/I を標準的次数付環で Artinian とする．すべての i に対して g 倍写像 $\times g: A_i \to A_{i+1}$ が単射または全射になるような A の 1 次式 g が存在するとき，A は**弱 Lefschetz 性**をもつという．このとき g のような性質をもつ 1 次式を Lefschetz element という．さらに，すべての i と d に対して g^d 倍写像 $\times g^d: A_i \to A_{i+d}$ が単射または全射になるような A の 1 次式 g が存在するとき，A は**強 Lefschetz 性**をもつという．この場合も g のような性質をもつ 1 次式を Lefschetz element という．弱 Lefschetz 性をもつ Artinian 環のクラスを $\mathcal{WL}$，強 Lefschetz 性をもつ Artinian 環のクラスを $\mathcal{SL}$ であらわす．講演では，これら 2 つのクラスの Hilbert 関数を特徴づけ，同じ Hilbert 関数をもつ Betti 数列の中で maximal Betti 数列を求めた（[5]）．実際，いずれも両者は一致することがわかる．

§1　準備

標準的次数付環（以下，簡単に“環”という）A=R/I のヒルベルト関数を

$$H(A,i):=\dim_K A_i \quad (i=0,1,2,,,)$$

で表す．$\Delta H(A,0):=1$，$i=1,2,,,$ に対して $\Delta H(A,i):=H(A,i)-H(A,i-1)$とおく．また $s(A):=\mathrm{Max}\{i \mid A_i \neq (0)\}$を A の socle degree，$d(I):=\mathrm{Max}\{i \mid I_i \neq (0)\}$を I の initial degree,

$$\beta_{ij}(A):=\dim_K[\mathrm{Tor}_i^R(A,K)]_j$$

を A の(i,j)番目のベッチ数という．

注意 1 1) たとえば A が Artinian のとき，どの i に対しても $\beta_{i\,i+j}(A)=0$ （ただし，$\forall j<d(I)$または$\forall j>s(A)$）である．

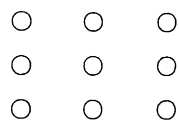
2) $F(A,\lambda):=\sum_{i\geq 0} H(A,i)\lambda^i$ を A のヒルベルト級数という．このとき，ヒルベルト関数（級数）とベッチ数列には次の関係式が成立する：

$$F(A,\lambda) := \frac{1+\sum_{i\geq 1}\{(-1)^i \sum_{j\in Z} \beta_{ij}\, \lambda^j\}}{(1-\lambda\,)^{n+1}}$$

3) 上の関係式からベッチ数列がわかればヒルベルト関数が決まる．しかし次の例によ うに，同じヒルベルト関数をもつベッチ数列は何通りか起こり得る．P^2の 9 点からなる 4 つの集合の Hilbert 関数と Betti 数列を計算する：

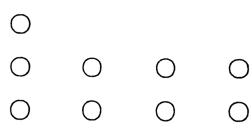
Hiblert 関数はすべて　1，3，6，8，9，9　→

I



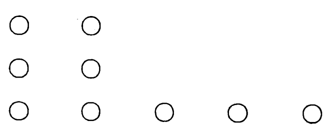
i＼j	3	4	5	6
1	2			
2				1

II



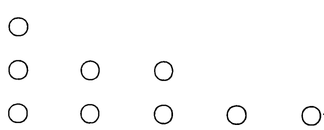
i＼j	3	4	5	6
1	2	1		
2		1		1

III



i＼j	3	4	5	6
1	2		1	
2			1	1

IV



i＼j	3	4	5	6
1	2	1	1	
2		1	1	1

定義 2　$\mathcal{C}$をある性質をもつ標準的次数付環のクラスとする．A∈$\mathcal{C}$が **maximal** ベッチ数列をもつとは，どの i，j に対しても

$$\beta_{ij}(A) \geqq \beta_{ij}(B)$$

（∀B∈$\mathcal{C}$）が成立するときをいう．

ここで，maximal ベッチ数列に関するいくつかの結果を紹介する：

1) $\mathcal{C}$:={R/I | R/I は標準的次数付環}において，R/L（ただし，L は lex-segment イデアル）は maximal ベッチ数列をもつ（[1,6,9]）．さらに，{β_{ij}(R/L)}はそのヒルベルト関数（すなわち O-列（定義 5））の情報から具体的に計算できる（[3,4]）．

2) $\mathcal{C}$:={R/I | R/I は余次元 3 のゴレンスタイン環}も完全に解決済みである．すなわち，そのような環 R/I のヒルベルト関数は完全に特徴付けられ（[10]），同じヒルベルト関数をもつベッチ数列もすべて具体的にある決まった手順ですぐに計算できる（[2]）.
3) $\mathcal{C}$:={R/I | R/I は弱 Lefschetz 性をもつゴレンスタイン環}も上と同じ意味で完全に解決済みである（[8]）.

次に，弱 Lefschetz 性（WLP），強 Lefschetz 性（SLP）をもつ環のいくつかの例を紹介する：
1) $A=k[x_0]/I$ は SLP をもつ.
以下の 2)，3)，4)では体 K の標数を 0 と仮定する.
2) $A=K[x_0,x_1]/I$ は SLP をもつ（[5]）.
3) monomial complete intersection $A=K[x_0,x_1,,,x_n]/(x_0^a,x_1^b,,,x_n^c)$は SLP をもつ（[11]）.
4) complete intersection $A=K[x_0,x_1,x_3]/(f_1,f_2,f_3)$ は WLP をもつ（[5]）.

予想 3　complete intersection は SLP をもつ.

例 4　WLP をもたない例として：$R=K[x,y,z]$において $\{x^2,xy,xz,y^3,y^2z,yz^2,z^3\}$で生成されるイデアル L を考える．L はヒルベルト関数 $H(A=R/L,i)$:1,3,3,1,0,0,,, をもつ lex-segment イデアルである．このとき，すべての 1 次式 $g\in A_1$ に対して $gx'=0$（ただし x' は x の像）であるので A は WLP をもたない.

§2　WLP をもつ環のヒルベルト関数

2つの正の整数 h と i に対して，$\exists_1\ m_i>m_{i-1}>\cdots>m_j\geqq j>0$　s.t.

$$h=\binom{m_i}{i}+\binom{m_{i-1}}{i-1}+\cdots+\binom{m_j}{j}.$$

このとき，$h^{<i>}:=\binom{m_i+1}{i+1}+\binom{m_{i-1}+1}{i}+\cdots+\binom{m_j+1}{j+1}$　とおく．また　$0^{<i>}:=0$.

定義 5　$\underline{a}$: a_0, a_1, a_2,,, を 0 以上の整数からなる列とする．$\underline{a}$ が O-列であるとは，$a_0=1$ であり，すべての $i\geqq1$ に対して $a_{i+1}\leqq a_i^{<i>}$ が成立するときをいう.

次の定理はヒルベルト関数の理論の basic result である.
定理 6（[7,10]）a_0, a_1, a_2,,,を 0 以上の整数からなる列とする．このとき，次は同値である.

1) $\exists A$：標準的次数付環 s.t. $H(A,i)=a_i \ \forall i$

2) $\exists_1 L \subset R$ ($a_1=n+1$)：lex-segment イデアル s.t. $H(R/L,i)=a_i \ \forall i$

3) $a_0, a_1, a_2,,,$ は O-列である.

すでに紹介した結果をもう一度定理の形で述べておく.

定理 7 ([1,6,9]) $\underline{a}$: $a_0, a_1, a_2,,,$ を O-列とする. このとき, $\underline{a}$ を Hilbert 関数にもつすべての環 B に対して, $\beta_{ij}(R/L) \geqq \beta_{ij}(B)$ が成立する.

注意 8 A は WLP をもつ Artinian 環で g を Lefschetz element とする. A の socle degree を s とする.

1) もし$\times g : A_j \to A_{j+1}$ が全射ならば$\times g : A_{j+1} \to A_{j+2}$ も全射である. ゆえに

$$u_1 := \mathrm{Min}\{j \mid \times g : A_j \to A_{j+1} \text{ は全射}\}$$

とおくと

(＊1)　$H(A,0) < H(A,1) < \cdots < H(A,u_1) \geqq H(A,u_1+1) \geqq \cdots \geqq H(A,s) > 0.$

2) さらに, 次のような ($u_1<$) $u_2 < u_3 < \cdots < u_m$ をとる.

$H(A,u_1) = H(A,u_1+1) = \cdots = H(A,u_2-1) > H(A,u_2) = H(A,u_2+1) = \cdots = H(A,u_3-1) >$
$\cdots > H(A,u_m) = H(A,u_m+1) = \cdots = H(A,s) > 0.$

3) 数列

(＊2)　$1,\ \Delta H(A,1),\ \Delta H(A,2),,, \Delta H(A,u_1), 0, 0, \to$

は A/gA のヒルベルト関数である.

4) 次で定義されるイデアルを A の socle という：

$$\mathrm{Soc}(A) := \{a \in A \mid A_1 a = 0\}.$$

このとき明らかに

$$\mathrm{Soc}(A) \subset 0 :_A g,$$

ただし $0 :_A g := \{a \in A \mid ga = 0\}$.

5) $j \in \{u_2-1, u_3-1,,, u_m-1, s(A)\}$ に対して

$$\dim_K[0 :_A g]_j = -\Delta H(A, j+1).$$

それ以外の j に対しては

$$\dim_K[0 :_A g]_j = 0.$$

命題 9 0 以上の整数の列 $\underline{h}$: $h_0, h_1,,, h_s$ に対して, 次は同値である.

i) $\underline{h}$ をヒルベルト関数にもち, SLP をもつ Artinian 環が存在する.

ii) $\underline{h}$ をヒルベルト関数にもち, WLP をもつ Artinian 環が存在する.

iii) $\underline{h}$ は上の (＊1) と (＊2) の条件をみたす, すなわち

(＊1)　$h_0 = 1 < h_1 < \cdots < h_{u_1} \geqq h_{u_1+1} \geqq \cdots \geqq h_s > 0,$

(＊2)　$1, h_1-h_0, h_2-h_1,,, h_{u_1}-h_{u_1-1}, 0, 0, \to$ は O-列.

証明の概略 上の注意 8 の 1)と 3)より i) → ii) → iii) は明らか.

iii) → ii) と iii) → i) : 2 つの条件（＊1）と（＊2）をみたす数列 $\underline{h}$ に対して，上の注意 8 の 2)と同じように

$$u_1 < u_2 < u_3 < \cdots < u_m$$

をとる.

構成 1 $S=K[x_1,x_2,,,x_n]$のイデアルの列 $J_1' \subset J_2' \subset \cdots \subset J_m'$ で

1) $H(S/J_1',0)=1$, $H(S/J_1',i)=h_i-h_{i-1}$ $(i=1,2,,,u_1)$, $H(S/J_1',i)=0$ $(i>u_1)$,

2) $\mathrm{length}(S/J_i')=h_{u_i}$ $(i=2,3,,,m)$

をみたすものをとってくる. $J_i:=J_i'R$ とおく. さらに

$$I := J_1 + \sum_{i=2}^{m}[J_i]_{\geq u_i} + m^{s+1}$$

ここで、$[J_i]_{\geq u_i} := \oplus_{t\geq u_i}[J_i]_t$ であり，$m:=(x_0,x_1,,,x_n)$ である.

このとき $A:=R/I$ のヒルベルト関数は $\underline{h}$ に一致し，WLP をもつことがわかる.

構成 2 さらに $J_2' \subset \cdots \subset J_m'$に次の条件を追加する.

2') $H(S/J_i',t)=h^{(i)}{}_t-h^{(i)}{}_{t-1}$,

ただし $h^{(i)}(t):=\mathrm{Min}\{h_t, h_{u_i}\}$ $(t<u_i)$, $h^{(i)}(t):=h_{u_i}$ $(t\geq u_i)$である.

このとき $A:=R/I$ のヒルベルト関数は $\underline{h}$ に一致し，SLP をもつことがわかる. □

§3 WLP をもつ環の maximal ベッチ数列

定理 10 1) WLP をもつ Artinian 環を A とする.

・$j \leqq u_2-2$ のとき $\beta_{i\,i+j}(A) \leqq \beta_{i\,i+j}(S/L)$,

・$u_2-1 \leqq j \leqq u_1$ のとき $\beta_{i\,i+j}(A) \leqq \beta_{i\,i+j}(S/L)+\mathrm{Max}\{0,-\Delta H(A,j+1)\}\times{}_nC_{i-1}$,

・$j \geqq u_1+1$ のとき $\beta_{i\,i+j}(A) \leqq \mathrm{Max}\{0,-\Delta H(A,j+1)\}\times{}_nC_{i-1}$.

ここで，$\mathrm{Max}\{\Delta H(A,t), 0\}$ $(t=0,1,2,,,)$ をヒルベルト関数にもつ Artinian 環 S/L（ただし L は S の lex-segment イデアル）のベッチ数列を $\beta_{ij}(S/L)$で表す.

2) A のヒルベルト関数に対して，構成 1 によって構成される WLP をもつ Artinian 環は 1)の右辺をベッチ数列にもつ.

3) 同じように, A のヒルベルト関数に対して, 構成 2 によって構成される SLP をもつ Artinian 環は 1)の右辺をベッチ数列にもつ.

問題 11 WLP をもつ Artinian 環のベッチ数列は, SLP をもつ Artinian 環で実現できるか？

この問題の答えとして，我々は実現できると予想している.

参考文献

[1] A. Bigatti, *Upper bounds for the Betti numbers of a given Hilbert function*, Comm. Alg. **21** (1993), 2317-2334.

[2] S. J. Diesel, *Irreducibility and Dimension Theorems for families of height 3 Gorenstein algebras*, Pacific J. Math. **172** (1996), 365-397.

[3] S. Eliahou and M. Kervaire, *Minimal resolutions of some monomial ideals*, J. Alg. **129** (1990), 1-25.

[4] A. V. Geramita, T. Harima and Y. S. Shin, *Extremal point sets and Gorenstein ideals*, Adv. Math. **152** (2000), 78-119.

[5] T. Harima, J. Migliore, U. Nagel and J. Watanabe, *The weak and strong Lefschetz properties for Artinian K-algebras*, preprint.

[6] H. Hulett, *Maximal Betti numbers of homogeneous ideals with a given Hilbert function*, Comm. Alg. **21** (1993), 2335-2350.

[7] F. Macaulay, *Some properties of enumeration in the theory of modular systems*, Proc. London Math. Soc. **26** (1927), 531-555.

[8] J. Migliore and U. Nagel, *Reduced arithmetically Gorenstein schemes and simplicial polytopes with maximal Betti numbers*, preprint.

[9] K. Pardue, *Deformation classes of graded modules and maximal Betti numbers*, Illinois J. Math. **40** (1996), 564-585.

[10] R. Stanley, *Hilbert functions of graded algebras*, Adv. In Math. **28** (1978), 57-83.

[11] J. Watanabe, *The Dilworth number of Artinian rings and finite posets with rank function*, Commutative Algebra and Combinatorics, Advanced Studies in Pure Math. 11 (1989), 303-312.

Department of Information Science, Shikoku University, Tokushima 771-1192, JAPAN
E-mail address: harima@keiei.shikoku-u.ac.jp

Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, USA
E-mail address: Juan.C.Migliore.1@nd.edu

Fachbereich Mathmatik und Informatik, Universität-Gesamthochschule Parderborn, D-33095 Paderborn, GERMANY
E-mail address: uwen@math.uni-paderborn.de

Department of Mathematical Sciences, Tokai University, Hiratuka 259-12, JAPAN
E-mail address: junzowat@ss.u-tokai.ac.jp

正規次数付特異点のセグレ積について

(孤立特異性，有理特異性，そして多重種数)

Masataka Tomari　(泊　昌孝)

Introduction. 正規次数付環 R によって定義される特異点は、その Demazure's construction [1] としての幾何学表現 $R = R(X, D)$ と関係して、有理特異性 [2,8,9] や孤立特異性 [6] の判定法が知られている。今回、次数付環の Segre 積をとった場合の対応する判定基準を報告する。以下、基礎体 k は、$k = \bar{k}$ なるものとし、次数つき環の zero 次部分は kと一致するものとしている。また，Theorem 4 以外では標数が zero であることを仮定している。R_1, R_2 を normal graded ring であるとき Segre 積を $R_1 \sharp R_2 = \oplus_{n \geq 0}(R_1)_n \otimes (R_2)_n$ で定義する [3].

Theorem 1. R_1, R_2を Cohen-Macaulay と仮定する。$R_1 \sharp R_2$ が rational singularity になるためには、次の 3 条件が成立することが必要十分である。
(1) $R_1 \sharp \mathrm{H}^{\dim R_2}_{(R_2)_+}(R_2) = 0$ かつ $\mathrm{H}^{\dim R_1}_{(R_1)_+}(R_1) \sharp R_2 = 0$ 。
(2) $\mathrm{Spec} R_1 - V((R_1)_+)$ および $\mathrm{Spec} R_2 - V((R_2)_+)$ はともに rational singularity 。
(3) $\left[\mathrm{H}^{\dim R_1}_{(R_1)_+}(R_1) \sharp \mathrm{H}^{\dim R_2}_{(R_2)_+}(R_2)\right]_m = 0$ for $m \geq 0$。

Remark. (1) が、$R_1 \sharp R_2$ の Cohen-Macaulay 性をあらわし、(3) が、関係式 $a(R_1 \sharp R_2) < 0$ に対応することは、Goto-Watanabe[3] の有名な結果である。今回、私が新たに証明したのは、(2) が、$\mathrm{Spec} R_1 \sharp R_2 - V((R_1 \sharp R_2)_+)$ の有理特異性と同値な条件であることである。ここまでわかれば、$R_1 \sharp R_2$ の rationality は、Flenner-Watanabe[2,8,9] の判定法より直接したがう内容である。また、(1),(3) に関しては、Goto-Watanabe[3] により、R_1, R_2 の Cohen-Macaulay 性を、normal に弱めて、もうすこし詳しく述べ直すこともできる。

例. (1) $R_1 = \mathrm{C}[x, y, z]/x^2 + y^3 + z^7$ with weight system $(21, 14, 6; 42)$, $R_2 = \mathrm{C}[s, t, u]/s^2 + t^3 + u^{10}$ with weight system $(15, 10, 3; 30)$ について、これらはどちらも 有理特異点ではなく、$a(R_1) = 1$, $a(R_2) = 2$ であるが、$a(R_1 \sharp R_2) < 0$ であり、$R_1 \sharp R_2$が 3 次元有理特異点になることがわかる。 (2) 次に、R_1 のかわりに $R_3 = \mathrm{C}[x, y, z]/x^3 + xy^3 + yz^2$ with weight system $(6, 4, 7; 18)$, とすると、 有理特異点ではなく、$a(R_3) = 1$, であるが、$a(R_3 \sharp R_2) < 0$ であり、これも $R_3 \sharp R_2$が 3 次元有理特異点になることがわかる。

実は次に述べる Theorem 2 によって (1) では、孤立特異点にならない事、(2) は孤立特異点になることがわかる (see §3)。

Demazure 表現では、Segre 積 $R_1 \sharp R_2$ は、$R_1 \sharp R_2 = R(X_1 \times X_2, pr_1^*(D_1) + pr_2^*(D_2))$, ただし、$R_i = R(X_i, D_i)$ 、$pr_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ は projection としている ($i = 1, 2$)。Demazure 表現の言葉による孤立特異性の判定条件 [6] を下に、以下を得た。

Theorem 2. $R_1 \sharp R_2$ が孤立特異点を持つためには、次の 2 条件が成立することが必要十分である。(1) R_1, R_2 はともに孤立特異点、(2) 各 $(p, q) \in \mathrm{Supp}(D_1) \times \mathrm{Supp}(D_2)$

について関係式

$$GCD\,(L_p|Cl(O_{X_{1},p})|, L_q|Cl(O_{X_{2},q})|) = 1$$

が成立する。ただし、$D_1 = \sum \frac{p_V}{q_V} V$ at p に関する整数 L_p を、p を support に含む X_1 の prime divisor $V \subset X_1$に関する q_Vの最小公倍数として、
$L_p = LCM\,(q_V | p \in V \subset X_1)$ としている。D_2 at q に関する L_qも同様に、$L_q = LCM\,(q_V | q \in V \subset X_2)$ とする。

上に述べた 2 つの命題は共に、$R(X, D)$ に対する $U(X, D) = \mathrm{Spec}(R) - V(R_+)$ の性質を論じたものである。

Segre product は特異点（特に例外集合）の分類論の立場では、直積に類するものと考えられるようだが、上の例にも見られるように rational singularity という性質について論じるならかなりデリケートな操作であることがわかった。本稿では, rationality と regularity 以外の性質，特に特異点の多重種数についての加法性についても論じてみる。次の結果により、多重種数による分類としてみるならば、理想の加法性がなりたち直積に位置する操作であることも確認できた。また，関連する log terminal 特異点に関する命題も [7] で与えられる特徴付けを用いて証明できる。以下の結果は，石井氏による asymptotic behavior of δ_m に関する基本定理などを用いて得られた。 実際，log terminal 特異点は $\kappa_\delta = -\infty$ となる Q-Gorenstein 特異点である。

Theorem 3. Assume the Segre product of normal graded rings $R_1 \sharp R_2$ has only isolated singularity.(We define $\kappa_\delta = -\infty$ when $\delta_m =$ for all m). Then:

(1)If $\kappa_\delta(R_1) = \dim R_1$ and $\kappa_\delta(R_2) = \dim R_2$ holds, then

$$\kappa_\delta(R_1 \sharp R_2) = \kappa_\delta(R_1) + \kappa_\delta(R_2) - 1 \; (= \dim R_1 \sharp R_2\ ).$$

(2)If $\kappa_\delta(R_1) < \dim R_1$ and $\kappa_\delta(R_2) = \dim R_2$ holds, then

$$\kappa_\delta(R_1 \sharp R_2) = \kappa_\delta(R_1) + \kappa_\delta(R_2) - 2 \; (\leq \dim R_1 \sharp R_2 - 2\ ).$$

(2)'If $\kappa_\delta(R_1) = \dim R_1$ and $\kappa_\delta(R_2) < \dim R_2$ holds, then

$$\kappa_\delta(R_1 \sharp R_2) = \kappa_\delta(R_1) + \kappa_\delta(R_2) - 2 \; (\leq \dim R_1 \sharp R_2 - 2\ ).$$

(3)If $\kappa_\delta(R_1) < \dim R_1$ and $\kappa_\delta(R_2) < \dim R_2$ holds, then

$$\kappa_\delta(R_1 \sharp R_2) = \kappa_\delta(R_1) + \kappa_\delta(R_2) \; (\leq \dim R_1 \sharp R_2 - 3\ ).$$

ここで，特異点 (V, p) に対する L^2-多重種数 $\delta_m(V, p)$ は，good resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \to (V, p)$ を用いて$\delta_m(V, p) = \dim \omega_V^{[m]} / \psi_*(\omega_{\tilde{V}}^{[m]}((m-1)A_{red}))$ として計算されるものであり，κ_δ は δ_m に対応する小平次元である。環論的には，次の特殊な命題で δ_m を捉えていただきたい。

Theorem 4. $R = R(X, D)$ が normal isolated singularity を定めるとき，$\delta_m(R) = \sum_{k \leq 0} \dim \left[K_R^{[m]}\right]_k$ となる。

特に，$a(R)$ の正負が κ_δ と密接に関係する量である。関連して，特異点が log terminal や log canonical になる為の条件も興味のあるところである。その際，canononical module および関連する divisor class group の構造が自然な問題となる。

base field が閉体の場合に，以下が成立することを報告したい。

Theorem 5. $R = R(X_i, D_i)$, $i = 1, 2$ はそれぞれ代数閉体上定義されているとする。次の縦、横の完全列が存在する。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & \dfrac{\mathbf{Z}\cdot D_1 \oplus \mathbf{Z}\cdot D_2}{\mathbf{Z}\cdot(D_1+D_2)} & \cong & \mathbf{Z} & & & & \\
 & & \downarrow \alpha & & & & & & \\
0 & \rightarrow & \dfrac{\mathrm{Div}(X_1, D_1) \oplus \mathrm{Div}(X_2, D_2)}{\mathrm{Ker}\sharp} & \overset{\gamma}{\rightarrow} & Cl(R_1\sharp R_2) & \overset{\delta}{\rightarrow} & \dfrac{Cl(X_1 \times X_2)}{Cl(X_1) \times Cl(X_2)} & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \beta & & & & & & \\
 & & Cl(R_1) \oplus Cl(R_2) & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

ここで、α, β はそれぞれ自然な map (ただし、β の well-definedness には若干の注意が必要), γ は、homogeneous divisorial ideals の Segre product に対応する map $\sharp : \mathrm{Div}(X_1, D_1) \oplus \mathrm{Div}(X_2, D_2) \rightarrow \mathrm{Div}(X_1 \times X_2, D)$ から自然に導かれる map である。δ は $\sharp$ によって、$\mathrm{Div}(X_1 \times X_2, D)$ の分数部分を kill する操作から canonical に定まる map である。

Corollary 9. $\mathbf{Z} \subset Cl(R_1\sharp R_2)$ である。特に、$Cl(R_1\sharp R_2)$ は必ず無限群である。

以下，Theorem 1 と Theorem 2 の証明を与える。§3 では，講演の中でも行った，具体的な Demazure 構成の計算の実態をお見せしたいと思います。他の命題については，準備中の論文を参照ください。

§1. Isolatedness of non-(P) condition locus of the Segre product: (P) は適当な条件である。

まず、homogeneous maximal ideal 以外で、regularity や rationality などの条件がどのような条件下で成立するかを考えてみよう。Corollary 4 までで、$R(X_i, D_i)$ for $i = 1, 2$ についての条件から即従う方向がわかる。

$R_1 = R(X_1, D_1), R_2 = R(X_2, D_2)$ をそれぞれの、normal graded ring の Demazure's construction とする。$R_1\sharp R_2$ をそれらの Segre product をあらわす。

$$pr_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$$

for $i = 1, 2$、を直積からの射影とする。

Proposition 1. $D_i \in \mathrm{Div}(X_i) \otimes \mathbf{Q}$ が、$T_i \in Q(R_i)$ なる homogeneous element of degree 1 でさだまっているとする。$T = T_1 \otimes T_2 \in Q(R_1\sharp R_2)$ なる homogeneous element of degree 1 に対応する Demazure divisor D on $X_1 \times X_2 = \mathrm{Proj}(R_1\sharp R_2)$ は $pr_1^*(D_1) + pr_2^*(D_2) \in \mathrm{Div}(X_1 \times X_2) \otimes \mathbf{Q}$ とあらわされる。

Proof. 適当な自然数 $N>0$ があって、N次 Veronease subring $R_i^{(N)}$ はそれぞれ一次で生成されている、$i=1,2$。よって、

$$(R_1\sharp R_2)^{(N)} = R_1^{(N)}\sharp R_2^{(N)} = k\left[(R_1)_N \otimes (R_2)_N\right]$$

となり、これより、T に対する Demazure's divisor を D とすると、

$$D = \frac{1}{N}\left(pr_1^*(ND_1) + pr_2^*(ND_2)\right) = pr_1^*(D_1) + pr_2^*(D_2)$$

である。

(証明終わり)

Demazure [1] や 渡辺敬一氏の議論 [8,9] で，本質的に用いられる $\mathrm{Spec}(R) - V(R_+) \cong U(X,D) = \mathrm{Spec}_X\left(\oplus_{k\in Z} O_X(kD)T^k\right)$ について性質を論じてみよう。

$p \in X_1$, $q \in X_2$ としよう。上の表示により、cylinder $U(X_1 \times X_2, D)_{(p,q)}$ は以下のようにあらわされる。

$$\begin{aligned}&U(X_1\times X_2, D)_{(p,q)}\\ &\qquad = \mathrm{Spec}_{(X_1\times X_2,(p,q))}\left(\oplus_{k\in \mathrm{Z}} O_{X_1\times X_2}\left(k\cdot(pr_1^*(D_1)+pr_2^*(D_2))\right)_{(p,q)}\right)\end{aligned}$$

次ぎの Lemma は簡単だが、重要である。

Lemma 2. 上の状況で、$p \in X_1$ で、D_1 が integral かつ Cartier divisor ならば、次の k-Scheme としての同型が存在する。

$$U(X_1\times X_2, D)_{(p,q)} \cong (X_1, p) \times U(X_2, D_2)_q$$

Proof. 適当な元 $f \in Q(O_{(X_1,p)})$ に対して、fractional ideals の等号 $f^k O_{(X_1,p)} = O_{X_1}(kD_1)_p \subset k(X_1)$ が $k \in Z$ に対して成立する。よって、base field k 上の algebra として、

$$\begin{aligned}&\oplus_{k\in \mathrm{Z}}\, O_{X_1\times X_2}\left(k\cdot(pr_1^*(D_1)+pr_2^*(D_2))\right)_{(p,q)}\\ &\qquad = \oplus_{k\in \mathrm{Z}} f^k O_{X_1\times X_2}(k\,pr_2^*(D_2))_{(p,q)} \cong O_{(X_1,p)} \otimes \left(\oplus_{k\in \mathrm{Z}} O_{(X_2,q)}(kD_2)\right)\end{aligned}$$

である。

(証明終わり)

Corollary 3. $p \in X_1$ で、D_1 が integral Cartier divisor であって、かつ、X_1 が p で regular であると仮定する。このとき、次の命題が、後で述べる性質 (P) に対して、それぞれ成り立つ。

$U(X_1 \times X_2, D)_{(p,q)}$ が条件 (P) である為には、$U(X_2, D_2)_q$ が条件 (P) であることが必要十分条件である。

ここで、条件 (P) は、

(1) regular scheme である。(2) rational singularities を持つのみである。(3) Cohen-Macaulay scheme である。 (4) Gorenstein scheme である。(5) log terminal singularity である。 (6) log canonical singularity である。(7) Du Bois singularities である。(8) Serre's condition (R_k)。(9) Serre's condition (S_k)。

証明は、明らかであろう。

Corollary 4. 集合 $S \subset X_1 \times X_2$ を、

$$S = \left\{ (p,q) \in X_1 \times X_2 \;\middle|\; \begin{array}{c} p \in X_1 \text{で、} D_1 \text{が integral Cartier divisor} \\ \text{であって、かつ、} X_1 \text{が } p \text{ で regular である,} \\ \text{または、} \\ q \in X_2 \text{で、} D_2 \text{が integral Cartier divisor} \\ \text{であって、かつ、} X_2 \text{が } q \text{で regular である} \end{array} \right\}$$

と置く。条件 (P) を、Corollary 3 で適用できるものとするとき、次の 2 条件は同値である。

(1) 任意の $(p,q) \in S$で、$U(X_1 \times X_2, D)_{(p,q)}$ について、条件 (P) が成立する。

(2) $U(X_1, D_1), U(X_2, D_2)$ はそれぞれ、各点で、条件 (P) が成立する。

Proof. (2) から (1) は、Corollary 3 の系である。逆をしめそう。 $p \in X_1$ で、D_1 が integral Cartier divisor であって、かつ、X_1 が p で regular である点を一つとる。(少なくとも一点はこのような点が存在する。) 任意の点 $q \in X_2$ に対して、$(p,q) \in S$ だから、Corollary 3 により、$U(X_2, D_2)_q$ に対して条件 (P) が成立する。p と q の立場を入れ替えると、(2) の $U(X_1, D_1)$ についての主張が従う。

(証明終わり)

以下では、上の命題で、条件 (2) にあと、どのような $R(X_1, D_1)$ と $R(X_2, D_2)$ の相互の条件が加われば $U(X_1 \times X_2, D)$ 全体の性質が従うかを論じてゆく。

まず、次の命題は、Segre product の normality を論ずる為にすでに、[3] で行われている議論である。

Proposition 5. 条件 (Q) は、tensor product $\otimes$ と pure subring をとる操作について保たれるものとする。$U(X_i, D_i)$ がそれぞれ、各点で、条件 (Q) をみたすならば、$U(X_1 \times X_2, D)$ について、条件 (Q) が各点で成立する。

これと、全く同じ命題だが、証明から感じる内容としては、以下の形でのべたほうが、より適切な感がある。

Proposition 5'. 条件 (Q) は、tensor product $\otimes$ と pure subring をとる操作について保たれるものとする。$\mathrm{Spec}(R_i) - V((R_i)_+)$ for $i = 1, 2,$ がそれぞれ、各点で、条件 (Q) をみたすならば、$\mathrm{Spec}(R_1 \sharp R_2) - V((R_1 \sharp R_2)_+)$ について、条件 (Q) が各点で成立する。

Proof.

まず、

$$\mathrm{Spec}(R_1 \sharp R_2) - V((R_1 \sharp R_2)_+) = \bigcup_{\substack{g_1 \otimes g_2 \in (R_1 \sharp R_2)_k, \\ k \geq 1}} \mathrm{Spec}(R_1 \sharp R_2)_{g_1 \otimes g_2}.$$

である。さらに、

$$(R_1 \sharp R_2)_{g_1 \otimes g_2} = (R_1)_{g_1} \sharp (R_2)_{g_2} < \oplus ((R_1)_{g_1} \otimes (R_2)_{g_2})$$

となる。 これで、$\mathrm{Spec}(R_i) - V((R_i)_+) = \cup_{g_i \in (R_i)_k, k \geq 1} \mathrm{Spec}(R_i)_{g_i}$ の性質 (Q) が、tensor と pure subring ($< \oplus$) の関係で、$\mathrm{Spec}(R_1 \sharp R_2) - V((R_1 \sharp R_2)_+)$ に伝搬する。

(証明終わり)

次の命題を確認して、Introduction の Theorem 1 の証明ができたことになる。

Lemma 6.。 $\mathrm{Spec}(R_i) - V((R_i)_+)$ for $i = 1, 2$, がそれぞれ、rational singularities を持つためには、$\mathrm{Spec}(R_1 \sharp R_2) - V((R_1 \sharp R_2)_+)$ が rational singularities を持つことが必要十分条件である。

Proof. Proposition 5' と Corollary 4 より従う。ただし、rational singularity が、pure subring で保たれる事は、Boutot の定理であり、tensor で保たれる事は Elkik の定理である。(後者はもう少しやさしい内容かな？)

(証明終わり)

§2. The Segre product が孤立特異点になる為の条件。

以下では上記の条件 (1) $R_i = R(X_i, D_i)$ が孤立特異点になる for $i = 1, 2$ を大前提として、上の定理の証明として、$R_1 \sharp R_2$ が孤立特異点になる為の条件を考えてみよう。

(1) まず、[6] §3,4 から Demazure's construction が孤立特異点になる為の条件を思い出してみよう。

Theorem 1.(Theorem (4.1)[6]) Let $R = R(X, D)$ be a normal graded ring. Then $\mathrm{Spec}(R) - V(R_+)$ is regular if and only if for every closed point x of X, the following four conditions hold.

(1) (X, x) is a "cyclic quotient singularity " in the sense of (3.6)[6].

(2) The support of the fractional part of D at x is cyclic normal crossing in the sense of (3.6)[6].

(3) In the local representation of D_x as $D_x = \sum_{V_i \in Irr^1(O_{X,x})} \frac{(p_x)_i}{(q_x)_i} V_i$, $(q_x)_i$ ($i = 1, \ldots, s$) are pairwise relatively prime.

(4) The divisor $(q_x)_1 \cdot \ldots \cdot (q_x)_s \cdot D$ generates the local class group $Cl(O_{X,x})$.

[6] から、cyclic normal crossing などに関する記述も copy させていただく。

Definition-Proposition (3.6)([5,(5.7)]) Let $(A, \mathfrak{m})$ be a d-dimensional Noetherian local ring which contains a field $k \cong A/\mathfrak{m}$, and r be a positive integer. Then the following conditions are equivalent to each other.

(i) There is a normal subsemigroup H of $\left(\mathbb{Z}_{\geq 0}\right)^d$ defined by

$$H = \{ \ (s_1, \ldots, s_d) \in \left(\mathbb{Z}_{\geq 0}\right)^d \ \mid \ \sum_{i=1}^{d} a_i s_i \equiv 0 \ (\mod r) \ \}$$

for some d-tuple $(a_1, ..., a_d)$ of integers such that the m-adic completion $A^\wedge$ is isomorphic to

$$k[[H]] = k[[T_1^{s_1} \dots T_d^{s_d} \mid (s_1, ..., s_d) \in H]],$$

where $T_1, \dots, T_d$ are indeterminates over k and integral over A.

(ii) There is a regular local overring $(B, \mathbf{n})$ of A with a grading $B = \overset{r-1}{\underset{n=0}{\oplus}} B_n$ by $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ such that $B_n \subset \mathbf{n}$ for $n = 1, ..., r-1$ and $B_0 = A$.

We say that A is a *cyclic quotient singularity* if A satisfies these equivalent conditions. If r is prime to char(k), then A is an invariant subring of an action $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ on a regular local ring.

For $D \in Div(A)$, we say that D is *cyclic normal crossing* if the support of D is included in $\sum_{j=1}^{d} V(T_j B \cap A)$ for some description of A as above. Here the choice of $T_1, \dots, T_d$ is not unique in general. If A is regular (or $r = 1$), cyclic normal crossing is nothing but normal crossing in standard sense. Also, it will be important that $i(T_j B \cap A) = T_j B$, where $i : Div(A) \to Div(B)$ is as in (2.4)[6]. Hence if D is cyclic normal crossing, then $i(D)$ is normal crossing in usual sense.

(2) 以下では、$ch(k) = 0$ なる代数閉体 k 上定義されている状況を考える。上に引用した Theorem 4.1 は、complete local ring of cyclic quotinet singularity の表示を込めて、もう少し「やさしく」次のようにあらわすことができる。

Theorem 1'.(Theorem (4.1)[6]) Let $R = R(X, D)$ be a normal graded ring. Asume $ch(k) = 0$ with $R_0 = k$. Then
Spec$(R) - V(R_+)$ is regular if and only if for every closed point x of X, the following four conditions hold.

(1) $O^\wedge_{X,x} \cong k[[z_1, \dots, z_d]]^{\mathbf{Z}/m_x\mathbf{Z}}$, where $\mathbf{Z}/m_x\mathbf{Z} =< \rho >$ acts on $k[[z_1, \dots, z_d]]$ denoted by $\frac{1}{m_x}(a_1, \dots a_d)$ as usual notation.

(2) The support of the fractional part of D at x is contained in $\{z_1 \cdot \dots \cdot z_d = 0\} \cap \mathrm{Spec}k[[z]]^{\mathbf{Z}/m_x\mathbf{Z}}$.

(3) In the local representation of D_x as $D_x = \sum_{V_i \in Irr^1(O_{X,x})} \frac{(p_x)_i}{(q_x)_i} V_i$, $(q_x)_i$ ($i = 1, ..., s$) are pairwise relatively prime.

(4) The divisor $(q_x)_1 \cdot \dots\dots \cdot (q_x)_s \cdot D$ generates the local class group $Cl(O^\wedge_{X,x})$. この時、$\mid Cl(O^\wedge_{X,x}) \mid = m_x$ である。

Lemma 2. R_1, R_2 が isolated singularity であるとする。集合 $S \subset X_1 \times X_2$ を、

$$S = \left\{ (p,q) \in X_1 \times X_2 \;\middle|\; \begin{array}{c} p \in X_1 \text{で、} D_1 \text{が integral Cartier divisor} \\ \text{であって、かつ、} X_1 \text{が } p \text{ で regular である,} \\ \text{または、} \\ q \in X_2 \text{で、} D_2 \text{が integral Cartier divisor} \\ \text{であって、かつ、} X_2 \text{が } q \text{で regular である} \end{array} \right\}$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
&X_1 \times X_2 - S \\
&\qquad = \{p \in X_1 \mid L_p|Cl(O_{X_1,p})| \geq 2\} \times \{q \in X_2 \mid L_q|Cl(O_{X_2,q})| \geq 2\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \subset \mathrm{Supp}(D_1) \times \mathrm{Supp}(D_2)
\end{aligned}
$$

である。

Proof. このとき、$x \in X_i$ で、D_i が integral Cartier divisor であるとする。これは、$L_x|Cl(O_{X_i,x})| = 1$ を仮定する事と同値である。$|\ Cl(O^{\wedge}_{X_i,x})\ | = 1$ であり、(X_i, x) は regular である。

(証明おわり)

§1 の Corollary 4 により、$(p,q) \notin S$ に対して $U(X_1 \times X_2, D)_{(p,q)} = U(X_1 \times X_2, D)_{(p,q)}$ での regularity を論ずるが、Lemma 2 により、$L_p|Cl(O_{X_1,p})| \geq 2$, かつ $L_q|Cl(O_{X_2,q})| \geq 2$ となる点 $(p,q) \in \mathrm{Supp}(D_1) \times \mathrm{Supp}(D_2)$ のみを論ずる。

$O^{\wedge}_{X_1,p} \cong k[[z_1, \ \ldots\ , z_d]]^{\mathbf{Z}/m_p\mathbf{Z}}$ かつ、$O^{\wedge}_{X_2,q} \cong k[[w_1, \ \ldots\ , w_e]]^{\mathbf{Z}/m_q\mathbf{Z}}$ であり、自然な action によって $O^{\wedge}_{X_1 \times X_2,(p,q)} \cong k[[z_1, \ldots z_d, w_1, \ \ldots\ , w_e]]^{(\mathbf{Z}/m_p\mathbf{Z})\times(\mathbf{Z}/m_q\mathbf{Z})}$ となる。今、

これより、$(X_1 \times X_2, (p,q))$ が cyclic quotient singularity になる為の必要十分条件は、$G.C.D.(m_p, m_q) = 1$ である。以下、この同値な条件を仮定する。

この状況で、

$$
Cl(O^{\wedge}_{X_1 \times X_2,(p,q)}) \cong (\mathbf{Z}/m_p\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/m_q\mathbf{Z}) \cong Cl(O^{\wedge}_{X_1,p}) \times Cl(O^{\wedge}_{X_2,q})
$$

となる。

$D = pr_1^*(D_1) + pr_2^*(D_2)$ at (p,q) は、D_1 at p および D_2 at q をそれぞれ、

$$
(D_1)_p = \sum_{\mu=1}^{s_1} \frac{(p_1)_\mu}{(q_1)_\mu}(V_1)_\mu \ \text{ at } \ p,
$$

$$
(D_2)_q = \sum_{\nu=1}^{s_2} \frac{(p_2)_\nu}{(q_2)_\nu}(V_2)_\nu \ \text{ at } \ q,
$$

とあらわしたとき、直積構造 $X_1 \times X_2$ で引き戻したもので、我々の仮定の下では、

$$
D_{(p,q)} = \sum_{\mu=1}^{s_1} \frac{(p_1)_\mu}{(q_1)_\mu} pr_1^*(V_1)_\mu + \sum_{\nu=1}^{s_2} \frac{(p_2)_\nu}{(q_2)_\nu} pr_2^*(V_2)_\nu
$$

となり、$D = pr_1^*(D_1) + pr_2^*(D_2)$ の (p,q) での fractional part は、D_1 at p および D_2 at q の fractional parts をそれぞれ引き戻した部分であり cyclic normal corssing になっている。

$L_p = (q_1)_1 \cdot \ldots \cdot (q_1)_{s_1}, L_q = (q_2)_1 \cdot \ldots \cdot (q_2)_{s_2}$ であり、

$G.C.D(L_p, L_q) = 1$ かつ, L_pL_qD が $Cl(O^{\wedge}_{X_1\times X_2,(p,q)}) \cong (\mathbb{Z}/m_p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m_q\mathbb{Z})$ を生成する為には、$G.C.D(L_pm_p, L_qm_q) = 1$ となる事が必要十分であることがすぐわかる。

以上によって、Theorem 2 の条件 (1) を大前提とするとき、上記のような (p,q) を固定するごとに、$U(X_1 \times X_2, D)_{(p,q)}$ での regularity と、関係式

$$GCD\,(L_p|Cl(O_{X_1,p})|, L_q|Cl(O_{X_2,q})|) = 1$$

が成立の同値性が確認できた。§1 の考察とあわせて、Theorem 2 の主張はこれよりすぐ従う。

(Theorem 2 of Introduction. の証明おわり)

§3. 計算例

Introduction に述べた 例の (2) について，具体的な計算の実態を書く。以下は，可成り初等的な部分と，特異点理論の初歩の知識，そして [1], [3],[8],[9] の具体的理解にもとづいた議論による。

$R_2 = C[s,t,u]/s^2 + t^3 + t^{10}$, $R_3 = C[x,y,z]/x^3 + xy^3 + yz^2$ に対して，それぞれ Pinkham-Demazure 表示を求めてみる。これらは，non-rational な 2-dim normal singularity であるが，$R_3\sharp R_2$ は isolated 3-dim rational singularity になることを示そう。

まず，R_2 について：変数に重みをそれぞれ，$wt(s) = 15, wt(t) = 10, wt(u) = 3$ とすると，定義式 $s^2 + t^3 + u^{10}$ の weight は 30 である。よって，Goto-Watanabe の a-invariant は，$a(R_2) = 30 - 15 - 10 - 3 = 2$ となる。この時点，R_2 は rational singularity でないことがわかる。実際，$p_g(R_2) = \sum_{k=0}^{a(R_2)} l((R_2)_k) = 1$ である。これは，いわゆる，minimally elliptic singularity である。$R_2 = R(X_2, D_2)$ with $X_2 = \mathrm{Proj}(R_2)$ とあらわしてみる。

X_2 は normal 1-dim variety すなわち non-singular curve だが，その genus は $g(X_2) = l((R_2)_{a(R_2)}) = 0$ として，計算される。

つぎに，degree one の元 in $Q(R_2)$ を選んで，D_2 を計算しよう。ここでは，$T_2 = t/(u^3)$ としてみる。$\deg(T_2) = 10 - 3 \times 3 = 1$ である。$R_2/tR_2 = C[s,u]/(s^2 + t^{10})$ なので，

$$tR_2 = (s + iu^5, t)R_2 \cap (s - iu^5, t)R_2$$

なる，primary decomposition がえられる。さて，prime component $(s + iu^5, t)R_2$ についての ramification $N((s + iu^5, t)R_2)$ は，$N((s + iu^5, t)R_2) = gcd\{k > 0 \mid \left(R_2/((s + iu^5, t)R_2)\right)_k \neq 0\} = gcd(\deg(s), \deg(u)) = 3$ として計算される。$N((s - iu^5, t)R_2) = 3$ も同様である。一方，$R_2/uR_2 = C[s,t]/s^2 + t^3$ は domain なので，prime ideal uR_2 について，やはり，ramification を計算して，$N(uR_2) = 5$ である。

結果，

$$D_{T_2} = \frac{1}{3}V((s + iu^5, t)) + \frac{1}{3}V((s - iu^5, t)) - \frac{3}{5}V(u) \in Div(X_2) \otimes Q$$

となることがわかった。

同様に，R_3 について：変数に重みをそれぞれ，$wt(x)=6, wt(y)=14, wt(z)=7$ とすると，定義式 $x^3+xy^3+yz^2$ の weight は 18 である。よって，$a(R_3)=18-6-4-7=1$ となる。やはり，R_3 も rational singularity でなく，$p_g(R_3)=\sum_{k=0}^{a(R_3)} l((R_3)_k)=1$ である。$R_3=R(X_3, D_3)$ with $X_3=\mathrm{Proj}(R_3)$ とあらわしてみる。$g(X_3)=l((R_3)_{a(R_3)})=0$ である。

つぎに，$T_3=z/x$ としてみる。

$$zR_3=(x,z)R_3\cap(z,x^2+y^3)R_3, \quad xR_3=(x,y)R_3\cap((x,z)R_3)^{(2)}$$

なる，primary decomposition がえられる。それぞれの ramification は，$N((x,z))=4, N((z,x^2+y^3))=2, N((x,y))=7$ であり，

$$D_{T_3}=\frac{1}{4}V((x,z))+\frac{1}{2}V((z,x^2+y^3))-\frac{1}{7}V((x,y))-\frac{2}{4}V((x,z))\in Div(X_3)\otimes Q$$

となる。

さて，$R=R_2\sharp R_3$ について：(1) $X_2\times X_3$ は non-singular で，ramification 達が，交わる点で互いに素なので，Theorem 2 により，R は孤立特異点である。(2) $R_3\sharp H^2_{(R_2)_+}(R_2)=0$ である。これは，R_3 の生成元の次数が 6, 4, 7 で，$a(R_2)=2$ であることとから容易にわかる。(3) $H^2_{(R_3)_+}(R_3)\sharp R_2=0$ も (2) と同様にしてわかる。(4) $H^2_{(R_3)_+}(R_3)\sharp H^2_{(R_2)_+}(R_2)$ の zero 以上の部分は，R_3 側が，degree 1 のみ，R_2 側が degree 2 のみなので，あわせて zero になってします。

Theorem 1 より，(1),(2),(3),(4) から，R は 3-dim rational singularity であることがわかる。

ただし，Theorem 5 などを用いると，canonical module は Q-Cartier にはならず，実は，分類上はむずかしい rational singularity になるということも分かるのである。

References

1. Demazure, M.: Anneaux gradués normaux ; in Seminarire Demazure -Giraud -Teissier, 1979. Ecole Polytechnique In:Lê Dũng Tráng(ed.) Introduction a la théorie des singularités II; Méthodes algébriques et géométriques (Travaux En Cours vol.**37**, pp.35-68) Paris:Hermann 1988
2. Flenner, H.: Quasihomogene rationale Singularitäten. Archiv. für Math.**36**, 35-44 (1981)
3. Goto, S., Watanabe, K.-i.: On graded rings, I. J. Math. Soc. Japan.**30**,179-213 (1978)
4. Ishii, S.: The asymptotic behavior of plurigenera for a normal isolated singularities. Math. Ann. **286**, 803-812 (1990)
5. Tomari, M., Watanabe, Kei-ichi: Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with "star-shaped " resolution. Publ. Res.Inst.Math.Sci. Kyoto Univ.**25**-5,681-740 (1989)
6. Tomari, M., Watanabe, Kei-ichi: Normal Z_r-graded rings and normal cyclic covers. manuscripta math. **76**, 325-340 (1992)
7. Tomari, M., Watanabe, Kei-ichi: Cyclic covers of normal graded rings, Kodai Math. J. **24**, 436-457 (2001)
8. Watanabe, Kei-ichi: Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings. Nagoya Math. J.**83**,203-211 (1981)
9. —-: Rational singularities with k^*-action. In:Greco,S.,G. Valla,G(eds.) Commutative algebra ; Proc. Trento Conf. (Lecture Notes in Pure and applied Math.**84**,pp.339–351) Marcel Dekker 1983

Masataka Tomari : Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Kanazawa University, Kakuma, Kanazawa, 920-1192, Japan. e-mail: tomari@ kenroku.kanazawa-u.ac.jp

Monomial ideal の polarization に関する一注意

宮崎 充弘　（京都教育大学）

Square-free な monomial ideal は、ある simplicial complex の Stanley-Reisner ideal としてとらえることができ、simplicial complex の言葉を用いていろいろなことが表現されている。Monomial ideal が square-free でないときには、polarization と呼ばれる手法で、ある種の問題を square-free な monomial ideal の問題に帰着させて考えることができる。

まずは、polarization の定義からはじめよう（[SV, p.107], [DEP, pp.26–27] 参照）。

Definition 1 k は体、m は多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ の monomial であるとする。

$$m = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

とするとき、Polar(m) で多項式環 $k[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots]$（変数は以下で必要なだけとる）の monomial

$$x_{11}x_{12}\cdots x_{1a_1}\cdots x_{n1}x_{n2}\cdots x_{na_n}$$

を表す。

定義から、Polar(m) は square-free な monomial である。

Definition 2 I を多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ の monomial ideal、$m_1, \ldots, m_t$ を I の極小生成系とする。I の polarization Polar(I) を

$$\mathrm{Polar}(I) := (\mathrm{Polar}(m_1), \ldots, \mathrm{Polar}(m_t))$$

によって定義する。

Example 3 $I = (x^3, x^2y^2)$ とすると、I の polarization は $(x_1x_2x_3, x_1x_2y_1y_2)$ である。

定義から、

$$\begin{aligned}
&m_1 | m_2 \Longleftrightarrow \mathrm{Polar}(m_1) | \mathrm{Polar}(m_2)\\
&\mathrm{Polar}(\mathrm{lcm}(m_1, \ldots, m_r)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{Polar}(m_1), \ldots, \mathrm{Polar}(m_r))\\
&\mathrm{Polar}(\gcd(m_1, \ldots, m_r)) = \gcd(\mathrm{Polar}(m_1), \ldots, \mathrm{Polar}(m_r))
\end{aligned}$$

であることがわかる。特に、Polar(I) の定義で I の生成系は極小にとったが、実際には、必要な変数が増えない範囲であれば、任意の生成系で考えてよいことが一番目の式からわかる。また、$A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $B = k[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots]$ とおく

とき、$x_{ij} \longmapsto x_i$ により A を B-algebra と考えれば、$B/\operatorname{Polar}(I)$ の Taylor resolution に $\otimes_B A$ したものが A/I の Taylor resolution になるので、

$$\operatorname{Tor}_i^B(A, B/\operatorname{Polar}(I)) = 0, \qquad (i > 0) \tag{$*$}$$

であることがわかる。

$$x_{11} - x_{12}, x_{12} - x_{13}, \ldots, x_{21} - x_{22}, x_{22} - x_{23}, \ldots, x_{n1} - x_{n2}, x_{n2} - x_{n3}, \ldots \tag{$**$}$$

に関する Koszul complex が A の B-free resolution を与えるので、$(*)$ から、$(**)$ の sequence は $B/\operatorname{Polar}(I)$-regular sequence であることがわかる。

$$B/(\operatorname{Polar}(I) + (x_{11} - x_{12}, x_{12} - x_{13}, \ldots, x_{21} - x_{22}, \ldots)) \simeq A/I$$

なので、regular sequence で割って変わらない性質を考えるにあたっては、polarization で置き換えて考えてもよいことになる。たとえば、次元と depth の差などは polarization をとっても変わらない。また、上の regular sequence はすべて 1 次の斉次式なので、regularity や h-vector も変化しないことがわかる。

さて、前回の可換環論シンポジウムで、寺井氏は square-free な monomial ideal が pure かつ strongly connected な simplicial complex の Stanley-Reisner ideal である場合について、regularity に関する結果を報告された [Ter]。ここでは、その条件のうち、pure 性に注目して考えてみたい。すなわち、I が必ずしも square-free ではない monomial ideal であるとき、その polarization を J とおき、$J = I_\Delta$（J が Δ の Stanley-Reisner ideal）とすると、Δ はいつ pure になるであろうか。

これに関連して、次の結果を得た。

Theorem 4 I は monomial ideal、J は I の polarization、A, B はそれぞれ上記の多項式環であるとすると、

$$\{\operatorname{ht} P \mid P \in \operatorname{Ass}(A/I)\} = \{\operatorname{ht} Q \mid Q \in \operatorname{Ass}(B/J)\}$$

である。（左辺の P は $\operatorname{Spec} A$ の元として考え、右辺の Q は $\operatorname{Spec} B$ の元として考える。）とくに、J が pure simplicial complex の Stanley-Reisner ideal であることと、A/I の associated prime ideals の次元が一定であることは同値である。

この定理の証明のために、まず次のことに注意しよう。

$$I = I_1 \cap \cdots \cap I_r$$

が monomial ideal の irredundant な共通部分表示（すなわち、右辺からどの I_i を取り除いても、真に大きな ideal になる）であるとすると、

$$\operatorname{Polar}(I) = \operatorname{Polar}(I_1) \cap \cdots \cap \operatorname{Polar}(I_r)$$

であり、これも irredundant な共通部分表示になる。

一般に、$m_2, \ldots, m_r$ が monomial で、m', m'' が互いに素であるような monomial であるとき、

$$(m'm'', m_2, \ldots, m_r) = (m', m_2, \ldots, m_r) \cap (m'', m_2, \ldots, m_r)$$

なので、この操作を繰り返すことにより、monomial ideal は変数のベキで生成された primary ideal の共通部分で表される。

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r, \qquad \text{各 } Q_i \text{ は変数のベキで生成された ideal}$$

を I の irredundant な primary decomposition とすると、

$$\mathrm{Polar}(I) = \mathrm{Polar}(Q_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Polar}(Q_r) \qquad (***)$$

も irredundant な共通部分表示になる。

$$Q_i = (x_{i_1}^{a_1}, \ldots, x_{i_u}^{a_u})$$

とすれば、

$$\mathrm{Polar}(Q_i) = (x_{i_1 1} \cdots x_{i_1 a_1}, \ldots, x_{i_u 1} \cdots x_{i_u a_u})$$

なので、

$$\mathrm{Polar}(Q_i) = \bigcap_{1 \leq j_k \leq a_k, k=1,\ldots,u} (x_{i_1 j_1}, \ldots, x_{i_u j_u})$$

となる。従って、$\mathrm{Polar}(I)$ はこの右辺に現れる形の素 ideal の共通部分として表される。

$(***)$ の右辺の各 $\mathrm{Polar}(Q_i)$ を、その prime decomposition で置き換えたものは、一般には redundant であるが、それから無駄なものを取り除いて irredundant にしたとき、$(***)$ は irredundant なので、各 i に対し、$\mathrm{Polar}(Q_i)$ の associated prime は少なくとも一つは残る。よって、各 i に対し、$\mathrm{Polar}(I)$ の associated prime で、height が $\mathrm{ht}(Q_i)$ と等しいものが、少なくとも一つは存在する。逆に、その irredundant decomposition には、height がどの $\mathrm{ht}(Q_i)$ とも等しくないような素 ideal は現れないので、このことから、定理が証明される。

Example 5 $I = (x^3, x^2y^2)$ とすると、$I = (x^2) \cap (x^3, y^2)$。従って、その associated prime ideals は (x) と (x, y)。一方、I の polarization J は $(x_1x_2x_3, x_1x_2y_1y_2)$ で、$J = (x_1) \cap (x_2) \cap (x_3, y_1) \cap (x_3, y_2)$。従って、その associated prime ideals は (x_1), (x_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2) である。

前々回の可換環論シンポジウムで、私は、Hodge algebra と、その discrete counterpart（同一の組み合わせ構造に支配される discrete Hodge algebra）の関係について報告させていただいた [Miy1], [Miy2]。その中で、多項式環の 2 次の Veronese subring が Hodge algebra 構造をもち、その discrete counterpart の depth が 2 であることを述べた。さら

に、core という概念を定義し、それを使うことにより、任意の n に対し、その discrete counterpart の depth が 0 であるような、Cohen-Macaulay Hodge algebra が存在することを示した。

その例においては、discrete counterpart は square-free ではないので、その polarization をとって考えると、任意の中間次元の associated prime が存在することが確かめられる。従って、今回の結果により、前々回で示した例の discrete counterpart は、height が 0 から n までの associated prime を少なくとも一つづつは持つことがわかる。

前々回、$n = 1$ の時には、その例の discrete counterpart は Buchsbaum であることを述べたが、今回の結果から、$n \geq 2$ の時には、Buchsbaum になり得ないことがわかった。

参考文献

[DEP] DeConcini, C., Eisenbud, D. and Procesi, C.: "Hodge Algebras." Astérisque **91** (1982)

[Miy1] Miyazaki, M.: Properties of the discrete counterpart of an algebra with straightening laws, 第 21 回可換環論シンポジウム報告集, 169–176

[Miy2] Miyazaki, M.: On the discrete counterparts of Cohen-Macaulay algebras with straightening laws, preprint.

