研 究 集 会

# 第24回 可換環論シンポジウム

2002年11月5日～8日

於　　ウェルサンピアなにわ

平成14年度 科学研究費 基盤研究 (B) (1)
(課題番号　１２４４０００１　代表　森田康夫)

平成14年度 科学研究費 基盤研究 (B) (2)
(課題番号　１３４４００１５　代表　渡辺敬一)

# 序

第２４回可換環論シンポジウムは、2002年11月5日から8日に、大阪市のウェルサンピアなにわで開催されました。皆様の暖かいご協力に支えられ、無事に開催することができ、世話人として感謝いたしたいと思います。本シンポジウムにおいては、多数の大変興味深い講演が行われ、また、活発な討論が行われ、大変有意義なものとなりました。これもひとえに、講演者、および、参加者の皆様方のおかげです。

本シンポジウムを開催するにあたり、東北大学の森田康夫先生を研究代表者とする科学研究費基盤研究（Ｂ）（１）（課題番号：１２４４０００１）および 日本大学の渡辺敬一先生を研究代表者とする科学研究費基盤研究（Ｂ）（２）（課題番号：１３４４００１５）から、旅費・会場費・報告集費を御援助いただきました。また、明治大学の後藤四郎先生、都立大学の藏野和彦先生、名古屋大学の吉田健一先生、および、大阪大学の柳川浩二先生の科学研究費からも、旅費を御援助いただいております。この場を借りて、感謝の意を表したいと思います。

2003年1月

京都教育大学　宮崎 充弘

# 第２４回可換環論シンポジウム・プログラム

## １１月５日（火）

18:55～19:00 あいさつと諸注意

19:00～19:45 柳川 浩二（阪大・理）
squarefree 加群に付随した層とポアンカレ双対性

19:55～20:55 渡辺 純三（東海大・理）・張間 忠人（四国大・経営情報）
The strong Lefschetz property and finite free extension of Artinian K-algebra

## １１月６日（水）

9:00～9:40 高木 俊輔（東大・数理）・渡辺 敬一（日大・文理）
When does the subadditivity theorem for multiplier ideals hold?

9:55～10:40 張間 忠人（四国大・経営情報）
Some special configurations of points in $P^n$

10:55～11:55 高山 信毅（神戸大・理）
可換環論と解析の最近の交流の概説

13:30～14:00 日比 孝之（大阪大・大学院情報科学）・大杉 英史（立教大・理）
寺井 直樹（佐賀大・文化教育）
Unmixed initial ideals and Castelnuovo-Mumford regularity

14:10～14:40 黒田 茂（東北大・理）
ヒルベルトの第 14 問題に対するロバーツの反例の一般化

14:50～15:30 小野田 信春（福井大・工）・S. M. Bhatwadekar (Tata Institute)
浅沼 照雄（富山大・教育）
Generic $\boldsymbol{A}^*$-fibrations over discrete valuation rings

15:45～16:15 荒谷 督司（岡山大・自然科学）
Gorenstein 環の AB 性について

16:25～16:50 柿崎 和英（岡山大・自然科学）・高橋 亮（岡山大・自然科学）
吉野 雄二（岡山大・理）
On vanishing of local cohomology modules and the
Lichtenbaum-Hartshorne theorem Part I

17:00～17:25 柿崎 和英（岡山大・自然科学）・高橋 亮（岡山大・自然科学）
吉野 雄二（岡山大・理）
On vanishing of local cohomology modules and the
Lichtenbaum-Hartshorne theorem Part II

19:00～19:50 吉野 雄二（岡山大・理）
G-dimension 0 の加群について

20:05～20:55 伊山 修（姫路工業大・理）
tame and wild orders

**１１月７日（木）**

9:00～9:30 居相 真一郎（北海道教育大札幌校）
Gorenstein form rings

9:45～10:15 西田 康二（千葉大・自然科学）
associated graded ring の depth について

10:30～10:55 山岸 規久道（姫路獨協大・経済情報）
Some results on Buchsbaumness in the extended Rees algebras

11:10～11:50 櫻井 秀人（明治大・理工）
重複度 2 の Buchsbaum 局所環と等式 $I^2 = QI$

13:20～14:00 後藤 四郎（明治大・理工）・下田 保博（北里大・一般教育）
Ideal の巾乗の parametric decomposition に関する一考察

14:10～14:35 寺井 直樹（佐賀大・文化教育）
On almost complete intersection Stanley-Reisner ideals

14:45～15:15 吉田 健一（名大・多元）
正則局所環内の $\mathfrak{a}$-tight closure について

15:25～15:55 原 伸生（東北大・理）・高木 俊輔（東大・数理）
A characterization of the ideal $\tau(I)$ and its applications

16:05～16:50 高木 俊輔（東大・数理）・渡辺 敬一（日大・文理）
F-purity of $(R, I)$ and index of rationality

懇親会

**１１月８日（金）**

9:10～9:50 川崎 謙一郎 (奈良教育大)・高橋 一嘉（都留文科大）
寺川 宏之（都留文科大）・日野原 幸利（早稲田大）
On the higher Euler-Poincaré characteristics of Koszul complexes

10:05～10:45 早坂 太（明治大・理工）
Grassmann 代数の拡張について

11:00～11:50 蔵野 和彦（東京都立大・理）
Todd classes of Grassmann varieties and pfaffian ideals

◇ 上記の講演タイトルは, 講演時のもの (より厳密には, 講演申し込み時のもの) であり, 本報告集に収録された原稿のタイトルとは, 必ずしも一致しない.

# 目次

# SQUAREFREE 加群に付随した層と POINCARÉ-VERDIER 双対性

柳川 浩二　(KOHJI YANAGAWA)

## 1. Introduction

有限単体的複体 $\Delta \subset 2^{\{1,\cdots,n\}}$ の研究に, 体 $k$ 上の多項式環 $S = k[x_1,\dots,x_n]$ の, $\Delta$ に付随した squarefree な単項式イデアル $I_\Delta$ による剰余環 $k[\Delta] = S/I_\Delta$ (Stanley-Reisner 環と呼ばれる) の考察が有効であることは, 良く知られている。以前, 私は Stanley-Reisner 環を一般化して, 「squarefree 加群」を定義した。これにより, これまで余り研究されて来なかった, 一般の単項式イデアルを台とする局所コホモロジー $H^i_{I_\Delta}(S)$ 等も, 容易に扱えるようになった。また, squarefree 加群のなす圏 Sq の導来圏は, Koszul 双対性とも絡んで面白い性質を持つことも分かって来た。ただ, $k[\Delta]$ が $\Delta$ の幾何学的実現 $|\Delta|$ の位相幾何学的性質を様々に反映しているのに対して, 一般の squarefree 加群の幾何的な意味は, これまではっきりしなかった。

今回, $S$ 上の squarefree 加群 $M$ に対して, $2^{\{1,\cdots,n\}}$ の幾何学的実現である $n-1$ 単体 $B$ (もちろん, $n-1$ 次元の閉球体と同相) 上の層 $M^+$ が構成でき, 自然な理論が展開できる事が分かったので, 報告させて頂きたい。(次節以降は, より一般に, 正規半群環上の squarefree 加群を扱うのだが, 本節では, 簡単の為, 多項式環のみを扱う)。例えば, $k[\Delta]^+$ は, $\Delta$ の幾何学的実現 $|\Delta| \subset B$ 上の定数層の $B$ への順像である。一般に, $M \in \mathrm{Sq}$ が $k[\Delta]$-加群であれば, $M^+$ のサポートは $|\Delta|$ に含まれる。この意味で, $M^+$ は, $|\Delta|$ 上の層と見なせる。$M$ に対して $M^+$ を対応させる関手は, $M$ の長さ有限の部分加群が無視される事,

$$[H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)]_0 \cong H^i(B, M^+) \qquad (\forall i \geq 1)$$

であり, また完全列

$$0 \to [H^0_{\mathfrak{m}}(M)]_0 \to M_0 \to H^0(B, M^+) \to [H^1_{\mathfrak{m}}(M)]_0 \to 0$$

が存在する事など, $\mathbb{Z}$-graded な有限生成 $S$ 加群から, $\mathbb{P}^{n-1}$ 上の連接層を構成する代数幾何学の "Proj" の構成法と似ている部分が有る。

$\Delta$ が多様体ならば (この時, $k[\Delta]$ は Buchsbaum である), $|\Delta|$ 上には ($k$-係数の) 向き付け層 $or$ が存在するが, この層は, $k[\Delta]$ の標準加群 (これは, squarefree 加群である) に対応している。従って, 標準加群 $K_A$ を持つ $d$ 次元 Buchsbaum 局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ についての, 鈴木直義氏による双対性

$$H^i_{\mathfrak{m}}(K_A) \cong \mathrm{Hom}_k(H^{d-i+1}_{\mathfrak{m}}(A),\, k) \quad (2 \leq \forall i \leq d-1)$$

は, 我々の文脈では, $|\Delta|$ のポアンカレ双対性 $H^i(|\Delta|; k) \cong H^{\dim|\Delta|-i}(|\Delta|, or)$ に対応している ($\dim k[\Delta] = \dim |\Delta| + 1$ に注意)。

一般の $\Delta$ に対しても, $|\Delta|$ の (位相幾何学の意味での) 双対化複体は, $k[\Delta]$ の (可換代数の意味での) 双対化複体に対応し, $|\Delta|$ のポアンカレ・ヴェルディエ双対性が,

$k[\Delta]$ の双対化複体を用いた局所双対性に対応している。厳密に言えば, 次のようになる。

**定理.** $K_S$ を $S$ の $\mathbb{Z}^n$-graded な標準加群とし, $\omega^\bullet := R\,\mathrm{Hom}_S(k[\Delta], K_S[n-1])$ と置くと, 任意の $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq})$ に対して, $\mathrm{Hom}_{k[\Delta]}(M^\bullet, \omega^\bullet) \in D^b(\mathrm{Sq})$ である (厳密には, あくまで一般の $\mathbb{Z}^n$-graded 加群の鎖複体であるが, 各コホモロジー群が, 全て squarefree になっている)。さらに, 位相空間 $|\Delta|$ の双対化複体を $\mathcal{D}^\bullet$ とし, 埋め込み写像 $|\Delta| \hookrightarrow B$ を $j$ と記すと $D^b(\mathrm{Sh}(|\Delta|))$ における同型

$$R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(|\Delta|)}(j^*(M^\bullet)^+, \mathcal{D}^\bullet) \cong j^*(R\,\mathrm{Hom}_{k[\Delta]}(M^\bullet, \omega^\bullet)^+)$$

が存在する。特に, $\mathcal{D}^\bullet \cong j^*((\omega^\bullet)^+)$ である。

これらを証明する上でキーとなるのは, Sq の入射的対象 (resp. 射影的対象) に対応する層は, $d$ ($\leq n-1$) 次元の閉球体 (resp. $\mathbb{R}^{n-1}$ ないし $\mathbb{R}^{n-1}_+$) と同相な $B$ の部分空間の上の定数層 (の $B$ への「ゼロによる拡張」) であり, そのコンパクト台コホモロジーが, 高々一個所を除いて消えることである。

本稿は [10] の短縮版であり, 特に明記されていない限り, 結果は全て [10] のものである。証明は, 個人的に面白いと思っているものは, 出来るだけ残したが, 短縮・省略したものも多い。詳しい証明は, [10] を当たって頂きたい。また, 局所コンパクトな位相空間上の層の理論については, [3] を参照して頂きたい。記号法も, 基本的には, この教科書に従っている。

## 2. Preliminaries

Let $Q \subset \mathbb{N}^n$ be an affine semigroup (i.e., a finitely generated sub-semigroup containing 0), and $k[Q] = k[\,x^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in Q\,] \subset S := k[\,x_1, \dots, x_n\,]$ the semigroup ring of $Q$ over a field $k$. Here $x^{\mathbf{a}}$ for $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ means the monomial $\prod x_i^{a_i} \in S$. We always assume that $\mathbb{R}_{\geq 0}Q \cap \mathbb{N}^n = Q$ and $\mathbb{Z}Q = \mathbb{Z}^n$. Thus $k[Q]$ is a normal Cohen-Macaulay $\mathbb{Z}^n$-graded ring of dimension $n$ with the graded maximal ideal $\mathfrak{m} = (\,x^{\mathbf{a}} \mid 0 \neq \mathbf{a} \in Q\,)$.

Consider the cone $\mathbb{R}_{\geq 0}Q \subset \mathbb{R}^n$ spanned by $Q\,(\subset \mathbb{N}^n \subset \mathbb{R}^n)$. Let $L$ be the set of non-empty faces of $\mathbb{R}_{\geq 0}Q$. The order by inclusion makes $L$ a finite poset. If $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}Q$, there is a unique face $F \in L$ such that the relative interior rel-int$(F)$ of $F$ contains $p$. We call this $F$ the *support* of $p$, and denote it by supp$(p)$.

Let $H$ be a hyperplane of $\mathbb{R}^n$ which intersects the cone $\mathbb{R}_{\geq 0}Q$ transversally. We call the $(n-1)$-dimensional polytope $B := H \cap \mathbb{R}_{\geq 0}Q$ a *cross-section* of $\mathbb{R}^n_{\geq 0}Q$. Of course, $B$ is homeomorphic to a closed ball of dimension $n-1$. If $k[Q]$ is simplicial (e.g., $k[\mathbb{N}^n] = k[x_1, \dots, x_n]$), then $B$ is a simplex. For a face $F \in L$, set $|F| := F \cap H$ to be the face of $B$, and $|F|^\circ :=$ rel-int$(|F|)$ its relative interior. If $\Delta \subset L$ is an order ideal (i.e., if $F, G \in L$, $F \supset G$ and $F \in \Delta$, then $G \in \Delta$), then $|\Delta| := \coprod_{F \in \Delta} |F|^\circ$ is a finite regular cell complex.

For a $\mathbb{Z}^n$-graded $k[Q]$-module $M$ and $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, $M_{\mathbf{a}}$ denotes the degree $\mathbf{a}$ component of $M$. Let $^*$Mod be the category of $\mathbb{Z}^n$-graded $k[Q]$-modules. Here a morphism $f$ in $^*$Mod is a $k[Q]$-homomorphism $f : M \to N$ with $f(M_{\mathbf{a}}) \subset N_{\mathbf{a}}$ for all $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$.

We assign an order ideal $\Delta \subset L$ to the ideal $I_\Delta := (\, x^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in Q$ and $\operatorname{supp}(\mathbf{a}) \notin \Delta\,)$ of $k[Q]$. Set $k[\Delta] := k[Q]/I_\Delta$. Clearly,

$$k[\Delta]_{\mathbf{a}} \cong \begin{cases} k & \text{if } \mathbf{a} \in Q \text{ and } \operatorname{supp}(\mathbf{a}) \in \Delta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If $\Delta \neq \emptyset, \{\,\{0\}\,\}$, then $\dim k[\Delta] = \dim |\Delta| + 1$, where $\dim |\Delta|$ is the dimension as a cell complex. When $k[Q]$ is a polynomial ring, $k[\Delta]$ is nothing other than the Stanley-Reisner ring of a simplicial complex $\Delta$. (If $k[Q]$ is simplicial, $\Delta$ can be seen as a simplicial complex, and $|\Delta| = \coprod_{F \in \Delta} |F|^\circ$ is homeomorphic to the geometric realization of $\Delta$ as a simplicial complex.)

**Definition 2.1** ([7, 8]). A $\mathbb{Z}^n$-graded $k[Q]$-module $M$ is *squarefree*, if the following two conditions are satisfied.

(1) $M$ is finitely generated and $Q$-graded (i.e., $M_{\mathbf{a}} = 0$ for all $\mathbf{a} \notin Q$).
(2) The multiplication map $M_{\mathbf{a}} \ni y \mapsto x^{\mathbf{b}} y \in M_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ is bijective for all $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q$ with $\operatorname{supp}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \operatorname{supp}(\mathbf{a})$.

The $\mathbb{Z}^n$-graded canonical module $K_{k[Q]}$ of $k[Q]$ is a squarefree module. In fact, $K_{k[Q]}$ is isomorphic to the ideal $(\, x^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in Q$ with $\operatorname{supp}(\mathbf{a}) = \mathbb{R}_{\geq 0} Q\,)$ of $k[Q]$. The quotient rings $k[\Delta]$ (in particular, $k[Q]$ itself) are also squarefree.

If $M$ is squarefree, then $M_{\mathbf{a}} \cong M_{\mathbf{b}}$ for all $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q$ with $\operatorname{supp}(\mathbf{a}) = \operatorname{supp}(\mathbf{b})$. In fact, since $\operatorname{supp}(\mathbf{a}) = \operatorname{supp}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \operatorname{supp}(\mathbf{b})$, we have $M_{\mathbf{a}} \cong M_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \cong M_{\mathbf{b}}$.

Let Sq be the full subcategory of $^*\mathrm{Mod}$ consisting of all squarefree $k[Q]$-modules. For $M \in {}^*\mathrm{Mod}$ and $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, $M(\mathbf{a})$ denotes the shifted module of $M$ with $M(\mathbf{a})_{\mathbf{b}} = M_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$. If $M, N \in {}^*\mathrm{Mod}$ and $M$ is finitely generated, then $\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M, N)$ has the natural $\mathbb{Z}^n$-grading with $[\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M,N)]_{\mathbf{a}} = \operatorname{Hom}_{^*\mathrm{Mod}}(M, N(\mathbf{a}))$.

**Lemma 2.2** ([8, §4]). (1) Sq *is a thick abelian subcategory of* $^*\mathrm{Mod}$ *(i.e., closed under kernels, cokernels, and extensions in* $^*\mathrm{Mod}$*).*

(2) Sq *has enough projectives and injectives. An indecomposable projective (resp. injective) object in* Sq *is isomorphic to*

$$J_F := (x^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in Q \textit{ with } \operatorname{supp}(\mathbf{a}) \supset F) \subset k[Q]$$

$$\left( \textit{ resp. } k[F] := k[Q]/(x^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in Q \textit{ with } \operatorname{supp}(\mathbf{a}) \notin F) \ \right)$$

*for some $F \in L$. And both* $\operatorname{proj.dim}_{\mathrm{Sq}} M$ *and* $\operatorname{inj.dim}_{\mathrm{Sq}} M$ *are at most $n$ for all $M \in$* Sq.

(3) *The projective object $J_F$ is a Cohen-Macaulay $k[Q]$-module of dimension $n$. And*

$$\operatorname{Hom}_{k[Q]}(J_F, K_{k[Q]}) \cong (\, x^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in Q \textit{ such that } \operatorname{supp}(\mathbf{a}) \vee F = \mathbb{R}_{\geq 0} Q\,),$$

*where* $\operatorname{supp}(\mathbf{a}) \vee F \in L$ *is the smallest face containing both* $\operatorname{supp}(\mathbf{a})$ *and $F$. In particular,* $\operatorname{Hom}_{k[Q]}(J_F, K_{k[Q]})$ *is squarefree again.*

For derived categories, we use the same notation as [2] (unless otherwise specified). In particular, for a module $M$ and an integer $i$, $M[i]$ means the complex $\cdots \to 0 \to M \to 0 \to \cdots$ with $M$ at the $(-i)^{\text{th}}$ place.

We have the canonical category equivalence $D^b(\mathrm{Sq}) \cong D^b_{\mathrm{Sq}}({}^*\mathrm{Mod})$, and $D^b(\mathrm{Sq})$ can be seen as a full subcategory of $D^b({}^*\mathrm{Mod})$.

Next, we study $R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]})$ for a complex $M^\bullet \in D^b({}^*\mathrm{Mod})$. Here $R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]})$ is the "$R\operatorname{Hom}$" as complexes of (non-graded) $k[Q]$-modules. But if each $H^i(M^\bullet)$ is finitely generated, $R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]})$ has a natural $\mathbb{Z}^n$-grading, and defines an object in $D^b({}^*\mathrm{Mod})$. In fact, if $P^\bullet$ is a $\mathbb{Z}^n$-graded finite free resolution of $M^\bullet$, then $R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]}) \cong \operatorname{Hom}^\bullet_{k[Q]}(P^\bullet, K_{k[Q]})$ and each $\operatorname{Hom}^i_{k[Q]}(P^\bullet, K_{k[Q]})$ ( $= \operatorname{Hom}_{k[Q]}(P^{-i}, K_{k[Q]})$ ) has the $\mathbb{Z}^n$-grading.

The next result follows from Lemma 2.2 (3). See [10, Lemma 2.4] for detail.

**Lemma 2.3.** *If $M^\bullet \in D^b_{\mathrm{Sq}}({}^*\mathrm{Mod})$, then $R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]})$ is in $D^b_{\mathrm{Sq}}({}^*\mathrm{Mod})$ too. In particular, $\operatorname{Ext}^i_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]})$ is squarefree for all $i$.*

## 3. Sheaves associated with squarefree modules

Let $M$ be a squarefree module. Take some $\mathbf{a}(F) \in Q \cap \text{rel-int}(F)$ for each $F \in L$, and set $M_F := M_{\mathbf{a}(F)}$. If $F, G \in L$ and $G \supset F$, [8, Theorem 3.3] gives a $k$-linear map $\varphi^M_{G,F} : M_F \to M_G$. These maps satisfy $\varphi^M_{F,F} = \mathrm{Id}$ and $\varphi^M_{H,G} \circ \varphi^M_{G,F} = \varphi^M_{H,F}$ for all $H \supset G \supset F$. Set

$$\mathrm{Sp\acute{e}}(M) := \coprod_{F \in L} |F|^\circ \times M_F.$$

Let $\pi : \mathrm{Sp\acute{e}}(M) \to B$ be the projection map which sends $(p, m) \in |F|^\circ \times M_F \subset \mathrm{Sp\acute{e}}(M)$ to $p \in |F|^\circ \subset B$. For an open subset $U \subset B$ and a map $s : U \to \mathrm{Sp\acute{e}}(M)$, we will consider the following conditions:

- $(*)$ $\pi \circ s = \mathrm{Id}_U$ and $s_q = \varphi^M_{G,F}(s_p)$ for all $p, q \in U$ such that $F := \mathrm{supp}(p)$ is contained in $G := \mathrm{supp}(q)$. Here $s_p$ (resp. $s_q$) is the element of $M_F$ (resp. $M_G$) with $s(p) = (p, s_p)$ (resp. $s(q) = (q, s_q)$).
- $(**)$ There is an open covering $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ such that the restriction of $s$ to $U_\lambda$ satisfies $(*)$ for all $\lambda \in \Lambda$.

Now we define the $k$-sheaf associated to $M$ on $B$, denoted by $M^+$, as follows. The sections $M^+(U)$ of $M^+$ over an open set $U$ is

$$\{\, s \mid s : U \to \mathrm{Sp\acute{e}}(M) \text{ is a map satisfying } (**) \,\}$$

and the restriction map $M^+(U) \to M^+(V)$ is the natural one. (That $M^+$ is actually a sheaf is obvious.) For a point $p \in |F|^\circ$, the stalk $(M^+)_p$ of $M^+$ at $p$ is isomorphic to $M_F$. So $\mathrm{Sp\acute{e}}(M)$ is the etale space of the sheaf $M^+$.

Let $\Psi \subset L$ be an order filter of the poset $L$, that is, $F \in \Psi$, $G \in L$, and $G \supset F$ imply $G \in \Psi$. Then $U_\Psi := \coprod_{F \in \Psi} |F|^\circ$ is an open subset of $B$. If $M$ is a squarefree module, then the submodule $M_\Psi := \bigoplus_{\mathbf{a} \in Q, \mathrm{supp}_+(\mathbf{a}) \in \Psi} M_{\mathbf{a}}$ is also squarefree. Moreover, the sheaf $(M_\Psi)^+$ is isomorphic to $j_! j^* M^+$, where $j : U_\Psi \to B$ is the embedding map.

**Example 3.1.** (1) Let $\Delta \subset L$ be an order ideal, and $j$ the embedding map from the closed subset $|\Delta| = \coprod_{F \in \Delta} |F|$ to $B$. Then the sheaf $k[\Delta]^+$ is isomorphic to $j_* \underline{k}_{|\Delta|}$, where $\underline{k}_{|\Delta|}$ is the constant sheaf on $|\Delta|$.

(2) Let $J_F$ be the projective object in Sq associated with a face $F \in L$. Then the sheaf $(J_F)^+$ is isomorphic to $j_! \underline{k}_{U_F}$, where $j$ is the embedding map from the open set $U_F = \coprod_{G \in L, G \supset F} |G|^\circ$ to $B$. Note that

$$U_F \cong \begin{cases} \mathbb{R}^{n-1}, & \text{if } F = \mathbb{R}_{\geq 0}Q, \\ \mathbb{R}^{n-1}_+ := \{ (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid y_{n-1} \geq 0 \}, & \text{if } F \neq \mathbb{R}_{\geq 0}Q, \{0\}, \\ B^{n-1} := \{ (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \leq 1 \}, & \text{if } F = \{0\}. \end{cases}$$

For a topological space $X$, $\mathrm{Sh}(X)$ denotes the category of $k$-sheaves on $X$ (i.e., the category of $\underline{k}_X$-modules).

If $M$ is a squarefree module, $M_{>0}$ denotes the submodule $\bigoplus_{\mathsf{a} \in Q \setminus \{0\}} M_{\mathsf{a}}$ of $M$. Then $M_{>0}$ is squarefree again, and $M^+ \cong (M_{>0})^+$. The functor $(-)^+ : \mathrm{Sq} \to \mathrm{Sh}(B)$ is exact, but neither full nor faithful. The degree 0 component $M_0$ causes this problem. Let $\mathrm{Sq}_+$ be the full subcategory of Sq consisting of all $M$ with $M_0 = 0$. It is easy to see that the functor $(-)^+ : \mathrm{Sq}_+ \to \mathrm{Sh}(B)$ is fully faithful.

**Theorem 3.2.** *If $M$ is a squarefree $k[Q]$-module, we have an isomorphism*

$$H^i(B, M^+) \cong [H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)]_0 \quad \textit{for all } i \geq 1,$$

*and an exact sequence*

$$0 \to [H^0_{\mathfrak{m}}(M)]_0 \to M_0 \to H^0(B, M^+) \to [H^1_{\mathfrak{m}}(M)]_0 \to 0. \tag{3.1}$$

*In particular, if $M \in \mathrm{Sq}_+$, then $H^i(B, M^+) \cong [H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)]_0$ for all $i \geq 0$.*

*Proof.* As usual, let $\Gamma_{\mathfrak{m}} : {}^*\mathrm{Mod} \to {}^*\mathrm{Mod}$ be the functor defined by $\Gamma_{\mathfrak{m}}(N) := \{y \in N \mid \mathfrak{m}^n y = 0 \text{ for } n \gg 0\}$, and $\Gamma(B, -) : \mathrm{Sh}(B) \to \mathrm{vect}_k$ the global sections functor.

Let $I^\bullet$ be a minimal injective resolution of $M$ in Sq, and consider the exact sequence

$$0 \to \Gamma_{\mathfrak{m}}(I^\bullet) \to I^\bullet \to I^\bullet/\Gamma_{\mathfrak{m}}(I^\bullet) \to 0 \tag{3.2}$$

of cochain complexes. Put $J^\bullet := I^\bullet/\Gamma_{\mathfrak{m}}(I^\bullet)$. Each component of $J^\bullet$ is a direct sum of copies of $k[F]$ for various $\{0\} \neq F \in L$. Since $k[F]^+$ is the constant sheaf on $|F|$ which is homeomorphic to a closed ball, we have $H^i(B, k[F]^+) = H^i(|F|; k) = 0$ for all $i \geq 1$. Hence $(J^\bullet)^+$ ($\cong (I^\bullet)^+$) gives a $\Gamma(B, -)$-acyclic resolution of $M^+$. It is easy to see that $[J^\bullet]_0 \cong \Gamma(B, (J^\bullet)^+)$. By [4, Theorem 2.4], $I^\bullet$ coincides with the $Q$-graded part $\bigoplus_{\mathsf{a} \in Q} [\check{I}^\bullet]_{\mathsf{a}}$ of $\check{I}^\bullet$. Thus we have $[H^i(\Gamma_{\mathfrak{m}}(I^\bullet))]_0 = [H^i(\Gamma_{\mathfrak{m}}(\check{I}^\bullet))]_0 = [H^i_{\mathfrak{m}}(M)]_0$. So the first and the second assertion follows from (3.2), since $[H^0(I^\bullet)]_0 \cong M_0$ and $H^i(I^\bullet) = 0$ for all $i \geq 1$. □

*Remark* 3.3. Let $M$ be a finitely generated $\mathbb{Z}$-graded module over $S = k[x_1, \dots, x_n]$. Then we have an algebraic coherent sheaf $\tilde{M}$ on $\mathbb{P}^{n-1} = \mathrm{Proj}(S)$. Like our functor $(-)^+$, if $\dim_k M < \infty$, then $\tilde{M} = 0$. Moreover, it is well-known that $H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \tilde{M}) \cong [H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)]_0$ for all $i \geq 1$, and

$$0 \to [H^0_{\mathfrak{m}}(M)]_0 \to M_0 \to H^0(\mathbb{P}^{n-1}, \tilde{M}) \to [H^1_{\mathfrak{m}}(M)]_0 \to 0 \qquad \text{(exact)}.$$

So Theorem 3.2 gives an analogy between Proj and our $(-)^+$.

Recall that we chose $\mathbf{a}(F) \in Q \cap F$ for each $F \in L$ in the previous section. By the graded local duality, the $\mathbb{Z}^n$-graded $k$-dual of $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ is isomorphic to the squarefree module $\operatorname{Ext}^{n-i}_{k[Q]}(M, K_{k[Q]})$. So to determine the $\mathbb{Z}^n$-graded Hilbert function of $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, it suffices to know $[H^i_{\mathfrak{m}}(M)]_{-\mathbf{a}(F)}$ for each $F$. Since Theorem 3.2 deal with the case when $F = \{0\}$ (i.e., $\mathbf{a}(F) = 0$), we may assume that $F \neq \{0\}$.

**Theorem 3.4.** *Let $M$ be a squarefree $k[Q]$-module, and $j$ the embedding map from the open set $U_F = \coprod_{G \supset F} |G|^\circ$ to $B$. If $F \neq \{0\}$, we have*

$$H^i_c(U_F, j^*M^+) \cong [H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)]_{-\mathbf{a}(F)} \quad \textit{for all } i \geq 0,$$

*where $H^i_c(-)$ stands for the cohomology with the compact support.*

When $k[Q]$ is a polynomial ring $k[\mathbb{N}^n] = k[x_1, \dots, x_n]$, Theorems 3.2 and 3.4 generalize a well-known formula of Hochster ([1, Theorem 5.3.8]). See [10, Remark 3.6].

## 4. Relation to Poincaré-Verdier Duality

Since the functor $(-)^+ : \mathrm{Sq} \to \mathrm{Sh}(B)$ is exact, it can be extended to the functor $(-)^+ : D^b(\mathrm{Sq}) \to D^b(\mathrm{Sh}(B))$. If $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq})$, we have $R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]}) \in D^b_{\mathrm{Sq}}({}^*\mathrm{Mod})$ by Lemma 2.3. So there is a bounded complex $N^\bullet$ of squarefree modules such that $N^\bullet \cong R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]})$ in $D^b({}^*\mathrm{Mod})$. We denote $(N^\bullet)^+ \in D^b(\mathrm{Sh}(B))$ by $R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]})^+$. Of course, $R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]})^+$ does not depend on the particular choice of $N^\bullet$ up to isomorphism in $D^b(\mathrm{Sh}(B))$.

For a locally compact topological space $X$ of finite dimension (e.g., a locally closed subset of $B$), $\mathcal{D}^\bullet_X$ denotes a dualizing complex of $X$ with the coefficient in $k$, see [3, V. §2]. In this paper, we frequently use the isomorphism $\mathcal{D}^\bullet_Y \cong j^!\mathcal{D}^\bullet_X$ for an embedding map $j$ from a locally closed subset $Y$ to $X$, see [3, V. Theorem 5.6]. If $X$ is a manifold (with or without boundary), we have the orientation sheaf $or_X$ of $X$ with the coefficients in $k$. In this case, we have $\mathcal{D}^\bullet_X \cong or_X[\dim X]$, see [3, V. §3].

**Lemma 4.1.** *With the above notation, we have the following.*

(1) $or_B \cong (K_{k[Q]})^+$.
(2) *Let $J_F$ be the projective object in* Sq *associated with a face $F \in L$. Then* $R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(B)}((J_F)^+, or_B) \cong \operatorname{Hom}_{k[Q]}(J_F, K_{k[Q]})^+$.
(3) *If $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq})$, we have an isomorphism*

$$R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(B)}((M^\bullet)^+, or_B) \cong R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]})^+$$

*in $D^b(\mathrm{Sh}(B))$.*

*Proof.* (1) Let $\underline{k}_{B^\circ}$ be the constant sheaf on the relative interior $B^\circ$ of $B$. If $j : B^\circ \to B$ is the embedding map, then $or_B \cong j_!\underline{k}_{B^\circ}$ by [3, VI. Proposition 3.3].

(2) Recall that $\mathcal{E}xt^i_{\mathrm{Sh}(B)}((J_F)^+, or_B)$ is the sheaf associated to the presheaf which sends an open set $U$ to $\operatorname{Ext}^i_{\mathrm{Sh}(U)}(j^*(J_F)^+, j^*or_B)$. Note that $j^*or_B \cong \mathcal{D}^\bullet_U[-n+1]$ in $D^b(\mathrm{Sh}(U))$. By the Poincaré-Verdier duality ([3, V. 2.1]), we have

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathrm{Sh}(U)}(j^*(J_F)^+, j^*or_B) \cong H^{n-1-i}_c(U, j^*(J_F)^+)^\vee,$$

where $(-)^\vee$ means the dual $k$-vector space. For any open neighbourhood $V$ of $p$, there is an open set $U$ with $p \in U \subset V$ such that $U \cap U_F \cong \mathbb{R}^{n-1}$ or $\mathbb{R}_+^{n-1}$. Then $H_c^i(U, j^*(J_F)^+) \cong H_c^i(U \cap U_F; k) = 0$ for all $i \neq n-1$. Thus $\mathcal{E}xt^i_{\mathrm{Sh}(B)}((J_F)^+, or_B) = 0$ for all $i \neq 0$. Hence we have $R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(B)}((J_F)^+, or_B) \cong \mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(B)}((J_F)^+, or_B)$.

Recall that $(J_F)^+$ is the constant sheaf on $U_F$ and $or_B$ is the constant sheaf on $B^\circ$. For a point $p \in B$, the stalk $\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(B)}((J_F)^+, or_B)p$ at $p$ is nonzero (equivalently, $\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(B)}((J_F)^+, or_B)p = k$) if and only if there is an open neighbourhood $U_p$ of $p$ such that $U_p \cap U_F \subset B^\circ$. With the same notation as Lemma 2.2 (3), the latter condition is equivalent to the condition that $\mathrm{supp}(p) \vee F = \mathbb{R}_{\geq 0}Q$. So the assertion follows from Lemma 2.2 (3).

(3) Let $P^\bullet$ be a projective resolution of $M^\bullet$ in Sq, that is, there is a quasi isomorphism $P^\bullet \to M^\bullet$ and each $P^i$ is a direct sum of copies of $J_F$ for various $F$. By (2), we can compute $R\mathcal{H}om_{Sh(B)}((M^\bullet)^+, or_B)$ by $(P^\bullet)^+$. So we have

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(B)}((M^\bullet)^+, or_B) &\cong \mathcal{H}om^\bullet_{\mathrm{Sh}(B)}((P^\bullet)^+, or_B) \\ &\cong \mathrm{Hom}^\bullet_{k[Q]}(P^\bullet, K_{k[Q]})^+ \\ &\cong R\,\mathrm{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]})^+. \end{aligned}$$

□

The normalized $\mathbb{Z}^n$-graded dualizing complex of $k[Q]$ is a $\mathbb{Z}^n$-graded injective resolution of $K_{k[Q]}[n]$. But since $k[Q]$ represents an $(n-1)$-dimensional polytope in our context, here we will consider a $\mathbb{Z}^n$-graded injective resolution of $K_{k[Q]}[n-1]$, which is a non-normalized dualizing complex.

Let $\omega^\bullet_{k[Q]}$ be the $Q$-graded part of a minimal $\mathbb{Z}^n$-graded injective resolution of $K_{k[Q]}[n-1]$. Then

$$\omega^\bullet_{k[Q]} : 0 \longrightarrow \omega^{-n+1} \longrightarrow \omega^{-n+2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \omega^1 \longrightarrow 0, \tag{4.1}$$

$$\omega^i = \bigoplus_{\substack{F \in L \\ \dim F = -i+1}} k[F],$$

and the differential is composed of the maps $\varepsilon(F,G) \cdot \mathrm{nat} : k[F] \to k[G]$ for all $G \in L$ with $\dim G = \dim F - 1$, where $\varepsilon$ is an incidence function on the cell complex $B = \coprod_{F \in L} |F|^\circ$ and $\mathrm{nat} : k[F] \to k[G]$ is the natural surjection.

For an order ideal $\Delta \subset L$, set $\omega^\bullet_{k[\Delta]} := \mathrm{Hom}_{k[Q]}(k[\Delta], \omega^\bullet_{k[Q]})$. This is a complex of squarefree $k[\Delta]$-modules with

$$\omega^i_{k[\Delta]} = \bigoplus_{\substack{F \in \Delta \\ \dim F = -i+1}} k[F].$$

Note that (an injective resolution of) $\omega^\bullet_{k[\Delta]}$ is a non-normalized $\mathbb{Z}^n$-graded dualizing complex of $k[\Delta]$ in the derived category of $\mathbb{Z}^n$-graded $k[\Delta]$-modules.

Let $\mathrm{Sq}(\Delta)$ be the full subcategory of Sq consisting of $k[\Delta]$-modules, that is, $M \in \mathrm{Sq}(\Delta)$ if and only if $M$ is a squarefree $k[Q]$-module whose annihilator $\mathrm{Ann}(M)$ contains $I_\Delta$. We have $D^b(\mathrm{Sq}(\Delta)) \cong D^b_{\mathrm{Sq}(\Delta)}(\mathrm{Sq}) \cong D^b_{\mathrm{Sq}(\Delta)}({}^*\mathrm{Mod})$, and $D^b(\mathrm{Sq}(\Delta))$ can be viewed as a full subcategory of $D^b({}^*\mathrm{Mod})$.

If $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}(\Delta))$, we have $R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]}[n-1]) \cong R\operatorname{Hom}_{k[\Delta]}(M^\bullet, \omega^\bullet_{k[\Delta]})$ in $D^b({}^*\mathrm{Mod})$ by the local duality. In particular, $R\operatorname{Hom}_{k[\Delta]}(M^\bullet, \omega^\bullet_{k[\Delta]})$ belongs to $D^b_{\mathrm{Sq}(\Delta)}({}^*\mathrm{Mod})$, and we can define $R\operatorname{Hom}_{k[\Delta]}(M^\bullet, \omega^\bullet_{k[\Delta]})^+ \in D^b(\mathrm{Sh}(B))$.

If $M \in \mathrm{Sq}(\Delta)$ and $j : |\Delta| \to B$ is the embedding map, then $\mathrm{Supp}(M^+) \subset |\Delta|$ and $j_*j^*M^+ \cong M^+$. Since $j_*(= j_!) : \mathrm{Sh}(|\Delta|) \to \mathrm{Sh}(B)$ is an exact functor in this case, it can be extended to the functor $j_* : D^b(\mathrm{Sh}(|\Delta|)) \to D^b(\mathrm{Sh}(B))$.

**Theorem 4.2.** *With the above notation, for $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}(\Delta))$, we have*

$$R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(|\Delta|)}(j^*(M^\bullet)^+, \mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}) \cong j^*(R\operatorname{Hom}_{k[\Delta]}(M^\bullet, \omega^\bullet_{k[\Delta]})^+)$$

*in $D^b(\mathrm{Sh}(|\Delta|))$.*

*Proof.* In $D^b(\mathrm{Sh}(B))$, we have the following isomorphisms.

$$\begin{aligned}
& j_*R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(|\Delta|)}(j^*(M^\bullet)^+, \mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}) \\
\cong\ & j_*R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(|\Delta|)}(j^*(M^\bullet)^+, j^!\mathcal{D}^\bullet_B) \\
\cong\ & R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(B)}(j_*j^*(M^\bullet)^+, \mathcal{D}^\bullet_B) \qquad \text{(by [3, VII. Theorem 5.2])} \\
\cong\ & R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(B)}((M^\bullet)^+, or_B[n-1]) \\
\cong\ & R\operatorname{Hom}_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]}[n-1])^+ \qquad \text{(by Lemma 4.1 (3))} \\
\cong\ & R\operatorname{Hom}_{k[\Delta]}(M^\bullet, \omega^\bullet_{k[\Delta]})^+.
\end{aligned}$$

Hence $j_*R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(|\Delta|)}(j^*(M^\bullet)^+, \mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}) \cong R\operatorname{Hom}_{k[\Delta]}(M^\bullet, \omega^\bullet_{k[\Delta]})^+$. Applying $j^*$ to the both sides of this isomorphism, we have the expected isomorphism. □

**Corollary 4.3.** *With the above notation, we have $\mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|} \cong j^*(\omega^\bullet_{k[\Delta]})^+$.*

*Proof.*

$$\mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|} \cong R\mathcal{H}om_{\mathrm{Sh}(|\Delta|)}(\underline{k}_{|\Delta|}, \mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}) \cong j^*(R\operatorname{Hom}_{k[\Delta]}(k[\Delta], \omega^\bullet_{k[\Delta]})^+) \cong j^*(\omega^\bullet_{k[\Delta]})^+$$

□

Next, we study the Cohen-Macaulay property of $k[\Delta]$. If $\dim k[\Delta] \leq 1$, then $k[\Delta]$ is always Cohen-Macaulay. So we may assume that $\dim k[\Delta] \geq 2$. When $k[Q]$ is a polynomial ring, the next result is a well-known theorem of Munkres.

**Proposition 4.4** (c.f. [4, 9]). *Let $\Delta \subset L$ be an order ideal with $d := \dim|\Delta| \geq 1$ (i.e., $\dim k[\Delta] = d+1 \geq 2$). Then the following are equivalent.*

(a) *$k[\Delta]$ is a Cohen-Macaulay ring of dimension $d+1$,*
(b) *$\tilde{H}_i(|\Delta|; k) = H_i(|\Delta|, |\Delta| - \{p\}; k) = 0$ for all $i < d$ and all $p \in |\Delta|$,*
(c) *$H^i(\mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}) = 0$ for all $i \neq -d$, $H^i\Gamma(|\Delta|, \mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}) = 0$ for all $i \neq -d$, 0, and $H^0\Gamma(|\Delta|, \mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}) \cong k$.*

*In particular, the Cohen-Macaulay property of $k[\Delta]$ is a topological property of $|\Delta|$ (i.e., depends only on the topology of $|\Delta|$ and $\mathrm{char}(k)$).*

In our context, the notion of a Buchsbaum ring is natural and important.

**Proposition 4.5.** *Let $\Delta \subset L$ be an order ideal with $d = \dim|\Delta|$ (so $\dim k[\Delta] = d+1$). The following are equivalent.*

(a) $k[\Delta]$ *is a Buchsbaum ring.*
(b) $H^i(\mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}) = 0$ *for all* $i \neq -d$.
(c) $H_i(|\Delta|, |\Delta| - \{p\}; k) = 0$ *for all* $i < d$ *and all* $p \in |\Delta|$.
*In particular, the Buchsbaum property of* $k[\Delta]$ *is a topological property of* $|\Delta|$.

If $|\Delta|$ is a manifold (with or without boundary) of dimension $d$, we have $\mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|} \cong or_{|\Delta|}[d]$. And $k[\Delta]$ is a Buchsbaum ring of dimension $d+1$. By Corollary 4.3, we have $j^*(K_{k[\Delta]})^+ \cong or_{|\Delta|}$, where $K_{k[\Delta]} := \operatorname{Ext}^{n-d-1}_{k[Q]}(k[\Delta], K_{k[Q]})$ is the canonical module of $k[\Delta]$.

If $(A, \mathfrak{m})$ is a Buchsbaum local ring of dimension $d+1$. Assume that $A$ admits a canonical modules $K_A$. Then [6, II. Theorem 4.9] states that

$$H^i_{\mathfrak{m}}(K_A) \cong \operatorname{Hom}_A(H^{d-i+2}_{\mathfrak{m}}(A),\ E(A/\mathfrak{m})) \quad \text{for all } 2 \le i \le d,$$

where $E(A/\mathfrak{m})$ is the injective hull of $A/\mathfrak{m}$. We will see that this duality corresponds to the Poincaré duality in our context.

Assume that $k[\Delta]$ is a Buchsbaum ring of dimension $d+1$ (thus $\dim|\Delta| = d$). Then we have

$$(4.2) \qquad [H^i_{\mathfrak{m}}(\,(K_{k[\Delta]})_{>0}\,)]_0 \cong [H^{d-i+2}_{\mathfrak{m}}(\,k[\Delta]_{>0}\,)^\vee]_0 \quad \text{for all } 1 \le i \le d+1.$$

(When $2 \le i \le d$, this is just a $\mathbb{Z}^n$-graded version of [6, II. Theorem 4.9]. We leave the case when $i = 1, d+1$ for the reader as an easy exercise.) By Theorem 3.2,

$$[\,H^i_{\mathfrak{m}}(\,(K_{k[\Delta]})_{>0}\,)\,]_0 \cong H^{i-1}(\,|\Delta|,\ (K_{k[\Delta]})^+) \cong H^{i-1}(\,|\Delta|,\ or_{|\Delta|}\,)$$

and

$$[\,H^{d-i+2}_{\mathfrak{m}}(\,k[\Delta]_{>0}\,)\,]_0 \cong H^{d-i+1}(\,|\Delta|,\ \underline{k}_{|\Delta|}\,) \cong H^{d-i+1}(\,|\Delta|\,;\,k\,)$$

for all $1 \le i \le d+1$. So (4.2) also follows from the Poincaré duality

$$H^i(\,|\Delta|,\ or_{|\Delta|}\,) \cong H^j(\,|\Delta|\,;\,k\,)^\vee \text{ for all } i,j \text{ with } i+j = d.$$

Note that $|\Delta|$ is an orientable manifold (i.e., a manifold with $\underline{k}_{|\Delta|} \cong or_{|\Delta|}$) if and only if $k[\Delta]$ is a Buchsbaum ring with $(K_{k[\Delta]})_{>0} \cong k[\Delta]_{>0}$. In this case, (4.2) corresponds to the most familiar form of the Poincaré duality. We also remark that if $|\Delta|$ is an orientable manifold of dimension $d$ then $\dim_k[H^{d+1}_{\mathfrak{m}}(k[\Delta])]_0$ equals the number of the connected components of $|\Delta|$. When $|\Delta|$ is a connected manifold, $|\Delta|$ is orientable if and only if $\dim_k[H^{d+1}_{\mathfrak{m}}(k[\Delta])]_0 = 1$. In this case, $K_{k[\Delta]} \cong k[\Delta]$.

Let $\operatorname{Sq}_+(\Delta)$ be the full subcategory of Sq consisting of squarefree $k[\Delta]$-modules $M$ with $M_0 = 0$. For a while, let $M^\bullet$ be an object of $D^b(\operatorname{Sq}_+(\Delta))$.

By the local duality and Theorem 3.2, we have

$$[\operatorname{Ext}^{-i}_{k[\Delta]}(M^\bullet, \omega^\bullet_{k[\Delta]})^\vee]_0 \cong [R^{i+1}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M^\bullet)]_0 \cong R^i\,\Gamma(B, (M^\bullet)^+) \cong R^i\,\Gamma(\,|\Delta|,\ j^*(M^\bullet)^+).$$

On the other hand, we have $\operatorname{Ext}^{-i}_{\operatorname{Sh}(|\Delta|)}(\,j^*(M^\bullet)^+,\ \mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}\,)^\vee \cong R^i\,\Gamma(\,|\Delta|,\ j^*(M^\bullet)^+)$ by the Poincaré-Verdier duality ([3, V, 2.1]). Thus

$$(4.3) \qquad \operatorname{Ext}^i_{\operatorname{Sh}(|\Delta|)}(\,j^*(M^\bullet)^+,\ \mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}\,) \cong [\operatorname{Ext}^i_{k[\Delta]}(\,M^\bullet,\ \omega^\bullet_{k[\Delta]}\,)]_0.$$

We can give another proof of (4.3). Let $P^\bullet \to M^\bullet$ be a projective resolution of $M^\bullet$ in Sq. Since $M^\bullet \in D^b(\operatorname{Sq}_+(\Delta))$, we may assume that each component of $P^\bullet$ is a direct sum of copies of $J_F$ for various $\{0\} \neq F \subset [n]$. If $F \neq \{0\}$, then $\mathrm{Supp}((J_F)^+) = U_F \cong \mathbb{R}^n$ or $\mathbb{R}^n_+$ and $\mathrm{Ext}^{-i}_{\mathrm{Sh}(B)}((J_F)^+, \mathcal{D}^\bullet_B) = H^i(B, (J_F)^+) = H^i_c(U_F; k) = 0$ for all $i \neq n-1$. So we can compute $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Sh}(B)}((M^\bullet)^+, \mathcal{D}^\bullet_B)$ using $(P^\bullet)^+$, and we have the following.

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Sh}(|\Delta|)}(j^*(M^\bullet)^+, \mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}) \\
\cong\ & \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Sh}(B)}((M^\bullet)^+, \mathcal{D}^\bullet_B) \qquad \text{(by [3, VII. Theorem 3.1])} \\
\cong\ & \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Sh}(B)}((M^\bullet)^+, or_B[n-1]) \\
\cong\ & H^i(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(B)}((P^\bullet)^+, (K_{k[Q]})^+[n-1])) \\
\cong\ & H^i([\mathrm{Hom}_{k[Q]}(P^\bullet, K_{k[Q]}[n-1])]_0) \qquad \text{(since } P^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_+)) \\
\cong\ & [\mathrm{Ext}^i_{k[Q]}(M^\bullet, K_{k[Q]}[n-1])]_0 \\
\cong\ & [\mathrm{Ext}^i_{k[\Delta]}(M^\bullet, \omega^\bullet_{k[\Delta]})]_0.
\end{aligned}
$$

## REFERENCES


[1] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, revised edition, Cambridge University Press, 1998.

[2] R. Hartshorne, Residues and duality, Lectures Notes in Math., vol. 20, Springer-Verlag, 1966.

[3] B. Iversen, Cohomology of sheaves. Springer-Verlag, 1986.

[4] E. Miller, Cohen-Macaulay quotients of normal affine semigroup rings via irreducible resolutions, Math. Research Letters **9** (2002), 117-128.

[5] R. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, 2nd ed. Birkhäuser 1996.

[6] S. Stuckrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications, Springer-Verlag, 1986.

[7] K. Yanagawa, Alexander duality for Stanley-Reisner rings and squarefree $\mathbb{N}^n$-graded modules, J. Algebra **225** (2000), 630–645.

[8] K. Yanagawa, Sheaves on finite posets and modules over normal semigroup rings, J. Pure and Appl. Algebra **161** (2001), 341–366.

[9] K. Yanagawa, Squarefree modules and local cohomology modules at monomial ideals, in "Local Cohomology and Its Applications (G. Lyubeznik, ed.)," pp. 207–231, Dekker, 2002.

[10] K. Yanagawa, Stanley-Reisner rings, sheaves, and Poincaré-Verdier duality, preprint, `math.AC/0301030`.



560-0043 豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学教室

*E-mail address*: `yanagawa@math.sci.osaka-u.ac.jp`

# The strong Lefschetz property and finite free extension of Artinian $K$-algebra

Harima Tadahito
Dept. of Information Science, Shikoku University
Watanabe Junzo
Dept. of Mathematical Sciences, Tokai University

$K$ を標数0の体とし，$(A, \mathfrak{m}, K)$ を0次元局所環で $K$ を含むものとする．$n$ で $A$ のベクトル空間としての次元を表す．$\times : A \to \mathrm{End}(A)$ を $K$ の正則表現とする．すなわち $a \in A$ のとき，$\times a$ は「$a$ 倍写像」を表す．$A$ は局所環だから，$\times a$ は，(重複度 $n$ の) ただ一つの固有値をもつ．($a$ の固有値が $0 \Leftrightarrow a \in \mathfrak{m}$ ) このような行列のジョルダン標準形は，正整数 $n$ の分割 (Young diagram と言っても良い) で表される．すなわち，$n$ の分割 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ は，$\times a$ のジョルダン標準形が，次数 $n_i$ のジョルダン細胞に分解することを表すものとする．(断らなければ，$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$ とする．)

$n$ の分割の集合に全順序を次の様に導入する．すなわち，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ (この分割を $Y_1$ と表す) と $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_s$ ($Y_2$ とする) を $n$ の2つの分割とするとき，$Y_1 \succ Y_2$ とは，(1) $r < s$ または (2) $r = s$ であり，しかも，$n_i = m_i$ for $i = 1, 2, \cdots, j-1$ かつ $n_j > m_j$ となることである．

$a \in \mathfrak{m}$ のうち，そのジョルダン標準形が上記の意味で最強のものを，$A$ の一般元と言うことにする．($\mathfrak{m}$ の極小生成系をとり，その一般的な一次結合を作れば，この意味で一般元になっている．これは直観的には納得しやすいことだが，ちゃんと証明するにはそれなりの工夫を要する．)

上記の仮定に加えて，$A = \bigoplus_{i=0}^{c} A_i$ を次数付き $K$-代数とする．(このように書くとき，常に $A_c \neq 0$ とする．$A_0 = K$ を仮定するが，必ずしも $A = K[A_1]$ でなくても良い．) $A$ のヒルベルト関数，$h_i := \dim A_i$ は，正整数 $n$ の分割を与える．すなわち，$n = h_0 + h_1 + \cdots + h_c$． (必要であれば，大きさの順に並べ替え る．)

$A$ の強レフシェツ性 (SLP) と 弱レフシェツ性 (WLP) を次の様に定義する．

**定義 1** $A = \bigoplus_{i=0}^{c} A_i$ を上述のような $K$-代数とする．

- $A$ が弱レフシェツ性を持つ．$\Leftrightarrow$ 一次式 $g \in A_1$ が存在して，$\times g : A_i \to A_{i+1}$ が full rank を取る．(ただし， $i = 0, 1, \cdots, c-1$ とする．)

- $A$ が強レフシェツ性を持つ．$\Leftrightarrow$ 一次式 $g \in A_1$ が存在して，

$$\times g^{c-2i} : A_i \to A_{c-i}$$

が全単射になる．(ただし，$i = 0, 1, \cdots, [c/2]$ とする．) この場合，$g$ のことを，レフシェッツ元と言う．

$A$ の一般元のジョルダン標準形を使って，SLP は次の様に特徴付けられる．

**定理 2** つぎの条件は同値である．

(1) $A$ は SLP を持つ．

(2) $A$ の一般元を $g$ とするとき，$\times g$ のジョルダン標準形から得られる $n$ の分割の双対は，(順序を無視すれば) $A$ のヒルベルト関数に一致する．

**証明** $A$ が SLP を持つとき，$A$ の一般元はレフシェッツ元である．一般に言って，$M \in \mathrm{End}(V)$ を巾零線形写像とするとき，$M$ のジョルダン標準形は $\dim \mathrm{Ker} M^i, i = 0, 1, 2, \cdots$ で決まる．ところが，$A$ が SLP をもち，$g \in A$ がレフシェッツ元であれば，数列

$$\dim \mathrm{Ker}\ (\times g^i), i = 0, 1, 2, \cdots$$

は，その階差を作ると $A$ のヒルベルト関数を大きさの順に並べたものに一致する．これで，(1) ⇒ (2) が言えた．逆方向の証明も簡単．(証明終)

**例 3** $A = K[x, y]/(x^3, y^4)$ とする．このとき，ヒルベルト関数は

$$(1, 2, 3, 3, 2, 1)$$

である．これを大きさの順にならべかえて，$12 = 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$ という分割を得る．一方，一般元のジョルダン標準形は $12 = 6 + 4 + 2$ であり，この二つの分割は双対である．

**定理 4** $A = \bigoplus_{i=0}^{c} A_i$ をアルティン $K$-代数とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(1) $A$ は SLP をもつ．

(2) すべての $j \geq 0$ について，$A[z]/(z^j)$ は WLP をもつ．

**証明**はリー環 $\mathfrak{sl}_2$ の加群の分類を使うと簡単だ．

この定理が SLP 証明の強力な武器になる．たとえば，この定理を使うと，「(任意の埋蔵次元の) 全ての完全交叉環は SLP をもつ」ことと「(任意の埋蔵次元の) 全ての完全交叉環は WLP をもつ」ことは同値であることがわか

る．かりに，完全交叉 $A=K[x_1,x_2,\cdots,x_n]/(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ が WLP を持ち，しかも SLP を持たなかったとすると，この定理により，

$$A=K[x_1,x_2,\cdots,x_n,z]/(f_1,f_2,\cdots,f_n,z^j)\ (\exists j)$$

（これは完全交叉環）が WLP を持たないことになるからだ．この定理は主定理（定理１２）の証明にも決定的な役割を果たす．

**定義 5** (1) $K$ を体とし，$M$ は，$K$ で定義された行列とする．$J$ を (上半三角型) 巾零行列のジョルダン標準形とする．$M$ が $J$ の変形であるとは，$M$ が (上半三角型) 巾零行列であり，対角線のひとつ上の成分が全て $J$ と一致するものを言う．

(2) $p$ を $K$ 上の代数的独立元とし，$M$ を $K[p]$ 上の行列とする．$\alpha\in K$ とするとき，$M$ において，$p$ に $\alpha$ を代入して得られる行列を $M_{p\to\alpha}$ と書く．

**命題 6** 行列 $M=(a_{ij})$ は次の性質を持つとする．

1. $M$ は巾零上半三角行列である．(従って，対角成分はすべて零.)
2. $a_{ij}\in\{p,q,0\}$．ただし，$p,q$ は互いに異なる２つの文字.
3. $a_{ij}=p\Rightarrow j=i+1$
4. $M$ の各行各列とも，高々１つの $p$ と高々１つの $q$ しか含まない.

$M'$ を $M_{p\to1,q\to0}$ の変形とする．$M''=M_{p\to0,q\to1}$ とする．このとき，次の不等号が成立する．

$$\mathrm{rank}\ (M'+\lambda M'')\geq \mathrm{rank}\ M$$

ただし、$\lambda$ は $K$ 上の不定元とする．

**証明**. $M$ の階数を $r$ とする．$\wedge^r M$ (行列と見る) の成分は，係数を $\pm1$ とする $p,q$ の単項式である．(すべての $q$ が $p$ 達の右上に位置するからだ.) $M$ の $r$ 次の小行列で，その行列式が，$q$ に関して最大次数を持つものを $S$ とする．$S$ の成分のうち，$\det S$ に寄与する $p$ と $q$ を本質的な $p$ および本質的な $q$ ということにする．また，$S$ と同じ行と列からなる $pM'+qM''$ の小行列を $S'$ とする．$S$ における本質的な $p,q$ と同じ位置の $p,q$ を $S'$ の本質的な $p,q$ と言うことにする．

$\lambda=q/p$ と置き，$pM'+qM''$ を $p$ で割れば，$M'+\lambda M''$ になり，$p$ は1になり，$q$ は $\lambda$ になるわけだが，本質的な $p$ のあった位置に出現する１を本質的

な1と呼び, 本質的な $q$ のあった位置に出現する $\lambda$ を本質的な $\lambda$ と呼ぶ．($S'$ も $p$ で割り，$M'+\lambda M''$ の小行列と見る．ただし，簡単のため同じ記号を使う．) さて，$S'$ における本質的な1を使って, 同列のすべての元を消すことを考える．(つまり，何倍かして，別の行に加える．) このとき，本質的な $\lambda$ は定数項しか変化を受けないことが容易にわかる．従って，本質的な1を持つ列は，それ自身以外は全て0とし，同時に，本質的な $\lambda$ を含む列は，高々 $\lambda$ の一次式しか持たないようにできる．(本質的な1のうち，最も右下にあるものは，同行にqを含まないことに注意する．このことを考慮して，右の列優先で行変形すれば良い．) 今度は，本質的なqを使って同列にあるqを消す．定数項は消えなくても良い．この結果，非本質的なqを全て消すことができる．ここで行列式をとれば, $\det S'$ の頭項は $\det S$ に一致することがわかる．(証明終)

問． 座標に頼らない証明はないか？

上記の命題は，次のような例え話が可能だ．$M$ を, $n$ 人の男子と同数の女子の間の関係行列と見る．ただし,「$q$」は「恋愛結婚の可能性」を表し,「$p$」は「政略結婚の可能性」を表すものとする．すなわち，関係が $q$ であるとは, 二人が恋愛関係にあり互いに結婚してもよいと考えている．一方，関係が $p$ であるとは，彼らの周囲に政略結婚を画策する者がいて，その二人の政略結婚が期待されている．関係が0であるとき，二人は「結婚できない」ということにする．また，関係が「$q$」と「$p$」のいずれの場合も「結婚できる」と言う．このときにできる結婚の組み合わせの最大数は，$M$ の階数である．(もちろん,「一夫一妻制度」を尊重するものとする．) この階数を $r$ と言うことにする．結婚の組みの数を最大にしたまま，最大限何組の恋愛結婚ができるのか．これはじつは，$\wedge^r M$ の成分に現れる $p,q$ の単項式の $q$-次数のうちの最大値であることが容易にわかる．ところで，次のことが証明できる．(このことを頭に入れておくと，上記の証明の助けになる．)

> 最大数の結婚のカップルを作り, その内，恋愛結婚の組の数を最大にするような組み合わせ方はただ一通りしかない．すなわち，$\wedge^r M$ の成分に現れる $p$ と $q$ の単項式のうち， 最大の $q$-次数を持つものはただ一つである．

つい脱線してしまった．話を元に戻す．

上述した通り，ジョルダン標準形（の型）はYoung diagramで表される．線形写像をジョルダン標準形で表すための基底は、Young tableauで表される．すなわち，Young diagramの箱に番号をつけることに他ならない．例えば $T$ を次の Young tableau とする．

$$
T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
6 & 7 & 8 \\
\cline{1-3}
9 \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

この時，行列 $J=(a_{ij})$ は $T$ を用いると，以下の通り記述することができる．

$$
a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } j \text{ is next to the right of } i \text{ in } T, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

じつは，基底の番号を付け替えてできる行列もほぼジョルダン標準形と同様の役割を果たす．次の様に定義される行列を上記行列のジョルダン第二標準形ということにする．(これも例で説明する．しかし，一般の場合もまったく同じである.) まず上記の Young diagram を変形し番号を縦方向優先で付ける．(このような Young tableau を $\widehat{T}$ で表す.)

$$
\begin{array}{ccccc}
\cline{5-5}
 & & & & \multicolumn{1}{|c|}{7} \\
\cline{3-5}
 & & \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{5} & \multicolumn{1}{c|}{8} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{6} & \multicolumn{1}{c|}{9} \\
\hline
\end{array}
$$

このとき，ジョルダン第二標準形 $(a_{ij})$ を次の様に定義する．

$$
a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } j \text{ is next to the right of } i \text{ in } \widehat{T}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

**例 7** $T=T(5,3,1)$ とする． この双対は $\widehat{T}=\widehat{T}(1,1,2,2,3)$ となる．これに対応したジョルダン第二標準形は次の行列である．

$$
\left(\begin{array}{c|c|cc|cc|ccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$\mathbf{M}(n)$ で次数 $n$ の全行列環を表す．($A$ の基底を決めれば $\mathrm{End}(A)$ は全行列環と同じことだから，$\mathbf{M}(n)$ の議論はそのまま，$\mathrm{End}(V)$ に転用する．) 準同型写像 $\mathcal{F}:\mathbf{M}(n)\to\mathbf{M}(sn)$ を

$$\mathcal{F}(M)=\mathrm{diag}(\underbrace{M,M,\cdots,M}_{s})$$

で定義し，$s$ 重コピーと呼ぶ．また，準同型写像 $\mathcal{G}:\mathbf{M}(n)\to\mathbf{M}(sn)$ を以下の様に定義し，$s$ 重インフレイションと呼ぶ．

**定義 8** $\mathcal{G}(M)$ とは，$M$ の $(ij)$ 成分 $m_{ij}$ を行列 $m_{ij}E_s$ で置き換えて得られる，次数 $sn$ の行列である．ただし，$E_s$ は $s$ 次の単位行列．

$s$ 重コピーと $s$ 重インフレーションは同値である．

$\mathbf{M}(sn)$ の元を $\mathcal{M}=(M_{ij}^{(kl)})$ と書き, $(kl)$ をブロックの番号, $(ij)$ を成分の番号と言うことにする．ただし, $(kl),(ij)$ の動く範囲は, 次のいずれかであるとする．

$$\begin{cases}\text{(a) } 1\le l,k\le s, 1\le i,j\le n\\ \text{(b) } 1\le l,k\le n, 1\le i,j\le s\end{cases}$$

つまり，$\mathbf{M}(sn)$ の元は二通りの意味でブロック行列と考えられる．一つは，$s\times s$ の小行列を1ブロックとし，縦横 $n$ 個のブッロクからなるものと，もう一つは，$n\times n$ の小行列を1ブロックとし，縦横 $s$ 個のブッロクからなるものとである．この「見方を変える」ということを，仮に "hat operation" と呼ぶのだが，はっきりさせるため次のように定義する．すなわち，

$$\widehat{\mathcal{M}}=(M_{kl}^{(ij)})\Leftrightarrow\mathcal{M}=(M_{ij}^{(kl)})$$

$J\in\mathbf{M}(n)$ が, 巾零行列のジョルダン第一標準形であれば, $\widehat{\mathcal{F}(J)}$ はジョルダン第二標準形となることに注意しよう．

$(A,\mathfrak{m})$ を今まで通りの $K$-代数とし，$A\to B$ を有限平坦拡大とし，$C=B/\mathfrak{m}B$ とする．$\dim A=n$, $\dim B/\mathfrak{m}B=s$ とおく．

$C$ は，$K$ 上のベクトル空間で，その基底 $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_s\}$ の原像は，$B$ の $A$ 上の自由基底である．したがって，$V=\langle e_1,e_2,\cdots,e_s\rangle$ とすれば，ベクトル空間としての同型

$$V\bigotimes A\to B, v\otimes a\mapsto va$$

が得られる．$1\in V$ と仮定してよい．今後は，この同型を固定しておき，$B$ と $V\otimes A$ を，さらに，$\mathrm{End}(B)$ と $\mathrm{End}(V\otimes A)$ を，ベクトル空間として同一視する．さらに，$A$ と $V$ の基底を固定した場合は，$\mathrm{End}(B)=\mathbf{M}(sn)$,

および，$\mathrm{End}(A) = \mathbf{M}(n)$ と考えるものとする．準同型写像 $A \to B$ は，$\mathrm{End}(A) \to \mathrm{End}(V \otimes A)$ を引き起こす．これは前節で定義した，$s$ 重コピー $\mathcal{F} : \mathbf{M}(n) \to \mathbf{M}(sn)$ である．

$\mathfrak{A} \subset \mathbf{M}(n)$ とするとき，$\mathrm{Comm}(\mathfrak{A}, \mathbf{M}(n))$ で Commutator algebra を表す．すなわち，

$$\mathrm{Comm}(\mathfrak{A}, \mathbf{M}(n)) = \{M \in \mathbf{M}(n) | \phi M = M\phi\ \forall \phi \in \mathfrak{A}\}$$

($\mathfrak{A}$ は単に集合だが，Comm は 1 を持つ結合的代数になる．) また，つぎに定義する H. Weyl [8] の記号を使う．$\mathfrak{A} \subset \mathbf{M}(n)$ とするとき，$s\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}_s$ は $\mathbf{M}(sn)$ の以下の部分集合を表す．

$$s\mathfrak{A} = \{ \begin{pmatrix} M & & \mathbf{0} \\ & M & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & M \end{pmatrix} | M \in \mathfrak{A}\},$$

$$\mathfrak{A}_s = \{ \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1s} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ M_{s1} & M_{m2} & \ddots & M_{ss} \end{pmatrix} | M_{ij} \in \mathfrak{A}\}.$$

このとき，次のことが成り立つ．

**命題 9**

$$\mathrm{Comm}(\mathcal{F}(A), \mathbf{M}(sn)) = (\times A)_s$$

ここに，$\mathcal{F}(A)$ は，定義通り，集合 $\{\mathrm{diag}(\underbrace{\times a, \cdots, \times a}_{s}) | a \in A\}$ を表す．

**証明.** 少し考えれば，$\mathrm{Comm}(\times A, \mathrm{End}(A)) = \times A$ が分かる．あとは，ストレイトフォワードにできる．(証明終)

**定理 10** $A = \bigoplus_{i=0}^{c} A$ が SLP を持つとし，$y$ を $A$ の一般元とする．このとき，$A$ の基底をうまく取り，$A \to \mathrm{End}(A)$ を上半三角型とし，さらに，$\times y$ をジョルダン第二標準型に置くことができる．

**証明**. $A$ が SLP を持つとき，$\times y$ をジョルダン第一標準形で表すための基底を選ぶことは簡単にできる．(尤も，計算が簡単だと言う意味ではない.)

その基底の番号を付け替えて，第二標準形に直すことも簡単である．このことを頭に入れて，次の $A$ の部分空間の増大列（flag）を考えよう．

$$A = 0 : y^{c+1} \supset 0 : y^{c} \supset 0 : y^{c-1} \supset \cdots \supset 0 : y^{2} \supset 0 : y \supset 0 : 1 = 0$$

$A$ の各元はこの flag を保つから，$\times y$ を，ジョルダン第二標準形に置き，しかも，全体を「ブロック上半三角型」に置くことができる．この時，対角線上のブロックが，上半三角型になればよいわけだが，このことは，$A$ が SLP を持つことから自動的に従う．(証明終)

良く知られている通り，強レフシェツ性はテンソル積で保存される．即ち

**定理 11** $A$ と $C$ が，強レフシェツ性を有するなら，$A \bigotimes_K C$ も強レフシェツ性を有する．$g \in A_1, h \in C_1$ がそれぞれのレフシェツ元であれば，$g \otimes 1 + 1 \otimes h$ が $A \bigotimes_K C$ のレフシェツ元である．(注意：弱レフシェツ性は，テンソル積で保存されない.)

この定理を次の様に一般化する．この証明が本講演の目的であった．

**定理 12** $A, B$ を $K$ 上の次数環とする．$A \to B$ を次数を保つ 平坦射とする．($B$ は $A$ 上 finite free である.) $A$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とし，$C = B/\mathfrak{m}B$ と置く．このとき次の事が成立する．

$A$ と $C$ が強レフシェツ性を有する． $\Rightarrow B$ は強レフシェツ性を有する．

**証明の概略** $y \in A$ を $A$ のレフシェツ元とし，$\times y$ が，ジョルダン標準形になるように $A$ の基底 $\{f_j | j = 1, 2, \cdots, n\}$ をとる．ただし，$n = \dim A$ である．$C = B/\mathfrak{m}B$ と置き，$s = \dim C$ とする．$b \in B$ とするとき，$\overline{b} \in C$ で，$b$ の自然な像を表す．$z \in B$ を $\overline{z}$ が $C$ の レフシェツ元となるようにとる．部分空間 $V \subset B$ で，$B = V \oplus \mathfrak{m}B$ なるものとし，その基底 $\{e_i | i = 1, 2, \cdots, s\}$ を $\{\overline{e}_i | i = 1, 2, \cdots, s\}$ が $\times \overline{z}$ のジョルダン標準形になるようにとる．次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\times} & \mathrm{End}(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathrm{End}(B) \\ & & \updownarrow & & \updownarrow \\ & & \mathbf{M}(n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathbf{M}(sn) \end{array}$$

ただし，垂直方向の矢印は，上記の基底を使ってできる同一視である．水平方向の $\mathcal{F}$ は，上下とも，すでに定義した $s$ 重コピーである．従って，$\mathcal{F}(A)$ は，上に定義した記号を使うと，$s(\times A)$ である．このとき，

$$\mathrm{Comm}(\mathcal{F}(A), \mathbf{M}(sn)) = (\times A)_s$$

である．これは，命題９で見た通りである．$B$ の元は $A$ とコミュートするから，$\times z \in \mathrm{End}(B)$ の形がきまる．一方， $C \otimes A$ も $\mathbf{M}(sn)$ と同一視できるから，$\times(\overline{z} \otimes 1)$ を $\mathbf{M}(sn)$ の元と考えることができるのだが，$\times z$ はこの変形(上に定義した)になっていることがわかる.（ここに，定理１０を使う.）従って，十分一般的な $\lambda$ をとると，

$$\mathrm{rank}[\times(z+\lambda y)] \geq \mathrm{rank}[\times((\overline{z}) \otimes 1 + 1 \otimes y)]$$

が定理6よりわかる.（ここに，記号の濫用があるのでもう少し説明を加える．左辺の $z$ と $y$ は，$B$ の元と見ている．従って，$\times(z+\lambda y)$ は，$\mathrm{End}(B)$ の元である．右辺の $\overline{z}$ は $C$ の元，$y$ は $A$ の元であり，右または左から１をテンサーすることで，$C \bigotimes A$ の元と見る．従って，$\times(\overline{z}\otimes 1+1\otimes y)$ は，$\mathrm{End}(C \bigotimes A)$ の元と考える．どちらの場合も $sn$ 次の行列で表される.）ところで，SLP はテンソル積で保たれるから，$\mathrm{rank}(\times(\overline{z} \otimes 1 + 1 \otimes y))$ は，$B$ の CoSperner 数になっている．(ただし，$K$-代数の CoSperner 数というのは，ヒルベルト関数だけを制約条件として期待できる $\times l$ の階数の最大値である．ここに，$l$ は $K$-代数の一次式を動く．) 従って，この不等号は，$B$ が WLP を持つことを意味する．しかし，全く同様にして，$B[t]/(t^k)$ $(\forall k)$ が WLP を持つことが証明できる．なぜなら， $B$ を $B' = B[t]/(t^k)$ で置き替えても，$A \to B'$ は依然として flat だし, そのファイバー $C$ は $C[t]/(t^k)$ に置き換わるのだが，これも依然として SLP を持つ．だから, $B'$ は WLP を持ち，定理4から $B$ の SLP が従う．(証明終)

定理１２を使うと次の様な例が証明できる．

**例 13** $R = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ を多項式環とする．変数の次数は１とする．$s_i(x_1, \cdots, x_n), i = 1, 2, \cdots, n$ を $i$ 次基本対称式とする．$r$ を正整数とする．$I$ を $s_i(x_1^r, x_2^r, \cdots, x_n^r), i = 1, 2 \cdots, n$ で生成される $R$ のイデアルとする．このとき，$A = R/I$ は強レフシェツ性をもつ．$r = 1$ なら，$A$ は $A_{n-1}$ 型の Weyl 群による余不変式環であり，旗多様体のコホモロジー環として現れる．$r = 2$ なら，$B_n$ 型の Weyl 群による余不変式環である．また，$A$ の部分環で，$A$ のレフシェツ元を含み，対称的なヒルベルト関数を持つものは，強レフシェツ性をもつ．

**証明** $A = A_n$ と書き，$n$ の帰納法で証明する．$t$ を新変数とし，写像 $K[t] \to A$ を $t \mapsto x_n$ と定義することに $A$ は $K[t]/(t^{rn})$ の finite free extension になり，ファイバーは $A_{n-1}$ である．よって定理がそのまま使える．(証明終)

# References

[1] D. Bayer, M. Stillman, *A criterion for detecting m-regularity*, Invent. Math., **87** (1987), 1–11.

[2] A. Galligo, *A propos du théorème de préparation de Weierstrass*, Fonction de Plusieurs Variebles Complexes. Lect. Notes Math. **409**, 543–579, 1974

[3] T. Harima, J. Migliore, U. Nagel and J. Watanabe, *The weak and strong Lefschetz property for Artinian $K$-algebras*, To appear in Journal of Algebra.

[4] J. Watanabe, *The Dilworth number of Artinian rings and finite posets with rank function*, Adv. Stud. Pure Math. **11** (1987), 303–312.

[5] J. Watanabe, $\mathfrak{m}$-*Full ideals*, Nagoya Math. J. **106** (1987), 101–111.

[6] J. Watanabe, *A note on Gorenstein rings of embedding codimension three*, Nagoya Math. J. **50** (1973), 227–232.

[7] J. Watanabe, *A note complete intersections of codimension three*, Proc. Amer. Math. Soc. 126(1998), 3161-3168.

[8] H. Weyl, Classical Groups, Princeton, 1946.

# WHEN DOES THE SUBADDITIVITY THEOREM FOR MULTIPLIER IDEALS HOLD?

SHUNSUKE TAKAGI AND KEI-ICHI WATANABE

ABSTRACT. Demailly, Ein and Lazarsfeld [DEL] proved the subadditivity theorem for multiplier ideals, which states the multiplier ideal of the product of ideals is contained in the product of the individual multiplier ideals, on non-singular varieties. We prove that, in two-dimensional case, the subadditivity theorem holds on log-terminal singularities. However, in higher dimensional case, we have several counter-examples. We consider the subadditivity theorem for monomial ideals on toric rings, and construct a counter-example on a three-dimensional toric ring.

## INTRODUCTION

Multiplier ideals was first introduced in the complex analytic context in the work of Demailly, Nadel, Siu and the others, and they proved a Kodaira-type vanishing theorem involving these ideals. Multiplier ideals could be reformulated in a purely algebro-geometric setting in the terms of resolution of singularities and discrepancy divisors, and nowadays those ideals become fundamental tools in birational geometry.

Demailly, Ein and Lazarsfeld [DEL] proved the subadditivity theorem for multiplier ideals, which states the multiplier ideal of the product of ideals is contained in the product of the individual multiplier ideals. This theorem itself is very miraculous for commutative algebraists, and moreover it has several interesting applications to commutative algebra and algebraic geometry. For example, the problem concerning the growth of symbolic powers of ideals in regular local rings (see [ELS]), Fujita's approximation theorem which asserts that most of the volume of a big divisor can be accounted for by the volume of an ample $\mathbb{Q}$-divisor on a modification (see [Fu] and [La]), etc. However their proof of the subadditivity theorem works only on non-singular varieties over a field of characteristic zero, because their proof needs the Kawamata-Viehweg vanishing theorem and the fact that the diagonal embedding is a complete intersection. Hence we investigate when the subadditivity theorem holds on singular varieties which admit a resolution of singularities. The multiplier ideal associated to the trivial ideal defines the locus of non-log-terminal points of $\operatorname{Spec} R$. Therefore, on non-log-terminal singularities, the subadditivity theorem fails. Conversely, in two-dimensional case, by using a characterization of integrally closed ideals via anti-nef cycles, we show that the subadditivity theorem holds on log-terminal singularities which are not necessarily essentially of finite type over a field of characteristic zero. (In this article, assuming $A$ is Gorenstein, we give the simple proof of Theorem 2.2).

**Theorem 2.2.** *Let $(A, \mathfrak{m})$ be a two-dimensional $\mathbb{Q}$-Gorenstein normal local ring. Then $A$ is log-terminal if and only if the subadditivity theorem holds, that is, for any two ideals $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \subseteq A$,*

$$\mathcal{J}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq \mathcal{J}(\mathfrak{a})\mathcal{J}(\mathfrak{b}).$$

However, in higher dimensional case, we have several counter-examples to Theorem 2.2. See Example 3.1. So we investigate the subadditivity theorem for monomial ideals. The multiplier ideals associated to a monomial ideal are characterized by the Newton polygon (see [HY] and [How]), and it is easy to calculate those ideals. We expected that the subadditivity theorem for monomial ideals holds on all toric rings, but unfortunately we found a counter-example on a three-dimensional toric ring (see Example 3.2).

## 1. Multiplier ideal

*Notation.* Throughout this article, let $(A, \mathfrak{m})$ be an excellent $\mathbb{Q}$-Gorenstein normal local ring satisfying at least one of the following conditions:

- $(A, \mathfrak{m})$ is essentially of finite type over a field of characteristic zero.
- $(A, \mathfrak{m})$ is two-dimensional.

First we recall the definition of multiplier ideals. Refer to [La] for the general theory of multiplier ideals.

**Definition 1.1.** Let $\mathfrak{a}$ be an ideal in $A$. By [Hi], [Li1] and [Li2], there exists a resolution of singularities $f : X \to \operatorname{Spec} A$ such that $\mathfrak{a}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-F)$ is invertible and $\sum_{i=1}^{s} E_i + F$ has simple normal crossing support, where $\operatorname{Exc}(f) = \sum_{i=1}^{s} E_i$ is the exceptional divisor of $f$. Then the *multiplier ideal*[1] associated to $\mathfrak{a}$ is defined to be

$$\mathcal{J}(\mathfrak{a}) = \mathcal{J}(A, \mathfrak{a}) = H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X - f^*K_A - F \rceil)) \subseteq A,$$

where $K_X$ and $K_A$ are the canonical divisor of $X$ and $\operatorname{Spec} A$ respectively. In particular, $A$ is said to be a *log-terminal singularity* if $\mathcal{J}(A) = A$.

*Remark* 1.2. (1) Multiplier ideals are independent of the choice of a desingularization $f : X \to \operatorname{Spec} A$.
(2) Log-terminal singularities are rational singularities.

The following basic properties of multiplier ideals immediately follows.

**Proposition 1.3.** *Let $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ be ideals in $A$.*

(i) *If $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, then $\mathcal{J}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathcal{J}(\mathfrak{b})$.*

[1] Lipman [Li3] calls this ideal the "adjoint ideal." However Lazarsfeld [La] uses the term "adjoint ideal" in a different sense. To avoid the reader's confusion, we adopt the term "multiplier ideal" in this article.

(ii) $\mathcal{J}(\mathfrak{a})$ *is integrally closed. Moreover* $\mathcal{J}(\mathfrak{a}) = \mathcal{J}(\bar{\mathfrak{a}})$, *where we denote by* $\bar{\mathfrak{a}}$ *the integral closure of* $\mathfrak{a}$.

(iii) *Suppose that* $A$ *is a log-terminal singularity. Then* $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{J}(\mathfrak{a})$. *Moreover, if* $\mathfrak{a}$ *is an ideal of pure height one, then* $\mathcal{J}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$.

*Proof.* We will show only (iii). Let $f : X \to \operatorname{Spec} A$ be a resolution of singularities such that $\mathfrak{a}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-Z)$ is invertible and $\operatorname{Exc}(f) + Z$ has simple normal crossing support. Since $A$ is log-terminal,

$$\mathcal{J}(\mathfrak{a}) = H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X - f^*K_A - Z \rceil)) \supseteq H^0(X, \mathcal{O}_X(-Z)) = \bar{\mathfrak{a}}.$$

Since $\operatorname{codim}_A(\operatorname{Supp} \mathcal{J}(\mathfrak{a})/\bar{\mathfrak{a}}) \geq 2$, if $\mathfrak{a}$ is divisorial, then we have $\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}} = \mathcal{J}(\mathfrak{a})$. $\square$

Demailly, Ein and Lazarsfeld proved the following theorem, which is called the subadditivity theorem.

**Theorem 1.4** ([DEL]). *Let* $A$ *be a regular local ring essentially of finite type over a field of characteristic zero, and let* $\mathfrak{a}$ *and* $\mathfrak{b}$ *be any two ideals in* $A$. *Then*

$$\mathcal{J}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq \mathcal{J}(\mathfrak{a})\mathcal{J}(\mathfrak{b}).$$

*Remark* 1.5. Demailly, Ein and Lazarsfeld use the Kawamata-Viehweg vanishing theorem, hence the condition that $A$ is essentially of finite type over a field of characteristic zero is necessary for their proof.

## 2. TWO-DIMENSIONAL CASE

In this section, we investigate when the subadditivity theorem holds in two-dimensional case. The following characterization of integrally closed ideals is quite useful.

**Theorem 2.1** ([Gi], [Li1]). *Let* $(A, \mathfrak{m})$ *be a two-dimensional rational singularity, and fix a resolution of singularities* $f : X \to \operatorname{Spec} A$ *with* $E := f^{-1}(\mathfrak{m})$ *the exceptional divisor on* $X$. *Let* $E = \sum_{i=1}^{r} E_i$ *be the irreducible decomposition of* $E$. *Then there is a one-to-one correspondence between the set of integrally closed ideals* $I$ *in* $A$ *such that* $I\mathcal{O}_X$ *is invertible and the set of effective* $f$*-anti-nef cycles* $Z$ *on* $X$ *(i.e.* $Z \geq 0$ *and* $Z \cdot E_i \leq 0$ *for all* $i$*). The correspondence is given by* $I\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-Z)$ *and* $I = H^0(X, \mathcal{O}_X(-Z))$.

Using the above theorem, we obtain the necessary and sufficient condition for the subadditivity theorem to hold.

**Theorem 2.2.** *Let* $(A, \mathfrak{m})$ *be a two-dimensional* $\mathbb{Q}$*-Gorenstein normal local ring. Then* $A$ *is a log-terminal singularity if and only if the subadditivity theorem holds, that is, for any two ideals* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$,

$$\mathcal{J}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq \mathcal{J}(\mathfrak{a})\mathcal{J}(\mathfrak{b}).$$

*Proof.* In this article, for the simplicity of the proof, we consider the Gorenstein case only. For the general case, refer to [TW].

If the subadditivity theorem holds, then $\mathcal{J}(A) \subseteq \mathcal{J}(A)^2$. Thus $\mathcal{J}(A) = A$, namely $A$ is log-terminal. So we will show the converse implication, that is, we will prove that for any two ideals $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$, $\mathcal{J}(\mathfrak{ab}) \subseteq \mathcal{J}(\mathfrak{a})\mathcal{J}(\mathfrak{b})$ when $A$ is a log-terminal singularity. By Proposition 1.3 (ii), we may assume that $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ are integrally closed. Let $f : X \to \operatorname{Spec} A$ be a resolution of singularities such that $\mathfrak{a}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-F_a)$ and $\mathfrak{b}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-F_b)$ are invertible and $\operatorname{Exc}(f) + F_a + F_b$ has simple normal crossing support. By Theorem 2.1, $F_a$ and $F_b$ are $f$-anti-nef cycles on $X$, which is not necessarily supported on the exceptional locus of $f$. By the definition of multiplier ideals, denoting by $K$ the relative canonical divisor $K_X - f^*K_A$ of $f$, we have

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\mathfrak{a})\mathcal{J}(\mathfrak{b}) &= H^0(X, \mathcal{O}_X(K - F_a)) \cdot H^0(X, \mathcal{O}_X(K - F_b)),\\ \mathcal{J}(\mathfrak{ab}) &= H^0(X, \mathcal{O}_X(K - F_a - F_b)).\end{aligned}$$

Here, for every cycle $Z$ on $X$, we denote by $\operatorname{an}_f(Z)$ the $f$-anti-nef closure of $Z$, namely the minimal $f$-anti-nef cycle among all cycles on $X$ which is not less than $Z$. Since $A$ is a rational singularity, the product of integrally closed ideals of $A$ is also integrally closed [Li1]. Hence $\mathcal{J}(\mathfrak{a})\mathcal{J}(\mathfrak{b})$ and $\mathcal{J}(\mathfrak{ab})$ are integrally closed, and by Theorem 2.1 again, $\mathcal{J}(\mathfrak{a})\mathcal{J}(\mathfrak{b})$ and $\mathcal{J}(\mathfrak{ab})$ correspond to the cycles $\operatorname{an}_f(F_a - K) + \operatorname{an}_f(F_b - K)$ and $\operatorname{an}_f(F_a + F_b - K)$ respectively. Therefore it suffices to show that

$$\operatorname{an}_f(F_a - K) + \operatorname{an}_f(F_b - K) \le \operatorname{an}_f(F_a + F_b - K). \tag{2.1}$$

In order to prove this, we prepare some notations. We can assume that the residue field $A/\mathfrak{m}$ is algebraically closed. Then the morphism $f$ can be factorized as follows.

$$X := X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_0} \operatorname{Spec} A,$$

where $f_i : X_i \to X_{i-1}$ is a contraction of a $(-1)$-curve $E_i$ on $X_i$ for every $i = 1, \ldots, n$ and $f_0 : X_0 \to \operatorname{Spec} A$ is a minimal resolution of $\operatorname{Spec} A$. We denote by $\pi_i : X \to X_i$ the composite of $f_{i+1}, \ldots, f_n$ and by $\pi_{i,j} : X_i \to X_j$ the composite of $f_{j+1}, \ldots, f_i$. In particular let $g_i := \pi_{i,0} : X_i \to \operatorname{Spec} A$, and let $K_i$ be the relative canonical divisor of $g_i$.