[SV] Stückrad, J. and Vogel, W.: "Buchsbaum Rings and Applications." Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London Tokyo, (1986)

[Ter] Terai, N.: On a certain upper bound for the regularity of monomial ideals, 第 22 回可換環論シンポジウム報告集, 22–32

〒 612-8522 京都市伏見区深草藤森町 1 京都教育大学数学科

E-mail:g53448@kyokyo-u.ac.jp

Average number of connected components and free resolutions of Stanley-Reisner rings

NAOKI TERAI

Introduction

The lower bound theorem (see Theorem 1.1) gives not only the lower bound for the number of faces among the simplicial polytopes, but also the numerical criterion of the stacked polytopes, if the dimension of the polytope is more than three. But in the case of dimension 3, all simplicial polytopes with n vertices have the same f-vectors, more precisely, $f_1 = 3n - 6$, and $f_2 = 2n-4$, where f_i is the number of i-faces. Hence, we cannot characterize the stacked polytopes by their f-vectors in this case. For this purpose, we need a subtler quantity. We introduce the following graph-theoretical invariant.

DEFINITION. Let $G = (V, E)$ be a finite graph with $\sharp(V) = n$. For $W \subset V$ we denote by G_W the induced subgraph of G by W. Let $c(G_W)$ be the number of connected components of $c(G_W)$. We define for $1 \leq i \leq n$

$$c_i(G) = \frac{1}{\binom{n}{i}} \sum_{W \subset V,\ \sharp(W)=i} c(G_W),$$

which stands for the average number of connected components of the induced subgraphs by all i-element subsets W of V.

If G is j-connected, then $c_i(G) = 1$ for $n - j + 1 \leq i \leq n$. Hence, the sequence $(c_1(G), c_2(G), \ldots, c_n(G))$ can be considered as a refined concept of connectedness.

For a simplicial complex Δ, we define $c_i(\Delta) = c_i(\Delta^{(1)})$, where $\Delta^{(1)}$ is the 1-skeleton of Δ. For a simplicial polytope P, we denote by $\Delta(P)$ the boundary complex of P. We define $c_i(P) = c_i(\Delta(P))$.

Using this, we give a nemerical criterion of the stacked polytopes.

THEOREM 0.1. *Let P be a simplicial polytope with dimension d (≥ 3) and with n vertices. Then:*
(1) *We have*

$$c_i(P) \leq \frac{(i-1)\binom{n-d}{i}}{\binom{n}{i}} + 1, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

(2) *The following conditions are equivalent:*
(a) *P is a stacked polytope.*
(b) $c_i(P) = \frac{(i-1)\binom{n-d}{i}}{\binom{n}{i}} + 1$ *for all i with $2 \leq i \leq n-d$.*
(c) $c_i(P) = \frac{(i-1)\binom{n-d}{i}}{\binom{n}{i}} + 1$ *for some i with $2 \leq i \leq n-d$* if $d \geq 4$, *and for some i with $3 \leq i \leq n-d$ if $d = 3$.*

To prove the theorem we consider a minimal free resolution of the Stanley-Reisner ring $k[\Delta]$ of a simplicial complex Δ. By Hochster's formula (see Theorem 1.2), we have

$$\binom{n}{i}(c_i(\Delta) - 1) = \beta_{i-1,i}(k[\Delta]), \ i \geq 1,$$

where $\beta_{i-1,i}(k[\Delta])$ is the $(i-1,i)$-Betti number of the minimal free resolution of $k[\Delta]$. Since $k[\Delta(P)]$ is a Gorenstein graded ring which has an Artinian reduction with the weak Lefschez property (cf.[St$_1$]), we can apply Migliore-Nagel theorem [Mi-Na] for (1) and (c)$\Rightarrow$(a) in (2) if $d \geq 4$. (a)$\Rightarrow$(b) is essensially proved in [Te-Hi$_1$]. In the case $d = 3$, to show (c)$\Rightarrow$(a), we need some combinatorial argument using the induction theorem of Brücker-Eberhard. See §3 for the detailed proof.

In §4, we consider a class of simplicial complexes which are pure and strongly connected. For this class the following theorem holds:

THEOREM 0.2. *Let Δ be a $(d-1)$-dimensional pure and strongly connected simplicial complex with n vertices. Then:*
(1) *We have*

$$c_i(\Delta) \leq \frac{(i-1)\binom{n-d+1}{i}}{\binom{n}{i}} + 1, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

(2) *The following conditions are equivalent:*
(a) *Δ is a $(d-1)$-tree.*

(b)$c_i(P) = \frac{(i-1)\binom{n-d+1}{i}}{\binom{n}{i}} + 1$ *for all* i *with* $2 \leq i \leq n-d+1$.
(c)$c_i(P) = \frac{(i-1)\binom{n-d+1}{i}}{\binom{n}{i}} + 1$ *for some* i *with* $2 \leq i \leq n-d+1$.

§1. Preliminaries

We first give the definition according to [Br-He], [Hi], [Ho], and/or [St$_2$]. See those references for detailed information.

We first fix notation. Let $\mathbf{N}$(resp.$\mathbf{Z}$) denote the set of nonnegative integers (resp. integers).

A *simplicial complex* Δ on the *vertex set* $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ is a collection of subsets of V such that (i) $\{x_i\} \in \Delta$ for every $1 \leq i \leq n$ and (ii) $F \in \Delta$, $G \subset F \Rightarrow G \in \Delta$. The vertex set of Δ is denoted by $V(\Delta)$. Each element F of Δ is called a *face* of Δ. We call $F \in \Delta$ an *i-face* if $\sharp(F) = i+1$ and we call a maximal face a *facet*. Let F be a face but not a facet. We call F *free* if there is a unique facet G such that $F \subset G$. We define $\partial\Delta = \bigcup_{F:\text{ a free face of}\Delta} 2^F$ and call it the *boundary complex* of Δ. We define the *dimension* of $F \in \Delta$ to be $\dim F = \sharp(F) - 1$ and the *dimension* of Δ to be $\dim \Delta = \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}$. We say that Δ is *pure* if every facet has the same cardinality. In a $(d-1)$-dimensional pure complex Δ, we call $(d-2)$-face a *subfacet*. We say that a pure complex Δ is *strongly connected* if for any two facets F and G, there exists a sequence of facets

$$F = F_0, F_1, \ldots, F_m = G$$

such that $F_{i-1} \cap F_i$ is a subfacet for $i = 1, 2, \ldots, m$. We put $\Delta(m) = 2^{[m]}$.

Let Δ_i be a $(d-1)$-dimensional pure simplicial complex for $i = 1, 2$. If $\Delta_1 \cap \Delta_2 = 2^F$ for some F with $\dim F = d-2$, we denote $\Delta_1 \cup_F \Delta_2$ for $\Delta_1 \cup \Delta_2$. We sometimes denote $\Delta_1 \cup_* \Delta_2$ for $\Delta_1 \cup_F \Delta_2$ if we do not need to express F explicitely.

We define a $(d-1)$-tree inductively as follows.
(1)$\Delta(d)$ is a $(d-1)$-tree.
(2)if Υ is a $(d-1)$-tree, then so is $\Upsilon \cup_* \Delta(d)$.

If $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_m$ are $(d-1)$-trees, we abbreviate $\Delta \cup_* \Upsilon_1 \cup_* \Upsilon_2 \cup_* \cdots \cup_* \Upsilon_m$ as $\Delta \bigcup ((d-1)\text{-branches})$.

Let $f_i = f_i(\Delta)$, $0 \leq i \leq d-1$, denote the number of i-faces in Δ. We define $f_{-1} = 1$. We call $f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$ the *f-vector* of Δ. Define the *h-vector* $h(\Delta) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ of Δ by

$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(t-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i t^{d-i}.$$

For a simplicial polytope P, we define $f(P) = f(\Delta(P))$ and $h(P) = h(\Delta(P))$.

A *stacked polytope* is a simplicial polytope which is obtained from a simplex by successive addition of pyramids over facets.

THEOREM 1.1 (LOWER BOUND THEOREM) (see [Br, Corollary 19.6] for the f-vector version). *Let P be a d-dimensional simplicial polytope with n vertices. Put $h(P) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$. Then:*
(1) *We have $h_i \geq n - d$ for $1 \leq i \leq d-1$.*
(2) *Moreover, we assume $d \geq 4$. Then the following three conditions are equivalent:*
(a) *P is a stacked polytope.*
(b) *$h_i = n - d$ for all i with $1 \leq i \leq d-1$.*
(c) *$h_i = n - d$ for some i with $2 \leq i \leq d-2$.*

Let $A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ be the polynomial ring in n-variables over a field k. Define I_Δ to be the ideal of A which is generated by square-free monomials $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$, with $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \notin \Delta$. We say that the quotient algebra $k[\Delta] := A/I_\Delta$ is the *Stanley-Reisner ring* of Δ over k.

Next we summarize basic facts on the Hilbert series. Let k be a field and R a homogeneous k-algebra. We means a *homogeneous k-algebra R* by a noetherian graded ring $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ generated by R_1 with $R_0 = k$. In this case R can be written as a quotient algebra $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]/I$, where $\deg x_i = 1$. In this article we always use the representatation A/I with $A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a polynomial ring and with $I_1 = (0)$.

Let M be a graded R-module with $\dim_k M_i < \infty$ for all $i \in \mathbf{Z}$, where $\dim_k M_i$ denotes the dimension of M_i as a k-vector space.

The *Hilbert series* of M is defined by

$$F(M, t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (\dim_k M_i) t^i.$$

It is well known that the Hilbert series $F(R, t)$ of R can be written in the form

$$F(R,t) = \frac{h_0 + h_1 t + \cdots + h_s t^s}{(1-t)^{\dim R}},$$

where $h_0(=1)$, $h_1, \ldots, h_s$ are integers with $\mathrm{e}(R) := h_0 + h_1 + \cdots + h_s \geq 1$. The vector $h(R) = (h_0, h_1, \ldots, h_s)$ is called the *h-vector* of R.

We consider $k[\Delta]$ as the graded algebra $k[\Delta] = \bigoplus_{i \geq 0} k[\Delta]_i$ with $\deg x_j = 1$ for $1 \leq j \leq n$. The Hilbert series $F(k[\Delta], t)$ of a Stanley-Reisner ring $k[\Delta]$ can be written as follows:

$$\begin{aligned} F(k[\Delta], t) &= 1 + \sum_{i=1}^{d} \frac{f_{i-1} t^i}{(1-t)^i} \\ &= \frac{h_0 + h_1 t + \cdots + h_d t^d}{(1-t)^d}, \end{aligned}$$

where $\dim \Delta = d-1$, $f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$, and $h(\Delta) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$.

Let A be the polynomial ring $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ over a field k. Let M be a finitely generated graded A-module and let

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{h,j}(M)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{0,j}(M)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

be a graded minimal free resolution of M over A. We call $\beta_{i,j}(M)$ the (i,j)-Betti number of M over A. We define a *Castelnuovo-Mumford regularity* $\mathrm{reg}\, M$ of M by

$$\mathrm{reg}\, M = \max\, \{j - i \mid \beta_{i,j}(M) \neq 0\}.$$

If a homogeneous k-algebra R is Cohen-Macaulay, we have

$$\mathrm{reg}\, R = \max\, \{s \mid h_s \neq 0\}.$$

The Betti numbers of the Stanley-Reisner ring can be expressed in terms of the reduced homology of some subcomplexes:

THEOREM 1.2 (Hochster's formula [Ho, Theorem 5.1]).

$$\beta_{i,j}(k[\Delta]) = \sum_{F \subset V,\ \sharp(F) = j} \dim_k \tilde{H}_{j-i-1}(\Delta_F; k),$$

where

$$\Delta_F = \{G \in \Delta \mid G \subset F\}.$$

§2. Betti numbers of 2-linear part of free resolutions of homogeneous algebras

In this section, we consider upper bounds for Betti numbers of 2-linear part of minimal free resolutions of homogeneous k-algebras. First we consider the Cohen-Macaulay case. More or less, it seems to be known, but we include it for convenience of readers. (see e.g., [Ei-Go]).

PROPOSITION 2.1. *Let k be a field, and let R be a Cohen-Macaulay homogeneous k-algebra with codimension c (≥ 1). Then:*
(1) *We have*

$$\beta_{i,i+1}(R) \leq i\binom{c+1}{i+1}, \ i = 1, 2, \ldots, c.$$

(2) *The following four conditions are equivalent:*
(a) *The h-vector of R is $(1, c)$.*
(b) *R has a 2-linear resolution.*
(c) $\beta_{i,i+1}(R) = i\binom{c+1}{i+1}$ *for all i with $1 \leq i \leq c$.*
(d) $\beta_{i,i+1}(R) = i\binom{c+1}{i+1}$ *for some i with $1 \leq i \leq c$.*

Next we consider the Gorenstein case. It is just a collorary of the Migliore-Nagel theorem [Mi-Na, Theorem 8.13].

PROPOSITION 2.2. *Let k be a field of characteristic 0. Let R be a Gorenstein homogeneous k-algebra over k with codimension c and $\operatorname{reg} R \geq 3$. Suppose its Artinian reduction has the weak Lefschetz property. Then we have*

$$\beta_{i,i+1}(R) \leq i\binom{c}{i+1}, \ i = 1, 2, \ldots, c-1.$$

Furthermore, we assume that $\operatorname{reg} R \geq 4$. *Then the following three conditions are equivalent:*
(a) *The h-vector of R is $(1, c, c, \ldots, c, 1)$.*
(b) $\beta_{i,i+1}(R) = i\binom{c}{i+1}$, *for all i with $1 \leq i \leq c-1$.*
(c) $\beta_{i,i+1}(R) = i\binom{c}{i+1}$, *for some i with $1 \leq i \leq c-1$.*

§3. Proof of Theorem 0.1

In this section we fix a field k of characteristic 0. Let P be a d-dimensional simplicial polytope with n vertices. Since $k[\Delta(P)]$ is a Gorenstein homogeneous k-algebra which has an Artinian reduction with the weak Lefschez property, we apply Proposition 2.2. Then we obtain (1). If $d \geq 4$, (c)$\Rightarrow$(a) is obtained by Proposition 2.2 and the Lower Bound Theorem. (a)$\Rightarrow$(b) in (2) is essensially proved in [Te-Hi$_1$]. To show (c)$\Rightarrow$(a) in the case of $d = 3$, since the boundary complex of a 3-dimensional simplicial polytope is nothing but a triangulation of a sphere, we have only to prove the following:

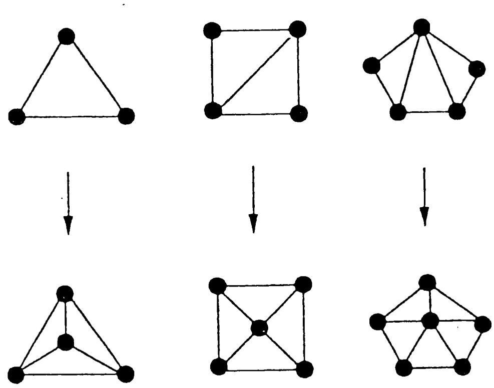
THEOREM 3.1. *Let Δ be a triangulation of S^2 with n vertices. Suppose Δ is not isomorphic to the boundary complex of a stacked polytope. Then we have*

$$\beta_{i,i+1}(k[\Delta]) < i\binom{n-3}{i+1},$$

for $2 \leq i \leq n-4$.

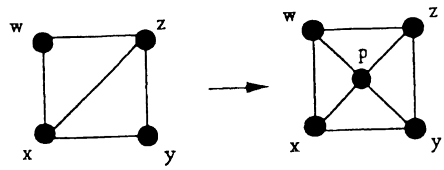
To prove the theorem, we use:

THEOREM 3.2 (THE INDUCTION THEOREM OF BRÜCKER-EBERHARD) (cf. [Oda, p190]). *Suppose a finite triangulation Δ of S^2 is given. We get a triangulation Δ'* of S^2 *with one more vertex, if a vertex of Δ is " split into two " by one of the three steps (A), (B),(C) shown in the figures below. We can obtain any given finite triangulation of S^2 from the tetrahedral triangulation by splitting vertices finitely many times.*



LEMMA 3.3. *Let Δ be a triangulation of S^2 on a vertex set V with n vertices. And let Δ' be a triangulation obtained from Δ by (B) in the*

Induction Theorem, which is indicated as below.



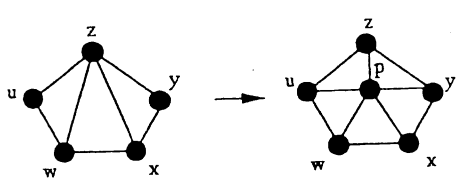
Put $V' := V \cup \{p\}$ *and* $W := W' \setminus \{p\}$ *for* $W' \subset V'$.
(1) *We have* $|\dim_k \tilde{H}_0(\Delta'_{W'}; k) - \dim_k \tilde{H}_0(\Delta_W; k)| \leq 1$ *for* $W' \subset V'$.
(2) $\dim_k \tilde{H}_0(\Delta'_{W'}; k) = \dim_k \tilde{H}_0(\Delta_W; k) + 1$ *holds if and only if* W' *is one of following cases;*

(a) $p \in W'$, $w, x, y, z \notin W'$, *and* $\sharp(W') \geq 2$.

(b) $x, z \in W'$, $p, w, y \notin W'$, *and* x *and* z *are disconnected in* $\Delta'_{W'}$.

(3) *Let* $n(a)_j$ *(resp.* $n(b)_j$*) be the number of* j*-element subsets* W' *of* V' *which satisfy the condition (a) (resp. (b)). Then we have* $n(a)_j = \binom{n-4}{j-1}$ *and* $n(b)_j \leq \binom{n-4}{j-2}$ *for* $j \geq 2$.
(4) *Furthermore, we assume that* Δ *is isomorphic to the boundary complex of a stacked polytope, and that* Δ' *obtained by (B) is not isomorphic to the boundary complex of a stacked polytope. Then we have* $n(b)_j < \binom{v-4}{j-2}$ *for* $j \geq 3$.

LEMMA 3.4. *Let* Δ *be a triangulation of* S^2 *on a vertex set* V *with* n *vertices. And let* Δ' *be a triangulation obtained from* Δ *by (C) in the Induction Theorem, which is indicated as below.*



Put $V' := V \cup \{p\}$ *and* $W := W' \setminus \{p\}$ *for* $W' \subset V'$.
(1) *We have* $|\dim_k \tilde{H}_0(\Delta'_{W'}; k) - \dim_k \tilde{H}_0(\Delta_W; k)| \leq 1$ *for* $W' \subset V'$
(2) $\dim_k \tilde{H}_0(\Delta'_{W'}; k) = \dim_k \tilde{H}_0(\Delta_W; k) + 1$ *holds if and only if* W' *is one of following cases;*

(a_1) $p \in W'$, $u, w, x, y, z \notin W'$, *and* $\sharp(W') \geq 2$.

(a_2) $w, z \in W'$, $p, u, x, y, \notin W'$, *and* w *and* z *are disconnected in* $\Delta'_{W'}$.

(a_3)$x, z \in W'$, $p, u, w, y \notin W'$ *and* x *and* z *are disconnected in* $\Delta'_{W'}$.
(a_4)$u, x, z \in W'$, $p, w, y \notin W'$ *and* u *and* x *are disconnected in* $\Delta'_{W'}$.
(a_5)$w, x, z \in W'$, $p, u, y \notin W'$ *and* w *and* z *are disconnected in* $\Delta'_{W'}$.
(a_6)$w, y, z \in W'$, $p, u, x \notin W'$ *and* w *and* y *are disconnected in* $\Delta'_{W'}$.
(3)*If* $W \in V$ *satisfies one of the following* (b_1) *or* (b_2), *then* $\dim_k \tilde{H}_0(\Delta'_{W'}; k) = \dim_k \tilde{H}_0(\Delta_W; k) - 1$ *holds;*
(b_1)$p, u, x \in W'$, $w, y, z \notin W'$ *and* u *and* x *are disconnected in* $\Delta'_{W'}$.
(b_2) $p, w, y \in W'$, $u, x, z \notin W'$ *and* w *and* y *are disconnected in* $\Delta'_{W'}$.
(4)*Let* $n(a_i)_j$, $1 \leq i \leq 8$ *(resp.* $n(b_i)_j$, $1 \leq i \leq 2$*) be the number of* j*-element subsets* W' *of* V' *which satisfy the condition* (a_i) *(resp.* (b_i)*). Then we have* $n(a_1)_j = \binom{n-5}{j-1}$, $n(a_2)_j \leq \binom{n-5}{j-2}$, $n(a_3)_j \leq \binom{n-5}{j-2}$, $n(a_5)_j \leq \binom{n-5}{j-3}$, $n(a_4)_j \leq n(b_1)_j$ *and* $n(a_6)_j \leq n(b_2)_j$ *for* $j \geq 3$.
(5)*Furthermore, we assume that* Δ *is isomorphic to the boundary complex of a stacked polytope. Then we have* $n(a_2)_j < \binom{n-5}{j-2}$ *or* $n(a_3)_j < \binom{n-5}{j-2}$.

LEMMA 3.5. *Let* Δ *be a triangulation of* $\mathbf{S}^2$ *with* n *vertices. And let* Δ' *be a triangulation obtained from* Δ *by (A),(B), or (C) in the Induction Theorem above. Then:*

(1) *We have for* $i \geq 1$,

$$\beta_{i,i+1}(k[\Delta']) \leq \beta_{i,i+1}(k[\Delta]) + \beta_{i-1,i}(k[\Delta]) + \binom{n-3}{i}.$$

(2)*Furthermore, we assume that* Δ *is isomorphic to the boundary complex of a stacked polytope, and* Δ' *obtained by (B)or (C) is not isomorphic to the boundary complex of a stacked polytope. Then we have for* $i \geq 1$,

$$\beta_{i,i+1}(k[\Delta']) < \beta_{i,i+1}(k[\Delta]) + \beta_{i-1,i}(k[\Delta]) + \binom{n-3}{i}.$$

§4. Proof of Theorem 0.2

In this section we consider upper bounds for the Betti numbers of minimal free resolutions of the Stanley-Reisner rings of pure and strongly connected simplicial complexes.

In the case of the Stanley-Reisner rings, we can take a class of pure and strongly connected complexes, which is a wider class than one of Cohen-Macaulay complexes, to obtain the same upper bounds. Compare the following Thorem 4.1 with Propositon 2.1.

We know that every $(d-1)$-dimensional pure and strongly connected simplicial complex can be constructed from the $(d-1)$-dimensional elementary simplex $\Delta(d)$ by a succession

$$\Delta(d) = \Delta_1 \to \Delta_2 \to \cdots \to \Delta_{f_{d-1}}$$

of one of the following two operations :
(1)$\Delta_{i+1} = \Delta_i \cup_{F'} \mathbf{2}^F$, where $x \notin V(\Delta_i)$, F' is a subfacet of Δ_i and $F = F' \cup \{x\}$.
(2)$\Delta_{i+1} = (\Delta_i \cup_{F'} \mathbf{2}^F)(x \to y)$, where $x \notin V(\Delta_i)$, F' is a subfacet of Δ_i and $y \in V(\Delta_i)$ such that x and y are separated and $F = F' \cup \{x\}$ (cf. [Te]).

Using this, we can prove the following theorem.

THEOREM 4.1. *Let Δ be a $(d-1)$-dimensional pure and strongly connected simplicial complex with n vertices. Suppose Δ is not a simplex. Then:*
(1) *We have*

$$\beta_{i,i+1}(k[\Delta]) \le i\binom{n-d+1}{i+1}.$$

(2) *The following four conditions are equivalent:*
(a)Δ *is a $(d-1)$-tree.*
(b)I_Δ *has a 2-linear resolution.*
(c) $\beta_{i,i+1}(k[\Delta]) = i\binom{n-d+1}{i+1}$ *for all i with $1 \le i \le n-d$.*
(d) $\beta_{i,i+1}(k[\Delta]) = i\binom{n-d+1}{i+1}$ *for some i with $1 \le i \le n-d$.*

References

[Brø] A. Brøndsted, "An introduction to convex polytopes," Springer-Verlag, New York / Heidelberg / Berlin, 1982

[Br-He$_1$] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen–Macaulay Rings," Cambridge University Press, Cambridge / New York / Sydney, 1993.

[Ei-Go] D. Eisenbud and S. Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicities*, J. Alg. **88** (1984) 89–133.

[Fr] R. Fröberg , *On Stanley-Reisner rings*, in "Topics in algebra, " Banach Center Publications , No. 26, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1990, pp.57–70.

[Gr] M. L. Green, *Generic initial ideals*, in "Six Lectures on commutative algebra," Birkhäuser, Boston / Basel / Stuttgart, 1998, pp.119–186.

[He-Ma] J. Herzog and E. M. Li Marzi, *Bounds for the Betti numbers of schellable simplicial complexes and polytopes*, in "Commutative algebra and algebraic geometry, " Dekker, New York, 1999, pp.157 – 167.

[Hi] T. Hibi, "Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes," Carslaw Publications, Glebe, N.S.W., Australia, 1992.

[Ho] M. Hochster, *Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, in "Ring Theory II," Dekker, New York, 1977, pp.171 – 223.

[Mi-Na] J. Migliore and U. Nagel, *Reduced arithmetically Gorenstein schemes and simplicial polytopes with maximal Betti numbers*, Preprint.

[Od] T.Oda, "Convex Bodies and Algebraic Geometry – An Introduction to the Theory of Toric Varieties," Springer-Verlag, New York / Heidelberg / Berlin, 1988.

[St_1] R. P. Stanley, *The number of faces of a simplicial convex polytope,* Adv. in Math.**35** (1980) 236–238.

[St_2] R. P. Stanley, "Combinatorics and Commutative Algebra, Second Edition " Birkhäuser, Boston / Basel / Stuttgart, 1996.

[Te] N. Terai, *Eisenbud-Goto inequality for Stanley-Reisner rings* ,in "Geometric and combinatorial aspects of commutative algebra, " Dekker, New York, 2001, pp.379 – 391.

[$\mathrm{Te\text{-}Hi}_1$] N. Terai and T. Hibi, *Computation of Betti numbers of monomial ideals associated with stacked polytopes*, manuscripta math. **92**(1997), 447–453.

[$\mathrm{Te\text{-}Hi}_2$] N. Terai and T. Hibi, *Finite free resolutions and 1-skeletons of simplicial complexes*, J. of Algebraic Combinatorics **6**(1997), 89–93.

Department of Mathematics
Faculty of Curture and Education
Saga University
Saga 840-8502, Japan
E-mail address: terai@cc.saga-u.ac.jp

射影曲線の超平面切断の Regularity

宮崎 誓

This paper investigates the Castelnuovo-Mumford regularity of a generic hyperplane section of projective curve. Let $T = k[y_0, \cdots, y_{N+1}]$ be the polynomial ring over an algebraically closed field k. Then we put $\mathbf{P}_k^{N+1} = \mathrm{Proj}(T)$. Let C be an irreducible reduced nondegenerate projective curve in $\mathbf{P}_k^{N+1}$, that is, the defining ideal I_C is generated by elements of degree ≥ 2 in T and T/I_C is an integral domain of dimension 2. Let X be a generic hyperplane section of C, that is, $X = C \cap H$, where H is a generic hyperplane of $\mathbf{P}_K^{N+1}$. So X is a zero dimensional scheme of $\mathbf{P}_K^N = \mathrm{Proj}(S)$, where S is the polynomial ring $k[x_0, \cdots, x_N]$. Let I and R be the defining ideal and the coordinate ring of X, that is, $R = S/I$, respectively. Then X is said to be m-regular if $\mathrm{H}^1(\mathbf{P}_K^N, \mathcal{I}_X(m-1)) = 0$. The Castelnuovo-Mumford regularity of $X \subseteq \mathbf{P}_K^N$ is the least such integer m and is denoted by $\mathrm{reg}(X)$. Note that $\mathrm{reg}(X) = a(R) + 2$, where $a(R)$ is the a-invariant of the coordinate ring R. The interest in this concept stems partly from the well-known fact that X is m-regular if and only if for every $p \geq 0$ the minimal generators of the pth syzygy module of the defining ideal I of $X \subseteq \mathbf{P}_K^N$ occur in degree $\leq m + p$.

Now we will describe the definitions of "uniform position", "linear general position" and "linear semi-uniform position" for zero-dimensional schemes. Let $S \subset \mathbf{P}_k^N$ a zero-dimensional scheme such that S spans $\mathbf{P}_k^N$ as k vector space. Then S is said to be in uniform position if $\mathrm{H}_Z(t) = \max\{\deg(Z), \mathrm{H}_S(t)\}$ for all t, for any subscheme Z of S, where H_Z and H_S denote the Hilbert function of Z and S respectively. A zero-dimensional scheme S is said to be in linear semi-uniform position if there are integers $v(i, S)$, simply written as $v(i)$, $0 \leq i \leq N$ such that every i-plane L in $\mathbf{P}_k^N$ spanned by linearly independent $i+1$ points of S contains exactly $v(i)$ points of S. A generic hyperplane section of a nondegenerate projective integral curve is in linear semi-uniform position, see [2]. We say S is in linear general position if $v(i) = i+1$ for all $i \geq 1$. Further, we note that "uniform position" implies "linear general position" and that "linear general position" implies "linear semi-uniform position".

Let $C \subseteq \mathbf{P}_k^{N+1}$ and $X \subseteq \mathbf{P}_k^N$ be again a nondegenerate projective curve and its generic hyperplane section. Following Rathmann [8], we will describe a relationship between a monodromy group of the projective curve C and the configuration of the zero-dimensional scheme X. Let $M \subseteq C \times (\mathbf{P}_k^{N+1})^*$ be the incidence correspondence parametrizing the pairs, a point x of C and a hyperplane H of P_k^{N+1} such that x is contained in H. Then M is a P_k^N-bundle over C, so M is irreducible and reduced. By Bertini's theorem, M is generically étale over $P = (\mathrm{P}_k^{N+1})^*$ via the second projection. Thus the function field $K(M)$ of M is separable finite over $K(P)$, in particular, $K(M)$ is a simple extension of $K(P)$. So we fix a splitting field Q for this simple extension. Let G_C be the Galois group $\mathrm{Gal}(Q/K(P))$. Then G_C is a subgroup of the full symmetric group S_d and is called the monodromy group of $C \subseteq \mathrm{P}_k^N$, where $d = \deg(C)$.

Proposition 1 (See [1,8]).
(i) If $\mathrm{char}(k) = 0$, then $G_C = S_d$.
(ii) If either $G_C = S_d$ or $G_C = A_d$, then X is in uniform position.

Proposition 2 (See [8]). Assume that $N \geq 3$. If X is not in uniform position, then either of the following holds:
(a) $v(1) = 3$, and G_C is exactly 2-transitive.
(b) $v(1) = 2$, and G_C is exactly 3-transitive.
(c) $\deg(C) = 11, 12, 23 \,\mathrm{or}\, 24$, and G_C is the Mathieu group.

Now we state our main theorem.

Theorem 3 (See [3,6,7]). Let $X \subseteq \mathrm{P}_k^N$ be a generic hyperplane section of nondegenerate projective curve. Then we have
(i) $\mathrm{reg}(X) \leq \lceil (\deg(X) - 1)/\mathrm{codim}(X) \rceil + 1$.
(ii) Assume that X is in uniform position and $\deg(X) \geq N^2 + 2N + 2$. If the equality in (i) holds, then X is contained in a rational normal curve in P_k^N.
(iii) Assume that X is not in uniform position and $N \geq 3$. If $\deg(X) \geq N^2 + 2N + 2$, then the equality in (i) does not hold.
(iv) Assume that X is not in linear general position and $N = 2$. If $\deg(X) \geq 10$, then the equality in (i) does not hold.

Sketch of the proof.
(i) (See [1,2,3]). Let $\underline{h} = (h_0, \cdots, h_s)$ be the h-vector of the zero-dimensional scheme $X \subseteq \mathrm{P}_k^N$, where $s = \mathrm{reg}(X) - 1 = a(R) + 1$, that is, $h_s \neq 0$. Since X is in linear semi-uniform position, we have $h_1 + \cdots + h_i \geq ih_i$ for all $i = 1, \cdots, s-1$, that is, $\mathrm{H}_X(t) \geq \min\{\deg(X), tN + 1\}$. Thus we obtain $\lceil (\deg(X) - 1)/\mathrm{codim}(X) \rceil = \lceil (h_1 + \cdots + h_s)/h_1 \rceil \geq s$.

(ii) (See [6]). Assume that X does not lie on a rational normal curve in $\mathbf{P}_k^N$. Since X is in uniform position, we have $h_i \geq h_1 + 1$ for $i = 2, \cdots, s-2$, by [9]. The similar way of the proof of (i) yields $\deg(X) - 1 \leq N^2 + 2N$, which contradicts the hypothesis. We remark here the hypothesis $\deg(X) \geq N^2 + 2N + 2$ is indispensable because of an example of a $(2, 2, 4)$ complete intersection in $\mathbf{P}_k^3$.
(iii) and (iv) (See [3,7]). By the assumption, we have only to consider the case (a) and (b) of Proposition 2 for (iii), and the case (a) for (iv). What we have to show is that $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^N}(\ell)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_X(\ell))$ is surjective, where $\ell = \lceil (d-1)/N \rceil - 1$. The classical Castelnuovo method gives proof. For any fixed point $P \in S$, we prove that there is a (possibly reducible) hypersurface F of degree ℓ in $\mathbf{P}_k^N$ such that $S \cap F = S \backslash \{P\}$. The details will be described in [3,7].

In order to classify the extremal cases for the regularity, we need to consider the case $N = 2$, that is, a generic hyperplane section of space curves. If $\mathrm{char}(k) = 0$, X is in uniform position, and so we have done. Moreover, in this case, there is an ACM smooth curve $C' \subseteq \mathbf{P}_k^3$ such that $X = C' \cap H$. Thus we describe a free resolution of the defining ideal I_X over $k[x_0, x_1, x_2]$ by Hilbert-Burch matrix, see [4,5], and get a detailed information for the regularity of X. This observation comes from the fact that X is "of decreasing type", see [4], in terms of the h-vectors.

Question 4 (See [7]). Let $X \subseteq \mathbf{P}_k^N$ be a generic hyperplane section of nondegenerate projective curve. Assume that $N = 2$ and X is not in uniform position but in linear general position.
(i) Is a zero-dimensional scheme X of decreasing type?
(ii) If $\deg(X)$ is large enough, then does the inequality $\mathrm{reg}(X) \leq \lceil (\deg(X) - 1)/\mathrm{codim}(X) \rceil$ always hold?

References.

1. E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths and J. Harris, Geometry of algebraic curves I, Grundlehren der math. Wissenschaften 167, Springer, 1985.

2. E. Ballico, On singular curves in positive characteristic, Math. Nachr. 141 (1989), 267 – 273.

3. E. Ballico and C. Miyazaki, Generic hyperplane section of curves and an application to regularity bounds in positive characteristic, J. Pure Appl. Algebra 155 (2001), 93 – 103.

4. A. Geramita and J. Migliore, Hyperplane sections of a smooth curve in $\mathbf{P}^3$, Comm. Algebra 17 (1989), 3129 – 3164.

5. J. Herzog, N. V. Trung and G. Valla, On hyperplane sections of reduced and irreducible variety of low codimension, J. Math. Kyoto 34 (1994), 47 – 71.

6. C. Miyazaki, Sharp bounds on Castelnuovo-Mumford regularity, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 1675 – 1686.

7. C. Miyazaki, Regularity of generic hyperplane sections of projective curves, in preparation.

8. J. Rathmann, The uniform position principle for curves in characteristic p, Math. Ann. 276 (1987), 565 – 579.

9. K. Yanagawa, Castelnuovo's Lemma and h-vectors of Cohen-Macaulay homogeneous domains, J. Pure Appl. Algebra 105 (1995), 107 – 116.

琉球大学理学部数理科学科
903-0213 沖縄県西原町千原 1
miyazaki@math.u-ryukyu.ac.jp

射影次元有限な加群による
環の正則性の判定について

早坂　太

1　序

本報告の内容は、後藤四郎教授との共同研究です。
以下 A は可換な Noether 環とする。A のイデアル I に対し $\bar{I}$ によってイデアル I の整閉包を表す。また、A-加群 M に対し $\mathrm{pd}_A M$ によって M の射影次元を表す。A が局所環のとき、その剰余体の射影次元が有限であることから環 A の正則性が導かれるが、本報告では、射影次元有限な特殊な A-加群の存在から局所環 A の正則性が導かれることを報告する。主結果は次のものである。

定理 1.1. $(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環、M を有限生成 A-加群で $\mathrm{depth}_A M > 0$ とする。M の部分加群 N, L が存在して、次を満たしているとする。

(1) $N \subseteq L \subseteq N :_M \mathfrak{m}$,
(2) $\mathfrak{m}N \subsetneq \mathfrak{m}L$,
(3) $\mathrm{pd}_A N < \infty$.

このとき、環 A は正則局所環である。

L.Burch によってこれと同様の結果（[Bu, Corollary 1, 2]）が証明されている。しかし、私たちの方法は、それとは異なるものであって、(3) の条件を剰余体の次元の有限性が、局所環を決めるような他のホモロジカル次元（入射次元や Gorenstein 次元、Complete-Intersection 次元、Cohen-Macaulay 次元など）に変えても、それぞれに応じて局所環の性質が導かれる（注意 2.4）。2 節でこの定理 1.1 の証明を与える。また 3 節で、2 節で得た結果を使って [CP, Theorem 2.3] の一般化である次の結果を証明する。

定理 1.2. A を Noether 環とし $\mathfrak{q}$ を A-正則列で生成される A のイデアルとする。$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A A/\mathfrak{q}$ とし $\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Ass}_A A/\mathfrak{q}$ 内で極大であるとする。$I = \mathfrak{q} : \mathfrak{p}$ とおく。このとき、$I^2 \neq \mathfrak{q}I$ ならば局所環 $A_\mathfrak{p}$ は正則であってかつ $\overline{\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ である。

2 定理 1.1 の証明

定理 1.1 の証明において Key となる補題は、次である。

補題 2.1. $(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環、M を A-加群とする。N, L は M の部分加群とし N は有限生成であって次を満たすとする。

(1) $N \subseteq L \subseteq N :_M \mathfrak{m}$,
(2) $\mathfrak{m}N \subsetneq \mathfrak{m}L$.

このとき、剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が N/xN の直和因子となるような極大イデアル $\mathfrak{m}$ の元 x が存在する。また、$\operatorname{depth}_A N > 0$ のときは、x を N-正則元にとれる。

証明. $\mathfrak{m}L \not\subseteq \mathfrak{m}N$ より、$xy \in \mathfrak{m}L \backslash \mathfrak{m}N$ $(x \in \mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}^2,\ y \in L)$ が存在する。$xy \notin \mathfrak{m}N$ より、$N = Axy + \sum_{i=1}^{\ell} Az_i$ $(1 + \ell = \mu_A(N))$ とかく。このとき、

$$N/xN = A\overline{xy} \oplus \sum_{i=1}^{\ell} A\overline{z_i}$$

である。実際、$a, b_i \in A$ とし、$axy + \sum_{i=1}^{\ell} b_i z_i \in xN$ とすると $xN \subseteq \mathfrak{m}N$ だから、$a, b_i \in \mathfrak{m}$ である。よって $axy \in xN$ となり上の直和を得る。また、$\mathfrak{m}(xy) \subseteq xN$ より $A\overline{xy} \cong A/\mathfrak{m}$ である。従って $A/\mathfrak{m}$ は N/xN の直和因子である。$\operatorname{depth}_A N > 0$ のときは $\mathfrak{m}$ の生成元をすべて N-正則元にとりなおせるので x は N-正則元としてよい。 □

定理 1.1 の証明. 補題 2.1 より剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が N/xN の直和因子となる N-正則元 $x \in \mathfrak{m}$ が存在する。完全列

$$0 \to N \xrightarrow{x} N \to N/xN \to 0$$

より $\operatorname{pd}_A A/\mathfrak{m} < \infty$ となり環 A は正則局所環である。 □

この定理 1.1 から次の系が得られる。

系 2.2. $(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環、I を A のイデアルで $\operatorname{pd}_A I < \infty$ とする。もし環 A が正則局所環でないならば、次が成り立つ。

(1) $I \subseteq J \subseteq I : \mathfrak{m}$ なる任意のイデアル J に対し、$\mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$ が成り立つ。
(2) $I : \mathfrak{m}$ は I 上整である。

証明. $I = (0), A$ のときは明らか。$I \neq (0), A$ とする。定理 1.1 より $\mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$ でなければならない。従って、特に $\mathfrak{m}(I : \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}I$ である。また、$\operatorname{pd}_A I < \infty$ より正則元 $f \in I$ が存在する。よって $I : \mathfrak{m}$ は I 上整である [NR, p.156 Theorem 2]。 □

系 2.3 ([Bu]). AをNoether環としIをAのイデアルで、$\bar{I}=I$であってかつ$\mathrm{pd}_A I<\infty$とする。このとき、任意の$\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_A A/I$に対して局所環$A_\mathfrak{p}$は正則である。

証明. 任意の$\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_A A/I$に対し、局所化$A_\mathfrak{p}$を通して$(A,\mathfrak{m})$はNoether局所環で、$\mathfrak{m}\in \mathrm{Ass}_A A/I$と仮定してよい。局所環$A$がもし正則でないとすると系2.2より$I:\mathfrak{m}$は$I$上整である。故に$\bar{I}=I$より$I:\mathfrak{m}=I$となり$\mathfrak{m}\in \mathrm{Ass}_A A/I$に反する。従って$A$は正則局所環である。 □

注意 2.4. ここまでで射影次元有限を入射次元有限に変えても正しい。また局所環Aの$\mathrm{depth}\, A>0$のときは射影次元有限という条件をH-次元有限に、正則局所環をH局所環に変えても正しい (Hは、Gorenstein, Complete – Intersection, Cohen – Macaulay など)。

3 定理1.2の証明

まず、次の2つの命題を示す。

命題 3.1 ([CP]). $(A,\mathfrak{m})$をNoether局所環とし$t=\mathrm{depth}\, A$, $a_1,a_2,\ldots,a_t$をA-正則列とする。$\mathfrak{q}=(a_1,a_2,\ldots,a_t)$, $I=\mathfrak{q}:\mathfrak{m}$とおく。このとき、もし$A$が正則局所環でないならば$I^2=\mathfrak{q}I$が成り立つ。

証明. 系2.2より$\mathfrak{m}I=\mathfrak{m}\mathfrak{q}$である。故に$\mathfrak{m}I^n=\mathfrak{m}\mathfrak{q}^n$ $(n\in\mathbb{Z})$が成り立つ。よって特に$I^2\subseteq\mathfrak{q}$であってかつ$\mathfrak{m}I^2\subseteq\mathfrak{q}^2$である。任意に$x\in I^2$をとり、$x=\sum_{i=1}^t x_ia_i$ $(x_i\in A)$とかく。任意の$\alpha\in\mathfrak{m}$に対し$\alpha x=\sum_{i=1}^t(\alpha x_i)a_i\in\mathfrak{m}I^2\subseteq\mathfrak{q}^2$である。$\mathfrak{q}$は正則列で生成されているので各$\alpha x_i\in\mathfrak{q}$である。従って各$x_i\in\mathfrak{q}:\mathfrak{m}=I$. 故に$x\in\mathfrak{q}I$となり$I^2=\mathfrak{q}I$を得る。 □

命題 3.2 (cf. [CHV]). $(A,\mathfrak{m})$をCohen – Macaulay局所環とし$\mathfrak{q}$をAのパラメーターイデアルとする。$I=\mathfrak{q}:\mathfrak{m}$とおく。このとき、もし$I^2\neq\mathfrak{q}I$ならば$A$は正則局所環で$\mathrm{emb.dim}A/\mathfrak{q}\leq 1$であってかつ$\bar{\mathfrak{q}}=\mathfrak{q}$である。

証明. 命題3.1より局所環Aは正則である。よって$\mathrm{d}=\dim A>0$としてよい。$n=\mathrm{emb.dim}A/\mathfrak{q}$とし$\mathfrak{m}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\mathfrak{q}$とかく。このとき$n\leq 1$である ([CHV, Lemma 3.6])。実際, $I=(\Delta)+\mathfrak{q}$とおくと、[CHV, Lemma 3.5]により$x_iy_j\equiv\delta_{ij}\Delta \bmod \mathfrak{q}$ $(1\leq i,j\leq n)$を満たす$y_1,y_2,\ldots,y_n\in A$が存在する。故に$\Delta=x_iy_i+a_i$ $(a_i\in\mathfrak{q})$, $x_iy_j\in\mathfrak{q}$ $(i\neq j)$である。ここでもし$n\geq 2$とすると

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= (x_1y_1+a_1)(x_2y_2+a_2)\\ &= (x_1y_2)(x_2y_1)+a_1(x_2y_2)+a_2(x_1y_1)+a_1a_2\end{aligned}$$

より$\Delta^2\in\mathfrak{q}I$となり$I^2\neq\mathfrak{q}I$に反する。よって$n\leq 1$である。故に、Aの正則パラメーター系$b_1,b_2,\ldots,b_d$と正整数$q>0$が存在して$\mathfrak{q}=(b_1,b_2,\ldots,b_{d-1},b_d^q)$である。従って$\bar{\mathfrak{q}}=\mathfrak{q}$である。 □

定理 1.2 の証明. $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \ldots, a_t)$ で $a_1, a_2, \ldots, a_t$ は A-正則列とする。$\mathcal{F} = \mathrm{Ass}_A A/\mathfrak{q}$ とおく。$I = \mathfrak{q} : \mathfrak{p}$ より $\mathrm{Ass}_A A/I \subseteq \mathcal{F}$ である。$\mathfrak{q}/\mathfrak{q}I \cong \mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2 \otimes A/I \cong (A/I)^t$ だから、完全列

$$0 \to \mathfrak{q}/\mathfrak{q}I \to A/\mathfrak{q}I \to A/\mathfrak{q} \to 0$$

より $\mathrm{Ass}_A A/\mathfrak{q}I \subseteq \mathcal{F}$ である。任意に $Q \in \mathrm{Ass}_A I/\mathfrak{q}I$ をとると $I^2 \neq \mathfrak{q}I$ より $IA_Q \neq \mathfrak{q}A_Q$ である。故に $\mathfrak{p}A_Q \neq A_Q$. よって $\mathfrak{p} \subseteq Q$ となり $\mathfrak{p}$ の極大性から $\mathfrak{p} = Q$ である。従って $I^2A_\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}A_\mathfrak{p}IA_\mathfrak{p}$. よって命題 3.1 より $A_\mathfrak{p}$ は正則局所環である。また命題 3.2 より $\overline{\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ である。 □

参考文献

[Au] M.Auslander, Anneaux de Gorenstein et torsion en algèbre commutative, Séminaire d'algèbre commutative dirigé par Pierre Samuel 1966/67, École Normale Supérieure de Jeunes Fillies, 1967

[AGP] L.L.Avramov, V.N.Gasharov and I.V.Peeva, *Complete intersection dimension*, I.H.E.S. Publ. Math. **86**(1997), 67-114

[Bu] L.Burch, *On ideals of finite homological dimension in local rings*, Proc. Camb. Phil. Soc. **64**(1968), 941-948

[CHV] A.Corso, C.Huneke and W.V.Vasconcelos, *On the integral closure of ideals*, manuscripta math.**95** (1998), 331-347

[CP] A.Corso and C.Polini, *Links of prime ideals and their Rees algebas*, J. of Alg. **178**(1995), 224-238

[GH] S. Goto and F. Hayasaka, *Finite homological dimension and primes associated to integrally closed ideals* II, Preprint 2001

[NR] D.G.Northcott and D.Rees, *Reduction of ideals in local rings*, Proc. Camb. Phil. Soc. **50**(1954), 145-158

[TAY] R.Takahashi, T.Araya and Y.Yoshino, *Cohen-Macaulay dimensions of modules*, Preprint 2001

Department of Mathematics, School of Science and Technology, Meiji University, 214-8571 JAPAN

e-mail adress: ee68048@math.meiji.ac.jp

On the basic sequences of integral curves in $\mathbf{P}^3$

Mutsumi AMASAKI

Graduate School of Education, Hiroshima University,
1-1-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 739-8524, Japan
E-mail : amasaki@hiroshima-u.ac.jp

January 7, 2002

Abstract

Let X be a curve in $\mathbf{P}^3$, I_X the saturated homogeneous ideal of X in the polynomial ring $R = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$, and $B_R(I_X) = (a; n_1, \ldots, n_a; n_{a+1}, \ldots, n_{a+b})$ the basic sequence of X. We explain a number of conditions that $B_R(I_X)$ must satisfy for an integral curve X, and then compare our results with those claimed by M. Cook in [10] with the use of a computer.

§1. Basic sequences of curves in $\mathbf{P}^3$

We reproduce here some of the results and arguments from [3, Section 1] for the convenience of the readers. For the sake of simplicity, we assume that the ground field k is of characteristic zero.

Let y_1, y_2, y_3, y_4 be indeterminates over k, R the polynomial ring $k[y_1, y_2, y_3, y_4]$, $\mathfrak{m}$ the maximal ideal (y_1, y_2, y_3, y_4), ζ_{ij} $(1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 4)$ indeterminates over R, K the quotient field of the polynomial ring $k[\zeta] := k[\zeta_{ij}; 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 4]$, and z_1, z_2, z_3, z_4 elements of $R_K := K[y_1, y_2, y_3, y_4]$ such that $y_i = \sum_{j=1}^{4} \zeta_{ji} z_j$ $(1 \leq i \leq 4)$.

Let I be a homogeneous ideal in R of height 2 such that $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(R/I) = 1$ and let $I_K := IR_K$. Then, there is a Weierstrass basis $\{\ \tilde{e}_l^i \mid 1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq l \leq m_i\ \}$ of I_K with respect to z_1, z_2, z_3, z_4 (see [7, Theorem 2.12], [8, Theorem 2.5], [6, Theorem (1.1)]). Let $a := \min\{l \mid [I]_l \neq 0\}$. Since $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}R_K}(R_K/I_K) = 1$, we see $m_4 = m_5 = 0$. Besides, $m_1 = 1$ and $m_2 = a$ (see [6, Lemma (1.3), Proposition (1.6), Remark (1.7)]). Put $b := m_3$, $\tilde{f}_0 := \tilde{e}_1^1$, $\tilde{f}_l := \tilde{e}_l^2$ $(1 \leq l \leq a)$, $\tilde{f}_{a+l} := \tilde{e}_l^3$ $(1 \leq l \leq b)$, and $n_l = \deg(\tilde{f}_l)$ $(1 \leq l \leq a + b)$. We may assume that the sequence $n_1, \ldots, n_a$ (resp. $n_{a+1}, \ldots, n_{a+b}$) is nondecreasing after changing the order of $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_a$ (resp. $\tilde{f}_{a+1}, \ldots, \tilde{f}_{a+b}$) if necessary. We call $(a; n_1, \ldots, n_a; n_{a+1}, \ldots, n_{a+b})$ the basic sequence of I and denote it by $B_R(I)$ (see [7, Definition 2.13], [6, Definition (1.5)], [2, Definition 1.4]). Recall that $a \leq n_1 \leq n_{a+1}$ (see [6, Proposition (1.6)]).

We have

$$I_K = R\tilde{f}_0 \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{a} K[z_2, z_3, z_4]\tilde{f}_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{b} K[z_3, z_4]\tilde{f}_{a+i} \right) \tag{1}$$

as $K[z_3, z_4]$-module by [7, Definition 2.2], so that

$$z_1\tilde{f}_j = \tilde{g}_{0j}\tilde{f}_0 + \sum_{i=1}^{a} \tilde{g}_{ij}\tilde{f}_i + \sum_{i=1}^{b} \tilde{g}_{a+i\,j}\tilde{f}_{a+i} \quad (1 \le j \le a), \tag{2}$$

$$z_1\tilde{f}_{a+j} = \tilde{g}_{0\,a+j\,1}\tilde{f}_0 + \sum_{i=1}^{a} \tilde{g}_{i\,a+j\,1}\tilde{f}_i + \sum_{i=1}^{b} \tilde{g}_{a+i\,a+j\,1}\tilde{f}_{a+i} \quad (1 \le j \le b), \tag{3}$$

$$z_2\tilde{f}_{a+j} = \tilde{g}_{0\,a+j\,2}\tilde{f}_0 + \sum_{i=1}^{a} \tilde{g}_{i\,a+j\,2}\tilde{f}_i + \sum_{i=1}^{b} \tilde{g}_{a+i\,a+j\,2}\tilde{f}_{a+i} \quad (1 \le j \le b) \tag{4}$$

with

$$\begin{cases} \tilde{g}_{0j},\ \tilde{g}_{0\,a+j\,1},\ \tilde{g}_{0\,a+j\,2} \in R, \\ \tilde{g}_{ij},\ \tilde{g}_{i\,a+j\,1},\ \tilde{g}_{i\,a+j\,2} \in K[z_2, z_3, z_4] \quad (1 \le i \le a), \\ \tilde{g}_{a+i\,j},\ \tilde{g}_{a+i\,a+j\,1},\ \tilde{g}_{a+i\,a+j\,2} \in K[z_3, z_4] \quad (1 \le i \le b), \end{cases} \tag{5}$$

where the polynomials appearing above are all homogeneous. Moreover,

$$\begin{cases} \tilde{g}_{0j} \in (z_2, z_3, z_4)K[z_2, z_3, z_4],\ \tilde{g}_{0\,a+j\,1} \in (z_3, z_4)K[z_2, z_3, z_4],\ \tilde{g}_{0\,a+j\,2} = 0, \\ \tilde{g}_{i\,a+j\,1} \in (z_3, z_4)K[z_2, z_3, z_4],\ \tilde{g}_{i\,a+j\,2} \in (z_3, z_4)K[z_3, z_4] \quad (1 \le i \le b) \end{cases} \tag{6}$$

by [7, Proposition 2.5]. Let $\tilde{U}_{01}$, $\tilde{U}_{02}$, $\tilde{U}_1$, $\mathring{\tilde{U}}_1$, $\tilde{U}_2$, $\tilde{U}_{21}$, $\tilde{U}_3$, $\mathring{\tilde{U}}_3$, $\tilde{U}_4$, $\tilde{U}_5$, $\mathring{\tilde{U}}_5$ be matirices defined as follows:

$$\begin{cases} \tilde{U}_{01} = -(g_{0j})_{1\le j\le a}, \quad \tilde{U}_{02} = -(g_{0\,a+j})_{1\le j\le b}, \quad \mathring{\tilde{U}}_1 = (g_{ij})_{1\le i\le a,\ 1\le j\le a}, \\ \tilde{U}_2 = -(g_{i\,a+j\,1})_{1\le i\le a,\ 1\le j\le b}, \quad \tilde{U}_{21} = -(g_{a+i\,j\,1})_{1\le i\le a,\ 1\le j\le b}, \\ \mathring{\tilde{U}}_3 = (g_{a+i\,a+j\,1})_{1\le i\le b,\ 1\le j\le b}, \quad \tilde{U}_4 = -(g_{i\,a+j\,2})_{1\le i\le a,\ 1\le j\le b}, \\ \mathring{\tilde{U}}_5 = (g_{a+i\,a+j\,2})_{1\le i\le b,\ 1\le j\le b}, \\ \tilde{U}_1 = z_1 1_a - \mathring{\tilde{U}}_1, \quad \tilde{U}_3 = z_1 1_b - \mathring{\tilde{U}}_3, \quad \tilde{U}_5 = z_2 1_b - \mathring{\tilde{U}}_5. \end{cases} \tag{7}$$

Let further

$$\tilde{\lambda}_1 = (\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_a, \tilde{f}_{a+1}, \ldots, \tilde{f}_{a+b}), \quad \tilde{\lambda}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{01} & \tilde{U}_{02} & 0 \\ \tilde{U}_1 & \tilde{U}_2 & \tilde{U}_4 \\ \tilde{U}_{21} & \tilde{U}_3 & \tilde{U}_5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \begin{bmatrix} -\tilde{U}_4 \\ -\tilde{U}_5 \\ \tilde{U}_3 \end{bmatrix}.$$

Then

$$\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 = 0 \tag{8}$$

by (2) – (4). Furthermore,

$$\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3 = 0 \tag{9}$$

and the sequence

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow R_K(-\bar{n}^2 - 2) &\xrightarrow{\tilde{\lambda}_3} R_K(-\bar{n}^1 - 1, -\bar{n}^2 - 1, -\bar{n}^2 - 1) \\ &\xrightarrow{\tilde{\lambda}_2} R_K(-a, -\bar{n}^1, -\bar{n}^2) \xrightarrow{\tilde{\lambda}_1} I_K \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{10}$$

is exact by [6, (3) of Corollary (3.11)] or [1, Example 2.8], where $\bar{n}^1 := (n_1, \ldots, n_a)$, $\bar{n}^2 := (n_{a+1}, \ldots, n_{a+b})$.

Lemma 1.1. *Let $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ be an irreducible homogeneous polynomial in R. Then*

$$\hat{f} := f(\zeta_{11}z_1 + \zeta_{21}z_2, \zeta_{12}z_1 + \zeta_{22}z_2, \zeta_{13}z_1 + \zeta_{23}z_2, \zeta_{14}z_1 + \zeta_{24}z_2)$$

is irreducible in $k[\zeta][z_1, z_2]$.

Lemma 1.2. *With the notation above, suppose that there is an irreducible homogeneous polynomial of degree a in I. Then, $n_i \le n_{i+1} \le n_i + 1$ for all $1 \le i \le a - 1$ and*

$$\operatorname{rank}_K(\tilde{U}_1 \mod (z_1, z_2, z_3, z_4)) \ge n_a - n_1. \tag{11}$$

Let x_1, x_2, x_3, x_4 denote a system of homogeneous elements of R of degree one such that $R = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$. We may think of x_1, x_2, x_3, x_4 as a specialization of z_1, z_2, z_3, z_4 at $(\zeta_{ij}) = \Gamma$, where Γ is an element of $GL(4, k)$.

Remark 1.3. Assume that the matrix Γ mentioned above is sufficiently general. Under this assumption, x_1, x_2, x_3, x_4 are sufficiently general. Let e_1^1, e_l^2 $(1 \le l \le a)$, e_l^3 $(1 \le l \le b)$, f_l $(0 \le l \le a + b)$, U_i $(1 \le i \le 5)$, U_{0i} $(i = 1, 2)$, U_{21}, and λ_i $(i = 1, 2, 3)$ denote the polynomials and matrices obtained from $\tilde{e}_1^1$, $\tilde{e}_l^2$ $(1 \le l \le a)$, $\tilde{e}_l^3$ $(1 \le l \le b)$, $\tilde{f}_l$ $(0 \le l \le a + b)$, $\tilde{U}_i$ $(1 \le i \le 5)$, $\tilde{U}_{0i}$ $(i = 1, 2)$, $\tilde{U}_{21}$, and $\tilde{\lambda}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ respectively by the substitution $(\zeta_{ij}) = \Gamma$. Then $\{ e_l^i \mid 1 \le i \le 3,\ 1 \le l \le m_i \} = \{ f_l \mid 0 \le l \le a + b \}$ is a Weierstrass basis of I with respect to x_1, x_2, x_3, x_4 (see [6, Lemma (1.3), Proposition (1.6), Remark (1.7)]), $n_l = \deg(f_l)$ for $0 \le l \le a + b$, and

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow R(-\bar{n}^2 - 2) &\xrightarrow{\lambda_3} R(-\bar{n}^1 - 1, -\bar{n}^2 - 1, -\bar{n}^2 - 1) \\ &\xrightarrow{\lambda_2} R(-a, -\bar{n}^1, -\bar{n}^2) \xrightarrow{\lambda_1} I \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{12}$$

is a free resolution of I over R (see [6, (3) of Corollary (3.11)] or [1, Example 2.8]), where $\bar{n}^1 := (n_1, \ldots, n_a)$, $\bar{n}^2 := (n_{a+1}, \ldots, n_{a+b})$. We have further

$$\begin{cases} U_1 - x_1 1_a \in \mathrm{MAT}(k[x_2, x_3, x_4]), \quad U_{01} \in \mathrm{MAT}((x_2, x_3, x_4)k[x_2, x_3, x_4]), \\ U_{02},\ U_2 \in \mathrm{MAT}((x_3, x_4)k[x_2, x_3, x_4]), \quad U_4 \in \mathrm{MAT}((x_3, x_4)k[x_3, x_4]), \\ U_3 - x_1 1_b,\ U_5 - x_2 1_b,\ U_{21} \in \mathrm{MAT}(k[x_3, x_4]) \end{cases} \tag{13}$$

by (2) – (7).

Remark 1.4. In the situation of Remark 1.3, let $\mathrm{gin}(I)$ (generic initial ideal) be the monomial ideal in R generated by $\{\, \mathrm{in}(f) \mid f$ is a homogeneous polynomial of $I\,\}$, where $\mathrm{in}(f)$ denotes the initial term of f with respect to the reverse lexicographic order. Then $\mathrm{gin}(I)$ is minimally generated by $x_1^a, x_1^{a-1}x_2^{\mu_{a-1}}, \dots, x_1x_2^{\mu_1}, x_2^{\mu_0}$ $(1 \le \mu_{a-1} < \mu_{a-2} < \cdots < \mu_0)$ and b monomials of the form $x_1^{s_j}x_2^{t_j}x_3^{\mu_{s_jt_j}}$ $(1 \le j \le b,\ s_j < a,\ t_j < \mu_{s_j},\ \mu_{s_jt_j} > 0)$. We have $a = \deg(x_1^a)$, $n_i = \deg(x_1^{a-i}x_2^{\mu_{a-i}})$ $(1 \le i \le a)$, and $n_{a+j} = \deg(x_1^{s_j}x_2^{t_j}x_3^{\mu_{s_jt_j}})$ $(1 \le j \le b)$.

Lemma 1.5. *Let $I = (f, g)$ be a homogeneous ideal in R generated by homogeneous polynomials f, g of degree p, q respectively. Suppose that $p \le q$ and that f, g form an R-regular sequence. Then the basic sequence of I is $(p; q, q+1, \dots, q+p-1)$.*

§2. A problem

For a sequence $B = (a; n_1, \dots, n_a; n_{a+1}, \dots, n_{a+b})$, put

$$D(B) := \sum_{i=1}^{a} n_i - \frac{1}{2}a(a-1) - b,$$

$$G(B) := 1 + \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{2}n_i(n_i - 3) - \sum_{j=1}^{b} n_{a+j} + b - \frac{1}{6}a(a-1)(a-5).$$

Let X be a curve in $\mathbf{P}^3$ of degree $d(X)$ and arithmetic genus $g(X)$. Here, we mean by a curve a locally Cohen-Macaulay closed subscheme of dimension one. Let I_X be its saturated homogeneous ideal in R. Then $d(X) = D(B_R(I_X))$ and $g(X) = G(B_R(I_X))$ (see [2, Remark 1.9]). In this paper we are interested in the following

Problem 2.1. For each pair of nonnegative integers d, g, give a good characterization of a sequence $B = (a; n_1, \dots, n_a; n_{a+1}, \dots, n_{a+b})$ for which there is an an integral curve X in $\mathbf{P}^3$ such that $B = B_R(I_X)$, $d = D(B_R(I_X))$, and $g = G(B_R(I_X))$.

So far, we do not have any complete answer to the above problem. In the subsequent paragraphs, we will explain a number of necessary conditions for B to correspond to an integral curve.

§3. Numerical conditions on the basic sequences of integral curves in $\mathbf{P}^3$

Most of the results in this sections can be proved with the use of Lemma 1.2 and Remark 1.3. The exact sequence (12) and the property (13) are intensively used. See [3, Section 1] and [13] for the detail.

Let X be a curve in $\mathbf{P}^3$, I_X the saturated homogeneous ideal of X in R, x_1, x_2, x_3, x_4 sufficiently general linear forms of R, and $(a; n_1, \dots, n_a; n_{a+1}, \dots, n_{a+b})$ the basic sequence of I_X. We have $R = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Theorem 3.1. *Assume that X is contained in an irreducible surface of degree a. Suppose further that $b \geq 1$ and that there is an integer a' $(2 < a' \leq a)$ such that*

$$n_i = n_1 + i - 2 \textit{ for } 2 \leq i \leq a'.$$

Then $n_{a+b} \geq n_{a'}$.

Corollary 3.2. *Assume that X is contained in an irreducible surface of degree a. Suppose further that $b \geq 1$ and that there are integers a' $(2 < a' \leq a)$ and b'' $(1 \leq b'' < b)$ such that*

$$n_i = n_1 + i - 2 \textit{ for } 2 \leq i \leq a' \textit{ and } n_{a+b''} + 1 < n_{a+b''+1}.$$

Then $n_{a+b''} \geq n_{a'}$.

Theorem 3.3. *Assume that X is contained in an irreducible surface of degree a and that $b > 2$. Suppose further that there are integers a', b' $(2 < a' \leq a,\ 1 \leq b' < b - 1)$ such that*

$$n_i = n_1 + i - 2 \textit{ for } 2 \leq i \leq a',\ n_{a+j} = n_{a+b} - (b - j - 1) \textit{ for } b' \leq j \leq b - 1.$$

Then $n_{a+b'} \geq n_{a'}$.

Theorem 3.4. *Assume that X is contained in an irreducible surface of degree a and that $b > 1$. Suppose further that there are integers a', b' $(2 < a' \leq a,\ 1 \leq b' < b)$ such that*

$$n_i = n_1 + i - 2 \textit{ for } 2 \leq i \leq a',\ n_{a+j} = n_{a+b} - (b - j) \textit{ for } b' \leq j \leq b.$$

Then $n_{a+b'} \geq n_{a'}$.

Corollary 3.5. *Assume that X is contained in an irreducible surface of degree a and that $b > 2$. Suppose further that there are integers a', b', b'' with $2 < a' \leq a$, $1 \leq b' < b'' < b$ such that one of the following two conditions is satisfied:*

(i) *$n_i = n_1 + i - 2$ for $2 \leq i \leq a'$, $n_{a+j} = n_{a+b''} - (b'' - j)$ for $b' \leq j \leq b''$,*

(ii) *$n_i = n_1 + i - 2$ for $2 \leq i \leq a'$, $n_{a+b''-1} = n_{a+b''}$, $b' < b'' - 1$, $n_{a+j} = n_{a+b''} - (b'' - j - 1)$ for $b' \leq j \leq b'' - 1$.*

If $n_{a+b''} + 1 < n_{a+b''+1}$, then $n_{a+b'} \geq n_{a'}$.

Theorem 3.6. *Assume that X is contained in an irreducible surface of degree a and let a' be an integer with $1 \leq a' \leq a$. If $n_i = n_1 + i - 1$ for $1 \leq i \leq a'$, then $n_{a+1} \geq n_{a'}$.*

Proposition 3.7. *Suppose that X is contained in an irreducible surface of degree a and that $n_i = n_1 + i - 1$ for $1 \le i \le a$. Then $b = 0$ or $b > 2$.*

Corollary 3.8. *Assume that X is contained in an irreducible surface of degree a and that $b > 0$. Suppose further that $n_i = n_1 + i - 1$ for $1 \le i \le a$. If there is an integer b'' with $0 < b'' < b$ such that $n_{a+b''} + 1 < n_{a+b''+1}$, then $b'' > 2$.*

Corollary 3.9. *Assume that X is contained in an irreducible surface of degree a and that $b \ge 2$. Suppose further that $n_i = n_1 + i - 1$ for $1 \le i \le a$. Then $n_{a+2} \le n_{a+1} + 1$.*

Corollary 3.10. *Assume that X is contained in an irreducible surface of degree a and that $b > 1$. Suppose further that $n_i = n_1 + i - 1$ for $1 \le i \le a$. Then, $n_{a+j} \ne n_{a+1} + j - 1$ for some $1 \le j \le b$.*

Corollary 3.11. *Assume that X is contained in an irreducible surface of degree a and that $b > 2$. Let b'' be an integer with $1 < b'' < b$. Suppose further that $n_i = n_1 + i - 1$ for $1 \le i \le a$ and that $n_{a+b''} + 1 < n_{a+b''+1}$. Then $n_{a+j} \ne n_{a+1} + j - 1$ for some $1 \le j \le b''$.*

Let F be a matrix and $s_1, \dots, s_p$ and $t_1, \dots, t_q$ be strictly increasing sequences of integers. We denote by $F\binom{s_1,\dots,s_p}{t_1,\dots,t_q}$ the matrix obtained from F by deleting all of its s_ith $(1 \le i \le p)$ rows and t_jth $(1 \le j \le q)$ columns.

Proposition 3.12. *Assume that X is an integral curve of degree d and that $b \ge 2$. Let the notation be as in Remark 1.3. Suppose that there is an integer p with $1 \le p \le b-1$ such that*

$$n_{a+i+1} = n_{a+i} + 1 \quad \text{for } p \le i \le b-1, \tag{14}$$

$$\begin{cases} U_{21}\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, p-1 \\ \end{pmatrix} = 0, \\ U_3\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, p-1 \\ p, p+1, \dots, b \end{pmatrix} = U_5\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, p-1 \\ p, p+1, \dots, b \end{pmatrix} = 0, \end{cases} \tag{15}$$

$$\operatorname{rank}(U_3, U_5)\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, p-1 \\ \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{m}} = b - p < d - 1. \tag{16}$$

Then $d \ge n_{a+p}(b-p+1)$.

Proposition 3.13. *Assume that X is an integral curve of degree $d > 2$. Let the notation be as in Remark 1.3. Suppose that $b \ge 2$ and that*

$$U_{21}\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, b-2 \\ \end{pmatrix} = U_3\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, b-2 \\ b-1, b \end{pmatrix} = U_5\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, b-2 \\ b-1, b \end{pmatrix} = 0. \tag{17}$$

Then $d \ge n_{a+b-1} + n_{a+b} - 1$ or X has an l-secant for some $l \ge n_{a+b-1}$.

Proposition 3.14. *Assume that $H^0(\mathcal{O}_X) \cong k$ and that*

$$U_{21}\begin{pmatrix}1,2,\dots,b-1\\ \end{pmatrix} = U_3\begin{pmatrix}1,2,\dots,b-1\\ b\end{pmatrix} = U_5\begin{pmatrix}1,2,\dots,b-1\\ b\end{pmatrix} = 0 \tag{18}$$

with the notation of Remark 1.3. Let l_1 (resp. l_2) be the (b,b)-component of U_3 (resp. U_5), L the line defined by the equation $l_1 = l_2 = 0$, and $Y := \operatorname{Proj}(R/(f_0,\dots,f_{a+b-1}))$. Then, $B(Y) = (a; n_1,\dots,n_a; n_{a+1},\dots,n_{a+b-1})$, $L \subset Y$, $H^0(\mathcal{O}_Y) \cong k$, and there is an exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_L(-n_{a+b}) \xrightarrow{\times f_{a+b}} \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0. \tag{19}$$

If further $L \not\subset X$, then $Y = X \cup L$ and $h^0(\mathcal{O}_{X\cap L}) = n_{a+b}$.

§4. Cook's assertion

Let l be an arbitrary nonnegative integer and suppose that x_1, x_2, x_3, x_4 are sufficiently general. With the notation of Remark 1.4, we consider the monomial ideal in $k[x_1, x_2]$ generated by

$$\{\, x_1^a, x_1^{a-1}x_2^{\mu_{a-1}}, \dots, x_1x_2^{\mu_1}, x_2^{\mu_0} \,\} \cup \{\, x_1^{s_j}x_2^{t_j}x_3^{\mu_{s_jt_j}} \mid 1 \le j \le b,\ \mu_{s_jt_j} \le l \,\},$$

and let $x_1^{\alpha_l}, x_1^{\alpha_l-1}x_2^{\beta_{\alpha_l-1}}, \dots, x_1x_2^{\beta_1}, x_2^{\beta_0}$ $(1 \le \beta_{\alpha_l-1} < \beta_{\alpha_l-2} < \cdots < \beta_0)$ be its minimal generators. Put $\nu_l(i) := \deg(x_1^{\alpha_l-i}x_2^{\beta_{\alpha_l-i}})$ for $1 \le i \le \alpha_l$. In the main theorem of [10], Cook made the following assertions:

(1) if X is integral, then $\nu_l(i) \le \nu_l(i+1) \le \nu_l(i)+1$ for all i $(1 \le i < \alpha_l)$,

(2) if further $\alpha_l < a$, then $\alpha_l \le \nu_l(1) \le \alpha_l + 1$.

Remark 4.1. Unfortunately, there is an error in the proof of the above assertions (see [11, Section 4]). But, it seems that we can prove the assertion (1) by our method, when $\alpha_l = a$.

§5. Outputs made by a computer

Let the notation be as in Section 3 and assume that X is integral.

Remark 5.1. By Castelnuovo's regularity theorem combined with the results of [9], we have $a \le d-1$ and $n_i \le d-1$ for all $1 \le i \le a+b$, where $d = d(X)$.

Remark 5.2. $\operatorname{gin}(I_X)$ is Borel fixed.

We shall say that a sequence $B = (a; n_1, \ldots, n_a; n_{a+1}, \ldots, n_{a+b})$ satisfies Amasaki's conditions, if there is a Borel fixed monomial ideal giving the sequence B, and if B satisfies Remark 5.1, Lemma 1.2, and all the results in Section 3. Likewise, we shall say that B satisfies Cook's conditions, if there is a Borel fixed monomial ideal giving the sequence B which satisfies Cook's assertions in Section 4, and if B satisies Remark 5.1.

With the help of a computer, we can find all the sequences B satisfying Amasaki's and Cook's conditions respectively. We can find the sequences satisfying both conditions, too. At present, the number of the outputs seems too big. That is, we are far from the answer to Problem 2.1. The tables below help us to see how Cook's and Amasaki's conditons differ from each other.

My program is written in C in which only nemerical computations of integers are carried out. The sequences we get by this program do not necessarily correspond to integral curves in $\mathbf{P}^3$, because Amasaki's and Cook's conditions are not sharp enough.

(d,g)	Cook	Amasaki	both
(26,100)	1	1	1
(26,99)	2	1	1
(26,98)	3	1	1
(26,97)	5	2	2
(26,96)	6	3	3
(27,109)	1	1	1
(27,108)	2	1	1
(27,107)	2	1	1
(27,106)	3	2	2
(27,105)	4	3	3
(28,117)	1	1	1
(28,116)	1	1	1
(28,115)	3	2	2
(28,114)	4	2	2
(28,113)	5	3	3
(29,126)	2	2	2
(29,125)	2	1	1
(29,124)	3	1	1
(29,123)	5	2	2
(29,122)	6	3	3
(30,136)	1	1	1
(30,135)	2	1	1
(30,134)	2	1	1
(30,133)	3	2	2
(30,132)	5	4	4

(d,g)	Cook	Amasaki	both
(3,0)	1	1	1
(4,0)	1	1	1
(5,0)	3	2	2
(6,0)	4	3	3
(7,0)	9	7	6
(8,0)	20	12	12
(9,0)	48	34	30
(10,0)	111	98	86
(11,0)	250	225	187
(12,0)	570	500	400
(13,0)	1380	1173	920

These two tables show the numbers of the basic sequences which satisfy Cook's or Amasaki's or both conditions.

If g is close to the upper bound $1 + d(d-3)/6$ of the genus of a nonsingular irreducible curve in $\mathbf{P}^3$ not contained in any quadric surfaces (see [12, Introduction]), Amasaki's conditions seem stronger than Cook's. But, in general, both of the implications "Amasaki$\Rightarrow$Cook" and "Cook$\Rightarrow$Amasaki" are false.

candidates for generic initials	basic sequences
(3,0,0) (2,2,0)(1,4,0)(0,5,0) (1,3,3)	(3;4,5,5;7)
(3,0,0) (2,2,0)(1,4,0)(0,6,0) (0,5,1)(1,3,2)	(3;4,5,6;6,6)
(3,0,0) (2,3,0)(1,4,0)(0,5,0) (2,2,1)(1,3,2)	(3;5,5,5;5,6)
(3,0,0) (2,3,0)(1,4,0)(0,6,0) (2,2,1)(1,3,1)(0,5,1)	(3;5,5,6;5,5,6)
(4,0,0) (3,1,0)(2,2,0)(1,3,0)(0,5,0) (0,4,2) (4,0,0) (3,1,0)(2,2,0)(1,3,0)(0,5,0) (3,0,3)	(4;4,4,4,5;6)
(4,0,0) (3,1,0)(2,2,0)(1,4,0)(0,5,0) (3,0,1)(1,3,2)	(4;4,4,5,5;4,6)
(4,0,0) (3,1,0)(2,2,0)(1,4,0)(0,5,0) (1,3,1)(0,4,1) (4,0,0) (3,1,0)(2,2,0)(1,4,0)(0,5,0) (1,3,1)(3,0,2)	(4;4,4,5,5;5,5)
(4,0,0) (3,1,0)(2,2,0)(1,4,0)(0,6,0) (3,0,1)(1,3,1)(0,5,1)	(4;4,4,5,6;4,5,6)
(4,0,0) (3,1,0)(2,3,0)(1,4,0)(0,5,0) (3,0,1)(2,2,1)(1,3,1)	(4;4,5,5,5;4,5,5)

This is the table of the basic sequences with $(d, g) = (10, 9)$ that satisfy Cook's conditions. Among them, only the four sequences
$(3; 4, 5, 5; 7)$,
$(3; 5, 5, 5; 5, 6)$,
$(4; 4, 4, 4, 5; 6)$,
$(4; 4, 4, 5, 5; 5, 5)$
satisfy Amasaki's conditions.

Here, a triplet (s, t, u) indicates the monomial $x_1^s x_2^t x_3^u$.

References

[1] M. Amasaki, *Preparatory structure theorem for ideals defining space curves*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983), 493 – 518.

[2] M. Amasaki, *On the structure of arithmetically Buchsbaum curves in* $\mathbf{P}^3_k$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **20** (1984), 793 – 837.

[3] M. Amasaki, *Examples of nonsingular irreducible curves which give reducible singular points of* $\mathrm{red}(\mathrm{H}_{d,g})$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **21** (1985), 761 – 786.

[4] M. Amasaki, *Curves in* $\mathbf{P}^3$ *whose ideals are simple in a certain numerical sense*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **23** (1987), 1017 – 1052.

[5] M. Amasaki, *On the basic sequence of a curve in* $\mathbf{P}^3$, in Japanese, Kohkyuhroku 621, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, April 1987, pp. 73 – 90.

[6] M. Amasaki, *Application of the generalized Weierstrass preparation theorem to the study of homogeneous ideals*, Trans. AMS **317** (1990), 1 – 43.

[7] M. Amasaki, *Generators of graded modules associated with linear filter-regular sequences*, J. Pure Appl. Algebra **114** (1996), 1 – 23.

[8] M. Amasaki, *Generic Gröbner bases and Weierstrass bases of homogeneous submodules of graded free modules*, J. Pure Appl. Algebra **152** (2000), 3 – 16.

[9] D. Bayer and M. Stillman, *A criterion for detecting m-regularity*, Invent. math. **87** (1987), 1 – 11.

[10] M. Cook, *The connectedness of space curves invariants*, Compositio Math. **111** (1998), 221 – 244.

[11] W. Decker and F.-O. Schreyer, *Non-general type surfaces in* $\mathbf{P}^4$*: Some remarks on bounds and constructions*, J. Symb. Comp. **29** (2000), 545 – 583.

[12] L. Gruson et C. Peskine, *Genre des courbes de l'éspace projectif (II)*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^{e} sèrie, **15** (1982), 401 – 418.

[13] M. Amasaki, *Untitled*, in preparation.

On CM-dimensions of modules

Ryo Takahashi

1 Introduction

Throughout this note R always denotes a commutative noetherian local ring with unique maximal ideal $\mathfrak{m}$ and k denotes the residue class field $R/\mathfrak{m}$. All modules considered in this note are finitely generated.

We consider a numerical invariant i_R of an R-module, that is, $i_R(M) \in \mathrm{N} \cup \{\infty\}$ for an R-module M. For example, if we take the projective dimension pd_R, the Gorenstein dimension (abbr. G-dimension) G-$\dim_R$ and the complete intersection dimension (abbr. CI-dimension) CI-$\dim_R$ as the invariant i_R, then it is easy to see that the following conditions hold for the associated property $\mathbb{P}$ of local rings :

1) If $i_R(k) < \infty$, then R satisfies the property $\mathbb{P}$.

2) If R satisfies the property $\mathbb{P}$, then $i_R(M) < \infty$ for any R-module M.

3) If $i_R(M) < \infty$ for an R-module M, then $i_R(M) = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R M$.

Note that the property $\mathbb{P}$ in the conditions should read "regular" for the invariant pd_R, "Gorenstein" for G-$\dim_R$ and "complete intersection" for CI-$\dim_R$. See [1] as to the G-dimension and [2] as to the CI-dimension.

The main purpose of this note is to provide a new homological invariant for R-modules M that we call the *Cohen-Macaulay dimension* and denote by CM-$\dim_R M$. The key to do this is to consider a "quasi-dualizing" module that defines duality for the module M but not necessarily for any modules.

In Section 2 we shall make precise definition of the CM-dimension. We will prove that if R is a homomorphic image of a Gorenstein local ring then the condition 2) holds for $\mathbb{P} =$"Cohen-Macaulay". And we show that the other conditions are true for general local rings without any assumption. Furthermore, we will have the inequalities for an R-module M ;

$$\text{CM-}\dim_R M \leqq \text{G-}\dim_R M \leqq \text{CI-}\dim_R M \leqq \mathrm{pd}_R M.$$

If one of the invariants is finite, then the equality holds in its left.

2 Cohen-Macaulay dimension

Let $(R, \mathfrak{m}, k)$ be a noetherian local ring. In this section, we define the Cohen-Macaulay dimension (abbr. CM-dimension) of an R-module, and provide several properties of the CM-dimension. We will observe that the CM-dimension shares many basic properties with other homological dimensions.

Definition 2.1 Let M, N and C be R-modules. We call C a quasi-dualizing module for N if it satisfies the following conditions (where $(-)^{\vee} = \mathrm{Hom}_R(-, C)$).

a) The natural homomorphisms $R \to R^{\vee\vee}$ and $N \to N^{\vee\vee}$ are isomorphisms.

b) $\mathrm{Ext}^i_R(C, C) = \mathrm{Ext}^i_R(N, C) = \mathrm{Ext}^i_R(N^{\vee}, C) = 0$ for any $i > 0$.

We define the *Cohen-Macaulay dimension* of M, abbreviated CM-$\dim_R M$, as follows : if there is an integer n such that the n-th syzygy module $\Omega^n_R M$ of M has a quasi-dualizing module, then CM-$\dim_R M$ is the infimum of such n, and otherwise CM-$\dim_R M = \infty$.

First of all, we will observe the relationship between the Cohen-Macaulayness of R and the CM-dimension of R-modules. To do this, we use the following result, which had been called "Bass' conjecture", and proved by Peskine-Szpiro, Hochster, and Roberts (cf. [3, Remarks 9.6.4(ii)]).

Lemma 2.2 *If R has a non-zero finitely generated module of finite injective dimension, then R is a Cohen-Macaulay ring.*

Theorem 2.3 (1) *If* CM-$\dim_R k < \infty$, *then R is a Cohen-Macaulay ring.*

(2) *Suppose that R is a homomorphic image of a Gorenstein local ring. If R is Cohen-Macaulay, then* CM-$\dim_R M < \infty$ *for any R-module M.*

PROOF. (1) Put $n =$ CM-$\dim_R k$. Since CM-$\dim_R \Omega^n_R k = 0$, $\Omega^n_R k$ has a quasi-dualizing module C, and $\mathrm{Ext}^i_R(\Omega^n_R k, C) = 0$ for any $i > 0$. Therefore, $\mathrm{Ext}^i_R(k, C) = 0$ for any $i > n$, hence $\mathrm{id}_R C \leqq n < \infty$. By Lemma 2.2, we see that R is Cohen-Macaulay.

(2) Since R is a homomorphic image of a Gorenstein local ring, R has the canonical module K_R. It is well known that K_R is a quasi-dualizing module for any maximal Cohen-Macaulay module. For a non-zero R-module M, it is easy to see that $\Omega^n_R M$ is maximal Cohen-Macaulay where $n = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M$, hence CM-$\dim_R M \leqq n < \infty$. □

Remark 2.4 In the second part of the theorem, the assumption that R is a homomorphic image of a Gorenstein local ring is necessary. In fact, it is known that there is a factorial Cohen-Macaulay local ring R which is not Gorenstein [8], hence R is not a homomorphic image of a Gorenstein ring. In this case, the residue class field k of R is of infinite CM-dimension. To prove this, suppose that $n = \text{CM-dim}_R k < \infty$ and let C be a quasi-dualizing module for $\Omega^n k$. Then we have $\text{Hom}_R(C, C) \cong R$ and $\text{id}_R C \leqq n < \infty$ as in the same proof as Theorem 2.3 (1). Since R is factorial, we easily see that C is isomorphic to R. It follows that R would be Gorenstein, contradiction.

Our next goal is to prove the CM-dimension satisfies the analogous equality to the Auslander-Buchsbaum formula, that is, for an R-module M, if $\text{CM-dim}_R M < \infty$ then

$$\text{CM-dim}_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M.$$

For this purpose, we begin with studying the properties of quasi-dualizing modules.

Proposition 2.5 *Let C and M be R-modules and $\mathrm{x} = x_1, x_2, \cdots, x_r$ be a C-regular sequence. Then the following conditions are equivalent.*

(1) *C is a quasi-dualizing module for M.*

(2) *x is a regular sequence on both R and M, and $C/\mathrm{x}C$ is a quasi-dualizing module for $M/\mathrm{x}M$ as an $R/(\mathrm{x})$-module.*

PROOF. By induction on r, we may assume that $\mathrm{x} = x \in \mathfrak{m}$ is a C-regular element. Let us denote the reduction mod x by $\overline{(-)}$ and $(-)^\vee = \text{Hom}_R(-, C)$.

(1) $\Rightarrow$ (2): We easily see that x is a regular element on R, M, and $M^\vee$, since $R \cong \text{Hom}_R(C, C)$ and $M \cong \text{Hom}_R(M^\vee, C)$. Applying $(-)^\vee$ to the exact sequence $0 \to M \xrightarrow{x} M \to \overline{M} \to 0$, we have an exact sequence

$$0 \to M^\vee \xrightarrow{x} M^\vee \to N \to 0, \tag{1}$$

where $N := \text{Ext}^1_R(\overline{M}, C) \cong \text{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{C})$, and $\text{Ext}^i_{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{C}) \cong \text{Ext}^{i+1}_R(\overline{M}, C) = 0$ for any $i > 0$. Applying $(-)^\vee$ to the exact sequence (1), we have an exact sequence

$$0 \to M \xrightarrow{x} M \to \text{Ext}^1_R(N, C) \to 0, \tag{2}$$

and $\text{Ext}^i_{\overline{R}}(N, \overline{C}) \cong \text{Ext}^{i+1}_R(N, C) = 0$ for any $i > 0$. It follows from (2) that $\overline{M} \cong \text{Ext}^1_R(N, C) \cong \text{Hom}_{\overline{R}}(\text{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{C}), \overline{C})$. Thus, we see that $\overline{C}$ is a quasi-dualizing module for $\overline{M}$ as an $\overline{R}$-module.

(2) $\Rightarrow$ (1): Since x is a regular element on C, we easily see that x is a regular element on $C^\vee$, $M^\vee$, and $M^{\vee\vee}$. Applying $(-)^\vee$ to the exact sequence $0 \to C \xrightarrow{x} C \to \overline{C} \to 0$ and noting $\text{Ext}^{i+1}_R(\overline{C}, C) \cong \text{Ext}^i_{\overline{R}}(\overline{C}, \overline{C}) = 0$ for $i > 0$, we have an exact sequence $0 \to C^\vee \xrightarrow{x} C^\vee \to \text{Ext}^1_R(\overline{C}, C) \to 0$, and $\text{Ext}^i_R(C, C) = 0$ for $i > 0$ by Nakayama's lemma. Since $\text{Ext}^1_R(\overline{C}, C) \cong \text{Hom}_{\overline{R}}(\overline{C}, \overline{C}) \cong \overline{R}$, we have $\overline{R} \cong \overline{C^\vee}$. Note that this isomorphism is induced

by the natural map $f : R \to C^\vee$. Put $N = \mathrm{Ker} f$ and $L = \mathrm{Coker} f$. Since x is a regular element on $C^\vee$, we have $\overline{N} = \mathrm{Ker}\overline{f} = 0$ and $\overline{L} = \mathrm{Coker}\overline{f} = 0$. Hence Nakayama's lemma implies that $R \cong C^\vee$. Applying $(-)^\vee$ to the exact sequence $0 \to M \xrightarrow{x} M \to \overline{M} \to 0$ and noting $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(\overline{M}, C) \cong \mathrm{Ext}_{\overline{R}}^i(\overline{M}, \overline{C}) = 0$ for $i \geqq 0$, we have an exact sequence $0 \to M^\vee \xrightarrow{x} M^\vee \to \mathrm{Ext}_R^1(\overline{M}, C) \to 0$, and $\mathrm{Ext}_R^i(M, C) = 0$ for $i > 0$ by Nakayama's lemma. Applying $(-)^\vee$ to the exact sequence $0 \to M^\vee \xrightarrow{x} M^\vee \to \overline{M^\vee} \to 0$ and discussing similarly to the above, we have an exact sequence $0 \to M^{\vee\vee} \xrightarrow{x} M^{\vee\vee} \to \mathrm{Ext}_R^1(\overline{M^\vee}, C) \to 0$, and $\mathrm{Ext}_R^i(M^\vee, C) = 0$ for any $i > 0$. It follows that $\overline{M^\vee} \cong \mathrm{Ext}_R^1(\overline{M}, C) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M}, \overline{C})$ and that $\overline{M^{\vee\vee}} \cong \mathrm{Ext}_R^1(\overline{M^\vee}, C) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{M^\vee}, \overline{C})$. Therefore we have $\overline{M} \cong \overline{M^{\vee\vee}}$. Note that this isomorphism is induced by the natural map $f' : M \to M^{\vee\vee}$. Put $N' = \mathrm{Ker} f$ and $L' = \mathrm{Coker} f$. Since x is a regular element on $M^{\vee\vee}$, we have $\overline{N'} = \mathrm{Ker}\overline{f'} = 0$ and $\overline{L'} = \mathrm{Coker}\overline{f'} = 0$. Hence Nakayama's lemma implies that $M \cong M^{\vee\vee}$. □

Proposition 2.6 *Let C be an R-module such that* $\mathrm{Hom}_R(C, C) \cong R$ *and* $\mathrm{Ext}_R^i(C, C) = 0$ *for any $i > 0$. Then,*

(1) *C is a quasi-dualizing module for C. In particular,* $\text{CM-dim}_R C = 0$.

(2) *C is a faithful R-module. In particular,* $\mathrm{Supp}\, C = \mathrm{Spec}\, R$, *and* $\dim C = \dim R$.

(3) *We have* $\mathrm{Ass}\, C = \mathrm{Ass}\, R$.

(4) *Let $\mathrm{x} = x_1, x_2, \cdots, x_r$ be a sequence in $\mathfrak{m}$. Then it is an R-regular sequence if and only if it is a C-regular sequence. In particular,* $\mathrm{depth}\, C = \mathrm{depth}\, R$.

PROOF. (1) Trivial.

(2) Let $a \in \mathrm{Ann}\, C$. Then the multiplication map $C \xrightarrow{a} C$ is zero map. Since $\mathrm{Hom}_R(C, C) \cong R$, we see that $a = 0$.

(3) By (2), we have $\mathrm{Ass}\, R = \mathrm{Ass}\,\mathrm{Hom}_R(C, C) = \mathrm{Supp}\, C \cap \mathrm{Ass}\, C = \mathrm{Ass}\, C$.

(4) We use induction on r. When $r = 1$, the assertion follows from (3). Suppose $r > 1$. By Proposition 2.5, C/x_1C is a quasi-dualizing module for C/x_1C as an $R/(x_1)$-module. By induction hypothesis, we see that $x_2, \cdots, x_r$ is an $R/(x_1)$-regular sequence if and only if it is a C/x_1C-regular sequence. □

Proposition 2.7 *Let M be an R-module with* $\mathrm{depth}\, R \leqq \mathrm{depth}\, M$. *Suppose ΩM has a quasi-dualizing module C. Then C is also a quasi-dualizing module for M.*

PROOF. We prove it by induction on $t := \mathrm{depth}\, R = \mathrm{depth}\, C$. Put $N = \Omega M$. There is an exact sequence

$$0 \to N \to F \to M \to 0, \tag{3}$$

where F is a free R-module.

Suppose $t = 0$. Applying $(-)^\vee = \mathrm{Hom}_R(-, C)$ to (3), we have an exact sequence

$$0 \to M^\vee \to F^\vee \to N^\vee \to L \to 0, \tag{4}$$

where $L = \mathrm{Ext}^1_R(M, C)$, and we have $\mathrm{Ext}^i_R(M, C) = 0$ for any $i \geqq 2$. Applying $(-)^\vee$ to (4), we get $L^\vee = 0$. It follows from $\mathrm{Hom}_R(L, C) = 0$ and from $\operatorname{depth} C = 0$ that $L = 0$. Hence we have an exact sequence

$$0 \to M^\vee \to F^\vee \to N^\vee \to 0. \tag{5}$$

Applying $(-)^\vee$ to (5), we see that $M \cong M^{\vee\vee}$ and $\mathrm{Ext}^i_R(M^\vee, C) = 0$ for $i > 0$. Thus, C is a quasi-dualizing module for M.

Suppose $t > 0$. Since $\operatorname{depth} M \geqq t > 0$, we can take $x \in \mathfrak{m}$ which is R-, C- and M-regular. Let $\overline{(-)}$ denote the reduction mod x. By (3), we have an exact sequence $0 \to \overline{N} \to \overline{F} \to \overline{M} \to 0$. Proposition 2.5 says that $\overline{C}$ is a quasi-dualizing module for $\overline{N}$ as an $\overline{R}$-module. Therefore, it follows from induction hypothesis that $\overline{C}$ is a quasi-dualizing module for $\overline{M}$ as $\overline{R}$-module. Using Proposition 2.5 again, we see that C is a quasi-dualizing module for M. □

Now we can prove the Auslander-Buchsbaum-type equality for the CM-dimension.

Theorem 2.8 *Let M be a non-zero R-module. If $\text{CM-dim}_R M < \infty$, then*

$$\text{CM-dim}_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth}_R M.$$

In particular, $\operatorname{depth}_R M$ is not bigger than $\operatorname{depth} R$ whenever $\text{CM-dim}_R M < \infty$.

PROOF. We use induction on $n = \text{CM-dim}_R M$.

Suppose $n = 0$. Then M has a quasi-dualizing module C. Put $t = \operatorname{depth} R$ and take an R-regular sequence $\mathbf{x} = x_1, x_2, \cdots, x_t$. Proposition 2.5 and 2.6.4 imply that it is a C- and M-regular sequence and $C/\mathbf{x}C$ is a quasi-dualizing module for $M/\mathbf{x}M$ as an $R/(\mathbf{x})$-module. Thus, we may assume $t = 0$. Then, since $\operatorname{depth} C = 0$, there is an exact sequence $0 \to k \to C$. Applying the functor $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, C), -)$ to this, we get an exact sequence $0 \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, C), k) \to M$. Since $\mathrm{Hom}_R(M, C) \neq 0$, we see that $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, C), k)$ is a non-zero submodule of M with depth zero. It follows that $\operatorname{depth} M = 0 = \operatorname{depth} R$.

Suppose $n = 1$. By Proposition 2.7, we have $\operatorname{depth} R > \operatorname{depth} M$. On the other hand, we see that $\operatorname{depth} R = \operatorname{depth} \Omega M$ by induction hypothesis. There is an exact sequence $0 \to \Omega M \to F \to M \to 0$ where F is free, hence $\operatorname{depth} M \geqq \mathrm{Min}\,\{\operatorname{depth} R,\ \operatorname{depth} \Omega M - 1\}$. Thus we get $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R - 1$.

Suppose $n > 1$. Our induction hypothesis says that $\text{CM-dim}_R \Omega M = n - 1 = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} \Omega M$. In particular, $\operatorname{depth} R > \operatorname{depth} \Omega M$. Since $\operatorname{depth} M \geqq \operatorname{Min}\{\operatorname{depth} R, \operatorname{depth} \Omega M - 1\}$ and $\operatorname{depth} \Omega M \geqq \operatorname{Min}\{\operatorname{depth} R, \operatorname{depth} M + 1\}$, we see that $\text{CM-dim}_R M = n = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M$. □

It is known that the following inequalities hold for any R-module M.

$$\text{G-dim}_R M \leqq \text{CI-dim}_R M \leqq \operatorname{pd}_R M,$$

and the equalities hold to the left of any finite dimension. We can show the CM-dimension is less than or equal to the G-dimension.

Theorem 2.9 *For an R-module M, we have*

$$\text{CM-dim}_R M \leqq \text{G-dim}_R M \leqq \text{CI-dim}_R M \leqq \operatorname{pd}_R M,$$

and the equalities hold to the left of any finite dimension.

PROOF. We only prove the assertion on the leftmost inequality. There is nothing to prove if $\text{G-dim}_R M = \infty$. Suppose $n = \text{G-dim}_R M < \infty$. Then note that $n = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M$. Since $\text{G-dim}_R \Omega^n M = 0$, $\Omega^n M$ is reflexive and $\operatorname{Ext}^i_R(\Omega^n M, R) \cong \operatorname{Ext}^i_R((\Omega^n M)^*, R) = 0$ for $i > 0$, where $(-)^* = \operatorname{Hom}_R(-, R)$. This implies that R is a quasi-dualizing module for $\Omega^n M$, hence we have $\text{CM-dim}_R M \leqq n < \infty$. By Theorem 2.8, we have $\text{CM-dim}_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M = n$. □

Let $(R, \mathfrak{m}, k)$ be a Cohen-Macaulay local ring which is not Gorenstein. Then we have $\text{CM-dim}_R k < \infty$ and $\text{G-dim}_R k = \infty$. Of course there are a lot of non-Cohen-Macaulay rings on which the CM-dimensions of some modules take the different values from the G-dimensions.

Remark 2.10 Let S be a local ring such that it is not Cohen-Macaulay and that $S_\mathfrak{p}$ is a field for some $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} S$. Put $R = S[[X, Y]]/(X, Y)^2 = S[[x, y]]$, and $C = \operatorname{Hom}_S(R, S)$. Then we easily see that R is not Cohen-Macaulay and C is a quasi-dualizing module for itself, hence $\text{CM-dim}_R C = 0$. Moreover, we can show that $\text{G-dim}_R C = \infty$. To prove this by showing contradiction, assume $\text{G-dim}_R C < \infty$, hence in particular $\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}} C_\mathfrak{p} < \infty$. We will show that if S is a field then the R-module $C = \operatorname{Hom}_S(R, S)$ has infinite G-dimension. Since $xR \cong S$, we have an exact sequence

$$0 \to S \xrightarrow{x} R \to R/(x) \to 0 \tag{6}$$

of R-modules. Since $R/(x)$ is Gorenstein, we see that $\operatorname{Hom}_S(R/(x), S) \cong R/(x)$. Hence, applying the functor $\operatorname{Hom}_S(-, S)$ to (6), we obtain an exact sequence

$$0 \to R/(x) \to C \to S \to 0 \tag{7}$$

of R-modules. Suppose $\text{G-dim}_R C < \infty$. Then $\text{G-dim}_R C = 0$ because $\operatorname{depth} R = 0$. Therefore the sequences (6) and (7) give the following equalities for any $i > 0$.

$$\operatorname{Ext}_R^i(S, R) \cong \operatorname{Ext}_R^{i+1}(R/(x), R) \cong \operatorname{Ext}_R^{i+2}(S, R)$$

Therefore we have the equality of Bass numbers;

$$\mu^i(R) = \mu^{i+2}(R) \ (i > 0). \tag{8}$$

On the other hand, there is an exact sequence

$$0 \to \mathfrak{m} \to R \to S \to 0, \tag{9}$$

where $\mathfrak{m}$ is the maximal ideal of R. Noting that $\mathfrak{m} = \operatorname{Soc} R \cong S^2$, we have

$$\operatorname{Ext}_R^i(S^2, R) \cong \operatorname{Ext}_R^{i+1}(S, R),$$

hence

$$2\mu^i(R) = \mu^{i+1}(R) \ (i > 0) \tag{10}$$

By (8) and (10), we see that $\mu^i(R) = 0$ for all $i > 0$, which implies that R is Gorenstein, contradiction.

References

[1] M.AUSLANDER and M.BRIDGER, *Stable module theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **94**, 1969.

[2] L.AVRAMOV, V.GASHAROV and I.PEEVA, Complete Intersection dimension, *Publ. Math. I.H.E.S.* **86** (1997), 67-114.

[3] W.BRUNS and J.HERZOG, *Cohen-Macaulay rings, revised version*, Cambridge Univ. Press, 1998.

[4] L.W.CHRISTENSEN, Semi-dualizing complexes and their Auslander categories, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 1839-1883.

[5] H.-B.FOXBY, Gorenstein modules and related modules, *Math. Scand.* **31** (1972), 267-284 (1973).

[6] A.A.GERKO, On homological dimensions, *Mat. Sb.* (N.S.) **192** (2001), no. 8, 79-94 [Russian]; [English translation: *Sb. Math.* **192** (2001), no. 7-8, to appear].

[7] E.S.Golod, G-dimension and generalized perfect ideals, *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **165** (1984), 62-66 [Russian]; [English translation: *Proc. Steklov Inst. Math.* **165** (1984), 67-71].

[8] T.Ogoma, Cohen-Macaulay factorial domain is not necessarily Gorenstein, *Mem. Fac. Sci. Kôchi Univ. Ser. A Math.* **3** (1982), 65-74.