*Claim.* For every $f$-anti-nef cycle $Z$ on $X$,

$$\operatorname{an}_f(Z - K) = Z - K + \sum_{\pi_{i*} Z \cdot E_i = 0} {\pi_i}^* E_i.$$

Thanks to the claim,

$$\begin{aligned}\operatorname{an}_f(F_a - K) + \operatorname{an}_f(F_b - K) &= F_a + F_b - 2K + \sum_{\pi_{i*} F_a \cdot E_i = 0} {\pi_i}^* E_i + \sum_{\pi_{i*} F_b \cdot E_i = 0} {\pi_i}^* E_i,\\ \operatorname{an}_f(F_a + F_b - K) &= F_a + F_b - K + \sum_{\pi_{i*}(F_a + F_b) \cdot E_i = 0} {\pi_i}^* E_i.\end{aligned}$$

Since $K = \sum_{i=1}^{n} \pi_i{}^* E_i$,

$$\mathrm{an}_f(F_a + F_b - K) - \mathrm{an}_f(F_a - K) - \mathrm{an}_f(F_b - K) = K - \sum_{\pi_{i*}F_a \cdot E_i = 0 \text{ or } \pi_{i*}F_b \cdot E_i = 0} \pi_i{}^* E_i \geq 0.$$

Therefore the assertion follows. Moreover the equality holds if and only if all $E_i$ satisfies $\pi_{i*}F_a \cdot E_i = 0$ or $\pi_{i*}F_b \cdot E_i = 0$.

*Proof of the claim.* We prove the claim by induction on $n$. There exists a non-negative integer $\alpha$ such that $Z = \pi_{n-1}{}^*(\pi_{n-1*}Z) + \alpha E_n$. Note that $\alpha = 0$ if and only if $Z \cdot E_n = 0$. Since $K = K_n = \pi_{n-1}{}^* K_{n-1} + E_n$, we have

$$Z - K = \pi_{n-1}{}^*(\pi_{n-1*}Z - K_{n-1}) + (\alpha - 1)E_n.$$

(1) the case where $\alpha = 0$.
Since $(Z-K)\cdot E_n = -E_n{}^2 = 1$, we have $\mathrm{an}_f(Z-K) \geq Z-K+E_n$. Moreover since

$$(Z - K + E_n) \cdot \pi_{i*}^{-1} E_i = (\pi_{n-1*}Z - K_{n-1}) \cdot \pi_{n-1,i*}^{-1} E_i$$

for each $i = 1, \ldots, n-1$, donoting $A_{n-1} := \mathrm{an}_{g_{n-1}}(\pi_{n-1*}Z - K_{n-1}) - (\pi_{n-1*}Z - K_{n-1})$, we have

$$\mathrm{an}_f(Z - K) = \mathrm{an}_f(Z - K + E_n) \geq Z - K + E_n + \pi_{n-1}{}^* A_{n-1}.$$

Here

$$(Z - K + E_n + \pi_{n-1}{}^* A_{n-1}) \cdot E_n = 0,$$
$$(Z - K + E_n + \pi_{n-1}{}^* A_{n-1}) \cdot \pi_{i*}^{-1} E_i = \mathrm{an}_{g_{n-1}}(\pi_{n-1*}Z - K_{n-1}) \cdot \pi_{n-1,i*}^{-1} E_i \leq 0$$

for each $i = 1, \ldots, n-1$. Hence by the induction hypothesis,

$$\begin{aligned}\mathrm{an}_f(Z - K) &= Z - K + E_n + \pi_{n-1}{}^* A_{n-1} \\ &= Z - K + \sum_{\pi_{i*}Z \cdot E_i = 0} \pi_i{}^* E_i.\end{aligned}$$

(2) the case where $\alpha > 0$.
Then

$$(Z - K) \cdot \pi_{i*}^{-1} E_i \geq (\pi_{n-1*}Z - K_{n-1}) \cdot \pi_{n-1,i*}^{-1} E_i$$

for each $i = 1, \ldots, n-1$. Therefore $\mathrm{an}_f(Z-K) \geq Z - K + \pi_{n-1}{}^* A_{n-1}$. First note that

$$(Z - K + \pi_{n-1}{}^* A_{n-1}) \cdot E_n = (\alpha - 1)E_n{}^2 = 1 - \alpha \leq 0.$$

If $E_n \cdot \pi_{i*}^{-1} E_i = 0$, then

$$\begin{aligned}(Z - K + \pi_{n-1}{}^* A_{n-1}) \cdot \pi_{i*}^{-1} E_i &= (\pi_{n-1*}Z - K_{n-1} + A_{n-1}) \cdot \pi_{n-1,i*}^{-1} E_i \\ &= \mathrm{an}_{g_{n-1}}(\pi_{n*}Z - K_{n-1}) \cdot \pi_{n-1,i*}^{-1} E_i \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

On the other hand, by the definition of $\alpha$, the condition $E_n \cdot \pi_{i*}^{-1}E_i \neq 0$ implies $\pi_{n-1*}Z \cdot \pi_{n-1,i*}^{-1}E_i \leq -\alpha$. Hence if $E_n \cdot \pi_{i*}^{-1}E_i \neq 0$, then by the induction hypothesis,

$$
\begin{aligned}
&(Z - K + \pi_{n-1}{}^*A_{n-1}) \cdot \pi_{i*}^{-1}E_i \\
=&(\pi_{n-1*}Z - K_{n-1} + A_{n-1}) \cdot \pi_{n-1,i*}^{-1}E_i + (\alpha - 1)E_n \cdot \pi_{i*}^{-1}E_i \\
=&(\pi_{n-1*}Z - \sum_{\pi_{j*}Z\cdot E_j \neq 0} \pi_{n-1,j}{}^*E_j) \cdot \pi_{n-1,i*}^{-1}E_i + (\alpha - 1)E_n \cdot \pi_{i*}^{-1}E_i \\
\leq&\pi_{n-1*}Z \cdot \pi_{n-1,i*}^{-1}E_i - E_i{}^2 + (\alpha - 1)E_n \cdot \pi_{i*}^{-1}E_i \\
\leq&0.
\end{aligned}
$$

Thus

$$
\begin{aligned}
\mathrm{an}_f(Z - K) &= Z - K + \pi_{n-1}{}^*A_{n-1} \\
&= Z - K + \sum_{\pi_{i*}Z\cdot E_i = 0} \pi_i{}^*E_i.
\end{aligned}
$$

□

□

*Remark* 2.3. If $A$ is a two-dimensional non-Gorenstein log-terminal singularity, then the relative canonical divisor $K$ is not an integral divisor. In this case, $\mathrm{an}_f(Z - \lceil K \rceil)$ is complicated and an analog of Claim in the proof of Theorem 2.2

$$
\mathrm{an}_f(Z - \lceil K \rceil) = Z - \lceil K \rceil + \sum_{\substack{\lceil K_i \rceil = f_i{}^*\lceil K_{i-1} \rceil + E_i \\ \pi_{i*}Z\cdot E_i = 0}} \pi_i{}^*E_i,
$$

does not hold any longer (see [TW, Example 2.4 (2)]).

**Example 2.4.** ($A_1$-singularity) Let $A = \mathbb{C}[[X, Y, Z]]/(XY - Z^2)$ and $\mathfrak{a} = (x^2, y, z)$, where $x$, $y$, $z$ are the image of $X$, $Y$, $Z$ in $A$. Then

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(\mathfrak{a}) &= (x, y, z), \\
\mathcal{J}(\mathfrak{a}^2) &= (x^3, y^2, z^2, xy, yz, zx).
\end{aligned}
$$

Therefore $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^2) \subsetneq \mathcal{J}(\mathfrak{a})^2$. Indeed let $f_0 : X_0 \to \operatorname{Spec} A$ be a minimal resolution with the irreducible exceptional curve $F$, and $f_1 : X \to X_0$ a blowing-up of $X_0$ at a point on $F$. Let $f : X \to \operatorname{Spec} A$ be the composite morphism of $f_0$ and $f_1$. Then $\mathrm{Exc}(f) = E_1 + F'$, where $E_1$ is the exceptional divisor of $f_1$ and $F'$ is the strict transform of $F$. The ideal $\mathfrak{a}$ corresponds to the $f$-anti-nef cycle $F_{\mathfrak{a}} := 2E_1 + F'$, and we have $\mathrm{an}_f(F_{\mathfrak{a}} - K) = E_1 + F'$ and $\mathrm{an}_f(2F_{\mathfrak{a}} - K) = 3E_1 + 2F'$. Therefore $2\,\mathrm{an}_f(F_{\mathfrak{a}} - K) < \mathrm{an}_f(2F_{\mathfrak{a}} - K)$.

## 3. HIGHER DIMENSIONAL CASE

In higher dimensional case, we have several counter-examples to Theorem 2.2.

**Example 3.1.** Let $A = \mathbb{C}[[X,Y,Z,W]]/(X^2+Y^4+Z^4+W^5)$ and $\mathfrak{m} = (x,y,z,w)$, where $x$, $y$, $z$, $w$ are the image of $X$, $Y$, $Z$, $W$ in $A$. Then $A$ is a Gorenstein log-terminal singularity, but not a terminal singularity. Therefore $\mathcal{J}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$. If $\mathcal{J}(\mathfrak{m}^{k+l}) \subseteq \mathcal{J}(\mathfrak{m}^k)\mathcal{J}(\mathfrak{m}^l)$ holds, then $\mathcal{J}(\mathfrak{m}^n) = \mathfrak{m}^n$ for any positive integer $n$, in particular $\mathfrak{m}^2$ is integrally closed. However $x \in \overline{\mathfrak{m}^2} \setminus \mathfrak{m}^2$ since $x^2 \in \mathfrak{m}^4$. This is a contradiction, and hence the subadditivity theorem fails on $A$.

Now we investigate the subadditivity theorem for monomial ideals. We expected that the subadditivity theorem for monomial ideals holds on every toric ring, but unfortunately we found a counter-example on a three-dimensional toric ring.

**Example 3.2.** Let $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 35x+28y+20z \equiv 0 \mod 41\}$ be a lattice, $\sigma^\vee = (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\oplus 3} \subset M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ a cone and $A = k[M \cap \sigma^\vee] \subset k[x,y,z]$ the cyclic quotient singularity of type $1/41(35,28,20)$. We consider a monomial ideal

$$I = (x^{410}, y^{410}, z^{410}, x^8yz, x^4y^6z, x^4yz^8) \subset A.$$

Then we will prove that $\mathcal{J}(I^2) \not\subseteq \mathcal{J}(I)^2$.

First we will show that $x^{10}y^3z^7 \in \mathcal{J}(I^2)$. Let $P(I)$ be the Newton polygon of $I$, that is, the convex hull of $\{(410,0,0),(0,410,0),(0,0,410),(8,1,1),(4,6,1),(4,1,8)\}$ in $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Then note that for every positive integer $n$, by [HY, Theorem 4.8] and [How], $x^ay^bz^c \in \mathcal{J}(I^n)$ if and only if $(a+1,b+1,c+1)$ is contained in the interior $\mathrm{Int}(nP(I))$ of $nP(I)$. Since $(10+1,3+1,7+1) = \frac{245}{328}(8,1,1)+\frac{131}{328}(4,6,1)+\frac{281}{328}(4,1,8)$ and $\frac{245}{328}+\frac{131}{328}+\frac{281}{328} > 2$, by the above characterization of multiplier ideals associated to a monomial ideal, $x^{10}y^3z^7$ is contained in $\mathcal{J}(I^2)$.

Next we will show that $x^{10}y^3z^7$ is not contained in $\mathcal{J}(I)^2$. If $x^{10}y^3z^7 \in \mathcal{J}(I)^2$, then there exist lattice points $(p,q,r),(s,t,u) \in M$ such that $(p,q,r)+(s,t,u) = (10,3,7)$ and $(p+1,q+1,r+1),(s+1,t+1,u+1) \in \mathrm{Int}(P(I))$. Since the three points $(8,1,1),(4,6,1),(4,1,8)$ lie on the plane $35x+28y+20z = 328$, by the condition that $(p+1,q+1,r+1),(s+1,t+1,u+1) \in \mathrm{Int}(P(I))$, the lattice points $(p,q,r)$ and $(s,t,u)$ must satisfy that $35p+28q+20r > 328-(35+28+20) = 245$ and $35s+28t+20u > 245$. Moreover by the assumption $(p,q,r)+(s,t,u) = (10,3,7)$, we know that $(p,q,r)$ and $(s,t,u)$ are obliged to be $(8,1,1)$ and $(2,2,6)$. However $(2+1,2+1,6+1)$ is not contained in $\mathrm{Int}(P(I))$, because $(2+1,2+1,6+1) = -\frac{83}{328}(8,1,1)+\frac{131}{328}(4,6,1)+\frac{281}{328}(4,1,8)$. This is a contradiction. Thus $x^{10}y^3z^7 \notin \mathcal{J}(I)^2$.

**Question 3.3.** *Let $A$ be a Gorenstein toric ring and $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ be monomial ideals of $A$. Then*

$$\mathcal{J}(\mathfrak{ab}) \subseteq \mathcal{J}(\mathfrak{a})\mathcal{J}(\mathfrak{b})?$$

## References


[DEL] J.-P. Demailly, L. Ein and R. Lazarsfeld, *A subadditivity property of multiplier ideals*, Michigan. Math. J. **48** (2000), 137–156.

[ELS] L. Ein, R. Lazarsfeld, and K. Smith, *Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties*, Invent. Math. **144** (2001), 241–252.

[Fu] T. Fujita, *Approximating Zariski decomposition of big line bundles*, Kodai Math. J. **17** (1994), 1–3.

[Gi] J. Giraud, *Improvement of Grauert-Riemenschneider's Theorem for a normal surface*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **32** (1982), 13–23.

[HY] N. Hara and K. Yoshida, *A generalization of tight closure and multiplier ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[Hi] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II*, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 109–203; ibid. (2) **79** (1964), 205–326.

[How] J. A. Howald, *Multiplier ideals of monomial ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 2665–2671

[La] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry*, in preparation.

[Li1] J. Lipman, *Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **36** (1969), 195–279.

[Li2] ———, *Desingularization of 2-dimensional schemes*, Ann. Math. **107** (1978), 151–207.

[Li3] ———, *Adjoints of ideals in regular local rings*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 739–755.

[TW] S. Takagi and K.-i. Watanabe, *When does the subadditivity theorem for multiplier ideals hold?*, math.AC/0212340.



Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1, Komaba, Meguro, Tokyo 153-8914, Japan

*E-mail address*: stakagi@ms.u-tokyo.ac.jp

Department of Mathematics, College of Humanities and Sciences, Nihon University, Setagaya-ku, Tokyo 156-0045, Japan

*E-mail address*: watanabe@math.chs.nihon-u.ac.jp

# Some special configurations of points in $\mathbb{P}^n$

張間忠人

(四国大 経営情報)

Geramita 氏と Shin 氏との共同研究 [6] の中から, skew-configuration の Hilbert 関数, Betti 数列, conductor に関する次の結果を報告する.

1) $K$-configuration の一般化である skew-configuration を定義する. $K$-configuration の場合と同様に, skew-configuration のヒルベルト関数とベッチ数列に関して加法定理（命題 4.2, 定理 4.3）が成立する.

2) $\mathbf{H}$ を 2-type vector $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$, ただし $d_{i+1} - d_i \geq 2$, に対応する 0 次元の 1-diferentaible O-sequence とする. このとき, $\mathbf{H}$ を Hilbert 関数にもつ $\mathbb{P}^2$ の点集合は skew-ci-configuration である（定理 6.5）. この条件をみたす $\mathbf{H}$ の例として完全交叉のヒルベルト関数がある.

3) さらに, 定理 6.5 の応用として, 2) の条件をみたす $\mathbf{H}$ をヒルベルト関数にもつ $\mathbb{P}^2$ の点集合の conductor をすべて決定する（注意 6.7）. これは, Sodhi の定理 [12, Theorem 18] の拡張である.

## §1. Hilbert 関数, Betti 数列, Conductor

$\mathbb{X} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ を $\mathbb{P}^n_K$ の有限個の点の集合とする（ただし $K$ は代数閉体で標数は 0 とする）. $\mathbb{X}$ のイデアルを $I = I_{\mathbb{X}} = \oplus_{i\geq 0} I_i \subset R = K[X_0, \ldots, X_n] = \oplus_{i\geq 0} R_i$ で表す. $\mathbb{X}$ の斉次座標環を $A = R/I = \oplus_{i\geq 0} A_i$ とおく.

- $\mathbf{H}(\mathbb{X}, i) = \mathbf{H}(A, i) := \dim_K A_i = \dim_K R_i - \dim_K I_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ を $\mathbb{X}$ の（$A$ の）*Hilbert* 関数という. また $\mathbf{F}(\mathbb{X}, \lambda) = \mathbf{F}(A, \lambda) := \sum \mathbf{H}(\mathbb{X}, i)\lambda^i$ を $\mathbb{X}$ の ($A$ の) *Hilbert* 級数という.

  **注意 1.1** $\mathbb{X}$ の Hilbert 関数は点の個数 $s$ に到達するまで狭義に増加し, その後は同じ値 $s$ をとる. すなわち

  $$\mathbf{H}(\mathbb{X}, 0) = 1 < \mathbf{H}(\mathbb{X}, 1) < \cdots < \mathbf{H}(\mathbb{X}, \sigma - 1) = \mathbf{H}(\mathbb{X}, \sigma) = \cdots = s.$$

  この $\sigma$ を $\sigma(\mathbb{X})$ とかく.

- $\beta_{ij} = \beta_{ij}(\mathbb{X}) = \beta_{ij}(A) := \dim_K[\mathrm{Tor}_i^R(A,K)]_j$ を$\mathbb{X}$の($A$の)*Betti*数列という．$A$の次数付極小自由分解を

$$0 \to \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_{n-1} \to \cdots \to \mathcal{F}_1 \to R \to A \to 0$$

とすると，$\mathcal{F}_i = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{ij}}$ である．

**注意 1.2** Betti数列が決まればHilbert関数は決まる．すなわち，

$$\mathbf{F}(\mathbb{X},\lambda) = \sum \frac{1+\sum_{i=1}^{n}((-1)^i \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda^{\beta_{ij}})}{(1-\lambda)^{n+1}}.$$

- $Q(A)$を$A$の全商環，$\overline{A}$を$A$の$Q(A)$内の整閉とする．このとき，$Q(A) \cong \oplus_{i=1}^{s} K(t_i), \overline{A} \cong \oplus_{i=1}^{s} K[t_i]$ である．

$$C = C_{\mathbb{X}} := \{a \in A \mid a\overline{A} \subset A\} = \mathrm{Ann}_A \overline{A}/A$$

を$\mathbb{X}$の*conductor*という．Orecchia氏 [11] により

$$C_{\mathbb{X}} = \oplus_{i=1}^{s} t_i^{d_{\mathbb{X}}(Pi)} K[t_i]$$

が示された．ここで

$$d_{\mathbb{X}}(P_i) := \mathrm{Min}\{\deg F \mid F \in R : \text{斉次式 s.t. } F(P_i) \neq 0, F(P_j) = 0\ \forall j \neq i\}$$

である．いつも

$$d_{\mathbb{X}}(P_1) \leq d_{\mathbb{X}}(P_2) \leq \cdots \leq d_{\mathbb{X}}(P_s)$$

であるように点$P_1,\ldots,P_s$の添字をつけることにする．

**注意 1.3** $\mathbb{X}$を$\mathbb{P}^n$の有限個の点の集合，$P \in \mathbb{X}$とする．このとき，

$$\mathbf{H}(\mathbb{X}\backslash\{P\}, i) = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbb{X}, i) & 0 \leq i < d_{\mathbb{X}}(P) \\ \mathbf{H}(\mathbb{X}, i) - 1 & i \geq d_{\mathbb{X}}(P) \end{cases}$$

である．ゆえに，

$$d_{\mathbb{X}}(P) = \mathrm{Min}\{i \mid \mathbf{H}(\mathbb{X}\backslash\{P\}_{,i}) < \mathbf{H}(\mathbb{X}, i)\} \leq \sigma(\mathbb{X}) - 1.$$

## §2. 問題

§1で注意したように，Betti数列が決まればそのBetti数列をもつHilbert関数は一意的に決まる．しかし§5の例5.2でも見るように，同じHilbert関

数をもつBetti数列の組は, 一般に一意的に決まるのではなく, 有限通りの場合が起こり得る.

**問題** 同じHilbert関数をもつBetti数列の組をすべて求めよ.

この問題を1次元Cohen-Macauly環のクラスを意識しながら, 1次元のreducedな環のクラスで考えたい. まず, Hilbert関数に関する次のFACTを思い出そう.

**O-sequence の定義**

1) 正の整数$a$と$i$に対して次のような二項展開が一意的に存在する:

$$a = \binom{n(i)}{i} + \binom{n(i-1)}{i-1} + \cdots + \binom{n(j)}{j},$$

ただし, $n(i) > n(i-1) > \cdots > n(j) \geq j \geq 1$である.

$$a^{<i>} = \binom{n(i)+1}{i+1} + \binom{n(i-1)+1}{i} + \cdots + \binom{n(j)+1}{j+1}$$

とおく. また, すべての$i > 0$に対して$0^{<i>} = 0$とおく.

2) 0以上の整数からなる数列$a_0, a_1, a_2, \cdots$が*O-sequence*であるとは

(i) $a_0 = 1$,

(ii) $a_{i+1} \leq a_i^{<i>}$ $(\forall i = 1, 2, \ldots)$

をみたすときをいう.

3) $\{a_i\}$が0次元の*1-differentiable O-sequence*であるとは,

$$\Delta a_0 := 1, \Delta a_1, \ldots, \Delta a_i := a_i - a_{i-1}, \cdots$$

がO-sequenceであり, $\Delta a_i = 0$ $(\forall i >> 0)$であるときをいう.

**FACT** ([7], [10], [13], [14], etc.) $n$を正の整数とする. 次の3つのクラスは一致する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{red} &:= \{\{\mathbf{H}(\mathbb{X}, i)\}_{i \geq 0} \mid \mathbb{X} \subset \mathbb{P}^n\} \\
\mathcal{H}_{hom} &:= \{\{\mathbf{H}(R/I, i)\}_{i \geq 0} \mid I \subset R : \text{hom. ideal s.t } R/I\text{: 1-dim. C-M}\} \\
\mathcal{H} &:= \{\{a_i\}_{i \geq 0} \mid \text{0-dim. 1-differentiable O-sequence}\}
\end{aligned}$$

さて, 同じようにBetti数列に関する次のクラスを考えよう.

**定義 2.1** $\underline{a} = \{a_t\} \in \mathcal{H}$ $(a_1 = n+1)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{red}(\underline{a}) &:= \{\{\beta_{ij}(\mathbb{X})\} \mid \mathbb{X} \subset \mathbb{P}^n \text{ s.t. } \mathbf{H}(\mathbb{X}, t) = a_t\ \forall t\} \\ \mathcal{B}_{hom}(\underline{a}) &:= \{\{\beta_{ij}(R/I)\} \mid I \subset R \text{ s.t. } R/I\text{: 1-dim. C-M, } \mathbf{H}(R/I, t) = a_t\ \forall t\}\end{aligned}$$

**問題** $\mathcal{B}_{red}(\underline{a})$ を決定せよ.

**注意 2.2** 明らかに $\mathcal{B}_{red}(\underline{a}) \subset \mathcal{B}_{hom}(\underline{a})$ である. また [2] では, $\{\beta_{ij}(\underline{a})\} \in \mathcal{B}_{hom} \backslash \mathcal{B}_{red}$ となる次の例を与えている.

$$\begin{aligned}0 \to R(-8)^4 \to R(-17)^{18} \to\to R(-6)^{25} \oplus R(-5)^4 \\ \to R(-4)^{45} \to R(-3)^{46} \to R(-2)^{17} \to R \to A \to 0\end{aligned}$$

このとき, $\underline{a}$ は 1 7 11 11 $\to$ である.

## §3. $K$-configuration

lex-segment イデアルが maximal Betti 数列をもつことは良く知られている ([1], [9]). この事実から, $\mathcal{B}_{red}(\underline{a})$ と $\mathcal{B}_{hom}(\underline{a})$ は maximal Betti 数列をもち, 両者は一致することがわかる. また我々は, [3] において, maximal Betti 数列をもつ特別な点集合のクラスを構成した.

### $n$-type vector の定義

1) $d$ を正の整数とする. $\mathcal{T} = (d)$ を *1-type vector* という. $\alpha(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T}) = d$ とおく.

2) $d_1 < \cdots < d_u$ を正の整数とする. $\mathcal{T} = (d_1, \ldots, d_u)$ を *2-type vector* という. $\alpha(\mathcal{T}) = u$, $\sigma(\mathcal{T}) = d_u$ とおく.

3) $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_u$ を $(n-1)$-type vector $(n \geq 3)$ で, $\sigma(\mathcal{T}_i) < \alpha(\mathcal{T}_{i+1})$ $(1 \leq i \leq u-1)$ をみたすものとする. $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_u)$ を *n-type vector* という. $\alpha(\mathcal{T}) = u$, $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T}_u)$ とおく.

### $K$-configuration の定義

1) $\mathcal{T} = (d)$ を 1-type vector とする. $\mathbb{P}^1$ の異なる $d$ 個の点集合 $\mathbb{X}$ を *type*$\mathcal{T}$ の *$K$-configuration* という.

2) $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_u)$ を $n$-type vector $(n \geq 2)$ とする. $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}^n$ が *type*$\mathcal{T}$ の *$K$-configuration* である

$\Leftrightarrow$ $\exists \mathbb{X}_1, \ldots, \exists \mathbb{X}_u \subset \mathbb{X}$: subsets, $\exists \mathbb{H}_1, \ldots, \exists \mathbb{H}_u \subset \mathbb{P}^n$: hyperplanes s.t.

(i) $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{u} \mathbb{X}_i$

(ii) $\mathbb{X}_i \subset \mathbb{H}_i \cong \mathbb{P}^{n-1}$: type$\mathcal{T}_i$ の $K$-configuration $(\forall i)$

(iii) $\forall j < i$, $\mathbb{X}_j$ のどの点も $\mathbb{H}_i$ に含まれない $(\forall i \geq 2)$

$K$-configuration の Hilbert 関数, Betti 数列, conductor はすべて, $n$-type vector の言葉で記述することができる (以下の命題 4.2, 定理 4.3, 命題 4.4 において $(e_1, \ldots, e_u) = (1, \ldots, 1)$ とおけばよい. 詳しくは [3], [8] 参照). また $K$-configuration は, 次のように Betti 数列と conductor に関して bound を与える.

**定理 3.1** ([3], [8]) $\forall \underline{a} \in \mathcal{H}$ に対して, $\underline{a}$ を Hilbert 関数にもつ $K$-configuration $\mathbb{X}$ が必ず存在する. さらに, 同じ Hilbert 関数 $\underline{a}$ をもつ $\mathbb{Y}$ に対して,

1) $\beta_{ij}(\mathbb{X}) \geq \beta_{ij}(\mathbb{Y})$ $\forall i, j$.

2) $d_{\mathbb{X}}(P_i) \leq d_{\mathbb{Y}}(Q_i)$ $\forall i$.

## §4. skew-configuration

$\mathbb{X} \subset \mathbb{P}^n$ に対して

$$\alpha(\mathbb{X}) := \mathrm{Min}\{i \mid \mathbf{H}(\mathbb{X}, i) < \dim_K R_i\}$$

とおく. さらに, $\mathbb{X}$ を含む hypersurface $\mathbb{V}$ に対して,

$$\alpha_{\mathbb{V}}(\mathbb{X}) := \mathrm{Min}\{i \mid \mathbf{H}(\mathbb{X}, i) < \mathbf{H}(\mathbb{V}, i)\}$$

とおく.

**skew-configuration の定義**

$\mathbb{X} \subset \mathbb{P}^n$ が degree $(e_1, \ldots, e_u)$ の *skew-configuration* である (ただし $u \geq 2$)
$\Leftrightarrow$ $\exists \mathbb{X}_1, \ldots, \exists \mathbb{X}_u \subset \mathbb{X}$: subsets,
$\exists \mathbb{V}_1, \ldots, \exists \mathbb{V}_u \subset \mathbb{P}^n$: hypersurfaces of $\deg \mathbb{V}_i = e_i$ $(\forall i)$ s.t.

(i) $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{u} \mathbb{X}_i$

(ii) $\mathbb{X}_i \subset \mathbb{V}_i$, $\alpha(\mathbb{X}_i) = e_i$ $(\forall i)$

(iii) $\forall j < i$, $\mathbb{X}_j$ のどの点も $\mathbb{V}_i$ に含まれない $(\forall i \geq 2)$

(iv) $\sigma(\mathbb{X}_i) + \alpha(\mathbb{X}_{i+1}) \leq \alpha_{\mathbb{V}_{i+1}}(\mathbb{X}_{i+1})$ $(\forall i \leq u-1)$

**注意 4.1** $K$-configuration は degree $(1, \ldots, 1)$ の skew-configuration である.

**命題 4.2** $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{u} \mathbb{X}_i$ を degree $(e_1, \dots, e_u)$ の skew-configuration とする. このとき, Hilbert 関数に関して次の加法定理が成立する.

$$\mathbf{H}(\mathbb{X}, t) = \mathbf{H}(\mathbb{X}_u, t) + \mathbf{H}(\mathbb{X}_{u-1}, t - e_u) + \cdots + \mathbf{H}(\mathbb{X}_1, t - (e_2 + \cdots + e_u))$$

**定理 4.3** $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{u} \mathbb{X}_i$ を degree $(e_1, \dots, e_u)$ の skew-configuration, $\mathbb{Y} = \bigcup_{i=1}^{u-1} \mathbb{X}_i$ とする. このとき, Betti 数列に関して次の加法定理が成立する.

$$0 \to \mathcal{D}_n \to \cdots \to \mathcal{D}_1 \to R \to R/I_{\mathbb{Y}} \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{E}_n \to \cdots \to \mathcal{E}_1 \to R \to R/I_{\mathbb{X}_u} \to 0$$

$\Rightarrow$

$$0 \to \mathcal{F}_n \to \cdots \to \mathcal{F}_1 \to R \to R/I_{\mathbb{X}} \to 0,$$

ただし

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{D}_1(-e_u) \oplus \mathcal{E}_1/R(-e_u),\ F_j = \mathcal{D}_j(-e_u) \oplus \mathcal{E}_j\ (2 \le j \le n)$$

**命題 4.4** $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{u} \mathbb{X}_i$ を degree $(e_1, \dots, e_u)$ の skew-configuration とする. このとき,

1) $d_{\mathbb{X}}(P) = d_{\mathbb{X}_i}(P) + e_{i+1} + \cdots + e_u \quad (P \in \mathbb{X}_i\ (i < u))$

2) $d_{\mathbb{X}}(P) = d_{\mathbb{X}_u}(P) \quad (P \in \mathbb{X}_u)$

## §5. skew-ci-configuration

$\mathbb{X} \subset \mathbb{P}^n$ が $\mathrm{CI}(a_1, \dots, a_n)$ の完全交叉であるとは, $I_{\mathbb{X}} = (F_1, \dots, F_n)$ をみたす次数 $a_i$ の斉次式 $F_i$ がとれるときをいう. このとき,

$$\alpha(\mathbb{X}) = \mathrm{Min}\{a_1, \dots, a_n\},\quad \sigma(\mathbb{X}) = a_1 + \cdots + a_n - n + 1$$

である. さらに,

$$d_{\mathbb{X}}(P) = a_1 + \cdots + a_n - n,\quad \forall P \in \mathbb{X} \tag{5.1}$$

である.

### skew-ci-configuration の定義

$\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{u} \mathbb{X}_i$ を skew-configuration とする. 各 $\mathbb{X}_i$ が完全交叉でとれるとき, $\mathbb{X}$ を *skew-ci-configuration* であるという. また, 各 $\mathbb{X}_i$ が $\mathrm{CI}(a_{i1}, \dots, a_{in})$ であるとき, この skew-ci-configuration を

$$\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{u} \mathrm{CI}(a_{i1}, \dots, a_{in})$$

とかく.

完全交叉の Hilbert 関数, Betti 数列, Conductor はよく知られているので, 命題 4.2, 定理 4.3, 命題 4.4 を使えば, skew-ci-configuration の Hilbert 関数, Betti 数列, conductor は簡単に計算できる.

**例 5.2** $\mathbb{P}^2$ の 27 点からなる次の skew-ci-configuration $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_8$ (とくに $\mathbb{X}_8$ は $K$-configuration) は, すべて同じ Hilbert 関数

$$1\ 3\ 6\ 10\ 15\ 19\ 22\ 24\ 26\ 27\ 27\ \rightarrow$$

をもつことがわかる. (対応する 2-type vector は $(1,3,5,8,10)$ である. 0 次元の 1-differentiable O-sequence と type vector の対応については [4], [5] をご覧下さい. ) また, これらの Betti 数列と conductor を計算すると次のようになる.

1) $\mathbb{X}_1 = \mathrm{CI}(3,3) \bigcup \mathrm{CI}(2,9)$
   - $0 \to R(-11) \oplus R(-8) \to R^2(-5) \oplus R(-9) \to R \to R/I_{\mathbb{X}} \to 0$
   - $C = (t_3^6 K[t_3])^9 \oplus (t_5^9 K[t_5])^{18}$

2) $\mathbb{X}_2 = \mathrm{CI}(2,2) \bigcup \mathrm{CI}(1,5) \bigcup \mathrm{CI}(2,9)$
   - $0 \to R(-11) \oplus R(-8) \oplus R(-7)$ $\to R^2(-5) \oplus R(-7) \oplus R(-9) \to R \to R/I_{\mathbb{X}} \to 0$
   - $C = (t_2^5 K[t_2])^4 \oplus (t_3^6 K[t_3])^5 \oplus (t_5^9 K[t_5])^{18}$

3) $\mathbb{X}_3 = \mathrm{CI}(1,1) \bigcup \mathrm{CI}(2,4) \bigcup \mathrm{CI}(2,9)$
   - $0 \to R(-11) \oplus R(-8) \oplus R(-6)$ $\to R^2(-5) \oplus R(-6) \oplus R(-9) \to R \to R/I_{\mathbb{X}} \to 0$
   - $C = (t_1^4 K[t_1]) \oplus (t_3^6 K[t_3])^8 \oplus (t_5^9 K[t_5])^{18}$

4) $\mathbb{X}_4 = \mathrm{CI}(1,1) \bigcup \mathrm{CI}(1,3) \bigcup \mathrm{CI}(1,5) \bigcup \mathrm{CI}(2,9)$
   - $0 \to R(-11) \oplus R(-8) \oplus R(-7) \oplus R(-6)$ $\to R^2(-5) \oplus R(-6) \oplus R(-7) \oplus R(-9) \to R \to R/I_{\mathbb{X}} \to 0$
   - $C = (t_1^4 K[t_1]) \oplus (t_2^5 K[t_2])^3 \oplus (t_3^6 K[t_3])^5 \oplus (t_5^9 K[t_5])^{18}$

5) $\mathbb{X}_5 = \mathrm{CI}(3,3) \bigcup \mathrm{CI}(1,8) \bigcup \mathrm{CI}(1,10)$
   - $0 \to R(-11) \oplus R(-10) \oplus R(-8)$ $\to R^2(-5) \oplus R(-9) \oplus R(-10) \to R \to R/I_{\mathbb{X}} \to 0$

- $C = (t_3^6 K[t_3])^9 \oplus (t_4^8 K[t_4])^8 \oplus (t_5^9 K[t_5])^{10}$

6) $\mathbb{X}_6 = \mathrm{CI}(2,2) \bigcup \mathrm{CI}(1,5) \bigcup \mathrm{CI}(1,8) \bigcup \mathrm{CI}(1,10)$

- $0 \to R(-11) \oplus R(-10) \oplus R(-8) \oplus R(-7)$
  $\to R^2(-5) \oplus R(-7) \oplus R(-9) \oplus R(-10) \to R \to R/I_{\mathbb{X}} \to 0$
- $C = (t_2^5 K[t_2])^4 \oplus (t_3^6 K[t_3])^5 \oplus (t_4^8 K[t_4])^8 \oplus (t_5^9 K[t_5])^{10}$

7) $\mathbb{X}_7 = \mathrm{CI}(1,1) \bigcup \mathrm{CI}(2,4) \bigcup \mathrm{CI}(1,8) \bigcup \mathrm{CI}(1,10)$

- $0 \to R(-11) \oplus R(-10) \oplus R(-8) \oplus R(-6)$
  $\to R^2(-5) \oplus R(-6) \oplus R(-9) \oplus R(-10) \to R \to R/I_{\mathbb{X}} \to 0$
- $C = (t_1^4 K[t_1]) \oplus (t_3^6 K[t_3])^8 \oplus (t_4^8 K[t_4])^8 \oplus (t_5^9 K[t_5])^{10}$

8) $\mathbb{X}_8 = \mathrm{CI}(1,1) \bigcup \mathrm{CI}(1,3) \bigcup \mathrm{CI}(1,5) \bigcup \mathrm{CI}(1,8) \bigcup \mathrm{CI}(1,10)$

- $0 \to R(-11) \oplus R(-10) \oplus R(-8) \oplus R(-7) \oplus R(-6)$
  $\to R^2(-5) \oplus R(-6) \oplus R(-7) \oplus R(-9) \oplus R(-10)$
  $\to R \to R/I_{\mathbb{X}} \to 0$
- $C = (t_1^4 K[t_1]) \oplus (t_2^5 K[t_2])^3 \oplus (t_3^6 K[t_3])^5 \oplus (t_4^8 K[t_4])^8 \oplus (t_5^9 K[t_5])^{10}$

実は, この Hilbert 関数をもつ点集合は, 上の 8 通りの skew-ci-configuration だけであることが次の §6 の定理 6.5 からわかる.

## §6. 特別な Hilbert 関数をもつ $\mathbb{P}^2$ の点集合の分解

**命題 6.1** 2-type vector $\mathcal{T} = (d_1, \ldots, d_u)$ (ただし $u \geq 2$) に対して, 次は同値である.

(i) $\mathcal{T}$ に対応する 0-dim.1-differentiable O-sequence は, ある完全交叉 $\mathrm{CI}(a,b)$ の Hilbert 関数である.

(ii) $d_{i+1} - d_i = 2$ $(\forall i \leq u-1)$ である.

このとき, $a = u, b = d_1 + u - 1$ である.

**定義 6.2** 2-type vector $\mathcal{T} = (d_1, \ldots, d_u)$ が ci type vector であるとは, $u = 1$ または $d_{i+1} - d_i = 2$ $(\forall i \leq u-1)$ であるときをいう.

**定義 6.3** 2-type vector $\mathcal{T} = (d_{11}, \ldots, d_{1m_1}, \ldots, d_{r1}, \ldots, d_{rm_r})$ と $r$ 個の 2-type subvector $\mathcal{T}^{(1)} = (d_{11}, \ldots, d_{1m_1}), \ldots, \mathcal{T}^{(r)} = (d_{r1}, \ldots, d_{rm_r})$ があったとき,

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{T}^{(i)}$$

とかいて, これを $\mathcal{T}$ の分解という. また すべての $\mathcal{T}^{(i)}$ が ci type subvector であるとき, $\bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{CI}(a_i, b_i)$ を, この分解に対応する skew-ci-configuration という. ただし, $a_i = m_i$, $b_i = d_{i1} + m_i - 1$ $(\forall i)$ である.

**例 6.4** $\mathcal{T} = (1,3,5)$ の分解をすべて求めると,

$$(1,3,5),\ (1,3)\bigcup(5),\ (1)\bigcup(3,5),\ (1)\bigcup(3)\bigcup(5)$$

となる.

**定理 6.5** $\mathcal{T} = (d_1, \ldots .d_u)$ を 2-type vector で $d_{i+1} - d_i \geq 2$ $(\forall i \leq u-1)$ とする. また, $\mathbb{X} \subset \mathbb{P}^2$ を $\mathcal{T}$ に対応する 1-differetiablbe O-sequence を Hilbert 関数にもつ点集合とする. このとき, $\mathbb{X}$ は skew-ci-configuration であり, ここで登場する skew-ci-configuration は, (次の例で示すように) $\mathcal{T}$ の起こり得る分解 $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{u} \mathcal{T}^{(i)}$ (ただし $\mathcal{T}^{(i)}$ は ci type vector) に対応するものである.

**例 6.6** $\mathcal{T} = (1,3,5,8,10)$ の分解で, その type subvector が ci になるものをすべて求め, 各分解に対応する skew-ci-configuration を計算すると次のようになる ($\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_8$ は例 5.2 のもの). ゆえに, 定理 6.5 より

$$1\ 3\ 6\ 10\ 15\ 19\ 22\ 24\ 26\ 27\ 27\ \rightarrow$$

を Hilbert 関数にもつ $\mathbb{X}$ は, 例 5.2 の 8 通りだけであることがわかる.

1) $\mathcal{T} = (1,3,5)\bigcup(8,10) \Leftrightarrow \mathbb{X}_1$

2) $\mathcal{T} = (1,3)\bigcup(5)\bigcup(8,10) \Leftrightarrow \mathbb{X}_2$

3) $\mathcal{T} = (1)\bigcup(3,5)\bigcup(8,10) \Leftrightarrow \mathbb{X}_3$

4) $\mathcal{T} = (1)\bigcup(3)\bigcup(5)\bigcup(8,10) \Leftrightarrow \mathbb{X}_4$

5) $\mathcal{T} = (1,3,5)\bigcup(8)\bigcup(10) \Leftrightarrow \mathbb{X}_5$

6) $\mathcal{T} = (1,3)\bigcup(5)\bigcup(8)\bigcup(10) \Leftrightarrow \mathbb{X}_6$

7) $\mathcal{T} = (1)\bigcup(3,5)\bigcup(8)\bigcup(10) \Leftrightarrow \mathbb{X}_7$

8) $\mathcal{T} = (1)\bigcup(3)\bigcup(5)\bigcup(8)\bigcup(10) \Leftrightarrow \mathbb{X}_8$

**注意 6.7** 命題 4.4, (5.1), 定理 6.5 を使えば, 定理 6.5 の 1-differentiable O-sequence を Hilbert 関数にもつ $\mathbb{P}^2$ の点集合の conductor をすべて求めることができる.