Ryo Takahashi
Graduate School of Natural Science and Technology,
Okayama University, Okayama 700-8530, Japan
E-mail address : takahasi@math.okayama-u.ac.jp

鎖複体の CM-次元について

荒谷　督司

今回の講演の内容は吉野雄二先生と高橋亮氏との共同研究である。

加群の射影次元や Gorenstein 次元等は、その加群を特徴付けるだけでなく、局所環においては、その剰余体での値により、環の特徴付けまでできるとても重要な不変量の一つである。そしてこれらの不変量は、有界な鎖複体全体のなす導来圏にまで拡張され、多くの結果が導かれている。今回の講演では加群に定義した Cohen-Macaulay 次元を、有界な鎖複体全体のなす導来圏にまで拡張する事を試みる。

(R, m, k) をネーター局所環とする。mod$R$ を有限生成 R-加群全体のなす圏とし、$\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ を有界な鎖複体全体のなす導来圏とする。また、各 $X^{\cdot} = (\cdots \to X^{n-1} \to X^n \to \cdots) \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ に対し、$X^{\cdot}$ の 上限 $\mathrm{s}(X^{\cdot})$, 下限 $\mathrm{i}(X^{\cdot})$, 幅 $\mathrm{a}(X^{\cdot})$ をそれぞれ以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}(X^{\cdot}) &:= \sup\{\, n \mid \mathrm{H}^n(X^{\cdot}) \neq 0 \,\},\\
\mathrm{i}(X^{\cdot}) &:= \inf\{\, n \mid \mathrm{H}^n(X^{\cdot}) \neq 0 \,\},\\
\mathrm{a}(X^{\cdot}) &:= \mathrm{s}(X^{\cdot}) - \mathrm{i}(X^{\cdot}).
\end{aligned}$$

ここで、mod$R$ の対象全体を、$\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ の対象全体の中で $\{\, X^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R) \mid X^{\cdot} \cong 0$ または $\mathrm{s}(X^{\cdot}) = \mathrm{i}(X^{\cdot}) = \mathrm{a}(X^{\cdot}) = 0 \,\}$ なるクラスと同一視することにより、mod$R$ は $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ の充満部分圏とみなしていることに注意する。

$\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ における Cohen-Macaulay 次元を定義するためにいくつか準備をする。

定義 1． $C^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が *quasi-dualizing* であるとは、$R \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_R(C^{\cdot}, C^{\cdot})$ をみたすことと定義する。

例 2． R 自身や dualizing complex は quasi-dualizing である。

定義 3． quasi-dualizing complex $C^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ に対し、$\mathcal{A}(C^{\cdot})$ を対象が $X^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ で、次の二つの条件をみたすもの全体のなす充満部分圏とする。

1. $\mathrm{RHom}_R(X^{\cdot}, C^{\cdot}) \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$,
2. $X^{\cdot} \cong \mathrm{RHom}_R(\mathrm{RHom}_R(X^{\cdot}, C^{\cdot}), C^{\cdot})$.

注意 4． $\mathcal{A}(C^{\cdot})$ は、R を含む三角圏である。特に $X^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が $\mathrm{pd}_R X^{\cdot} < \infty$ ならば $X^{\cdot} \in \mathcal{A}(C^{\cdot})$ である。そこで、我々は次のことを予想している。

予想 5． $X^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が $\mathrm{G\text{-}dim}_R X^{\cdot} < \infty$ ならば $X^{\cdot} \in \mathcal{A}(C^{\cdot})$ である。

さて、以下で Cohen-Macaulay 次元を定義するわけだが、その定義は $X^\cdot \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が $X^\cdot \in \mathrm{mod}R$ のときには、加群に定義した Cohen-Macaulay 次元と同値でなければならない。そこで、加群に対して定義した Cohen-Macaulay 次元において成立している次の命題に注目する。

命題６． $M \in \mathrm{mod}R$ に対し、M の Cohen-Macaulay 次元 $\mathrm{CM}\text{-}\dim_R M$ が有限であるための必要十分条件は、$M \in \mathcal{A}(C)$ をみたす quasi-dualizing module $C \in \mathrm{mod}R$ が存在することである。そしてこのとき $\mathrm{CM}\text{-}\dim_R M = \sup\{\, n \mid \mathrm{Ext}^n_R(M, C) \neq 0 \,\}$ である。

この結果より、鎖複体の Cohen-Macaulay 次元は以下のように定義するのが自然である。

定義７． $X^\cdot \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ に対し、$X^\cdot \in \mathcal{A}(C)$ をみたす quasi-dualizing module $C \in \mathrm{mod}R$ が存在するとき、$X^\cdot$ の Cohen-Macaulay 次元 $\mathrm{CM}\text{-}\dim_R X^\cdot$ が有限であると定義する。そしてこのとき $\mathrm{CM}\text{-}\dim_R X^\cdot$ を $\mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C))$ で定める。

注意８． $\mathrm{CM}\text{-}\dim_R X^\cdot < \infty$ のとき、$X^\cdot \in \mathcal{A}(C)$ をみたす quasi-dualizing module $C \in \mathrm{mod}R$ は、例９．にあるようにただ一つとは限らない。しかし、命題１０．より $\mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C))$ の値は $X^\cdot \in \mathcal{A}(C)$ なる C であれば、その取り方に依らずに決まり、いわゆる Auslander-Buchsbaum 型の等式をみたすことがわかる。また、定義１１.より、$\mathrm{G}\text{-}\dim_R X^\cdot < \infty$ ならば $\mathrm{CM}\text{-}\dim_R X^\cdot = \mathrm{G}\text{-}\dim_R X^\cdot < \infty$ であることも確かめられる。

例９． R を Cohen-Macaulay 環とし、K を R の canonical module とする。もし、$M \in \mathrm{mod}R$ が $\mathrm{G}\text{-}\dim_R M < \infty$ ならば、$M \in \mathcal{A}(K)$ かつ $M \in \mathcal{A}(R)$ である。

命題１０． $C \in \mathrm{mod}R$ を quasi-dualizing module とし、$X^\cdot \in \mathcal{A}(C)$ とする。このとき、$\mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C)) = \mathrm{depth}R - \mathrm{depth}X^\cdot$ である。

証明.
$$\begin{aligned}
\mathrm{depth}X^\cdot &= \mathrm{i}(\mathrm{RHom}_R(k, X^\cdot)) \\
&= \mathrm{i}(\mathrm{RHom}_R(k, \mathrm{RHom}_R(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C), C))) \\
&= \mathrm{i}(\mathrm{RHom}_R(k \overset{L}{\otimes} \mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C), C)) \\
&= \mathrm{i}(\mathrm{RHom}_R(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C), \mathrm{RHom}_R(k, C))) \\
&= \mathrm{i}(\mathrm{RHom}_R(k, C)) - \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C)) \\
&= \mathrm{depth}C - \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C)) \\
&= \mathrm{depth}R - \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C))
\end{aligned}$$
□

Cohen-Macaulay 次元と Gorenstein 次元を比較するために、Gorenstein 次元の定義を述べておく。

定義１１． $X^\cdot \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が $X^\cdot \in \mathcal{A}(R)$ のとき、$X^\cdot$ の Gorenstein 次元 $\mathrm{G}\text{-}\dim_R X^\cdot$ が有限であると定義する。そしてこのとき、$\mathrm{G}\text{-}\dim_R X^\cdot$ を $\mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, R))$ で定める。

定義１２． $X^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ に対し、$s = \mathrm{s}(X^{\cdot})$, $i = \mathrm{i}(X^{\cdot})$ とし、 $F^{\cdot} = (\cdots \to F^{n-1} \xrightarrow{\partial^n} F^n \to \cdots \to F^{s-1} \xrightarrow{\partial^s} F^s \to 0 \to 0 \to \cdots)$ を $X^{\cdot}$ の極小自由分解とする。このとき、$\tau X^{\cdot}$ を $(\cdots \to F^{s-2} \xrightarrow{\partial^{s-1}} F^{s-1} \to 0 \to 0 \to \cdots)[-1]$ で定義し、$X^{\cdot}$ の *truncation* と呼ぶ。また、この $X^{\cdot}$ と $\tau X^{\cdot}$ に対し、triangle $\tau X^{\cdot} \to F^s \to X^{\cdot}$ が存在することに注意する（ここで、F^s は、s 番目のみ自由加群 F^s で、他は全て 0 である complex)。もし、$\mathrm{a}(X^{\cdot}) > 0$ ならば、定義より、$\mathrm{s}(\tau X^{\cdot}) \leq s = \mathrm{s}(X^{\cdot})$ であり、一方この triangle より、$\mathrm{i}(\tau X^{\cdot}) = \mathrm{i}(X^{\cdot}) + 1$ である。($\mathrm{i}(X^{\cdot}) = \mathrm{s}(X^{\cdot}) - \mathrm{a}(X^{\cdot}) < \mathrm{s}(X^{\cdot}) = s$, $\mathrm{i}(F^s) = \mathrm{s}(F^s) = s$ であることに注意する。) したがって $0 \leq \mathrm{a}(\tau X^{\cdot}) < \mathrm{a}(X^{\cdot})$ であり、$\mathrm{a}(\tau^{n-1} X^{\cdot}) > 0$, $\mathrm{a}(\tau^n X^{\cdot}) = 0$ なる n が存在する。このとき、$\sigma X^{\cdot}$ を $\tau^n X^{\cdot}[\mathrm{i}(\tau^n X^{\cdot})]$ $(\in \mathrm{mod}R)$ で定義し、 $X^{\cdot}$ の *trunk module* とよぶ。

注意１３． $\mathrm{a}(X^{\cdot}) = 0$ ならば $\sigma X^{\cdot} \cong X^{\cdot}[\mathrm{i}(X)]$ であり、$\mathrm{a}(X^{\cdot}) > 0$ ならば $\sigma X^{\cdot} \cong \sigma(\tau X^{\cdot})$ である。また、 $\sigma X^{\cdot} \cong \mathrm{Coker}(F^{i-1} \xrightarrow{\partial^i} F^i)$ である。

命題１４． 任意の $X^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ に対し、次の等式が成立する。

$$\mathrm{CM\text{-}dim}_R\, \sigma X^{\cdot} = \mathrm{CM\text{-}dim}_R\, X^{\cdot} + \mathrm{i}(X^{\cdot}).$$

この命題を証明するために一つ補題を用意する。

補題１５． $\mathrm{CM\text{-}dim}_R\, X^{\cdot} < \infty$ ならば、$0 \leq \mathrm{CM\text{-}dim}_R\, X^{\cdot} + \mathrm{i}(X^{\cdot}) \leq \mathrm{depth} R$ である。

証明． $\mathrm{CM\text{-}dim}_R\, X^{\cdot} < \infty$ より、$X^{\cdot} \in \mathcal{A}(C)$ なる quasi-dualizing module $C \in \mathrm{mod}R$ が存在する。このとき、

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(X^{\cdot}) &= \mathrm{i}(\mathrm{RHom}_R(\mathrm{RHom}_R(X^{\cdot}, C), C)) \\ &\geq \mathrm{i}(C) - \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^{\cdot}, C)) \\ &= -\mathrm{CM\text{-}dim}_R\, X^{\cdot}. \end{aligned}$$

したがって、左の不等号が成立する。また、

$$\begin{aligned} \mathrm{depth} R - \mathrm{CM\text{-}dim}_R\, X^{\cdot} &= \mathrm{depth} X^{\cdot} \\ &= \mathrm{i}(\mathrm{RHom}_R(k, X^{\cdot})) \\ &\geq \mathrm{i}(X^{\cdot}) - \mathrm{s}(k) = \mathrm{i}(X^{\cdot}). \end{aligned}$$

したがって、右の不等号が成立する。 □

命題１４．の証明． $C \in \mathrm{mod}R$ を quasi-dualizing module とすると、$\mathcal{A}(C)$ は、R を含む三角圏だから、 $X^{\cdot} \in \mathcal{A}(C)$ であることと $\sigma X^{\cdot} \in \mathcal{A}(C)$ であることは同値である。したがって $\mathrm{CM\text{-}dim}_R\, X^{\cdot} < \infty$ であることと $\mathrm{CM\text{-}dim}_R\, \sigma X^{\cdot} < \infty$ であることは同値である。以下、

$X^\cdot, \sigma X^\cdot \in \mathcal{A}(C)$ とし、$\text{CM-}\dim_R \sigma X^\cdot = \text{CM-}\dim_R X^\cdot + \mathrm{i}(X^\cdot)$ であることを $\mathrm{a}(X^\cdot)$ に関する帰納法で示す。$\mathrm{a}(X^\cdot) = 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
\text{CM-}\dim_R \sigma X^\cdot &= \text{CM-}\dim_R X^\cdot[\mathrm{i}(X^\cdot)] \\
&= \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot[\mathrm{i}(X^\cdot)], C)) \\
&= \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C)[-\mathrm{i}(X^\cdot)]) \\
&= \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C)) + \mathrm{i}(X^\cdot) \\
&= \text{CM-}\dim_R X^\cdot + \mathrm{i}(X^\cdot).
\end{aligned}$$

$\mathrm{a}(X^\cdot) > 0$ のとき、$\text{CM-}\dim_R X^\cdot[n] = \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot[n], C)) = \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C)[-n]) = \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C)) + n$, $\mathrm{i}(X^\cdot[n]) = \mathrm{i}(X^\cdot) - n$ より、$\text{CM-}\dim_R X^\cdot[n] + \mathrm{i}(X^\cdot[n]) = \text{CM-}\dim_R X^\cdot + \mathrm{i}(X^\cdot)$ であるから、$\mathrm{s}(X^\cdot) = 0$ としてよい。$X^\cdot$ の truncation $\tau X^\cdot$ をとると、$\mathrm{a}(\tau X^\cdot) < \mathrm{a}(X^\cdot)$ かつ triangle $\tau X^\cdot \to R^{\oplus n} \to X^\cdot$ がとれる。このとき、$\mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C)) = \text{CM-}\dim_R X^\cdot > \text{CM-}\dim_R X^\cdot + \mathrm{i}(X^\cdot) \geq 0$, $\mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(R, C)) = \text{CM-}\dim_R R = 0$ より $\text{CM-}\dim_R \tau X^\cdot = \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(\tau X^\cdot, C)) = \mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(X^\cdot, C)) - 1 = \text{CM-}\dim_R X^\cdot - 1$。一方 $\mathrm{i}(\tau X^\cdot) = \mathrm{i}(X^\cdot) + 1$ より、$\text{CM-}\dim_R \sigma X^\cdot = \text{CM-}\dim_R \sigma(\tau X^\cdot) = \text{CM-}\dim_R \tau X^\cdot + \mathrm{i}(\tau X^\cdot) = \text{CM-}\dim_R X^\cdot + \mathrm{i}(X^\cdot)$. よって等式 $\text{CM-}\dim_R \sigma X^\cdot = \text{CM-}\dim_R X^\cdot + \mathrm{i}(X^\cdot)$ が成立する。 □

系１６． $D^\cdot$ を R の dualizing complex とする。このとき、R が Cohen-Macaulay であるための必要十分条件は $\text{CM-}\dim_R D^\cdot < \infty$ である。

証明． R が Cohen-Macaulay のとき、$D^\cdot$ は canonical module であり、$\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R) = \mathcal{A}(D^\cdot)$ であるから $\text{CM-}\dim_R D^\cdot < \infty$ である。逆に $\text{CM-}\dim_R D^\cdot < \infty$ とする。$\mathrm{i}(D^\cdot) = 0$ に正規化しておくと、$0 \leq \text{CM-}\dim_R D^\cdot = \mathrm{depth}R - \mathrm{depth}D^\cdot = \mathrm{depth}R - \dim R \leq 0$ より $\dim R = \mathrm{depth}R$ 。したがって R は Cohen-Macaulay である。 □

以上のことをまとめると、次の定理が成立する。

定理１７． 局所環 R に対し、次は同値である。

1. R が Cohen-Macaulay 環であり、 Gorenstein 環の準同型像である。
2. 任意の $M \in \mathrm{mod}R$ に対し、$\text{CM-}\dim_R M < \infty$ である。
3. $\text{CM-}\dim_R k < \infty$ である。
4. 任意の $X^\cdot \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ に対し、 $\text{CM-}\dim_R X^\cdot < \infty$ である。
5. $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R) = \mathcal{A}(C)$ をみたす quasi-dualizing module $C \in \mathrm{mod}R$ が存在する。
6. dualizing complex $D^\cdot \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が存在し、$\text{CM-}\dim_R D^\cdot < \infty$ である。

証明． 1. $\Leftrightarrow$ 2. $\Leftrightarrow$ 3. は、加群の Cohen-Macaulay 次元での講演で示している。5. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 2. は明らか、2. $\Rightarrow$ 4. は命題１４．より成立する。また、3. を仮定すると、$k \in \mathcal{A}(C)$ なる

quasi-dualizing module C が存在する。このとき、$\mathrm{s}(\mathrm{RHom}_R(k,C)) < \infty$ より C は、入射次元 $\mathrm{id}_R C < \infty$ であるから、canonical module になる。よって、$\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R) = \mathcal{A}(C)$ であり、3. $\Rightarrow$ 5. が成立する。最後に、[3] より、dualizing complex が存在するための必要十分条件が R が Gorenstein 環の準同型像であることが知られている。この結果と系１６．より 1. $\Leftrightarrow$ 6. であることがわかる。 □

定理１７．の同値条件において、Cohen-Macaulay 次元を Gorenstein 次元に置き換えた場合には次の同値性が知られている。

定理１８． 局所環 R に対し、次は同値である。

1. R が Gorenstein 環である。
2. 任意の $M \in \mathrm{mod}R$ に対し、$\mathrm{G\text{-}dim}_R M < \infty$ である。
3. $\mathrm{G\text{-}dim}_R k < \infty$ である。
4. 任意の $X^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ に対し、$\mathrm{G\text{-}dim}_R X^{\cdot} < \infty$ である。
5. $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R) = \mathcal{A}(R)$ である。
6. dualizing complex $D^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が存在し、$D^{\cdot} \cong R$ である。

また、定義７．において、我々は $\mathrm{CM\text{-}dim}_R X^{\cdot}$ が有限であることを $X^{\cdot} \in \mathcal{A}(C)$ をみたす quasi-dualizing module $C \in \mathrm{mod}R$ が存在すると定義した。これに注意して、定理１７．の同値条件を $\mathrm{CM\text{-}dim}_R X^{\cdot}$ が有限であることのかわりに $X^{\cdot} \in \mathcal{A}(C^{\cdot})$ をみたす quasi-dualizing complex $C^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が存在することにかえると次の同値性が得られる。

定理１９． 局所環 R に対し、次は同値である。

1. R が Gorenstein 環の準同型像である。
2. 任意の $M \in \mathrm{mod}R$ に対し、$M \in \mathcal{A}(C^{\cdot})$ をみたす quasi-dualizing complex $C^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が存在する。
3. $k \in \mathcal{A}(C^{\cdot})$ をみたす quasi-dualizing complex $C^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が存在する
4. 任意の $X^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ に対し、$X^{\cdot} \in \mathcal{A}(C^{\cdot})$ をみたす quasi-dualizing complex $C^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が存在する
5. $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R) = \mathcal{A}(C^{\cdot})$ をみたす quasi-dualizing complex $C^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が存在する。
6. dualizing complex $D^{\cdot} \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}R)$ が存在する。

注意２０． 定理１９．の 3. および 5. における quasi-dualizing complex $C^{\cdot}$ は、その入射次元が有限になることから、それは dualizing complex $D^{\cdot}$ であることがわかる。また、一般に $D^{\cdot}$ の幅 $\mathrm{a}(D^{\cdot})$ は、環 R の Cohen-Macaulay defect ($\dim R - \mathrm{depth} R$) に等しいことが知られている。これらのことから、環の Cohen-Macaulay-性をはかるために扱う quasi-dualizing complex は加群のみに限定している。一般の quasi-dualizing complex $C^{\cdot}$ と $C^{\cdot}$ から得られる $\mathcal{A}(C^{\cdot})$ の性質については、Christensen の [2] に紹介されている。

参考文献

[1] M.Auslander and M.Bridger, *Stable module theory*, Mem. Amer. Math. Soc. 94 (1969).

[2] L.W.Christensen, *Semi-dualizing complexes and their Auslander categories*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 1839-1883.

[3] T.Kawasaki, *On Macaulayfication of Noetherian schemes*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 2517–2552.

[4] R.Takahashi, T.Araya and Y.Yoshino *Cohen-Macaulay dimensions of modules*, preprint.

Graduate School of Natural Science and Technology,
Okayama University, Okayama 700-8530, Japan
E-mail address : araya@math.okayama-u.ac.jp

Remarks on CM dimension

吉野雄二
岡山大理学部

以下 $(R, \underline{m})$ は d 次元の局所環とする。有限生成 R 加群 M に対する CI 次元の定義をなぞって、Gorenstein、CM という環の性質に関する M の次元を定義してみる。

定義 1 (1) 局所環の間の局所写像 $R \to \hat{R} \leftarrow S$ が次の条件を満たすとき、$\underline{R\text{ の G-deformation of grade } g}$ ということにする：

(a) $R \to \hat{R}$ は $\underline{m}$ 進完備化、

(b) $S \to \hat{R}$ は grade が g の perfect な全射、

(c) $\mathrm{Ext}_S^g(\hat{R}, S) \cong \hat{R}$ が成り立つ。

(2) 有限生成 R 加群 M について、その $\underline{\mathrm{CM}'\text{ 次元}}$、$\underline{\mathrm{G}'\text{ 次元}}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathrm{CM}'\mathrm{dim}_R M &:= \inf\{\ \mathrm{pd}_S(M \otimes_R \hat{R}) - g \mid \\ &\quad \text{但し、} R \to \hat{R} \leftarrow S \text{ で、} \hat{R} \leftarrow S \text{ は perfect of grade } g\ \} \\ \mathrm{G}'\mathrm{dim}_R M &:= \inf\{\ \mathrm{pd}_S(M \otimes_R \hat{R}) - g \mid \\ &\quad \text{但し、} R \to \hat{R} \leftarrow S \text{ は G-deformation of grade } g\ \}\end{aligned}$$

このとき、 CM′ 次元と G′ 次元はそれぞれ CM 次元、G 次元と共通の性質を多く持ち、一般的には次の不等式が成立することがわかる。

$$\mathrm{Gdim}_R M \le \mathrm{G}'\mathrm{dim}_R M, \quad \mathrm{CMdim}_R M \le \mathrm{CM}'\mathrm{dim}_R M$$

任意の有限生成 R 加群 M に対して、次の二つの等式が期待される。

予想 1 $\mathrm{CMdim}_R M = \mathrm{CM}'\mathrm{dim}_R M$

予想 2 $\mathrm{Gdim}_R M = \mathrm{G}'\mathrm{dim}_R M$

一般に、予想 2 $\Rightarrow$ 予想 1 が成立するので、ここでは、予想 2 を問題とする。

G′dim については、次のことが New Intersection Theorem を使って証明できる。

命題 1 長さ有限かつ G′ 次元が有限の R 加群 M が存在すれば、R は CM 環である。

したがって、予想 2 から次の予想 3 が従う。

予想 3 長さ有限かつ G 次元が有限の R 加群 M が存在すれば、R は CM 環である。

注意 1 次のどれかの状況のもとでは予想 3 が正しいことを証明することができる。しかし、1 次元のときでさえ完全な証明を知らない。

(a) R が quasi-Buchsbaum である場合。

(b) R のタイプが 1 の場合。

(c) M の長さが 2 以下の場合。

次の予想 4 が正しいような局所環 R については、予想 3 も正しいことがわかる。

予想 4 M が長さ有限の R 加群ならば、$\mathrm{Ext}_R^d(M,R) \neq 0$ である。

1 次元のときでさえこの予想の証明を私は知らないが、経験的には予想 4 は正しいと信じられる。

$$\begin{array}{ccc} \text{予想 } 2 & \Rightarrow & \text{予想 } 1 \\ \Downarrow & & \\ \text{予想 } 3 & \Leftarrow & \text{予想 } 4 \end{array}$$

この予想 4 を考えるために、局所環 $(R,\underline{m},k)$ に対して次の自然な写像を考える。

$$\rho_R : \mathrm{Ext}_R^d(k,R) \to \mathrm{H}_{\underline{m}}^d(R)$$

R が CM 環ならば、ρ_R は単射であり、とくに $\rho_R \neq 0$ である。一般に、$\rho_R \neq 0$ であるような局所環 R については予想 4 は正しいが、$\rho_R = 0$ となる局所環 R も数多くある。

例 1　(1) $R_1 = k[[x,y]]/(xy, y^2)$ のとき $\rho_{R_1} = 0$ である。

(2) $R_2 = k[[x,y,z,w]]/(x,y) \cap (z,w)$ のとき $\rho_{R_2} = 0$ であるが、 $R_3 = R_2/(y-w)$ については $\rho_{R_3} \neq 0$ となる。

(3) 3次元の normal domain で $\rho_R = 0$ となるものがある。実際に、セグレ積を使って、

$$R = k[x,y,z]/(x^3 + y^3 + z^3) \ \sharp \ k[u,v]$$

とおくと、$\rho_R = 0$ となることが Macaulay2 を使って確かめることができる。

問題 1 $\rho_R \neq 0$ となる局所環 R を特徴付けよ。

微分の核が有限生成となるための一条件

(A condition for the finite generations of kernels of derivations)

黒田 茂

1 序

多項式環上の微分は近年さかんに研究されている．その理由の一つにヒルベルトの第14問題に対する反例が，多項式環上の微分の核として構成されたということがある．さまざまな例が示す通り，多項式環上の微分の核は，一般には有限生成と限らない．そこで，有限生成性の判定条件を探すことが問題となる．この報告書では，多項式環上の微分の核が有限生成となるための一つの十分条件を与える．

以下，k は常に標数零の体とする．可換な k 代数 A に対して，k 線形写像 $D: A \to A$ は $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ が全ての $f, g \in A$ について成り立つとき，A 上の k 微分という．k 部分ベクトル空間 $V \subset A$ に対して，

$$V^D = \{f \in V \mid D(f) = 0\} \tag{1.1}$$

とおく．V が A の k 部分代数のときには，V^D は V の k 部分代数となることに注意する．

$k[\mathbf{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環，$k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] = k[x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots x_n^{-1}]$ を k 上の n 変数ローラン多項式環とする．モノミアル $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ は，ベクトル $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$ を用いて $\mathbf{x}^a$ と表す．

さて，D を $k[\mathbf{x}]$ 上の零でない k 微分とする．これは $k(\mathbf{x})$ 上の k 微分に一意的に拡張できる．それも同じ記号 D で表す．ここで，$k(\mathbf{x})$ は $k[\mathbf{x}]$ の商体とする．D は偏微分

を使って

$$D = D(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + D(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{1.2}$$

のように表せる．さらに，ローラン多項式 $D(x_i)x_i^{-1}$ のモノミアルごとに (1.2) の右辺をまとめることで，$D = \sum_{i=1}^{m} D_i$ のようにできる．ただし，m は正の整数で，

$$D_i = \mathbf{x}^{\delta_i}\left(\kappa_{i,1}\frac{x_1\partial}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_{i,n}\frac{x_n\partial}{\partial x_n}\right), \tag{1.3}$$

$\kappa_{i,j} \in k$, かつ $D_i = 0$ とする．$M = \mathbf{Z}^n \cap \sum_{i=1}^{m}\mathbf{R}(\delta_i - \delta_1)$ とおき，$\{\mathbf{x}^a \mid a \in M\}$ が k 上生成する $k(\mathbf{x})$ の部分体を $k(M)$ とする．このとき，$\mathrm{trans.deg}_k k(M)$ は，$\mathbf{Z}$ 加群 M の階数と等しい．ただし，一般に k の拡大体 K に対して，K の k 上の超越次数を $\mathrm{trans.deg}_k K$ と書くことにする．$k(\mathbf{x})$ 上の k 微分 D' を，各 $f \in k(\mathbf{x})$ に対して $D'(f) = \mathbf{x}^{-\delta_1}D(f)$ となるように定める．すると，$D'(k(M)) \subset k(M)$ となる．すなわち，D' は $k(M)$ 上の k 微分を導く．また，任意の k 部分ベクトル空間 $V \subset k(\mathbf{x})$ に対して，$V^{D'} = V^D$ が成り立つ．実際，$f \in k(\mathbf{x})$ に対して，$\mathbf{x}^{-\delta_1}D(f) = 0$ と $D(f) = 0$ は同値である．

2 主結果

次の定理が我々の主結果である．

定理 2.1 $\mathrm{trans.deg}_k k(M)^D \leq 1$ ならば $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成である．

定理 2.1 の系として，次の判定条件を得る．

系 2.2 $\delta_1, \ldots, \delta_m$ が $\mathbf{R}^n$ のある 2 次元アフィン部分空間に含まれているならば，$k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成である．

証明 仮定より M の階数はたかだか 2 である．よって，$\mathrm{trans.deg}_k k(M) \leq 2$ となる．はじめに，$k(M)^{D'} = k(M)$ と仮定する．すると，$\mathrm{trans.deg}_k k(M)^{D'} \leq 1$ となる．実際，もし $\mathrm{trans.deg}_k k(M)^{D'} = 2$ ならば，拡大 $k(M)^{D'} \subset k(M)$ は分離代数的となる．従って，D' は $k(M)$ 上で零である．これは $k(M)^{D'} = k(M)$ という仮定に矛盾する．ゆえに

$\mathrm{trans.deg}_k k(M)^{D'} \leq 1$ である．$k(M)^{D'} = k(M)^D$ だから，定理 2.1 より $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成である．

$k(M)^{D'} = k(M)$ の場合には，後述の補題 2.4 より $k[\mathbf{x}]^D$ の有限生成性が従う．　□

全ての i に対して $D(x_i) \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}]$ となるとき，D は三角（triangular）であるという．また全ての i に対して，$D(x_i)$ が モノミアルに k の元を掛けた形となっているとき，D はモノミアルであるという．例えば，D. Daigle と G. Freudenburg [2] による k 微分

$$D = x_1^3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} + x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_5} \tag{2.1}$$

は三角かつモノミアルである．さらに $n = 5$ のとき，(2.1) で定義された核 $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成でない．この場合，$\delta_1, \ldots, \delta_m$ が生成する $\mathbf{R}^n$ のアフィン部分空間の次元は 3 である．

$n = 4$ のときには，次のことが成り立つ．

系 2.3 $n = 4$ のとき，D が三角かつモノミアルならば $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成である．

証明 D がモノミアルであることから $m \leq 4$ となる．もし $m = 4$ ならば，$D(x_1) = 0$ である．$s = x_1/D(x_1)$ とおく．すると，D は三角だから，$s \in k[\mathbf{x}]$ かつ $D(s) = 1$ となる．ゆえに，[3, Corollary 1.3.23] より $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成である．もし $m < 4$ ならば，$\delta_1, \ldots, \delta_m$ を含む $\mathbf{R}^n$ の 2 次元アフィン部分空間が存在する．よって，系 2.2 より $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成である．　□

系 2.3 の条件の下ではさらに，$k[\mathbf{x}]^D$ はたかだか 4 つの元で生成できるということを S. Maubach [6] が示していることを付記する．

さて，$\mathbf{Z}^n/M$ はねじれがないので，階数有限の自由 $\mathbf{Z}$ 加群である．$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s \in \mathbf{Z}^n$ を，これらの $\mathbf{Z}^n/M$ における像が $\mathbf{Z}^n/M$ の $\mathbf{Z}$ 基底となるようにとる．すると，$\mathbf{Z}^s$ による次数付け $k[\mathbf{x}] = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}^s} k[\mathbf{x}]_i$ が定まる．ここで $k[\mathbf{x}]_i$ は，$\mathbf{Z}^n/M$ における像が $i \cdot \mathbf{b}$ の像と等しくなるような $a \in \mathbf{Z}_{\geq 0}{}^n$ が定めるモノミアル $\mathbf{x}^a$ 全体が生成する k ベクトル空

間とする．ただし，$i=(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbf{Z}^s$ に対して $i\cdot\mathbf{b}=i_1\mathbf{b}_1+\cdots+i_s\mathbf{b}_s$ とする．このとき，

$$k[\mathbf{x}]^D=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}^s}k[\mathbf{x}]_i^D \tag{2.2}$$

が成り立つ．さて，

$$M'=\left\{i\in\mathbf{Z}^s \mid (k(M)\mathbf{x}^{i\cdot\mathbf{b}})^D=\{0\}\right\} \tag{2.3}$$

とおく．これは $\mathbf{Z}^s$ の部分群である．$0=g\in(k(M)\mathbf{x}^{i\cdot\mathbf{b}})^D$ を任意の元とする．すると，

$$k[\mathbf{x}]_i^D=k(M)^Dg\cap k[\mathbf{x}] \tag{2.4}$$

が成り立つ．これを確かめるために，まず $g'\in k[\mathbf{x}]_i^D$ を任意にとる．すると，$g'/g\in k(M)^D$ となる．よって，$g'\in k(M)^Dg\cap k[\mathbf{x}]$ である．逆に，$g'\in k(M)^Dg\cap k[\mathbf{x}]$ とする．すると，$g'\in k[\mathbf{x}]_i$ となる．$D(g')=0$ だから，$g'\in k[\mathbf{x}]_i^D$ である．よって (2.4) が成り立つ．

補題 2.4 $k(M)^D=k(M)$ ならば $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成である．

証明 仮定より

$$k[\mathbf{x}]^D=\bigoplus_{i\in M'}k[\mathbf{x}]_i \tag{2.5}$$

が成り立つ．よって，$k[\mathbf{x}]^D=k[\{\mathbf{x}^a\mid a\in S\}]$ となる．ただし，$S=(M+\{i\cdot\mathbf{b}\mid i\in M'\})\cap\mathbf{Z}_{\geq0}{}^n$ とする．Gordan の補題 [10, Proposition 1.1.(ii)] より，S は $\mathbf{Z}_{\geq0}{}^n$ の有限生成な部分半群である．従って，$k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成である． □

以下では定理 2.1 を証明する．k を含む $k(\mathbf{x})$ の部分体 L と，L 上代数的独立な元 $g_1,\ldots,g_r\in k(\mathbf{x})$ を任意にとる．そして，$k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数

$$A=\bigoplus_{(i_1,\ldots,i_r)\in\mathbf{Z}^r}\left(Lg_1^{i_1}\cdots g_r^{i_r}\cap k[\mathbf{x}]\right) \tag{2.6}$$

について考える．

補題 2.5 $\mathrm{trans.deg}_kL\leq 1$ ならば A は有限生成である．

補題 2.5 を証明する前に，この補題を仮定して定理 2.1 を示す．$\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_r$ を M' の $\mathbf{Z}$ 基底とする．各 $1 \leq i \leq r$ に対して，$0 = g_i \in (k(M)\mathbf{x}^{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{b}})^D$ をとる．すると，(2.2) と (2.4) より

$$k[\mathbf{x}]^D = \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_r)\in\mathbf{Z}^r} \left(k(M)^D g_1^{i_1} \cdots g_r^{i_r} \cap k[\mathbf{x}]\right) \tag{2.7}$$

が成り立つ．$g_1, \ldots, g_r$ が $k(M)$ 上代数的独立であることは容易に分かる．よって，これらは $k(M)^D$ 上代数的独立である．仮定より $\mathrm{trans.deg}_k k(M)^D \leq 1$ である．ゆえに，補題 2.5 より (2.7) は有限生成である．従って，定理 2.1 が示された．

補題 2.5 の証明．　まず，k が代数的閉体と仮定しても一般性を失わないことを示す．$\bar{k}$ を k の代数閉包とし，$\bar{L} = L \otimes_k \bar{k}$，$\bar{k}[\mathbf{x}] = k[\mathbf{x}] \otimes_k \bar{k}$ とおく．すると，

$$A \otimes_k \bar{k} = \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_r)\in\mathbf{Z}^r} \left(\bar{L}(g_1^{i_1} \cdots g_r^{i_r} \otimes 1) \cap \bar{k}[\mathbf{x}]\right) \tag{2.8}$$

となることが分かる．また，$A \otimes_k \bar{k}$ が有限生成ならば A も有限生成となることも，容易に確かめられる．従って，k が代数的閉体のときに補題を示せば十分である．

ところで，$L = k(w)$ となるような $w \in L$ をとることができる．実際，もし $L = k$ ならば $\mathrm{trans.deg}_k L = 1$ である．よってリューローの定理より，L は k 上の有理関数体となる．互いに素な $u, u' \in k[\mathbf{x}]$ を，$w = u/u'$ となるようにとる．このとき，任意の既約多項式 $p \in k[\mathbf{x}]$ に対して，p が $u - \beta u'$ を割り切るような $\beta \in k$ はたかだか 1 つしか存在しないことに注意する．実際，もし異なる $\beta, \beta' \in k$ に対して，p が $u - \beta u'$ と $u - \beta' u'$ を共に割り切ったならば，p は u と u' を両方とも割り切ることになる．これは，u と u' が互いに素であることに矛盾する．

有限個の既約多項式 $p_1, \ldots, p_l \in k[\mathbf{x}]$ を適当に選べば，各 i に対してある $(a_{i,1}, \ldots, a_{i,l}) \in \mathbf{Z}^l$ を用いて，

$$g_i \prod_{j=1}^{l} p_j^{-a_{i,j}} \in k \tag{2.9}$$

とできる．このとき，ある j に対して $u - \beta u'$ が p_j によって割り切られるような $\beta \in k$，$u - \beta u' \in k$ となる $\beta \in k$，および 0 からなる k の部分集合を B とおく．すると B は

有限集合である．必要ならば既約多項式を新たに付け加えることで，一般性を失うことなく，u' または $u-\beta u'$ $(\beta \in B)$ の全ての既約因子が，$p_1,\ldots,p_l$ の中に存在すると仮定できる．なぜなら，$u-\beta u'$ の既約因子は，u' や $u-\beta' u'$ $(\beta' = \beta)$ の既約因子とはならないので，B に新たに元を付け加える必要がないからである．

各 $\beta \in B$ に対して，

$$\frac{u-\beta u'}{u'}\prod_{j=1}^{l} p_j^{-b_{\beta,j}} \in k \tag{2.10}$$

となるように $(b_{\beta,1},\ldots,b_{\beta,l}) \in \mathbf{Z}^l$ をとる．そして準同型 $\phi : \mathbf{Z}^B \times \mathbf{Z}^r \to \mathbf{Z}^l$ を，$\phi((e_\beta,0)) = \sum_{j=1}^{l} b_{\beta,j} e'_j$ かつ $\phi((0,e_i)) = \sum_{j=1}^{l} a_{i,j} e'_j$ を満たすように定める．ここで，$\{e_\beta \mid \beta \in B\}$，$\{e_i \mid 1 \le i \le r\}$，および $\{e'_j \mid 1 \le j \le l\}$ は，それぞれ $\mathbf{Z}^B$，$\mathbf{Z}^r$，および $\mathbf{Z}^l$ の標準基底とする．そして，

$$S = \{(b,a) \in \mathbf{Z}^B \times \mathbf{Z}^r \mid \phi((b,a)) \in {\mathbf{Z}_{\ge 0}}^l\} \tag{2.11}$$

とおく．S は $\mathbf{Z}^B \times \mathbf{Z}^r$ の有限生成部分半群である．写像 $\psi : \mathbf{Z}^B \times \mathbf{Z}^r \to k(\mathbf{x})^\times$ を

$$\psi(((b_\beta)_{\beta\in B},(a_i)_{i=1}^r)) = \prod_{\beta\in B}\left(\frac{u-\beta u'}{u'}\right)^{b_\beta}\prod_{i=1}^{r} g_i^{a_i} \tag{2.12}$$

と定める．これは群の準同型となる．また $(b,a) \in \mathbf{Z}^B \times \mathbf{Z}^r$ に対して，$\psi((b,a)) \in k[\mathbf{x}]$ と $(b,a) \in S$ は同値である．

半群 S を生成する有限部分集合 $S' \subset S$ をとる．このとき $\psi(S')$ が A を生成することを示す．そのためには全ての $(i_1,\ldots,i_r) \in \mathbf{Z}^r$ に対して，任意にとった $f \in Lg_1^{i_1}\cdots g_r^{i_r} \cap k[\mathbf{x}]$ が，$\psi(S)$ が生成する k ベクトル空間に含まれることを示せばよい．$f = hg_1^{i_1}\cdots g_r^{i_r}$ となる $h \in L$ をとる．すると，ある $c_\beta \in \mathbf{Z}$ と $\alpha \in k$ が存在して，

$$h = \alpha \prod_{\beta\in k}\left(\frac{u-\beta u'}{u'}\right)^{c_\beta} \tag{2.13}$$

と書ける．実際，h は u/u' についての k 上の有理関数であり，k は代数的閉体である．

$$f' = \alpha \prod_{\beta\in B}\left(\frac{u-\beta u'}{u'}\right)^{c_\beta} g_1^{i_1}\cdots g_r^{i_r}, \tag{2.14}$$

および

$$h' = \prod_{\beta\in k\setminus B}\left(\frac{u-\beta u'}{u'}\right)^{c_\beta} \tag{2.15}$$

とおく．このとき，$\beta \in k \setminus B$ に対して $c_\beta \geq 0$ となり，さらに $0 \leq t \leq c$ に対して $(u/u')^t f' \in k[\mathrm{x}]$ が成り立つことを示す．ここで，$c = \sum_{\beta\in k\setminus B} c_\beta$ とおいた．このことを仮定すれば，$\psi(S)$ の生成する k ベクトル空間に f が含まれることが，次のようにして示せる．$\beta \in k \setminus B$ に対して $c_\beta \geq 0$ となるので，h' は u/u' についての c 次多項式である．また，$(u/u')^t f' \in \psi(S)$ となるための必要十分条件は，$(u/u')^t f' \in k[\mathrm{x}]$ となることである．よって，$\psi(S)$ が生成する k ベクトル空間に $h'f'$ は含まれる．$f = h'f'$ だから，$\psi(S)$ の生成する k ベクトル空間に f が含まれることが示された．

$\beta \in k\setminus B$ に対して $c_\beta = 0$ となったと仮定する．このとき，$(u-\beta u')^{c_\beta}$ の任意の既約因子は $hg_1^{i_1}\cdots g_r^{i_r}$ の中で通分されることはない．実際，$u-\beta u'$ と，それぞれ $u', u-\beta' u'$ $(\beta' = \beta)$ および $g_1, \ldots, g_r$ は互いに素である．このとき $hg_1^{i_1}\cdots g_r^{i_r} \in k[\mathrm{x}]$ だから，$c_\beta > 0$ となる．さらに，f が $\prod_{\beta\in k\setminus B}(u-\beta u')^{c_\beta}$ で割り切れることが分かる．(2.13), (2.14) より

$$(u')^{-c} f' = f \prod_{\beta\in k\setminus B} (u-\beta u')^{-c_\beta} \tag{2.16}$$

である．よって，$0 \leq t \leq c$ に対して $(u/u')^t f' \in k[\mathrm{x}]$ が成り立つ．以上より，補題は証明された．□

参考文献

[1] H. Derksen: *The kernel of a derivation*, J. Pure Appl. Algebra, 84 (1993), 13–16.

[2] D. Daigle, G. Freudenburg: *A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension* 5, J. Algebra, **221** (1999), 528–535.

[3] A. van den Essen: *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Birkhäuser, Progress in mathematics, Vol. 190 (2000).

[4] M. Kojima, M. Miyanishi: *On Robbert's counterexample to the fourteenth problem of Hilbert*, J. Pure Appl. Algebra, 122 (1998), 277–292.

[5] S. Kuroda: *A condition for the finite generations for kernels of derivations*, preprint.

[6] S. Maubach: *Triangular monomial derivations on $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$ have kernel generated by at most four elements*, J. Pure Appl. Algebra, 153 (2000), 165–170.

[7] M. Nagata: *Lectures on the fourteenth problem of Hilbert*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1965).

[8] M. Nagata: *Field theory*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel (1997).

[9] M. Nagata, A. Nowicki: *Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, \ldots, x_n]$*, J. Math. Kyoto Univ., 28 (1988), 111–118.

[10] T. Oda: *Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergebnisse der Math. (3), 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo (1985).

〒 980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉
東北大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: s98m12@math.tohoku.ac.jp

On tensor products of k-very ample line bundles

Kazuyoshi Takahashi and Hiroyuki Terakawa

1 Introduction

Let X be a complete algebraic variety over an algebraically closed field k and $\mathcal{L}$ an invertible sheaf on X. Then for any 0-dimensional subscheme Z on X, we can consider the restriction map $e_{\mathcal{L},Z} : H^0(X,\mathcal{L}) \to H^0(X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_Z)$, which fits into the exact sequence

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{J}_Z\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{L}) \xrightarrow{e_{\mathcal{L},Z}} H^0(X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_Z) \longrightarrow \cdots,$$

where $\mathcal{J}_Z$ is a defining ideal sheaf of Z in X and $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Z$. $\mathcal{L}$ is said to be *k-very ample* if the restriction map $e_{\mathcal{L},Z}$ is surjective for every 0-dimensional subscheme Z of $\mathrm{length}(\mathcal{O}_Z) = k+1$.

The notion of 0-very ample corresponds to the notion of "generated by the global sections", and the notion of 1-very ample corresponds to the notion of "very ample".

If $\mathcal{L}$ is 0-very ample, then $H^0(X,\mathcal{L})$ defines a morphism $\varphi_0 : X \to \mathbb{P}(H^0(X,\mathcal{L})^*)$, which is an embedding precisely when $\mathcal{L}$ is 1-very ample. More generally, if $\mathcal{L}$ is k-very ample, then by sending $(Z,\mathcal{O}_Z) \in X^{[k+1]}$ to a subspace $H^0(X,\mathcal{J}_Z\mathcal{L})$ of $H^0(X,\mathcal{L})$, we obtain a morphism

$$\varphi_k : X^{[k+1]} \longrightarrow \mathrm{Grass}(k+1, H^0(X,\mathcal{L})^*),$$

where $X^{[k+1]}$is the Hilbert scheme of 0-dimensional subschemes of X of length $k+1$ and $\mathrm{Grass}(k+1, H^0(X,\mathcal{L})^*)$ is the Grassmannian of all subspaces of $H^0(X,\mathcal{L})$ of codimension $k+1$. F. Catanese and L. Goettsche ([2]) proved that the above morphism φ_k is an embedding if and only if $\mathcal{L}$ is $(k+1)$-very ample.

The purpose of the paper is to show the following theorem.

Theorem 1.1 *Let X be a complete algebraic variety over an algebraically closed field and $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ line bundles on X. Let a, b be nonnegative integers. If $\mathcal{L}_1$ is a-very ample and $\mathcal{L}_2$ is b-very ample, then $\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2$ is $(a+b)$-very ample.*

First we give a ring-theoretic interpretation of the notion of k-very ampleness in §2, and we show that the ring-theoretic claim (Claim 3.1) in §3 implies the theorem. Finally we investigate the socle in an Artinian ring to show the claim.

2 Preliminaries

Let Z be a 0-dimensional subscheme of X. The *support* of Z, denoted by $|Z|$, is the underlying topological space of the reduced scheme Z_{red}. The *length* of Z is defined to be the dimension of the vector space $\Gamma(X,\mathcal{O}_Z)$.

2.1 k-very ampleness and Artinian rings

Let Z be a 0-dimensional subscheme of X of length l and $|Z| = \{x_1, \dots, x_r\}$. Assume that Z is defined by the ideal sheaf $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$, and then $\mathcal{O}_X/\mathcal{J} \cong \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_{X,x_i}/\mathcal{J}_{x_i}$ and $\sum_{i=1}^r \ell(\mathcal{O}_{X,x_i}/\mathcal{J}_{x_i}) = l$. First note that the restriction map

$$e_{\mathcal{L},Z} : \Gamma(X, \mathcal{L}) \to \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Z)$$

factors through $\prod_{i=1}^r \mathcal{L}_{x_i}$, that is, we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X,\mathcal{L}) & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{L},|Z|}} & \prod_{i=1}^r \mathcal{L}_{x_i} \\ {\scriptstyle e_{\mathcal{L},Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathcal{L},Z}} \\ \Gamma(X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_Z) & = & \prod_{i=1}^r \mathcal{L}_{x_i}/\mathcal{J}_{x_i}\mathcal{L}_{x_i}, \end{array}$$

where $\rho_{\mathcal{L},|Z|}$ sends $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ to $(s_{x_1}, \dots, s_{x_r}) \in \prod_{i=1}^r \mathcal{L}_{x_i}$. Here note that $\pi_{\mathcal{L},Z}$ is surjective.

Let $A_Z = \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_{X,x_i}$, $V_Z := \rho_{\mathcal{L},|Z|}(\Gamma(X, \mathcal{L}))$, and let J_Z be the ideal of A_Z such that $A_Z/J_Z = \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_{X,x_i}/\mathcal{J}_{x_i}$. From now on, we choose a suitable section of $\mathcal{L}$ and fix it in order to identify $\prod_{i=1}^r \mathcal{L}_{x_i}$ with A_Z and $\prod_{i=1}^r \mathcal{L}_{x_i}/\mathcal{J}_{x_i}\mathcal{L}_{x_i}$ with A_Z/J_Z respectively. Note that this identification is not canonical.

Then we obtain the following.

Lemma 2.1 *$e_{\mathcal{L},Z}$ is surjective if and only if $V_Z + J_Z = A_Z$.*

Proof. If $e_{\mathcal{L},Z}$ is surjective, then for any element $a \in A_Z$ there exists a section $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ such that $\pi_{\mathcal{L},Z}(a) = e_{\mathcal{L},Z}(s)$. We have $\pi_{\mathcal{L},Z}(a - \rho_{\mathcal{L},|Z|}(s)) = 0$, and $a - \rho_{\mathcal{L},|Z|}(s) \in J_Z$. Therefore $V_Z + J_Z = A_Z$.

Suppose that $V_Z + J_Z = A_Z$. It follows from the above diagram that, for any section $t \in \Gamma(X, \mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_Z)$, there exists an element $b \in A_Z$ such that $\pi_{\mathcal{L},Z}(b) = t$. Since $V_Z + J_Z = A_Z$, we can write $b = \rho_{\mathcal{L},|Z|}(s) + f$ for some $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ and $f \in J_Z$. Then

$$e_{\mathcal{L},Z}(s) = \pi_{\mathcal{L},Z}(\rho_{\mathcal{L},|Z|}(s)) = \pi_{\mathcal{L},Z}(b - f) = \pi_{\mathcal{L},Z}(b) = t.$$

Therefore $e_{\mathcal{L},Z}$ is surjective. □

From the definition of k-very ampleness and the above lemma, we obtain

Proposition 2.2 *With the above notation, $\mathcal{L}$ is k-very ample if and only if $V_Z + J_Z = A_Z$ for any 0-dimensional subscheme $Z \subset X$ of length $k+1$.*

2.2 k-very ampleness and finite sets

Let $S = \{x_1, \dots, x_r\}$ be a finite set of r points of X and let Z be a 0-dimensional subscheme of X with the defining ideal sheaf $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ such that $|Z| \subseteq S$. We may assume that $|Z| = \{x_1, \dots, x_t\}$ for $t \le r$. Consider the following commutative diagram (with the identification noted above):

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X,\mathcal{L}) \arrow[r, "\rho_{\mathcal{L},|Z|}"] \arrow[d, "e_{\mathcal{L},Z}"'] & \prod_{i=1}^{t} \mathcal{O}_{X,x_i} \arrow[d, "\pi_{\mathcal{L},Z}"] & \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{X,x_i} \arrow[l, "pr_{S,Z}"'] \arrow[d, "\pi_{S,Z}"] \\
\Gamma(X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_Z) \arrow[r, equal] & \prod_{i=1}^{t} \mathcal{O}_{X,x_i}/\mathcal{I}_{x_i} \arrow[r, equal] & \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{X,x_i}/\mathcal{I}_{x_i},
\end{tikzcd}$$

where $\mathcal{I}_{x_i} = \mathcal{O}_{X,x_i}$ for $i = t+1, \dots, r$ and $pr_{S,Z}$ is the projection. We define

$$\rho_{\mathcal{L},S} : \Gamma(X,\mathcal{L}) \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{X,x_i}$$

by sending $s \in \Gamma(X,\mathcal{L})$ to $(s_{x_1}, \dots, s_{x_r}) \in \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{X,x_i}$, and then $pr_{S,Z} \circ \rho_{\mathcal{L},S} = \rho_{\mathcal{L},|Z|}$.

Let $A_S = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{X,x_i}$, $V_S = \rho_{\mathcal{L},S}(\Gamma(X,\mathcal{L}))$, and let I be the ideal of A_S such that $A_S/I = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{X,x_i}/\mathcal{I}_{x_i}$. Then we obtain the following lemma by the same argument as in the proof of Lemma 2.1.

Lemma 2.3 *With the above notation, $e_{\mathcal{L},Z}$ is surjective if and only if $V_S + I = A_S$ in A_S.*

In the above lemma, note that A_S and V_S do not depend on the 0-dimensional subscheme Z but on the finite set S.

3 Proof of Theorem 1.1

Let Z be a 0-dimensional subscheme of X of length $a+b+1$, $|Z| = \{x_1, ..., x_r\}$, and let $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ be the defining ideal sheaf of Z. Put $A = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{X,x_i}$ and let J be the ideal of A such that $A/J = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{X,x_i}/\mathcal{J}_{x_i}$, and then

$$\ell(A/J) = \sum_{i=1}^{r} \ell(\mathcal{O}_{X,x_i}/\mathcal{J}_{x_i}) = a+b+1.$$

Let $\rho_{\mathcal{L}_i,|Z|} : \Gamma(X,\mathcal{L}_i) \to A$ for $i = 1,2$ and $\rho_{\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2,|Z|} : \Gamma(X,\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2) \to A$ be the maps defined above. Then we have the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X,\mathcal{L}_1)\otimes\Gamma(X,\mathcal{L}_2) \arrow[r, "\rho_{\mathcal{L}_1,|Z|}\otimes\rho_{\mathcal{L}_2,|Z|}"] \arrow[d, "\text{mult.}"'] & A\otimes A \arrow[d, "\text{mult.}"] \\
\Gamma(X,\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2) \arrow[r, "\rho_{\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2,|Z|}"'] & A,
\end{tikzcd}$$

where each mult. is the multiplication map. Hence we obtain

$$V_1V_2 \subset V, \tag{3.1}$$

where $V_i := \rho_{\mathcal{L}_i,|Z|}(\Gamma(X,\mathcal{L}_i))$ for $i = 1, 2$, $V := \rho_{\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2,|Z|}(\Gamma(X,\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2))$, and V_1V_2 is the set of all elements such that $\sum_i u_iv_i$ $(u_i \in V_1,\ v_i \in V_2)$.