## References


[1] A. M. Bigatti, *Upper Bounds for the Betti Numbers of a Given Hilbert Function*, Comm. in Alg. **21**(1993) 2317-2334.

[2] D. Eisenbud and S. Popescu, *Gale duality and free resolutions of ideals of points*, Invent. Math. **136** (1999) 419-449.

[3] A. V. Geramita, T. Harima, and Y. S. Shin, *Extremal point sets and Gorenstein ideals*, Adv. in Math. **152** (2000) 78-119.

[4] A. V. Geramita, T. Harima, and Y. S. Shin, *An Alternative to the Hilbert Function for the Ideal of a Finite Set of Points in* $\mathbb{P}^n$, Illinois J. Math. **45** (2001) 1-23.

[5] A.V. Geramita, T. Harima, and Y.S. Shin, *Decompositions of the Hilbert function of a set of points in* $\mathbb{P}^n$, Canadian J. Math. **53** (2001) 923-943.

[6] A. V. Geramita, T. Harima and Y. S. Shin, *Some special configurations of points in* $\mathbb{P}^n$, J. Alg. (to appear).

[7] A.V. Geramita, P. Maroscia, and L. Roberts, *The Hilbert function of a reduced K-algebra*, J. London Math. Soc. **28** (1983) 443–452.

[8] T. Harima, *The conductor of a K-configuration in* $\mathbb{P}^n$, 第22回可換環論シンポジウム報告書 (2000) 15-21.

[9] H. A. Hulett, *Maximum Betti Numbers of Homogeneous Ideals with a Given Hilbert Function*, Comm. in Alg. **21** (1993) 2335-2350.

[10] F. S. Macaulay *Some properties of enumeration in the theory of modular systems*, Proc. London Math. Soc. **26** (1927) 531-555.

[11] F. Orecchia, *Points in Generic Position and Conductors of Curves with Ordinary Singularity*, J. London Math. Soc. **24** (1981) 85-96.

[12] A. Sodhi, *The conductor of points having the Hilbert function of a complete intersection in* $\mathbb{P}^2$, Can. J. Math. **44** (1992) 167-179.

[13] R. Stanley, *Hilbert Functions of Graded Algebras*, Adv. in Math. **28** (1978) 57-83.

[14] G. Valla, *Problems and Results on Hilbert functions of graded algebras*, Six Lectures on Commutative Algebra, Progress in Mathematics **166** (1998), Birkhäuser.



Department of Information Science, Shikoku University, Tokushima 771-1192, Japan

*E-mail address*: `harima@keiei.shikoku-u.ac.jp`

# 解析と環論の交流

―― $\mathcal{A}$ 超幾何系の概説と問題集

高山信毅, takayama@math.kobe-u.ac.jp

2002 年 11 月 6 日

解析と環論の間には幅広い交流があると思うが, ここでは私の研究分野の $\mathcal{A}$-超幾何方程式と $D$-加群のアルゴリズムに関して, "解析と環論の交流" を紹介し, あわせて未解決の予想なども紹介する.

## 1　基本知識

### 1.1　積分表示

パラメータ $x_i$ が一般の形ではいった積分で定義される関数

$$\phi_{A,\beta}(x) = \int_D \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i t_1^{a_{1i}} \cdots t_d^{a_{di}}\right) t_1^{-\beta_1 - 1} \cdots t_d^{-\beta_d - 1} dt$$

を $\mathcal{A}$-超幾何関数とよぶ. ここで $A = (a_{ij})$ は整数を成分とする rank が $d$ の行列で, $\beta_i$ は複素数である. $\mathcal{A}$-超幾何関数の満たす方程式系を $\mathcal{A}$-超幾何方程式系 (または GKZ-超幾何方程式系) とよぶ. 超幾何微分方程式は多変数の連立線形偏微分方程式系である. この微分方程式系を調べることにより, 多変数超幾何関数のさまざまな性質を知ることができる. この方程式系は, 1980 年代後半に Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky により導入された. さらに $\mathcal{A}$-超幾何系のなかで格別に高い対称性をもつ方程式系が $(k,n)$ 型方程式系である. この方程式系は, 吉田氏の本 "私説 超幾何関数" にあるようにモジュライの記述にあらわれる.

**例 1.1**

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = (p, q)$$

のとき, $D$ として $t_1 = 0$ を回る円 と $t_2 = 0$ を回る円の直積をとると, $\phi_{A,\beta}$ は,

$$\exp(x_1 t_1 + x_2 t_1 t_2 + x_3 t_1 t_2^2) t_1^{-p-1} t_2^{-q-1}$$

の $t_1, t_2$ に関するローラン展開の $t_1^{-1}t_2^{-1}$ の係数 (留数) の $(2\pi\sqrt{-1})^2$ 倍となる. たとえば $p=2, q=2$ のときは

$$\phi_{A,\beta} = (2\pi\sqrt{-1})^2(x_2^2 + 2x_1x_3)$$

と超幾何関数は多項式となる.

以下 $n$ 変数の微分作用素環

$$D = \mathbf{K}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\rangle$$

を考える. ここで $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ で

$$x_ix_j = x_jx_i, \partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i, \partial_ix_j = x_j\partial_i + \delta_{ij}.$$

線形偏微分方程式系

$$\ell_1 \bullet f = \cdots = \ell_m \bullet f = 0, \quad \ell_i \in D$$

を $\ell_1, \ldots, \ell_m$ で生成される $D$ の左イデアル $I = D \cdot \{\ell_1, \ldots, \ell_m\}$ と同一視する. $D$ は関数の空間に次のように作用する.

$$x_i \bullet F(x) = x_iF(x), \partial_i \bullet F(x) = \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

**例 1.2** $\partial_1x_1 = x_1\partial_1 + 1$, $\partial_1x_1^2 = x_1^2\partial_1 + 2x_1$.

**例 1.3**

$$n = 2,\ I = D \cdot \{\partial_x - 1, \partial_y^2 + 1\}$$

解の空間は $e^x \sin y$ と $e^x \cos y$ で張られる.

**例 1.4** $x\partial_x \bullet x^\alpha = \alpha x^\alpha$ なので,

$$I = D \cdot \{x\partial_x - \alpha,\ y\partial_y - \beta\}$$

の解は $x^\alpha y^\beta$ である. より一般には
$\ell_1(p,q), \ell_2(p,q)$ を $p, q$ の多項式とする. $(p_i, q_i)$ を $\ell_1, \ell_2$ の共通零点とすると, $x^{p_i}y^{q_i}$ が

$$I = D \cdot \{\ell_1(x\partial_x, y\partial_y),\ \ell_2(x\partial_x, y\partial_y)\}$$

が $I$ の解である.
この例からわかるように, 代数方程式系の定理は上の対応で微分方程式系の定理に翻訳できることが多い.

さて行列 $A$ は $d \times n$, $(d < n)$ であり, 整数行列として rank が $d$ であると仮定する. $I_A$ を $A$ できまる (affine) toric ideal としよう. つまり $I_A$ は, $\mathbf{K}[\partial] = \mathbf{K}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ のイデアルであり,

$$\partial^u - \partial^v, \quad Au = Av, \quad u, v \in \mathbf{N}_0^n$$

で生成される.

$\beta \in \mathbf{K}^d$ をとり, $I_A$ および

$$\sum_{i=j}^{n} a_{ij} x_i \partial_i - \beta_j, \quad j = 1, \ldots, d$$

$(A\theta - \beta, \theta_i = x_i\partial_i)$ で生成される $D$ の左イデアルを考える. これを $H_A(\beta)$ と書き, $\mathcal{A}$-超幾何イデアルとよぶ.

最初に書いた積分の満たす微分方程式を大雑把な議論で導出すると, $H_A(\beta)$ となる.

**例 1.5** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, $H_A(\beta)$ は

$$\partial_1\partial_3 - \partial_2^2,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 - \beta_1,\ x_2\partial_2 + 2x_3\partial_3 - \beta_2$$

で生成される.

**例 1.6** `http://fe.math.kobe-u.ac.jp:8090` (OpenXM/Risa/Asir Online) に接続すると $\mathcal{A}$-超幾何系の生成元を知ることができる (なおこのアドレスはそのうち変更するかも, また計算時間 30 秒の制限がある).

入力: `hypergeometric_gkz([[1,2,3]], [-1/2])`
出力:
```
[[6*x3*dx3+4*x2*dx2+2*x1*dx1+1,-dx2+dx1^2,dx3-dx1*dx2,-dx1*dx3+dx2^2],[x1,x2,x3]]
```

これは $A = (1, 2, 3)$, $\beta = (-1/2)$ のときの $H_A(\beta)$ は $6x_3\partial_3 + 4x_2\partial_2 + 2x_1\partial_1 + 1$ と

$$-\partial_2 + \partial_1^2,\ \partial_3 - \partial_1\partial_2,\ -\partial_1\partial_3 + \partial_2^2$$

で生成されていることを意味する.

20 世紀後半の超幾何関数の研究は, 主に二つの方法でなされた.
(1) 積分をサイクルとコサイクルの組とみなし幾何的, 解析的に考察する.
(2) D-加群の理論を適用して解析する.
1990 年代より超幾何関数を解析する第 3 の方法が出現したと著者は考えている. それは超幾何微分方程式を計算機またはアルゴリズムの適用による "計算" により具体的に解析し, さらに超幾何関数の性質を調べる方法である. この方法は, 上の (1), (2) の計算版である.

積分の解析というのは積分領域の幾何が出現するので面白いが難しい (と思う). ここでは積分は忘れ, (2) の計算版の方法で, $H_A(\beta)$ を解析したい.

## 1.2 解空間の次元とグレブナファン

次の二つの記号を導入する.

$$\mathrm{ord}_{(u,v)}(x^\alpha \partial^\beta) = u \cdot \alpha + v \cdot \beta, \quad u, v \in \mathbf{R}^n, u + v \geq 0 \tag{1}$$

$\ell = \sum_{(\alpha,\beta)\in E} c_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta \in D$ とおくとき,

$$\mathrm{in}_{(u,v)}(\ell) = \sum_{\mathrm{ord}_{(u,v)}(\ell)=u\alpha+v\beta,\ (\alpha,\beta)\in E} c_{\alpha,\beta} x^\alpha \xi^\beta \tag{2}$$

ただし, $u+v=0$ のときは $\xi = \partial$ とおく.

偏微分方程式系 $I$ が, holonomic であるとは, $\mathrm{in}_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}(I)$ の Krull 次元が $n$ であることと定義する.

**定理 1.1** (代数解析の基本定理)
$D \neq I$ なら $\dim \mathrm{in}_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}(I) \geq n$.

**定理 1.2** $H_A(\beta)$ は *holonomic.*

**定義 1.1**

$$\dim_{\mathbf{K}(x)} \mathbf{K}(x)[\xi]/\mathbf{K}(x)[\xi]\,\mathrm{in}_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}(I)$$

を $I$ の holonomic rank とよび rank$(I)$ と書く.

$I$ が holonomic のとき rank$(I)$ は有限である.

**定理 1.3** (Kashiwara 修論の特別な場合) $\mathrm{Hom}_D(D/I, \mathcal{O}^{an})$ ( $I$ の正則関数解の層 ) の $\mathbf{C}$ 線形空間としての次元は, $\mathbf{C}^n$ の *generic point* で rank$(I)$ に等しい.

$H_A(\beta)$ の rank については次のような結果がある.

**定理 1.4** (Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky) $I_A$ が *Cohen-Macaulay* なら

$$\mathrm{rank}(H_A(\beta)) = \mathrm{degree}(I_A) = \mathrm{vol}(A).$$

**定理 1.5** [9] $H_A(\beta)$ が *regular holonomic* のとき, 任意の $w \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\mathrm{rank}(H_A(\beta)) = \mathrm{rank}(\mathrm{in}_{(-w,w)}(H_A(\beta)))$$

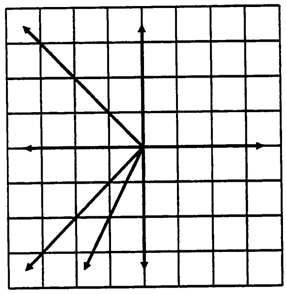
また

$$\mathrm{vol}(A) \leq \mathrm{rank}(H_A(\beta)) \leq \mathrm{degree}(\widetilde{\mathrm{in}_w(I_A)} + A\theta - \beta)$$

$\mathbf{K}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ のイデアル $I$ を固定する. $w \sim w' \in \mathbf{R}^n$ (weight の同値) を $\mathrm{in}_w(I) = \mathrm{in}_{w'}(I)$ で定義する. 関係 $\sim$ による weight の空間 $\mathbf{R}^n$ の分割を $I$ のグレブナファンとよぶ.

**例 1.7**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$



$\mathrm{Im}\,{}^tA\oplus$

図 1: グレブナファン

$I_A$ は次の元で生成される.

$$-\partial_2\partial_5+\partial_1\partial_3,\quad \partial_5^2-\partial_2\partial_4$$

グレブナファンは次の 7 つの最大次元 cone からなっている (図 1 参照). degree$(I_A)=4$ である.

定理 1.5 のグレブナファンを用いた証明の概略を紹介するのは可換環の役割を説明するのに, 適当であろう. この定理の証明はきちんとやると長い. [9] の 2 章および 3 章の半分位がこの証明についやされているが, アイディアは簡潔である. 級数解を実際に構成して解空間の次元に関する不等式を証明し, 環論的議論で反対向きの不等式を証明する.

解空間の次元の問題については, [9] の 4 章でさらに詳しく議論している. 2002 年春の Laura Matusevich の D-論はまだ読んでいないので紹介できない. この論文では, $I_A+\langle\partial_i\rangle$ が codim 1 の associated embedded prime を持つ場合に, rank が vol$(A)$ より大きくなるパラメータの集合を特徴付けている.

## 2 同型

$D/H_A(\beta)$ と $D/H_A(\beta')$ がいつ同型かというのは基本的な問題である. 簡単にたしかめられる事実として,

$$\cdot\partial_i\ :\ D/H_A(\beta-a_i)\longrightarrow D/H_A(\beta)$$

なる左 $D$-準同型がつくれる. $\partial_i$ と $H_A(\beta-a_i)$ の生成する $D$ の左イデアルが 1 に等しければ逆が存在する. $A$-超幾何方程式系の同型問題は, 齋藤睦により, 次のように解決された.

**定理 2.1** (齋藤睦 [8]) $\tau$ を $A$ の作る *cone* の *face* とする.

$$(\beta - \mathbf{N}_0 A - \mathbf{Z}(A \cap \tau)) \cap \tau$$

と

$$(\beta' - \mathbf{N}_0 A - \mathbf{Z}(A \cap \tau)) \cap \tau$$

がすべての *face* $\tau$ について $\bmod \mathbf{Z}(A \cap \tau)$ で等しいことが, $D/H_A(\beta)$ と $D/H_A(\beta')$ が同型である必要十分条件である.

# 3 問題集, 予想集

## 3.1 有理解

$A$ が gkz-rational とは, $\mathcal{A}$-discriminant $D_A$ がモノミアルでなく, かつ $H_A(\beta)$ がある $\beta$ にたいして, 分母が $D_A$ である有理解を持つこと. たとえば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = (-1, -1, -1)$$

のとき,

$$\frac{1}{x_1 x_2 - x_3 x_4}$$

は分母が $D_A$ に等しい有理解なので, $A$ は gkz-rational である.

$A_0, A_1, \ldots, A_r$ を $\mathbf{Z}^r$ の配置とする. これらの Cayley configuration を次の配置として定義する.

$$A = (\{e_0\} \times A_0) \cup (\{e_1\} \times A_1) \cup \cdots \cup (\{e_r\} \times A_r)$$

ここで $e_i$ は $\mathbf{Z}^{r+1}$ の標準基底である. ミンコフスキー和 $\sum_{i \in I} A_i$ の次元が $|I|$ 以上のとき, $A$ は essential であるという. ここで $I$ は $\{0, \ldots, r\}$ の任意の真部分集合であるとする.

**予想 3.1** (Cattani, Dickenstein, Sturmfels, 2002 [1])
$A$ が gkz-rational であるのは, $A$ が essentially Cayley configuration (から余分な行を抜いたもの) にアフィン同値であるときに限る.

余分な行をぬくという意味は, たとえば,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

は essentially Caylay configuration だが, $\mathcal{A}$-超幾何系を定義するには, 最後の行は余分である. これをぬくとこの節の始めの例の $A$ となる.

$\operatorname{Ker} A$ の次元が 1 のとき $A$ を circuit とよぶ.

**定理 3.1** [1] $A$ が *circuit* のとき *conjecture* は正しい.

さらに Cattani, Dickenstein は次の事実を最近示した.

**定理 3.2** $\dim \mathrm{Ker}\, A = 2$ かつ $n \le 7$ で *conjecture* は正しい.

( 証明: [9] の 3.4 節あたり (級数解). 線形代数. )

**例 3.1** $\Delta_p \times \Delta_q$ が essentially Cayley であるのは, $p = q$ のときのみ.

## 3.2 不確定特異点型 の $\mathcal{A}$-超幾何方程式

左 $D$ 加群 $D/I$ の任意の滑らかな曲線への制限 (高次の制限も含む) で得られる常微分方程式系がその曲線の無限遠点をふくむすべての点で確定特異点をもつとき, $D/I$ を regular holonomic とよぶことにする. Regular holonomic の概念は, Deligne, Kashiwara, Kawai や Mebkhout などにより 1970 年代から 1980 年代の初めにかけて整備された. $D$ 加群の制限の概念は, $D$ 加群の理論のはじめのころからあったが, その計算機による計算法は Oaku [3] により 1990 年代の半ばにあたえられて, $D$ 加群の計算方法の基礎となった. このあたりの話題については, Oaku による入門書 [4] がわかりやすくかつ含蓄に富んでいる.

**定理 3.3** (堀田, 1991) $A$ の Q-*row span* が $(1, \ldots, 1)$ を含むなら ($I_A$ が同次イデアルなら), $H_A(\beta)$ は *regular holonomic* である.

Regular holonomic でない場合が, 不確定特異点をもつ場合である.

**予想 3.2** $I_A$ が同次イデアルでないならば $H_A(\beta)$ は任意の $\beta$ に対して *regular holonomic* でない.

不確定特異点をもつ $\mathcal{A}$ 超幾何系は多くの基本的問題がまだ解けていない. とくに局所級数解の構成問題が解けていないのが (挑戦してる人がいないのでが) 残念である. 局所級数解は解の数値計算にとっても基本的である.

### 3.2.1 slope

Slope は不確定特異点をもつ微分方程式系の基本的な不変量である.

**定理 3.4** (Mebkhout) $M$ が *regular holonomic* なら, *slope* の集合は空である.

Slope とは何かを説明しよう. しばらく 1 変数のときの議論をおこなう.

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_F(x^a \partial_x^b) &= b \\ \mathrm{ord}_V(x^a \partial_x^b) &= b - a \end{aligned}$$

とおく. 常微分作用素 $L$ が与えられたとき, これらの点の (右上側) 凸包として $L$ の Newton polygon を定義する.

一変数の場合は, Newton polygon の slope を決めることが, 解をもとめる第 1 ステップである. 解は $t=0$ の周りで以下のような形の形式級数解をもつ.

$$\exp(Q(t))t^{\mu}(1+O(t)), \quad x^{1/p}=t$$

Newton polygon は多項式 $Q$ の leading term を決定する (Fabry, 1885).

**例 3.2** 下の $L_1$ に対して Slope は一つのみである.

$$L_1 = x^3\partial_2 + (x+x^2)\partial_x + 1$$

に対して Maple の DEtools を用いると次の解を得る.

```
with(DEtools); L:=x^3*dx^2+(x+x^2)*dx+1;
formal_sol(L,[dx,x],T,x=0);
              6
  1 - T + O(T )
[[-------------, T = x],
        T

  2                        2      3        4         5     6
[T  exp(1/T) (1 + 4 T + 18 T  + 96 T  + 600 T  + 4320 T  + O(T )), T = x]]
```

$s$-Gevrey formal power series:

$$\mathbf{C}[[x]]_s = \{f = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \in \mathbf{C}[[x]] \mid \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{(k!)^{s-1}} x^k \in \mathbf{C}\{x\}\}$$

$$\mathrm{Irr}^{(s)}(L) = \{[f] \in \mathbf{C}[[x]]_s/\mathbf{C}\{x\} \mid Lf \in \mathbf{C}\{x\}\}$$

**例 3.3** $L = x^2\partial_x + 1$, $f = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k! x^{k+1} \in \mathbf{C}[[x]]_2$

$$Lf = x \in \mathbf{C}\{x\}.$$

現代的な定式化のもと, Ramis は slope が次のような簡潔な解析的意味をもつことをあきらかにした [7] (1978, 1984).

**定理 3.5** $1/(1-s)$ が $L$ の *slope* である必要十分条件は

$$\mathrm{Irr}^{(s)}(L)/\mathrm{Irr}^{<s}(L) \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_F(x^a\partial_x^b) &= b \\ \mathrm{in}_F(x^a\partial_x^b) &= b-a \end{aligned}$$

Gröbner 基底の用語法を用いると, slopes は $L$ の Gröbner fan の壁に対応する. このように考えると, 多変数の場合の slope を次のように定義できる.

$$F=(0,\ldots,0;1,\ldots,1),\quad V=(0,\ldots,0,-1;0,\ldots,0,1)$$

として, $L=pF+qV,\quad \sigma^L(I)=\mathrm{in}_L(I)_{\xi_n\mapsto -\xi_n}$ とおく.

**定義 3.1** $M=D/I$ とする. 次の条件を満たすとき数 $-p/q$ を, $x_n=0$ に沿っての 0 における (幾何的) slope とよぶ.
条件: $\sqrt{\sigma^L(I)}$ が $F$ についても $V$ についても homogeneous でない. なおこのとき weight $L=pF+qV$ は $I$ の Gröbner fan の壁の上にある.

```
[780] G=sm1_gkz([[[1,2,4,6]],[1/2]]);
[[12*x4*dx4+8*x3*dx3+4*x2*dx2+2*x1*dx1-1,
  -dx2+dx1^2,-dx3+dx2^2,-dx4+dx2*dx3,dx2*dx4-dx3^2],
  [x1,x2,x3,x4]]
[782] sm1_slope(G[0],G[1],[0,0,0,0,1,1,1,1],[0,0,0,-1,0,0,0,1]);
[[2,[0,0,0,-1,2,2,2,3]]]
```

問題:

$$A=(1,a_2,\ldots,a_n)$$

とおく. このとき $H_A(\beta)$ は $x_n=0$ に沿って特異点をもつ. $H_A(\beta)$ の $x_n=0$ にそっての, 0 での slope を求めよ.

**定理 3.6** [2]

1. $\mathrm{slope}_{x_n=0}(H_A(\beta))=\mathrm{slope}_{x_n=0}(H_{(1,a_{n-1},a_n)}(\beta))$
2. $\mathrm{slope}_{x_n=0}(H_{(1,a_{n-1},a_n)}(\beta))=\{-a_{n-1}/(a_n-a_{n-1})\}$

とくにこの場合, 任意の $\beta$ に対して *regular holonomic* でないので予想 *3.2* は正しい.

slope を計算するアルゴリズムをこの場合に適用すると, 計算機による計算なしで (手計算で), 証明できる. この結果は M.Hertillo により少しづつ一般化されているところである.

Slope についてもいろいろ予想がある.

## 3.3 自由分解と dual $D$-加群

$M$ を holonomic な左 $D=D_n$ 加群とするとき, $\mathrm{Ext}^n_D(M,D)\otimes\omega^{-1}$ を $D$ の dual とよぶ.

ここで $\otimes\omega^{-1}$ は, 右 $D$-加群を 左 $D$-加群へ変換する関手である. 具体的には, たとえば $\ell\in D$, $N=(\ell D)\backslash D$ のとき, $N\otimes\omega^{-1}$ は $D/(D\ell^*)$ である. ここで, $\ell=\sum a_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta$ のとき

$$\ell^*=\sum a_{\alpha\beta}(-1)^{|\beta|}\partial^\beta x^\alpha$$

と定義する. $\ell^*$ は $\ell$ の形式的 adjoint と呼ばれる.

**例 3.4** $n=1$ で $\ell(\alpha) = x\partial_x - \alpha$ とおこう. $D/(D\cdot\ell)$ の dual は $D/(D\cdot(-x\partial_x-\alpha-1))$ である. 解は $x^\alpha$ と $x^{-\alpha-1}$ であるが, このふたつの解をかけると (ペアリングをとると), 有理関数 $x^{-1}$ となる.

**予想 3.3** (高山, 1999)
$I_A$ が Cohen-Macaulay のとき, $D/H_A(\beta)$ の dual D-module は $D/H_A(-\beta+c)$ に同型である. ここで $c$ は適当に選んだ整数ベクトル.

簡単な場合は次のようにして証明できる.

**例 3.5** $A=(1,2)$.

$$H_A(\beta) = D\cdot\{\ell_1,\ell\},\ \ell_1 = x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 - \beta,\ \ell = \partial_1^2 - \partial_2.$$

この場合次の可換図式をえる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & D & \xrightarrow{\ell_1+2} & D & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\ell & & \downarrow\ell & & \\
0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{\ell_1} & D & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & D/(\ell) & \xrightarrow{\ell_1} & D/(\ell) & \longrightarrow & D/(\ell,\ell_1) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

上二つの行の total complex をとると, $D/H_A(\beta)$ の 自由分解になっているので, この自由分解から直接結論を導ける. つまり, この自由分解より,

$$\mathrm{Ext}^2_D(D/H_A(\beta),D) \simeq (-(\ell_1+2)D+\ell D)\backslash D =: M$$

であり,

$$M\otimes\omega^{-1} = D/(D(x_1\partial_1+2x_2\partial_2+\beta+1)+D\ell)$$

となる.

**定理 3.7** $A$ が *circuit* のとき *conjecture* は正しい.

$I_A$ が Cohen-Macaulay でないと反例となる $\beta$ がでてくるだろう. 問題: このような $\beta$ を特徴づけよ.

**計算法への挑戦問題 3.1** 自由分解を構成する [5] のアルゴリズムおよび同型を判定する *Tsai-Walther* のアルゴリズム [11] を用いて, 反例を探せ.

### 3.4 Special function

$\mathcal{A}$ 超幾何関数ははたして “special function” といえるだろうか? special function というからには, Gauss の超幾何関数がそうであるように, 格別な定理がいくつも成り立たないといけない. 私個人の素朴な意味では, 大域的解の振舞がよくわかり数表がきちんとつくれるような関数であることは “special function” であるための必要条件である. $\mathcal{A}$ 超幾何方程式は, 微分方程式にしてはすっきりした定理がいろいろ成り立つ. そんな意味で格別なものの可能性は秘めているが, もっと調べてみないと本当に格別な方程式系であるとは言えないであろう. 素朴な意味でも大域的解の振舞がよくわかるわけでないので, 特殊関数とはまだいえない. さらに研究が必要である.

## 参考文献


[1] E.Cattani, A.Dickenstein, B.Sturmfels, Rational Hypergeometric Functions, Compositio Mathematicae, 2001.

[2] F.Castro-Jimenez, N.Takayama, Slopes of a Hypergeometric System Associated to a Monomial Curve, math.AG/0107046

[3] T.Oaku, Algorithms for $b$-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of $D$-modules. Advances in Applied Mathematics **19** (1997), 61–105.

[4] 大阿久, D 加群と計算数学, 朝倉書店, 2002.

[5] T.Oaku, N.Takayama, Minimal Free Resolutions of Homogenized D-modules. Journal of Symbolic Computation 32 (2001), 575–595.

[6] http://www.openxm.org

[7] J.P.Ramis, Divissage Gevrey, Asterisque, 59-60 (1978) 173–204.

[8] M.Saito, Isomorhism Classes of $A$-Hypergeometric Systems, Compositio Mathematicae, **128** (2001), 323–338.

[9] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, Algorithms and Computation in Mathematics **6**, Springer, 2000.

[10] B.Sturmfels, Polynomial Equations and Convex Polytopes, The American Mathematical Monthly **105** (1998), no. 10, 907–922.

[11] H.Tsai, U.Walther, Computing Homomorphisms between Holonomic $D$-modules, Journal of Symbolic Computation **32** (2001), 597–617.


参考文献は完備なものではない. [9] の文献表にあるものはほとんど除いてある.

$\mathcal{A}$-超幾何系に関しては何から読むとわかりやすいかと聞かれたら, 最近は [9] の定理 3.1.3 の証明からはどうかと答えている. この証明の証明は Buchberger algorithm しか用いていないが $H_A(\beta)$ の initial ideal を特徴づけている基本的な定理である. 実際 [9] は定理 3.1.3 を計算機実験および理論的に調べることから始めた.

# UNMIXED INITIAL IDEALS AND CASTELNUOVO–MUMFORD REGULARITY

NAOKI TERAI, HIDEFUMI OHSUGI AND TAKAYUKI HIBI

ABSTRACT. Let $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ be the polynomial ring over a field $K$ and $P \subset A$ a homogeneous prime ideal with no linear form. Let $\mathrm{reg}(P)$ denote the Castelnuovo–Mumford regularity of $P$ and $e(A/P)$ the multiplicity of $A/P$. It will be shown that if $P$ possesses an initial ideal with no embedded prime ideal, then the regularity of $P$ satisfies the inequality $\mathrm{reg}(P) \leq e(A/P) - \mathrm{codim}(A/P) + 1$, where $\mathrm{codim}(A/P)$ is the codimension of $A/P$.

## INTRODUCTION

Let $K$ be a field and $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ the polynomial ring in $n$ variables over $K$. Let $P \subset A$ be a homogeneous prime ideal with no linear form. Write $\mathrm{reg}(P)$ for the Castelnuovo–Mumford regularity of $P$ and $e(A/P)$ for the multiplicity of $A/P$. In [2, p. 93] it is conjectured that the regularity of $P$ satisfies the inequality

$$\mathrm{reg}(P) \leq e(A/P) - \mathrm{codim}(A/P) + 1, \tag{1}$$

where $\mathrm{codim}(A/P)$ is the codimension of $A/P$.

Many papers in algebraic geometry and commutative algebra discuss the topics related with the inequality (1). However, the conjecture itself is widely open in general, except for limited special cases considered in algebraic geometry (e.g., [4], [8]) and in commutative algebra (e.g., [5]).

The main purpose of the present paper is to show that if $P$ possesses an initial ideal with no embedded prime ideal, then $\mathrm{reg}(P)$ satisfies the inequality (1). See Theorem 1.3. It then turns out to be an exciting research problem to find a reasonable class which consists of those prime ideals $P \subset A$ such that $P$ possesses an initial ideal with no embedded prime ideal. Note, however, that the inequality (1) is automatically satisfied when $A/P$ is Cohen–Macaulay. Thus we are interested in those prime ideals $P \subset A$ having an initial ideal with no embedded prime ideal such that $A/P$ is not Cohen–Macaulay. Such a prime ideal will be presented in Examples 2.1 and 2.2. We refer the reader to, e.g., [9] for fundamental materials on initial ideals.

## 1. PURE AND UNMIXED MONOMIAL IDEALS

Let $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ denote the polynomial ring in $n$ variables over a field $K$. An ideal $I \subset A$ is called *pure* if all minimal prime ideals of $I$ has the same height. An ideal $I \subset A$ is called *unmixed* if $I$ has no embedded prime ideal.

For example, the ideal $I = (x_1^2, x_2) \cap (x_1)$ is pure, but not unmixed. The ideal $J = (x_1, x_2) \cap (x_3)$ is unmixed, but not pure.

We will associate each monomial $u = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ belonging to $A$ with the squarefree monomial

$$u^{pol} = x_{11}x_{12}\cdots x_{1a_1}x_{21}x_{22}\cdots x_{2a_2}\cdots x_{n1}x_{n2}\cdots x_{na_n}$$

in the variables $x_{ij}$ with $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq a_i$.

Let $I = (u_1, \ldots, u_s)$ be a monomial ideal of $A$, where $\{u_1, \ldots, u_s\}$ is the minimal set of monomial generators of $I$. Then fix a polynomial ring $B$ over $K$ such that all monomials $u_1^{pol}, \ldots, u_s^{pol}$ belong to $B$ and consider the squarefree ideal $I^{pol} = (u_1^{pol}, \ldots, u_s^{pol})$ of $B$.

It is known [10, p. 107] that, for monomial ideals $I$ and $J$, one has

$$(I \cap J)^{pol} = I^{pol} \cap J^{pol}.$$

Even though the following Lemma 1.1 is [10, Theorem 1.2 (ii)], we give its proof which will be required in the proof of Lemma 1.2.

**Lemma 1.1.** *If $I \subset A$ is a monomial ideal which is pure and unmixed, then $I^{pol}$ is pure.*

*Proof.* Let $I = \cap_\lambda Q_\lambda$ denote the irreducible primary decomposition of $I$. Since $I$ is pure and unmixed, all prime ideals belonging to $I$ have the same height, say $= h$. Let $Q_\lambda = (x_{p_1}^{\lambda_1}, \ldots, x_{p_h}^{\lambda_h})$ with $1 \leq p_1 < \cdots < p_h \leq n$ and with each $\lambda_j > 0$. Since $I^{pol} = \cap_\lambda Q_\lambda^{pol}$ and since

$$Q_\lambda^{pol} = \bigcap_{1 \leq i_1 \leq \lambda_1, \ldots, 1 \leq i_h \leq \lambda_h} (x_{p_1 i_1}, x_{p_2 i_2}, \ldots, x_{p_h i_h}),$$

it follows that $I^{pol}$ is pure, as desired. □

Let $I \subset A$ be an ideal which is pure and unmixed, and write $h$ for the height of $I$. We say that $I$ is *strongly connected* if, for any minimal primes $P$ and $P'$ of $I$, there is a sequence of minimal prime ideals

$$(P =)\, P_0, P_1, \ldots, P_m\, (= P')$$

of $I$ such that $\text{height}(P_{i-1} + P_i) = h + 1$ for all $i = 1, \ldots, m$.

**Lemma 1.2.** *Let $I \subset A$ be a unmixed monomial ideal and suppose that $\sqrt{I}$ is pure and strongly connected. Then $I^{pol}$ is pure and strongly connected.*

*Proof.* Since $\sqrt{I}$ is pure, it follows that $I$ is pure. Then Lemma 1.1 says that $I^{pol}$ is pure. Let $h = \text{height}(I) = \text{height}(\sqrt{I}) = \text{height}(I^{pol})$.

In order to see why $I^{pol}$ is strongly connected, let $P = (x_{i_1 j_1}, \ldots, x_{i_h j_h})$ and $Q = (x_{k_1 \ell_1}, \ldots, x_{k_h \ell_h})$ be minimal prime ideals of $I^{pol}$. It follows from the proof of Lemma 1.1 that $P' = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_h})$ and $Q' = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_h})$ are minimal prime ideals of $\sqrt{I}$. Since $\sqrt{I}$ is strongly connected, there is a sequence of minimal prime ideals

$$(P' =)\, P'_0, P'_1, \ldots, P'_m\, (= Q')$$

of $\sqrt{I}$ such that height$(P'_{\nu-1}+P'_\nu) = h+1$ for $\nu = 1, \ldots, m$. Let $P'_\nu = (x_{i_{\nu_1}}, \ldots, x_{i_{\nu_h}})$ and $P_\nu = (x_{i_{\nu_1}1}, \ldots, x_{i_{\nu_h}1})$. It is clear that the sequence of minimal prime ideals

$$\begin{aligned}P = (x_{i_1j_1}, \ldots, x_{i_hj_h}), (x_{i_11}, x_{i_2j_2}, \ldots, x_{i_hj_h}), (x_{i_11}, x_{i_21}, x_{i_3j_3}, \ldots, x_{i_hj_h}),\\ \ldots, (x_{i_11}, \ldots, x_{i_h1}) = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_m = (x_{k_11}, \ldots, x_{k_h1}),\\ (x_{k_11}, \ldots, x_{k_{h-1}1}, x_{k_h\ell_h}), (x_{k_11}, \ldots, x_{k_{h-2}1}, x_{k_{h-1}\ell_{h-1}}, x_{k_h\ell_h}),\\ \ldots, (x_{k_1\ell_1}, \ldots, x_{k_h\ell_h}) = Q\end{aligned}$$

of $I^{pol}$ satisfies the condition for $I^{pol}$ to be strongly connected. □

We now come to the main theorem of the present paper.

**Theorem 1.3.** *Let $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ be the polynomial ring over a field $K$ and $P \subset A$ a homogeneous prime ideal which contains no linear form. Suppose that there is a monomial order $<$ on $A$ such that $in_<(P)$ is unmixed. Then*

$$\operatorname{reg}(P) \le e(A/P) - \operatorname{codim}(A/P) + 1.$$

*Proof.* It is known [7, Theorem 1] that $\sqrt{in_<(P)}$ is pure and strongly connected. Since $in_<(P)$ is unmixed, Lemma 1.2 guarantees that $in_<(P)^{pol}$ is pure and strongly connected.

Now, by virtue of [13, Theorem 3.2], it follows that

$$\operatorname{reg}(in_<(P)^{pol}) \le e(B/in_<(P)^{pol}) - \operatorname{codim}(B/in_<(P)^{pol}) + 1,$$

where $B$ is a polynomial ring with $in_<(P)^{pol} \subset B$. Thus

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(P) &\le \operatorname{reg}(in_<(P))\\ &= \operatorname{reg}(in_<(P)^{pol})\\ &\le e(B/in_<(P)^{pol}) - \operatorname{codim}(B/in_<(P)^{pol}) + 1\\ &= e(A/in_<(P)) - \operatorname{codim}(A/in_<(P)) + 1\\ &= e(A/P) - \operatorname{codim}(A/P) + 1,\end{aligned}$$

as desired. □

**Remark 1.4.** Let geom-deg$(A/I)$ (resp. arith-deg$(A/I)$) denote the geometric degree (resp. arithmetic degree) of $A/I$, where $I$ is a homogeneous ideal of $A$. Consult e.g., [1] for the definition of the geometric degree and arithmetic degree of $A/I$. If $I \subset A$ is a homogeneous (but, not necessarily prime) ideal such that $in_<(I)$ is unmixed for some monomial order $<$ on $A$, then $\operatorname{reg}(I) \le$ geom-deg$(A/I)$. If, in addition, $I$ is pure, then $\operatorname{reg}(I) \le e(A/I)$. In fact, it follows from [6, Theorem 1.1], [3, Theorem 3.8] and [11, Proposition 4.1] that

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(I) &\le \operatorname{reg}(in_<(I))\\ &\le \text{arith-deg}(A/in_<(I))\\ &= \text{geom-deg}(A/in_<(I))\\ &\le \text{geom-deg}(A/I).\end{aligned}$$

## 2. EXAMPLES

Let, as before, $A = K[x_1, \dots, x_n]$ denote the polynomial ring over a field $K$ and $P \subset A$ a homogeneous prime ideal with no linear form. It is a simple fact that the inequality (1) is satisfied if the quotient ring $A/P$ is Cohen–Macaulay. Thus we are interested in prime ideals $P \subset A$, for which $A/P$ is *not* Cohen–Macaulay, such that $P$ possesses an initial ideal with no embedded primes.

**Example 2.1.** Let $K$ be a field of characteristic 2. In [12, Theorem 20], Terai succeeded in constructing a homogeneous prime ideal $P$ of the polynomial ring $A = K[x_1, \dots, x_{14}]$ such that (i) the quotient ring $A/P$ is *not* Cohen–Macaulay, and (ii) with respect to a reverse lexicographic monomial order $<_{rev}$ on $A$, the initial ideal $in_{<_{rev}}(P)$ is generated by squarefree quadratic monomials. (In particular $in_{<_{rev}}(P)$ possesses *no* embedded prime.) The prime ideal is generated by 42 quadratic polynomials and Krull-dim $A/P = 4$. Moreover, $A/in_{<_{rev}}(P)$ is isomorphic to the polynomial ring in one variable over the Stanley–Reisner ring of a triangulation of the real projective plane.

We do not know if there exists a prime ideal $P$ of the polynomial ring $A = K[x_1, \dots, x_n]$ over a field $K$ of characteristic 0 such that (i) $A/P$ is not Cohen–Macaulay, and (ii) $P$ possesses an initial ideal which is generated by squarefree quadratic monomials.

We conclude the present paper with an example which was discovered by Laura Matusevich.

**Example 2.2.** Let $R$ denote the affine semigroup ring generated by the monomials $t_1, t_1t_3, t_1t_3^3, t_1t_2, t_1t_2t_3, t_1t_2t_3^3$ and $I \subset K[x_1, \dots, x_6]$ its toric ideal. Then $R$ is not Cohen–Macaulay and $I$ is generated by the binomials $x_5^3 - x_4^2x_6, x_3x_5 - x_2x_6, x_3x_4 - x_1x_6, x_1x_5 - x_2x_4, x_1x_4x_6 - x_2x_5^2, x_1^2x_6 - x_2^2x_5$ and $x_1^2x_3 - x_2^3$. Let $<_{rev}$ be the reverse lexicographic order on $K[x_1, \dots, x_6]$ induced by the ordering $x_1 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6 > x_2$. Then the initial ideal $in_{<_{rev}}(I)$ is generated by the monomials $x_5^3, x_3x_5, x_3x_4, x_1x_5, x_1x_4x_6, x_1^2x_6$ and $x_1^2x_3$, and its irreducible primary decomposition is $in_{<_{rev}}(I) = (x_1, x_3, x_5^3) \cap (x_1^2, x_4, x_5) \cap (x_3, x_5, x_6)$. Thus $in_{<_{rev}}(I)$ is unmixed. (The authors are grateful to K. Yanagawa for informing them of this example.)

## REFERENCES


[1] D. Bayer and D.Mumford, What can be computed in algebraic geometry?, *in* "Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (D. Eisenbud and L. Robbiano, Eds.)," Cambridge University Press, 1993, pp. 1 – 48.

[2] D. Eisenbud and S. Goto, Linear free resolutions and minimal multiplicity, *J. Algebra* **88** (1984), 89 – 133.

[3] A. Frübis-Krüger and N. Terai, Bounds for the regularity of monomial ideals, *Mathematiche (Catania)* **53** (1998), 83 – 97.

[4] L. Gruson, R. Lazarsfeld and C. Peskine, On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves, *Invent. Math.* **72** (1983), 491 – 506.

[5] J. Herzog and T. Hibi, Castelnuovo–Mumford regularity of simplicial semigroup rings with isolated singularity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[6] L. T. Hoa and N. V. Trung, On the Castelnuovo–Mumford regularity and the arithmetic degree of monomial ideals, *Math. Z.* **229** (1998), 519 – 537.
[7] M. Kalkbrener and B. Sturmfels, Initial complexes of prime ideals, *Adv. Math.* **116** (1995), 365 – 376.
[8] R. Lazarsfeld, A sharp Castelnuovo bound for smooth surfaces, *Duke Math. J.* **55** (1987), 423 – 429.
[9] H. Ohsugi and T. Hibi, Quadratic initial ideals of root systems, *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 1913 – 1922.
[10] J. Stückrad and W. Vogel, "Buchsbaum rings and applications," Springer–Verlag, Berlin, 1986.
[11] B. Sturmfels, N. V. Trung and W. Vogel, Bounds on degrees of projective schemes, *Math. Ann.* **302** (1995), 417 – 432.
[12] N. Terai, Some remarks on algebras with straightening laws, *J. Pure and Appl. Algebra* **95** (1994), 87 – 101.
[13] N. Terai, Eisenbud–Goto inequality for Stanley–Reisner rings, *in* "Geometric and Combinatorial Aspects of Commutative Algebra" (J. Herzog and G. Restuccia, Eds.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., 217, Dekker, New York, 2001, pp. 379 – 391.

Naoki Terai
Department of Mathematics
Faculty of Culture and Education
Saga University
Saga 840-8502, Japan
E-mail:terai@cc.saga-u.ac.jp

Hidefumi Ohsugi
Department of Mathematics
Rikkyo University
Tokyo 171-8501, Japan
E-mail:ohsugi@rkmath.rikkyo.ac.jp

Takayuki Hibi
Department of Pure and Applied Mathematics
Graduate School of Information Science and Technology
Osaka University
Toyonaka 560-0043, Japan
E-mail:hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp

# ヒルベルトの第14問題に対するロバーツの反例の一般化

東北大学大学院理学研究科数学専攻

黒田 茂

## 1 序

$K$ を体，$A$ を $K$ 上の多項式環，$L$ をその商体とする．ヒルベルトの第14問題とは，中間体 $K \subset M \subset L$ に対し，$A$ の $K$ 部分代数 $M \cap A$ が有限生成かを問うものである．この問題に対し，永田は1958年に初めて反例を示した [9]．1990年にロバーツ (Paul Roberts) は，それとは別の系統の新しい反例を発表した [10]．この報告書ではロバーツの反例を一般化し，類似の反例が無数に存在することを示す (詳しい説明は [8] を参照)．

以後，$K$ は常に標数零の体とする．$K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_m]$ を $K$ 上の $m$ 変数多項式環，$K[\mathbf{x}][\mathbf{y}] = K[\mathbf{x}][y_1, \dots, y_n]$ を $K[\mathbf{x}]$ 上の $n$ 変数多項式環とする．$K[\mathbf{x}]$ 線形写像 $D : K[\mathbf{x}][\mathbf{y}] \to K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]$ は，任意の $f, g \in K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]$ が $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ を満たすとき，$K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]$ 上の $K[\mathbf{x}]$ 微分であるという．このとき，$D$ の核

$$K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D = \{f \in K[\mathbf{x}][\mathbf{y}] \mid D(f) = 0\} \tag{1.1}$$

は $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]$ の $K[\mathbf{x}]$ 部分代数となる．本稿では，各 $D(y_j)$ が $x_1, \dots, x_m$ についての単項式となるとき，$D$ を基本単項式微分と呼ぶ．また，単項式 $x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$ や $y_1^{b_1} \cdots y_n^{b_n}$ は，ベクトル $a = (a_1, \dots, a_m), b = (b_1, \dots, b_n)$ を用いてそれぞれ $\mathbf{x}^a, \mathbf{y}^b$ と表す．ところで偏

微分の集合 $\{\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_n\}$ は，$K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]$ 上の $K[\mathbf{x}]$ 微分全体のなす $K[\mathbf{x}]$ 加群の基底となる．これを使うと，基本単項式微分 $D$ は適当な $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}{}^n$ によって

$$D = \mathbf{x}^{\delta_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \mathbf{x}^{\delta_n} \frac{\partial}{\partial y_n} \tag{1.2}$$

と表示できる．この微分の核 $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ は，1次元加法群 $G_a = \operatorname{Spec} K[s]$ の $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]$ への作用 $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}] \to K[\mathbf{x}][\mathbf{y}] \otimes_K K[s]$ を，$i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ に対して $x_i \mapsto x_i, y_j \mapsto y_j + \mathbf{x}^{\delta_j} \otimes s$ となるように定めたときの不変部分環 $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^{G_a}$ と等しい．

例えば，$n = m+1$ のとき

$$D_{t,m} = x_1^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + x_m^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_m} + (x_1 \cdots x_m)^t \frac{\partial}{\partial y_{m+1}} \tag{1.3}$$

は $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]$ 上の基本単項式微分である．[2] の中で Deveney-Finston は，ロバーツの反例が $m = 3, t \geq 2$ に対する $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^{D_{t,m}}$ と等しいことを示した．小島・宮西はロバーツの反例を一般化し，$m \geq 3, t \geq 2$ ならば $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^{D_{t,m}}$ は $K$ 上有限生成でないことを示した [4]．本稿では，(1.2) の形の一般の基本単項式微分 $D$ の核の有限生成性を考察する．

# 2 主結果

各 $i, j$ に対し $\epsilon_{i,j} = \delta_i - \delta_j$ と定め，各 $k$ に対しその第 $k$ 成分を $\epsilon_{i,j}^k$ とおく．今，$n \geq 4$, $m \geq n-1$ とし，さらに，任意の異なる $1 \leq i \leq n-1$ と $1 \leq j \leq n$ が $\epsilon_{i,j}^i > 0$ を満たすと仮定する．例えば $D_{t,m}$ の場合，$j \neq m+1$ ならば $\epsilon_{i,j}^i = t+1$，それ以外は $\epsilon_{i,j}^i = 1$ となるのでこの仮定は満たされている．このとき，

$$\eta = \frac{\epsilon_{1,n}^1}{\min\{\epsilon_{1,j}^1 \mid j = 2, \ldots, n-1\}} \tag{2.1}$$

と定める．さらに，$i = 2, \ldots, n-1$ と $k = 3, \ldots, n-1$ に対し

$$\eta_{k,i} = \eta \min\{\max\{\epsilon_{1,k}^i, \epsilon_{2,k}^i\}, 0\} \tag{2.2}$$

と定義する．各 $k=3,\ldots,n-1$ に対し，$u_1,\ldots,u_{n-2}$ を未知数とする連立 1 次不等式

$$\begin{cases} u_1+\cdots+u_{n-2}=1 \\ u_1\geq\eta,\ u_i\geq 0 \quad (i=2,\ldots,n-2) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n-2}\min\{\epsilon^i_{n,1},\epsilon^i_{n,j+1}\}u_j+\eta_{k,i}\geq 0 \quad (i=2,\ldots,n-1) \end{cases} \tag{2.3}$$

を $\mathcal{L}_{k,n-2}$ とおく．このとき次が成り立つ．

**定理 2.1** $n\geq 4,\ m\geq n-1$ とする．さらに，任意の異なる $1\leq i\leq n-1$ と $1\leq j\leq n$ が $\epsilon^i_{i,j}>0$ を満たすと仮定する．このとき各 $k=3,\ldots,n-1$ に対して，$\mathcal{L}_{k,n-2}$ が $\mathbf{R}^{n-2}$ に解を持てば，$K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ は $K$ 上有限生成でない．

$n=4$ の場合には簡明な判定条件が得られる．$n=4, m\geq 3$ のとき，$i=1,2,3$ に対して

$$\xi_i=\xi_i(D)=\frac{\epsilon^i_{i,4}}{\min\{\epsilon^i_{i,j},\epsilon^i_{i,k}\}} \tag{2.4}$$

と定める．但し，$j,k$ は相異なる $\{1,2,3\}\setminus\{i\}$ の元とする．$\epsilon^i_{i,4},\epsilon^i_{i,j},\epsilon^i_{i,k}>0$ なので，これは正数である．

**定理 2.2** $n=4, m\geq 3$ とし，任意の異なる $i=1,2,3$ と $j=1,2,3,4$ が $\epsilon^i_{i,j}>0$ を満たすと仮定する．このとき

$$\xi_1(D)+\xi_2(D)+\xi_3(D)\leq 1 \tag{2.5}$$

ならば $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ は $K$ 上有限生成でない．

定理 2.2 は第 3 節で直接証明するが，$(1-\xi_2,\xi_2)$ が $\mathcal{L}_{3,2}$ の解となることから，定理 2.1 を認めればその帰結としても得られる．

$D_{t,m}$ に対しては次が成り立つ．$t=1, m\geq 4$ の場合が新しい結果である．

**系 2.3** $n=m+1$ とする．このとき $m\geq 3, t\geq 2$ または $m\geq 4, t=1$ ならば，$K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^{D_{t,m}}$ は $K$ 上有限生成でない．

この系の証明の概略は次の通りである．$m=3, t\geq 2$ のときは，$\xi_i(D_{t,m})=1/(t+1)$ $(i=1,2,3)$ なので定理 2.2 より従う．$m\geq 4, t=1$ のときは，$k=3,\ldots,m-1$ に対して次のように定めた $u^k=(u_1^k,\ldots,u_{m-1}^k)$ が $\mathcal{L}_{k,m-1}$ の解となる．$j=1$ または $k=j+2$ のときの $u_j^k$ と $u_3^3$ を 1/2 とし，それ以外は $u_j^k=0$ とする．故に，定理 2.1 より従う．

各 $i,j$ に対し，$\epsilon_{i,j}$ の負の成分を零に置き換えたものを $\epsilon_{i,j}^+$ とおき，$L_{i,j}^D=\mathbf{x}^{\epsilon_{j,i}^+}y_i-\mathbf{x}^{\epsilon_{i,j}^+}y_j$ と定める．これは $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ の元である．基本単項式微分 $D_{t,m}$ の場合，系 2.3 より $m\geq 3, t\geq 2$ または $m\geq 4, t=1$ ならば $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^{D_{t,m}}$ は有限生成でない．一方，$t=0$ のときは Weitzenböck の定理より $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^{D_{t,m}}$ は有限生成である．実際，このとき $K[\mathbf{x}]$ 上 $L_{1,m+1}^{D_{t,m}},\ldots,L_{m,m+1}^{D_{t,m}}$ で生成できる．$(t,m)=(1,3)$ の場合は蔵野によって，$K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^{D_{t,m}}$ は $L_{i,j}^{D_{t,m}}$ $(1\leq i<j\leq 4)$ および，$(i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ に対する

$$x_iy_4^2-2x_jx_ky_iy_4+x_ix_k^2y_iy_j+x_ix_j^2y_iy_k-x_i^3y_jy_k \tag{2.6}$$

の合計 9 元で $K[\mathbf{x}]$ 上生成できることが示された [5]．以上より，$D_{t,m}$ の核 $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^{D_{t,m}}$ がいつ有限生成になるかが全て判明した．

## 3 不変式系の構成

この節では定理 2.2 の証明を述べる．定理 2.1 の証明方法も本質的に同じだが，議論は複雑になる．この節を通して $n=4, m\geq 3$ とし，異なる任意の $i=1,2,3$ と $j=1,2,3,4$ は $\epsilon_{i,j}^i>0$ を満たすと仮定する．定理 2.2 は，次の補題 3.1, 3.2 から容易に従う．

**補題 3.1** $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ のどの元も，$\mathbf{x}^ay_4^l$ という形の単項式を持たない．但し，$l$ は正整数，$a\in\mathbf{Z}_{\geq 0}{}^m$ は初めの 3 つの成分が全て零とする．

**証明**　ある $F\in K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ が上記の単項式 $\mathbf{x}^ay_4^l$ を持ったとする．すると，単項式 $\mathbf{x}^a\mathbf{x}^{\delta_4}y_4^{l-1}$ が $D(F)$ に現れる．$D(F)=0$ なので，その係数は零である．故に，$F$ のある単項式 $\mathbf{x}^{a'}\mathbf{y}^{b'}\neq\mathbf{x}^ay_4^l$ に対して，$\mathbf{x}^a\mathbf{x}^{\delta_4}y_4^{l-1}$ は零でない係数で $D(\mathbf{x}^{a'}\mathbf{y}^{b'})$ に現れる．そのような

単項式 $\mathbf{x}^{a'}\mathbf{y}^{b'}$ は，$\mathbf{x}^a\mathbf{x}^{\epsilon_{4,i}}y_iy_4^{l-1}$ $(i=1,2,3)$ に限られる．仮定より $i=1,2,3$ に対して $\epsilon_{4,i}^i<0$ だから，それは負冪を持つ．$F$ は $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]$ の元なので，これは矛盾である．故に，初めから $F$ は $\mathbf{x}^ay_4^l$ を持たない． □

不変式のある無限系列の存在を主張する次の補題が，証明の核心部分である．

**補題 3.2** (2.5) が成り立つと仮定する．$\alpha$ を $\min\{\epsilon_{3,1}^3,\epsilon_{3,2}^3\}$ 以上の整数とする．このとき，各 $l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\mathbf{x}^a x_3^\alpha y_4^l + (y_4 \text{ について } l \text{ 次未満の多項式}) \tag{3.1}$$

の形の元が $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ に含まれる．但し，$a\in\mathbf{Z}_{\geq 0}{}^m$ は初めの3つの成分が全て零とする．

以下，この補題を示す．

$K[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]=K[x_1,\ldots,x_m,x_1^{-1},\ldots,x_m^{-1}], K[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}][\mathbf{y}]=K[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}][y_1,y_2,y_3,y_4]$ とおく．$D$ は $K[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}][\mathbf{y}]$ 上の $K[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]$ 微分 $D$ に自然に拡張できることに注意する．$l$ 次斉次元全体のなす $K[\mathbf{y}]=K[y_1,y_2,y_3,y_4]$ の $K$ 部分ベクトル空間を $K[\mathbf{y}]_l$ とおく．各 $f=\sum_{b\in\mathbf{Z}^4}\lambda_b\mathbf{y}^b\in K[\mathbf{y}]$ に対して，$f$ の台 $\mathrm{supp}(f)$ を

$$\mathrm{supp}(f)=\{b\in\mathbf{Z}^4 \mid \lambda_b\neq 0\} \tag{3.2}$$

と定める．$a\in\mathbf{Z}^m$ と $l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して $K$ 線形写像 $\tau_{\mathbf{x}^a}^l : K[\mathbf{y}]_l\to K[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]\otimes_K K[\mathbf{y}]_l$ を，単項式 $\mathbf{y}^b$ を $\mathbf{x}^{a'}\mathbf{y}^b$ に写すことで定める．ここで，$b=(b_1,b_2,b_3,b_4)$, $a'=a+\sum_{j=1}^n b_j\epsilon_{4,j}$ とする．$K[\mathbf{y}]$ 上の微分 $E$ を

$$E=\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}+\frac{\partial}{\partial y_4} \tag{3.3}$$

と定める．$K[\mathbf{y}]^E$ は

$$B=K[y_2-y_1,y_3-y_1,y_4-y_1] \tag{3.4}$$

を含むことに注意する (実は $K[\mathbf{y}]^E=B$ となる)．各 $l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して $B_l=B\cap K[\mathbf{y}]_l$ とおく．すると，任意の $a\in\mathbf{Z}^m$ と $f\in B_l$ に対して $\tau_{\mathbf{x}^a}^l(f)$ は $K[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}][\mathbf{y}]^D$ に含まれ

る．実際，$D\circ\tau^l_{\mathbf{x}^a}=\tau^{l-1}_{\mathbf{x}^a}\circ(E|_{K[\mathbf{y}]_l})$ が成り立つので，$D(\tau^l_{\mathbf{x}^a}(f))=\tau^{l-1}_{\mathbf{x}^a}(E(f))=0$ となる．$i=1,2,3$ に対して，$\mathbf{R}$ 線形写像 $l_i:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}$ を

$$l_i((b_1,b_2,b_3,b_4))=(b_j+b_k)\min\{\epsilon^i_{i,j},\epsilon^i_{i,k}\}-(b_i+b_j+b_k)\epsilon^i_{i,4} \tag{3.5}$$

と定める．但し，$j,k$ は相異なる $\{1,2,3\}\setminus\{i\}$ の元とする．

補題 3.2 は次の補題に帰着する．

**補題 3.3** 補題 3.2 の条件の下で，各 $l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して

(i) $(0,0,0,l)\in\mathrm{supp}(F)$.

(ii) 任意の $b\in\mathrm{supp}(F)$ は $l_1(b),l_2(b),l_3(b)+\alpha\geq 0$ を満たす．

を満たす $F\in B_l$ が存在する．

次のようにして補題 3.3 から補題 3.2 が導ける．$\tau^l_{x_3^\alpha}(F)$ は (3.1) の形の $K[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}][\mathbf{y}]^D$ の元であることに注意する．従って，$\tau^l_{x_3^\alpha}(F)$ の任意の項の $x_1,x_2,x_3$ の冪が非負であることを確かめればよい．実際そのとき，$x_1,x_2,x_3$ を含まない適当な単項式 $\mathbf{x}^a$ を $\tau^l_{x_3^\alpha}(F)$ に掛ければ求める $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ の元が得られる．$\tau^l_{x_3^\alpha}(F)$ の任意の単項式は，$b=(b_1,b_2,b_3,b_4)\in\mathrm{supp}(F)$ と $a'=\sum_{j=1}^4 b_j\epsilon_{4,j}$ によって $\mathbf{x}^{a'}x_3^\alpha\mathbf{y}^b$ と書ける．$i=1,2,3$ に対し，$j,k$ を相異なる $\{1,2,3\}\setminus\{i\}$ の元とすると，$a'$ の第 $i$ 成分 $a'_i$ は

$$a'_i=b_1\epsilon^i_{4,1}+b_2\epsilon^i_{4,2}+b_3\epsilon^i_{4,3}=b_j\epsilon^i_{i,j}+b_k\epsilon^i_{i,k}-(b_1+b_2+b_3)\epsilon^i_{i,4}\geq l_i(b) \tag{3.6}$$

となる．不等式 (3.6) と条件 (ii) より，$\tau^l_{x_3^\alpha}(F)$ の任意の項の $x_1,x_2,x_3$ の冪が非負であることが分かる．故に，補題 3.2 が従う．

そこで，以下では補題 3.3 を証明する．正整数 $l$ を任意にとる．$\mathrm{supp}(F)$ が $(0,0,0,l)$ を含み，さらに任意の $b\in\mathrm{supp}(F)$ が $l_1(b),l_2(b)\geq 0$ を満たす $F\in B_l$ 全体の集合を $\mathcal{F}$ と定める．$i=1,2,j=0,\ldots,l$ に対し $l_i((0,0,j,l-j))\geq 0$ だから，$(y_4-y_3)^l$ は $\mathcal{F}$ に含まれる．よって $\mathcal{F}$ は空でない．全ての $b\in\mathrm{supp}(F_0)$ が $l_3(b)+\alpha\geq 0$ を満たす $F_0\in\mathcal{F}$ が存在することを示せば補題 3.3 の証明は完了する．そうでないと仮定すると，$\mathcal{F}$ の各元

$F$ に対し $O(F) = (d,e) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}{}^2$ が次のように定まる．$l_i(b)+\alpha < 0$ を満たす $b \in \mathrm{supp}(F)$ の第 4 成分の中で最大のものを $d$ とする．そして，第 4 成分が $d$ である $\mathrm{supp}(F)$ の元の第 3 成分の中で最大のものを $e$ とする．さて，任意の $(d_1,e_1),(d_2,e_2) \in \mathbf{Z}^2$ に対し，$d_1 < d_2$ または $d_1 = d_2, e_1 \leq e_2$ のときに $(d_1,e_1) \preceq (d_2,e_2)$ と定める．すると，これは $\mathbf{Z}^2$ 上に全順序関係を定める．任意の $h \in \mathcal{F}$ に対し $O(F) \preceq O(h)$ となる $F \in \mathcal{F}$ を選ぶ．そして，$O(F) = (d,e), s = l-d-e$ とおく．$O(F)$ の定義より $(b_1,b_2,e,d) \in \mathrm{supp}(F)$ となる $b_1,b_2 \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ が存在し，$l_3((b_1,b_2,e,d))+\alpha < 0$ を満たす．この条件から，不等式

$$0 > s\min\{\epsilon^3_{3,1},\epsilon^3_{3,2}\} - (l-d)\epsilon^3_{3,4} + \alpha \tag{3.7}$$

が得られる．$F$ を $K[y_1,y_2]$ 上の多項式と思ったときの $y_3^e y_4^d$ の係数を $f$ とする．

**補題 3.4** ある $u \in K \setminus \{0\}$ に対し，$f = u(y_2-y_1)^s$ となる．

**証明** $f$ は $y_1,y_2$ についての $s$ 次斉次式なので，$f = u_0y_2^s + u_1y_1y_2^{s-1} + \cdots + u_sy_1^s$ $(u_i \in K)$ と表せる．このとき，$i = 1,\ldots,s$ に対し $iu_i + (s-i+1)u_{i-1} = 0$ を示せばよい．これが成り立たない $i$ があったとする．それぞれ $u_{i-1},u_i$ は，単項式 $y_1^{i-1}y_2^{s-i+1}y_3^ey_4^d, y_1^iy_2^{s-i}y_3^ey_4^d$ の $F$ における係数である．それぞれ $y_1^{i-1}y_2^{s-i}y_3^{e+1}y_4^d, y_1^{i-1}y_2^{s-i}y_3^ey_4^{d+1}$ の $F$ における係数を $v,w$ とおく．すると，$E(F)$ における $y_1^{i-1}y_2^{s-i}y_3^ey_4^d$ の係数 $\mu$ は

$$\mu = iu_i + (s-i+1)u_{i-1} + (e+1)v + (d+1)w \tag{3.8}$$

となる．$F \in B$ だから $E(F) = 0$ である．よって $\mu = 0$ となる．また，$e$ の最大性より $v = 0$ である．仮定より $iu_i + (s-i+1)u_{i-1} \neq 0$ だから，$w \neq 0$ である．すなわち，$\mathrm{supp}(F)$ は $b = (i-1, s-i, e, d+1)$ を含む．しかし，(3.7) と $\xi_3 < 1, \epsilon^3_{3,1}, \epsilon^3_{3,2} > 0$ より

$$l_3(b)+\alpha = (s-1)\min\{\epsilon^3_{3,1},\epsilon^3_{3,2}\} - (l-d-1)\epsilon^3_{3,4} + \alpha \tag{3.9}$$

$$= s\min\{\epsilon^3_{3,1},\epsilon^3_{3,2}\} - (l-d)\epsilon^3_{3,4} + \alpha - (1-\xi_3)\min\{\epsilon^3_{3,1},\epsilon^3_{3,2}\} \tag{3.10}$$

は負である．これは $d$ の最大性に矛盾する．故に，$iu_i + (s-i+1)u_{i-1} = 0$ が全ての $i = 1,\ldots,s$ に対して成り立つ．これで補題は示された． □

**補題 3.5** 適当な正整数 $p$ を選ぶと，

$$g = (y_2 - y_1)^s (y_3 - y_2)^{l-d-p} (y_3 - y_1)^{p-s} \tag{3.11}$$

の台の任意の元 $b$ は $l_1(b), l_2(b) \geq 0$ を満たす．

**証明** $r \in \mathbf{R}$ に対して，$b(r) = (r, l-d-r, 0, 0)$ とおく．すると $l_1(b(p)) \geq 0$ を満たす最大の整数 $p$ が存在する．この $p$ が条件を満たすことを示す．まず，$\mathrm{supp}(g)$ は

$$\{b(p), b(p-1), \ldots, b(p-s)\} + \mathbf{Z}_{\geq 0}(-1,0,1,0) + \mathbf{Z}_{\geq 0}(0,-1,1,0) \tag{3.12}$$

に含まれることに注意する．$i = 1, 2$ に対し $l_i((-1,0,1,0)), l_i((0,-1,1,0))$ は非負なので，$l_i(b(p-j))$ が非負であることを $i = 1, 2$ と $j = 0, \ldots, s$ に対して示せばよい．式を見れば $l_1(b(p-j)) \geq 0$ は明らかである．$l_2(b(p-s')) \geq 0$ を満たす最大の整数 $s'$ をとる．$s' \geq s$ を示せば証明は完了する．$v_1 = (l-d)(1-\xi_1), v_2 = (l-d)\xi_2$ とおくと，$i = 1, 2$ に対し $l_i(b(v_i)) = 0$ となる．よって $p, s'$ の定め方から，$v_1 - 1 < p \leq v_1, v_2 \leq p - s' < v_2 + 1$ となる．これより $s' \geq v_1 - v_2 - 2$ が従う．また，(2.5) より $1 - \xi_1 - \xi_2 \geq \xi_3$ が成り立つ．一方，$\alpha' = \alpha / \min\{\epsilon_{3,1}^3, \epsilon_{3,2}^3\}$ とおくと，(3.7) から $(l-d)\xi_3 > l - d - e + \alpha'$ が得られる．$\alpha \geq \min\{\epsilon_{3,1}^3, \epsilon_{3,2}^3\}$ だから $\alpha' \geq 1$ である．これらの不等式から，

$$s' \geq v_1 - v_2 - 2 = (l-d)(1-\xi_1-\xi_2) - 2 \geq (l-d)\xi_3 - 2 \tag{3.13}$$

$$> l - d - e + (\alpha' - 1) + 1 \geq l - d - e - 1 = s - 1 \tag{3.14}$$

が従う．$s, s'$ は整数なので，これは $s' \geq s$ を意味する．よって補題は示された． □

$G = ug(y_4 - y_3)^d, H = F - G$ とおく．任意の $b \in \mathrm{supp}(G)$ は $b' \in \mathrm{supp}(g)$ と $b'' \in \mathrm{supp}((y_4 - y_3)^d)$ の和で表せるが，$i = 1, 2$ に対し $l_i(b'), l_i(b'') \geq 0$ なので $l_i(b) \geq 0$ である．よって，任意の $b \in \mathrm{supp}(H)$ は $l_1(b), l_2(b) \geq 0$ を満たす．さらに，$d < l$ だから $\mathrm{supp}(H)$ は $(0,0,0,l)$ を含む．よって，$F - G \in \mathcal{F}$ である．しかし，$G$ の定め方より $O(H) \preceq O(F)$ かつ $O(H) \neq O(F)$ となる．これは $O(F)$ の選び方に矛盾する．故に，全ての $b \in \mathrm{supp}(F_0)$ が $l_3(b) + \alpha \geq 0$ を満たす $F_0 \in \mathcal{F}$ が存在する．これで補題 3.3 が示され，定理 2.2 の証明は完了した．

# 4　有限生成になるための条件

最後に，(1.2) の形の一般の基本単項式微分の核 $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ が有限生成となるための十分条件を考察する．$m \leq 2$ または $n \leq 2$ または $(m,n)=(3,3)$ の場合には，$K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ は適当な $L_{i,j}^D$ たちによって $K[\mathbf{x}]$ 上生成できるという Khoury の結果がある [3] ($n \leq 3$ のときの有限生成性は [7, Corollary 3.3] からも従う)．

$(m,n)=(3,4)$ の場合には次が成り立つ．

**定理 4.1** $(m,n)=(3,4)$ とする．それぞれ $\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}$ の任意の置換 $\sigma,\tau$ に対し，ある $i \neq j$ と $k$ が存在して $\epsilon_{\tau(i),\tau(j)}^{\sigma(k)} \leq 0$ かつ $\sigma(k)=\tau(i)$ が成り立つと仮定する．このとき，$i=1,2,3,4$ に対し整数 $1 \leq k_i, l_i \leq 4$ が定まり，$K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ は $K[\mathbf{x}]$ 上 $L_{k_i,l_i}^D$ $(i=1,2,3,4)$ で生成できる．

定理 2.2, 4.1 より，$(m,n)=(3,4)$ のときの $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ の有限生成性の問題は，全ての $i \neq j$ に対し $\epsilon_{i,j}^i > 0$ が成り立ち，さらに $\xi_1(D)+\xi_2(D)+\xi_3(D)>1$ となる場合を除いて決着した．

**予想 4.2** $(m,n)=(3,4)$ とする．全ての $i \neq j$ に対し $\epsilon_{i,j}^i > 0$ が成り立ち，さらに $\xi_1(D)+\xi_2(D)+\xi_3(D)>1$ であれば $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ は $K$ 上有限生成性である．

この予想は，ある $1 \leq r < s \leq 3$ に対し $\xi_r(D), \xi_s(D) \geq 1$ ならば正しい．実際，この場合 $K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ は適当な $L_{i,j}^D$ たちにより $K[\mathbf{x}]$ 上生成できる [8]．$\xi_1(D),\xi_2(D),\xi_3(D)<1$ のとき，状況はより複雑になる．$\xi_1(D),\xi_2(D),\xi_3(D)<1$ を満たしながら $\xi_1(D)+\xi_2(D)+\xi_3(D)$ が上から徐々に 1 に近づくように $D$ を次々に取り換えていくと，$K[\mathbf{x}][\mathbf{y}]^D$ を生成するのに必要な元の数は，それに応じて限りなく増大していくと予想している．第 2 節で触れた $D_{1,3}$ の場合，$i=1,2,3$ に対し $\xi_i(D_{1,3})=1/2$ である．

## 参考文献

[1] H. Derksen: *The kernel of a derivation*, J. Pure Appl. Algebra 84 (1993), 13–16.

[2] J. Deveney and D. Finston: *$G_a$-actions on $\mathbf{C}^3$ and $\mathbf{C}^7$*, Comm. Algebra 22 (1994), 6295–6302.

[3] J. Khoury: *On some properties of elementary monomial derivations in dimension six*, J. Pure Appl. Algebra, 156 (2001), 69–79.

[4] H. Kojima and M. Miyanishi: *On Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert*, J. Pure Appl. Algebra 122 (1997), 277–292.

[5] K. Kurano: *Positive characteristic finite generation of symbolic Rees algebra and Roberts' counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert*, Tokyo J. Math. Vol. 16 (1993), 473-496.

[6] K. Kurano: *On finite generation of Rees rings defined by filtrations of ideals*, J. Math. Kyoto Univ. Vol. 34 (1994), 73-86.

[7] S. Kuroda: *A condition for finite generation of the kernel of a derivation*, to appear in J. Algebra.

[8] S. Kuroda: *A generalization of Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert*, preprint.

[9] M. Nagata: "Lectures on the fourteenth problem of Hilbert", Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1965.

[10] P. Roberts: *An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem*, J. Algebra **132** (1990), 461–473.

〒980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉

東北大学大学院理学研究科数学専攻

e-mail: `s98m12@math.tohoku.ac.jp`

# GENERIC $\boldsymbol{A}^*$-FIBRATIONS OVER DISCRETE VALUATION RINGS

NOBUHARU ONODA, S. M. BHATWADEKAR, AND TERUO ASANUMA

## 1. Introduction

Let $(R, \pi R)$ be a DVR with residue field $k$ and quotient field $K$, and let $A$ be an integral domain containing $R$. Then we say that $A$ is a generic $\boldsymbol{A}^*$-fibration over $R$ if

$$A \otimes_R K \cong_K K[X, X^{-1}],$$

where $X$ is an indeterminate. In other words, $A$ is a generic $\boldsymbol{A}^*$-fibration over $R$ if there exists an element $x$ of $A$ such that $x$ is transcendental over $K$ and

$$R[x, \pi^\nu/x] \subseteq A \subseteq K[x, x^{-1}] \tag{1.1}$$

for some $\nu \geqq 0$. Generic $\boldsymbol{A}^*$-fibrations over $R$ are closely related to generic $\boldsymbol{A}^1$-fibrations over $R$. Recall that $A$ is said to be a generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over $R$ if

$$A \otimes_R K \cong_K K[X],$$

namely, $R[x] \subseteq A \subseteq K[x]$ for some $x$ transcendental over $K$. For generic $\boldsymbol{A}^1$-fibrations we have the following theorem (cf. [1]):

**Theorem 1.1.** *Let $A$ be a finitely generated normal generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over $R$. Then there exist finite field extensions $k_1, \ldots, k_r$ of $k$ such that*

$$A/\sqrt{\pi A} \cong_k (k_1 \times \cdots \times k_r)[X].$$

Note that $A/\sqrt{\pi A} \cong_k (A \otimes_R k)_{\mathrm{red}}$. Thus the above theorem means that if $A$ is a finitely generated normal $R$-domain such that the generic fiber is a line, then geometrically the closed fiber is a collection of disjoint lines. The purpose of this note is to give a corresponding result for generic $\boldsymbol{A}^*$-fibrations. Our main theorem is as follows.

**Theorem 1.2.** *Let $A$ be a finitely generated normal generic $\boldsymbol{A}^*$-fibration over $R$. Then there exist finite field extensions $k_1, \ldots, k_r$ of $k$ such that $A/\sqrt{\pi A}$ is $k$-isomorphic to one of the following three rings:*
(1) $(k_1 \times \cdots \times k_r)[X]$;
(2) $(k_1 \times \cdots \times k_r)[X] \times k[X, X^{-1}]$;
(3) $(k_1 \times \cdots \times k_r)[X] \times k[X, Y]/(XY)$.

**Example 1.3.** Let

$$A = R\left[X,\ \pi^{-1}X f_1(X) \cdots f_r(X),\ \pi^\nu/X\right],$$

where $f_1(X), \ldots, f_r(X)$ are polynomials in $R[X]$ such that $\bar{f}_i(X) := f_i(X) \bmod \pi R[X] \in k[X]$ is irreducible with $\bar{f}_i(0) \neq 0$ for each $i$ and $\gcd(\bar{f}_i(X), \bar{f}_j(X)) = 1$ for $i \neq j$. Then $A$ is a normal generic $\boldsymbol{A}^*$-fibration over $R$. Let $k_i = k[X]/(\bar{f}_i(X))$ for each $i$.
(1) If $\nu = 0$, then $A/\sqrt{\pi A} \cong_k (k_1 \times \cdots \times k_r)[X]$.
(2) If $\nu = 1$, then $A/\sqrt{\pi A} \cong_k (k_1 \times \cdots \times k_r)[X] \times k[X, X^{-1}]$.
(3) If $\nu \geqq 2$, then $A/\sqrt{\pi A} \cong_k (k_1 \times \cdots \times k_r)[X] \times k[X, Y]/(XY)$.

**Example 1.4.** For a subset $\Sigma \subseteq \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$, we set

$$R[\Sigma] = R[\pi^i X^j \mid (i,j) \in \Sigma],$$

which is an $R$-subalgebra of $K[X, X^{-1}]$. Let $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ be nonnegative integers such that $\lambda \geqq 1, (\beta, \mu) \neq (0,0)$ and $\lambda/\alpha \geqq \mu/\beta$. Then we set

$$\Delta(\alpha,\beta,\lambda,\mu) = \{(i,j) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} \mid \lambda i + \alpha j \geqq 0,\ \mu i + \beta j \geqq 0\}. \tag{1.2}$$

We write

$$\Delta(\alpha,\lambda) = \Delta(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$$

if $\lambda/\alpha = \mu/\beta$. Let $\Delta = \Delta(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$ and let $A = R[\Delta]$. If $\mu > 0$, then $A$ is a finitely generated normal generic $\boldsymbol{A}^*$-fibration over $R$. Let $\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1$ be nonnegative integers such that $\gcd(\alpha_1, \lambda_1) = \gcd(\beta_1, \mu_1) = 1, \lambda/\alpha = \lambda_1/\alpha_1$ and $\mu/\beta = \mu_1/\beta_1$. Let

$$y = x^{\lambda_1}/\pi^{\alpha_1} \quad \text{and} \quad z = \pi^{\beta_1}/x^{\mu_1}.$$

For an element $f \in A$, we denote by $\bar{f}$ the residue class of $f$ in $A/\sqrt{\pi A}$.
(1) If $\lambda/\alpha = \mu/\beta$, then

$$A/\sqrt{\pi A} = k[\bar{y}, \bar{y}^{-1}] \cong_k k[X, X^{-1}].$$

(2) If $\lambda/\alpha > \mu/\beta$, then

$$A/\sqrt{\pi A} = k[\bar{y}, \bar{z}] \cong_k k[X,Y]/(XY).$$

*Remark* 1.5. If $\mu = 0$, namely if

$$\Delta = \{(i,j) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} \mid \lambda i + \alpha j \geqq 0,\ j \geqq 0\}$$

in the above example, then $A = R[\Delta]$ is a finitely generated normal generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over $R$ such that

$$A/\sqrt{\pi A} = k[\bar{y}] \cong_k k[X].$$

*Remark* 1.6. Let $\Delta_1 = \Delta(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ and $\Delta_2 = \Delta(\alpha_2, \beta_2, \lambda_2, \mu_2)$ be the sets defined in Example 1.4, and let $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Then we have $\Delta = \Delta(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ for some $\alpha, \beta, \lambda, \mu$, and $R[\Delta_1] \cap R[\Delta_2] = R[\Delta]$.

## 2. Proof of Theorem 1.2

In this section we assume that $A$ is a finitely generated normal generic $\boldsymbol{A}^*$-fibration over $R$. Thus there exists an element $x \in A$ satisfying (1.1). We fix such $x$. Let $r$ be the number of minimal prime ideals of $\pi A$, and write

$$\sqrt{\pi A} = P_1 \cap \cdots \cap P_r,$$

where each $P_i$ is a prime ideal of $A$. Then, letting $V_i = A_{P_i}$ for $i = 1, \ldots, r$, we have

$$A = K[x, x^{-1}] \cap V_1 \cap \cdots \cap V_r$$

because $A = A[\pi^{-1}] \cap A_{P_1} \cap \cdots \cap A_{P_r}$. Note that each $V_i$ is a DVR of $K(x)$ dominating $R$. We denote by $v_i$ the valuation of $K(x)$ corresponding to $V_i$, and by $t_i V_i$ the maximal ideal of $V_i$.

**Lemma 2.1.** *Suppose that* $(P_1 \cap \cdots \cap P_s) + (P_{s+1} \cap \cdots \cap P_r) = A$, *where* $1 \leqq s < r$. *Let* $A_1 = K[x, x^{-1}] \cap V_1 \cap \cdots \cap V_s$ *and* $A_2 = K[x, x^{-1}] \cap V_{s+1} \cap \cdots \cap V_r$.
(1) $A_1$ *and* $A_2$ *are finitely generated normal generic* $\boldsymbol{A}^*$*-fibrations over* $R$.
(2) $A/\sqrt{\pi A} \cong_k A_1/\sqrt{\pi A_1} \times A_2/\sqrt{\pi A_2}$.

*Proof.* We give a proof only for (2). Let $I = P_1 \cap \cdots \cap P_s$ and $J = P_{s+1} \cap \cdots \cap P_r$. Then $\sqrt{\pi A} = I \cap J$ and $I + J = A$, so that

$$A/\sqrt{\pi A} \cong_k A/I \times A/J.$$

It thus suffices to show $A/I \cong_k A_1/\sqrt{\pi A_1}$ and $A/J \cong_k A_2/\sqrt{\pi A_2}$. Let $Q_i = t_i V_i \cap A_1$ for $i = 1, \ldots, s$. Then we have

$$\sqrt{\pi A_1} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_s.$$

Let $a \in I$ and $b \in J$ be elements such that $a + b = 1$. Note that

$$A[b^{-1}] = K[x, x^{-1}, b^{-1}] \cap V_1 \cap \cdots \cap V_s = A_1[b^{-1}],$$

because $b \notin P_i$ for $i \leqq s$ and $b \in P_i$ for $i > s$. It then follows that $P_i A[b^{-1}] = Q_i A_1[b^{-1}]$ for $i \leqq s$. In fact, since $Q_i A_1[b^{-1}]$ is a prime ideal of $A_1[b^{-1}] = A[b^{-1}]$, we have $Q_i A_1[b^{-1}] = p_i A[b^{-1}]$ for some prime ideal $p_i$ of $A$. Then

$$p_i = p_i A[b^{-1}] \cap A = Q_i A_1[b^{-1}] \cap A = Q_i \cap A = P_i,$$

as claimed. Hence

$$IA[b^{-1}] = \bigcap_{i=1}^{s} P_i A[b^{-1}] = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i A_1[b^{-1}],$$

which implies

$$IA[b^{-1}] \cap A_1 = Q_1 \cap \cdots \cap Q_s = \sqrt{\pi A_1}.$$

Note that $IA[b^{-1}] \cap A = I$, because $I = \sqrt{I}$ and $b \notin I$. Therefore we have

$$A/I \subseteq A_1/\sqrt{\pi A_1} \subseteq A[b^{-1}]/IA[b^{-1}]. \tag{2.1}$$

On the other hand, since $a + b = 1$ and $a \in I$, it follows that $\bar{b} := b \bmod I = 1$, so that

$$A[b^{-1}]/IA[b^{-1}] = A/I.$$

Hence $A/I = A_1/\sqrt{\pi A_1}$ by virtue of (2.1). Similarly we have $A/J = A_2/\sqrt{\pi A_2}$, which completes the proof. □

**Lemma 2.2.** *Suppose that* $r = 1$ *and let* $B = K[x] \cap V_1$. *If* $v_1(\pi) = \lambda$ *and* $v_1(x) = \alpha$, *then we have*

$$A = B[\pi^\alpha / x^\lambda].$$

*Proof.* Let $y = x^\lambda / \pi^\alpha$. Since $v_1(y) = 0$, we have $y \in B$ and $y^{-1} \in K[x, x^{-1}] \cap V_1 = A$. Thus $B[y^{-1}] \subseteq A$. Conversely, let $f$ be an arbitrary element of $A$. Then $y^n f \in K[x] \cap V_1 = B$ for a sufficiently large integer $n$, which implies $f \in B[y^{-1}]$. Thus $A \subseteq B[y^{-1}]$. □

Let $\Delta = \Delta(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ be the set defined in (1.2). Since $x$ is transcendental over $K$, we have a canonical isomorphism

$$R[\Delta] \cong_R R[\pi^i x^j \mid (i, j) \in \Delta].$$

So, in what follows we identify $R[\Delta]$ with $R[\pi^i x^j \mid (i,j) \in \Delta]$, so that $R[\Delta]$ is an $R$-subalgebra of $K[x, x^{-1}]$.

**Corollary 2.3.** *If $r = 1$, then $A/\sqrt{\pi A} \cong_k k_1[X]$ for some finite field extension $k_1/k$ or $A/\sqrt{\pi A} \cong_k k[X, X^{-1}]$. Moreover, $A/\sqrt{\pi A} \cong_k k[X, X^{-1}]$ if and only if $A = R[\Delta]$ for some $\Delta = \Delta(\alpha, \lambda)$.*

*Proof.* Let $B$ and $y = x^\lambda/\pi^\alpha$ have the same meaning as in Lemma 2.2, and let $y_1 = x^{\lambda_1}/\pi^{\alpha_1}$, where $\alpha_1, \lambda_1$ are nonnegative integers such that $\gcd(\alpha_1, \lambda_1) = 1$ and $\lambda_1/\alpha_1 = \lambda/\alpha$. Since $y = y_1^m$ for some $m > 0$, it follows from Lemma 2.2 that

$$A = B[y^{-1}] = B[y_1^{-1}].$$

Let $C$ be the integral closure of $R[x, y]$ in its quotient field. Then we have $C \subseteq B$ and $C = R[\Delta_0]$, where

$$\Delta_0 = \{(i,j) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} \mid \lambda i + \alpha j \geqq 0,\ j \geqq 0\}.$$

Recall that

$$C/\sqrt{\pi C} = k[\bar{y}_1] \cong_k k[X]$$

(cf. Remark 1.5). Let $Q = \sqrt{\pi B}$ and $Q_0 = Q \cap C$. Then $Q$ and $Q_0$ are prime ideals satisfying $P_1 \cap B = Q$, where $P_1 = \sqrt{\pi A}$. Note that $\sqrt{\pi C} \subseteq Q_0$ because $\pi \in Q_0$.

First suppose that $\sqrt{\pi C} = Q_0$. Then $\mathrm{ht}(Q_0) = 1$, and hence $C_{Q_0}$ is a DVR dominated by $B_Q = V_1$. Thus $C_{Q_0} = B_Q$. Since $C[\pi^{-1}] = B[\pi^{-1}] = K[x]$, it then follows that

$$C = C[\pi^{-1}] \cap C_{Q_0} = B[\pi^{-1}] \cap B_Q = B.$$

Therefore we have

$$A = C[y^{-1}] = R[\Delta],$$

where $\Delta = \Delta(\alpha, \lambda)$. In particular $A/P_1 \cong_k k[X, X^{-1}]$ (cf. Example 1.4).