Since $\mathcal{L}_1$ is a-very ample, $e_{\mathcal{L}_1,Z'}$ is surjective for any 0-dimensional subscheme $Z' \subseteq Z$ of length $a+1$, and from Lemma 2.3, we see that $V_1 + I = A$ for any ideal I of A such that $\ell(A/I) = a+1$. Similarly, $V_2+I' = A$ for any ideal I' of A such that $\ell(A/I') = b+1$. In order to prove that $\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2$ is $(a+b)$-very ample, by Proposition 2.2, we have to show that $V + J = A$, hence $V_1V_2 + J = A$ from (3.1). Therefore it is sufficient to prove the following claim.

Claim 3.1 *Let $(A_i, \mathfrak{m}_i, \mathsf{k})$ be local rings, let $A = \prod_{i=1}^r A_i$ be the direct product, and let V_1, V_2 be k-vector spaces contained in A. Assume that A contains k and $V_1 + I = A$ (resp. $V_2 + I' = A$) for any ideal I (resp. I') of A such that $\ell(A/I) = a+1$ (resp. $\ell(A/I') = b+1$). Then $V_1V_2+J = A$ for any ideal J of A such that $\ell(A/J) = a+b+1$, where V_1V_2 is the set of all elements such that $\sum_i u_iv_i$ $(u_i \in V_1,\ v_i \in V_2)$.*

Proof. We prove the claim by induction on a and b.

Let 1_i be the identity element of A_i for $i = 1,...,r$. We identify 1_i with the element $(0,\dots,0,1_i,0,\dots,0) \in A$. Then $1_1,\dots,1_r$ are orthogonal idempotents of A, that is, $1_i^2 = 1_i$ for each i, $1_i1_j = 0$ if $i \neq j$, and $\sum_{i=1}^r 1_i = 1_A$.

Assume that $a = 0$. If I is an ideal of A such that $\ell(A/I) = 1$, then I is of the form

$$I = A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times \mathfrak{m}_i \times A_{i+1} \times \cdots \times A_r$$

for some i. Since $V_1 + I = A$ by the assumption, there exist $v_1 \in V_1$, $m_i \in \mathfrak{m}_i$, and $c_i \in \prod_{j\neq i} A_j$ such that $v_1 + m_i + c_i = 1_i$. Hence we obtain $v_1 = 1_i - m_i - c_i$.

If J is any ideal such that $\ell(A/J) = b+1$, then $V_2 + J = A$ by the assumption, and in particular we may assume that $A_i \subset V_2 + J$ for any i.

Now we show that $V_1V_2 + J = A$. To do this, it is sufficient to prove $A_i \subset V_1V_2 + J$ for all i. By the above assumption, we have

$$v_1A_i \subset v_1V_2 + v_1J, \quad \text{and} \quad v_1A_i = (1_i - m_i - c_i)A_i = A_i$$

since $c_iA_i = 0$ and $1_i - m_i$ is a unit in A_i. Therefore we obtain

$$A_i = v_1A_i \subset v_1V_2 + v_1J \subset V_1V_2 + J.$$

Similarly we can prove the case $b = 0$.

Next assume that $a > 0$ and $b > 0$. Then the induction assumption is:

(A1) if $a' \leq a$, $b' \leq b$, $a' + b' < a+b$, and J' is any ideal of A such that $\ell(A/J') = a' + b' + 1$, then $V_1V_2 + J' = A$.

This is equivalent to the assumption:

(A2) if J'' is any ideal of A such that $\ell(A/J'') < a+b+1$, then $V_1V_2 + J'' = A$.

Indeed, there are nonnegative integers a', b' such that $a' \le a$, $b' \le b$, $a' + b' < a + b$, and $\ell(A/J'') = a' + b' + 1$. From the assumption $(A1)$, we see that $V_1V_2 + J'' = A$. We will use this assumption repeatedly.

Let J be an ideal of A such that $\ell(A/J) = a + b + 1$. Now we write A (resp. $\mathfrak{m}$) instead of A/J (resp. $\mathfrak{m}/J$) for simplicity, and we show that, if $\ell(A) = a + b + 1$, then $V_1V_2 = A$. To do this, we recall the definition of the socle of A. The socle of A is defined to be the sum of all the ideals of length 1 of A and denoted by $\mathrm{Soc}(A)$.

Case 1. Assume that $\dim_{\mathsf{k}}(\mathrm{Soc}(A)) \ge 2$. Let $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2$ be any two distinct minimal ideals in $\mathrm{Soc}(A)$. Since $\ell(A/\mathfrak{n}_2) < a+b+1$, it follows from the assumption $(A2)$ that $V_1V_2 + \mathfrak{n}_2 = A$. For any nonzero element x of $\mathfrak{n}_1$, there exist elements $v \in V_1V_2$ and $y \in \mathfrak{n}_2$ such that $v + y = x$. Here note that $v \ne 0$ since $\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2 = 0$. Let $\mathfrak{n}'$ be the ideal of A generated by v. Then $\ell(A/\mathfrak{n}') < a + b + 1$ and $\mathfrak{n}' = A \cdot v = \mathsf{k} \cdot v \subset V_1V_2$ since $v = x - y \in \mathrm{Soc}(A)$. Therefore by the assumption $(A2)$, we obtain

$$A = V_1V_2 + \mathfrak{n}' = V_1V_2.$$

Case 2. Assume that $\dim_{\mathsf{k}}(\mathrm{Soc}(A)) = 1$. Then A is a local ring and has the unique minimal ideal $\mathfrak{n}$. Since $\ell(A/\mathfrak{n}) < a + b + 1$, by the assumption $(A2)$, we obtain

$$V_1V_2 + \mathfrak{n} = A.$$

It follows from [3, Theorem 221] that A is a 0-dimensional Gorenstein ring. For any ideal $\mathfrak{a}$ of the 0-dimensional Gorenstein ring A, we obtain $(0 : (0 : \mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$ by [1, Exercise 3.2.15], and

$$\ell((0 : \mathfrak{a})) = \ell(A/\mathfrak{a}) \quad \text{and} \quad \ell(\mathfrak{a}) = \ell(A/(0 : \mathfrak{a})) \tag{3.2}$$

by considering the length of composition series.

Let $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ be any ideals of A such that $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{c}$, $\ell(\mathfrak{b}) = b + 1$, and $\ell(\mathfrak{c}) = b$. From (3.2), we obtain $\ell(A/(0 : \mathfrak{b})) = b + 1$ and $\ell(A/\mathfrak{c}) = a + 1$. By the assumption of the claim, $V_2 + (0 : \mathfrak{b}) = A$, and for any element $x \in (0 : \mathfrak{c})$, there exist $v_2 \in V_2$ and $z \in (0 : \mathfrak{b})$ such that $v_2 + z = x$. Similarly, $V_1 + \mathfrak{c} = A$, and for any element $y \in \mathfrak{b}$, there exist $v_1 \in V_1$ and $w \in \mathfrak{c}$ such that $v_1 + w = y$. Then

$$v_1v_2 = (y - w)(x - z) = yx - yz - wx + wz = xy.$$

Indeed, $yz \in \mathfrak{b} \cdot (0 : \mathfrak{b}) = 0$, $wx \in \mathfrak{c} \cdot (0 : \mathfrak{c}) = 0$, and $wz \in \mathfrak{c} \cdot (0 : \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{b} \cdot (0 : \mathfrak{b}) = 0$. Hence we obtain

$$(0 : \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{b} \subset V_1V_2. \tag{3.3}$$

Moreover $(0 : \mathfrak{c}) \supsetneq (0 : \mathfrak{b})$, and then $(0 : \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{b} \ne 0$. We obtain

$$\mathfrak{n} \subset (0 : \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{b} \tag{3.4}$$

because $\mathfrak{n}$ is the unique minimal ideal of A. Therefore by (3.3) and (3.4) we obtain $\mathfrak{n} \subset V_1V_2$, and then

$$A = V_1V_2 + \mathfrak{n} = V_1V_2.$$

This completes the proof of the claim, hence Theorem 1.1. $\square$

We obtain the following corollary inductively.

Corollary 3.2 *Let X be a complete algebraic variety over an algebraically closed field and $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$ line bundles on X. Let $a_1, \dots, a_m$ be nonnegative integers. If $\mathcal{L}_i$ is a_i-very ample for $i = 1, \dots, m$, then $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_m$ is $(a_1 + \cdots + a_m)$-very ample.*

References

[1] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge Stud. Adv. Math. 39, Cambridge Univ. Press, 1993.

[2] F. Catanese and L. Göttsche, *d-very ample line bundles and embeddings of Hilbert scheme of* 0*-cycles*, manuscr. math. 68, 337–341 (1990)

[3] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Revised Edition, The Univ. of Chicago Press, 1974.

[4] Y. Hinohara, K. Takahashi, and H. Terakawa, *On tensor products of k-very ample line bundles*, preprint (2000)

Tsuru University
3-8-1 Tahara Tsuru-shi, Yamanashi 402-8555, Japan
ktaka@rr.iij4u.or.jp
terakawa@tsuru.ac.jp

商特異点の minimal Hilbert-Kunz multiplicity

吉田 健一・渡辺 敬一

この講演では, 1997 年 (平成 10 年) の可換環論シンポジウム (賢島) にて, 渡辺敬一が導入した minimal Hilbert-Kunz 重複度 (multiplicity) という概念について, 導入するに至った動機を説明し, Gorenstein 局所環, 商特異点などの場合にその計算方法と計算結果を紹介する. minimal Hilbert-Kunz 重複度と, 今年 8 月の横浜での Conference で Huneke が定義した rational signature とは, Gorenstein 局所環に対しては一致するが, これらは異なる問題意識から生まれたものである.

特に断らない限り, 次の記号・用語を用いる：$(A, \mathfrak{m}, k)$ は標数 $p > 0$ の体を含む d 次元のネーター局所環とし, k は無限体とする. さらに, A は被約 (reduced) で F-finite (i.e. $A^{1/p}$ は有限生成 A 加群) と仮定する. 特に, A は excellent である ([Ku2]). $F^e : A \to A$ $(a \mapsto a^q)$ (ここに, $q = p^e$) を Frobenius 射の e 回の合成とし, これを通して, A を A 上の代数とみなすとき, ${}^eA$ と表す. また, I は $\mathfrak{m}$-準素イデアルとし, $I^{[q]} = (a^q \,|\, a \in I)A$ とおく. A^0 により, A のどの極小素因子にも含まれない元の全体を表す.

1. minimal Hilbert-Kunz 重複度の定義

最初にいくつか既存の概念を思い出そう.

1a) 加群に対する tight closure ([HH1]).

M を A-加群とする. 自然な作用による ${}^eA$-加群 ${}^eA \otimes_A M$ は, 環の同型 ${}^eA \cong A$ を通して, A-加群とみなすことができる. これを $\mathbf{F}^e_A(M)$ と表す. $\mathbf{F}^e_A(M)$ の A-加群としての作用は, $a'(a \otimes m) = a'a \otimes m$ で与えられる. また, $a \otimes bm = ab^q \otimes m$ に注意すると, 有限生成 A-加群 M が行列 (a_{ij}) で定義される写像 $A^n \longrightarrow A^m$ の余核として与えられるとき, $\mathbf{F}^e_A(M)$ は行列 (a_{ij}^q) で定義される写像 $A^n \to A^m$ の余核に等しい. 特に, $\mathbf{F}^e_A(A/I) = A/I^{[q]}$ が成立する.

N を M の A-部分加群とする. $N^{[q]}_M = \ker(\mathbf{F}^e_A(M) \to \mathbf{F}^e_A(M/N))$ とおくと, $N^{[q]}_M = \operatorname{Im}(\mathbf{F}^e_A(N) \to \mathbf{F}^e_A(M))$ である. さらに, $F^e_A : M \to \mathbf{F}^e_A(M) = {}^eA \otimes_A M$ $(m \mapsto 1 \otimes m)$ と定める. $x \in M$ に対して,

$$x \in N^*_M \iff \exists c \in A^0 \text{ s.t. } \; cF^e(x) \in N^{[q]}_M \quad (\forall q = p^e)$$

により, N の M における **tight closure** N^*_M を定義する. $N^*_M/N \cong (0)^*_{M/N}$ に注意しよう. また, イデアル I の (通常の) tight closure I^* は, I^*_A と一致する.

1b) F 正則性 ([HH1,HH2]).

A の任意のイデアル I が tightly closed (i.e. $I^* = I$) であるような環を弱 F 正則環 (weakly F-regular) という. A の任意の局所化が弱 F 正則であるとき, A は F 正則であると言う. 任意の $c \in A^0$ に対して, A 線型写像 $A \to A^{1/p}$ $(a \mapsto c^{1/p}a)$ が split な単射であるとき, A は強 F 正則 (strongly F-regular) であるという. E_A を剰余体 k の入射包絡とするとき, A が弱 F 正則 (resp. 強 F 正則) であることと, 次は同値である.

$$(0)^{*fg}_{E_A} := \bigcup_{\substack{M \subseteq E_A \\ M:\text{f.g.} A\text{-module}}} (0)^*_M = (0) \qquad \left(\text{resp. } (0)^*_{E_A} = (0)\right).$$

一般に, A が強 F 正則ならば (弱) F 正則であるが, 逆は未解決である. しかしながら, A が $\mathbb{Q}$-Gorenstein のときは, 両者の概念は一致することが知られている.

1c) Hilbert-Kunz 重複度 ([Ku1,Ku2,Mo]).

A の $\mathfrak{m}$-準素 イデアル I に対して, $e_{\mathrm{HK}}(I) = \lim_{e\to\infty} \dfrac{l_A\left(A/I^{[q]}\right)}{q^d}$ により定義される実数 $e_{\mathrm{HK}}(I)$ を I の **Hilbert-Kunz 重複度**と言う.

商特異点の Hilbert-Kunz 重複度を計算する際に, 次の結果は有効である.

Fact 1.1 ([WY1, BCP]). $(A,\mathfrak{m}) \hookrightarrow (B,\mathfrak{n})$ を局所整域の module-finite な拡大とし, $A/\mathfrak{m} = B/\mathfrak{n}$ と仮定する. 2 つの整域の商体の拡大次数を N とおくとき, A の任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, $e_{\mathrm{HK}}(I) = \dfrac{e_{\mathrm{HK}}(IB)}{N}$ が成り立つ. 特に, B が正則局所環のときは, $e_{\mathrm{HK}}(I) = \dfrac{l_A(B/IB)}{N}$ である.

tight closure と Hilbert-Kunz 重複度の関係は, 整閉包と重複度の関係に似ている. 実際, $I \subseteq I'$ なる $\mathfrak{m}$-準素イデアルの列を考えよう. もし, $\overline{I'} = \overline{I}$ ならば $e(I) = e(I')$ であるが, A の完備化 $\widehat{A}$ が被約のとき, その逆も成立する. これに対して, Hilbert-Kunz 重複度については, 次が成り立つ.

Fact 1.2. (cf. [HH1, Theorem 8.17]) $I \subseteq I'$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアルの列とする.

(1) $(I')^* = I^*$ ならば, $e_{\mathrm{HK}}(I) = e_{\mathrm{HK}}(I')$ である.
(2) A が等次元かつ被約ならば, (1) の逆も成立する.

1d) relative Hilbert-Kunz 重複度.

A が正則局所環のとき, $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, $e_{\mathrm{HK}}(I) = l_A(A/I)$ である. 特に, 長さ 1 のイデアルの列 $I \subseteq I'$ に対して, $e_{\mathrm{HK}}(I) - e_{\mathrm{HK}}(I') = 1$ である. この性質は正則局所環を特徴付ける. それを詳しく述べるために, 次の概念を導入しよう.

Definition 1.3. $\mathrm{rel.\,m_{HK}}(A) := \inf\{e_{\mathrm{HK}}(I) - e_{\mathrm{HK}}(I') \mid I \subseteq I',\, l_A(I'/I) = 1\}$ を **relative mimimal Hilbert-Kunz 重複度**という.

次の性質は容易に証明される.

Proposition 1.4.

(1) $0 \le \mathrm{rel.\,m_{HK}}(A) \le 1$.
(2) A : 正則局所環 $\Longleftrightarrow \mathrm{rel.\,m_{HK}}(A) = 1$.
(3) A : 弱 F 正則でない $\Longrightarrow \mathrm{rel.\,m_{HK}}(A) = 0$.

Proof. (3) から示す. A が弱 F 正則でないと仮定すると, ある $\mathfrak{m}$-準素イデアル I があって, $I \neq I^*$ である. このとき, $I \subseteq I' \subseteq I^*$ で, $l_A(I'/I) = 1$ なるものを取れば, Fact 1.2 より, $e_{\mathrm{HK}}(I) = e_{\mathrm{HK}}(I')$ を得る. 特に, $\mathrm{rel.\,m_{HK}}(A) = 0$ を得る.

次に, (1),(2) を見るために, $\mathrm{rel.\,m_{HK}}(A) \ge 1$ と仮定する. A は excellent で, 弱 F 正則ゆえ, Cohen-Macaulay である. 特に, J を A のパラメータイデアルとすると, $e_{\mathrm{HK}}(J) = e(J) = l_A(A/J)$ である. また, 仮定より, 各幅 ≥ 1 ゆえ, $e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{m}) \le e_{\mathrm{HK}}(J) - l_A(\mathfrak{m}/J) = 1$, 特に, $e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{m}) = 1$ である. [WY1, Theorem 1.5] より, A は正則局所環である. □

Proposition 1.4 の (3) の逆は常に正しいと思うが, $\mathbb{Q}$-Gorenstein の場合 (Corollary 3.4 参照) を除いて, 一般には未解決である.

ところで, $e_{\mathrm{HK}}(I)$ がどのような値を取りうるか, という問題は基本的な問題であるが, 次の問題はこの問題に関連している (Proposition 1.4 参照).

Problem A. A を弱 F 正則な局所環とし,

(1) $\mathrm{rel.\,m}_{\mathrm{HK}}(A)$ の値を求めること.
(2) $\mathrm{rel.\,m}_{\mathrm{HK}}(A) = e_{\mathrm{HK}}(I) - e_{\mathrm{HK}}(I')$ となるイデアルのペア $I \subseteq I'$ を見出すこと.

そのために, minimal Hilbert-Kunz 重複度の概念を導入し, その基本性質をいくつか調べてみよう.

1e) minimal Hilber-Kunz 重複度 ([Wa4]).

Definition 1.5 ([Wa4]). L を A-加群とし, $N \subseteq M$ を L の有限生成 A 部分加群で, $l_A(M/N) < \infty$ なるものとする. このとき,

$$e_{\mathrm{HK}}(N, M; L) := \liminf_{e\to\infty} \frac{l_A(M_L^{[q]}/N_L^{[q]})}{q^d}$$

とおく. 特に, $L = E_A$, $M = \mathrm{Soc}_A(E_A)$, $N = (0)$ として,

$$\mathrm{m}_{\mathrm{HK}}(A) := e_{\mathrm{HK}}((0), \mathrm{Soc}_A(E_A); E_A)$$

を A の **minimal Hilbert-Kunz 重複度**と言う.

$\mathrm{Soc}_A(E_A)$ の生成元 (の 1 つ) を z とするとき, $Az = \mathrm{Soc}_A(E_A) \cong A/\mathfrak{m}$ である.

$$\begin{array}{ccccc}
Az & \longrightarrow & E_A & \ni & u \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A/\mathfrak{m}^{[q]} \cong \mathbf{F}_A^e(Az) & \xrightarrow{{}^eA\otimes 1} & \mathbf{F}_A^e(E_A) & \ni & 1\otimes u
\end{array}$$

$\mathbf{F}_A^e(Az) \to \mathbf{F}_A^e(E_A)$ の像は, $(Az)_{E_A}^{[q]} = A \cdot F_A^e(z) \cong A/\operatorname{ann}_A F_A^e(z)$ に等しいから,

$$\textbf{(1.6)} \qquad \mathrm{m}_{\mathrm{HK}}(A) = \liminf_{e\to\infty} \frac{l_A((Az)_{E_A}^{[q]})}{q^d} = \liminf_{e\to\infty} \frac{l_A(A/\operatorname{ann}_A F_A^e(z))}{q^d}$$

を得る. $\mathfrak{m}^{[q]} \subseteq \operatorname{ann}_A F_A^e(z)$ は, $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq \mathrm{m}_{\mathrm{HK}}(A)$ を導くことに注意.

我々は, $\mathrm{rel.\,m}_{\mathrm{HK}}(A) = \mathrm{m}_{\mathrm{HK}}(A)$ が常に成り立つものと期待しているが, 一般には分からない. しかし, 次を証明することができる.

Proposition 1.7. $\mathrm{rel.\,m}_{\mathrm{HK}}(A) \geq \mathrm{m}_{\mathrm{HK}}(A)$.

Proof. A は完備としてよい. $I \subseteq I'$, $l_A(I'/I) = 1$ に対して, $I' = I + aA$, $\mathfrak{m}a \subseteq I$ と書くことができる. Matlis duality より, $[0 :_E I] = [0 :_E I'] + Au$, $\quad \mathfrak{m}u \subseteq [0 :_E I']$ と書

くことができるが, $a \cdot [0 :_E I] \neq 0$ ゆえ, (必要ならば単数倍の調整を行って) $z = au$ とできる.

さて, $ca^q \in I^{[q]}$ と仮定すると,

$$cF_A^e(z) = cF_A^e(au) = ca^q F_A^e(u) \in I^{[q]} F_A^e([0 :_E I]) = 0.$$

よって, $I^{[q]} : a^q \subseteq \operatorname{ann}_A F_A^e(z)$. 従って,

$$l_A(I'^{[q]}/I^{[q]}) \doteq l_A(A/I^{[q]} : a^q) \geq l_A(A/\operatorname{ann}_A F_A^e(z))$$

を得る. 両辺を q^d で割って, limit を取ると, $\mathrm{e_{HK}}(I) - \mathrm{e_{HK}}(I') \geq \mathrm{m_{HK}}(A)$ を得る. さらに, inf を取れば, $\mathrm{rel.\,m_{HK}}(A) \geq \mathrm{m_{HK}}(A)$ を得る. □

次の節で, Gorenstein 局所環の場合には, Proposition 1.7 で等号が成立することを示す.

2. Gorenstein 局所環の minimal Hilbert-Kunz 重複度

この節でも引き続き, $(A, \mathfrak{m}, k)$ を正標数 $p > 0$ の F-finite なネーター局所環とし, $d := \dim A \geq 2$ とおく.

もし, A が Cohen-Macaulay ならば, A のパラメーター $\underline{a} = a_1, \dots, a_d$ に対して, $H_\mathfrak{m}^d(A) = \varinjlim A/(\underline{a}^{[n]})$ である. このとき,

$$F_A^e : H_\mathfrak{m}^d(A) \to H_\mathfrak{m}^d(A) \quad ([b + (a_1^n, \dots, a_d^n)] \to [b^q + (a_1^{nq}, \dots, a_d^{nq})])$$

と考えて, $\mathbf{F}_A^e(H_\mathfrak{m}^d(A)) \cong H_\mathfrak{m}^d(A)$ とみなすことができる. これを用いて, A が Gorenstein 局所環の場合に, $\mathrm{rel.\,m_{HK}}(A) = \mathrm{m_{HK}}(A)$ を示そう. より詳しくは, 次の定理を証明する.

Theorem 2.1. A を Gorenstein 局所環と仮定する. このとき, $\mathrm{pd}_A A/J < \infty$ で A/J が Gorenstein であるような任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル J (例えば, パラメータイデアル) に対して, $\mathrm{e_{HK}}(J) - \mathrm{e_{HK}}(J : \mathfrak{m}) = \mathrm{m_{HK}}(A)$ が成り立つ. 特に, $\mathrm{rel.\,m_{HK}}(A) = \mathrm{m_{HK}}(A)$ である.

Proof. まず, J がパラメータイデアルの場合を考える. $E_A \cong H_\mathfrak{m}^d(A)$ の socle の生成元を $z = [b + J]$ と書くとき, $F_A^e(z) = [b^q + J^{[q]}]$.

さて, $cF_A^e(z) = [cb^q + J^{[q]}] = 0$ と仮定すると, ある自然数 n が存在して,

$$cb^q(a_1 \cdots a_d)^{(n-1)q} \in (a_1^{nq}, \dots, a_d^{nq}), \qquad \text{すなわち,} \quad cb^q \in (a_1^q, \dots, a_d^q) = J^{[q]}.$$

よって, Proposition 1.7 の証明と合わせて, $J^{[q]} : b^q = \operatorname{ann}_A F_A^e(z)$ となり, $\mathrm{e_{HK}}(J) - \mathrm{e_{HK}}(J : \mathfrak{m}) = \mathrm{m_{HK}}(A)$ を得る.

次に, J が $\mathrm{pd}_A A/J < \infty$ で A/J が Gorenstein であるような $\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合を考える. J に含まれるパラメータイデアル $\mathfrak{q}$ を 1 つ取り,

$$\mathrm{e_{HK}}(J) - \mathrm{e_{HK}}(J : \mathfrak{m}) = \mathrm{e_{HK}}(\mathfrak{q}) - \mathrm{e_{HK}}(\mathfrak{q} : \mathfrak{m})$$

を示せばよい. これは本質的には, Vraciu による corner power の well-definedness ([V, Proposition 3.5]) から従うが, 簡単にアウトラインを記しておこう.

$\mathfrak{q} \subseteq J$ だから, 自然な全射 $A/\mathfrak{q} \to A/J$ がある. これをそれぞれの極小自由分解の間の射に拡張すると, (A/J, $A/\mathfrak{q}$ は共に Gorenstein ゆえ)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A = F'_d \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & \cdots \arrow[r] & A^m \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/\mathfrak{q} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{nat}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A = F_d \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A^n \arrow[r] & A \arrow[r] & A/J \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.1.1}$$

のような可換図式を得る. この射から導かれる A 線型写像 $F'_d \to F_d$ が δ 倍で定義されていれば, $J = \mathfrak{q} : \delta$ と書ける. $L = J : \mathfrak{m}$, $L' = \mathfrak{q} : \mathfrak{m}$ とおくと,

$$\mathfrak{q} : (\mathfrak{q}, \delta L) = \mathfrak{q} : \delta L = (\mathfrak{q} : \delta) : L = J : L = \mathfrak{m}$$

だから, $(\mathfrak{q}, \delta L) = \mathfrak{q} : (\mathfrak{q} : (\mathfrak{q}, \delta L)) = \mathfrak{q} : \mathfrak{m} = L'$ を得る. Frobenius power を取って, $(\mathfrak{q}^{[q]}, \delta^q L^{[q]}) = L'^{[q]}$ を得る. (2.1.1) に Peskine–Szpiro 関手を施せば, $A/\mathfrak{q}^{[q]}$ 及び $A/J^{[q]}$ の極小自由分解が得られるから, $J^{[q]} = \mathfrak{q}^{[q]} : \delta^q$ である. 従って,

$$J^{[q]} : L^{[q]} = (\mathfrak{q}^{[q]} : \delta^q) : L^{[q]} = \mathfrak{q}^{[q]} : (\mathfrak{q}^{[q]}, \delta^q L^{[q]}) = \mathfrak{q}^{[q]} : L'^{[q]}$$

を得る. 今, $L = J + aA$, $L' = \mathfrak{q} + bA$ と書けば, $J^{[q]} : a^q = \mathfrak{q}^{[q]} : b^q$ となり,

$$l_A(L^{[q]}/J^{[q]}) = l_A(A/J^{[q]} : a^q) = l_A(A/\mathfrak{q}^{[q]} : b^q) = l_A(L'^{[q]}/\mathfrak{q}^{[q]})$$

を得る. 求める主張はこれから従う. □

3. 商特異点の minimal Hilbert-Kunz 重複度

この節では, $k = \overline{k}$ を代数的閉体とし, $p = \mathrm{char}(k) > 0$ を素数, $d \geq 2$ を自然数とし, G を $GL(d, k)$ の有限部分群で, pseudo-reflexion を含まないものとする. また, $(p, |G|) = 1$ と仮定する. G はベクトル空間 $V = k^d$ に自然に作用し, その作用は k 上の多項式環 $S = k[x_1, \ldots, x_d]$ に拡張される. このとき, S の G-不変な部分環

$$S^G = \{f \in S \mid g \circ f = f \ (g \in G)\}$$

は S の次数付きで pure な部分環である. $\mathfrak{n} = (x_1, \ldots, x_d)S$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap S^G$ とおき, $A = (S^G)_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}A$ を考えると, $(A, \mathfrak{m}_A)$ は $\mathbb{Q}$- Gorenstein な強F正則局所整域である.

この節の主目的はこのような商特異点を持つ局所環の minimal Hilbert-Kunz 重複度を計算することである. その前に, $\mathrm{rel.\,m_{HK}}(A)$ を考えてみよう. 簡単のため, $B = S_{\mathfrak{n}}$ とおく. A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルのペア $I \subseteq I'$ ($l_A(I'/I) = 1$) を与える. $A \hookrightarrow B$ は pure だから, $I = IB \cap A$ を満たす. よって, $I \neq I'$ から, $IB \neq I'B$ である. 特に, $l_B(I'B/IB) \geq 1$ で, B は正則局所環だから,

$$\mathrm{e_{HK}}(I) - \mathrm{e_{HK}}(I') = \frac{\mathrm{e_{HK}}(IB) - \mathrm{e_{HK}}(I'B)}{|G|} = \frac{l_B(I'B/IB)}{|G|} \geq \frac{1}{|G|}$$

を得る. 従って, $\mathrm{rel.\,m_{HK}}(A) \geq \dfrac{1}{|G|}$ である. また, 上の記号で, $l_B(I'B/IB) = 1$ となるペア $I \subseteq I'$ が取れれば, 等号の成立が言える. 残念ながら, 一般の G に対してこのようなペアを見つける方法は得られていないが, 次の定理を証明することができる.

Theorem 3.1. 上記の A に対して, $\mathrm{m_{HK}}(A)=\dfrac{1}{|G|}$ を得る.

Remark. 上記の A, B に対して, $\mathrm{e_{HK}}(A)=\dfrac{\mu_A(B)}{|G|}$ である. ここに, $\mu_A(B)$ は B の A-加群としての極小生成元の個数を与える.

以下, Theorem 3.1 の証明のアウトラインを述べていこう.

Step 1. $G\subseteq SL(d,k)$ の場合

このとき, S^G, 従って, A は Gorenstein である. $a_1,\dots,a_d\in S^G$ を同じ次数 m を持つ斉次パラメーター系とし, $J=(a_1,\dots,a_d)S^G$ とおく. このとき, S/JS は Artinian Gorenstein 環ゆえ, $z\in S_{d(m-1)}$ を, $z+JS$ が $\mathrm{Soc}_S(S/JS)$ を生成するように取ることができる.

Fact ([Wa1, Theorem 1a]). $z\in S^G$

これを認めれば, $z+JS^G$ は $\mathrm{Soc}(S^G/JS^G)$ を生成することが分かる. さらに, $JA:\mathfrak{m}_A=(J,z)A,\quad JS_\mathfrak{n}:\mathfrak{n}S_\mathfrak{n}=(J,z)S_\mathfrak{n}$ だから,

$$\begin{aligned}\mathrm{e_{HK}}(JA)-\mathrm{e_{HK}}(JA:\mathfrak{m}_A)&=\frac{1}{|G|}l_A(S_\mathfrak{n}/JS_\mathfrak{n})-\frac{1}{|G|}l_A(S_\mathfrak{n}/(J,z)S_\mathfrak{n})\\&=\frac{1}{|G|}l_A\left(\frac{JS_\mathfrak{n}:\mathfrak{n}S_\mathfrak{n}}{JS_\mathfrak{n}}\right)=\frac{1}{|G|}\end{aligned}$$

を得る. 従って, Theorem 2.1 から, $\mathrm{m_{HK}}(A)=\dfrac{1}{|G|}$ を得る.

Step 2. 一般の場合

$H=G\cap SL(d,k)$ とおくと, H は G の正規部分群で, G/H は巡回群である. さらに, $r=|G:H|$, $B=(S^H)_{\mathfrak{n}\cap S^H}$ とおくと, B は $A=(S^G)_\mathfrak{m}$ の cyclic r-cover であり, Step 1 から, $\mathrm{m_{HK}}(B)=\dfrac{1}{|H|}$ である. 実際, B は A の canonical cover, すなわち, $K_A\hookrightarrow A$ を A の標準加群 (canonical module) とし, $K_A^{(i)}$ を K_A の symbolic i-th power とするとき, $K_A^{(r)}=fA$ なる $f\in A$ が存在して,

$$B=A\oplus K_At\oplus K_A^{(2)}t^2\oplus\cdots\oplus K_A^{(r-1)}t^{r-1},\quad ft^r=1$$

と書くことができる ([TW] 参照). $|G|=|H|\times r$ に注意すれば, Theorem 3.1 の証明は次の Theorem 3.2 の証明に帰着される.

Theorem 3.2. $(A,\mathfrak{m})$ を正標数 $p>0$ の $\mathbb{Q}$-Gorenstein Cohen-Macaulay 正規整域とする. また, $r=\mathrm{ord}(\mathrm{cl}(K_A))$ とおき, A の canonical cover を次のように表す:

$$B:=A\oplus K_At\oplus K_A^{(2)}t^2\oplus\cdots\oplus K_A^{(r-1)}t^{r-1},\qquad (\text{ただし, } K_A^{(r)}=fA,\ t^rf=1).$$

このとき, $(r,p)=1$ かつ B が Cohen-Macaulay と仮定すれば, 次が成り立つ:

$$\mathrm{m_{HK}}(B)=r\cdot\mathrm{m_{HK}}(A).$$

Remark. Theorem 3.2 の記号の下で, B は Cohen-Macaulay ならば, Gorenstein である ([Wa3] 参照).

以下では, Theorem 3.2 の記号を用いる. この定理の証明のために, 次の Lemma を証明しよう.

Lemma 3.3. $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B + \sum_{i=1}^{r-1} K_A^{(i)} t^i$ とおくとき,

(1) $E_B(B/\mathfrak{n}) \cong H_{\mathfrak{n}}^d(B) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} H_{\mathfrak{m}}^d(K_A^{(i)})t^i$.
(2) $Az = \mathrm{Soc}_A(E_A)$ とするとき, $\mathrm{Soc}_B(E_B) \cong B \cdot zt$.

Proof. (1) は $\mathfrak{n} = \sqrt{\mathfrak{m}B}$ と上の Remark から容易に従う. (2) を見るためには, $zt \in \mathrm{Soc}_B(E_B)$, すなわち, 次を言えば良い.

Claim. $1 \leq i \leq r-1$, $a_i \in K_A^{(i)}$ ならば, $z \in \ker(H_{\mathfrak{m}}^d(K_A) = E_A \xrightarrow{a_i} H_{\mathfrak{m}}^d(K_A^{(i+1)}))$

実際, 短完全列 $0 \to K_A \xrightarrow{a_i} K_A^{(i+1)} \longrightarrow K_A^{(i+1)}/a_iK_A \longrightarrow 0$ から完全列

$$0 = H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(K_A^{(i+1)}) \to H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(K_A^{(i+1)}/a_iK_A) \to H_{\mathfrak{m}}^d(K_A) \xrightarrow{a_i} H_{\mathfrak{m}}^d(K_A^{(i+1)}),$$

を得る. ここで, 最初の等号は, $K_A^{(i+1)}$ が MCM A-加群の直和因子であることから従う. さて, $Az = \mathrm{Soc}_A(H_{\mathfrak{m}}^d(K_A))$ だから, $H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(K_A^{(i+1)}/a_iK_A) \neq 0$ を示せば Claim が言える. $aK_A \cong K_A$ は MCM A-加群ゆえ, a_iK_A は高さ 1 の因子的イデアルであり, $1 \leq i < \mathrm{ord}(\mathrm{cl}(K_A)) = r$ より, $K_A^{(i+1)} \neq a_iK_A$ である. 求める主張はこれから従う. □

以下, Theorem 3.2 の証明を与えよう.

A は Cohen–Macaulay 局所環ゆえ, $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ を A のパラメーター系とするとき, $E_A = H_{\mathfrak{m}}^d(K_A) = \varinjlim K_A/\underline{x}^{[n]}K_A$ である. さらに, A が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規整域で, $K_A^{(q)}$ が MCM A-加群だから, $z \in K_A$ を $\mathrm{Soc}_A(K_A/\underline{x}K_A)$ の生成元とするとき,

$$\mathbf{F}_A^e(E_A) \cong H_{\mathfrak{m}}^d(K_A^{(q)}) = \varinjlim K_A^{(q)}/\underline{x}^{[n]}K_A^{(q)}$$

かつ

$$F_A^e : E_A \to \mathbf{F}_A^e(E_A) \quad \left([z + \underline{x}K_A] \to [z^q + \underline{x}^{[q]}K_A^{(q)}]\right)$$

とみなすことができる (詳しくは, [Wa3] を参照). よって,

$$\text{(3.2.1)} \qquad \mathrm{m}_{\mathrm{HK}}(A) = \liminf_{e\to\infty} l_A\left(\frac{z^qA + \underline{x}^{[q]}K_A^{(q)}}{\underline{x}^{[q]}K_A^{(q)}}\right) \Big/ q^d$$

である. さらに, Lemma 3.3 から, zt は $\mathrm{Soc}_B(E_B)$ を生成するから,

$$\text{(3.2.2)} \qquad \mathrm{m}_{\mathrm{HK}}(B) = \lim_{e\to\infty} l_A\left(\frac{z^qt^qB + \underline{x}^{[q]}B}{\underline{x}^{[q]}B}\right) \Big/ q^d$$

である. B は $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 次数付き環 (特に, $K_A^{(i+r)}t^{i+r} = K_A^{(i)}t^i$) だから, (3.2.2) より,

(3.2.3)
$$\mathrm{m}_{\mathrm{HK}}(B) = \sum_{i=0}^{r-1} \lim_{e\to\infty} l_A\left(\frac{z^q K_A^{(i)} + \underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)}}{\underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)}}\right) \Big/ q^d$$

であり, 必要ならば, $q \equiv 1 \pmod r$ をみたす q(p-巾) だけを考えてもよい.

各 i $(0 \le i \le r-1)$ に対して, 今, $0 \ne a_i \in K_A^{(i)}$ を取り, a_i 倍から導かれる次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to K_q & \longrightarrow & \dfrac{z^qA + \underline{x}^{[q]}K_A^{(q)}}{\underline{x}^{[q]}K_A^{(q)}} & \xrightarrow{a_i} & \dfrac{z^qK_A^{(i)} + \underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)}}{\underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)}} & \longrightarrow & C_q \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle inj.} & & \downarrow{\scriptstyle inj.} & & \downarrow \\
0 \to X_q & \longrightarrow & \dfrac{K_A^{(q)}}{\underline{x}^{[q]}K_A^{(q)}} & \xrightarrow{a_i} & \dfrac{K_A^{(i+q)}}{\underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)}} & \longrightarrow & Y_q \to 0
\end{array}$$

定理を証明するには, 次の Claim を言えばよい.

Claim. $\displaystyle\lim_{e\to\infty}\frac{l_A(K_q)}{q^d} = \lim_{e\to\infty}\frac{l_A(C_q)}{q^d} = 0.$

まず, $Y_q = K_A^{(i+q)}/(a_iK_A^{(q)} + \underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)}) \cong K_A^{(i+1)}/a_iK_A \otimes_A A/\underline{x}^{[q]}$ を考えると, $\dim K_A^{(i+1)}/a_iK_A \le d-1$ だから, $\displaystyle\lim_{e\to\infty}\frac{l_A(Y_q)}{q^d} = 0$ を得る. また, ($q \equiv 1 \pmod r$ に注意して)

$$\lim_{e\to\infty}\frac{l_A(K_A^{(q)}/\underline{x}^{[q]}K_A^{(q)})}{q^d} = \mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(\underline{x})\cdot \mathrm{rank}_A K_A = \mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(\underline{x})$$
$$\lim_{e\to\infty}\frac{l_A(K_A^{(i+q)}/\underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)})}{q^d} = \mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(\underline{x})\cdot \mathrm{rank}_A K_A^{(i+1)} = \mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(\underline{x})$$

より, $\displaystyle 0 \le \lim_{e\to\infty}\frac{l_A(K_q)}{q^d} \le \lim_{e\to\infty}\frac{l_A(X_q)}{q^d} = \lim_{e\to\infty}\frac{l_A(Y_q)}{q^d} = 0$ を得る. 一方,

$$\begin{aligned}
C_q &= \frac{z^qK_A^{(i)} + \underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)}}{a_iz^qA + \underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)}} = \frac{z^qK_A^{(i)}}{a_iz^qA + z^qK_A^{(i)} \cap \underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)}} \\
&= \frac{z^qK_A^{(i)}}{a_iz^qA + z^q[K_A^{(i)} \cap (\underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)} : z^q)]} \\
&= \frac{K_A^{(i)}}{a_iA + [K_A^{(i)} \cap (\underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)} : z^q)]}
\end{aligned}$$

ここで, $\mathfrak{m}^{[q]}K_A^{(i)} \subseteq K_A^{(i)} \cap (\underline{x}^{[q]}K_A^{(i+q)} : z^q)$ だから,

$$l_A(C_q) \leq l_A(K_A^{(i)}/a_iA + \mathfrak{m}^{[q]}K_A^{(i)}) = l_A(K_A^{(i)}/a_iA \otimes_A A/\mathfrak{m}^{[q]})$$

を得るが, 先と同様の理由で, $\lim\limits_{e\to\infty} \dfrac{\text{右辺}}{q^d} = 0$ ゆえ, Claim が言えた. (3.2.1) 及び (3.2.3) から, 求める主張が得られる. □

上記のような canonical cover B を持つような弱F正則な局所環は強F正則であることが知られている. また, A が強F正則ならば, B もそうである ([Wa3] 参照). 特に, B は Gorenstein である. Theorem 2.1 と Theorem 3.2 を合わせて, 次を得る.

Corollary 3.4. A を $\mathbb{Q}$-Gorenstein 弱F正則な局所整域とし, $r = \mathrm{ord}(\mathrm{cl}(K_A)) < \infty$ とおく. さらに, $(r, p) = 1$ と仮定するとき, $\mathrm{m_{HK}}(A) > 0$ である. 特に, $\mathrm{rel.\,m_{HK}}(A) > 0$ である.

4. Segre 積の minimal Hilbert-Kunz 重複度

最後に, 体 k 上の 2 つの多項式環の Segre 積 $A = R\#S = k[x_1, \ldots, x_r]\#k[y_1, \ldots, y_s]$ $(2 \leq r \leq s)$ の minimal Hilbert-Kunz 重複度の計算方法について触れておく.

R, S, A のそれぞれの斉次の極大イデアルを $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{M}$ とするとき, 次の事実が成り立つ.

Fact 4.1. ([GW])

(1) $\dim A = r + s - 1$.
(2) $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\#\mathfrak{n} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n \otimes S_n$.
(3) $K_A \cong K_R\#K_S$.
(4) $E_A = H_{\mathfrak{M}}^d(K_A) \cong k[x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}]\#k[y_1^{-1}, \ldots, y_s^{-1}]$.

E_A を (4) を通して見るとき, $z = 1\#1$ が E_A の socle を生成する. このとき, A の minimal Hilbert-Kunz 重複度は次の式と (1.6) を用いて計算できる.

Theorem 4.2.

$$\begin{aligned} &l_A(A/\mathrm{ann}_A(F_A^e(z))) \\ &= \#\left\{ (a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s) \in \mathbb{Z}^{r+s} \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq a_1, \ldots, a_r \leq q-1 \\ 0 \leq b_1, \ldots, b_s \leq q-1 \\ a_1 + \cdots + a_r = b_1 + \cdots + b_s \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Example 4.3. $A = k[x_1, x_2]\#k[y_1, \ldots, y_s]$ に対して, $\mathrm{m_{HK}}(A) = \dfrac{2^{s+1} - s - 2}{(s+1)!}$.

References

[BC] R. O. Buchweitz and Q. Chen, *Hilbert-Kunz Functions of Cubic Curves and Surfaces*, J. Algebra **197** (1997), 246–267.

[BCP] R. O. Buchweitz, Q. Chen and K. Pardue, *Hilbert-Kunz Functions*, Preprint (Feb.4, 1997 (Algebraic Geometry e-print series)).

[GW] S. Goto and K.-i. Watanabe, *On graded rings, I*, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 179–213.

[HH1] M. Hochster and C. Huneke, *Tight closure, invariant theory, and Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31–116.

[HH2] M. Hochster and C. Huneke, *Tight closure and strong F-regularity*, Mémoires de la Société Mathématique de France, numéro **38** (1989), 119–133.

[Hu] ———, *Tight Closure and Its Applications*, C.B.M.S. Regional Conf. Ser. in Math. No.88, American Mathematical Society, 1996.

[Ku1] E. Kunz, *Characterizations of regular local rings of characteristic p*, Amer. J. Math. **41** (1969), 772–784.

[Ku2] ———, *On Noetherian rings of characteristic p*, Amer. J. Math. **88** (1976), 999–1013.

[Mo] P. Monsky, *The Hilbert-Kunz function*, Math. Ann. **263** (1983), 43–49.

[PS] C. Peskine and L.Szpiro, *Dimension projective finie et cohomologie locale*, Publ. Math. IHES **42** (1973), 47–119.

[TW] M. Tomari and K.-I. Watanabe, *Normal Z_r-Graded Rings and Normal Cyclic Covers*, manuscripta math. **76** (1992), 325–340.

[V] A. Vraciu, *Tight closure and linkage classes in Gorenstein rings*, preprint (2001).

[Wa1] K.-I. Watanabe, *Certain invariant subrings are Gorenstein I*, Osaka J. Math **11** (1974), 1–8.

[Wa2] ———, *Certain invariant subrings are Gorenstein II*, Osaka J. Math **11** (1974), 379–388.

[Wa3] ———, *F-regular and F-pure normal graded rings*, J. of Pure and Applied Algebra **71** (1991), 341–350.

[Wa4] ———, *Hilbert-Kunz multiplicity – Many questions and very few answers*, 第 20 回可換環論シンポジウム報告集 (1998), 73–80.

[WY1] K.-I. Watanabe and K. Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity and an inequality between multiplicity and colength*, J. of Algebra **230** (2000), 295–317.

[WY2] ———, *Hilbert-Kunz multiplicity of two-dimensional local rings*, Nagoya Math.J. **162** (2001), 87–110.

[WY3] ———, *Hilbert-Kunz multiplicity, McKay correspondence and good ideals in two dimensional rational singularities*, Manuscripta Math. **104** (2001), 275–294.

[WY4] ———, *On minimal Hilbert-Kunz multiplicity*, (in preparation).

Kei-ichi Watanabe
Department of Mathematics
College of Humanities and Sciences, Nihon University
Setagaya-ku, Tokyo 156–0045, Japan
e-mail: `watanabe@math.chs.nihon-u.ac.jp`

and

Ken-ichi Yoshida
Graduate School of Mathematics, Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464–8602, Japan
e-mail: `yoshida@math.nagoya-u.ac.jp`

Index of Rationarity of cyclic quotient singularities

(豊泉　宏太・日本大学・総合基礎科学研究科)

1. 序.

graded ring の a-invariant は [GW] により定義され、非常に重要な不変量として様々なところで使われている。しかし、a-invariant は次数の付け方によって変わってしまう。最近の渡辺敬一氏の仕事により a-invariant の類似不変量として F-pure 正規局所環の不変量 index of rationarity $\alpha(A)$ が定義された。(これは、一般の正規局所環に拡張されると思われる。) この 2 つの不変量は、$R = k[R_1]$,F-pure ring で孤立特異点を持つときに一致する。今回の講演では、巡回商特異点の index of rationarity について考察する。

2. Index of rationality の定義と主結果.

まず、index of rationarity を定義する。

定義. $(A, \mathfrak{m})$ を F-finite normal local domain でその標数を $p > 0$ とする。

(1). D を $D = a\mathrm{div}_A(f)$ $(f \in A, a \in \mathbb{Q})$ の型の $\mathbb{Q}$-divisor とするとき、$\mathrm{ord}(D) := a\mathrm{ord}(f)$ と定義する。

(2). ([HW]) D を effective $\mathbb{Q}$-divisor とする。そのとき、(A,D) が F-pure とは、inclusion $i : A \longrightarrow A((q-1)D)^{\frac{1}{q}}$ が A-module homomorphism として split することである。

(3). (Index of Rationarity)

$$\alpha(A) := -\mathrm{Sup}\,\{\mathrm{ord}(D) | (A, D) \text{ が } F-\mathrm{pure}, \mathrm{Sing}(A) \subseteq (D\text{ の各成分})\}$$

現在まで、$\alpha(A)$ について次がわかっている。

(1) $\alpha(A) < 0 \Leftrightarrow A$ は strongly F-regular

(2) $\alpha(A) \geq -d$ かつ A が regular $\Leftrightarrow \alpha(A) < -d+1$

(3) ある整数 k に対して、$\alpha(A) < -k$ かつ　$J \subseteq \mathfrak{m}$ が、minimal reduction ならば、$\mathfrak{m}^{d-k} \subseteq J$

(4) $A = k[A_1]$ が F-pure graded ring で孤立特異点を持つならば、$a(A) = \alpha(A)$

(5) $A = \dfrac{k[X,Y,Z]}{(X^2+Y^3+Z^5)}$ のとき、$\alpha(A) = -1/6$

今回の講演の主結果は、次である。

定理. A を対角行列 $(e_n^{a_1},\cdots,e_n^{a_d})$ で生成される群 G(以下では、$\dfrac{1}{n}(a_1,\cdots,a_d)$ と略す。)の不変部分環とする。そのとき、

$$s=\min\left\{\sum_{i=1}^{k}a_i|a_i>0,(e_n^{a_1},\cdots,e_n^{a_k})\in G\right\}$$

とすると、$\alpha(A)\geq -\dfrac{s}{n}$.

特に、$d=2$ のとき、$\alpha(A)=-\dfrac{s}{n}$.

例. (1) $G\subset SL(2,k)$ のとき、$G=\left\{(e_n^a,e_n^b)|a+b\equiv 0 \bmod n\right\}$ となるので、$\alpha(A)=-1$.

(2) $G=\dfrac{1}{5}(1,2)$ のとき、$\alpha(A)=-\dfrac{3}{5}$.

(3) $G=\dfrac{1}{8}(1,5)$ のとき、$\alpha(A)=-\dfrac{4}{8}=-\dfrac{1}{2}$.

定理の等号は、$d\geq 3$ では不成立。例えば次の様な例がある。

(4) $G=\dfrac{1}{17}(1,11,13)$ のとき、$\alpha(A)=-\dfrac{11}{17}$. ところが、上述の最小和は、$8+3+2=13$ である。

証明のために、F-purity と toric ring に関しての結果を述べておく。

命題.([HW]) **(1)** (A,D) が F-pure のとき、$\lceil D\rceil$ が reduced divisor (すなわち、$\lceil D\rceil$ の既約成分の係数が 1 である。)。

(2) (A,D) が F-pure のとき、すべての effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor $D'\leq D$ に対して、(A,D') も F-pure。

(3) A が normal toric ring とし、D を reduced toric divisor とする。そのとき、(A,D) が F-pure。

上述の proposition により、次の D を考えればよい:

$$D=\sum E_i.\ \text{但し、各}\ E_i\text{は toric divisor で}\ E_i=V(A/\mathfrak{p}_i),\mathrm{ht}\mathfrak{p}_i=1.$$

今、(A,D) が F-pure であることと

$$i\otimes 1:E\longrightarrow E\otimes_A A((q-1)D)^{\frac{1}{q}}$$

が injective (E は A の injective envelope。) が同値という事実から、D (但し、$\lfloor (q-1)D\rfloor=\mathrm{div}_A(u)$, $u\in A$) に対して、(A,D) が F-pure であることと、$uz^q\notin K_A^{(q)}/\mathbb{X}^{[q]}K_A^{(q)}$, (但し、$z$ は $K_A/\mathbb{X}K_A$ の socle. 但し、$K_A^{(q)}=\left\{x_1^{b_1}\cdots x_d^{b_d}|b_i\geq q,\text{for all }i\right\}$.) が同値。cyclic quotient singularity の $K_A/\mathbb{X}K_A$ の socle は次で与えられる。

補題. A を simplicial toric ring とし、$\mathbb{X} := (x^{m_1}, \cdots, x^{m_d})$ を A の monomial sysyem of parameters とする (但し、$x^{m_i} = x_1^{m_{i1}} \cdots x_n^{m_{id}}$.)

そのとき、$K_A/\mathbb{X}K_A$ の socle は $z := x^{m_1+\cdots+m_d}$ により生成される。

証明. $\sigma = \sum_{i=1}^d \mathbb{R}_{\geq 0} m_i$ を環 A に対応する cone とする。$\tau = \sum_{i=1}^d \mathbb{R}_{\geq 0} n_i$ を σ の dual cone とする。そのとき、$< m_j, n_i >= 0$ for all i $\neq$ j なので $< \sum_{j\neq i} m_j, n_i >= 0$ である。今、$K_A = \{x^c | c \in \mathbb{Z}^n,\ < c, n_i >> 0 \text{ for all i}\}$ なので、$\dfrac{z}{x^{m_i}} = x^{\sum_{j\neq i} m_j} \notin K_A$. また、$y = x^a \in \mathfrak{m}_A$ とおくと、$<a, n_i> > 0$ for some i.

したがって、$y\dfrac{z}{x^{m_i}} \in K_A$, すなわち、$\mathfrak{m}_A z \subseteq (\mathbb{X})K_A$. よって、$z$ は socle の生成元となる。(証明終.)