Next suppose that $\sqrt{\pi C} \neq Q_0$. Then $C/Q_0$ is a finite field extension of $k$, so that $\bar{y}_1 = y_1 \bmod Q \in B/Q$ is algebraic over $k$. On the other hand, by Theorem 1.1 we have $B/Q \cong_k k_1[X]$ for some finite field extension $k_1/k$. It then follows that $\bar{y} \in k_1$, and hence

$$A/P_1 = (B/Q)[\bar{y}^{-1}] = B/Q \cong_k k_1[X].$$

We have thus completed the proof. $\square$

**Lemma 2.4.** *Suppose that $r = 2$. Let $B = K[x] \cap V_1 \cap V_2$ and $C = K[x^{-1}] \cap V_1 \cap V_2$. Then the following conditions are equivalent.*

(1) *$A/\sqrt{\pi A}$ has no nontrivial idempotents.*

(2) *Both $B/\sqrt{\pi B}$ and $C/\sqrt{\pi C}$ have no nontrivial idempotents.*

(3) *$A = R[\Delta]$ for some $\Delta = \Delta(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ with $\lambda/\alpha > \mu/\beta$.*

(4) *$A/\sqrt{\pi A} \cong_k k[X, Y]/(XY)$.*

*Proof.* It suffices to prove (2) $\Rightarrow$ (3). By assumption we may assume that

$$B = K[x] \cap V_1 \subseteq V_2$$

and

$$C = K[x^{-1}] \cap V_2 \subseteq V_1.$$

Let $v_1(x) = \alpha, v_1(\pi) = \lambda, v_2(x) = \beta$ and $v_2(\pi) = \mu$. Set $y = x^\lambda/\pi^\alpha$ and $z = \pi^\beta/x^\mu$. Then $v_1(y) = 0$, and hence $y \in K[x] \cap V_1 = B$. Similarly we have $z \in C$. Since $y \in B \subseteq V_2$, it follows that

$$v_2(y) = \beta\lambda - \alpha\mu \geqq 0,$$

which implies $\lambda/\alpha \geqq \mu/\beta$. Suppose that the equality holds. Then $v_2(y) = 0$, so that $y$ is a unit in $V_2$. Let $f \in K[x, x^{-1}] \cap V_1$ be an arbitrary element. Since

$$y^n f \in K[x] \cap V_1 \subseteq V_2$$

for $n \gg 0$, it then follows that $f \in V_2$. Thus $K[x, x^{-1}] \cap V_1 \subseteq V_2$, and hence $A = K[x, x^{-1}] \cap V_1$. This contradicts $r = 2$. Thus we know that $\lambda/\alpha > \mu/\beta$. Let $Q_1 = P_1 \cap B$. Since $P_1 = t_1 V_1 \cap A$ and $\sqrt{\pi B} = t_1 V_1 \cap B$, it follows that $Q_1 = \sqrt{\pi B}$. Let $D = R[x, y]$, which is a subring of $B$, and let $Q' = Q_1 \cap D$. Then $\operatorname{ht}(Q') = 1$. To see this, note that

$$D/\sqrt{\pi D} = k[\bar{y}] \cong_k k[X].$$

Hence if $\operatorname{ht}(Q') > 1$, then $f(y) \in Q_1$ for some $f(X) \in R[X]$ such that $\bar{f}(X) := f(X) \bmod \pi R[X]$ is an irreducible polynomial in $k[X]$. Since $B = K[x] \cap V_1 \subseteq V_2$, it then follows that $f(y) \in t_2 V_2$, i.e., $v_2(f(y)) > 0$. Thus, letting $a = f(0)$, we have $a \in \pi R$, because $v_2(y) > 0$. Hence $\bar{f}(0) = 0$, and therefore $\bar{f}(X) = X$. This implies $y \in Q_1$, which contradicts $v_1(y) = 0$. Let $E = R[\Delta]$, where $\Delta = \Delta(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$. Note that $E$ coinsides with the integral cosure of $R[x, y, z]$ in its quotient field. In particular, we have $E \subseteq A$, because $R[x, y, z] \subseteq A$ and $A$ is normal. Let $p_1 = P_1 \cap E$ and $p_2 = P_2 \cap E$. Then $\operatorname{ht}(p_1) = 1$. In fact, since $\dim E = 2$, if $\operatorname{ht}(p_1) > 1$, then $p_1$ is a maximal ideal, so that $E/p_1$ is a finite extension field of $k$. Hence $D/Q'$ is also a finite extension field over $k$, because $D \subseteq E$ and $p_1 \cap D = P_1 \cap D = Q'$. This contradicts $\operatorname{ht}(Q') = 1$. Thus $E_{p_1}$ is a DVR dominated by $A_{P_1} = V_1$, and hence $E_{p_1} = V_1$. Similarly we have $E_{p_2} = V_2$. Since $E[\pi^{-1}] = K[x, x^{-1}]$, it thus follows that

$$E = E[\pi^{-1}] \cap E_{p_1} \cap E_{p_2} = K[x, x^{-1}] \cap V_1 \cap V_2 = A,$$

which completes the proof. □

**Lemma 2.5.** *If $r \geqq 3$, then $A/\sqrt{\pi A}$ has a nontrivial idempotent.*

For the proof of the above lemma we need several preliminary lemmas. So, instead of Lemma 2.5, we will prove the following lemma for generic $\boldsymbol{A}^1$-fibrations over $R$.

**Lemma 2.6.** *Let*

$$A = K[x] \cap V_1 \cap \cdots \cap V_r$$

*be a finitely generated normal generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over $R$, where $r$ is the number of minimal prime ideals of $\pi A$. If $r \geqq 2$, then $A/\sqrt{\pi A}$ has a nontrivial idempotent.*

*Proof.* Replacing $A$ by $A \otimes_R \hat{R}$, where $\hat{R}$ is the completion of $R$, we may assume that $R$ is complete. Let $B = K[x] \cap V_1$ and $Q_1 = t_1 V_1 \cap B$. Then $Q_1 = \sqrt{\pi B}$ and $B$ is a finitely generated normal generic $\boldsymbol{A}^1$-fibration over $R$. Note that $A \subseteq B$ and $P_1 = Q_1 \cap A$. Since $B/Q_1 \cong_k k_1[X]$ for some finite field extension $k_1/k$, we know that $B/Q_1$ is integral over $A/P_1$. Now, suppose that $A/\sqrt{\pi A}$ has no nontrivial idempotents, so that

$$P_1 + (P_2 \cap \cdots \cap P_r) \subseteq M$$

for a maximal ideal $M$ of $A$. Then there exists a maximal ideal $N$ of $B$ such that $Q_1 \subseteq N$ and $M = N \cap A$, because $B/Q_1$ is integral over $A/P_1$. We will show that $\mathrm{ht}(MB) = 2$. In fact, if $\mathrm{ht}(MB) = 1$, then $MB \subseteq Q_1$, because $\pi \in MB$ and $\sqrt{\pi B} = Q_1$. It thus follows that

$$M \subseteq MB \cap A \subseteq Q_1 \cap A = P_1,$$

which is a contradiction. Consider local rings $A_M$ and $B_N$, and note that $A_M$ is dominated by $B_N$. Since $\mathrm{ht}(MB) = 2$, it follows that $\sqrt{MB_N} = NB_N$, and hence $\mathrm{length}_k B_N/MB_N$ is finite, because $B/N$ is a finite extension field of $k$. Moreover $A_M$ is excellent, so that $A_M$ is analytically irreducible. Therefore, by Zariski Main Theorem (cf. Theorem 37.4 in [2]), we know that $A_M = B_N$. However this can not be the case, because the number of minimal prime ideals of $\pi A_M$ is $r > 1$, while $\sqrt{\pi B_N}$ is a prime ideal. This completes the proof. □

Now, Theorem 1.2 is an immediate consequence of Lemmas 2.1, 2.4, 2.5, Corollary 2.3 and Remark 1.6.

## References


[1] T. Asanuma and N. Onoda, *Generic $\mathbf{A}^1$-fibrations over discrete valuation rings*, 第 23 回可換環論シンポジウム報告集

[2] M. Nagata, Local Rings, Interscience, New York, 1962.



Faculty of Engineering, Fukui University, Bunkyou 3-9-1, Fukui-shi, 910-8507, Japan
*E-mail address*: onoda@edu00.f-edu.fukui-u.ac.jp

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Homi Bhabha Road, Mumbai-400 005, India
*E-mail address*: smb@math.tifr.res.in

Faculty of Education, Toyama University, 3190 Gofuku, Toyama-shi, 930-8555, Japan
*E-mail address*: asanuma@edu.toyama-u.ac.jp

# Gorenstein 環の AB 性について

荒谷　督司　(岡山大学自然科学研究科)

2001 年の夏に横浜で行われた研究集会において、Huneke は「Gorenstein 環は AB 環であるか？」という問題を出題した。また彼は Jorgensen との論文 [5] において、$R$ が Gorenstein AB 環のとき、任意の有限生成 $R$-加群 $M, N$ に対し、$\mathrm{Ext}^i_R(M,N)=0\ (\forall i \gg 0)$ と $\mathrm{Ext}^i_R(N,M)=0\ (\forall i \gg 0)$ が同値になることを示している。ところで、この AB 環の定義をよく見てみると非可換環論でよく話題にされている finitistic dimension conjecture と関係があることがわかる。そこでこの講演では Huneke や Jorgensen とは違う角度から AB 環をながめ、Gorenstein 環の AB 性について考察してみる。

## 1 Introduction

この講演を通して $(R, m, k)$ を noetherian local ring とする。

この章では AB 環の定義を与え、AB 環と finitistic dimension との関係や、環の正則性および Complete Intersection 性と AB 性との関連についての結果を紹介する。

**定義 1.1** 零でない有限生成 $R$-加群 $M, N$ に対し、$\mathrm{P}_R(M,N)$ を以下のように定める。

$$\mathrm{P}_R(M,N)=\sup\{\, n \mid \mathrm{Ext}^n_R(M,N)\neq 0\,\}$$

また環 $R$ に対し、$\mathrm{FP}(R)$ を以下のように定める。

$$\mathrm{FP}(R)=\sup\{\, \mathrm{P}_R(M,N) \mid M,N\in \mathrm{mod}R,\ \mathrm{P}_R(M,N)<\infty\,\}$$

**定義 1.2** $\mathrm{FP}(R)$ が有限である環を AB 環とよぶ。

一般に $M$ の射影次元 $\mathrm{Pd}\,M=\mathrm{P}_R(M,k)$ であり、さらに $M$ の射影次元が有限ならば $\mathrm{Pd}\,M=\mathrm{P}_R(M,N)\ (\forall N\in \mathrm{mod}R)$ であるから、$\mathrm{P}_R(M,N)$ は $M$ の射影次元の拡張であると言える。また、環 $R$ の finitistic dimension $\mathrm{FPd}(R)$ は、

$$\mathrm{FPd}(R)=\sup\{\, \mathrm{Pd}\,M \mid M\in \mathrm{mod}R,\ \mathrm{Pd}\,M<\infty\,\}$$

と定義されているので、$\mathrm{FP}(R)$ もまた $\mathrm{FPd}(R)$ の拡張であると言える。この意味で、AB 環は拡張された finitistic dimension conjecture が成立している環である。今、$R$ は可

換な noetherian local ring なので、射影次元が有限な加群に対しその値は Auslander-Buchsbaum formula から導くことができる。したがって、$\mathrm{FP}(R) \geq \mathrm{FPd}(R) = \operatorname{depth} R$ であることがわかり、次のことが成立する。

**命題 1.3** $R$ が正則局所環ならば、$R$ は AB 環であり、$\mathrm{FP}(R) = \operatorname{depth} R$ である。

次に $R$ が Complete Intersection のときについてみてみる。

**命題 1.4** [1, Theorem 4.2] $M$, $N$ を有限生成 $R$-加群とする。もし、$\text{CI-}\dim M < \infty$, $\mathrm{P}_R(M,N) < \infty$ ならば $\mathrm{P}_R(M,N) = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M$ である。

この命題より、次のことが導かれる。

**系 1.5** 環 $R$ が Complete Intersection ならば、$R$ は AB 環であり、$\mathrm{FP}(R) = \operatorname{depth} R$ である。

Complete Intersection が AB 環であることがわかったので、次は Gorenstein 環は AB 環であるか？ という Huneke が出題した問題に興味がわく。次の章でこの問題について考えてみる。

# 2 The AB-ness of Gorenstein rings

この章では Gorenstein 環の AB 性について考えてみる。Gorenstein 環の AB 性の判定法として次の結果が得られた。

**定理 2.1** $R$ を Gorenstein ring とする。このとき、次は同値である。

(1) $R$ は AB 環である。

(2) $\mathrm{P}_R(M,N)$ が有限である有限生成 $R$-加群の組 $M, N$ に対し、$\mathrm{P}_R(M,N) = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M$ である。

(2') $\mathrm{P}_R(X,N)$ が有限である極大 Cohen-Macaulay 加群 $X$ 及び有限生成 $R$-加群 $N$ に対し、$\mathrm{P}_R(X,N) = 0$ である。

(3) $\mathrm{P}_R(X,Y)$ が有限である極大 Cohen-Macaulay 加群の組 $X, Y$ に対し、$\mathrm{P}_R(X,Y) = 0$ である。

**証明** (2) $\Rightarrow$ (1): 定義より明らか。

(1) $\Rightarrow$ (3): $0 < \mathrm{P}_R(X,Y) =: p < \infty$ となる極大 Cohen-Macaulay 加群の組 $X$, $Y$ が存在すると仮定する。今 $R$ は Gorenstein ring であるから $\mathrm{G\text{-}dim}\, X = 0$ であるので、$X$ の complete resolution

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_2"] & F_1 \arrow[r, "\partial_1"] & F_0 \arrow[rr, "\partial_0"] \arrow[dr] & & F_{-1} \arrow[r, "\partial_{-1}"] & F_{-2} \arrow[r, "\partial_{-2}"] & \cdots \\
& & & X \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

が存在する。ここで各整数 $i$ に対し、$X_i = \mathrm{Im}\,\partial_i$ とおくと $\mathrm{Ext}_R^{n-i}(X_i,Y) \cong \mathrm{Ext}_R^n(X,Y)$ ($n$, $n-i>0$) であるから、任意の正の整数 $n$ に対し $\mathrm{P}_R(X_{p-n},Y) = n$ が成立する。これは $R$ が AB 環であることに反する。したがって、$\mathrm{P}_R(X,Y) < \infty$ ならば $\mathrm{P}_R(X,Y) = 0$ である。

(3) $\Rightarrow$ (2′): もし $N$ が極大 Cohen-Macaulay 加群ならば (3) より成立しているので、$N$ は極大 Cohen-Macaulay 加群でないとする。$N$ の Cohen-Macaulay approximation $0 \to P \to Y \to N \to 0$ をとる。ここで、$Y$ は極大 Cohen-Macaulay 加群であり、$P$ は射影次元が有限であることに注意する。仮定より、$\mathrm{P}_R(X,N) < \infty$ かつ $\mathrm{P}_R(X,P) = 0 < \infty$ であるので $\mathrm{P}_R(X,Y) = 0 < \infty$ である。したがって $\mathrm{P}_R(X,N) = 0$ である。

(2′) $\Rightarrow$ (2): もし $M$ が極大 Cohen-Macaulay 加群ならば (2′) より成立しているので、$M$ は極大 Cohen-Macaulay 加群でないとする。$M$ の finite projective hull $0 \to M \to P \to X \to 0$ をとる。ここで、$X$ は極大 Cohen-Macaulay 加群であり、$P$ は射影次元が有限で $\mathrm{depth}\, P = \mathrm{depth}\, M$ をみたしていることに注意する。仮定より、$\mathrm{P}_R(M,N) < \infty$ かつ $\mathrm{P}_R(P,N) = \mathrm{depth}\, R - \mathrm{depth}\, P < \infty$ であるので $\mathrm{P}_R(X,N) = 0 < \infty$ である。ここで、$\mathrm{depth}\, P = \mathrm{depth}\, M < \mathrm{depth}\, R$ より、$\mathrm{P}_R(P,N) > 0$ であるから $\mathrm{P}_R(M,N) = \mathrm{P}_R(P,N) = \mathrm{depth}\, R - \mathrm{depth}\, M$ である。

□

この定理より $R$ が Gorenstein AB 環のとき、$\mathrm{FP}(R) = \mathrm{depth}\, R$ であることがわかり、さらに Gorenstein 環の AB 性を確かめるには極大 Cohen-Macaulay 加群のみ考えればいいことがわかる。

**補題 2.2** $R$ を任意の noetherian local ring とし、$M$, $N$ を有限生成 $R$-加群とする。また $x \in m$ を $R$, $M$, $N$ 上非零因子とする。このとき $\mathrm{P}_R(M,N) = \mathrm{P}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{N})$ である。ただし、$\overline{(-)} = (-) \otimes_R R/(x)$ である。

**証明** $F^\bullet : \cdots \to F_1 \to F_0 \to 0$ を $M$ の $R$-free resolution とし、$\overline{F^\bullet} = F^\bullet \otimes_R R/(x)$ とする。$x$ は $R$ かつ $M$ 上非零因子なので $\overline{F^\bullet}$ は $\overline{M}$ の $\overline{R}$-free resolution である。よって、任

意の $i$ に対し、

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{N}) &\cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{F^\bullet},\overline{N}))\\ &\cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(F^\bullet\otimes_R\overline{R},\overline{N}))\\ &\cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(F^\bullet,\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{R},\overline{N})))\\ &\cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(F^\bullet,\overline{N}))\\ &\cong \mathrm{Ext}^i_R(M,\overline{N})\end{aligned}$$

が成立する。よって、$\mathrm{P}_{\overline{R}}(\overline{M},\overline{N})=\mathrm{P}_R(M,\overline{N})$ である。

$x$ はまた $N$ 上非零因子なので、 $0\to N\xrightarrow{x}N\to\overline{N}\to 0$ は exact である。そこで以下の long exact sequence がかける。

$$\begin{array}{rlcl} 0\to & \mathrm{Hom}_R(M,N) & \xrightarrow{x} \mathrm{Hom}_R(M,N) & \to \mathrm{Hom}_R(M,\overline{N})\\ \to & \mathrm{Ext}^1_R(M,N) & \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^1_R(M,N) & \to \mathrm{Ext}^1_R(M,\overline{N})\\ & & \cdots & \\ \to & \mathrm{Ext}^i_R(M,N) & \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^i_R(M,N) & \to \mathrm{Ext}^i_R(M,\overline{N})\\ \to & \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M,N) & \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M,N) & \to \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M,\overline{N})\ \to\cdots \end{array}$$

よって中山の補題より $\mathrm{P}_R(M,N)=\mathrm{P}_R(M,\overline{N})$ である。 □

定理 2.1 と補題 2.2 より、 Gorenstein 環が AB かどうかを確かめるためには regular sequence で割って artinian ring の場合に帰着させることができる。そして、artinian Gorenstein ring の場合には以下の結果を得ている。

**定理 2.3** $R$ を Gorenstein ring とする。もし $m^3=0$ ならば $R$ は AB 環である。

**証明** $m=0$ のとき、 $R$ は体なので成立している。

$m^2=0,\ m\neq 0$ のとき、 $R$ の組成列は $R\supset m=\mathrm{Soc}\,R\ (\cong k)\supset 0$ なので $R$ は Complete Intersection である。よって系 1.5 より $R$ は AB 環である。

$m^3=0,\ m^2\neq 0$ のとき。 $R$ は artinian Gorenstein ring なので、 $R$-加群が projective であることと injective であることと free であることは同値であることに注意する。ここで、次の条件 $(*)$ を考える。

$(*)$ $\mathrm{P}_R(M,N)$ が有限である任意の有限生成 $R$-加群の組 $M,N$ に対し、$M$ または $N$ のうち少なくとも一方は free である。

もし $R$ が $(*)$ をみたすならば $R$ は AB 環となるので、以下 $R$ は $(*)$ をみたさないとする。すなわち、どちらも free でない有限生成 $R$-加群 $M,N$ で、$\mathrm{P}_R(M,N)$ が有限であるものが存在すると仮定する。また、必要なら $M$ の syzygy をとることで、$\mathrm{P}_R(M,N)=0$ とできる。$M=M'\oplus F,\ N=N'\oplus G$ (ここで、$F,G$ は free で、$M',N'$ は free sub-module を持たない) と直和分解しておくと $\mathrm{P}_R(M,N)=\mathrm{P}_R(M',N')$ であるので、$M,N$ は free sub-module を持たないとしてよい。また $M$ の G-次元は 0 であるから、 $M$ は何かある free module $F$ に埋め込めて、$M \subset mF$ である。よって、$m^2M \subset m^3F = 0$ であるから $mM$ は $k$-ベクトル空間である。したがって、次の完全列がとれる。

$$0 \to k^a \to M \to k^b \to 0 \tag{1}$$

ここで、$a = \dim_k mM$ であり、$b$ は $M$ の極小生成系の数である。$N$ に関しても同様にして、

$$0 \to k^c \to N \to k^d \to 0 \tag{2}$$

$c = \dim_k mN$ であり、$d$ は $N$ の極小生成系の数である完全列がとれる。(2) より、$\mathrm{Ext}_R^i(M, k^d) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, k^c)$ $(i > 0)$ が得られ、$M$ の betti number に関して等式 $d\beta_i(M) = c\beta_{i+1}(M)$ $(i > 0)$ が成立する。したがって、(もし必要ならさらに $M$ の syzygy をとっておくことで) $\beta_n(M) = (d/c)^n b$ $(n \geq 0)$ とかける。ここで、各 $\beta_n(M)$ は 0 でない整数なので、$c \leq d$ かつ $c$ は $d$ の約数である。したがって、$b = \beta_0(M) \leq \beta_1(M) \leq \cdots \beta_n(M) \leq \cdots$ である。$b$ の取り方より、$M$ の syzygy をとると、 $0 \to \Omega M \to R^b \to M \to 0$ である。今 $R$ は artinian Gorenstein ring であるから、$(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-, R)$ は exact functor である。したがって、$0 \to M^* \to R^b \to (\Omega M)^* \to 0$ は exact であり、$(\Omega M)^*$ の極小生成系の数は $b$ である。そこで、(1) や (2) と同様の exact sequence をとると、

$$0 \to k^e \to (\Omega M)^* \to k^b \to 0 \tag{3}$$

$(e = \dim_k m(\Omega M)^*)$ であり、また $\mathrm{P}_R(N^*, (\Omega M)^*) = 0$ であるから、上と同様にして、$e \leq b$ が得られる。一方、(3) に $(-)^*$ をとると、$0 \to k^b \to \Omega M \to k^e \to 0$ より、$\Omega M$ の極小生成系の数は $e$ である。したがって、$e = \beta_0(\Omega M) = \beta_1(M) \geq \beta_0(M) = b$ より、$b = e$ であり、$c = d$, $a = b$ が導かれる。よって、$0 \to k^b \to M \to k^b \to 0$, $\beta_n(M) = b$ $(n \geq 0)$ より、$k$ の betti number を計算することで $R$ が Complete Intersection であることがわかる。したがって系 1.5 より $R$ は AB 環である。 □

上の定理の証明においていずれの場合も Complete Intersection に帰着させているが、渡辺敬一先生に教えていただいた結果で、ある体上の正則行列から $m^3 = 0$ をみたす Gorenstein ring で Complete Intersection でないものが作れるという事実より、 $m^3 = 0$ をみたす Gorenstein ring で Complete Intersection でないものがたくさんあることがわかる。もちろんこれらの環は条件 $(*)$ をみたしている。また定理の証明では、$R$ が $m^2 \neq 0$, $m^3 = 0$ で、条件 $(*)$ をみたさないときに、free でない有限生成 $R$-加群 $M$ で、以下の条件をみたすものが存在することを示している。

(1) $0 \to k^b \to M \to k^b \to 0$ は exact である。

(2) $M$ の betti number は全て $b$ である。

(3) $M$ の syzygy は、$0 \to \Omega M \to R^b \to M \to 0$ であり、$0 \to k^b \to \Omega M \to k^b \to 0$ が exact である。

したがって、 $R$ の長さをはかると $b \cdot \ell(R) = \ell(\Omega M) + \ell(M) = 4b$ より、$\ell(R) = 4$ である。このことから $R$ が artinian Gorenstein ring で $m^3 = 0$ のとき、$\ell(R) \neq 4$ ならば常に条件 $(*)$ をみたすことがわかる。

$R$ が artinian Gorenstein ring で $m^3 = 0$ かつ $\ell(R) = 4$ のとき、下の例のように条件 $(*)$ をみたさない例がある。しかし、$m^3 = 0$ かつ $\ell(R) = 4$ ならば常に条件 $(*)$ をみたさないのかどうかについてはわかっていない。

**例 2.4** $k$ を体とし、$R = k[x,y]/(x^2,y^2)$ とする。このとき、$R$ は artinian Gorenstein ring で $(x,y)^2 = (xy) \neq 0$, $(x,y)^3 = 0$ かつ $\ell(R) = 4$ である。$M = R/(x)$, $N = R/(y)$ とおくと、$M, N$ は free でなく、$\mathrm{P}_R(M,N) = 0$ である。

例 2.4 で、$k$ を一般の noetherian local ring としても $M$, $N$ は射影次元が無限で、$\mathrm{P}_R(M,N) = 0$ である。このことから $M$ や $N$ の射影次元が無限でも $\mathrm{P}_R(M,N) = 0$ となる例はたくさんあることがわかる。

# 参考文献


[1] T.Araya and Y.Yoshino, Remarks on a depth formula, a grade inequality and a conjecture of Auslander, *Comm. Algebra* **26** (1998), no. 11, 3793-3806.

[2] M.Auslander and M.Bridger, *Stable module theory*, Mem. Amer. Math. Soc. 94 (1969).

[3] M.Auslander and R.-O.Buchweitz, The homological theory of Cohen-Macaulay approximations, *Mem. Soc. Math. de France* **38** (1989), 5–37

[4] W.Bruns and J.Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge studies in advanced Math. 39 (1993).

[5] C.Huneke and D.Jorgensen, Symmetry in the vanishing of Ext over Gorenstein rings, *preprint*.

# On vanishing of local cohomology modules and the Lichtenbaum-Hartshorne theorem Part I

柿崎　和英　(岡山大学大学院自然科学研究科)
高橋　亮　　(岡山大学大学院自然科学研究科)
吉野　雄二　(岡山大学理学部)

以下特に断らないかぎり, $R$ は可換ネーター環を表すものとする. $I, J$ を $R$ のイデアルとし, $M$ を（必ずしも有限生成でない）$R$ 加群とする. 次のような $M$ の部分集合を考える.

$$\Gamma_{I,J}(M) := \{\, x \in M \mid I^r x \subseteq Jx \quad ({}^{\exists}r \geq 0)\}$$

容易に分かるように, $\Gamma_{I,J}(M)$ は常に $M$ の部分 $R$ 加群であり, $\Gamma_{I,J}$ は $R$ 加群の圏から $R$ 加群の圏への左完全加法共変関手を定める. $\Gamma_{I,J}$ の $i$ 次右導来関手を $H^i_{I,J}$ と書き表す. $J = (0)$ の場合には $H^i_{I,J}$ は通常の $I$ にサポートを持つ局所コホモロジー関手 $H^i_I$ に一致していることに注意する.

以下, 与えられた $R$ 加群 $M$ に対し, $H^i_{I,J}(M)$ がいつ消滅するか？ということについて議論していく. 普通の局所コホモロジー加群 $H^i_I(M)$ の消滅が Spec$(R)$ の閉部分集合 $V(I)$ の位相的・幾何的性質に関わるのに対して, $H^i_{I,J}(M)$ の消滅は

$$W(I,J) := \{\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I^r \subseteq J + \mathfrak{p} \quad ({}^{\exists}r \geq 0)\}$$

という Spec$(R)$ の部分集合の位相的・幾何的性質に関わってくる. $W(I,J)$ は specialization で閉じた集合ではあるが, 必ずしも Spec$(R)$ の閉部分集合ではないことを注意しておく.

**命題 1** 次の条件は同値である.

(1) $\Gamma_{I,J}(M) = M$

(2) $\mathrm{Min}(M) \subseteq W(I,J)$

(3) $\mathrm{Ass}(M) \subseteq W(I,J)$

(4) $\mathrm{Supp}(M) \subseteq W(I,J)$

命題 1 の同値条件を満たす $R$ 加群 $M$ を $(I,J)$-torsion 加群と呼ぶ.

**証明** (2), (3), (4) の同値性は明らか.

(1) $\Rightarrow$ (3) を示す. 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ をとると, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$ ($^\exists x \in \Gamma_{I,J}(M)$) と書ける. このとき, 仮定から $I^r \subseteq \mathrm{Ann}(x)+J = \mathfrak{p}+J$ ($^\exists r \geq 0$) が成り立ち, (3) が成り立つ.

次に, (4) $\Rightarrow$ (1) を示す. 任意の $x \in M$ をとる. 仮定から $\mathrm{Min}(Rx) \subseteq \mathrm{Supp}(Rx) \subseteq \mathrm{Supp}(M) \subseteq W(I,J)$ が成り立つ. $\mathrm{Min}(Rx) = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_s\}$ とおく. このとき, 各 $1 \leq i \leq s$ に対し $I^{t_i} \subseteq J + \mathfrak{p}_i$ ($^\exists t_i \geq 0$) となる. よって $t = t_1 + \cdots + t_s$ とおくと, $I^t \subseteq J + (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s)$ が成り立つ. 一方, $\sqrt{\mathrm{Ann}(x)} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s \supseteq \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s$ から $(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s)^u \subseteq \mathrm{Ann}(x)$ ($^\exists u \geq 0$) を得る. 故に, $I^{tu} \subseteq J + \mathrm{Ann}(x)$ となり (4) が成り立つ. $(Q.E.D)$

**系 2** $x \in M$ に対して, 次の条件は同値である.

(1) $x \in \Gamma_{I,J}(M)$

(2) $\mathrm{Supp}(Rx) \subseteq W(I,J)$

**命題 3** 次の条件は同値である.

(1) $\Gamma_{I,J}(M) \neq 0$

(2) $\mathrm{Ass}(M) \cap W(I,J) \neq \emptyset$

**証明** (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. 仮定より, $\mathrm{Ass}(M) \supseteq \mathrm{Ass}(\Gamma_{I,J}(M)) \neq \emptyset$ である. $\Gamma_{I,J}(M)$ は $(I,J)$-torsion なので命題 1 から $W(I,J) \supseteq \mathrm{Ass}(\Gamma_{I,J}(M))$ が成り立つ. 故に, $\mathrm{Ass}(M) \cap W(I,J) \neq \emptyset$ となる. 次に, (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. 仮定から, $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ かつ $I^r \subseteq J + \mathfrak{p}$ ($^\exists r \geq 0$) を満たす $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ がとれる. このとき, $0 \neq \bar{1} \in \Gamma_{I,J}(R/\mathfrak{p}) \hookrightarrow \Gamma_{I,J}(M)$ となるから, (1) が成り立つ. $(Q.E.D)$

**命題 4** $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対し,

$$\Gamma_{I,J}(E_R(R/\mathfrak{p})) = \begin{cases} E_R(R/\mathfrak{p}) & (\text{if } \mathfrak{p} \in W(I,J)) \\ 0 & (\text{if } \mathfrak{p} \notin W(I,J)) \end{cases}$$

**証明** まず $\mathfrak{p} \in W(I,J)$ のときは, $\mathrm{Ass}(E_R(R/\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\} \subseteq W(I,J)$ と, 命題 1 から $\Gamma_{I,J}(E_R(R/\mathfrak{p})) = E_R(R/\mathfrak{p})$ を得る. 次に $\mathfrak{p} \notin W(I,J)$ のときは, $\mathrm{Ass}(E_R(R/\mathfrak{p})) \cap W(I,J) = \{\mathfrak{p}\} \cap W(I,J) = \emptyset$ と, 命題 3 から $\Gamma_{I,J}(E_R(R/\mathfrak{p})) = 0$ を得る. $(Q.E.D)$

**命題 5** (1) $M$ が $(I,J)$-torsion のとき, 各 $E^i$ が $(I,J)$-torsion であるような $M$ の入射分解 $E^\bullet$ が存在する. 従ってとくに, $H^i_{I,J}(M) = 0$ ($^\forall i > 0$) である.

(2) (a) $H^i_{I,J}(\Gamma_{I,J}(M)) = 0$ ($^\forall i > 0$)

$$\text{(b)}\quad H^i_{I,J}(M/\Gamma_{I,J}(M)) = \begin{cases} 0 & (\text{if } i = 0) \\ H^i_{I,J}(M) & (\text{if } i > 0) \end{cases}$$

(3) $\Gamma_{I,J}(H^i_{I,J}(M)) = H^i_{I,J}(M)$ ($^\forall i \geq 0$)

**証明** (1) $\Gamma_{I,J}(E(M)) = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in W(I,J)} E(R/\mathfrak{p})^{\dim_{\kappa(\mathfrak{p})}\mathrm{Hom}(\kappa(\mathfrak{p}),E(M)_\mathfrak{p})}$ が命題 4 より得られる. $E^0 = \Gamma_{I,J}(E(M))$ とおく. このとき, 完全列 $0 \to M \to E^0 \to M^1 \to 0$ を得る. $M^1$ が $(I,J)$-torsion であることを示せば, この作業を繰り返すことで帰納的に $\Gamma_{I,J}(E^i) = E^i$ を満たす $E^\bullet$ が作れる.

一般に, 任意の $R$ 加群の完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対して, $Y$ が $(I,J)$-torsion であるための必要十分条件は $X, Z$ が $(I,J)$-torsion であることである. これは, $\mathrm{Supp}(Y) = \mathrm{Supp}(X) \cup \mathrm{Supp}(Z)$ と命題 1 から導ける. 故に, $M_1$ が $(I,J)$-torsion になることがわかる.

(2) (a) は, $\Gamma_{I,J}(M)$ が $(I,J)$-torsion であることと, (1) から得られる. (b) は, 完全列 $0 \to \Gamma_{I,J}(M) \to M \to M/\Gamma_{I,J}(M) \to 0$ と, (a) から得られる.

(3) $H^i_{I,J}(M)$ の定義を考えることで得られる. ($Q.E.D$)

**定理 6** $M$ を有限生成 $R$ 加群とする. このとき,

$$\inf\{\, i \mid H^i_{I,J}(M) \neq 0\} = \inf\{\, \operatorname{depth} M_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in W(I,J)\}$$

が成り立つ.

この定理は $\inf\{\, i \mid H^i_I(M) \neq 0\} = \operatorname{grade}(I,M) = \inf\{\, \operatorname{depth} M_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in V(I)\}$ の拡張といえる.

**証明** $n = \inf\{\, \operatorname{depth} M_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in W(I,J)\}$ とおく. $\mathfrak{p} \in W(I,J)$ をとると, $n \leq \operatorname{depth} M_\mathfrak{p} = \inf\{\, i \mid \mu_i(\mathfrak{p},M) \neq 0\}$ だから,

$$\Gamma_{I,J}(E^i(M)) = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in W(I,J)} E(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)} = 0 \ (i < n)$$

となる．故に，$H^i_{I,J}(M)=0\ (i<n)$ となり $\inf\{\ i \mid H^i_{I,J}(M)\neq 0\}\geq n$ が成り立つ．

次に，$H^n_{I,J}(M)\neq 0$ を示す．上記の議論より，

$$\Gamma_{I,J}(E^\bullet(M))=\big(0\to\cdots\to 0\to\Gamma_{I,J}(E^n(M))\to\Gamma_{I,J}(E^{n+1}(M))\to\cdots\big)$$

となっていることに注意する．したがって、次の完全列からなる可換図式が成り立つ．

$$\begin{array}{ccccccc} 0\longrightarrow H^n_{I,J}(M)\longrightarrow & \Gamma_{I,J}(E^n(M)) & \longrightarrow & \Gamma_{I,J}(E^{n+1}(M)) \\ & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ E^{n-1}(M)\xrightarrow{d^{n-1}} & E^n(M) & \xrightarrow{d^n} & E^{n+1}(M) \end{array}$$

$\mathrm{Ker}(d^n)=\mathrm{Im}(d^{n-1})\subseteq E^n(M)$ が本質的拡大であることに注意すれば，$H^n_{I,J}(M)=\Gamma_{I,J}(E^n(M))\cap\mathrm{Ker}(d^n)\neq 0$ が導ける．$(Q.E.D)$

**命題 7** $(R,\mathfrak{m})$ を局所環とし，$M$ を有限生成 $R$ 加群とする．このとき，次の条件は同値である．

(1) $M$ は $(I,J)$-torsion である．

(2) $H^i_{I,J}(M)=0\ (^\forall i>0)$

**証明** (1) $\Rightarrow$ (2) は，命題5(1) で示した．(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．$N=M/\Gamma_{I,J}(M)$ とおくと，命題5(3) より，$H^i_{I,J}(N)=0\ (i\geq 0)$ が成り立つ．$N\neq 0$ と仮定する．$\mathfrak{m}\in W(I,J)$ より，$\inf\{\ \mathrm{depth}N_\mathfrak{p}\mid\mathfrak{p}\in W(I,J)\}\leq\mathrm{depth}N_\mathfrak{m}=\mathrm{depth}N<\infty$ が成り立つ．定理6より，$\inf\{\ \mathrm{depth}N_\mathfrak{p}\mid\mathfrak{p}\in W(I,J)\}=\inf\{\ i\mid H^i_{I,J}(N)\neq 0\}$ だから，$H^i_{I,J}(N)\neq 0\ (^\exists i\leq\mathrm{depth}N_\mathfrak{m})$ となり矛盾が生じる．よって $N=0$ である．すなわち，(1) が示せた．$(Q.E.D)$

**命題 8** $M$ が有限生成 $R$ 加群で，$J\subseteq\sqrt{\mathrm{Ann}M}$ であると仮定する．このとき，$H^i_{I,J}(M)=H^i_I(M)\ (^\forall i)$ が成り立つ．

**証明** $E^i(M)=\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(M)}E(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)}$ と書ける．命題4より $\Gamma_{I,J}(E^i(M))=\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(M)\cap W(I,J)}E(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)}$ となる．仮定より，$J^s\subseteq\mathrm{Ann}(M)\ (^\exists s\geq 0)$ である．

$\mathrm{Supp}(M)\cap W(I,J)=\mathrm{Supp}(M)\cap V(I)$ と主張する．これが言えれば，$\Gamma_{I,J}(E^i(M))=\Gamma_I(E^i(M))\ (^\forall i)$ となり，命題が示せる．以下，この主張を

示す. $V(I) \subseteq W(I,J)$ だから $(\supseteq)$ は明らか. $(\subseteq)$ について. 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M) \cap W(I,J)$ をとると, $\mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}$ かつ $I^r \subseteq J + \mathfrak{p}$ $({}^{\exists}r)$ である. 従って, $I^{rs} \subseteq J^s + \mathfrak{p} \subseteq \mathrm{Ann}(M) + \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ となるから, $\mathfrak{p} \in V(I^{rs}) = V(I)$ である. $(Q.E.D)$

**定理 9** $(R, \mathfrak{m})$ を局所環とし, $I + J$ は $\mathfrak{m}$-primary イデアルで, $M$ は有限生成 $R$ 加群であるとする. このとき,

$$\sup\{\, i \mid H^i_{I,J}(M) \neq 0\} = \dim M/JM$$

が成り立つ.

この定理は $\sup\{\, i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\} = \dim M$ の拡張になっている.

**証明** $n = \dim M/JM$ とおく. $I + J$ が $\mathfrak{m}$-primary であることより, $H^i_{I,J}(M) = H^i_{\mathfrak{m},J}(M)$ が成り立つ. よって $I = \mathfrak{m}$ としてよい.

$H^i_{\mathfrak{m},J}(M) = 0$ $(i > n)$ を $n$ に関する帰納法で示す.

$n = 0$ のとき : 命題 5 より $\Gamma_{\mathfrak{m},J}(M) = M$ を示せば十分. 任意の $x \in M$ をとる. Artin-Rees の補題より, $J^sM \cap Rx \subseteq Jx$ $({}^{\exists}s \geq 0)$ が成り立つ. $0 = \dim M/JM = \dim M/J^sM$ だから, $\mathfrak{m}^rM \subseteq J^sM$ $({}^{\exists}r \geq 0)$ となる. 故に, $\mathfrak{m}^rx \subseteq J^sM \cap Rx \subseteq Jx$ となり, $x \in \Gamma_{\mathfrak{m},J}(M)$ がわかる.

$n > 0$ のとき : $M/\Gamma_{\mathfrak{m},J}(M)$ を $M$ と置き換えることで, $\Gamma_{\mathfrak{m},J}(M) = 0$ としてよい. 任意に $i > n$ を取り固定する. $H^i_{\mathfrak{m},J}(M) \neq 0$ と仮定する. 命題 5(3) より, $\Gamma_{\mathfrak{m},J}(H^i_{\mathfrak{m},J}(M)) \neq 0$ であるから, 命題 3 より $J + \mathfrak{p}$ が $\mathfrak{m}$-primary となるような $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(H^i_{\mathfrak{m},J}(M))$ が存在する. また同じく命題 3 より, 任意の $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$ に対し $J + \mathfrak{q}$ は $\mathfrak{m}$-primary ではないので, 任意の $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$ に対して $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$ となる. 一方, 任意の $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(M/JM)$ に対して $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$ が成り立つ. なぜならば, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(M/JM)$ を満たす $\mathfrak{q}$ が存在すると仮定すると, $J + \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ が成り立つ. $J + \mathfrak{p}$ は $\mathfrak{m}$-primary だから, $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ となり, $\dim M/JM = 0$ を得る. これは $n > 0$ であることに矛盾する.

こうして $\mathfrak{p}$ はどの $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M) \cap \mathrm{Min}(M/JM)$ にも含まれないことがわかった. 従って, $M$ 上の非零因子でかつ $M/JM$ の s.s.o.p になる $x \in \mathfrak{p}$ がとれる. 完全列 $0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$ から, 完全列 $H^{i-1}_{\mathfrak{m},J}(M/xM) \to H^i_{\mathfrak{m},J}(M) \xrightarrow{x} H^i_{\mathfrak{m},J}(M)$ を得る. 帰納法の仮定より, $H^{i-1}_{\mathfrak{m},J}(M/xM) = 0$ だから, $x$ は $H^i_{\mathfrak{m},J}(M)$ 上の非零因子となる. これは

$x \in \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(H^i_{\mathfrak{m},J}(M))$ であることに矛盾する. 故に, $H^i_{\mathfrak{m},J}(M) = 0$ となる. 以上により, $H^i_{\mathfrak{m},J}(M) = 0$ ($^\forall i > n$) が示せた.

最後に $H^n_{\mathfrak{m},J}(M) \neq 0$ を示す. 完全列 $0 \to JM \to M \to M/JM \to 0$ から, 完全列 $H^n_{\mathfrak{m},J}(M) \to H^n_{\mathfrak{m},J}(M/JM) \to H^{n+1}_{\mathfrak{m},J}(JM)$ を得る. 上記の議論から $H^{n+1}_{\mathfrak{m},J}(JM) = 0$ である. 一方, 命題 8 から $H^n_{\mathfrak{m},J}(M/JM) = H^n_{\mathfrak{m}}(M/JM) \neq 0$ である. 故に, $H^n_{\mathfrak{m},J}(M) \neq 0$ である. $(Q.E.D)$

# 参考文献


[1] M.H.Bijan-Zadeh, A common generalization of local cohomology theories, *Glasgow Math. J.* **21** (1980), no. 2, 173–181.

[2] M.P.Brodmann and R.Y.Sharp, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press, 1998.

[3] K.Kakizaki, R.Takahashi, and Y.Yoshino, in preparation.

[4] P.Schenzel, Explicit computations around the Lichtenbaum-Hartshorne vanishing theorem, *Manuscripta Math.* **78** (1993), no. 1, 57–68.

# ON VANISHING OF LOCAL COHOMOLOGY MODULES AND THE LICHTENBAUM-HARTSHORNE THEOREM PART II

KAZUHIDE KAKIZAKI, RYO TAKAHASHI, AND YUJI YOSHINO

Throughout this note, we assume that all rings are commutative and noetherian. Let $(R, \mathfrak{m})$ be a local ring, and $J$ be an ideal of $R$. In this note, we shall observe the relationship between $H^i_{\mathfrak{m},J}$ and $H^i_J$.

Suppose that $R$ admits the dualizing complex $D^\bullet_R$. We denote by $K_M$ the canonical module of $M$, i.e. $K_M = H^{d-t}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, D^\bullet_R))$, where $d = \dim R$ and $t = \dim M$. Here we consider the uniqueness of the canonical module of a module.

**Proposition 1.** *Let $S \to R$ be a surjective homomorphism of noetherian local rings admitting the dualizing complexes $D^\bullet_S$ and $D^\bullet_R$ respectively. Then, for a finitely generated $R$-module $M$, there is a natural isomorphism*

$$\mathrm{Ext}^b_S(M, D^\bullet_S) \cong \mathrm{Ext}^a_R(M, D^\bullet_R),$$

*where $a = \dim R - \dim_R M$ and $b = \dim S - \dim_S M$. Hence, up to isomorphism, the canonical module of $M$ regarded as an $R$-module coincides with that of $M$ regarded as an $S$-module.*

*Proof.* Since $S$ has the dualizing complex, we see from [6, Theorem 1.2] that there exists a surjective homomorphism from a Gorenstein local ring $T$ into the ring $S$. Let us put $r = \dim R$, $s = \dim S$, $t = \dim T$, and $n = \dim_R M = \dim_S M$. Then one easily sees that $D^\bullet_S \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_T(S, T)[t-s]$ and that $D^\bullet_R \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_T(R, T)[t-r]$. Hence we have

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(M, D^\bullet_S) &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(M, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_T(S,T)[t-s]) \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_T(M, T)[t-s] \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_T(R,T))[t-s] \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, D^\bullet_R[r-t])[t-s] \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, D^\bullet_R)[r-s]. \end{aligned}$$

Thus, we obtain $\mathrm{Ext}^{s-n}_S(M, D^\bullet_S) \cong \mathrm{Ext}^{r-n}_R(M, D^\bullet_R)$. □

Let $M, N$ be finitely generated $R$-modules. We set

$$H^i_J(M, N) = \varinjlim_k \mathrm{Ext}^i_R(M/J^k M, N),$$

and

$$\mathrm{Assh}_R M = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R M \mid \dim R/\mathfrak{p} = \dim_R M\}.$$

Recall that for an integer $n \geq 0$, we say that $M$ satisfies the condition $(S_n)$ provided $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \geq \inf\{n, \dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}\}$.

**Theorem 2.** *Let $R$ be a Gorenstein local ring of dimension $d$, $J$ be an ideal of $R$, and $M$ be a finitely generated $R$-module of dimension $t$. Suppose that* $\mathrm{Ass}_R M = \mathrm{Assh}_R M$ *and that $M$ satisfies $(S_{n+1})$ for some $n \geq 0$. Then*

$$H_J^{t-i}(K_M) \cong H_J^{d-i}(M, R)$$

*for all $0 \leq i \leq n$.*

*Proof.* Since a module satisfying $(S_i)$ also satisfies $(S_{i-1})$, it suffices to show that $H_J^{t-n}(K_M) \cong H_J^{d-n}(M, R)$.

Note that $\mathrm{grade}_R M = d - t$. Take a maximal $R$-sequence $\boldsymbol{y} = y_1, y_2, \cdots, y_{d-t}$ in $\mathrm{Ann}_R M$. Replacing $R$ by $R/\boldsymbol{y}R$, we may assume that $t = d$.

Let $S = R \ltimes M$ be the trivial extension of $R$ by $M$. Since $S$ is isomorphic to $R \oplus M$ as an $R$-module, the canonical module $K_S$ of the ring $S$ is isomorphic to $K_R \oplus K_M$ as an $R$-module. Hence we obtain the natural isomorphisms of $R$-modules

$$\begin{cases} H_J^{d-n}(K_S) \cong H_J^{d-n}(R) \oplus H_J^{d-n}(K_M), & \text{and} \\ H_J^{d-n}(S, R) \cong H_J^{d-n}(R) \oplus H_J^{d-n}(M, R). \end{cases}$$

Thus we have only to show that $H_J^{d-n}(K_S) \cong H_J^{d-n}(S, R)$.

Note that

$$\begin{aligned} H_J^{d-n}(S, R) &= \varinjlim{}_k \mathrm{Ext}_R^{d-n}(S/J^k S, R) \\ &\cong \varinjlim{}_k \mathrm{Ext}_S^{d-n}(S/J^k S, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S(R, S)) \\ &\cong \varinjlim{}_k \mathrm{Ext}_S^{d-n}(S/J^k S, D_S^\bullet) \\ &= H_J^{d-n}(D_S^\bullet). \end{aligned}$$

On the other hand, there exists a chain map $H_J^{d-n}(K_S) \to H_J^{d-n}(D_S^\bullet)$ induced by the augumentation $K_S = H^0(D_S^\bullet) \to D_S^\bullet$. We consider the following spectral sequence.

$$E_2^{pq} = H_J^p(H^q(D_S^\bullet)) \Rightarrow H_J^{p+q}(D_S^\bullet).$$

*Claim.* $\dim_R \mathrm{Ext}_R^q(S, R) < d - n - q$ for any $q > 0$.

If this claim is true, then $H_J^p(H^q(D_S^\bullet)) \cong H_J^p(\mathrm{Ext}_R^q(S, R)) = 0$ for all integers $p, q$ with $p + q = d - n$ and $q > 0$. Hence the above spectral sequence degenerates, and we will have $H_J^{d-n}(H^0(D_S^\bullet)) \cong H_J^{d-n}(D_S^\bullet)$, as desired.

So, in the rest, we shall prove the claim. First, we show that $S$ satisfies $(S_{n+1})$ (as an $R$-module). For this, take $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R S$. We want to prove that $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} S_\mathfrak{p} \geq \inf\{n + 1, \dim_{R_\mathfrak{p}} S_\mathfrak{p}\}$. Note that $S_\mathfrak{p} \cong R_\mathfrak{p} \oplus M_\mathfrak{p}$ as an $R_\mathfrak{p}$-module. If $M_\mathfrak{p} = 0$, then $S_\mathfrak{p} \cong R_\mathfrak{p}$, so the desired inequality actually holds. Suppose $M_\mathfrak{p} \neq 0$. Then we have $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} S_\mathfrak{p} = \inf\{\mathrm{depth}\, R_\mathfrak{p}, \mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}\} = \mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \geq \inf\{n+1, \dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}\}$. Since $\dim_{R_\mathfrak{p}} S_\mathfrak{p} = \dim R_\mathfrak{p}$, it is enough to show that $\dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = \dim R_\mathfrak{p}$. Put $r = \dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$. Then there exists a saturated prime chain $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$ with $\mathrm{Ann}_R M \subseteq \mathfrak{p}_0$. As $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Min}_R M \subseteq \mathrm{Ass}_R M =$

$\mathrm{Assh}_R M$, we have $\dim R/\mathfrak{p}_0 = d$. Note that $R$ is catenary because $R$ is Gorenstein. Hence we see that $\dim R/\mathfrak{p} = d - r$. Therefore $\dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = \dim R_\mathfrak{p}$, as desired. Thus $S$ satisfies $(S_{n+1})$.

Suppose that $\dim_R \mathrm{Ext}^q_R(S,R) \geq d-n-q$ for some $q > 0$. Then there exists $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R \mathrm{Ext}^q_R(S,R)$ such that $\dim R/\mathfrak{p} \geq d-n-q$. Hence we have $\mathrm{Ext}^q_{R_\mathfrak{p}}(S_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) \neq 0$ and $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leq n+q$. Therefore it follows from the local duality theorem that $H^{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}-q}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(S_\mathfrak{p}) \cong \mathrm{Ext}^q_{R_\mathfrak{p}}(S_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p})^\vee \neq 0$. Thus, we obtain $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} S_\mathfrak{p} \leq \mathrm{ht}\,\mathfrak{p} - q \leq n$. On the other hand, since $S$ satisfies $(S_{n+1})$, we have $\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} S_\mathfrak{p} = \dim_{R_\mathfrak{p}} S_\mathfrak{p} = \dim R_\mathfrak{p} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}$. Therefore we must have $q \leq 0$, contradiction. This contradiction proves the claim. $\square$

Let $R$ be a Gorenstein local ring of dimension $d$, $J$ an ideal of $R$, and $M$ a finitely generated $R$-module of dimension $t$. Then it is easy to see that $\dim K_M = \dim M = t$, $\mathrm{Ass}\, K_M = \mathrm{Assh}\, K_M$, and that $K_M$ satisfies $(S_2)$. Hence by the above theorem, we obtain

$$H^{t-i}_J(K_{K_M}) \cong H^{d-i}_J(K_M, R)$$

for $i = 0, 1$. On the other hand, the following proposition holds.

**Proposition 3.** *Let $R$ be a noetherian local ring having the dualizing complex $D^\bullet_R$, $M$ be a finitely generated $R$-module of dimension $t$. Then*

$$H^t_J(K_{K_M}) \cong H^t_J(M).$$

*Proof.* Since $R$ has the dualizing complex, $R$ is a homomorphic image of a Gorenstein local ring by [6, Theorem 1.2], hence so is $\overline{R} := R/\mathrm{Ann}\, M$. There exists a surjective homomorphism $\phi : A \to \overline{R}$ such that $A$ is a Gorenstein local ring of dimension $t$. Put $\mathfrak{a} = \phi^{-1}(J\overline{R})$. Replacing $R, J$ by $A, \mathfrak{a}$ respectively, we may assume that $R$ is a $t$-dimensional Gorenstein local ring. Then note that $K_M = M^*$ and $K_{K_M} = M^{**}$, where $(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-, R)$. Let us denote by $f$ the natural homomorphism from $M$ to $M^{**}$, and set $K = \mathrm{Ker} f$, $L = \mathrm{Im} f$, and $C = \mathrm{Coker} f$. It follows from [1, Proposition 2.6] that $K \cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tr}M, R)$ and $C \cong \mathrm{Ext}^2_R(\mathrm{tr}M, R)$, where $\mathrm{tr}M$ denotes the Auslander transpose of $M$.

Here, we claim that $\dim \mathrm{Ext}^i_R(X, R) \leq t-i$ for any finitely generated $R$-module $X$ and $i \geq 0$. In fact, take $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\,\mathrm{Ext}^i_R(X,R)$. Then we have $\mathrm{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(X_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) \neq 0$. Since $R_\mathfrak{p}$ is Gorenstein, we see that $i \leq \dim R_\mathfrak{p} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}$. Hence we obtain $\dim R/\mathfrak{p} = d - \mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leq d - i$.

It follows from this claim that $\dim K \leq d-1$ and $\dim C \leq d-2$. On the other hand, from the short exact sequences

$$\begin{cases} 0 \to K \to M \to L \to 0 \quad \text{and} \\ 0 \to L \to M^{**} \to C \to 0, \end{cases}$$

one obtains the following two exact sequences.

$$\begin{cases} H_J^d(K) \to H_J^d(M) \to H_J^d(L) \to H_J^{d+1}(K) \quad \text{and} \\ H_J^{d-1}(C) \to H_J^d(L) \to H_J^d(M^{**}) \to H_J^d(C). \end{cases}$$

Since the both sides of these sequences are zero, one sees that $H_J^d(M) \cong H_J^d(L) \cong H_J^d(M^{**})$. $\square$

Combining the isomorphism given in the above part of the proposition with that given in the proposition leads us to the following corollary.

**Corollary 4.** *Let $R$ be a Gorenstein local ring of dimension $d$, $J$ be an ideal of $R$, and $M$ be a finitely generated $R$-module of dimension $t$. Then*

$$H_J^t(M) \cong H_J^d(K_M, R)$$

**Theorem 5.** *Let $(R, \mathfrak{m})$ be a Gorenstein local ring of dimension $d$, $J$ be an ideal of $R$, and $M$ be a finitely generated $R$-module. Then*

$$H_J^d(M, R)^\vee \cong \Gamma_{\mathfrak{m},J}(\widehat{M^J}),$$

*where $\widehat{M^J}$ denotes the $J$-adic completion of $M$.*

*In particular, if $R$ is complete, then*

$$H_J^d(M, R)^\vee \cong \Gamma_{\mathfrak{m},J}(M).$$

*Proof.* Set $S = \widehat{R^J}$ and $N = \widehat{M^J}$. Note that $S$ is a noetherian ring and $N$ is a finitely generated $S$-module. Since $N/J^kN \cong M/J^kM$ for $k > 0$, we have

$$\begin{array}{rcl} H_J^d(M,R)^\vee & = & (\varinjlim_k \mathrm{Ext}_R^d(M/J^kM, R))^\vee \\ & \cong & \varprojlim \Gamma_{\mathfrak{m}}(M/J^kM) \\ & \cong & \varprojlim \Gamma_{\mathfrak{m}}(N/J^kN) \\ & \hookrightarrow & \varprojlim N/J^kN \\ & \cong & N. \end{array}$$

We would like to show that the image of the above composite map $f : H_J^d(M, R)^\vee \hookrightarrow N$ is isomorphic to $\Gamma_{\mathfrak{m},J}(N)$.

Let $y \in \mathrm{Im} f$. Applying the Artin-Rees lemma, we see that $(JS)^r N \cap Sy \subseteq (JS)y$ for some $r > 0$. On the other hand, it follows from the choice of $y$ that the image of $y$ in $N/J^kN$ belongs to $\Gamma_{\mathfrak{m}}(N/J^kN)$ for each $k > 0$. Hence we have $\mathfrak{m}^s y \subseteq J^r N$ for some $s > 0$. Thus we get $\mathfrak{m}^s y \subseteq J^r N \cap Sy \subseteq Jy$, that is, $y \in \Gamma_{\mathfrak{m},J}(N)$.

Conversely, let $y \in \Gamma_{\mathfrak{m},J}(N)$. Then $\mathfrak{m}^t y \subseteq Jy$ for some $t > 0$. Hence we have $\mathfrak{m}^{t^k} y \subseteq J^k y \subseteq J^k N$ for any $k > 0$. Therefore for each $k > 0$ the image of $y$ in $N/J^kN$ belongs to $\Gamma_{\mathfrak{m}}(N/J^kN)$, which says that $y \in \mathrm{Im} f$. $\square$

**Proposition 6.** *Let $R \to R'$ be a surjective homomorphism of noetherian rings, and let $I, J$ be ideals of $R$. Put $I' = IR'$ and $J' = JR'$,* *and let $M'$ be an $R'$-module. Then, for any integer $i$, there is a natural isomorphism*

$$H^i_{I,J}(M') \cong H^i_{I',J'}(M')$$

*of $R'$-modules.*

*Proof.* For any integer $i$, set $T^i(-) = H^i_{I,J}(-)$. We shall check that $T^i$ is the $i$-th right derived functor of $\Gamma_{I',J'}$. It is clear that $T^0(M') = \Gamma_{I',J'}(M')$ for any $R'$-module $M'$, and that there is a long exact sequence $0 \to T^0(L') \to T^0(M') \to T^0(N') \to T^1(L') \to \cdots$ for a given short exact sequence $0 \to L' \to M' \to N' \to 0$ of $R'$-modules. So we have only to show that $T^i(E') = 0$ for every $R'$-injective module $E'$ and every integer $i > 0$. Since $T^i$ maps direct sums to direct sums, it suffices to prove that

$$T^i(E_{R'}(R'/\mathfrak{p}')) = 0$$

for any $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} R'$ and any $i > 0$.

Fix a prime ideal $\mathfrak{p}'$ of $R'$. Note that there exists an ideal $\mathfrak{a}$ of $R$ such that $R' \cong R/\mathfrak{a}$. Under this isomorphism, $\mathfrak{p}'$ is isomorphic to $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ for some $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Put $X' = E_{R'}(R'/\mathfrak{p}')$. Since $\Gamma_{I,J}(X') = \Gamma_{I',J'}(X')$, we see that $X'$ is $(I', J')$-torsion if $\mathfrak{p}' \in W(I', J')$ and that $X'$ is $(I', J')$-torsion-free if $\mathfrak{p}' \notin W(I', J')$. If $X'$ is $(I', J')$-torsion, then we have $T^i(X') = H^i_{I,J}(X') = 0$ for all $i > 0$ (cf. Part I), as desired. So suppose that $\mathfrak{p}' \notin W(I', J')$. Then $\mathfrak{p} \notin W(I, J)$. Take an $R$-free resolution $F_\bullet$ of $R'$ and set $X = E_R(R/\mathfrak{p})$. As the $R$-module $X$ is injective, one sees that the complex $\operatorname{Hom}_R(F_\bullet, X)$ is an $R$-injective resolution of $\operatorname{Hom}_R(R', X) \cong X'$. Because $\mathfrak{p} \notin W(I, J)$, we have $\Gamma_{I,J}(X) = 0$. It follows from this that the complex $\Gamma_{I,J}(\operatorname{Hom}_R(F_\bullet, X))$ is a null complex. Consequently we get $T^i(X') = H^i_{I,J}(X') \cong H^i(\Gamma_{I,J}(\operatorname{Hom}_R(F_\bullet, X))) = 0$ for every $i > 0$. $\square$

From the above propositions, we can prove the following corollary, which is essentially shown in [7]. We should note that it holds without assuming that the local ring $R$ is Gorenstein.

**Corollary 7.** *Let $(R, \mathfrak{m})$ be a local ring admitting the dualizing complex $D^\bullet_R$, $J$ be an ideal of $R$, and $M$ be a finitely generated $R$-module of dimension $t$. Then*

$$H^t_J(M)^\vee \cong \Gamma_{\mathfrak{m},J}((K_M)^{\widehat{J}}).$$

*Proof.* Since $R$ admits the dualizing complex, there exists a surective homomorphism $\phi : S \to R$ such that $S$ is a Gorenstein local ring ([6, Theorem 1.2]). Set $\mathfrak{a} = \phi^{-1}(J)$ and $e = \dim S$. Let us denote by $\mathfrak{n}$ the unique maximal ideal of $S$. Then, applying Corollary 4, Theorem 5, and Proposition 6, we obtain the following.

$$
\begin{aligned}
H_J^t(M)^\vee &= \operatorname{Hom}_R(H_\mathfrak{a}^t(M), E_R(R/\mathfrak{m})) \\
&\cong \operatorname{Hom}_R(H_\mathfrak{a}^t(M), \operatorname{Hom}_S(R, E_S(S/\mathfrak{n}))) \\
&\cong \operatorname{Hom}_S(H_\mathfrak{a}^t(M), E_S(S/\mathfrak{n})) \\
&\cong \operatorname{Hom}_S(H_\mathfrak{a}^e(K_M, S), E_S(S/\mathfrak{n})) \\
&\cong \Gamma_{\mathfrak{n},\mathfrak{a}}(\widehat{(K_M)}^{\mathfrak{a}}) \\
&\cong \Gamma_{\mathfrak{m},J}(\widehat{(K_M)}^{\mathfrak{a}}) \\
&\cong \Gamma_{\mathfrak{m},J}(\widehat{(K_M)}^{J}).
\end{aligned}
$$

□

This corollary actually gives not only an easy and explicit proof of the Lichtenbaum-Hartshorne vanishing theorem but also another proof of a special case of the Peskine-Szpiro intersection theorem.

**The Lichtenbaum-Hartshorne Vanishing Theorem.** *Let $R$ be a noetherian local ring, $J$ an ideal of $R$, and $M$ a finitely generated $R$-module of dimension $t$. Then the following conditions are equivalent.*

i) $H_J^t(M) = 0$.
ii) $\dim \widehat{R}/J\widehat{R} + \mathfrak{P} > 0$ *for any* $\mathfrak{P} \in \operatorname{Assh}_{\widehat{R}} \widehat{M}$.

*Proof.* Replacing $R$ by $\widehat{R}$, we may assume that $R$ is complete. Moreover, arguing along the same lines as in the first part of the proof of Proposition 3, we may also assume that $R$ is a Gorenstein local ring of dimension $t$. Then one obtains $H_J^t(M) \cong H_J^t(K_M, R) \cong \Gamma_{\mathfrak{m},J}(K_M)^\vee$ by Corollary 4 and 7. Hence we see that the condition i) is equivalent to the condition that $K_M$ is $(\mathfrak{m}, J)$-torsion-free. It follows from Part I that this is also equivalent to the condition that $\operatorname{Ass} K_M \cap W(\mathfrak{m}, J) = \emptyset$. Noting that $\operatorname{Ass} K_M = \operatorname{Assh} M$, one sees that this is equivalent to the condition ii). □

**Corollary 8** (Peskine-Szpiro). *Let $R$ be a noetherian local ring of prime characteristic $p$, and let $M, N$ be finitely generated $R$-modules such that $M \otimes_R N$ is of finite length. Suppose that $N$ is cyclic. Then*

$$\dim_R M \le \operatorname{pd}_R N.$$

*Proof.* Replacing $R$ by $\widehat{R}$, we may assume that $R$ is complete. Since $N$ is cyclic, it is isomorphic to $R/J$, where $J = \operatorname{Ann} N$. Moreover, since $M \otimes_R N$ is of finite length, it is easy to see that $\operatorname{Ann} M + J$ is an $\mathfrak{m}$-primary ideal of $R$. Hence we have $\operatorname{Supp} K_M \subseteq \operatorname{Supp} M \subseteq W(\mathfrak{m}, J)$. Therefore the $R$-module $K_M$ is $(\mathfrak{m}, J)$-torsion. It thus follows from Corollary 7 that $H_J^t(M)^\vee \cong \Gamma_{\mathfrak{m},J}(K_M) = K_M \neq 0$, where $t = \dim M$. On the other hand, since from definition $H_J^t(M) \cong \varinjlim_e \operatorname{Ext}_R^t(R/J^{[p^e]}, M)$, we have $\operatorname{Ext}_R^t(R/J^{[p^e]}, M) \neq 0$, so $t \le \operatorname{pd}_R R/J^{[p^e]}$, for $e \gg 0$. Since [3, Exercise 8.2.9] yields that $\operatorname{pd}_R R/J^{[p^e]} = \operatorname{pd}_R R/J$, we see that $t \le \operatorname{pd}_R N$, as desired. □

We end this note by stating a conjecture, which actually holds in the case when the ideal $J$ is generated by an $R$-sequence.

**Conjecture 9.** Let $(R, \mathfrak{m})$ be a complete Gorenstein local ring of dimension $d$, $J$ be an ideal of $R$, and $M$ be a finitely generated $R$-module. Then

$$H^{d-i}_{\mathfrak{m},J}(M)^{\widehat{\ }J} \cong H^i_J(M,R)^\vee$$

for any integer $i$.

## References


[1] M. Auslander and M. Bridger, *Stable module theory*, Memoirs of the American Mathematical Society, **94**, 1969.

[2] M.H. Bijan-Zadeh, A common generalization of local cohomology theories, *Glasgow Math. J.* **21** (1980), no. 2, 173–181.

[3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings, revised version*, Cambridge University Press, 1998.

[4] M.P. Brodmann and R.Y. Sharp, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press, 1998.

[5] K. Kakizaki, R. Takahashi, and Y. Yoshino, in preparation.

[6] T. Kawasaki, On Macaulayfication of Noetherian schemes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), 2517–2552.

[7] P. Schenzel, Explicit computations around the Lichtenbaum-Hartshorne vanishing theorem, *Manuscripta Math.* **78** (1993), no. 1, 57–68.



Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University, Okayama 700-8530, Japan

*E-mail address*: kakizaki@math.okayama-u.ac.jp

Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University, Okayama 700-8530, Japan

*E-mail address*: takahasi@math.okayama-u.ac.jp

Faculty of Science, Okayama University, Okayama 700-8530, Japan

*E-mail address*: yoshino@math.okayama-u.ac.jp

# G-dimension 0 の加群について

**吉野雄二**
岡山大学理学部

## 1 Introduction

G-dimension の概念は Auslander and Bridger [1] によって導入され、多くの性質が調べられているにもかかわらず、G-dimension が有限な加群を系統的に構成したような文献は数少ない。論文 Yoshino [8] では、このような加群をたくさん構成することを目標の一つとした。実際、ある場合には連続パラメーターを含むような G-dimension 0 の直既約加群の同型類の族を構成できる。本稿では [8] の概説を試みたい。

もし $R$ が Gorenstein 局所環ならば、$R$ 加群が G-dimension 0 をもつ必要十分条件はそれが maximal Cohen-Macaulay 加群となることである。従って、Gorenstein 環上の maximal Cohen-Macaulay 加群の圏が満たす多くの条件が、一般の環上の G-dimension 0 の加群の圏でも成立すると期待するのは自然である。これが、 G-dimension 0 の加群を考察しようとする動機である。しかしながら、G-dimension 0 の加群の連続的な族を構成することの結果として、ある場合には、G-dimension 0 の加群の圏が有限生成加群の圏の部分圏として contravariantly finite でないことが示されてしまう。この意味で、G-dimension 0 の加群が maximal Cohen-Macaulay 加群の素直な拡張とは考えられない。

G-dimension の定義と簡単な性質について §2 で復習する。とくに重要な注意として、$(R, \mathfrak{m})$ が Artin 局所環で $\mathfrak{m}^2 = (0)$ を満たす、あるいは、もっと一般的に $R$ が Cohen-Macaulay local ring with minimal multiplicity とするなら、$R$ 上には自由加群以外に G-dimension 0 の加群はないということが証明できる。それゆえ、次に簡単な例として、我々は主に局所環 $(R, \mathfrak{m})$ で $\mathfrak{m}^3 = (0)$ を満足するものを考える。§3 では、このような局所

環 $R$ が自由でない G-dimension 0 の加群を持つための必要条件を与える。大雑把にいえば、このような環はホモロジー的に一通りであることが証明できる。すなわち。$R$ は Koszul 代数でその Poincaré 級数、 Bass 級数、Hilbert 級数などは一意的に定まってしまう。

§4 では主に Artin 局所環で nontrivial deformation を持つ場合を考える。このときには、前節で与えた必要条件は自由でない G-dimension 0 の加群が存在するための十分条件にもなる。驚くことに、このような環 $R$ は次のような形をしているものに限る：$R = S/fS$、但し $S$ は1次元の Cohen-Macaulay local ring with minimal multiplicity で $f$ は次数が2の非零因子である。さらに、このような形の環上では非常に具体的に G-dimension 0 の直既約加群の同型類の連続パラメーターを含んだ族が構成できる（§5）。§6 では G-dimension 0 の加群の圏が必ずしも contavariantly finite でないことの証明を与える。

## 2 Preliminaries for G-dimension

以下、$(R, \mathfrak{m}, k)$ は可換 Noether 局所環で、ここで考えるすべての加群は有限生成とする。

**Definition 2.1** $R$-加群 $M$ が次の条件を満たすとき、$M$ は G-dimension 0 をもつという。

(1) 自然な写像 $M \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R)$ は同型。

(2) $\mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0$ for all $i > 0$.

(3) $\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R) = 0$ for all $i > 0$.

これは次のような自由加群からなる完全列があることと同じである。

$$F_\bullet : \cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to \cdots ,$$

ただし、$\mathrm{Hom}_R(F_\bullet, R)$ も完全で、$M \cong \mathrm{Coker}\,(F_1 \to F_0)$ が成り立つ。この完全列 $F_\bullet$ のことを $M$ の complete resolution という。

**Definition 2.2** $R$-加群 $M$ と整数 $n$ に対して、その第 $n$ シジジー加群 $\Omega^n_R(M)$ が G-dimension 0 をもつとき、$M$ は高々 G-dimension $n$ をもつといい、$\text{G-dim}_R M \leqq n$ と表す。もし、このような整数 $n$ が存在しないならば、$\text{G-dim}_R M = \infty$ と表す。

後に必要となる G-dimension の性質を Auslander-Bridger [1] から引用する。

**Proposition 2.3** (1) もし G-$\dim_R M < \infty$ ならば G-$\dim_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M$ である。

(2) 局所環 $R$ に対して次の条件は同値である:

- $R$ は Gorenstein 環である。
- すべての加群 $M$ に対して G-$\dim_R M < \infty$ となる。
- G-$\dim_R R/\mathfrak{m} < \infty$.

(3) $x \in \mathfrak{m}$ が $R$ と $M$ の両方の上の非零因子ならば、G-$\dim_R M =$ G-$\dim_{R/xR} M/xM$ が成り立つ。

(4) $x \in \mathfrak{m}$ が $R$ 上の非零因子で $xM = 0$ を満たすならば、G-$\dim_R M =$ G-$\dim_{R/xR} M + 1$ が成立する。

**Proposition 2.4** $(R, \mathfrak{m})$ が局所環で $\mathfrak{m}^2 = (0)$ を満たし、かつ Gorenstein 環でないとする。このとき、$R$ 上の G-dimension 0 の加群はすべて自由加群である。

Proof. $M$ を直既約 $R$ 加群で G-$\dim_R M = 0$ とする。complete resolution を考えて $M$ を自由加群に埋め込むことができる。それを $M \subset F$ とする。もし、$x \in M - \mathfrak{m}F$ なる元があれば、$Rx$ は $F$ の、それゆえ $M$ の、直和因子となる。$M$ は直既約と仮定したのだから、このときは $M \cong R$ となってしまう。そこで、$M \subseteq \mathfrak{m}F$ と仮定しよう。$\mathfrak{m}^2 = (0)$ だから、このときには $\mathfrak{m}M = 0$ である。それゆえ、$M \cong R/\mathfrak{m}$ でなくてはならない。($M$ は直既約だから。) 結果として、G-$\dim_R R/\mathfrak{m} = 0$ となり、Proposition 2.3(2) から $R$ は Gorenstein 環となってしまう。■

**Corollary 2.5** $(R, \mathfrak{m})$ が minimal multiplicity をもつ Cohen-Macaulay 局所環で、Gorenstein 環でないとする。このとき、$R$ 上の G-dimension 0 の加群はすべて自由加群である。

Proof. $M$ を $R$ 加群で G-$\dim_R M = 0$ と仮定する。Proposition 2.3(1) より、$M$ は maximal Cohen-Macaulay 加群であることに注意する。局所環 $R$ のパラメーター系 $\underline{x}$ で $\underline{x}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ となるものを取り、$\overline{R}$、$\overline{M}$

でそれぞれ $R/\underline{x}R$、$M/\underline{x}M$ を表すことにする。$\overline{R}$ ではその極大イデアルの２乗は０であることに注意しよう。一方で、Proposition 2.3(3) より、$\text{G-dim}_{\overline{R}}\overline{M} = 0$ である。よって、$\overline{M}$ は自由 $\overline{R}$ 加群である。$r = \dim_k(M \otimes_R k) = \dim_k(\overline{M} \otimes_{\overline{R}} k)$（但し、$k = R/\mathfrak{m}$）とおいて、$M$ の minimal free cover をとると、

$$0 \to N \to R^r \xrightarrow{\pi} M \to 0,$$

となるが、$\pi \otimes_R \overline{R}$ は同型である。さらに、ここで $\mathrm{Tor}_1^R(M, \overline{R}) = 0$ なので、$N \otimes_R \overline{R} = 0$ でなくてはならい。結果として $N = 0$ が得られ、それゆえ $M \cong R^r$ となる。■

# 3 Local rings with $\mathfrak{m}^3 = (0)$

**Theorem 3.1** $(R, \mathfrak{m})$ を non-Gorenstein 局所環で $\mathfrak{m}^3 = (0)$, $\mathfrak{m}^2 \neq (0)$ を満たすとする。簡単のために、$R$ は $R/\mathfrak{m}$ と同型な体 $k$ を含むとする。さらに、$r = \dim_k \mathrm{Hom}_R(k, R)$ と置く。$R$ 上には自由でない加群 $M$ で $\text{G-dim}_R M = 0$ となるものが存在すると仮定する。このとき、次のことが成立する。

(1) $R$ は自然に斉次次数環の構造 $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2$ をもつ。ただし、$R_0 = k$、$\dim_k R_1 = r + 1$、$\dim_k R_2 = r$ である。とくに、$R$ の Hilbert series は、$H_R(t) = (1 + t)(1 + rt)$ で、かつ $(0 :_R \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^2$ となる。

(2) 上の次数付けで $R$ は Koszul 代数となり、その Poincaré series は次で与えられる。

$$P_R(t) = \frac{1}{(1 - t)(1 - rt)}$$

(3) $R$ の Bass series は次で与えられる。

$$B_R(t) = \frac{r - t}{1 - rt}$$

(4) $R$ 上の G-dimension 0 の加群 $M$ は自然に次数加群の構造を持つ。もし $M$ が自由加群を直和因子に含まないなら、$M$ は２個の次数成分しか持たない、すなわち $M = M_0 \oplus M_1$ と表される。ここで、

$b=\dim_k M_0$ と置くと、$b$ は $M$ の最小生成元の個数で、$\dim_k M_1 = rb$ が成り立つ。とくに、$\ell_R(M)=b(1+r)$ である。さらに、$M$ は次の型の自由分解を持つ：

$$\cdots \to R(-n-1)^b \to R(-n)^b \to \cdots \to R(-1)^b \to R^b \to M \to 0.$$

PROOF. $M$ は自由でない $R$ 加群で G-$\dim_R M=0$ とする。必要なら直和因子をとって $M$ は直既約であると仮定して良い。証明は各段に分けて行う。各段の証明は易しいが、詳しくは [9] を参照してください。

(第１段) まず $\mathfrak{m}^2 M=0$ となることを示す。

(第２段) $\mu_i = \dim_k \mathrm{Ext}^i_R(k,R)$ $(i \geqq 0)$ と置いて、$a \geqq b$ かつ $a\mu_i = b\mu_{i+1}$ $(i \geqq 1)$ が成立することを示す。

(第３段) $M^* = \mathrm{Hom}_R(M,R)$ と置いて、等式 $\mu_1 = r^2-1$ と $\ell_R(M^*) = \ell_R(M)$ を示す。

(第４段) 等式 $a=rb$ かつ $\mu_i = r^{i-1}\mu_1 = r^{i+1}-r^{i-1}$ $(i \geqq 1)$ を示す。とくに、Bass series については次のようになる。

$$B_R(t) = \sum_{i \geqq 0} \mu_i t^i = r + \sum_{i \geqq 1} (r^{i+1}-r^{i-1})t^i = \frac{r-t}{1-rt}$$

(第５段) $M$ は $b$ 個の元で生成されるので、次のような完全列がある。

$$0 \to \Omega M \to R^b \to M \to 0,$$

ここで $\Omega M$ は $M$ の第１シジジーである。このとき、$\mathfrak{m}\Omega M = \mathfrak{m}^2 R^b$ となることを示す。

(第６段) $\Omega M$ も丁度 $b$ 個の元で生成され、さらに等式 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = r+1$ かつ $\dim_k \mathfrak{m}^2 = r$ が成立することを示す。

(第７段) $R$ が自然に $k$ 上の次数付き環の構造 $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2$ を持ち、$R_0 \cong k$, $\dim_k R_1 = r+1$, $\dim_k R_2 = r$ となることを示す。さらに、$M$ も自然に次数付き $R$ 加群の構造 $M = M_0 \oplus M_1$ を持ち、$\dim_k M_0 = b$, $\dim_k M_1 = rb$ となる。

(第８段) 次数付き $R$ 加群 $M$ は次のような型の linear free resolution : を持つことを示す。

$$\cdots \to R(-n-1)^b \to R(-n)^b \to \cdots \to R(-2)^b \to R(-1)^b \to R^b \to M \to 0$$

とくに、次の等式が成立する。

$$\dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M,k)_j = \begin{cases} b & (i=j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

(第9段) 任意の整数 $i$ と $j$ に対して、$\beta_{ij} = \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(k,k)_j$ と置くとき、次の等式が成立する。

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1+r+r^2+\cdots+r^i & (i=j \geqq 0), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

とくに次数付き環 $R$ は Koszul 代数であり、その Poincaré 級数は

$$P_R(t) = \frac{1}{(1-t)(1-rt)}$$

である。

以上の各段によって証明は終了する。■

# 4 Local rings with nontrivial deformation

以下では、Artinian な斉次次数環を考える。すなわち、$R$ は多項式環の斉次イデアルによる剰余環で、$R = k[X_0, X_1, \ldots, X_r]/I$ と表される。ただし、各変数 $X_i$ の次数は1で、$I$ は斉次イデアルである。以下、$\mathfrak{m}$ は極大斉次イデアル $(X_0, X_1, \ldots, X_r)$ を表す。

**Definition 4.1** 斉次 Artin 次数環 $R$ が **nontrivial deformation** をもつとは、正次元 $d$ の斉次 Cohen-Macaulay 次数環 $S$ と $S$ の斉次正則列 $f_1, f_2, \ldots, f_d$ で $deg(f_i) \geqq 2$ かつ $R \cong S/(f_1, f_2, \ldots, f_d)S$ となるものが存在する時をいう。

$R$ が nontrivial deformation を持つときには、Theorem 3.1 で与えた条件は必要であるばかりでなく十分条件であることが分かる。実際に次の定理が成立するが、その証明については [9] を参照してください。

**Theorem 4.2** $R$ を体 $k$ 上の斉次次数環で、Gorenstein 環でないとする。さらに $R$ は nontrivial deformation をもつと仮定する。このとき、次の条件は同値である。

(1) $R$ 上には自由でない G-dimension 0 の加群が存在し、 $\mathfrak{m}^3 = (0)$ が成立する。

(2) $R$ の Hilbert series はある整数 $r \geqq 2$ によって次のように与えられる。

$$H_R(t) = (1+t)(1+rt)$$

(3) minimal multiplicity を持つ 1 次元の Cohen-Macaulay 斉次次数環 $S$ と、その次数が 2 の斉次正則元 $f$ があって、 $R \cong S/fS$ と表される。

さらに、条件 (3) のもとでは、任意の $R$ 加群 $M$ について次の等式が成立する。

$$\text{G-dim}_R\, M = \text{CI-dim}_R\, M = \text{pd}_S\, M - 1 \ \ (\leqq \infty) \tag{4.1}$$

**Example 4.3** 任意の整数 $r \geqq 2$ について Theorem 4.2 の条件を満たす例は存在する。たとえば、

$$S = k[X_0, X_1, \ldots, X_r]/I_2 \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \cdots & X_{r-1} & X_r \\ X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_r & X_0 \end{pmatrix}$$

とすると、 $S$ が Cohen-Macaulay ring of dimension one で、minimal multiplicity を持つことを見るのは易しい。$f$ をこの $S$ の任意の次数 2 の元 $(\neq 0)$ として、 $R = S/fS$ と置けばよい。

**Example 4.4** Veliche [6] は次のような例を与えた。

$$R = k[x,y,z,w]/(x^2, xy-zw, xy-w^2, xz-yw, xw-y^2, xw-yz, xw-z^2),$$

として、 $R$-加群 $M$ を次の完全列によって定義する。

$$\cdots \to R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & x \\ w & y \end{pmatrix}} R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & -x \\ -w & z \end{pmatrix}} R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & x \\ w & y \end{pmatrix}} R^2 \to M \to 0$$

このとき、 $\text{G-dim}_R\, M = 0$ かつ $\text{CI-dim}_R\, M = \infty$ が成立する。$\mathfrak{m}^3 = (0)$ が成立するので、Theorem 3.1 によって $R$ は確かに Koszul 代数である。しかし、Theorem 4.2 によれば、 $R$ は nontrivial deformations を持たないことがわかる。

# 5 Continuous family of modules of G-dimension 0

以下では、$S$ を体 $k$ 上の1次元の斉次 Cohen-Macaulay 次数環で、minimal multiplicity を持つものとする。さらに、$f$ は $S$ の次数が2の斉次正則元で、$R \cong S/fS$ とする。

**Theorem 5.1** $R$ は上記のとおりで、かつ $k$ は代数閉体とする。$V$ を $R$ の次数1の部分と置き、$\dim_k V = r+1$ とする。さらに $\mathbb{P}(V)$ で $V$ 上の射影空間を表す。すなわち、$\mathbb{P}(V)$ は $V$ の1次元の線形部分空間の全体である。このとき、$\mathbb{P}(V)$ の空でない開部分集合 $\mathcal{O}$ と $R$-加群 $M(p,n)$（ただし $(p,n) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$）が次の条件を満たすようにとることができる。

(1) 各 $M(p,n)$ は直既約 $R$-加群で、その最小生成元の個数は $n$ である。

(2) 任意の $(p,n) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ に対して、$\text{G-dim}_R\, M(p,n) = 0$ である。

(3) もし $(p,n) \neq (p',n') \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ ならば $M(p,n)$ と $M(p',n')$ は非同型である。

Proof. 証明の概略を与える。
(第1段) まず、$R$ の次数1の斉次元 $x \in V$ で $x\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^2$（ただし $\mathfrak{n}$ は $S$ の斉次極大イデアルを表す）を満たすものがある。$\mathbb{P}(V)$ の部分集合 $\mathcal{O}_1$ を次のように定義する：

$$\mathcal{O}_1 = \{[x] \in \mathbb{P}(V) \mid x \in V,\ x\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^2\},$$

ただし、$[x]$ で $x$ で生成される $k$ 上1次元の $V$ の部分空間を表す。このとき、$\mathcal{O}_1$ が $\mathbb{P}(V)$ の空でない開集合であることを見る。

(第2段) $[x] \in \mathcal{O}_1$ に対して $S$ 加群 $M([x],1)$ を次のように与える。

$$M([x],1) = S/xS.$$

このとき、$M([x],1)$ は実際は $R$ 加群であり、$\text{G-dim}_R\, M([x],1) = 0$ が成立することを見る。

0 でない元 $z \in V$ を固定して、

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \backslash \{[z]\},$$

と置く。これは $\mathbb{P}(V)$ の空でない開集合である。元 $([x], n) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ に対して、$R$ 加群 $M([x], n)$ を次の完全列によって定義する。

$$R(-1)^n \xrightarrow{\Phi_x} R^n \longrightarrow M([x], n) \longrightarrow 0,$$

ただし、 $\Phi_x$ は $n \times n$ 行列で、つぎの形のものである。

$$\begin{pmatrix} x & z & & & & \\ & x & z & & 0 & \\ & & x & \ddots & & \\ & & & \ddots & z & \\ & 0 & & & x & z \\ & & & & & x \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

(第３段) 全ての $([x], n) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ について、$\text{G-dim}_R\, M([x], n) = 0$ となることを示す。

(第４段) $M([x], n)$ が直既約であることを示す。

(第５段) 最後に、もし $([x], n) \neq ([x'], n') \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ ならば、$M([x], n) \ncong M([x'], n')$ となることを示す。■

# 6 Modules of G-dimension 0 are not contravariantly finite

一般の局所環 $(R, \mathfrak{m})$ に対して、$R$-mod で有限生成 $R$ 加群全体の成す圏を、$\mathcal{G}(R)$ で G-dimension 0 の加群全体の成す圏を表す。

$$\mathcal{G}(R) = \{M \in R\text{-mod} \mid \text{G-dim}_R\, M = 0\}$$

次の条件を満たすとき、$\mathcal{G}(R)$ は $R$-mod の部分圏として contravariantly finite であるという。

(*) 任意の $M \in R$-mod に対して、完全列：

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0, \tag{6.1}$$

が存在する。ただし、 $X \in \mathcal{G}(R)$ かつ、任意の $\mathcal{G}(R)$ に属する加群から $M$ への任意の $R$-準同型写像は $\pi$ を経由する。

この写像 $\pi : X \to M$ を $M$ の $\mathcal{G}(R)$-approximation ともいう。もし、$R$ が Gorenstein 環ならば、$\mathcal{G}(R)$ は maximal Cohen-Macaulay modules のなす圏なので、[2] によって、$\mathcal{G}(R)$ が contravariantly finite であることが知られている。すなわち、$R$ が Gorenstein ならば、任意の加群は $\mathcal{G}(R)$-approximation をもつ。一般的には、$\mathcal{G}(R)$ は contravariantly finite でないことが示せる。

**Theorem 6.1** $S$ を代数閉体 $k$ 上の 1 次元の Cohen-Macaulay 斉次次数環で、minimal multiplicity を持つとする。$x$ を $S$ の極大イデアル $\mathfrak{n}$ の minimal reduction、すなわち $x\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^2$ が成り立つような元とする。このとき、$R = S/x^2S$ と置くと、$R$-加群 $k$ は $\mathcal{G}(R)$-approximation を持たない。

PROOF. 定理を証明するために条件 (*) を満たす完全列:

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0, \tag{6.2}$$

が存在すると仮定する。この列は minimal であると仮定して良い。まず、$X$ を直既約加群の直和 $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X^{(i)}$ と分解しておく。短完全列 (6.2) の minimality より、各 $\pi|_{X^{(i)}} : X^{(i)} \to k$ が自明な写像でないことを注意しておく。Theorem 3.1 によれば、すべての加群 $X_i$ は次数付き加群の構造を持ち、したがって $\pi$ もまた次数 0 の斉次写像である。さて、$X^{(i)} \cong R$ $(1 \leqq i \leqq u)$、さらに、$X^{(j)}$ $(u+1 \leqq j \leqq n)$ は自由加群でないとする。Theorem 3.1 によって、$X$ は次数付き加群として $X_0 \oplus X_1 \oplus X_2$ と表され、

$$\dim_k X_0 = u + \sum_{j=u+1}^{n} s_j,\ \dim_k X_1 = u(r+1) + \sum_{j=u+1}^{n} rs_j,\ \dim_k X_2 = ru,$$

となる。ただし、$s_j$ は $X^{(j)}$ の最小生成元の個数である。$\pi$ も斉次であったから、$Y$ も次数付き加群で $Y = Y_0 \oplus Y_1 \oplus Y_2$ となり、(6.2) から次のようになる。

$$\dim_k Y_0 = u + \sum_{j=u+1}^{n} s_j - 1,\ \dim_k Y_1 = u(r+1) + \sum_{j=u+1}^{n} rs_j,\ \dim_k Y_2 = ru. \tag{6.3}$$

Theorem 5.1 の証明と同様にして、$R$ 加群 $R/xR$ は G-dimension 0 であることが容易に分かる。実際、次のような complete resolution がある。

$$\cdots \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \longrightarrow \cdots.$$

若松の補題 [7] によって、$\mathrm{Ext}_R^1(R/xR, Y) = 0$ となるので、これから次の次数付き加群としての完全列を得る。

$$\cdots \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{x} Y \longrightarrow \cdots$$

この列の一つの次数部分を眺めると次のような $k$ ベクトル空間の完全列が得られる。

$$0 \longrightarrow Y_0 \xrightarrow{x} Y_1 \xrightarrow{x} Y_2 \longrightarrow 0$$

したがって、(6.3) より、

$$\left(u + \sum_{j=u+1}^{n} s_j - 1\right) + ru = u(r+1) + \sum_{j=u+1}^{n} rs_j,$$

あるいは、これと同等な次の等式を得る。

$$(1-r)(\sum_{j=u+1}^{n} s_j) = 1.$$

$r$ も $s_j$ も皆正の整数であるから、これは不可能である。これによって (6.2) のような完全列は存在しないことが分かる。■

# 参考文献


[1] M.AUSLANDER and M.BRIDGER, *Stable module theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **94** (1969).