定理の証明. $\lfloor (q-1)D \rfloor = \mathrm{div}_A(u),\ u \in A)$ とする。また、この場合 $\mathbb{X} = (x_1^n, \cdots, x_d^n)$ が A の s.o.p となる。このとき、補題により $K_A/\mathbb{X}K_A$ の socle は $z = \Pi_{i=1}^d x_i^n$ となる。$u := \Pi_{i=1}^d x_i^{b_i}$ とおくと、$uz^q \notin K_A^{(q)}/\mathbb{X}^{[q]}K_A^{(q)}$ と $b_i \leq q-1$ for all i は同値。よって、次のような u の分解 $u = x^{m_1} \cdots x^{m_{N_q}}$ を考える。$x^{m_i} \in A$ でかつ N_q は最大。但し、ここで x^{m_i} は multi index である。このとき、$\alpha(A) = -\lim_{q\to\infty} \dfrac{N_q}{q}$ となる。今、$(e_n^{a_1}, \cdots, e_n^{a_d}) \in G$ から 各 $x^{m_i} \in A$ なので $\sum_{i=1}^d a_j m_{ij} = c_i n$, for all i, $c_j \in \mathbb{Z}$, for all j となる。また、$\sum_{i=1}^{N_q} m_{ij} \leq q-1$, for all j となる。そのとき、

$$nN_q \leq n\sum_{i=1}^{N_q} c_i \leq \sum_{i=1}^{N_q}\sum_{j=1}^{d} a_j m_{ij} \leq (q-1)\sum_{j=1}^{d} a_j.$$

したがって、

$$N_q \leq \frac{(q-1)\sum_{i=1}^d a_j}{nq}.$$

よって、両辺を q で割って q で limit をとると、

$$-\alpha(A) = \lim_{q\to\infty}\frac{N_q}{q} \leq \lim_{q\to\infty}\frac{(q-1)\sum_{j=1}^d a_j}{nq} = \frac{\sum_{j=1}^d a_j}{n}.$$

すなわち、

$$\alpha(A) \geq -\frac{\sum_{j=1}^d a_j}{n}.$$

$d = 2$ の等号については、次節で示す。 (証明終)

3. 2次元について

$d = 2$ について示すために環 A の maximal ideal によりつくられる図形を定義する。$\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ を strongly convex rational polyhedral cone とし、τ をその dual cone で、$A = k[\tau \cap \mathbb{Z}^2]$ となるものとする。また、$\mathfrak{m} := \{x^{r_i}y^{s_i} |\ n := r_0 > r_1 > \cdots > r_m = 0,\ 0 := s_0 < s_1 < \cdots < s_m = n.\}$ を $\mathfrak{m}$ の minimal generater とする。そのとき、環 A に対して次のような図形が定義できる。

定義. $P(A) := \cup_{i=0}^{m}\left\{\overline{P_iP_{i+1}}|P_i = (r_i, s_i)\right\}$ とおく。また、Ver(P(A)) を $P(A)$ の頂点集合とする。

例. $G := \frac{1}{8}(1,5)$ とする。そのとき、

$$P(A) = l_1 \cup l_2 \cup l_3,$$

$$\begin{aligned} \text{但し、} l_1 &= \{(x,y)|x+5y=8, \text{但し、} 0 \leq x \leq 1\}, \\ l_2 &= \{(x,y)|2x+2y=8, \text{但し、} 1 \leq x \leq 3\}, \\ l_3 &= \{(x,y)|5x+y=8, \text{但し、} 3 \leq x \leq 8\}. \end{aligned}$$

$$\mathrm{Ver(P(A))} = \{(8,0),(3,1),(1,3),(0,8)\},$$

次に巡回群 $G = \frac{1}{n}(1,l)$ について同様の図形を定義する。まず、G の primitive element を定義する。

定義. $G = \frac{1}{n}(1,l)$ とする。そのとき、(e_n^a, e_n^b) が G の primitive element とは、どんな、$(e_n^{a'}, e_n^{b'}), (e_n^{a''}, e_n^{b''}) \in G$ に対しても、$(a,b) = (a',b') + (a'',b'')$ とあらわせないものをいう。

いま、$\{(u_i,v_i)|(e_n^{u_i}, e_n^{v_i} \in G,\ (e_n^{u_i}, e_n^{v_i})$ は G の primitive element.$\} \cup \{(n,0),(0,n)\}$, 但し、$u_0 > u_1 > \cdots > u_t = 1,\ 1 =: v_0 > v_1 > \cdots > v_t := l$. そしてそのとき、$G$ の primitive element に関する図形を次のように定義する。

定義. $P(G) := \cup_{i=0}^{t}\left\{\overline{Q_iQ_{i+1}}|Q_i = (u_i, v_i)\right\}$.

次を注意しておく。

注. $P(G) \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ は G の primitive element からなる集合である。また、明らかに $P(A)$, $P(G)$ はいくつかの半直線の和集合である。

そのとき、$P(G) = P(k[x,y]^{1/n(1,l')})$ が成り立つ。但し、$(n-l)l' \equiv 1 \bmod \mathrm{n}$.

なぜなら、任意の $(e_n^a, e_n^b) \in G$ に対して、$x^{(n-l)}y \in A$ なので、$a(n-l)+b \equiv 0 \bmod \mathrm{n}$. また、$(n-l)l' \equiv 1 \bmod \mathrm{n}$ に対して $k[x,y]^{1/n(1,n-l)} \cong k[x,y]^{1/n(1,l')}$ が成り立つので、$P(G) \cong P(k[x,y]^{1/n(1,l')})$.

このとき、$d=2$ のときの等号を示すために、$P(A)$ の半直線 $ax+by=n$ と $\mathrm{VerP(G)} \cup \left\{(1,\mathrm{f}),(\mathrm{g},1)|(\mathrm{e_n},\mathrm{e_n^f}),(\mathrm{e_n^g},\mathrm{e_n}) \in \mathrm{G}\right\}$ の元 (すなわち、$P(G) = P(k[x,y]^{1/n(1,l')})$ の頂点)(a,b) が一対一対応すること示す。

また、$(n-l)l' \equiv 1 \bmod \mathrm{n}$ に対して $k[x,y]^{1/n(1,n-l)} \cong k[x,y]^{1/n(1,l')}$ なので、$G := \frac{1}{n}(1,l)$ と $G' := \frac{1}{n}(1,n-l)$ の対応を見ればよい。

以下でこの対応を見るために、準備をする。

n, l を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の元で $(n,l)=1$ とする。そのとき、2つの分数 $\frac{n}{l}, \frac{n}{n-l}$ の連分数について考察する。まず、

$$\frac{n}{l} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - \cdots - \cfrac{1}{b_r}}} =: [[b_1, b_2, b_3, \cdots, b_r]], (b_\nu \geq 2),$$

$$\frac{n}{n-l} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \cdots - \cfrac{1}{a_e}}} =: [[a_1, a_2, a_3, \cdots, a_e]], (a_\mu \geq 2)$$

をそれぞれ $\frac{n}{l}, \frac{n}{n-l}$ の連分数展開とする。そのとき、非負整数の組 (i_μ, j_μ, k_μ) $(\mu = 0, 1, \cdots, r+1), (\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu)$ $(\nu = 0, 1, \cdots, e+1)$ を次で定義する。

$$\begin{cases} (i_0, j_0, k_0) = (n, 0, 1),\ (i_1, j_1, k_1) = (l, 1, 1), \\ (i_{\mu+1}, j_{\mu+1}, k_{\mu+1}) := b_\mu(i_\mu, j_\mu, k_\mu) - (i_{\mu-1}, j_{\mu-1}, k_{\mu-1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = (n, 0, 1),\ (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (l, 1, 1), \\ (\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}, \gamma_{\nu+1}) := a_\nu(\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu) - (i_{\mu-1}, j_{\mu-1}, k_{\mu-1}) \end{cases}$$

そのとき、$a_\nu, b_\mu \geq 2$ より次が云える。

$$\begin{cases} i_0 > i_1 > \cdots > i_{r+1} = 0, & \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_{e+1} = 0, \\ j_0 < j_1 < \cdots < j_{r+1} = n, & \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_{e+1} = n, \\ k_0 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_{r+1} = n-l, & \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_{e+1} = l \end{cases}$$

μ, ν に関する帰納法により次を得る。

$$\begin{cases} i_\mu + (n-l)j_\mu = nk_\mu, & \alpha_\nu + l\beta_\nu = n\gamma_\nu, \\ i_{\mu-1}j_\mu - i_\mu j_{\mu-1} = n, & \alpha_{\nu-1}\beta_\nu - \alpha_\nu\beta_{\nu-1} = n, \\ k_{\mu-1}j_\mu - k_\mu j_{\mu-1} = 1, & \gamma_{\nu-1}\beta_\nu - \gamma_\nu\beta_{\nu-1} = 1, \end{cases}$$

これにより、

$$x^{i_\mu}y^{j_\mu} \in k[x,y]^{G'},\ x^{\alpha_\nu}y^{\beta_\nu} \in A = k[x.y]^G.$$

そのとき、2つの連分数 $\frac{n}{l}, \frac{n}{n-l}$ に関して次の様な duality が存在する。これは、木藤氏による。

定理. ([K]) 次の様な正整数 c_i, d_i が存在する。

$$\frac{n}{l}=[[d_1+1,\underbrace{2,\cdots,2}_{c_1-1},d_2+2,\cdots,d_{m-1}+2,\underbrace{2,\cdots,2}_{c_{m-1}-1},d_m+2,\underbrace{2,\cdots,2}_{c_m-1}]],$$

$$\frac{n}{n-l}=[[\underbrace{2,\cdots,2}_{d_1-1},c_1+2,\underbrace{2.\cdots,2}_{d_2-1},c_2+2,\cdots,c_{m-1}+2,\underbrace{2,\cdots,2}_{d_m-1},c_m+1]].$$

次の定理の前にいくつかの定義をする。

$$\frac{n}{l}=[[d_1+1,\underbrace{2,\cdots,2}_{c_1-1},d_2+2,\cdots,d_{m-1}+2,\underbrace{2,\cdots,2}_{c_{m-1}-1},d_m+2,\underbrace{2,\cdots,2}_{c_m-1}]]$$

を $\frac{n}{l}$ の連分数展開とする。そのとき、

$$\mu(\lambda):=1+\sum_{j=0}^{\lambda}c_j,\quad \nu(\lambda):=\sum_{j=0}^{\lambda}d_j, \text{但し、} c_0:=0, d_0=0.$$

更に、次の様な正整数を定義する。

$$\begin{aligned}
i(\mu)&:=i_{\mu-1}-i_\mu,\quad j(\mu):=j_\mu-j_{\mu-1},\quad (1\le\mu\le\mu(m)),\\
\alpha(\nu)&:=\alpha_{\nu-1}-\alpha_\nu,\quad \beta(\nu):=\beta_\nu-\beta_{\nu-1},\quad (1\le\nu\le\nu(m)-1).
\end{aligned}$$

そのとき、次が成り立つ。

定理. [K]
(1) $i(1)=\alpha_1,\quad j(1)=\beta_1,$
(2) $i(\mu)=\alpha_{\nu(\lambda+1)},\quad j(\mu)=\beta_{\nu(\lambda)}, \text{for } 1\le\lambda\le \mathrm{m}-1 \text{and } \mu(\lambda)+1\le\mu\le\mu(\lambda+1),$
(3) $\alpha(\nu(m)+1)=i_{\mu(m)-1},\quad \beta(\nu(m)+1)=j_{\mu(m)-1},$
(4) $\alpha(\nu)=i_{\mu(\lambda)},\quad \beta(\nu)=j_{\mu(\lambda)} \text{ for } 0\le\lambda\le \mathrm{m}-1 \text{and } \nu(\lambda)+1\le\nu\le\nu(\lambda+1).$

λ 番目の半直線 $P_\lambda P_{\lambda+1}$ と λ 番目の頂点 $Q_\lambda=(i_{\mu(\lambda)},j_{\mu(\lambda)})$ を見る。(4) によりこの半直線 $P_\lambda P_{\lambda+1}$ の方向ベクトルは $(i_{\mu(\lambda)},j_{\mu(\lambda)})$ となる。また、(2) より

$$\begin{aligned}
&i_{\mu(\lambda)}\beta_{\nu(\lambda)}+j_{\mu(\lambda)}\alpha_{\nu(\lambda)}\\
&=i_{\mu(\lambda)}(j_{\mu(\lambda)}-j_{\mu(\lambda-1)})+j_{\mu(\lambda)}(i_{\mu(\lambda-1)}-i_{\mu(\lambda)}\\
&=j_{\mu(\lambda)}i_{\mu(\lambda-1)}-i_{\mu(\lambda)}j_{\mu(\lambda-1)}=n.
\end{aligned}$$

[d=2 のときの証明.]
今の結果から $P(A)$ 内の全ての半直線は、$ax+by=n$ とかける。但し、$(e_n^a,e_n^b)\in G$. よって、次の様な半直線 $\{(x,y)|ax+by=n\}$ が存在する。

$$\{(x,y)|ax+by=n\}\cap P(A)\cap\{y=x\}\neq\phi$$

このとき、定理の証明の $a_1 = a, a_2 = b$ ととる。更に、u としてこの半直線の端点をとってやれば、定理の不等号は全て等号となり $d = 2$ の等号が示せたことになる。

２章の定理の証明により、一般の d についても $\{x_1 = x_2 = \cdots = x_d\}$ と交わる $P(A) \cap \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ の平面が問題になる。

4. $d \geq 3$ についての注意

最初に先程の $d = 3$ のときの反例 (4) について注意しておく。$G = \frac{1}{17}(1, 11, 13)$ に対して、$\{x = y = z\} \cap \{7x + 9y + 6z = 34\} \cap P(A) \neq \phi$ となる。そして、u として xy^3, x^4z, xyz^3 の冪の積をとると、$\alpha(A) = -\frac{7+9+2}{34} = -\frac{11}{17}$ となる。

反例についてはこれしか知らないが、たくさんあると思われる。

今、P(A) 内の図形 Z で $Z = \left\{\sum_{i=1}^d a_i x_i = c\right\} \cap P(A)$ となるものを $P(A)$ の成分と呼ぶことにする。

例. $G = \frac{1}{5}(1, 2, 3)$ とする。そのとき、$P(A)$ の成分は

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{x + 2y + 3z = 5\} \cap P(A), \\ Z_2 &= \{2x + 4y + z = 5\} \cap P(A), \\ Z_3 &= \{3x + y + 4z = 5\} \cap P(A). \end{aligned}$$

上述の例により、$\alpha(A)$ は $P(A)$ の直線 $\{x_1 = x_2 = \cdots = x_d\}$ と交わる $P(A)$ の成分が問題になってくる。これと２章での定理の証明により $d \geq 3$ について次の様な予想がたつが証明は知らない。

予想.　直線 $\{x_1 = x_2 = \cdots = x_d\}$ と交わる $P(A)$ 内の半平面

$$\left\{\sum_{i=1}^d a_i x_i = cn \mid c \in \mathbb{N}\ (e_n^{a_1}, \cdots, e_n^{a_d}) \in G = \frac{1}{n}(a_1, \cdots, a_d)\right\}$$

が存在する。そのとき、$\alpha(A) = -\frac{\sum_{i=1}^d a_i}{cn}$.

Reference.

[GW] S.Goto and K-i Watanabe, On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.

[HW] N.Hara and K-i.Watanabe, F-regular and F-pure Rings vs. Log-terminal and Log-canonical Singularuties, to appear in J. of Alg. Geom.

[K] R.Kidoh, Hilbert scheme and cyclic quotient surface singularities, Hokkaido Mathematical Journal 30 (2001), 91-103.

CORRESPONDENCE OF MULTIPLIER IDEALS AND GEOMETRIC TEST IDEALS

SHUNSUKE TAKAGI

1. Introduction

Recently it turned out that there exists a relation between multiplier ideals and tight closure. Precisely speaking, it was proved that some algebraic statements established by multiplier ideals could also be understood via tight closure, for example, Briançon-Skoda theorem (see [BS], [HH1], [La]), the problem concerning the growth of symbolic powers of ideals in regular local rings (see [ELS], [HH3]), etc. The purpose of this paper is to give an interpretation of multiplier ideals via tight closure.

The theory of tight closure was introduced by Hochster and Huneke [HH1], using the Frobenius map in characteristic $p > 0$. In this theory, test ideals play a central role. On the other hand, multiplier ideals, for which we have the strong vanishing theorem, are fundamental tools in birational geometry. Hara [Ha3] and Smith [Sm] independently proved that in a normal $\mathbb{Q}$-Gorenstein ring of characteristic $p \gg 0$, the test ideal coincides with the multiplier ideal associated to the trivial divisor. Since the real worth of multiplier ideals is displayed in considering pairs, we attempt to extend this result for a pair (R, Δ) of a normal ring R and an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor Δ on $\operatorname{Spec} R$.

2. multiplier ideal

First we recall the definition of multiplier ideals.

Notation. Let R be a normal domain with quotient field K. A $\mathbb{Q}$-Weil divisor D on $Y = \operatorname{Spec} R$ is a linear combination $D = \sum_{i=1}^{r} a_i D_i$ of irreducible reduced subschemes $D_i \subset Y$ of codimension 1 with rational coefficients a_i. The round-up and round-down of D is defined by $\lceil D \rceil = \sum_{i=1}^{r} \lceil a_i \rceil D_i$ and $\lfloor D \rfloor = \sum_{i=1}^{r} \lfloor a_i \rfloor D_i$. We also denote

$$R(D) = \{x \in K \mid \operatorname{div}_R(x) + D \geq 0\}.$$

Definition 2.1. Let R be a normal domain essentially of finite type over a field of characteristic zero and Δ be a $\mathbb{Q}$-Weil divisor on $Y = \operatorname{Spec} R$ such that $K_Y + \Delta$ is $\mathbb{Q}$-Cartier, where K_Y is the canonical divisor of Y. Let $f : X \to \operatorname{Spec} R$ be a resolution of singularities such that $\mathrm{Exc}(f) + f_*^{-1}\Delta$ has simple normal crossing support, where $\mathrm{Exc}(f)$ is the exceptional divisor of f and $f_*^{-1}\Delta$ is the strict transform of Δ.

(1) The *multiplier ideal* associated to Δ is then defined to be

$$\mathcal{J}(Y, \Delta) = H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X - f^*(K_Y + \Delta)\rceil)).$$

(2) We say that (Y, Δ) is *Kawamata log terminal* (or *klt* for short) if $\mathcal{J}(Y, \Delta) \supseteq R$.

Remark. (i) The above definitions do not depend on the choice of a desingularization $f : X \to Y$.

(ii) When Δ is effective, $\mathcal{J}(Y, \Delta)$ is indeed an ideal sheaf. However in case Δ is possibly ineffective, it is generally not a submodule of R but a fractional ideal sheaf.

Example 2.2. (1) When R is regular and Δ is any $\mathbb{Q}$-Weil divisor on $Y = \operatorname{Spec} R$ with simple normal crossing support, then $\mathcal{J}(Y, \Delta) = R(-\lfloor\Delta\rfloor)$.

(2) Let $Y = \mathbb{C}^n$ with coordinates $x_1, \ldots, x_n$ and $\Delta = \mathrm{div}_Y(x_1^{d_1} + \cdots + x_n^{d_n})$. Then, $(Y, t\Delta)$ is klt if and only if $\min\{1, \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i}\} > t$.

(3) Let $Y = \mathbb{C}^d$ with coordinates $x_1, \ldots, x_d$ and $\Delta = \mathrm{div}_Y(x_1^{d+1} + \cdots + x_d^{d+1})$. Then, $\mathcal{J}(Y, \frac{d}{d+1}\Delta) = (x_1, \ldots, x_d)$.

The following propositions are the most important local properties of multiplier ideals.

Proposition 2.3 ([DEL]). *(1) (Restriction Theorem) Let Y be a normal Cohen-Macaulay quasi-projective variety, Δ an effective divisor on Y such that $K_Y + \Delta$ is $\mathbb{Q}$-Cartier, and H a normal irreducible Cartier divisor which is not in the support of Δ. Then*

$$\mathcal{J}(H, \Delta|_H) \subseteq \mathcal{J}(Y, \Delta) \cdot \mathcal{O}_H.$$

(2) (Subadditivity Theorem) Let Y be a smooth quasi-projective variety, and Δ_1 and Δ_2 be any two effective $\mathbb{Q}$-divisors on Y. Then

$$\mathcal{J}(Y, \Delta_1 + \Delta_2) \subseteq \mathcal{J}(Y, \Delta_1) \cdot \mathcal{J}(Y, \Delta_2).$$

Proof. (1) Let $f : X \to Y$ be a resolution of singularities such that $f^*(K_Y + \Delta + H) + \mathrm{Exc}(f)$ has simple normal crossing support. Put $f^*H = \tilde{H} + \sum a_j E_j$, where $\tilde{H}$ is the strict transform of H, E_j's are irreducible reduced exceptional divisors of f and a_j's are non-negative integers. By the definition of multiplier ideals,

$$\mathcal{J}(Y, \Delta) = f_*\mathcal{O}_X(\lceil K_X - f^*(K_Y + \Delta)\rceil)$$
$$\mathcal{J}(H, \Delta|_H) = f|_{\tilde{H}*}\mathcal{O}_{\tilde{H}}(\lceil K_{\tilde{H}} - f|_{\tilde{H}}{}^*(K_H + \Delta|_H)\rceil)$$

Thanks to adjunction formula,

$$K_{\tilde{H}} = (K_X + \tilde{H})|_{\tilde{H}}, \quad K_H = (K_Y + H)|_H.$$

Therefore,

$$K_{\tilde{H}} - f|_{\tilde{H}}{}^*(K_H + \Delta|_H) = (K_X - f^*(K_Y + \Delta) - \sum a_j E_j)|_{\tilde{H}}.$$

Since $f^*(K_Y + \Delta + H) + \mathrm{Exc}(f)$ has simple normal crossing support,

$$\lfloor f|_{\tilde{H}}{}^*(K_H + \Delta|_H) \rfloor = \lfloor f^*(K_Y + \Delta + H) \rfloor|_{\tilde{H}}.$$

Let $B := \lceil K_X - f^*(K_Y + \Delta) - \sum a_j E_j \rceil$. Since $B|_{\tilde{H}} = \lceil K_{\tilde{H}} - f|_{\tilde{H}}{}^*(K_H + \Delta|_H) \rceil$, $\mathcal{J}(H, \Delta|_H) = f|_{\tilde{H}*}\mathcal{O}_{\tilde{H}}(B|_{\tilde{H}})$. Hence it suffices to show that

$$f|_{\tilde{H}*}\mathcal{O}_{\tilde{H}}(B|_{\tilde{H}}) = f_*\mathcal{O}_X(B) \cdot \mathcal{O}_H.$$

Now we consider the following exact sequence.

$$0 \to \mathcal{O}_X(B - \tilde{H}) \to \mathcal{O}_X(B) \to \mathcal{O}_{\tilde{H}}(B|_{\tilde{H}}) \to 0.$$

Since $B - \tilde{H} = \lceil K_X - f^*(K_Y + \Delta + H) \rceil$, by local vanishing [La, Theorem 4.2], $R^1 f_*\mathcal{O}_X(B - \tilde{H}) = 0$. Thus the map $f_*\mathcal{O}_X(B) \to f|_{\tilde{H}*}\mathcal{O}_{\tilde{H}}(B|_{\tilde{H}})$ is surjective, that is, $f|_{\tilde{H}*}\mathcal{O}_{\tilde{H}}(B|_{\tilde{H}}) = f_*\mathcal{O}_X(B) \cdot \mathcal{O}_H$.

(2) We use the following claim.

Claim. Let Y_1 and Y_2 be non-singular quasi-projective varieties and Δ_1 and Δ_2 effective $\mathbb{Q}$-divisors on Y_1 and Y_2 respectively. Let $p_1 : Y_1 \times Y_2 \to Y_1$ and $p_2 : Y_1 \times Y_2 \to Y_2$ be the first projection and second projection respectively. Then

$$\mathcal{J}(Y_1 \times Y_2, p_1{}^*D_1 + p_2{}^*D_2) = p_1{}^{-1}\mathcal{J}(Y_1, D_1) \cdot p_2{}^{-1}\mathcal{J}(Y_2, D_2).$$

Proof of claim. Let $\mu_i : X_i \to Y_i$ be resolutions of singularities such that $\mu_i{}^*D_i + \mathrm{Exc}(\mu_i)$ has simple normal crossing support for $i = 1, 2$. Then, putting $X := X_1 \times X_2$, $Y := Y_1 \times Y_2$ and $D := p_1{}^*D_1 + p_2{}^*D_2$, $\mu := \mu_1 \times \mu_2 : X \to Y$ is a desingularization such that $\mu^*D + \mathrm{Exc}(\mu)$ has simple normal crossing support. Hence

$$\mathcal{J}(Y_1 \times Y_2, p_1{}^*D_1 + p_2{}^*D_2) = \mu_*\mathcal{O}_X(\lceil K_X - \mu^*(K_Y + D) \rceil).$$

Let $q_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ be projections for $i = 1, 2$.

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xleftarrow{q_1} & X = X_1 \times X_2 & \xrightarrow{q_2} & X_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_1} & & \downarrow{\scriptstyle \mu = \mu_1 \times \mu_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_2} \\ Y_1 & \xleftarrow{p_1} & Y = Y_1 \times Y_2 & \xrightarrow{p_2} & Y_2 \end{array}$$

Note that

$$\lfloor \mu^*D \rfloor = \lfloor q_1{}^*\mu_1{}^*D_1 \rfloor + \lfloor q_2{}^*\mu_2{}^*D_2 \rfloor = q_1{}^*\lfloor \mu_1{}^*D_1 \rfloor + q_2{}^*\lfloor \mu_2{}^*D_2 \rfloor.$$

Since $K_X - \mu^*K_Y = q_1{}^*(K_{X_1} - \mu_1{}^*K_{Y_1}) + q_2{}^*(K_{X_2} - \mu_2{}^*K_{Y_2})$,

$$\lceil K_X - \mu^*(K_Y + D) \rceil = q_1{}^*(\lceil K_{X_1} - \mu_1{}^*(K_{Y_1} + D_1) \rceil) + q_2{}^*(\lceil K_{X_2} - \mu_2{}^*(K_{Y_2} + D_2) \rceil).$$

Therefore, by the flat base change theorem,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}(Y_1 \times Y_2, {p_1}^*D_1 + {p_2}^*D_2)\\
=&\mu_*({q_1}^*\mathcal{O}_{X_1}(\lceil K_{X_1} - {\mu_1}^*(K_{Y_1} + D_1)\rceil) \otimes {q_2}^*\mathcal{O}_{X_2}(\lceil K_{X_2} - {\mu_2}^*(K_{Y_2} + D_2)\rceil))\\
=&{p_1}^*\mu_{1*}\mathcal{O}_{X_1}(\lceil K_{X_1} - {\mu_1}^*(K_{Y_1} + D_1)\rceil) \otimes {p_2}^*\mu_{2*}\mathcal{O}_{X_2}(\lceil K_{X_2} - {\mu_2}^*(K_{Y_2} + D_2)\rceil)\\
=&{p_1}^*\mathcal{J}(Y_1, D_1) \otimes {p_2}^*\mathcal{J}(Y_2, D_2)\\
=&{p_1}^{-1}\mathcal{J}(Y_1, D_1) \cdot {p_2}^{-1}\mathcal{J}(Y_2, D_2)
\end{aligned}$$

□

Let $\rho : Y = \Delta \hookrightarrow Y \times Y$ be a diagonal embedding. Since Y is non-singular, ρ is a complete intersection. Therefore it follows from the repeated application of the restriction theorem that

$$\mathcal{J}(Y, D_1 + D_2) = \mathcal{J}(\Delta, ({p_1}^*D_1 + {p_2}^*D_2)|_\Delta) \subseteq \mathcal{J}(Y \times Y, {p_1}^*D_1 + {p_2}^*D_2) \cdot \mathcal{O}_\Delta.$$

By the above claim, $\mathcal{J}(Y \times Y, {p_1}^*D_1 + {p_2}^*D_2) \cdot \mathcal{O}_\Delta = \mathcal{J}(Y, D_1) \cdot \mathcal{J}(Y, D_2)$, which establishes the assertion. □

3. F-singularities of pairs and Δ-tight closure

First we briefly review the definition of "F-singularities of pairs." Let R be an integral domain of characteristic $p > 0$ and $F : R \to R$ the Frobenius map which sends x to x^p. Since R is reduced, we can identify $F : R \to R$ with the natural inclusion map $R \hookrightarrow R^{1/p}$. R is called *F-finite* if $R \hookrightarrow R^{1/p}$ is a finite map.

Definition 3.1 ([HW]). Let R be an F-finite normal domain of characteristic $p > 0$ and Δ an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor on $\operatorname{Spec} R$. Then (R, Δ) is said to be *strongly F-regular* if for every nonzero element $c \in R$, there exists $q = p^e$ such that $c^{1/q}R \hookrightarrow R((q-1)\Delta)^{1/q}$ splits as an R-module homomorphism.

Hara generalized the notion of tight closure to that for pairs, which is called Δ-tight closure. Using the Δ-tight closure operation, we introduce the geometric test ideal for pairs which is a generalization of the notion of test ideal.

Definition 3.2 (Hara). Let R be an F-finite normal domain of characteristic $p > 0$ and Δ an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor on $\operatorname{Spec} R$.

(1) Let M be an R-module. Then, the *Δ-tight closure* $0_M^{*\Delta} \subseteq M$ of the zero submodule in M is defined as follows: $z \in 0_M^{*\Delta}$ if and only if there exists a nonzero element $c \in R$ such that $cz^q := cF^e(z) = z \otimes c = 0$ in $M \otimes_R {}^eR((q-1)\Delta)$ for all $q = p^e \gg 0$, where the notation ${}^eR((q-1)\Delta)$ denotes $R((q-1)\Delta)$ itself, but viewed as an R-module via the e-times Frobenius map $F^e : R \to R((q-1)\Delta)$.

(2) When $(R, \mathfrak{m})$ is local, then the *geometric test ideal* $\tau(R, \Delta)$ of R is defined to be $\tau(R, \Delta) := \operatorname{Ann}_R(0_{E_R}^{*\Delta})$, where E_R is the injective hull of the residue field $R/\mathfrak{m}$.

When $\Delta = 0$ and R is $\mathbb{Q}$-Gorenstein, the geometric test ideal coincides with the "usual" test ideal which is generated by (Δ-)test elements. However even if $K_Y + \Delta$ is $\mathbb{Q}$-Cartier, the geometric test ideal may not be generated by "Δ-test elements."

It is easy to see that the Δ-tight closure operation satisfies properties similar to those of the "usual" tight closure operation. Here we only give the following lemma, which is easily proved by the same arguement as in [Ha1, Proposition 2.1].

Lemma 3.3. *Let $(R, \mathfrak{m})$ be an F-finite normal local ring of characteristic $p > 0$ and Δ an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor on* $\operatorname{Spec} R$. *Then (R, Δ) is strongly F-regular if and only if $\tau(R, \Delta) = R$.*

Proof. Assume that (R, Δ) is strongly F-regular. If $z \in 0_E^{*\Delta}$, then there exists a nonzero element $c \in R$ such that $cF^e(z) = 0$ for all $q = p^e \gg 0$. Let

$$\phi_c^{(e)} : \operatorname{Hom}_R(R((q-1)\Delta)^{1/q}, R) \to \operatorname{Hom}_R(R, R) = R$$

be an R-module homomorphism induced by the R-linear map $R \xrightarrow{c^{1/q}} R((q-1)\Delta)^{1/q}$ for each $q = p^e$. Since (R, Δ) is strongly F-regular, $\phi_c^{(e)}$ is surjective for all $q = p^e \gg 0$. Since the R-module homomorphism $cF^e : E \to E \otimes_R {}^eR((q-1)\Delta)$ which sends z to cz^q is the Matlis dual of $\phi_c^{(e)}$, cF^e is injective for every $q = p^e \gg 0$. Hence $z = 0$. Conversely, suppose that $0_E^{*\Delta} = 0$, and fix any nonzero element $c \in R$. If z is a nonzero element of the socle $(0 : \mathfrak{m})_E$ of E, then there exists $q = p^e$ such that $cF^e(z) \neq 0$. Since $(0 : \mathfrak{m})_E$ is an one-dimensional $R/\mathfrak{m}$-vector space, we can take q which works for every $z \in (0 : \mathfrak{m})_E$. Then cF^e is injective on $(0 : \mathfrak{m})_E$. Since E is an essential extension of $(0 : \mathfrak{m})_E$, cF^e itself is injective. Taking the Matlis dual of cF^e, $\phi_c^{(e)}$ is surjective, namely (R, Δ) is strongly F-regular. $\square$

Example 3.4. (1) When R is a regular local ring and Δ is an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor with simple normal crossing support, then $\tau(R, \Delta) = R(-\lfloor \Delta \rfloor)$.

(2) Let $R = k[[x_1, \dots, x_n]]$ be an n-dimensional complete regular local ring over a field k of characteristic $p > 0$ and $\Delta = \operatorname{div}_R(x_1^{d_1} + \cdots + x_n^{d_n})$. Assume that p is sufficiently large and let $t_0 = \min\{1, \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i}\}$. Then, $(R, t\Delta)$ is strongly F-regular if and only if $t < t_0$.

(3) Let $R = k[[x_1, \dots, x_d]]$ be a d-dimensional complete regular local ring over a field k of characteristic $p > 0$ and $\Delta = \operatorname{div}_R(x_1^{d+1} + \cdots + x_d^{d+1})$. If the characteristic $p > d + 1$, then $\tau(R, \frac{d}{d+1}\Delta) = (x_1, \dots, x_d)$.

The Restriction Theorem and Subadditivity Theorem for "$\mathfrak{a}$-test ideals" are informed to the author by Hara [HY]. The following result which corresponds to Proposition 2.3 are obtained by entirely the same argument as [HY]'s.

Proposition 3.5 (cf. [HY]). *(1) (Restriction Theorem) Let $(R, \mathfrak{m})$ be a complete $\mathbb{Q}$-Gorenstein Cohen-Macaulay normal local ring of characteristic $p > 0$*

and Δ *an effective* $\mathbb{Q}$*-Cartier divisor on* $\operatorname{Spec} R$*, that is,* $r\Delta = \operatorname{div}_R(y)$ *for some positive integer* r *and nonzero element* $y \in R$*. Let* $x \in R$ *be a nonzero divisor such that* R/xR *is normal and* $y \notin xR$*. Then, letting* $S := R/xR$*,*

$$\tau(S, \Delta|_{\operatorname{Spec} S}) \subseteq \tau(R, \Delta) \cdot S.$$

(2) *(Subadditivity Theorem) Let* $(R, \mathfrak{m})$ *be a complete regular local ring of characteristic* $p > 0$*, and* Δ_1 *and* Δ_2 *be any two effective* $\mathbb{Q}$*-divisors on* $\operatorname{Spec} R$*. Then*

$$\tau(R, \Delta_1 + \Delta_2) \subseteq \tau(R, \Delta_1) \cdot \tau(R, \Delta_2).$$

Proof. (1)We identify E_S with $(0 : x)_{E_R}$.

Claim.

$$0^{*\Delta}_{E_R} \cap E_S \subseteq 0^{*\Delta|_{\operatorname{Spec} S}}_{E_S}.$$

Proof of Claim. First we will look at the Frobenius actions on E_R and E_S. Since R is Cohen-Macaulay, we have the following commutative diagram with exact rows for every $q = p^e$ (See the proof of [HW, Theorem 4.9]).

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E_S \arrow[r] \arrow[d, "F_S^e"] & E_R \arrow[d, "x^{q-1}F_R^e"] \\ 0 \arrow[r] & E_S \otimes_S {}^eS \arrow[r] & E_R \otimes_R {}^eR \end{tikzcd}$$

If $\xi \in 0^{*\Delta}_{E_R} \cap E_S$, then for some nonzero element $c \in R$, $cF^e_R(\xi) = 0$ in $E_R \otimes_R {}^eR((q-1)\Delta)$ for all $q = p^e \gg 0$. We write $q - 1 = kr + i$ for integers k and i with $0 \le i \le r - 1$. Then there exist a nonzero element $c' \in R$ such that $c' \notin xR$ and $c'x^{q-1}y^kF^e_R(\xi) = 0$ in $E_R \otimes_R {}^eR$. Hence, by the above diagram, $c'y^kF^e_S(\xi) = 0$ in $E_S \otimes_S {}^eS$, so that $c'F^e_S(\xi) = 0$ in $E_S \otimes_S {}^eS((q-1)\Delta|_{\operatorname{Spec} S})$ for all $q = p^e \gg 0$. Since $c' \notin xR$, it implies that $\xi \in 0^{*\Delta|_{\operatorname{Spec} S}}_{E_S}$. □

Since R is complete, by [Ha3, Lemma 3.3], we have $0^{*\Delta}_{E_R} = (0 : \tau(R, \Delta))_{E_R}$. Thus

$$\begin{aligned}(0 : x)_{0^{*\Delta}_{E_R}} &= (0 : \tau(R, \Delta) + xR)_{E_R} = (0 : \frac{\tau(R, \Delta) + xR}{xR})_{E_S} \\ &= (0 : \tau(R, \Delta) \cdot S)_{E_S}.\end{aligned}$$

In light of the claim, $\tau(R, \Delta) \cdot S = \operatorname{Ann}_S(0 : x)_{0^{*\Delta}_{E_R}} \supseteq \tau(S, \Delta|_{\operatorname{Spec} S})$.

(2) Fisrt we consider the following claim.

Claim. Let $R = k[[x_1, \ldots, x_n]]$ (resp. $S = k[[y_1, \ldots, y_m]]$) be an n-dimensional (resp. m-dimensional) complete regular local ring over a field k and Δ_R (resp. Δ_S) an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor on $\operatorname{Spec} R$ (resp. $\operatorname{Spec} S$). Let $T = R\hat{\otimes}_k S = k[[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]]$. Then

$$\tau(T, \Delta_R \otimes_k S + R \otimes_k \Delta_S) \subseteq (\tau(R, \Delta_R) \otimes_k \tau(S, \Delta_S))T.$$

Proof of Claim. It suffices to show that

$$0_{E_T}^{*(\Delta_R \otimes_k S + R \otimes_k \Delta_S)} \supseteq 0_{E_R}^{*\Delta_R} \otimes_k E_S + E_R \otimes_k 0_{E_S}^{*\Delta_S},$$

but it is clear since $E_T = E_R \otimes_k E_S$. □

Let $\rho : T = R\hat{\otimes}_k R \to R$ be a diagonal map. Then $T \to T/\operatorname{Ker}\rho = R$ is a complete intersection, so it follows from the repeated application of the restriction theorem that $\tau(R, \Delta_1 + \Delta_2) \subseteq \tau(T, \Delta_1 \otimes_k R + R \otimes_k \Delta_2) \cdot R$. By the above claim, $\tau(T, \Delta_1 \otimes_k R + R \otimes_k \Delta_2) \cdot R \subseteq \tau(R, \Delta_1) \cdot \tau(R, \Delta_2)$. □

The following thoerem generalizes [HW, Theorem 3.3], which states that strong F-regularity implies klt. Its proof is somewhat complicated, so we omit it here. We refer to [Ta] for the proof.

Theorem 3.6. *Let $(R, \mathfrak{m})$ be an F-finite normal local ring of characteristic $p > 0$ and Δ an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor on $Y = \operatorname{Spec} R$ such that $K_Y + \Delta$ is $\mathbb{Q}$-Cartier. Let $f : X \to Y = \operatorname{Spec} R$ be a proper birational morphism with X normal. Then*

$$\tau(R, \Delta) \subseteq H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X - f^*(K_Y + \Delta) \rceil)).$$

4. Main Theorem

To state the main result, we will explain the meaning of the phrase "in characteristic $p \gg 0$."

Let R be a normal domain which is finitely generated over a field k of characteristic zero and Δ an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor on $\operatorname{Spec} R$ such that $K_Y + \Delta$ is $\mathbb{Q}$-Cartier. Let $f : X \to \operatorname{Spec} R$ be a resolution of singularities such that $\operatorname{Exc}(f) + f^*(K_Y + \Delta)$ has simple normal crossing support. Choosing a suitable finitely generated $\mathbb{Z}$-subalgebra A of k, there exists a finitely generated flat A-algebra R_A, an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor Δ_A on $\operatorname{Spec} R_A$, a smooth A-scheme X_A and a birational A-morphism $f_A : X_A \to \operatorname{Spec} R_A$, such that $K_{R_A} + \Delta_A$ is $\mathbb{Q}$-Cartier, $\operatorname{Exc}(f_A) + {f_A}^*(K_{R_A} + \Delta_A)$ has simple normal crossing support, and by tensoring k over A one gets back R, Δ, X and $f : X \to \operatorname{Spec} R$. Given a closed point $s \in \operatorname{Spec} A$ with residue field $\kappa = \kappa(s)$, we denote the corresponding fibers over s by $f_\kappa : X_\kappa \to \operatorname{Spec} R_\kappa$, Δ_κ, etc. Then the pairs $(R_\kappa, \Delta_\kappa)$ over general closed points $s \in \operatorname{Spec} A$ inherit the properties possessed by the original one (R, Δ).

Now we fix a general closed point $s \in \operatorname{Spec} A$ with residue field $\kappa = \kappa(s)$ of sufficiently large characteristic $p \gg 0$. Then we refer to the fibers over $s \in \operatorname{Spec} A$ as "reduction modulo $p \gg 0$," and use the phrase "in characteristic $p \gg 0$" when we look at general closed fibers which are reduced from characteristic zero to characteristic $p \gg 0$ as above.

Now we state our main result.

Theorem 4.1. *Let $(R, \mathfrak{m})$ be a normal local ring essentially of finite type over a field of characteristic zero and Δ be an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor on $Y = \operatorname{Spec} R$ such that $K_Y + \Delta$ is $\mathbb{Q}$-Cartier. Then, in characteristic $p \gg 0$,*

$$\tau(R, \Delta) = \mathcal{J}(Y, \Delta).$$

Proof. We need the following two lemmata. Lemma 2 is proved by essentially the same arguement in [HH2, Theorem 3.3]

Lemma 1 ([Ha2]). Let $(R, \mathfrak{m})$ be a normal local ring of dimension $d \geq 2$, essentially of finite type over a perfect field κ of characteristic $p > 0$. Let $f : X \to \operatorname{Spec} R$ be a resolution of singularities and D an f-ample $\mathbb{Q}$-Cartier divisor on X with simple normal crossing support. We denote the closed fiber of f by Z. If $(R, \mathfrak{m})$ is the localization at any prime ideal of a finitely generated κ-algebra which is a reduction modulo $p \gg 0$ as well as X, D and $f : X \to \operatorname{Spec} R$, then e-times Frobenius map

$$F^e : H^d_Z(X, \mathcal{O}_X(-D)) \to H^d_Z(X, \mathcal{O}_X(-qD))$$

is injective for every $q = p^e$.

Lemma 2 ([Ta, Lemma 3.5]). Let R be an F-finite normal domain of characteristic $p > 0$, Δ an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor on $\operatorname{Spec} R$ and M an R-module. Let $c \in R(-\Delta_{\mathrm{red}})$ be any nonzero element such that the localization R_c with respect to c is strongly F-regular, where Δ_{red} is the reduced divisor whose support is equal to that of Δ. Then there exists some positive integer n as follows: $z \in 0^{*\Delta}_M$ if and only if $c^n z^q = 0$ in $M \otimes {}^e R(\lceil (q-1)\Delta \rceil)$ for all $q = p^e > 0$.

Thanks to Theorem 3.6, it is sufficient to prove that $\tau(R, \Delta) \supseteq \mathcal{J}(Y, \Delta)$ in characteristic $p \gg 0$. Let $f : X \to Y = \operatorname{Spec} R$ be a resolution of singularities such that $\operatorname{Exc}(f) + f_*^{-1}\Delta$ has simple normal crossing support. Take a nonzero element $c \in R(-\Delta_{\mathrm{red}})$ such that R_c is regular, where Δ_{red} is the reduced divisor whose support is equal to that of Δ. Let $\Delta' = \operatorname{div}_R(c)$. Then there is a rational number $0 \leq \epsilon \ll 1$ such that $\lfloor f^*(K_Y + \Delta) \rfloor = \lfloor f^*(K_Y + \Delta + \epsilon\Delta') \rfloor$. Take an f-ample $\mathbb{Q}$-Cartier divisor H on X which is supported on the exceptional locus of f such that $\lfloor f^*(K_Y + \Delta + \epsilon\Delta') - H \rfloor = \lfloor f^*(K_Y + \Delta) \rfloor$. Set $D = H - f^*(K_Y + \Delta + \epsilon\Delta')$ and we may assume that $\operatorname{Exc}(f) + f_*^{-1}(\Delta + \epsilon\Delta')$ has simple normal crossing support again, replacing f suitably. By Lemma 1, in characteristic $p \gg 0$, the e-times Frobenius map

$$F^e : H^d_Z(X, \mathcal{O}_X(f^*(K_Y + \Delta))) \to H^d_Z(X, \mathcal{O}_X(-qD))$$

is injective for every $q = p^e$, where Z is the closed fiber of f. On the other hand, let

$$\delta : H^d_{\mathfrak{m}}(R(K_Y)) \to H^d_Z(X, \mathcal{O}_X(f^*(K_Y + \Delta)))$$

be the Matlis dual of the natural inclusion map

$$\mathcal{J}(Y, \Delta) = H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X - f^*(K_Y + \Delta) \rceil)) \hookrightarrow R,$$

and

$$\delta_e : H^d_{\mathfrak{m}}(R(q(K_Y + \Delta + \epsilon\Delta'))) \to H^d_Z(X, \mathcal{O}_X(-qD))$$

the natural map induced by an edge map of the Leray spectral sequence

$$H^j_{\mathfrak{m}}(H^i(X, \mathcal{O}_X(qf^*(K_Y + \Delta + \epsilon\Delta')))) \Rightarrow H^{i+j}_Z(X, \mathcal{O}_X(qf^*(K_Y + \Delta + \epsilon\Delta'))).$$

Then by the Matlis duality,

$$\begin{aligned} \ker(\delta) &= \operatorname{Hom}_R\left(\frac{R}{\mathcal{J}(Y,\Delta)}, E_R\right) = \operatorname{Ann}_{H^d_{\mathfrak{m}}(R(K_Y))}\mathcal{J}(Y,\Delta), \\ \ker(\delta_e) &= \operatorname{Hom}_R\left(\frac{R(\lceil K_Y - q(K_Y + \Delta + \epsilon\Delta')\rceil)}{H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X + qD\rceil))}, E_R\right) \\ &= \operatorname{Ann}_{H^d_{\mathfrak{m}}(R(q(K_Y+\Delta+\epsilon\Delta')))}H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X + qD\rceil)). \end{aligned}$$

We obtain the following commutative diagram with exact rows for every $q = p^e$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker(\delta) \arrow[r] \arrow[d] & H^d_{\mathfrak{m}}(R(K_Y)) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "F^e"] & H^d_Z(X, \mathcal{O}_X(-D)) \arrow[r] \arrow[d, "F^e"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker(\delta_e) \arrow[r] & H^d_{\mathfrak{m}}(R(q(K_Y + \Delta + \epsilon\Delta'))) \arrow[r, "\delta_e"] & H^d_Z(X, \mathcal{O}_X(-qD)) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Take any element $\xi \in H^d_{\mathfrak{m}}(R(K_Y)) \setminus \ker(\delta)$. By the above diagram, $\xi^q \notin \ker(\delta_e)$. We fix the positive integer n in Lemma 2. Then for sufficiently large q,

$$\begin{aligned} &H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X + q(H - f^*(K_Y + \Delta + \epsilon\Delta'))\rceil)) \\ \subseteq &c^{n+1}H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X + q(H - f^*(K_Y + \Delta))\rceil)). \end{aligned}$$

Hence

$$c^{n+1}\xi^q \notin \operatorname{Ann}_{H^d_{\mathfrak{m}}(R(q(K_Y+\Delta)))}H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X + q(H - f^*(K_Y + \Delta))\rceil)).$$

If $\xi \in 0^{*\Delta}_{H^d_{\mathfrak{m}}(R(K_Y))}$, then by Lemma 2, $c^n\xi^q = 0$ in $H^d_{\mathfrak{m}}(R(\lceil qK_Y + (q-1)\Delta\rceil))$. Therefore $c^{n+1}\xi^q = 0$ in $H^d_{\mathfrak{m}}(R(q(K_Y + \Delta)))$, and this is a contradiction. It follows that

$$0^{*\Delta}_{H^d_{\mathfrak{m}}(R(K_Y))} \subseteq \ker(\delta) = \operatorname{Ann}_{H^d_{\mathfrak{m}}(R(K_Y))}\mathcal{J}(Y,\Delta),$$

and by Matlis duality (see [Ha3, Lemma 3.3]), $\tau(R,\Delta) \supseteq \mathcal{J}(Y,\Delta)$. □

When $\Delta = 0$, this theorem implies the results of Hara and Smith. Recently Hara conjectured that in characteristic $p \gg 0$, the "$\mathfrak{a}$-test ideal" coincides with the adjoint ideal (see [HY]) and the above theorem is closely related to his conjecture.

As a direct consequence of the main theorem, we get the equivalence of klt pairs and strongly F-regular pairs.

Corollary 4.2 ([HW, Conjecture 5.1.1]). *Let $(R, \mathfrak{m})$ be a normal local ring essentially of finite type over a field of characteristic zero and Δ an effective $\mathbb{Q}$-Weil divisor on $Y = \operatorname{Spec} R$ such that $K_Y + \Delta$ is $\mathbb{Q}$-Cartier. Then, (Y, Δ) is klt if and only if (R, Δ) is strongly F-regular in characteristic $p \gg 0$.*

References

[BS] J. Briançon and H. Skoda, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de C^n*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A **278** (1974), 949-951.

[DEL] J.-P. Demailly, L. Ein and R. Lazarsfeld, *A subadditivity property of multiplier ideals*, Michigan. Math. J. **48** (2000), 137-156.

[ELS] L. Ein, R. Lazarsfeld, and K. Smith, *Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties*, Inv. Math. (to appear).

[Ha1] N. Hara, *F-regularity and F-purity of graded rings*, J. Algebra, **172** (1995), 804-818.

[Ha2] ———, *A characterization of rational singularities in terms of injectivity of Frobenius maps*, Amer. J. Math. **120** (1998), 981-996.

[Ha3] ———, *Geometric interpretation of tight closure and test ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 1885-1906.

[HW] N. Hara and K.-i. Watanabe, *F-regular and F-pure rings vs. log terminal and log canonical singularities*, J. Alg. Geom. (to appear).

[HY] N. Hara and K. Yoshida, untitled, in preparation.

[HH1] M. Hochster and C. Huneke, *Tight closure, invariant theory and the Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31-116.

[HH2] ———, *Tight closure and strong F-regularity*, Mem. Soc. Math. France **38** (1989), 119-133.

[HH3] ———, *Comparison of symbolic and ordinary powers of ideals*, preprint.

[La] R. Lazarsfeld, *Multiplier ideals for algebraic geometers*, preprint.

[Sm] K. Smith, *The multiplier ideal is a universal test ideal*, Comm. Algebra **28** (2000), 5915-5929.

[Ta] S. Takagi, *An interpretation of multiplier ideals via tight closure*, math.AG/0111187.

Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1, Komaba, Meguro, Tokyo 153-8914, Japan

E-mail address: `stakagi@ms.u-tokyo.ac.jp`

いつ等式 $I^2 = QI$ が成り立つか？

明大・理工　後藤　四郎

1　初めに

この報告では (A,m) によって極大イデアルが m であるような d 次元の Noether 局所環を表し，特に断らない限り $Q=(a_1,a_2,\ldots,a_d)$ は環 A のパラメーターイデアルとし，$I=Q:\mathrm{m}$ とおく．以下 1995 年に発表された A. Corso と C. Polini の次の結果がどこまで拡張できるかという問題を考察対象とする．

定理 1.1 ([CP]). 局所環 A が *Cohen-Macaulay* ではあるが正則でないならば，必ず等式 $I^2=QI$ が成り立つ．

より正確に彼らの結果を述べておくと，環 A が Cohen-Macaulay のときは，もし $I^2 \neq QI$ ならば，A は必ず正則であって，$\mu_A(\mathrm{m}/Q) \leq 1$ となり，等式 $\overline{Q}=Q$ が従う ([CPV])．ここで $\mu_A(*)$ は生成元の個数を表し，$\overline{Q}$ はイデアル Q の整閉包を表す．この主張に対して [CPV] で初めて与えられた証明は高級で込み入ったものであるが，第 23 回可換環論シンポジウムに於ける早坂太君（明治大学）の講演が示すように，現在では証明は整理されかなり簡潔なものになっている．しかしながら，socle イデアル $I=Q:\mathrm{m}$ は Q から見れば隔絶して大きなイデアルではないとはいえ，何故このような等式 $I^2=QI$ が成立するのかと言う真の理由は依然として明らかでない．例えば環 A が Cohen-Macaulay でないときは如何なる現象が起こるのかという問いに対する報告がなされた形跡は無いし，彼らの定理に於ける環 A は正則ではないという仮定が実のところ何を意味するのかという分析も欠落しているからである．別途専門誌に投稿する予定であるので証明等詳細は省くことにするが，この報告では以上のような素朴な疑問を次の三つの部分に分解して考察し，得られた多少の結果を記録しておきたいと思う。なお，この研究の途中経過は既に [GH1]，[GH2]，[GHI] に纏めらているので，参照されたい．

問題 1.2. (1) イデアル $I=Q:\mathrm{m}$ が Q 上で整であるための判定条件を求めよ．
(2) $I \subseteq \overline{Q}$ であった場合にイデアル I の Q に関する *reduction number*

$$r_Q(I)=\min\{0 \leq n \in \mathbb{Z} \mid I^{n+1}=QI^n\}$$

を制御記述せよ．

(3) 環 A が *Cohen-Macaulay* でない場合にも機能するような（[CP], [CPV] に対応する）定理を創れ.

2　いつ $I \subseteq \overline{Q}$ となるか？

環 A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する重複度を $\mathrm{e}(A) = \mathrm{e}_{\mathfrak{m}}^0(A)$ によって表す．この報告で最初に述べたいことは次の結果である．

定理 2.1. $\mathrm{e}(A) > 1$ ならば，$I \subseteq \overline{Q}$ である．

原則として証明は省く予定であるが，この定理にだけは簡単な証明を付けておきたい．証明に必要なことは次の補題である．

補題 2.2. $d = \dim A > 0$ であって $\mathfrak{m}I \not\subseteq \mathfrak{m}Q$ ならば，$\mathrm{e}(A) = 1$ である．

証明. 次元 d に関する帰納法で証明しよう．まず $d = 1$ の場合を考えると，$Q = (a_1) \supseteq \mathfrak{m}I \not\subseteq \mathfrak{m}Q$ であるので，中山の補題から等式 $Q = \mathfrak{m}I = (a_1)$ が従う．そこで $B = A/\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(A)$ とおけば（ここで $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^*(A)$ は局所コホモロジーを表す），環 B は 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環であって a_1 は B-非零因子であるため，$\mathfrak{m}B{\cdot}IB = a_1B \cong B$ が得られる．即ち環 B の極大イデアル $\mathfrak{m}B$ は可逆であるので，B は正則となり，等式 $\mathrm{e}(A) = \mathrm{e}(B) = 1$ が従う．次に，$d > 1$ であって，我々の主張は $d-1$ まで正しいと仮定しよう．このとき $\mathfrak{m}I \not\subseteq \mathfrak{m}Q$ であるから元 $f \in \mathfrak{m}I$ を $f \notin \mathfrak{m}Q$ となるよう選べば，f はイデアル Q の極小生成系の一部であるから，Q の生成系 $a_1, a_2, \ldots, a_d$ を取り換えて，$f = a_d \in \mathfrak{m}I$ が成り立つと仮定できる．ここで環 $C = A/a_1A$ を見るに，$QC = (a_2, a_3, \ldots, a_d)C$ であって $IC = QC : \mathfrak{m}C$ である．一方で，$a_d \in \mathfrak{m}I$ であって，$a_d \mod a_1A$ は環 C のパラメターイデアル QC の極小生成系の一部であるから，$\mathfrak{m}C{\cdot}QC$ には含まれず，$\mathfrak{m}C{\cdot}IC \not\subseteq \mathfrak{m}C{\cdot}QC$ が成り立つ．故に，d に関する帰納法の仮定より $\mathrm{e}(C) = 1$ であることが従い，$\mathrm{e}(A) = 1$ であることを得る．　□

さて定理 (2.1) の証明であるが，$d = 0$ のときは，少なくとも環 A は体でないので $I \subsetneq A$ となり，イデアル I は冪零であって，$I \subseteq \overline{Q}$ となることが従う．$d > 0$ と仮定すると，補題 (2.2) から $\mathfrak{m}I \subseteq \mathfrak{m}Q$ が従い，故に環 $B = A/\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(A)$ 内で等式 $\mathfrak{m}B{\cdot}IB = \mathfrak{m}B{\cdot}QB$ が成り立つ．環 B の極大イデアル $\mathfrak{m}B$ は少なくとも一つは非零因子を含むので，この等式よりイデアル IB が QB 上で整であることを得る．故に，$\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^0(A)$ は A 内で高々冪零であるので，$I \subseteq \overline{Q}$ が従う．更に $d > 0$ であって環 A が Cohen-Macaulay であると仮定すれば，等式 $I^2 = QI$ が従うのである．実際，$\mathfrak{m}I = \mathfrak{m}Q$ であるから，$I^2 \subseteq Q$ であって $\mathfrak{m}I^2 \subseteq Q^2$ である．故に，元 $x \in I^2$ は必ず $x = \sum_{i=1}^d a_ix_i$ $(x_i \in A)$ という形に表される．$a \in \mathfrak{m}$ とすれば，$ax = \sum_{i=1}^d a_i(ax_i) \in Q^2$ であり，$a_1, a_2, \ldots, a_d$

が A-正則列であることから，$ax_i \in Q$ $(1 \leq i \leq d)$ が従い，$x_i \in I$ であることが分かる．即ち $I^2 = QI$ である．以上 [CP] と [CPV] の主定理の証明である．

環 A が Cohen-Macaulay でない場合にはここに述べた証明は機能しない．次のように，$\mathrm{e}(A) > 1$ であっても，等式 $I^2 = QI$ が成立しない例が存在するからである．この例では環の次元は 1 である．高次元の例を未だ知らないので，高次元でも同様の例を造ることが望まれる．

例 2.3. $R = k[[X,Y,Z]]$ (k は体) を冪級数環とし，$A = R/(X^3, XY, Y^2 - XZ)$ とおく．$\dim A = 1$，$\mathrm{e}(A) = 3$ である．環 A のパラメーターイデアル $Q = (z)$ については $I = Q + (x^2, y)$ であって，$I^3 = QI^2$ ではあるが，$I^2 = QI + (y^2) \neq QI$ となる．但し x, y, z は不定元 X, Y, Z のイデアル $(X^3, XY, Y^2 - XZ)$ を法とする *reduction* を表す．

この例には第 4 節でもう一度言及することになるが，環 $A = k[[X,Y,Z]]/(X^3, XY, Y^2 - XZ)$ が Buchsbaum であるという事実は注目に値する．Cohen-Macaulay 環にかなり近い局所環であってさえ，$I \subseteq \overline{Q}$ であるからと言って $I^2 = QI$ であるとは限らないとなると，何が $r_Q(I)$ を制御しているのか心許ない．Buchsbaum 局所環については多少得られた結果があるのでこれを次節で報告するが，基本的に未解決の問題であると思う．

現時点で一般的に正しいと保証できるのは次の主張である．

定理 2.4. $d = \dim A \geq 2$ であって環 A は *Gorenstein* 局所環の準同型像であると仮定し，更に $\mathrm{Assh}\ A = \mathrm{Ass}\ A$ が成り立つ，即ち等式 $\dim A/\mathfrak{p} = d$ がすべての $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\ A$ について成り立つと仮定する．このとき環 A のパラメーター系 $a_1, a_2, \ldots, a_d$ の中に次の条件を満たすものが少なくとも一組存在する．

(1) $a_1, a_2, \ldots, a_d$ は A 内で *strong d-sequence* をなす，即ち，すべての整数 $1 \leq i \leq j \leq d$ と $n_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq d)$ に対して等式

$$(a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \ldots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i^{n_i} a_j^{n_j} = (a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \ldots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_j^{n_j}$$

が成り立つ．

(2) $Q = (a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \ldots, a_d^{n_d})$ とせよ．このパラメーターイデアル Q は，すべての $1 \leq i \leq d$ について $n_i \geq 2$ が成り立つ限り，必ず等式 $I^2 = QI$ を満たす．

この定理が示すように，病的でない普通の局所環内には少なくとも一種類（個数の意味では，無限に多く），等式 $I^2 = QI$ を満たすようなパラメーターイデアル Q が含まれている．但し，与えられた局所環内にそのようなイデアル Q がどのくらい多様に含まれているかは，未だ明らかでない．

3 Buchsbaum 環の場合には

さてそれでは話題を環 A が Buchsbaum 局所環である場合に限ることにしよう．Buchsbaum 環については，次の結果が基本的である．

定理 3.1. A は *Buchsbaum* 局所環であって，$d = \dim A > 0$，$\mathrm{e}(A) > 1$ であると仮定する．このとき，環 A の如何なるパラメーター系 $a_1, a_2, ..., a_d$ に対しても，イデアル $Q = (a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, ..., a_d^{n_d})$ は等式 $I^2 = QI$ を満たす．但し $n_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq d)$ であって，少なくとも一つは $n_i \geq 2$ であるものとする．

この定理と定理 2.4 の違いは，定理 2.4 がすべての n_i は 2 以上であると仮定しているのに対して，定理 3.1 では $n_i \geq 2$ となるのは少なくとも一つあればよいところにある．勿論，この仮定なしには定理 3.1 は成立しない（cf. 例 2.3）．

これを用いるに直ちに次の結果が得られる．(実際，$b_i \in R$ を $a_i = b_i \mod f^n R$ となるよう取り，$J = (f^n, a_1, a_2, \ldots, a_d)R : \mathfrak{n}$ とおくと，環 R 内では $J^2 = (f^n, a_1, a_2, \ldots, a_d) \cdot J$ であるから，環 A 内でも $I^2 = QI$ となることを得るからである.）従って，ある種の Buchsbaum 局所環内では，如何なるパラメーターイデアル Q に対しても必ず等式 $I^2 = QI$ が成り立つ．

系 3.2. $(R, \mathfrak{n})$ は *Buchsbaum* 局所環であると仮定し，$\dim R = d+1$ $(d \geq 1)$ であって，$\mathrm{e}(R) > 1$ なるものと仮定する．$f \in \mathfrak{n}$ は環 R のパラメーター系の一部とし，整数 $n \geq 2$ を取る．このとき，次元 d の *Buchsbaum* 局所環 $A = R/f^n A$ 内では，如何なるパラメーターイデアル $Q = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$ に対しても，等式 $I^2 = QI$ が成り立つ．

環 A が Buchsbaum 局所環である場合には，不変量

$$\mathrm{r}(A) = \sup_{Q \text{ は } A \text{ のパラメーターイデアル}} \ell_A([Q : \mathfrak{m}]/Q)$$

は有限確定値をとり（但し $\ell_A(*)$ は組成列の長さを表す），等式

$$\mathrm{r}(A) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(A) + \mu_{\widehat{A}}(K_{\widehat{A}})$$

が成立つ ([GS])．但し $h^i(A) = \ell_A(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A))$ であって，$K_{\widehat{A}}$ は完備化 $\widehat{A}$ の正準加群を表す．ここで Q を環 A のパラメーターイデアルとし $I = Q : \mathfrak{m}$ とすれば，必ず $\ell_A(I/Q) \leq \mathrm{r}(A)$ ではあるが，値 $\ell_A(I/Q)$ が上限である $\mathrm{r}(A)$ に到達するとは限らない．しかしながら，$a_1, a_2, \ldots, a_d$ を Buchsbaum 局所環 A のパラメタ一系とすると，このパラメーター系に対し整数 $N \geq 1$ を次のように選ぶことができる（cf. [GS]）：$n_i \geq N$ を満たすよう整数 n_i $(1 \leq i \leq d)$ を取って $Q = (a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \ldots, a_d^{n_d})$ とおけば，このイデアル Q に対しては値 $\ell_A(I/Q)$ が必ず上限 $\mathrm{r}(A)$ に到

達する．但し，この整数 N がパラメーター系 $a_1, a_2, \ldots, a_d$ の取り方に拠って変化することは，注意を要する事実である．

上限に達するものについては次の主張が正しい．

定理 3.3. A は *Buchsbaum* 局所環であって，$d = \dim A > 0$，$\mathrm{e}(A) > 1$ なるものとせよ．このとき環 A のパラメタターイデアル Q が等式 $\mathrm{r}(A) = \ell_A([Q : \mathfrak{m}]/Q)$ を満たすならば，必ず $I^2 = QI$ が成立つ．但し $I = Q : \mathfrak{m}$ である．

次の系は，始めに述べた [CP]，[CPV] の定理が何故成立するか，一つの説明を与えていると見做される．

系 3.4. A は *Buchsbaum* 局所環であって，$d = \dim A > 0$，$\mathrm{e}(A) > 1$ なるものと仮定せよ．もしも任意のパラメーターイデアル Q に対して不変量 $\ell_A([Q : \mathfrak{m}]/Q)$ が Q の取り方に拠らない一定の値をとるならば，任意のパラメーターイデアル Q に対して等式 $I^2 = QI$ が成り立つ．但し $I = Q : \mathfrak{m}$ とする．

Cohen-Macaulay でない Buchsbaum 局所環であって，しかも系 3.4 内の「任意のパラメーターイデアル Q に対して不変量 $\ell_A([Q : \mathfrak{m}]/Q)$ が Q に拠らない一定の値をとる」という条件 (C) を満たすものを，すべての次元 d (> 0) に対して構成することは可能である．しかしながら，この条件 (C) は $I^2 = QI$ であるための十分条件ではあっても，必要条件ではない．実際，次のような標準的な Buchsbaum 局所環は条件 (C) を満たさないとはいえ，環 A 内のすべてのパラメーターイデアル Q に対して等式 $I^2 = QI$ が成り立つからである．

$$A = k[[X, Y, Z, W]]/(X, Y) \cap (Z, W) \quad (k : 体)$$

Buchsbaum 局所環であって，すべてのパラメーターイデアル Q に対して等式 $I^2 = QI$ を成り立たせるものの特徴付けは，未だ知られていないと思われる．

4　終りに

初めに述べた例 2.3 に付いては，次の主張が正しい．

例 4.1. (追加)

(1) 元 $a \in \mathfrak{m}^2$ が環 A のパラメーターならば，$Q = (a)$ に対して等式 $I^2 = QI$ が成り立つ．

(2) $\mathfrak{p} = (x, y)$ とする．元 $b \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2$ をとって $a = b + z$ とおけば，パラメーターイデアル $Q = (a)$ に対しては，必ず $I^2 \neq QI, I^3 = QI^2$ が成り立つ．

この程度の例から判断するにはあまりに楽観的であり過ぎるとは思うが，次の主張が正しいかも知れない．(楽観的であることは悪いことではない．) 興味を持たれた読者は，是非挑戦されたい．

問題 4.2. (1) 環 A が *Buchsbaum* 局所環であるならば，$Q \subseteq \mathfrak{m}^2$ を満たすすべてのパラメーターイデアル Q に対して等式 $I^2 = QI$ が成り立つ．

(2) 一般の *FLC*環 A については，ある正整数 N が存在して，$Q \subseteq \mathfrak{m}^N$ を満たすすべてのパラメーターイデアル Q に対して等式 $I^2 = QI$ が成り立つ．

但し FLC 環とは，局所コホモロジー $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)$ が，すべての $0 \leq i < d = \dim A$ に対して有限生成であるような局所環をいう．

参考文献

[CP] A. Corso and C. Polini, *Links of prime ideals and their Rees algebras*, J. Alg. **178** (1995), 224-238

[CPV] A. Corso, C. Polini, and W. V. Vasconcelos, *Links of prime ideals*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **115** (1994), 431-436

[GH1] S. Goto and F. Hayasaka, *Finite homological dimension and primes associated to integrally closed ideals*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear)

[GH2] S. Goto and F. Hayasaka, *Finite homological dimension and primes associated to integrally closed ideals II*, Preprint 2001

[GHI] S. Goto, F. Hayasaka, and S. Iai, *The* a*-invariant and Gorensteinness of graded rings associated to filtrations of ideals in regular local rings*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear)

[GS] S. Goto and N. Suzuki, Index of reducibility of parameter ideals in a local ring, J. Alg., **87** (1984), 53-88

Gorenstein graded rings associated to ideals

Shin-ichiro Iai
Hokkaido University of Education

1 Introduction.

This is a joint work with S. Goto. In this paper we will give a characterization of Gorensteinness in the graded rings associated to ideals having higher analytic deviation. In what follows, let A be a Gorenstein local ring with the maximal ideal $\mathfrak{m}$ and $\dim A = d$. Assume that the field $A/\mathfrak{m}$ is infinite. Let $I(\neq A)$ be an ideal in A of height s. We write $\ell = \lambda(I) := \dim A/\mathfrak{m} \otimes_A \mathcal{G}(I)$ and call it the analytic spread of I. We define $\mathcal{R}(I) = A[It] \subseteq A[t]$ (t is an indeterminate over A), $\mathcal{R}'(I) = A[It, t] \subseteq A[t, t^{-1}]$, and $\mathcal{G}(I) = \mathcal{R}'(I)/t^{-1}\mathcal{R}'(I)$. Let $\mathrm{ad}(I) := \ell - s$ which we call the analytic deviation of I. Let J be a minimal reduction of I and $\mathrm{r}_J(I)$ the reduction number of I with respect to J. Suppose that $a_1, a_2, \cdots, a_\ell$ is a minimal system of generators for J satisfying the following two conditions.

($*$) $J_i A_\mathfrak{q}$ is a reduction of $IA_\mathfrak{q}$ for all $\mathfrak{q} \in \mathrm{V}(I)$ with $i = \mathrm{ht}_A\, \mathfrak{q} \leq \ell$.

($**$) $a_i \notin \mathfrak{q}$ if $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A\, A/J_{i-1} \setminus \mathrm{V}(I)$ for all $1 \leq i \leq \ell$.

Here let $\mathrm{V}(I)$ be a set of prime ideals in A containing I and $J_i := (a_1, a_2, \cdots, a_i)$ for $0 \leq i \leq \ell$. By [GNN2], 2.1 there always exists a minimal system of generators $a_1, a_2, \cdots, a_\ell$ for J satisfying conditions ($*$) and ($**$). Then we denote by

$$\mathrm{r}_i(I) = \max\{\mathrm{r}_{J_{i_\mathfrak{q}}}(I_\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{V}(I) \text{ and } \mathrm{ht}_A\, \mathfrak{q} = i\} \text{ for any } s \leq i \leq \ell.$$

We put $\mathrm{r}_i = \mathrm{r}_i(I)$ for short. Our ideal I is said to be generically a complete intersection if $\mathrm{r}_s = 0$. Let $\mathrm{a}(G(I))$ stand for the a-invariant of $G(I)$. We say that I is height unmixed if all associated prime ideals of I have same codimension. With this notation our result of this article can be stated as follows.

Theorem 1.1. *Assume that I is height unmixed and* $\mathrm{depth}\, A/I^n \geq d - s - n$ *for all* $1 \leq n \leq \mathrm{ad}(I)$. *Then the following conditions are equivalent.*

(1) *$\mathcal{G}(I)$ is a Gorenstein ring with* $\mathrm{a}(G(I)) = -s$.

(2) $\mathrm{r}_i \leq i - s$ *for all* $s \leq i < \ell$ *and* $\mathrm{r}_J(I) \leq \mathrm{ad}(I)$.

If $\mathrm{ad}(I) \geq 2$, *we may add the following.*

(3) $\mathrm{r}_s = 0$, $\mathrm{r}_i \leq i - s - 1$ *for all* $s < i < \ell$, *and* $\mathrm{r}_J(I) \leq \mathrm{ad}(I) - 1$.

As a consequence of the theorem, we have

Corollary 1.2. *Assume that I is a height unmixed ideal with $s = 2$ and* $\operatorname{depth} A/I^n \geq d - s - n$ *for all* $1 \leq n \leq \operatorname{ad}(I)$. *Then the following conditions are equivalent.*

(1) *$\mathcal{R}(I)$ is a Gorenstein ring.*

(2) $\mathrm{r}_i \leq i - 2$ *for all* $2 \leq i < \ell$ *and* $\mathrm{r}_J(I) \leq \operatorname{ad}(I)$.

If $\operatorname{ad}(I) \geq 2$, *we may add the following.*

(3) $\mathrm{r}_2 = 0$, $\mathrm{r}_i \leq i - 3$ *for all* $2 < i < \ell$, *and* $\mathrm{r}_J(I) \leq \operatorname{ad}(I) - 1$.

Many authors have studied the Cohen-Macaulay property of the associated graded rings of ideals having higher analytic deviation. However, in almost all the cases we recall, the Cohen-Macaulayness of the ideal I is required. As far as I know, the following result is the best one that does not require such condition.

Theorem 1.3 **([GNN2], Corollary 6.5).** *Assume that* $\operatorname{depth} A/I^n \geq d - s - n$ *for all* $1 \leq n \leq \operatorname{ad}(I)$, $\mathrm{r}_i \leq i - s$ *for all* $s \leq i < \ell$, *and* $\mathrm{r}_J(I) \leq \operatorname{ad}(I)$. *Then $\mathcal{G}(I)$ is a Cohen-Macaulay ring.*

It seems then natural to ask when under the same hypothesis in Theorem 1.3 the ring $G(I)$ is also Gorenstein. Our main theorem shows that in the situation, $G(I)$ is a Gorenstein ring when I is height unmixed.

Throughout this paper $(A, \mathfrak{m})$ is a Gorenstein local ring with $\dim A = d$ and assume that the field $A/\mathfrak{m}$ is infinite. We denote $\mathcal{G}(I)$ simply by G. Let $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}G + G_+$. We denote by $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(*)$ $(i \in \mathbb{Z})$ the i^{th} local cohomology functor of G with respect to $\mathfrak{M}$. For each graded G-module E, let $[E]_n$ stand for the homogeneous component of E of degree n and let $\mathrm{a}_i(E) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(E)]_n \neq (0)\}$ $(i \in \mathbb{Z})$. We denote by K_G the graded canonical modules of G.

2 Proof of Theorem 1.1.

The purpose of this section is to prove Theorem 1.1. To do this, thanks to [GNN2], we may assume G is a Cohen-Macaulay ring. Then we obtain the a-invariant formula:

$$\mathrm{a}(G) = \max\{\mathrm{r}_i - i \mid s \leq i < \ell\} \cup \{\mathrm{r}_J(I) - \ell\}$$

(cf. [U]), so that we may assume $\mathrm{a}(G) = -s$ and $\mathrm{r}_s = 0$. The Cohen-Macaulayness of G induces the elements $a_1, \ldots, a_s$ is a super regular sequence. Therefore we may also assume $s = 0$.

In the rest of this section we throughout assume that our height unmixed ideal $I (\neq (0))$ is generically a complete intersection with $s = 0$ and G is a Cohen-Macaulay ring with $\mathrm{a}(G) = 0$. Let $\mathfrak{a} = (0) : I$ and let $\overline{A} = A/\mathfrak{a}$. We have $I \cap \mathfrak{a} = (0)$ and hence a_1 is $\overline{A}$-regular element (see [GN], 2.1). Since I is height unmixed, $\mathrm{K}_{\overline{A}} \cong I$. Let $\mathrm{Q}\left(\overline{A}\right)$ denote the total quotient ring of $\overline{A}$. We consider a commutative A-algebra

$$B := I\overline{A} :_{\mathrm{Q}(\overline{A})} I\overline{A}$$

that is finite as A-module. We have $\operatorname{depth} I\overline{A} = d$ because $\operatorname{depth} A/I \geq d - 1$ and $I \cong I\overline{A}$. Therefore the ring B is a maximal Cohen-Macaulay A-module of dimension d (see [AG], 2.2).

We put $T = \mathcal{G}(I\overline{A})$ and $S = \mathcal{G}(IB)$ for short. Look at the natural exact sequence $0 \to \overline{A} \to B \to B/\overline{A} \to 0$. Let $C = B/\overline{A}$. Then $\dim C \le d-2$. Since $I\overline{A} = IB$, we get the exact sequence

$$0 \to T \xrightarrow{\varphi} S \to C \to 0 \tag{$\sharp$}$$

of graded G-modules. Moreover we have the exact sequence

$$0 \to \mathfrak{a} \to G \xrightarrow{\varepsilon} T \to 0 \tag{$\sharp\sharp$}$$

of graded G-modules by [GN], 2.3. We note $\mathrm{K}_B \cong IB$ and hence $\mathrm{ht}_{B_\mathfrak{n}} IB_\mathfrak{n} = 1$ for all maximal ideal $\mathfrak{n}$ in B. Let $\widehat{A}$ denote the $\mathfrak{m}$-adic completion of A. Notice that $\widehat{A} \otimes_A S \cong \prod_{j=1}^{n} \mathcal{G}(IB_j)$ is the direct product of associated graded rings $S_j := \mathcal{G}(IB_j)$ of ideals IB_j (with positive analytic spread) in Cohen-Macaulay local rings B_j, which are finite as $\widehat{A}$-modules.

Claim 2.1. *S is a maximal Cohen-Macaulay G-module.*

Proof. We apply the local cohomology functors $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(*)$ $(i \in \mathbb{Z})$ to the graded exact sequences ($\sharp$) and ($\sharp\sharp$). Then we have the resulting graded exact sequences

$$0 \to \mathrm{H}^{d-1}_{\mathfrak{M}}(T) \to \mathrm{H}^{d}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{a}) \to \mathrm{H}^{d}_{\mathfrak{M}}(G) \to \mathrm{H}^{d}_{\mathfrak{M}}(T) \to 0$$

and

$$\mathrm{H}^{i-1}_{\mathfrak{M}}(T) \cong \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{a}) \qquad (i \le d-1)$$

of local cohomology modules from ($\sharp\sharp$). Therefore for any integers $i \le d-1$ we get $\mathrm{H}^{i-1}_{\mathfrak{M}}(T) = [\mathrm{H}^{i-1}_{\mathfrak{M}}(T)]_0$ and $\mathrm{a}(T) \le 0$ because $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{a}) = [\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{a})]_0$ (see [GH], 2.2) and $\mathrm{a}(G) = 0$. And by the resulting graded exact sequences

$$\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{M}}(T) \to \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{M}}(S) \to \mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{M}}(C) \qquad (i \le d-1)$$

and

$$\mathrm{H}^{d}_{\mathfrak{M}}(T) \cong \mathrm{H}^{d}_{\mathfrak{M}}(S)$$

of local cohomology modules from ($\sharp$), we have $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{M}}(S) = [\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{M}}(S)]_0$ for any integers $i \le d-1$ and $\mathrm{a}_d(S) \le 0$ because $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{M}}(T)$ and $\mathrm{H}^{i}_{\mathfrak{M}}(C)$ are concentrated in degree 0 for all $i \le d-1$ (see [GH], 2.2) and $\mathrm{a}(T) \le 0$.

Now assume that S is not a Cohen-Macaulay G-module. We put $t = \mathrm{depth} < d$. Because $\widehat{A} \otimes_A \mathrm{H}^t_{\mathfrak{M}}(S) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} \mathrm{H}^t_{\widehat{A}\otimes_A \mathfrak{M}}(S_j)$ as graded $\widehat{A} \otimes_A G$-modules, we can find $1 \le j \le n$ such that $(0) \ne \mathrm{H}^t_{\widehat{A}\otimes_A \mathfrak{M}}(S_j) = [\mathrm{H}^t_{\widehat{A}\otimes_A \mathfrak{M}}(S_j)]_0$. From [KN], 3.1 we obtain that $\mathrm{a}_t(S_j) < \mathrm{a}_{t+1}(S_j)$. However this is impossible since $\mathrm{a}_t(S_j) = 0$ and $\mathrm{a}_{t+1}(S_j) \le \mathrm{a}_{t+1}(S) \le 0$. $\square$

Apply the functor $\mathrm{Hom}_G(*, \mathrm{K}_G)$ to the graded exact sequences ($\sharp$) and ($\sharp\sharp$), and we get the following commutative and exact diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{K}_T \arrow[r, "\varepsilon^*"] & \mathrm{K}_G \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{a}, \mathrm{K}_G) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_G(T, \mathrm{K}_G) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{K}_S \arrow[r] \arrow[u, "\varphi^*", "\wr"'] & \mathrm{K}_G \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathrm{Coker}\, \varepsilon^* \circ \varphi^* \arrow[r] \arrow[u] & 0 & \\
 & & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

of graded G-modules where K_S denotes formally $\mathrm{Hom}_G(S, \mathrm{K}_G)$. We put $X = \mathrm{Coker}\, \varepsilon^* \circ \varphi^*$. Notice that $\mathrm{Hom}_G(\mathfrak{a}, \mathrm{K}_G)$ is concentrated in degree 0 (see [BH], 3.6.19 and [GH], 2.2). Therefore we get X is concentrated in degree 0. Now let $\omega = \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ stand for the canonical I-filtration of A ([GI]). Then we have $I^{i+1} \subseteq \omega_i$ for all $i \in \mathbb{Z}$ and $\mathrm{K}_G \cong \bigoplus_{i \geq 0} \omega_{i-1}/\omega_i$ as graded G-modules. Because $A/\omega_0 \cong [\mathrm{K}_G]_0 \twoheadrightarrow X$ there exists an ideal F in A such that $X \cong A/F$.

Claim 2.2. $I = F$.

Proof. We have $I \subseteq F$ because $I \,\mathrm{Hom}_G(\mathfrak{a}, \mathrm{K}_G) = (0)$. Assume $I \subsetneq F$ and choose $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A A/I$ so that $I_\mathfrak{p} \subsetneq F_\mathfrak{p}$. As I is height unmixed, we have $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = 0$. Since I is generically a complete intersection, we get $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}$, and hence $S_\mathfrak{p} = (0)$. Therefore $[\mathrm{K}_G]_\mathfrak{p} \cong [A/F]_\mathfrak{p}$ by $(0) = \mathrm{K}_{S_\mathfrak{p}} \cong [\mathrm{K}_S]_\mathfrak{p}$. We have $\mathrm{K}_{G_\mathfrak{p}} \cong A_\mathfrak{p}$ because I is generically a complete intersection. Thus $A_\mathfrak{p} \cong [A/F]_\mathfrak{p}$. Therefore $I_\mathfrak{p} = F_\mathfrak{p}$, which is impossible. $\square$

Since $I = F$, we get the exact sequence

$$0 \to \mathrm{K}_S \to \mathrm{K}_G \to A/I \to 0$$

of graded G-modules. Then we obtain the following.

Claim 2.3. $\mathrm{a}(S_\mathfrak{n}) = -1$ *for all maximal ideals* $\mathfrak{n}$ *in* B.

Proof. Since $[\mathrm{K}_G]_0 \cong A/\omega_0 \twoheadrightarrow A/I$ and $\omega_0 \supseteq I$, we have $\omega_0 = I$, so that $[\mathrm{K}_S]_0 = (0)$. Thus $\mathrm{a}_d(S) < 0$ (see [BH], 3.6.19). Let $\mathfrak{n}$ be an maximal ideal in B. Then $S_\mathfrak{n} = \mathcal{G}(IB_\mathfrak{n})$ is a Cohen-Macaulay ring with $\mathrm{a}(S_\mathfrak{n}) < 0$ because $\mathrm{a}_d(S) \geq \mathrm{a}(S_j) = \mathrm{a}(S_\mathfrak{n})$ for some $j = 1, 2, \ldots, n$. Furthermore thanks to a-invariant formula we get $\mathrm{a}(S_\mathfrak{n}) \geq \mathrm{r}_1(IB_\mathfrak{n}) - 1 \geq -1$ (recall that $\mathrm{ht}_{B_\mathfrak{n}} IB_\mathfrak{n} = 1$). $\square$

Claim 2.4. $\mathrm{depth}\, B/I^n B \geq d - n$ *for all* $1 \leq n \leq \ell$.

Proof. We will prove the claim by induction on n. Let $n = 1$. By the depth lemma applied to the exact sequence $0 \to IB \to B \to B/IB \to 0$ we get $\mathrm{depth}\, B/IB \geq d-1$, as $IB = I\overline{A}$. Let $n > 1$ and assume that $\mathrm{depth}\, B/I^{n-1}B \geq d - n + 1$. By our standard assumption stated in Theorem 1.1 we see $\mathrm{depth}\, I^{n-1}/I^n \geq d - n$ by virtue of the exact sequence $0 \to I^{n-1}/I^n \to A/I^n \to A/I^{n-1} \to 0$. We have $I^{n-1}/I^n \cong I^{n-1}\overline{A}/I^n\overline{A} \cong I^{n-1}B/I^nB$ because $I \cap \mathfrak{a} = (0)$ and $I\overline{A} = IB$, so that we get the exact sequence $0 \to I^{n-1}/I^n \to B/I^nB \to B/I^{n-1}B \to 0$. Then from the inductive hypothesis on n it follows that $\mathrm{depth}\, B/I^nB \geq d - n$. $\square$

Claim 2.5. *The graded G-module* K_S *is generated by elements of degree* 1.

Proof. Let $\mathfrak{n}$ be a maximal ideal in B. As $\lambda(IB_\mathfrak{n}) \leq \ell$, we get $\mathrm{depth}\, B_\mathfrak{n}/I^nB_\mathfrak{n} \geq (d-1) - n + 1$ for all $1 \leq n \leq \mathrm{ad}(IB_\mathfrak{n})$ by Claim 2.4. Since $\mathcal{G}(IB_\mathfrak{n})$ is a Cohen-Macaulay ring with $\mathrm{a}(S_\mathfrak{n}) = -1$, it follows from [GNN1], 1.1 that $\mathrm{K}_{S_\mathfrak{n}}$ is generated by elements of degree 1. Then we obtain that K_S is generated by elements of degree 1 (recall that $\widehat{A} \otimes_A S \cong \prod_{j=1}^n S_j$). $\square$

We take a minimal reduction $\mathfrak{J} (\subseteq JB_\mathfrak{n})$ of $IB_\mathfrak{n}$. Then $\mathrm{r}_{JB_\mathfrak{n}}(IB_\mathfrak{n}) \leq \mathrm{r}_\mathfrak{J}(IB_\mathfrak{n})$. Thanks to the a-invariant formula, we get $\mathrm{r}_\mathfrak{J}(IB_\mathfrak{n}) \leq \mathrm{a}(S_\mathfrak{n}) + \lambda(IB_\mathfrak{n}) \leq \ell - 1$, and hence $I^\ell B_\mathfrak{n} = JI^{\ell-1}B_\mathfrak{n}$. Therefore $I^\ell B = JI^{\ell-1}B$.

Claim 2.6. *If $\ell \geq 2$, then $\mathrm{r}_J(I) \leq \ell - 1$.*

Proof. Because $\ell \geq 2$, $I^\ell \overline{A} = JI^{\ell-1}\overline{A}$, as $IB = I\overline{A}$. Then $I^\ell \subseteq JI^{\ell-1} + \mathfrak{a}$, so that we have $I^\ell = JI^{\ell-1}$ since $I \cap \mathfrak{a} = (0)$. □

Claim 2.7. *Assume that $\ell = 1$. Then $\mathrm{r}_J(I) = 0$ if A/I is Cohen-Macaulay.*

Proof. We have $IB = JB$, as $\ell = 1$. Because A/I is Cohen-Macaulay, so is $\overline{A}$. Then $B = \overline{A}$, and hence $I = J$. □

We now come to the proof of Theorem 1.1. (1) $\Rightarrow$ (2) follows from a-invariant formula: $\mathrm{a}(G) = \max\{\mathrm{r}_i - i \mid 0 \leq i < \ell\} \cup \{\mathrm{r}_J(I) - \ell\}$. (3) $\Rightarrow$ (2) is obvious.

(2) $\Rightarrow$ (3): Thanks to a-invariant formula, we get the condition (2) is satisfied if and only if $\mathrm{a}(G) = 0$ (recall that G is Cohen-Macaulay). Hence it is sufficient to prove that $\ell \geq 2$ and $\mathrm{a}(G) = 0$ imply the condition (3). By claim 2.6 we get $\mathrm{r}_J(I) \leq \ell - 1$. Take an integer $1 \leq i < \ell$. We must show that $\mathrm{r}_i \leq \max\{0, i-1\}$. We take $\mathfrak{q} \in \mathrm{V}(I)$ such that $\mathrm{ht}_A \mathfrak{q} = i$ and $\mathrm{r}_i(I) = \mathrm{r}_{J_{i\mathfrak{q}}}(I_\mathfrak{q})$. We may assume $I_\mathfrak{q} \neq (0)$. Notice that $I_\mathfrak{q}$ is a height unmixed ideal with $\mathrm{ht}_{A_\mathfrak{q}} I_\mathfrak{q} = 0$ and $\mathrm{r}_0(I_\mathfrak{q}) = 0$. So we have $\lambda(I_\mathfrak{q}) > 0$. Considering the exact sequence $0 \to \mathrm{K}_S \to \mathrm{K}_G \to A/I \to 0$ of graded G-modules, we see $[\mathrm{K}_{G_\mathfrak{q}}]_0 \neq (0)$, so that $\mathrm{a}(G_\mathfrak{q}) = 0$. Take a minimal reduction $\mathfrak{J} (\subseteq J_{i\mathfrak{q}})$ of $I_\mathfrak{q}$. If $\lambda(I_\mathfrak{q}) \geq 2$, then $\mathrm{r}_\mathfrak{J}(I_\mathfrak{q}) \leq \lambda(I_\mathfrak{q}) - 1 \leq i - 1$ by Claim 2.6. Therefore we get $\mathrm{r}_i \leq i - 1$ because $\mathrm{r}_j(I_\mathfrak{q}) \leq \mathrm{r}_\mathfrak{J}(I_\mathfrak{q})$. Suppose $\lambda(I_\mathfrak{q}) = 1$. Then we have $\mathrm{r}_i \leq \mathrm{r}_\mathfrak{J}(I_\mathfrak{q}) \leq \mathrm{a}(G_\mathfrak{q}) + \lambda(I_\mathfrak{q}) = 1$ by a-invariant formula. Hence we may assume $i = 1$. Then $A_\mathfrak{q}/I_\mathfrak{q}$ is Cohen-Macaulay, so that $\mathrm{r}_\mathfrak{J}(I_\mathfrak{q}) = 0$ by Claim 2.7. Thus we get $\mathrm{r}_1 = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Recall that $\mathrm{K}_B = I$. Using Claim 2.5 and [HSV], 2.4 we obtain $\mathrm{K}_S = G_+$ because S is a Cohen-Macaulay ring. Therefore we have the exact sequence

$$0 \to G_+ \to \mathrm{K}_G \to A/I \to 0$$

of graded G-modules. Look at the homogeneous components

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & \to & A/\omega_0 & \to & A/I & \to 0 \\ 0 \to & I/I^2 & \to & \omega_0/\omega_1 & \to & 0 & \\ 0 \to & I^2/I^3 & \to & \omega_1/\omega_2 & \to & 0 & \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

of above, where $\omega = \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ is the canonical I-filtration of A ([GI]). By induction on i, we see that $\omega_i = I^{i+1}$ for all integers $i \geq 0$. In fact, we have $\omega_0 = I$. Let $i > 0$ and assume $\omega_{i-1} = I^i$. We note that $\omega_i \supseteq I^{i+1}$. From bijections above we obtain that $I^i/I^{i+1} \cong \omega_{i-1}/\omega_i = I^i/\omega_i$, and hence the natural surjective map $I^i/I^{i+1} \to I^i/\omega_i$ is bijective. Thus $\omega_i = I^{i+1}$ for all $i \geq 0$. This means G is a Gorenstein ring.

References

[AG] Y. Aoyama and S. Goto, On the endomorphism ring of the canonical module, J. Math. Kyoto Univ. 25-1 (1985), 21-30.

[BH] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen-Macaulay rings", Cambridge studies in advanced mathematics, Vol. 39, Cambridge University Press. Cambridge/New York/Port Chester/Melbourne/Sydney, 1993.

[GH] S. Goto and S. Huckaba, On graded rings associated to analytic deviation one ideals, Amer. J. Math. 116 (1994), 905-919.

[GI] S. Goto and S.-i. Iai, Embeddings of certain graded rings into their canonical modules, J. Algebra 228 (2000), 377-396.

[GN] S. Goto and Y. Nakamura, On the Gorensteinness in graded rings associated to ideals of analytic deviation one, Contemporary Mathematics 159 (1994), 51-72.

[GNN1] S. Goto, Y. Nakamura, and K. Nishida, Cohen-Macaulayness in graded rings associated to ideals, J. Math. Kyoto Univ. 36 (1996), 229-250.

[GNN2] S. Goto, Y. Nakamura, and K. Nishida, Cohen-Macaulay graded rings associated to ideals, Amer. J. Math. 118 (1996), 1197-1213.

[HH] S. Huckaba and C. Huneke, Powers of ideals having small analytic deviation, Amer. J. Math. 114 (1992), 367-403.

[HSV] J. Herzog, A. Simis, and W. V. Vasconcelos, On the canonical module of the Rees algebra and the associated graded ring of an ideal, J. Algebra 105 (1987), 285-302.

[KN] T. Korb and Y. Nakamura, On the Cohen-Macaulayness of multi-Rees algebras and Rees algebras of powers of ideals, J. Math. Soc. Japan 50 (1998), 451-467.

[U] B. Ulrich, Lecture notes on Cohen-Macaulayness of associated graded rings and reduction numbers of ideals. (Preprint) LN for the Workshop on Commutative Algebra in Trieste, 1994.

Department of Mathematics
School of Science and Technology
Meiji University
214-71 JAPAN
e-mail: goto@math.meiji.ac.jp

Mathematics laboratory
Hokkaido University of Education, Sapporo
002-8502 JAPAN
e-mail: iai@sap.hokkyodai.ac.jp

The supremum of the difference between the multiplicity and the tight closure of parameter ideals

中村幸男*

1 序文

本報告は後藤四郎先生との共同研究によるものである.

$(R, \mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ のネーター局所環, I を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. $I^{[q]}=(a^q \mid a \in I)$ 但し $q=p^e$, $R^0=R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} R} \mathfrak{p}$ で表し, I^* で I の tight closure を, $\mathrm{e}_I(R)$ で R の I に関する重複度表すものとする. すると, パラメーターイデアル $\mathfrak{q}$ に対して常に,

$$\ell_R(R/\mathfrak{q}) \geq \mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R) \quad \text{and} \quad \ell_R(R/\mathfrak{q}) \geq \ell_R(R/\mathfrak{q}^*)$$

が成り立っている.

そこで $\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R)$ と $\ell_R(R/\mathfrak{q}^*)$ とを比べて大小関係があるのだろうかという問題が自然に生じる. この問題に対して次の結果が得られた. これは渡辺–吉田による予想を肯定的に解決したものである.

定理 1.1 ([GN1]). R は 正標数の *Cohen-Macaulay* 局所環の準同型像で *equi-dimensional* なものとする. このときすべてのパラメーターイデアル $\mathfrak{q}$ に対してを $\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R) \geq \ell_R(R/\mathfrak{q}^*)$ が成り立つ. さらに, R が *unmixed* のとき, あるパラメーターイデアルで, 等号 $\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R)=\ell_R(R/\mathfrak{q}^*)$ が成り立てば, R は *F-rational, Cohen-Macaulay* 局所環であり, 従ってすべてのパラメーターイデアルに対して等号が成立する.

この定理より, 若干の仮定が必要であるが, パラメータイデアル $\mathfrak{q}$ による差 $\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R)-\ell_R(R/\mathfrak{q}^*)$ が非負であることが保障される. そこでこの差の振る舞いについて考えてみよう. そこで

$$s(R)=\sup_{\mathfrak{q}} \mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R)-\ell_R(R/\mathfrak{q}^*)$$

とおき, この値の有界性について考えてみたい. よく知られているように, $\sup_{\mathfrak{q}} \ell_R(R/\mathfrak{q})-\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R)$ が有界になる環は FLC 環である. $s(R)$ が有界となる条件も FLC に似た条件 (例えば, 極大イデアル以外で局所化すれば良い性質を持つような) で言い換えることが出来ないであろうかという問題である.

$$\ell_R(\mathfrak{q}^*/\mathfrak{q})=(\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R)-\ell_R(R/\mathfrak{q}^*))+(\ell_R(R/\mathfrak{q})-\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R))$$

となることに注意すれば, R が FLC のときは $s(R)$ の有界性と $\sup_{\mathfrak{q}} \ell_R(\mathfrak{q}^*/\mathfrak{q})$ とが同値である事がわかる. そして $\sup_{\mathfrak{q}} \ell_R(\mathfrak{q}^*/\mathfrak{q})$ の有界条件として次の結果が得られた.

*The author is supported by a Grant-in-Aid for scientific Research Japan.
1991 Mathematics Subject classification: Primary 13A35; Secondary 13H10; 13H15.
Key words and phrases: tight closure; F-rational ring; multiplicity.

定理 1.2. R を *excellent* で *equi-demmensional* な局所環とすと, 次の 3 条件は同値である.

(1) $\sup_{\mathfrak{q}} \ell_R(\mathfrak{q}^*/\mathfrak{q}) < \infty$.

(2) 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \setminus \{\mathfrak{m}\}$ に対して $R_{\mathfrak{p}}$ は *Cohen-Macaulay, F-rational.*

(3) R は *FLC* で, $\ell_R((0)^*_{\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R)}) < \infty$.

もちろんこのとき $s(R)$ も有限値である.

$s(R)$ が有限となる必要十分条件は分からなかったのだが, 必要条件を与えるものとして次の結果が得られた.

定理 1.3. R は *excellent* な局所環で $\operatorname{Ass} R \subseteq \operatorname{Assh} R \cup \{\mathfrak{m}\}$ を満たすものとする. もし $s(R)$ が有限ならば次の 2 つの集合 C と F は一致する.

· $C = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid R_{\mathfrak{p}}$ は *Cohen-Macaulay*$\} \setminus \{\mathfrak{m}\}$

· $F = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid R_{\mathfrak{p}}$ は *F-rational*$\} \setminus \{\mathfrak{m}\}$

局所環が FLC である場合には, 定理 1.3 の条件が $s(R)$ が有限性の必要十分条件となっていることが定理 1.2 より分かる. 局所環が FLC でない場合でも, 定理 1.3 の条件が $s(R)$ が有限性の必要十分となるであろうことを予想したいがまだ何も分かっていない状態である. 本報告集ではシンポジウムのときに紹介した定理 1.2 の証明と紹介する予定であった定理 1.3 の証明の概略を書き記すことにする.

2 定理 1.2, 1.3 の証明

いくつかの準備から始める. まず始めに川崎氏の結果 ([K]; Corollary 1.2) によって標数 p の excellent 局所環は常に標数 p の Cohen-Macaulay 局所環の準同型像になることを注意しておく. 局所環 R のパラメーター系 $a_1, a_2, ..., a_d$ ($\dim R = d$) に対して,

$$\{R/(a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n) \xrightarrow{a_1 \cdots a_d} R/(a_1^{n+1}, a_2^{n+1}, ..., a_d^{n+1})\}$$

は帰納系をなし, その極限は d-次局所コホモロジー加群 $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R)$ となる. R のイデアル K_n を, $R/(a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n)R$ から $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R)$ へ向かう写像の核が $K_n/(a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n)R$ となるようにとる. すると, $\{R/K_n \xrightarrow{a_1 \cdots a_d} R/K_{n+1}\}$ は各写像が単射となる帰納系をなし, その極限はやはり $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R)$ となるので, $\varinjlim R/K_n = \bigcup_{n>0} R/K_n = \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R)$ と書き表す事ができる. 特に $a_1, a_2, ..., a_d$ が USD-列をなすときは, USD-列の Monomial Property (cf. Theorem 2.3 of [GY]) により, K_n は $\Sigma(a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n)$ 一致する. ここで

$$\Sigma(a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n) := \sum_{i=1}^{d} ((a_1^n, ..., \widehat{a_i^n}, ..., a_d^n) : a_i^n) + (a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n),$$

とした. また, 簡単のため $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, ..., a_d)$ のとき $\Sigma(\mathfrak{q}) = \Sigma(a_1, a_2, ..., a_d)$ と書く事にする. R が 標数 p の Cohen-Macaulay 局所環の準同型像で equidimensional のときは, tight closure の Colon Capturing Property (cf. [HH]; Theorem 7.9) によって $\Sigma(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{q}^*$ となることが保障されており, $\{(a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n)^*/\Sigma(a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n)\}$ もまた帰納系をなす. この帰納系について次のことが成立する.

命題 2.1. R は *excellent, equidimensional,* 標数 p の局所環とする. R のパラメータ系 $a_1, a_2, ..., a_d$ が *USD-*列をなすとき,

$$(0)^*_{\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R)} = \bigcup_{n>0} (a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n)^* / \Sigma(a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n).$$

である. 特に $(0)^*_{\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R)}$ の長さが有限となる必要十分条件は

$$\sup_n \{\ell_R((a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n)^* / \Sigma(a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n))\} < \infty$$

となることである.

補題 2.2. R は *FLC* 局所環とし $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, ..., a_d)$ をパラメーターイデアルとする. このとき任意の整数 $n > 0$ に対し,

$$\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R) - \ell_R(R/\mathfrak{q}) \leq \mathrm{e}_{(a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n)}(R) - \ell_R(R/(a_1^n, a_2^n, ..., a_d^n))$$

となる.

この補題 2.2 より, R が FLC のとき $s(R)$ の有限性を調べるにはUSD-列からなるパラメーター系をみれば十分である事がわかる. R のイデアル I に対して, $\mathrm{U}(I) = \bigcup_{n>0} I : \mathfrak{m}^n$ と置き, これを I の unmixed component とよぶ. R の元の列 $a_1, a_2, ..., a_s$ が

$$(a_1, a_2, ..., a_i)R : a_{i+1} \subseteq \mathrm{U}((a_1, a_2, ..., a_i)R) \quad (0 \leq i < s)$$

を満たす時 $a_1, a_2, ..., a_s$ は filter regular sequence であるという. 以上の準備の下, 定理 1.2 の証明を与える. この定理の証明の一部にはレフェリーに教えてもらったことがあることを記しておく.

定理 *1.2* の証明. (1) $\Longrightarrow$ (2): まず R は FLC となる. 実際, パラメータイデアル $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\ell_R(\mathfrak{q}^*/\mathfrak{q}) = (\ell_R(R/\mathfrak{q}) - \mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R)) + (\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R) - \ell_R(R/\mathfrak{q}^*)), \qquad (*)$$

であり, 定理 1.1 より $\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R) - \ell_R(R/\mathfrak{q}^*)$ が非負であることが言えているので $\sup_{\mathfrak{q}}\{\ell_R(R/\mathfrak{q}) - \mathrm{e}_{\mathfrak{q}}(R)\}$ は有限値をなす. これは R が FLC であることを意味する (cf. [CTS]).

$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ と取れば, $R_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay である. $R_{\mathfrak{p}}$ が F-rational となることを言う. ここで $\mathrm{ht}_R \mathfrak{p} = d-1$ と仮定してよい. パラメーターイデアル $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, ..., a_d)$ を $\mathfrak{q}_{d-1} = (a_1, a_2, ..., a_{d-1}) \subseteq \mathfrak{p}$ となるように取る. $N = \sup_{\mathfrak{q}}\{\ell_R(\mathfrak{q}^*/\mathfrak{q})\}$ とおけば, 任意の $n > 0$ に対して

$$\mathfrak{m}^N \mathfrak{q}^*_{d-1} \subseteq \mathfrak{m}^N(\mathfrak{q}_{d-1} + (a_d^n))^* \subseteq \mathfrak{q}_{d-1} + (a_d^n)$$

となる. Intersection Theorem により $\mathfrak{m}^N \mathfrak{q}^*_{d-1} \subseteq \mathfrak{q}_{d-1}$ であり, $\mathfrak{q}^*_{d-1} R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}_{d-1} R_{\mathfrak{p}}$ となる. tight closure と局所化との可換性は一般には言えないことだが, 長さ $d-1$ の s.s.o.p で生成されたイデアルについては tight closure と局所化との可換性は成り立ち (e,g, [N]; Proposition 4.4) $\mathfrak{q}^*_{d-1} R_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{q}_{d-1} R_{\mathfrak{p}})^*$ となる. よってパラメータイデアル $\mathfrak{q}_{d-1} R_{\mathfrak{p}}$ は tightly closed となり $R_{\mathfrak{p}}$ が *F*-rational となることが従う.

(2) $\Longrightarrow$ (3): R が FLC となるのはよい. $\dim R \geq 1$ と仮定してよい. R を $R/\sqrt{(0)}$ で置き換えて R は被約と仮定してよい. $f_1, f_2, ..., f_d$ を R のパラメーター系とする. このとき $R[1/f_i]$ が F-rational なので Vélez の結果 ([V]; Theorem 3.9) より, 各 i について f_i の適当なベキがパラメーター test element となる. よって十分大きい n で $\mathfrak{a} = (f_1^n, f_2^n, ..., f_d^n)R$

とおけば, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルであり, 任意のパラメーターイデアル I に対して $\mathfrak{a}I^* \subseteq I$ を満たす. 今, $(\underline{a}) = a_1, a_2, ..., a_d$ をパラメータ系で USD-列をなすものをとる. (R が FLC なのでこれは可能.) 命題 2.1 より, $(0)^*_{\mathrm{H}^d_\mathfrak{m}(R)} = \varinjlim (\underline{a}^n)^*/(\underline{a}^n)$ となったので $\mathfrak{a}(0)^*_{\mathrm{H}^d_\mathfrak{m}(R)} = (0)$ となる. これは $(0)^*_{\mathrm{H}^d_\mathfrak{m}(R)}$ が長さ有限である事を意味する.

(2) $\Longrightarrow$ (3): (*) より $s(R) < \infty$ をいえばよい. 補題 2.2 よりパラメーターイデアル $\mathfrak{q}$ の生成系 $a_1, a_2, ..., a_d$ は USD-列としてよい.

今 $\mathfrak{q} \subseteq \mathrm{U}(\mathfrak{q}_{d-1}) + a_dR \subseteq \Sigma(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{q}^*$ に注意すれば

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_\mathfrak{q}(R) - \ell_R(R/\mathfrak{q}^*) &= \ell_R(\mathfrak{q}^*/\,\mathrm{U}(\mathfrak{q}_{d-1}) + a_dR) \\ &= \ell_R(\mathfrak{q}^*/\Sigma(\mathfrak{q})) + \ell_R(\Sigma(\mathfrak{q})/\,\mathrm{U}(\mathfrak{q}_{d-1}) + a_dR)\ , \\ &\leq \ell_R(\mathfrak{q}^*/\Sigma(\mathfrak{q})) + \ell_R(\Sigma(\mathfrak{q})/\mathfrak{q}). \end{aligned}$$

である. ここで最初の等式は $a_1, a_2, ..., a_d$ が filter regular sequence をなすと言う事から従う. さらに $\ell_R(\Sigma(\mathfrak{q})/\mathfrak{q}) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} \ell_R(\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(R))$ (cf. [G]; Proposition 3.6) が成り立ち, 命題 2.1 より $\mathfrak{q}^*/\Sigma(\mathfrak{q}) \subseteq (0)^*_H$ となるので, $s(R) < \infty$ が従う. □

以下, R は標数 p の Cohen-Macaulay 局所環の準同型像と仮定し定理 1.3 の証明を与える.

補題 2.3 (GN1; Lemma 3.2). R は $\operatorname{Ass} R \subsetneq \operatorname{Assh} R \cup \{\mathfrak{m}\}$ を満たすとする. このとき

$$\mathcal{F} := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathrm{ht}_R\, \mathfrak{p} > 1 = \operatorname{depth} R_\mathfrak{p},\ \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$$

は有限集合である.

定理 *1.3* の証明. $C \subseteq F$ を示せばよい. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ で $R_\mathfrak{p}$ が Cohen-Macaulay となるものとする. $V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} R$ を R の non Cohen-Macaulay locus とする. $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ とし, $P \in \operatorname{Max} R[1/f]$ とれば, R_P は Cohen-Macaulay であり, $\mathrm{ht}_R\, P = d-1$ となる.

Claim 1. P の元 $a_1, a_2, ..., a_{d-1}$ で *filter regular sequence* をなすものがとれる.

Cliam 1 の証明. $d=1$ のときはよい. $d \geq 2$ とする. 素イデアルの集合 $\mathcal{F}$ を 補題 2.3 で求めたものとする. このとき任意の $Q \in \mathcal{F}$ に対して $P \not\subseteq Q$ である. そこで

$$a_1 \in P \setminus (\bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q) \cup (\bigcup_{Q \in \operatorname{Assh} R} Q)$$

ととれば, $\operatorname{Ass} R/a_1R \subseteq \operatorname{Assh} R/a_1R \cup \{\mathfrak{m}\}$ が成り立つ. 実際, take $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass}_R R/a_1R$ を $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{m}$ となるものとすると, $\operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}_1} = 1$ であり これは $\mathrm{ht}_R\, \mathfrak{p}_1 = 1$ を意味する. よって $\dim R/\mathfrak{p}_1 = \dim R/a_1R$ であり $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Assh} R/a_1R$. この取り方から a_1 は長さ 1 の filter regular sequence となる. 以下繰り返す事によって claim は従う. □

そこで $N = s(R)$ とおく. R の元 a_d を $a_1, ..., a_{d-1}, a_d$ がパラメーター系となるようにとると, $a_1, ..., a_{d-1}, a_d$ は filter regular sequence をなしていることに注意する. $I = (a_1, a_2, ..., a_{d-1})R$ とし $J = I + a_d^nR$ とおく. すると

$$\begin{aligned} \ell_R(J^*/\,\mathrm{U}(I) + a_d^nR) &= \ell_R(R/\,\mathrm{U}(I) + a_d^nR) - \ell_R(R/J^*) \\ &= \mathrm{e}_J(R) - \ell_R(R/J^*) \\ &\leq N \end{aligned}$$

よって任意の $n > 0$ に対して $\mathfrak{m}^N I^* \subseteq \mathfrak{m}^N J^* \subseteq \mathrm{U}(I) + a_d^n R$. Intersection Theorem により $\mathfrak{m}^N I^* \subseteq \mathrm{U}(I)$. Colon Capturing Property により $I^* = \mathrm{U}(I)$. すると $\mathrm{U}(I)_P = IR_P$ であり, 一方 $I^* R_P = (IR_P)^*$ も成り立つので, IR_P は tightly closed となる. よって R_P は F-rational となり定理が従う. □

References

[CTS] N. T. Cuong, N. V. Trung and P. Shenzel, *Verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Moduln*, M. Nachr, **85** (1978), 57-73

[G] S. Goto, *On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings*, J. Algebra, **85** (1983), 490-534.

[GN1] S. Goto and Y. Nakamura, *Multiplicity and tight closures of parameters*, J. Algebra, **244** (2001), 302-311.

[GN2] S. Goto and Y. Nakamura, *The bound of the difference between parameter ideals and their tight closures*, to appear in Tokyo J. Math.

[GY] S. Goto and K. Yamagishi, *The theory of unconditioned strong d-sequences and modules of finite local cohomology*, Preprint (1980).

[HH] M. Hochster and C. Huneke, *Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31-116.

[K] T. Kawasaki, *Arithmetic Macaulayfication of a local ring*, Preprint, (1999).

[N] Y. Nakamura, *On numerical invariants of Noetherian local rings of characteristic p*, J. Math. Kyoto Univ., **34**, (1994), 1-13.

[WY] K. Watanabe and K. Yoshida *Hilbert-Kunz multiplicity and an inequality between multiplicity and colength*, J. Algebra, **230** (2000), 295-317.

[V] J. D Vélez *Openness of the F-ratuinal locus and Smooth Base Change*, J. Algebra, **172** (1995), 425-453.

Department of Mathematics
School of Science and Technology Meiji University
Higashimita, Tama-ku, Kawasaki-shi 214-8571, Japan
ynakamu@math.meiji.ac.jp

Generation of lattice ideals

衛藤 和文

ここでは, 今回の環論シンポジウムで講演した内容のまとめとその補足をおこなう. まず, 今回の主テーマは次の問題を考えることである.

問題. I を lattice ideal, $f_1, \ldots, f_s \in I$ を binomial とする. このとき, いつ

$$I = (f_1, \ldots, f_s) \quad \text{または} \quad I = \sqrt{(f_1, \ldots, f_s)}$$

が成り立つか?

定義等の説明は 1 節以降におこなう. この問題が部分的にも解決すると, さまざまな結果が出てくる. 例えば, 次の定理はそのようなものの 1 つである.

Theorem 1 *simplicial almost complete intersection lattice ideal* は *set theoretic complete intersection.* 但し, *lattice ideal* が *simplicial* であるとは, その *height* と同じ *toric ideal* を含み, その *ideal* が *simplicial semigroup ring* を定義することである.

この結果は, 2001 年 7 月の Grenoble における研究集会で発表した.

また, この定理は simplicial でないと成り立たないことも知られている. [1, Prop.5.22] によれば,

$$I = (X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21}, X_{11}X_{23} - X_{13}X_{21}, X_{12}X_{23} - X_{13}X_{22})$$

は set theoretic complete intersection にならない non simplicial semigroup ring の定義イデアルである.

1 基本的事項

ここでは, lattice ideal に関する定義をおこなう.
N を自然数, k を体とし, $A = k[X_1, \ldots, X_N]$, $B = k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_N^{\pm 1}]$ とする. $\mathbb{Z}^N$ の元 $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$ に対し, X^v で単項式 $X_1^{v_1} X_2^{v_2} \cdots X_N^{v_N}$ をあらわすものとする. $\mathbb{Z}^N$ の部分加群 V に対し, すべての $1 - X^v$ $(v \in V)$ という形の多項式で生成される B のイデアル J を考え, A のイデアル $I(V) = J \cap A$ を V に付随した lattice ideal という. 定義より次が成り立つことがわかる.

(1) lattice ideal $I(V)$ は $X^v - X^w$ という形の多項式 (これを binomial という) で生成される $(w - v \in V)$.

(2) $\mathrm{ht}\, I(V) = \mathrm{rank}\, V$.
$\because$ $\mathrm{ht}\, I(V) = \mathrm{ht}\, I(V) \otimes_A B$.

(3) A の binomial ideal I が lattice ideal であるための必要十分条件は, $X_1, X_2, \ldots, X_N$ がすべて A/I 上 non zero divisor となることである. 但し, binomial ideal とは, binomial で生成されたイデアル.

Proof. I が lattice ideal のとき, 各 X_i が non zero divisor になることは明らか. 逆に, すべての X_i が non zero divisor とする. $V = \{v - w : X^v - X^w \in I\}$ とおく. V は Z^N の部分加群で, 明らかに, $I \subset I(V)$ が成立. また, binomial f が $I(V)$ に属するとき, ある単項式 M が存在し, $Mf \in I$ である. 仮定より, $f \in I$ となり, $I = I(V)$ は lattice ideal. Q.E.D.

(4) 次は同値. このとき, V を positive という ([4, Lemma 1.1]).

(a) ある正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ が存在して, V は $\mathrm{Ker}\,(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ に含まれる. 但し, $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ は $\mathbb{Z}^N$ から $\mathbb{Z}$ への写像.

(b) V の 0 以外の元はすべて正の成分と負の成分をともにもつ.

(c) $I(V) \subset (X_1, X_2, \ldots, X_N)$

(5) 次は同値. このとき, $I(V)$ を toric ideal という.

(a) $\mathbb{Z}^N/V$ が torsion free

(b) $I(V)$ が素イデアル

V が positive で $I(V)$ が素イデアルのとき, $A/I(V)$ はアフィン半群環になる.

以下, つねに V が positive であると仮定する. また, $v \in V$ に対し, binomial $F(v) = X^{-v^-} - X^{v^+}$ と定義する. このとき, イデアルの生成について次が成り立つ.

Proposition 2 ([6]) (1) $I(V) = (F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_s))$ が成り立つとき, $v_j \in V$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ かつ $V = \sum \mathbb{Z} v_j$ が成り立つ.

(2) $\mathrm{char}\, k = 0$ のとき, $\sqrt{I(V)} = I(V)$.

(3) $\mathrm{char}\, k = 0$ のとき, $I(V) = \sqrt{(F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_s))}$ ならば, $V = \sum \mathbb{Z} v_j$ である.

証明の概略. (1) $v_j \in V$ は自明. 右辺の生成系にから Gröbner base を Buchberger のアルゴリズムで生成すると, それらはすべて $MF(w)$ ($w \in \sum \mathbb{Z}v_j$) とあらわされる. $v \in V$ のとき, $F(v)$ の leading term を Gröbner base の元で割っていき, その表現を考えると, v はその表現にあらわれる w で生成される $\mathbb{Z}$ 上の部分加群に含まれ, したがって $v \in \sum \mathbb{Z}v_j$ をえる.
(2) k を代数閉体と仮定してよい. さらに, $\sqrt{I(V)} = I(V)$ となるための必要十分条件は, $\sqrt{I(V) \otimes_A B} = I(V) \otimes_A B$ なので, B 上で考える. この場合は, [2, Corollary 2.2] で証明済みである.
(3) $W = \sum \mathbb{Z}v_j$ とおく. 明らかに, $W \subset V$ が成立. よって, $I(W) \subset I(V)$ である. radical をとれば,

$$\sqrt{(F(v_1), \dots, F(v_s))} \subset \sqrt{I(W)} \subset \sqrt{I(V)}.$$

したがって仮定と (2) より, $I(W) = I(V)$, よって $W = V$ をえる. Q.E.D.

Example $\operatorname{char} k > 0$ のときは, (2), (3) は不成立. $\operatorname{char} k = 3$, $V = \mathbb{Z}v$, $v = (3, -3)$ とする. このとき, $I(V) = (X_1^3 - X_2^3)$, $\sqrt{I(V)} = (X_1 - X_2)$.

Note $\operatorname{char} k = p > 0$ のときは (2) に関して次が成り立つ. ある $s > 0$ が存在して,

$$\sqrt{I(V)} = I\left(\frac{1}{p^s}V\right),$$

ただし, $\frac{1}{p^s}V = \{v \in \mathbb{Z}^N : p^s v \in V\}$.

Note $\operatorname{char} k = 0$ のとき, (3) より次の結果をえる ([6]).

$$I(V) = (F(v_1), \dots, F(v_r)) \iff I(V) = \sqrt{(F(v_1), \dots, F(v_r))},$$

ただし, $r = \operatorname{rank} V$.

2 主結果

Definition $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{Z}^N$ とする. $wh(v_1, \dots, v_s)$ を $(F(v_1), \dots, F(v_s))$ を含む変数で生成されたイデアルの height の最小値とする. さらに, 帰納的に $\overline{h}(v_1, \dots, v_s)$ を次のように定義する.

$$\overline{h}(v_1, \dots, v_s) = \max\{s - wh(v_1, \dots, v_s) + 1, \overline{h}(\{v_j\}_{j \in T}) + \overline{h}(\{v_j\}_{j \notin T})\}$$

但し, T は $\{1, \dots, s\}$ のすべての空でない proper set を動く.

定義より, $\overline{h}(v_1) = 0$ が成り立つ.

Example

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \overline{h} = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c}\begin{pmatrix} + & - & - & 0 & - \\ - & + & 0 & - & - \\ 0 & - & + & - & + \\ - & 0 & - & + & + \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \overline{h} = 2 \end{array}$$

Theorem 3 (**[7, Theorem 1.6]**) $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{Z}^N$ とし, $V = \sum \mathbb{Z} v_j$, $r = \operatorname{rank} V$, $J = (F(v_1), \ldots, F(v_s))$ とおく. さらに, V が *positive* のとき,

(0) $\overline{h}(v_1, \ldots, v_s) \geq s - r$.

(1) $\overline{h}(v_1, \ldots, v_s) = s - r$ かつ J の *minimal prime ideal* の *height* がすべて r のとき, $\sqrt{J} = \sqrt{I(V)}$ が成立.

(2) さらに, J の *embedded prime ideal* が存在しないとき, $J = I(V)$ が成立.

Proof. $\mathfrak{p}$ を J を含む prime ideal とする. もし, $\mathfrak{p}$ が $X_1, \ldots, X_N$ のいずれも含まないとき, $\mathfrak{p}$ は B の prime ideal の引き戻しになるので, $I(V)$ を含む. (よって, $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \geq r$.) 一方, $\mathfrak{p}$ が変数 X_i のいずれかを含むとき, 以下の条件を満足するイデアル $M + I(W)$ が存在する;

$$M = (X_i)_{i \in T}, \quad W \subset V, \quad \left(\bigcup_{v \in W} \operatorname{supp} v \right) \cap T = \emptyset,$$
$$\operatorname{ht} M + I(W) = \operatorname{ht} \mathfrak{p}.$$

このとき, $\operatorname{ht} M + I(W) \geq s + 1 - \overline{h}(v_1, \ldots, v_s)$ が成立. もし, $\overline{h}(v_1, \ldots, v_s) < s - r$ と仮定すると, $\operatorname{ht} M + I(W) > r + 1$. そこで, $\mathfrak{p}$ を $J + (X_1)$ の minimal prime ideal とすると, $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \leq r + 1$ となり矛盾. よって, (0) が示せた.

次に, $\mathfrak{p}$ を J の minimal prime ideal とする. (1) の条件が成り立つとき, $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = r$ でなければならない. したがって, 上の議論より, $\mathfrak{p}$ は変数 X_i を含むことができなくて, $I(V)$ を含まざるをえない. すなわち, $\sqrt{J} = \sqrt{I(V)}$ をえる.

さらに (2) の条件が成り立つとき, J の associated prime はすべて minimal なので, 変数 X_i を含む J の associated prime は存在しない. すなわち, X_i

は A/J 上 non zero divisor. よって, J は lattice ideal で, $I(V)$ に等しい.
Q.E.D.

Remark

(1) $r \leq 2$ または $\geq N-2$ のとき, つねに J の minimal prime ideal の height はすべて r に等しい.

証明の概略. $r=1$ のときは自明. $r=N-1$ のときは, J の minimal prime ideal の height は N または $N-1$ で, height が N のとき, maximal ideal $(X_1,\ldots,X_N)$ になり, minimal ではない.

$r=2$ または $N-2$ のときは, 次を示す.

> J を含む prime ideal $\mathfrak{p}$ について, $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} > r$ かつ $\mathfrak{p}$ が height r の $M+I(W)$ 型のイデアル (定理の証明中に出てきたもの) を含まないとき, $\mathfrak{p}$ は $I(V)$ を含む.

この主張により結果をえる. Q.E.D.

(2) $v_1,\ldots,v_r$ が一次独立で, $\mathrm{ht}\,(F(v_1),\ldots,F(v_r)) = r$ が成り立つとき, $J = (F(v_{j_1}+v_{j_2}+\cdots+v_{j_s}))_{1\leq s\leq r, 1\leq j_1<\cdots<j_s\leq r}$ とおけば, A/J は Cohen-Macaulay ([5, Corollary 2.6]).

(3) $v_1,\ldots,v_r$ が一次独立のとき, $J=(F(v_1),\ldots,F(v_r))$ の minimal prime ideal はすべて $v_1,\ldots,v_r$ の成分の符号より決定できるが, embedded prime ideal は決定できないことが知られている ([8]).

Example $v_1,\ldots,v_s \in \mathbb{Z}^N$, $V=\sum \mathbb{Z}v_j$ を positive of rank r, $J=(F(v_1),\ldots,F(v_s))$ とする. 次が成立.

(1) $s=r$ のとき,

$$\overline{h}(v_1,\ldots,v_r)=0 \iff J=I(V).$$

(2) $s=r+1$ のとき, $v_1+\cdots+v_q=0$ $(\exists q\leq r+1)$ ならば,

$$\overline{h}(v_1,\ldots,v_{r+1})=1 \iff J=I(V).$$

上の結果より, 次をえる.

Corollary 4 V を *positive of rank* r とする.

(1) $I(V)$ が *complete intersection* $\iff \begin{cases} \exists v_1, \ldots, v_r \in V; \\ \overline{h}(v_1, \ldots, v_r) = 0. \end{cases}$

(2) $I(V)$ が *almost complete intersection* $\iff \begin{cases} \exists v_1, \ldots, v_{r+1} \in V; \\ \overline{h}(v_1, \ldots, v_{r+1}) = 1, \\ v_1 + \cdots + v_q = 0, \\ (\exists q \leq r+1). \end{cases}$

参考文献

[1] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal rings*, Lecture Notes in Math., 1327, Springer, Berlin, 1988

[2] D. Eisenbud and B. Sturmfels, Binomial ideals, *Duke Math. J.*, **84** (1996) 1-45.

[3] K. Eto, Defining ideals of complete intersection monoid rings, *Tokyo J. Math.*, **18** (1995) 185-191.

[4] K. Eto, Defining ideals of semigroup rings which are Gorenstein, *Comm. in algebra*, **24** (1996) 3969-3978.

[5] K. Eto, A free rersolution of a binomial ideal, *Comm. in Algebra*, **27** (1999) 3459-3472.

[6] K. Eto, Binomial arithmetical rank of lattice ideals, *preprint*, 2000.

[7] K. Eto, Almost complete intersection lattice ideals, *preprint*, 2001.

[8] S. Hoşten and J. Shapiro, Primary decomposition of lattice basis ideals, Symbolic computation in algebra, analysis, and geometry (Berkeley, CA, 1998), *J. Symbolic Comput.*, **29** (2000) 625–639

〒 345-8501
南埼玉郡宮代町学園台 4-1
日本工業大学 共通系
e-mail : etou@nit.ac.jp
衛藤 和文

ROOT SYSTEMS AND LEXICOGRAPHIC GRÖBNER BASES

HIDEFUMI OHSUGI

INTRODUCTION

The present paper is a brief draft based on a joint work with Takayuki Hibi. Let $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ be a finite set and let $K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}, s] = K[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}, s]$ denote the Laurent polynomial ring over a field K. We associate each $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ with the monomial $\mathbf{t}^\alpha s = t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n} s \in K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}, s]$ and write $\mathcal{R}_K[\mathcal{A}]$ for the subalgebra of $K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}, s]$ generated by all monomials $\mathbf{t}^\alpha s$ with $\alpha \in \mathcal{A}$. Let $K[\mathbf{x}] = K[\{x_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}]$ denote the polynomial ring in $\sharp(\mathcal{A})$ variables over K and $I_\mathcal{A} \subset K[\mathbf{x}]$ the kernel of the surjective homomorphism $\pi : K[\mathbf{x}] \to \mathcal{R}_K[\mathcal{A}]$ defined by setting $\pi(x_\alpha) = \mathbf{t}^\alpha s$ for all $\alpha \in \mathcal{A}$. The ideal $I_\mathcal{A}$ is called the *toric ideal* of the configuration $\mathcal{A}$.

Fix $n \geq 2$. Let $\mathbf{e}_i$ denote the i-th unit coordinate vector of $\mathbb{R}^n$. We write $\mathbf{A}_{n-1}^+$, $\mathbf{B}_n^+$, $\mathbf{C}_n^+$, $\mathbf{D}_n^+$ and $\mathbf{BC}_n^+$ for the set of positive roots of root systems $\mathbf{A}_{n-1}$, $\mathbf{B}_n$, $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{D}_n$ and $\mathbf{BC}_n$, respectively ([3, pp. 64 – 65]):

$$\mathbf{A}_{n-1}^+ = \{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\,;\, 1 \leq i < j \leq n\};$$
$$\mathbf{B}_n^+ = \{\mathbf{e}_i\,;\, 1 \leq i \leq n\} \cup \{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j\,;\, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\,;\, 1 \leq i < j \leq n\};$$
$$\mathbf{C}_n^+ = \{2\mathbf{e}_i\,;\, 1 \leq i \leq n\} \cup \{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j\,;\, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\,;\, 1 \leq i < j \leq n\};$$
$$\mathbf{D}_n^+ = \{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j\,;\, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\,;\, 1 \leq i < j \leq n\};$$
$$\mathbf{BC}_n^+ = \mathbf{B}_n^+ \cup \mathbf{C}_n^+.$$

Let, in addition, $\widetilde{\Phi}^+ = \Phi^+ \cup \{(0, 0, \ldots, 0)\}$, where $\Phi = \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n, \mathbf{D}_n$ or $\mathbf{BC}_n$ and where $(0, 0, \ldots, 0)$ is the origin of $\mathbb{R}^n$. In their combinatorial study of hypergeometric functions associated with root systems, Gelfand, Graev and Postnikov [2, Theorem 6.3] discovered a squarefree quadratic initial ideal of the toric ideal $I_{\widetilde{\mathbf{A}}_{n-1}^+}$ of $\widetilde{\mathbf{A}}_{n-1}^+$. Moreover, for *any* subconfiguration $\mathcal{A}$ of $\mathbf{A}_{n-1}^+$, the configuration $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup (0, 0, \ldots, 0)$ possesses a regular unimodular triangulation ([7, Example 2.4 (a)]). Stanley [8, Exercise 6.31 (b), p. 234] computed the Ehrhart polynomial of the convex polytope $\mathrm{conv}(\widetilde{\mathbf{A}}_{n-1}^+)$. Fong [1] constructed certain triangulations of the configurations $\widetilde{\mathbf{B}}_n^+$ $(= \mathrm{conv}(\widetilde{\mathbf{D}}_n^+) \cap \mathbb{Z}^n)$ and $\mathrm{conv}(\widetilde{\mathbf{C}}_n^+) \cap \mathbb{Z}^n$ $(= \widetilde{\mathbf{BC}}_n^+)$, and computes the Ehrhart polynomials of $\mathrm{conv}(\widetilde{\mathbf{B}}_n^+)$ and $\mathrm{conv}(\widetilde{\mathbf{C}}_n^+)$. The triangulations studied in [1] are, however, non-unimodular. Motivated by their results, Ohsugi–Hibi [6] found reverse lexicographic squarefree quadratic initial ideals of the toric ideals $I_{\widetilde{\mathbf{B}}_n^+}$, $I_{\widetilde{\mathbf{C}}_n^+}$ and $I_{\widetilde{\mathbf{D}}_n^+}$. Moreover, Ohsugi–Hibi [5] discussed subconfigurations $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ of $\widetilde{\mathbf{B}}_n^+ \cup \widetilde{\mathbf{C}}_n^+$ which possesses a (regular) unimodular triangulation (i.e., $I_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ which posseses a squarefree initial ideal). Hence, it is natural to study the same proplems as above for I_{Φ^+} where $\Phi \subset \mathbb{Z}^n$ is one of the root systems A_{n-1}, B_n, C_n, D_n and BC_n. (Then, I_{Φ^+} is not generated by quadratic binomials if $n \geq 6$.)

1. Squarefree lexicographic initial ideals

Let $\Phi^+ \subset \mathbb{Z}^n$ denote one of the configurations A_{n-1}^+, B_n^+, C_n^+, D_n^+ and BC_n^+. Let $K[\mathrm{A}_{n-1}^+]$, $K[\mathrm{B}_n^+]$, $K[\mathrm{C}_n^+]$, $K[\mathrm{D}_n^+]$ and $K[\mathrm{BC}_n^+]$ denote the polynomial rings

$$\begin{aligned}
K[\mathrm{A}_{n-1}^+] &= K[\{f_{i,j}\}_{1\leq i<j\leq n}],\\
K[\mathrm{B}_n^+] &= K[\{y_i\}_{1\leq i\leq n} \cup \{e_{i,j}\}_{1\leq i<j\leq n} \cup \{f_{i,j}\}_{1\leq i<j\leq n}],\\
K[\mathrm{C}_n^+] &= K[\{a_i\}_{1\leq i\leq n} \cup \{e_{i,j}\}_{1\leq i<j\leq n} \cup \{f_{i,j}\}_{1\leq i<j\leq n}],\\
K[\mathrm{D}_n^+] &= K[\{e_{i,j}\}_{1\leq i<j\leq n} \cup \{f_{i,j}\}_{1\leq i<j\leq n}],\\
K[\mathrm{BC}_n^+] &= K[\{a_i\}_{1\leq i\leq n} \cup \{y_i\}_{1\leq i\leq n} \cup \{e_{i,j}\}_{1\leq i<j\leq n} \cup \{f_{i,j}\}_{1\leq i<j\leq n}]
\end{aligned}$$

over K. Write $\pi : K[\Phi^+] \to K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}, s]$ for the homomorphism defined by setting

$$\pi(a_i) = t_i^2 s, \quad \pi(y_i) = t_i s, \quad \pi(e_{i,j}) = t_i t_j s, \quad \pi(f_{i,j}) = t_i t_j^{-1} s.$$

Thus the kernel of π is the toric ideal I_{Φ^+}.

First, an explicit initial ideals of $I_{\mathrm{A}_{n-1}^+}$ generated by squarefree monomials of degree ≤ 3 will be constructed. Let $<_{lex}$ be the lexicographic order induced by the ordering of variables

$$f_{n-1,n} > f_{n-2,n-1} > f_{n-2,n} > \cdots > f_{1,2} > f_{1,3} > \cdots > f_{1,n},$$

and let $<_{rev}$ be the reverse lexicographic order induced by the ordering of variables

$$f_{n-1,n} > f_{n-2,n} > f_{n-2,n-1} > \cdots > f_{2,3} > f_{1,n} > \cdots > f_{1,3} > f_{1,2}.$$

Then, the reduced Gröbner basis with respect to $<_{lex}$ (and $<_{rev}$) is as follows.

Theorem 1.1 ([4]). *The set of the binomials*

$$\begin{array}{ll}
f_{i,\ell}f_{j,k} - f_{i,k}f_{j,\ell}, & i<j<k<\ell,\\
f_{i,j}f_{j,k} - f_{i,i+1}f_{i+1,k}, & i+1<j<k,\\
f_{i,j}f_{k,k+1}f_{k+1,\ell} - f_{i,i+1}f_{i+1,j}f_{k,\ell}, & i+1<j<k<\ell-1,
\end{array}$$

is the reduced Gröbner basis of the toric ideal $I_{\mathrm{A}_{n-1}^+}$ with respect to both $<_{lex}$ and $<_{rev}$, where the initial monomial of each binomial is the first monomial.

Second, we discuss the existance of squarefree initial ideals of the toric ideal I_{Φ^+} where $\Phi \subset \mathbb{Z}^n$ is one of the root systems B_n, C_n, D_n and BC_n. The similar argument as in [5] plays an important role in the proof of Theorems 1.2 and 1.4.

Let $<_{lex}^c$ be the lexicographic order induced by the ordering of variables

$$\begin{aligned}
&a_1 > a_2 > \cdots > a_n\\
&> f_{n-1,n} > f_{n-2,n-1} > f_{n-2,n-1} > \cdots > f_{1,2} > f_{1,3} > \cdots > f_{1,n}\\
&> e_{n-1,n} > e_{n-2,n-1} > e_{n-2,n-1} > \cdots > e_{1,2} > e_{1,3} > \cdots > e_{1,n}.
\end{aligned}$$

Theorem 1.2. *The initial ideal of the toric ideal $I_{\mathrm{C}_n^+}$ with respect to $<_{lex}^c$ is generated by squarefree monomials.*

Let $<_{lex}^{d}$ denote the lexicographic order obtained by restricting $<_{lex}^{c}$ to $K[\mathrm{D}_n^+]$. By the elimination property of the lexicographic order $<_{lex}^{c}$, we have the following corollary from Theorem 1.2.

Corollary 1.3. *The initial ideal of the toric ideal $I_{\mathrm{D}_n^+}$ with respect to $<_{lex}^{d}$ is generated by squarefree monomials.*

We now consider the root systems B_n and BC_n. Let $<_{lex}^{bc}$ be the lexicographic order induced by the ordering of variables

$$
\begin{aligned}
& a_1 > a_2 > \cdots > a_n \\
& > e_{n-1,n} > e_{n-2,n-1} > e_{n-2,n-1} > \cdots > e_{1,2} > e_{1,3} > \cdots > e_{1,n} \\
& > y_1 > y_2 > \cdots > y_n \\
& > f_{n-1,n} > f_{n-2,n-1} > f_{n-2,n-1} > \cdots > f_{1,2} > f_{1,3} > \cdots > f_{1,n}.
\end{aligned}
$$

Theorem 1.4. *The initial ideal of the toric ideal $I_{\mathrm{BC}_n^+}$ with respect to $<_{lex}^{bc}$ is generated by squarefree monomials.*

Let $<_{lex}^{b}$ denote the lexicographic order obtained by restricting $<_{lex}^{bc}$ to $K[\mathrm{B}_n^+]$. By the elimination property of the lexicographic order $<_{lex}^{bc}$, we have the following corollary from Theorem 1.4.

Corollary 1.5. *The initial ideal of the toric ideal $I_{\mathrm{B}_n^+}$ with respect to $<_{lex}^{b}$ is generated by squarefree monomials.*

References

[1] W. Fong, Triangulations and Combinatorial Properties of Convex Polytopes, Dissertation, M. I. T., June, 2000.

[2] I. M. Gelfand, M. I. Graev and A. Postnikov, Combinatorics of hypergeometric functions associated with positive roots, *in* "Arnold–Gelfand Mathematics Seminars, Geometry and Singularity Theory" (V. I. Arnold, I. M. Gelfand, M. Smirnov and V. S. Retakh, Eds.), Birkhäuser, Boston, 1997, pp. 205 – 221.

[3] J. E. Humphreys, "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory," Second Printing, Revised, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[4] T. Kitamura, H. Ohsugi and T. Hibi, Gröbner bases associated with positive roots and Catalan numbers, preprint.

[5] H. Ohsugi and T. Hibi, Unimodular triangulations and coverings of configurations arising from root systems, *J. Algebraic Combinatorics*, 14 (2001), 199 – 219.

[6] H. Ohsugi and T. Hibi, Quadratic initial ideals of root systems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, in press.

[7] R. P. Stanley, Decompositions of rational convex polytopes, *Ann. Discrete Math.* 6 (1980), 333 – 342.

[8] R. P. Stanley, "Enumerative Combinatorics, Volume II," Cambridge University Press, Cambridge, New York, Sydney, 1999.

[9] B. Sturmfels, "Gröbner Bases and Convex Polytopes," Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

Department of Mathematics,
Graduate School of Science, Osaka University,
Toyonaka, Osaka 560–0043, Japan
E-mail: ohsugi@math.sci.osaka-u.ac.jp

GENERIC A^1-FIBRATIONS OVER DISCRETE VALUATION RINGS

TERUO ASANUMA AND NOBUHARU ONODA

1. Introduction

Let $(R, \pi R)$ be a DVR (i.e. discrete valuation ring) with the quotient field $K = R[\pi^{-1}]$ and the residue field $R/\pi R = k$ of characteristic $\operatorname{ch} k \geq 0$. A commutative R-domain A is called a generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration if

$$A \otimes_R K = K^{[1]}.$$

So if A is a generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration, then $A[\pi^{-1}]$ is a polynomial ring in one variable over $R[\pi^{-1}]$.

It is interesting from a geometric (and an algebraic as well) point of view to consider a k-algebraic structure of the "special" fiber $A/\pi A$ of a generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration A. In most cases such a special fiber dose not necessarily a polynomial ring. However under some mild conditions the reduced ring $(A/\pi A)_{\text{red}}$ $(= A/\sqrt{\pi A}$ where $\sqrt{\pi A}$ denotes the radical ideal of the ideal $\pi A)$ induced from the the special fiber $A/\pi A$ has a polynomial ring structure. Precisely we have

Theorem 1.1. *Let A be a finitely generated generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R. Then we have the following:*
(1) *If A is normal and $\sqrt{\pi A}$ is prime, then there exists a finite field extension k_1/k such that*

$$A/\sqrt{\pi A} = k_1^{[1]}.$$

(2) *If A is normal and $\operatorname{ch} k = 0$, then there exists a finite set $\{k_i \mid i = 1, \dots, s\}$ of finite field extensions k_i/k such that*

$$A/\sqrt{\pi A} = (k_1 \times \cdots \times k_s)^{[1]}.$$

(3) *If $\operatorname{ch} k = 0$ and A is generated by two elements over R, then there exists an Artin ring L such that*

$$A/\pi A = L^{[1]}.$$

Example 1.2. The condition "normal" is necessary in Theorem 1.1, (1), (2). If we set

$$\begin{aligned} A &= R[x, \pi^{-2}x^2, \pi^{-1}x(\pi^{-2}x^2 - a)] \\ &= R[X, Y, Z]/(\pi^2 Y - X^2, \pi Z - X(Y - a), XZ - \pi Y(Y - a), Z^2 - Y(Y - a)^2) \end{aligned}$$

for any element $a \in R$, then A is a generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration such that

$$A/\sqrt{\pi A} = k[Y, Z]/(Z^2 - Y(Y - a)^2).$$

Example 1.3. There exist examples of generic $\boldsymbol{A}^1$-fibrations A satisfying the condition in Theorem 1.1 (1) but $A/\pi A$ are not polynomial rings for any $\operatorname{ch} k \geq 0$ as follows. Let

$$\begin{aligned} A &= R[x, \pi^{-1}x^2, \pi^{-2}x^3] \\ &= R[X, Y, Z]/(X^2 - \pi Y, XZ - Y^2, XY - \pi Z). \end{aligned}$$

Then A is normal. We will show that $A/\pi A$ is not a polynomial ring. Let $B = A/\pi A$, and suppose that $B = L[T](= L^{[1]})$. Then

$$B/\mathfrak{n}(B)^2 = (L/\mathfrak{n}(L)^2)[T] = k[X,Y,Z]/(X^2, XY, Y^2, XZ),$$

so we can find $a \in k$ such that

$$X(T-a) \equiv 0 \bmod (X^2, XY, Y^2, XZ).$$

Since $T-a$ is regular in $(L/\mathfrak{n}(L)^2)[T]$, we have $X \equiv 0 \bmod (X^2, XY, Y^2, XZ)$, which is a contradiction.

Example 1.4. There exist examples of generic $\boldsymbol{A}^1$-fibrations A satisfying the condition in Theorem 1.1 (3) but $A/\pi A$ are not polynomial rings in case of $\operatorname{ch} k > 0$ as follows. Let

$$\begin{aligned} A &= R[x^{p^e}, \pi x + x^{mp}] \\ &= R[X,Y]/(Y^{p^e} - \pi^{p^e} X - X^{mp}). \end{aligned}$$

Then

$$A[\pi^{-1}] = K[x^{p^e}, \pi x + x^{mp}].$$

Notice that

$$K[x^{p^i}, \pi x + x^{mp}] = K[x^{p^{i+1}}, \pi x + x^{mp}]$$

for any $i = 0, \dots, e$, because

$$x^{p^i} = \pi^{-p^i}(\pi x + x^{mp})^{p^i} - (x^{p^{i+1}})^m \in K[x^{p^{i+1}}, \pi x + x^{mp}].$$

So $A[\pi^{-1}] = K[x]$, and hence A is a generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration. On the other hand $A/\sqrt{\pi A} = k[X,Y]/(Y^{p^{e-1}} - X^m)$ is not a polynomial ring. In particular $A/\pi A$ is not a ploynomial ring.

Conjecture 1.5. Theorem 1.1(2) holds also in case of the residue field $R/\pi R = k$ of characteristic $\operatorname{ch} k = p > 0$, in other words we can delete the assumption that $\operatorname{ch} k = 0$ from Theorem 1.1(2).

For the details on generic $\boldsymbol{A}^1$-fibrations see [3].

2. Proof of Theorem 1.1 (1)

In this section we give a proof of Theorem 1.1(1).

Let (V, P) be a valuation ring (which is not necessarily a DVR) of a rational function field $L(t)$ over a field L. Let $V_0 = V \cap L$ and $P_0 = P \cap V_0$. We fix these notations throughout this section.

In [4, pp.139-140] Nagata proves the following;

Theorem 2.1 (Nagata). *Let k_1 be the algebraic closure of $k_0 = V_0/P_0$ in V/P. If V/P is not algebraic over k_0, then there exists $y \in V$ such that $V/P = k_1(\overline{y})$ where $\overline{y}$* (mod P) *is trancendental over k.*

For the proof of Theorem 1.1 (1) we extend Theorem 2.1 to the case of polynomial rings as follows;

Theorem 2.2. *Let $A = V \cap L[t]$ and let k_1 be the algebraic closure of $k_0 = V_0/P_0$ in V/P. If V/P is not algebraic over k_0, then*
(1) k_1 is finite over k_0.
(2) $A/P \cap A = k_1^{[1]}$.

Let $v\colon L(t) \to G$ be the valuation corresponding to V, where G is the additive value group of v, and let $v_0\colon L \to G_0$ be the restriction of v to L. Given an element $a \in V$, we denote by $\overline{a} \in V/P$ the residue class of a modulo P.

Lemma 2.3. *Let z be an element of V such that $\bar{z}$ is transcendental over k_0. Then there exists $y \in V$ such that $L(z) = L(y)$ and t is integral over $L[y]$.*

Proof. Write $z = f(t)/g(t)$, where $f(t), g(t) \in L[t]$. Let $n = \deg f(t)$ and $m = \deg g(t)$.

Case 1. ($n > m$) We can choose $f(t)$ to be monic, and t is a solution of the equation $f(X) - g(X)y = 0$. So set $y = z$.

Case 2. ($n < m$) Set $y = 1/z$ and apply a similar argument as Case 1.

Case 3. ($n = m$) Let the leading coefficients of $f(t)$ and $g(t)$ be α and β, respectively. If $v(\alpha) \geq v(\beta)$ (resp. $v(\alpha) < v(\beta)$), then replace z by $z - \alpha/\beta$ (resp. $1/z - \beta/\alpha$) and apply Case 2. □

Among those elements $y \in V$ such that $\bar{y}$ are transcendental over k_0, we take y to be one with minimal degree $n = [L(t) : L(y)]$. We may assume that t is integral over $L[y]$ by Lemma 2.3. Now let $V_y = V \cap L(y)$. Note that V_y is the valuation ring of the valuation v_y obtained as the canonical extension of v_0. Namely v_y is defined by

$$v_y(f(y)) = \min\{v_0(a) \mid a \text{ runs over all coefficients of } f(y)\}$$

for $f(y) \in V_0[y]$, so we have $V_y = V_0[y]_{P_0[y]}$. Notice that the value group G_y of v_y is equal to G_0.

Lemma 2.4. *Let*

$$M = (L + Lt + \cdots + Lt^{n-1}) \cap V.$$

Then
(1) $L[t, y] \cap V = M[y]$;
(2) $V = M[y]_{P_0[y]} (= M[y] \otimes_{V_0[y]} V_0[y]_{P_0[y]})$.

Proof. (1) It suffices to show $L[t, y] \cap V \subseteq M[y]$. Let h be an element of $L[t, y] \cap V$. Since $n = [L(t) : L(y)]$ and t is integral over $L[y]$, we have

$$L[t, y] = L[y] + L[y]t + \cdots + L[y]t^{n-1},$$

because $L[y]$ is a principal ideal domain. Hence h is of the form

$$h = h_0 + h_1 y + \cdots + h_m y^m$$

for some $m \geq 0$ and

$$h_0, \ldots, h_m \in L + Lt + \cdots + Lt^{n-1}.$$

We choose h_j so that

$$v(h_j) \leq v(h_i)$$

for all $0 \leq i \leq m$ with $i \neq j$. Therefore $h_i h_j^{-1} \in V$ for every $i = 0, \ldots, m$. Note that $h_i h_j^{-1} \in V_0$ and

$$[L(t) : L(h_i h_j^{-1})] \leq n - 1.$$

Thus $\overline{h_i h_j^{-1}} \in k_1$ by assumption. So if we set

$$\beta = h h_j^{-1} = h_0 h_j^{-1} + h_1 h_j^{-1} y + \cdots + h_m h_j^{-1} y^m,$$

then

$$\bar{\beta} = \overline{h_0 h_j^{-1}} + \overline{h_1 h_j^{-1}}\bar{y} + \cdots + \overline{h_m h_j^{-1}}\bar{y}^m$$

is well-defined as an element of the polynomial ring $k_1[\bar{y}](=k_1^{[1]})$. The coefficient of $\bar{y}^j$ of $\bar{\beta}$ is 1, and hence $\bar{\beta}$ is a nonzero element of $k_1[\bar{y}]$, which implies $\beta \in V^\times$. So we have $h_i(t) \in V$ for $i = 0, \ldots, m$, because $h_j = h\beta^{-1} \in V$ and $v(h_i) \geq v(h_j)$. Thus $h_i \in M$, and $h \in M[y]$, as required.
(2) It is enough to prove $V \subseteq M[y]_{P_0[y]}$. Let $r \in V$. Then r is written by $r = fg^{-1}$ for some $f \in L[t, y]$ and $g \in L[y]$. Replacing f and g by af and ag, respectively, where $a \in L$ such that $v_y(g) = -v_0(a)$, we may assume $g \in V_0[y] \setminus P_0[y]$ from the first. Then

$$f = rg \in V \cap L[t, y],$$

and therefore $f \in M[y]$ by (1), which complete the proof of the lemma. $\square$

Corollary 2.5. (1) $k_1 = \bar{M}(= M/P \cap M)$.
(2)[Nagata] $V/P = k_1(\bar{y})$.

The corollary immediately follows from Lemma 2.4 (2).

We now proceed to the proof of Theorem 2.2.

By ramification theory of general valuations, we have

$$[V/P : V_y/P_y] \leq [L(t) : L(y)] = n.$$

On the other hand $V/P = k_1(\bar{y})$ by Corollary 2.5 and $V_y/P_y = k_0(\bar{y})$, so that

$$[k_1 : k_0] = [k_1(\bar{y}) : k_0(\bar{y})] = [V/P : V_y/P_y] \leq n,$$

which proves (1). For the proof of (2), we first show that $\bar{A}$ is transcendental over k_0. Since $[G : G_y]$ is finite, say m, for any $h \in L(t)$ we can find an element $c \in L$ such that $v(ch) = 0$. So if we write $y = f(t)/g(t)$ with $f(t), g(t) \in L[t]$ and $\mathrm{GCD}(f(t), g(t)) = 1$, then

$$y^m = f(t)^m/g(t)^m = af(t)^m/ag(t)^m$$

for some $a \in L$ with $v(ag(t)^m) = 0$. The asuumption that $\bar{y}$ is transcendental implies $v(af(t)^m) = 0$, so $\overline{af(t)^m}$ and $\overline{ag(t)^m}$ are both well-defined. Furthermore at least one of $\overline{af(t)^m}$ and $\overline{ag(t)^m}$ is transcendental over k_0, as claimed.

Next we show that

$$yM[y] \cap A \subseteq yA.$$

Let

$$yw \in yM[y] \cap A.$$

By the defintion of $M[y]$, we have $g(t)^\ell w \in L[t]$ for some large ℓ. So, the equality

$$g(t)^{\ell+1} yw = f(t)g(t)^\ell w$$

implies that

$$w = g(t)^\ell w/g(t)^\ell \in L[t],$$

because $yw \in L[t]$ and $\mathrm{GCD}(f(t), g(t)) = 1$. Note that $w \in V$ and we have

$$w \in L[t] \cap V = A,$$

so

$$yM[y] \cap A \subseteq yA.$$

We turn to the proof of (2). Since

$$M \subseteq A \subseteq M[y] = M + yM[y],$$

and

$$yM[y] \cap A \subseteq yA,$$

we have

$$M \subseteq A \subseteq M + yA \subseteq M[y]. \tag{2.1}$$

Taking the residue of the equation (2.1) modulo P, we see

$$k_1 \subseteq \bar{A} \subseteq k_1 + \bar{y}\bar{A} \subseteq k_1[\bar{y}], \tag{2.2}$$

because $\bar{M} = k_1$ by Corollary 2.5. As is mentioned above, $\bar{A}$ contains a non-constant polynomial, say

$$h(\bar{y}) = a_0 + a_1\bar{y} + \cdots + a_m\bar{y}^m$$

where $a_i \in k_1[\bar{y}](i = 0, \ldots, m)$ and $a_m \neq 0$. Then it is easy to verify that the equation (2.1) implies

$$a_1 + a_2\bar{y} + \cdots + a_m\bar{y}^{m-1} \in \bar{A}.$$

Continue this process $m-1$ times to get

$$a_{m-1} + a_m\bar{y} \in \bar{A}.$$

So we have $\bar{y} \in \bar{A}$, and $\bar{A} = k_1[\bar{y}]$, which completes the proof of (2).

Now we have Theorem 1.1(1) as a special case of a corollary of Theorem 2.2.

Corollary 2.6. *Let A be a generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R. If A is normal and the radical ideal $\sqrt{\pi A}$ of the ideal πA of A is prime, then there exists a finite field extension k_1/k such that*

$$A/\sqrt{\pi A} = k_1^{[1]}.$$

Proof. Set $Q = \sqrt{\pi A}$ for short. Since A is normal, we have

$$A = A[\pi^{-1}] \cap A_Q = L[t] \cap A_Q.$$

Notice that A_Q is a DVI, and we can apply Theorem 2.2 to get the corollary. □

3. Proof of Theorem 1.1 (2)

Theorem 1.1 (2) follows from Theorem 1.1 (1) and the following

Lemma 3.1. *Let A be a finitely generated normal generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R such that $\sqrt{\pi A}$ is not a prime ideal. If $\operatorname{ch} k = 0$, then $A/\pi A$ contains a non-trivial idempotent (i.e. an element $e \in A/\pi A$ with $e = e^2, e \neq 1$).*

Our proof of this lemma is very complicated and we omit it here. For the precise proof of Theorem 1.1 (2) see [3].

4. Proof of Theorem 1.1 (3)

In this section we give a proof of Theorem 1.1(3).

Lemma 4.1. *Let $(R, \pi R)$ be a DVR with the quotient field K of $\operatorname{ch} K \geq 0$ and let $F(X,Y)$ be an element of a polynomial ring $R[X,Y] = R^{[2]}$. If*

$$K[X,Y] = K[F(X,Y), G(X,Y)]$$

for some $G(X,Y) \in R[X,Y]$, then we can choose an R-automorphism of $R[X,Y]$ so that

$$F(\sigma(X), \sigma(Y)) \in R[X, \pi Y].$$

Proof. Let

$$\alpha\colon R[X,Y] \longrightarrow R[X,Y]$$

be an $R[X]$-endomorphism of $R[X,Y]$ defined by $\alpha(Y) = \pi Y$. Then by Corollary 4.7 in [2] we can find a finite sequence $\phi_1, ..., \phi_n$ of R-automorphisms of $R[X,Y]$ such that

$$F(X,Y) = \phi_1\alpha\phi_2 \cdots \phi_{n-1}\alpha\phi_n(X),$$

where $\phi_1\alpha\phi_2 \cdots \phi_{n-1}\alpha\phi_n$ means the composite as R-endomorphisms of $R[X,Y]$. Put $H(X,Y) = \phi_2\alpha\phi_3 \cdots \phi_{n-1}\alpha\phi_n(X)$ in case $n > 1$, othewise $H(X,Y) = X$. We have

$$F(X,Y) = \phi_1(H(X,\pi Y))$$

So if we take ϕ_1^{-1} as σ , then

$$F(\sigma(X),\sigma(Y)) = H(X,\pi Y) \in R[X,\pi Y],$$

and we are through. $\square$

Theorem 4.2 (Abhyankar-Moh-Suzuki). *Let K be a field of $\operatorname{ch} K = 0$ and let $F(X,Y)$ be an element of a polynomial ring $K[X,Y] = K^{[2]}$. If*

$$K[X,Y]/(F(X,Y)) = K^{[1]},$$

then there exists $G(X,Y) \in K[X,Y]$ such that

$$K[X,Y] = K[F(X,Y),G(X,Y)].$$

For the proof of Theorem 4.2 see [1] or [5].

Now we prove Theorem 1.1(3). Let A be a generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over R which is generated by two elements over R with $\operatorname{ch} K = 0$ as in Theorem 1.1(3). Then we can fined an element $F(X,Y) \in R[X,Y]$ such that

$$A \cong R[X,Y]/(F(X,Y)).$$

Since $A[\pi^{-1}] = K^{[1]}$ and $\operatorname{ch} K = 0$, there exists $G(X,Y) \in K[X,Y]$ so that $K[X,Y] = K[F(X,Y),G(X,Y)]$ by Theorem 4.2. Especially we can find such $G(X,Y)$ in $R[X,Y]$ and therefore apply Lemma 4.1 to get an R-automorphism σ of $R[X,Y]$ satisfying the condition

$$F(\sigma(X),\sigma(Y)) = H(X,\pi Y)$$

for some $H(X,Y) \in R[X,Y]$. Thus

$$A \cong R[X,Y]/(F(X,Y)) \cong R[\sigma(X),\sigma(Y)]/(F(\sigma(X),\sigma(Y))) \cong R[X,Y]/(H(X,\pi Y))$$

and hence

$$A/\pi A \cong R[X,Y]/(H(X,0),\pi) \cong k^{[1]}$$

as required.

References

[1] S. Abyankar and T.T. Moh, *Embeddings of the line in the plane,* J. Reine Angew. Math. 276(1975) 148-166.

[2] T. Asanuma, *Polynomial fibre rings of algebras over noetherian rings,* Invent Math. 87(1987)101-127.

[3] T. Asanuma and N. Onoda, *Generic $\boldsymbol{A}^1$-fibrations over discrete valuation rings* in preparation

[4] M. Nagata, *Kakantairon (in Japanese),* New version (Shokabo Book Store)

[5] M. Suzuki, *Propriétés topologiqes des polynômes de deux variables cmplexes, et automorphismes algébriques de l'espace C^2*, J. Math. Soc. Japan 26(1974)241-257

Faculty of Education, Toyama University, 3190 Gofuku, Toyama-shi, 930-8555, Japan
E-mail address: asanuma@edu.toyama-u.ac.jp

Faculty of Engineering, Fukui University, Bunkyou 3-9-1, Fukui-shi, 910-8507, Japan
E-mail address: onoda@edu00.f-edu.fukui-u.ac.jp

第２３回可換環論シンポジウム・プログラム

１１月１９日（月）

19:00～19:05　あいさつと諸注意

19:10～19:40　山岸 規久道（姫路獨協大・経済情報）
Buchsbaumness in the fiber cones

19:50～20:35　伊山 修（京大・理）
整環の表現論

１１月２０日（火）

9:00～10:00　蔵野 和彦（東京都立大・理）
A vanishing theorem of localized Chern characters

10:15～11:05　張間 忠人（四国大・経営情報）
J. C. Migliore（Univ. of Notre Dame）
U. Nagel（Univ. of Paderborn）
渡辺 純三（東海大・理）
Hilbert functions and maximal Betti numbers of
Artinian K-algebras with the weak Lefschetz property

11:20～12:00　泊 昌孝（金沢大・理）
正規次数付特異点のセグレ積について
（孤立特異性、有理特異性、そして多重種数）

13:20～13:50　宮崎 充弘（京都教育大）
Monomial ideal の polarization に関する一注意

14:00～14:40　寺井 直樹（佐賀大・文化教育）
極小自由分解の 2-linear part とグラフの平均連結成分数

14:50～15:20　宮崎 誓　（琉球大・理）
射影曲線の超平面切断の Regularity について

15:40～16:20　早坂 太（明大・理工）
射影次元有限な加群による環の正則性の判定について

16:30～17:20　尼崎 睦実（広島大・教育）
On the basic sequences of integral curves in $\mathbf{P}^3$

19:10～19:40　高橋 亮（岡山大・自然科学）
加群の CM-次元について

19:50～20:20　荒谷 督司（岡山大・自然科学）
鎖複体の CM-次元について

20:30～20:50　吉野 雄二（岡山大・理）
A remark on CM dimension

１１月２１日（水）

9:00～9:50　黒田 茂（東北大・理）
A condition for the finite generations of kernels of derivations

10:05～10:55　寺川 宏之（都留文科大学）・高橋一嘉（都留文科大学）
k-very ample な直線束のテンソル積について

11:10～12:00　吉田 健一（名大・多元数理）・渡辺 敬一（日大・文理）
商特異点の minimal Hilbert-Kunz multiplicity

13:45～14:15　豊泉 宏太（日大・総合基礎科学）
巡回商特異点の rationality index

14:25～14:55　高木 俊輔（東大・数理科学）
Correspondence of Δ-test ideals and multiplier ideals

15:05～15:35　後藤 四郎（明大・理工）
Is $I^2 = QI$, where Q is a parameter ideal and $I = Q : \mathfrak{m}$?

15:45～16:15　居相 真一郎（北海道教育大札幌校）
随伴次数環の Gorenstein 性について

16:25～16:55　中村 幸男（明大・理工）
The supremum of the difference between the multiplicity and the tight closure

18:30～　懇親会

１１月２２日（木）

9:40～10:20　衛藤 和文（日本工業大）
Generation of lattice ideals

10:30～11:00　大杉 英史（阪大・理）
Root systems and lexicographic Groebner bases

11:10～11:40　浅沼 照雄（富山大・教育）・小野田 信春（福井大・工）
Generic A^1-fibrations over a discrete valuation ring