[2] M.AUSLANDER and R.-O.BUCHWEITZ, *The homological theory of Cohen-Macaulay approximations*, Mem. Soc. Math. de France **38** (1989), 5–37

[3] L.AVRAMOV, V.GASHAROV, and I.PEEVA, *Complete Intersection dimension*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **86** (1997), 67-114 (1998).

[4] W.BRUNS and J.HERZOG, *Cohen-Macaulay rings, revised version*, Cambridge University Press, 1998.

[5] H.MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.

[6] O.VELICHE, *Construction of modules with finite homological dimensions*, J. Algebra **250** (2002), 427–449.

[7] T.Wakamatsu, *Stable equivalence of self-injective algebras and a generalization of tilting modules*, J. Algebra **134** (1990), 298–325.

[8] Y.Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press **146** (1990).

[9] Y.Yoshino, *Modules of G-dimension zero over local rings with the cube of maximal ideal being zero*, *Preprint* (2002).

## 表現次元と Solomon ゼータ関数[1 2]

伊山 修

Cline-Parshall-Scott は, 代数群及び Lie 代数の表現論から**最高ウェイト圏**なる圏論的な概念を抽出し, 更にそれをアルチン代数を用いて研究する為に**準遺伝代数** (§2.5) を導入した [CPS1,2]. 準遺伝代数はアルチン代数の表現論の観点からも興味深く, Dlab-Ringel を先駆けとして盛んに研究されている [DR1,2,3]. 一方整環の表現論においては, 可換環論における正規化の概念の非可換類似物である **overorder, overring**(§1.1) の概念が重要な役割を果たす. $\Lambda$ の overring $\Gamma$ からは自然に $\mathrm{lat}\,\Lambda$ の部分圏 $\mathrm{lat}\,\Gamma$ が得られるが, この対応を圏論的に定式化する事により **rejection** という概念 (§1,§2) が得られる. 最近, rejection は有限表現型 order の研究に効果的に用いられたが [I1,2,3][Ru1,2], その原型は Drozd-Kirichenko-Roiter の Bass order の理論 [DKR] における 1 点 rejection (§1.3) と, 土方-西田による有限表現型局所 order への 4 点 rejection (§1.5) の応用にある [HN1,2,3].

本文の目的の一つは, 加群の近似理論 [AS2] の観点から見ると, 準遺伝代数と rejection が実は深く関係している事を注意する事にあり, もう一つの目的は, その応用として二つの忘れられかけた古い問題に解答を与える事にある [I4,5]. 片方は 30 年前に M. Auslander が導入したアルチン代数の**表現次元**に関するものであり [A1], もう片方は 25 年前に L. Solomon が導入した order の **Solomon ゼータ関数**に関するものである [S1,2]. 一見何の関係もないこれら 2 つの問題が, rejection を通して関係してくるのである. 鍵となる図式は次の様なものであり, 0 次元と 1 次元の平行世界を表している. 1 章で大体図の上部, 2 章で中部を扱い, 右部が 3 章にて, 左部が 4 章で用いられる.

| 1 次元の世界 | 0 次元の世界 |
|---|---|
| {order $\Lambda$ の overring} | { アルチン代数 $\Lambda$ の剰余環 } |
| $\Vert$ | $\Vert$ |
| {$\mathrm{lat}\,\Lambda$ の rejective 部分圏 } | {$\mathrm{mod}\,\Lambda$ の rejective 部分圏 } |
| $\cap$ | $\cap$ |
| {$\mathrm{lat}\,\Lambda$ の右 rejective 部分圏 } | {$\mathrm{mod}\,\Lambda$ の右 rejective 部分圏 } |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| Solomon の第二予想 | 表現次元の有限性 |

5 章では, Solomon ゼータ関数と Ringel-Hall 代数の関係を述べる. 更に, 普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ とその有限次既約表現のある族を, 遺伝 order の Hall 代数を用いて構成する [I7]. これは Ringel による $\widetilde{A}_{n-1}$ 型量子群の構成に深く関連する [R2][Lu][Sc][As].

以下では加群は全て左加群を意味するものとする. 環 $\Lambda$ に対して $J_\Lambda$ で $\Lambda$ の Jacobson 根基を表す. $\mathrm{mod}\,\Lambda$ (resp. $\mathrm{pr}\,\Lambda$) で有限生成 $\Lambda$-加群 (resp. 有限生成射影 $\Lambda$-加群) の圏を表す. アルチン代数 $\Lambda$ に対し, $(\ ) : \mathrm{mod}\,\Lambda \leftrightarrow \mathrm{mod}\,\Lambda^{op}$ で duality を表す. また, 加法圏 $\mathcal{C}$ に対して $\mathrm{ind}\,\mathcal{C}$ で $\mathcal{C}$ の直既約対象の同型類全体を表す.

[1] The detailed version of this paper will be submitted elsewhere.

[2] 本稿は第 5 回代数群と量子群の表現論研究集会の報告集に加筆修正したものです。

## 1 overorder と rejection

$R$ を可換ネーター整域とし $K$ をその商体とする. $R$-代数 $\Lambda$ が **$R$-order** であるとは, $R$-加群として有限生成射影的である事を意味する [CR]. この時, $\Lambda$ は有限次 $K$-代数 $A := \Lambda \otimes_R K$ の部分環とみなされる. $R$-order $\Lambda$ 上の加群 $L$ が **$\Lambda$-lattice** であるとは, $R$-加群として有限生成射影的である事を意味する. $\Lambda$-lattice の圏を $\operatorname{lat}\Lambda$ で表す. $(\ )^* = \operatorname{Hom}_R(\ ,R)$ は $\operatorname{lat}\Lambda$ と $\operatorname{lat}\Lambda^{op}$ の間の duality を与えるが, $\operatorname{in}\Lambda := (\operatorname{pr}\Lambda^{op})^*$ を**入射** $\Lambda$-lattice の圏と呼ぶ.

以下この章では, $R$ を完備離散付値環とする. 基本的な例としては $(R,K) = (\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ や $(k[[x]], k((x)))$ がある. この時 $\operatorname{lat}\Lambda$ においては, 直既約分解に関する Krull-Schmidt の定理が成立する. 更に $A = \Lambda \otimes_R K$ が半単純であると仮定する. すると $\operatorname{lat}\Lambda$ における Auslander-Reiten 列の存在定理が成立する [A2][Ro2]. $\Lambda$ の Auslander-Reiten quiver を $\mathfrak{A}(\Lambda)$ で表す事にする [ARS][Y]. それは $\operatorname{ind}(\operatorname{lat}\Lambda)$ を点集合とする有向グラフである.

**1.1 定義** $\Gamma$ を別の $R$-order とする. $\Gamma$ が $\Lambda$ の **overorder** であるとは, $\Lambda \subseteq \Gamma \subset A$ が成立する事. より一般に $\Gamma$ が $\Lambda$ の **overring** であるとは, $A$ のあるイデアル $I$ に対して $(\Lambda + I)/I \subseteq \Gamma \subset A/I$ が成立する事. これらの時, 自然な環準同型 $\Lambda \to \Gamma$ は忠実充満関手 $\operatorname{lat}\Gamma \to \operatorname{lat}\Lambda$ を導き, $\operatorname{lat}\Gamma$ は $\operatorname{lat}\Lambda$ の充満部分圏とみなされる. 特に $\operatorname{ind}(\operatorname{lat}\Gamma)$ は $\operatorname{ind}(\operatorname{lat}\Lambda)$ の部分集合とみなされる. $\mathfrak{O}_0(\Lambda)$ で $\Lambda$ の overorder 全体のなす集合, $\mathfrak{O}(\Lambda)$ で $\Lambda$ の overring 全体のなす集合を表す事にする. $\mathfrak{O}(\Lambda)$ 上の半順序 $\subseteq$ を次の様に定義する : $\Gamma_i \in \mathfrak{O}(\Lambda)$ $(i=1,2)$ に対し $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ とは, $\Gamma_i$ の $A$ への引き戻しを $\Gamma_i'$ と表す時に, $A$ の部分集合として $\Gamma_1' \subseteq \Gamma_2'$ が成立する事を意味する. この時, $\Gamma \mapsto \operatorname{ind}(\operatorname{lat}\Gamma)$ なる対応は, 順序を逆にする単射 $\mathfrak{O}(\Lambda) \to 2^{\operatorname{ind}(\operatorname{lat}\Lambda)}$ を与える [I3]. また自分自身以外に overorder を持たない order を**極大 order** と呼ぶ.

**1.2 例** (1) $\Lambda := \begin{pmatrix} R & R \\ J_R^n & R \end{pmatrix} \subset A := \mathrm{M}_2(K)$ $(n \geq 0)$ と置くと, 半順序集合 $\mathfrak{O}(\Lambda) = \mathfrak{O}_0(\Lambda)$ は次の様になる (簡単の為 $n=2$ とした).

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{pmatrix} R & J_R^{-2} \\ J_R^2 & R \end{pmatrix} & & & & \\
\cup & & & & \\
\begin{pmatrix} R & J_R^{-1} \\ J_R^2 & R \end{pmatrix} & \subset & \begin{pmatrix} R & J_R^{-1} \\ J_R & R \end{pmatrix} & & \\
\cup & & \cup & & \\
\Lambda = \begin{pmatrix} R & R \\ J_R^2 & R \end{pmatrix} & \subset & \begin{pmatrix} R & R \\ J_R & R \end{pmatrix} & \subset & \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}
\end{array}$$

対応する $\operatorname{ind}(\operatorname{lat}\Lambda)$ の部分集合は次の様になる.

$$\begin{array}{ccccc}
\left\{\binom{R}{J_R^2}\right\} & & & & \\
\cap & & & & \\
\left\{\binom{R}{J_R^2}, \binom{R}{J_R}\right\} & \supset & \left\{\binom{R}{J_R}\right\} & & \\
\cap & & \cap & & \\
\left\{\binom{R}{J_R^2}, \binom{R}{J_R}, \binom{R}{R}\right\} & \supset & \left\{\binom{R}{J_R}, \binom{R}{R}\right\} & \supset & \left\{\binom{R}{R}\right\}
\end{array}$$

(2) $\Lambda = \Lambda_n := \{(x,y) \in R \times R \mid x - y \in J_R^n\} \subset A := K \times K$ $(n \geq 0)$ と置くと, 半順序集合 $\mathfrak{O}(\Lambda) = \mathfrak{O}_0(\Lambda) \cup \{0 \times R, R \times 0\}$ は次の様になる. $(R \times R \subset R \times 0$ という表記は違

和感があるが, 1.1 の約束により $R\times 0$ を $A$ に引き戻した環 $R\times K$ を考えている事に注意.)

$$\begin{array}{ccc} & & 0\times R & \\ & & \cup & \\ \Lambda_n\subset\Lambda_{n-1}\subset\cdots\subset\Lambda_2\subset\Lambda_1\subset & & \Lambda_0=R\times R & \subset R\times 0\end{array}$$

対応する $\mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda)$ の部分集合は次の様になる.

$$\left\{\begin{array}{c}\Lambda_i(0<i\le n)\\ R\times 0\\ 0\times R\end{array}\right\}\supset\left\{\begin{array}{c}\Lambda_i(0<i<n)\\ R\times 0\\ 0\times R\end{array}\right\}\supset\cdots\supset\left\{\begin{array}{c}\Lambda_1,\Lambda_2\\ R\times 0\\ 0\times R\end{array}\right\}\supset\left\{\begin{array}{c}\Lambda_1\\ R\times 0\\ 0\times R\end{array}\right\}\supset\begin{array}{c}\{0\times R\}\\ \cap\\ \left\{\begin{array}{c}R\times 0\\ 0\times R\end{array}\right\}\end{array}\supset\{R\times 0\}$$

より分かり易くする為, 各 overring の Auslander-Reiten quiver を描いてみると, 次の様に Dynkin diagram $D_i$ に似た図になる.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
 & & & & & & & & & \overset{0\times R}{\bullet} & & \\
 & & & & & & & & & \downarrow\uparrow & & \\
\mathfrak{A}(\Lambda_n) & \overset{\Lambda_n}{\bullet} & \rightleftarrows & \overset{\Lambda_{n-1}}{\bullet} & \rightleftarrows & \cdots & \rightleftarrows & \overset{\Lambda_2}{\bullet} & \rightleftarrows & \overset{\Lambda_1}{\bullet} & \rightleftarrows & \overset{R\times 0}{\bullet}\\
 & & & & & & & & & \overset{0\times R}{\bullet} & & \\
 & & & & & & & & & \downarrow\uparrow & & \\
\mathfrak{A}(\Lambda_{n-1}) & & & \overset{\Lambda_{n-1}}{\bullet} & \rightleftarrows & \cdots & \rightleftarrows & \overset{\Lambda_2}{\bullet} & \rightleftarrows & \overset{\Lambda_1}{\bullet} & \rightleftarrows & \overset{R\times 0}{\bullet}\\
\cdots & & & & & & & & & & & \cdots\\
 & & & & & & & & & \overset{0\times R}{\bullet} & & \\
 & & & & & & & & & \downarrow\uparrow & & \\
\mathfrak{A}(\Lambda_2) & & & & & & & \overset{\Lambda_2}{\bullet} & \rightleftarrows & \overset{\Lambda_1}{\bullet} & \rightleftarrows & \overset{R\times 0}{\bullet}\\
 & & & & & & & & & \overset{0\times R}{\bullet} & & \\
 & & & & & & & & & \downarrow\uparrow & & \\
\mathfrak{A}(\Lambda_1) & & & & & & & & & \overset{\Lambda_1}{\bullet} & \rightleftarrows & \overset{R\times 0}{\bullet}
\end{array}$$

$$\mathfrak{A}(\Lambda_0)=\left(\begin{array}{cc}\overset{0\times R}{\bullet} & \overset{R\times 0}{\bullet}\\ \circlearrowright & \circlearrowright\end{array}\right),\quad \mathfrak{A}(R\times 0)=\left(\begin{array}{c}\overset{R\times 0}{\bullet}\\ \circlearrowright\end{array}\right),\quad \mathfrak{A}(0\times R)=\left(\begin{array}{c}\overset{0\times R}{\bullet}\\ \circlearrowright\end{array}\right)$$

(3) $R:=k[[x^2]]$ 及び $\Lambda=\Lambda_n:=R+Rx^{2n+1}\subset A:=k((x))$ $(n\ge 0)$ と置くと, 半順序集合 $\mathfrak{O}(\Lambda)=\mathfrak{O}_0(\Lambda)$ は次の様になる.

$$\Lambda_n\subset\Lambda_{n-1}\subset\cdots\subset\Lambda_2\subset\Lambda_1\subset\Lambda_0$$

対応する $\mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda)$ の部分集合は次の様になる.

$$\{\Lambda_i\}_{0\le i\le n}\supset\{\Lambda_i\}_{0\le i\le n-1}\supset\cdots\supset\{\Lambda_0,\Lambda_1,\Lambda_2\}\supset\{\Lambda_0,\Lambda_1\}\supset\{\Lambda_0\}$$

各 overorder の Auslander-Reiten quiver を書いてみると, 次の様に Dynkin diagram $A_i$ に似た図になる.

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{A}(\Lambda_n) & \overset{\Lambda_n}{\bullet}\rightleftarrows\overset{\Lambda_{n-1}}{\bullet}\rightleftarrows\cdots\rightleftarrows\overset{\Lambda_2}{\bullet}\rightleftarrows\overset{\Lambda_1}{\bullet}\rightleftarrows\overset{\Lambda_0}{\bullet}\circlearrowright\\
\mathfrak{A}(\Lambda_{n-1}) & \overset{\Lambda_{n-1}}{\bullet}\rightleftarrows\cdots\rightleftarrows\overset{\Lambda_2}{\bullet}\rightleftarrows\overset{\Lambda_1}{\bullet}\rightleftarrows\overset{\Lambda_0}{\bullet}\circlearrowright\\
\cdots & \cdots\\
\mathfrak{A}(\Lambda_1) & \overset{\Lambda_1}{\bullet}\rightleftarrows\overset{\Lambda_0}{\bullet}\circlearrowright\\
\mathfrak{A}(\Lambda_0) & \overset{\Lambda_0}{\bullet}\circlearrowright
\end{array}$$

(2) と (3) において興味深いのは, $\mathfrak{A}(\Lambda_n)$ から $\mathfrak{A}(\Lambda_0)$ まで 1 点ずつ減っている事である. 同様に (1) においても, 隣り合うどの二つの order $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ を選んできても, 集合 $\mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Gamma_1)$ と $\mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Gamma_2)$ は 1 つの元しか違わない. この現象はいつでも成立するとは限らないのだが, それを分析する為に次の概念を導入する.

**1.3** $\mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda)$ の部分集合 $S$ のうち, ある overring (resp. overorder) $\Gamma$ により $S = \mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda) - \mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Gamma)$ となるものを **rejectable** (resp. **strictly rejectable**) と呼ぶ [I1,2,3]. 当然, $\Gamma \mapsto \mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda) - \mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Gamma)$ なる対応は $\mathfrak{O}(\Lambda)$ から「$\mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda)$ の rejectable 部分集合全体」への順序を保つ全単射を与える. この時, 上の現象は次の Drozd-Kirichenko による補題 [DK1][HN2] により説明される.

**(1 点 rejection)** $\Lambda$ を $R$-order とする. $X \in \mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda)$ に対し, $\{X\}$ が rejectable である必要十分条件は, $X \in \mathrm{pr}\,\Lambda \cap \mathrm{in}\,\Lambda$ となる事である.

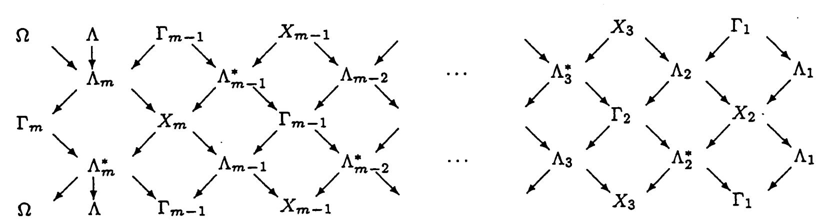
これは Bass order の理論において非常に重要である [DKR][Ro1][HN1,2]. Bass order $\Lambda$ からはいつでも overorder の列 $\Lambda = \Lambda_n \subset \Lambda_{n-1} \subset \cdots \subset \Lambda_0$ で $\#(\mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda_i) - \mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda_{i-1})) = 1$ なるものが生じる事が分かる. 特に $\mathfrak{A}(\Lambda)$ は Dynkin diagram から生じる事が分かる (e.g. [W]). 実際 1.2 の例は Bass order のうち 3 系列を与えているのだが, ここではこれ以上は触れない.

**1.4 例** rejectable 部分集合に関して, 別の例で観察してみる. $\Lambda$ を 1 次元単純特異点の完備化 [Y] とする時, $\Lambda$ の部分環 $R$ が存在して $\Lambda$ は $R$-order となる [DW]. $A_n : k[[X,Y]]/(X^{n+1}+Y^2)$ の場合は, $\Lambda$ は 1.2(2) ($n$ が奇数) または 1.2(3) ($n$ が偶数) の Bass order となる事が分かる. そこで $\Lambda$ は $D_n : k[[X,Y]]/(X^{n-1}+XY^2)$ であるものとし, $n$ が奇数 $n = 2m+1$ の場合を扱う (偶数の時も"ほぼ"同じである). この時, 半順序集合 $\mathfrak{O}(\Lambda)$ は次の様になる. (ここで $\Omega$ は極大 order, $\Gamma_i$ は $A_{2i-2}$ 型の単純特異点であり, $\Lambda_i$ は $D_{2i+1}$ 型の単純特異点の最小 overorder になる.)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \Gamma_m & \subset & \Gamma_{m-1} & \subset & \cdots & \subset & \Gamma_2 & \subset & \Gamma_1 & & \\
 & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
 & & \Omega\times\Gamma_m & \subset & \Omega\times\Gamma_{m-1} & \subset & \cdots & \subset & \Omega\times\Gamma_2 & \subset & \Omega\times\Gamma_1 & \subset & \Omega \\
 & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
\Lambda & \subset & \Lambda_m & \subset & \Lambda_{m-1} & \subset & \cdots & \subset & \Lambda_2 & \subset & \Lambda_1 & &
\end{array}$$

$\mathfrak{A}(\Lambda)$ は次の様になる. (上下を同一視しており, $X_i$ はある lattice である.)

$\mathfrak{A}(\Lambda)$



以下, $\mathfrak{A}(\Lambda_i)$ の変化を順次見ていく事にする. $\Lambda$ には1.3の1点 rejection を用いる事ができ, $\mathfrak{A}(\Lambda_m)$ は $\mathfrak{A}(\Lambda)$ から $\{\Lambda\}$ のみ除いた次の形になる.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & \Omega \ar[dr] & & \Gamma_{m-1} \ar[dl] \ar[dr] & & X_{m-1} \ar[dl] \ar[dr] & & {} \ar[dl] \ar[dr] & & X_3 \ar[dl] \ar[dr] & & \Gamma_1 \ar[dl] \ar[dr] & \\
 & & \Lambda_m \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_{m-1}^* \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_{m-2} \ar[dl] \ar[dr] & \cdots & \Lambda_3^* \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_2 \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_1 \ar[dl] \\
\mathfrak{A}(\Lambda_m) & \Gamma_m \ar[dr] & & X_m \ar[dl] \ar[dr] & & \Gamma_{m-1} \ar[dl] \ar[dr] & & {} \ar[dl] \ar[dr] & & \Gamma_2 \ar[dl] \ar[dr] & & X_2 \ar[dl] \ar[dr] & \\
 & & \Lambda_m^* \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_{m-1} \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_{m-2}^* \ar[dl] \ar[dr] & \cdots & \Lambda_3 \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_2^* \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_1 \ar[dl] \\
 & \Omega & & \Gamma_{m-1} & & X_{m-1} & & {} & & X_3 & & \Gamma_1 &
\end{tikzcd}
$$

$\mathfrak{A}(\Lambda_{m-1})$ は $\mathfrak{A}(\Lambda_m)$ から4点 $\begin{smallmatrix} \Lambda_m & \to & X_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_m & \to & \Lambda_m^* \end{smallmatrix}$ を除いた次の形になる.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & \Gamma_{m-1} \ar[dr] & & X_{m-1} \ar[dl] \ar[dr] & & {} \ar[dl] \ar[dr] & & X_3 \ar[dl] \ar[dr] & & \Gamma_1 \ar[dl] \ar[dr] & \\
 & & \Lambda_{m-1}^* \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_{m-2} \ar[dl] \ar[dr] & \cdots & \Lambda_3^* \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_2 \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_1 \ar[dl] \\
\mathfrak{A}(\Lambda_{m-1}) & \Omega \ar[dr] & & \Gamma_{m-1} \ar[dl] \ar[dr] & & {} \ar[dl] \ar[dr] & & \Gamma_2 \ar[dl] \ar[dr] & & X_2 \ar[dl] \ar[dr] & \\
 & & \Lambda_{m-1} \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_{m-2}^* \ar[dl] \ar[dr] & \cdots & \Lambda_3 \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_2^* \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_1 \ar[dl] \\
 & \Gamma_{m-1} & & X_{m-1} & & {} & & X_3 & & \Gamma_1 &
\end{tikzcd}
$$

同様に $\mathfrak{A}(\Lambda_{m-2})$ は $\mathfrak{A}(\Lambda_{m-1})$ から4点 $\begin{smallmatrix} \Lambda_{m-1} & \to & X_{m-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{m-1} & \to & \Lambda_{m-1}^* \end{smallmatrix}$ を除いたものとなり, 順次4点ずつ減っていく. 最終的に $\mathfrak{A}(\Lambda_2)$ 及び $\mathfrak{A}(\Lambda_1)$ は下の様になる.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & \Omega \ar[dr] & & \Gamma_1 \ar[dl] \ar[dr] & \\
 & & \Lambda_2 \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_1 \ar[dl] \\
\mathfrak{A}(\Lambda_2) & \Gamma_2 \ar[dr] & & X_2 \ar[dl] \ar[dr] & \\
 & & \Lambda_2^* \ar[dl] \ar[dr] & & \Lambda_1 \ar[dl] \\
 & \Omega & & \Gamma_1 &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & \Gamma_1 \ar[dr] & \\
 & & \Lambda_1 \ar[dl] \\
\mathfrak{A}(\Lambda_1) & \Omega \ar[dr] & \\
 & & \Lambda_1 \ar[dl] \\
 & \Gamma_1 &
\end{tikzcd}
$$

**1.5** ここで自然な疑問として, 4点ずつ減っていったのは何故であろうか？これには理由があり, 1.3の1点 rejection の類似として, 次の様な事実が成立する.

**(4点 rejection)** $\Lambda$ を $R$-order, $\tau$ を Auslander translate, $S = \{P, X, Y, I\}$ を $\mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda)$ の部分集合とする. もし $S$ が $\mathfrak{A}(\Lambda)$ において $\begin{smallmatrix} P & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & I \end{smallmatrix}$ (但し $P \in \mathrm{pr}\,\Lambda$, $I \in \mathrm{in}\,\Lambda$, $P = \tau I$) なる形をしていれば, $S$ は rejectable である.

1点 rejection が Bass order に対して基本的であったのと同様に, 4点 rejection は有限表現型局所 order の理論において基本的であるが, ここではこれ以上は触れない ([DK2][HN3]参照). 実は遥かに一般に, $\mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda)$ の有限部分集合 $S$ が与えられた時, $S$ が rejectable

か否は「$\mathfrak{A}(\Lambda)$ を $S$ に制限した quiver」のみから決まり, $S$ の外には全くよらない事が分かる. 更に, その条件は quiver の言葉で容易に記述する事が可能である (**一般 rejection**) [I1,2,3]. ここではそれは省略するが, 1.6 に少しの例を挙げておく.

**1.6 例** [I1] $S$ を $\mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda)$ の部分集合とする. $S$ が**最小 rejectable** であるとは, $S$ に含まれる rejectable 部分集合は, $S$ と空集合のみである事とする. この時, $S \cap \mathrm{pr}\,\Lambda$ 及び $S \cap \mathrm{in}\,\Lambda$ は一点よりなる事が示される.

さて, $S$ を $\mathrm{ind}(\mathrm{lat}\,\Lambda)$ の部分集合で $\#S \leq 4$ なるものとする. この時 $S$ が最小な強 rejectable である必要十分条件は, $S$ が下のいずれかの形をしている事である. ここで, $\{P\} := S \cap \mathrm{pr}\,\Lambda$ 及び $\{I\} := S \cap \mathrm{in}\,\Lambda$ とおいた. (1) が 1.3 の 1 点 rejection であり, (12) が 1.5 の 4 点 rejection である.

(1) $\overset{P=I}{\bullet}$

(2) $\overset{P}{\bullet} \longrightarrow \overset{I}{\bullet}$

(3) $\overset{P}{\bullet} \xrightarrow{(a\ b)} \bullet \longrightarrow \overset{I}{\bullet}$ $\quad ab \leq 2$

(4) $\overset{P}{\bullet} \longrightarrow \bullet \xrightarrow{(a\ b)} \overset{I}{\bullet}$ $\quad ab \leq 2$

(5) $\overset{P}{\bullet} \xrightarrow{(a\ b)} \bullet \xrightarrow{(b\ a)} \overset{I}{\bullet}$ $\quad P = \tau I, ab \leq 3$

(6) $\overset{P}{\bullet} \xrightarrow{(a\ b)} \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \overset{I}{\bullet}$ $\quad ab \leq 2$

(7) $\overset{P}{\bullet} \longrightarrow \bullet \xrightarrow{(a\ b)} \bullet \longrightarrow \overset{I}{\bullet}$ $\quad ab \leq 2$

(8) $\overset{P}{\bullet} \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \xrightarrow{(a\ b)} \overset{I}{\bullet}$ $\quad ab \leq 2$

(9) $\overset{P}{\bullet} \xrightarrow{(a\ b)} \bullet \xrightarrow{(b\ a)} \overset{X}{\bullet} \longrightarrow \overset{I}{\bullet}$ $\quad P = \tau X, ab \leq 3$

(10) $\overset{P}{\bullet} \longrightarrow \overset{X}{\bullet} \xrightarrow{(a\ b)} \bullet \xrightarrow{(b\ a)} \overset{I}{\bullet}$ $\quad X = \tau I, ab \leq 3$

(11)
$$\begin{tikzcd}
\overset{P}{\bullet} \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, shift right] & \overset{I}{\bullet} \\
& X\bullet \arrow[u, shift right] &
\end{tikzcd} \qquad P = \tau I, X = \tau X$$

(12)
$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \overset{I}{\bullet} \\
P\bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u]
\end{tikzcd} \qquad P = \tau I$$

**1.7** アルチン代数の場合を考察する. $\Lambda$ をアルチン代数, $S$ を $\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ の部分集合とする. ある $\Lambda$ の剰余環 $\Gamma = \Lambda/I$ により $S = \mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Lambda) - \mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Gamma)$ となる時, $S$ を **rejectable** と呼ぶ. この時 1.5 で述べた一般 rejection (1 及び 4 点 rejection を含む) が全くそのままに成立する. この観察が 2 章における圏論的定式化の一つの動機である.

## 2 加群の近似, rejective 部分圏及び準遺伝代数

以下では特に断らない限り $\mathcal{C}$ で加法圏, $\mathcal{C}(X,Y)$ で $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ を表し, $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ と $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ の合成を $fg \in \mathcal{C}(X,Z)$ で表す. 本文を通して, $\mathcal{C}$ の**部分圏** $\mathcal{C}'$ は常に充満で, 同型と直和と直和因子に関して閉じているものとする. また $X \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathrm{add}\,X$ で $X$ の直和の直和因子全体より成る $\mathcal{C}$ の部分圏を表す. $X$ が $\mathcal{C}$ の**加法生成元**であるとは, $\mathrm{add}\,X = \mathcal{C}$ となる事である. この章では, $R$ は完備離散付値環とする.

**2.1 定義** $I$ を $\mathcal{C}$ のイデアルとする．即ち，任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(X,Y)$ の部分群 $I(X,Y)$ が与えられており，任意の $f \in \mathcal{C}(W,X)$, $g \in I(X,Y)$, $h \in \mathcal{C}(Y,Z)$ の合成 $fgh$ は $I(W,Z)$ に含まれるとする．この時，剰余圏 $\mathcal{C}/I$ が $\mathrm{ob}(\mathcal{C}/I) = \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ 及び $(\mathcal{C}/I)(X,Y) := \mathcal{C}(X,Y)/I(X,Y)$ $(X, Y \in \mathcal{C})$ により定義される．

$f \in I(Y,X)$ が $X$ の**右 $I$-近似**であるとは，$\mathcal{C}(\ ,Y) \xrightarrow{f} I(\ ,X) \to 0$ が完全である事を意味する．任意の $X \in \mathcal{C}$ が右 $I$-近似をもつ時，$I$ は**右有限生成**であると言う．双対的に，左 $I$-近似及び左有限生成も定義される．

近似の概念は [AS2] で導入されたものだが，多くの重要な例が存在する．$J_{\mathcal{C}}$ で $\mathcal{C}$ の Jacobson 根基を表す．即ち $J_{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ のイデアルのうち，任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して $J_{\mathcal{C}}(X,X)$ が環 $\mathcal{C}(X,X)$ の通常の意味での Jacobson 根基を与える様なものである．一方 $\mathcal{C}$ の部分圏 $\mathcal{C}'$ に対し，$[\mathcal{C}']$ で $\mathcal{C}'$ の対象を factor through する射全体から成る $\mathcal{C}$ のイデアルを表す事にする．

**2.2 例** (1) $\Lambda$ を可換局所ネーター環で双対加群を持つものとし，$\mathrm{CM}\,\Lambda$ を maximal Cohen-Macaulay $\Lambda$-加群の成す圏とする．すると $\mathrm{mod}\,\Lambda$ のイデアル $[\mathrm{CM}\,\Lambda]$ は，左右とも有限生成となる (Auslander-Buchweitz 理論 [AB])．

(2) 任意の $R$-order (resp. アルチン代数) $\Lambda$ に対して，$J_{\mathrm{lat}\,\Lambda}$ は $\mathrm{lat}\,\Lambda$ の (resp. $J_{\mathrm{mod}\,\Lambda}$ は $\mathrm{mod}\,\Lambda$ の) 左右とも有限生成なイデアルとなる (Auslander-Reiten 理論 [ARS][A2][Ro2])．

**2.3 定義** 右有限生成よりも強く，次の概念を導入する．$\mathcal{C}$ の部分圏 $\mathcal{C}'$ が**右 rejective** であるとは，任意の $X \in \mathcal{C}$ が単射な右 $[\mathcal{C}']$-近似 $f \in \mathcal{C}(Y,X)$ をもつ事を意味する．この時 $Y \in \mathcal{C}'$ が成立する．双対的に左 rejective も定義され，右かつ左 rejective である時，単に rejective と呼ぶ．この定義は [I3,5] の定義と同値である．

下の 2.4 の意味で，rejective 部分圏の概念は overring の概念を圏論的に定式化したものである事が分かる．一方，右 rejective 部分圏に対してはそのような表現論的な意味は見出し難く，rejective 部分圏よりも遥かにたくさんある．その事が 3 章と 4 章において鍵となる．また，$\tau$-**圏**と呼ばれる加法圏 $\mathcal{C}$ に対しては，rejective 部分圏 $\mathcal{C}'$ を剰余圏 $\mathcal{C}/[\mathcal{C}']$ を用いて特徴付ける事ができ，それから 1.5 で述べた一般 rejection が直ちに得られる [I3]．

**2.4 命題** [I3] (1) $\Lambda$ を $R$-order とする時，$\mathcal{C} = \mathrm{lat}\,\Lambda$ の部分圏 $\mathcal{C}'$ が rejective である必要十分条件は，ある overring $\Gamma$ に対して $\mathcal{C}' = \mathrm{lat}\,\Gamma$ となる事である．

(2) $\Lambda$ をアルチン代数とする時，$\mathcal{C} = \mathrm{mod}\,\Lambda$ の部分圏 $\mathcal{C}'$ が rejective である必要十分条件は，ある剰余環 $\Gamma = \Lambda/I$ に対して $\mathcal{C}' = \mathrm{mod}\,\Gamma$ となる事である．

(1)(2) のいずれにおいても，$X \in \mathcal{C}$ の右近似は $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, X) \to X$，左近似は $X \to (\Gamma \otimes_\Lambda X)^{**}$ で与えられる．

**2.5** Cline-Parshall-Scott によって導入された準遺伝代数を定義する [CPS1]．

$\Lambda$ をアルチン代数とし $I$ を $\Lambda$ の両側イデアルとする．$I$ が $\Lambda$ の**遺伝イデアル**であるとは，$I^2 = I \in \mathrm{pr}\,\Lambda$ 及び $IJ_\Lambda I = 0$ が成立する事．$\Lambda$ が**準遺伝代数**であるとは，$0 = I_m \subseteq I_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq I_0 = \Lambda$ なる両側イデアルの列 (**遺伝鎖**) で，任意の $n$ $(0 < n \leq m)$ に対して $I_{n-1}/I_n$ が $\Lambda/I_n$ の遺伝イデアルとなるものが存在する事．この時，重要な性質として

gl.dim $\Lambda \le 2m-2$ が成立する [DR1]. またアルチン代数 $\Lambda$ に対し, $\Lambda$ が準遺伝代数である事と mod $\Lambda$ が"最高ウェイト圏"を成す事が同値である [CPS1].

準遺伝代数の 1 次元版として, König-Wiedemann が導入した**準遺伝 order** がある [KW]. $R$-order $\Lambda$ が準遺伝 order であるとは, $\Lambda$ の冪等元 $e$ で $e\Lambda e$ が極大 order となり $\Lambda/\Lambda e\Lambda$ が準遺伝代数となるものが存在する事. この時やはり gl.dim $\Lambda < \infty$ が成立する.

**2.6 定義** 加法圏 $\mathcal{C}$ に対し, 部分圏の列 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ が ($\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}'$ への) **右 rejective 鎖**であるとは, 任意の $n$ $(0 \le n < m)$ に対して $J_{\mathcal{C}_n/[\mathcal{C}_{n+1}]} = 0$ が成立しかつ $\mathcal{C}_{n+1}$ が $\mathcal{C}$ の右 rejective 部分圏である事を意味する [I5][1]. ここで $J_{\mathcal{C}_n/[\mathcal{C}_{n+1}]}$ は 2.1 で定義された剰余圏 $\mathcal{C}_n/[\mathcal{C}_{n+1}]$ の Jacobson 根基である. 双対的に**左 rejective 鎖**も定義され, 右かつ左 rejective 鎖を単に **rejective 鎖**と呼ぶ.

例えば 1.2(2) 及び (3) の overorder の列 $\Lambda_n \subset \Lambda_{n-1} \subset \cdots \subset \Lambda_0$ からは, 自然に rejective 鎖 lat $\Lambda_0 \subset \cdots \subset$ lat $\Lambda_{n-1} \subset$ lat $\Lambda_n$ が生じる. しかし 1.4 の overorder の列 $\Lambda_m \subset \Lambda_{m-1} \subset \cdots \subset \Lambda_1$ から生じる鎖 lat $\Lambda_1 \subset \cdots \subset$ lat $\Lambda_{m-1} \subset$ lat $\Lambda_m$ は右も左も rejective ではない. (条件 $J_{\mathcal{C}_n/[\mathcal{C}_{n+1}]} = 0$ が満たされない.) しかし $R$-order $\Lambda$ に付随する圏 lat $\Lambda$ や, アルチン代数 $\Lambda$ に付随する圏 mod $\Lambda$ には, いつでも'十分多くの'右 rejective 鎖が存在する事を 3.4.1 及び 4.5 で見るであろう. この事実が本文で決定的な役割を果たす.

**2.7** 次の事実により, 加法圏の右 rejective 鎖からは自然に準遺伝代数の遺伝鎖が生じる事が分かる. 例えば, Auslander-Smalo の preprojective 分割 [AS1] を用いて Dlab-Ringel が構成した Auslander 代数の遺伝鎖 [DR3] は, 右 rejective 鎖から生じている事が分かる.

**命題** 加法圏 $\mathcal{C}$ が加法生成元 $M$ を持ち $\Gamma := \mathcal{C}(M, M)$ がアルチン代数であると仮定する.

(1) 全単射 $\{\mathcal{C}' : \mathcal{C}$ の右 rejective 部分圏で $J_{\mathcal{C}'} = 0$ なるもの $\} \to \{I : \Gamma$ の遺伝イデアル $\}$ が $\mathcal{C}' \mapsto I := [\mathcal{C}'](M, M)$ により与えられる.

(2) もし $\mathcal{C}$ から 0 への右 rejective 鎖 $0 = \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ が存在するならば, $\Gamma$ は遺伝鎖 $0 = [\mathcal{C}_m](M, M) \subseteq [\mathcal{C}_{m-1}](M, M) \subseteq \cdots \subseteq [\mathcal{C}_0](M, M) = \Gamma$ を持つ準遺伝代数となる [I5]. 特に gl.dim $\Gamma \le m$ が成立する [I8].

## 3 アルチン代数の表現次元

この章では $\Lambda, \Gamma$ 等はアルチン代数を表す事とする. $\mathrm{pd}_\Gamma X$ で $X \in \mathrm{mod}\,\Gamma$ の射影次元を表す. $0 \to \Gamma \to I_0(\Gamma) \to I_1(\Gamma) \to I_2(\Gamma) \to \cdots$ で左 $\Gamma$-加群 $\Gamma$ の最小入射分解を表す事にする. $\Gamma$ の **dominant 次元**を dom.dim $\Gamma := \inf\{i \ge 0 \mid \mathrm{pd}_\Gamma I_i(\Gamma) \ne 0\}$ で定める [T]. 表現次元を導入する前に, 次の Auslander による古典的な定理を紹介する [A1][ARS].

**3.1(Auslander 対応)** アルチン代数 $\Lambda$ で $\#\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Lambda) < \infty$ を満たすものの森田同値類と, アルチン代数 $\Gamma$ で gl.dim $\Gamma \le 2$ かつ dom.dim $\Gamma \ge 2$ を満たすものの森田同値類の間に全単射が存在する. 対応は $\Lambda \mapsto \Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(\bigoplus_{X \in \mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Lambda)} X)$ 及び $\Gamma \mapsto \Lambda :=$

[1] この定義は [I5] で与えられたものより若干強いが, [I5] においても本質的に用いられており, こちらを採用すべきである. この事は [I5] の主結果には影響しない.

$\mathrm{End}_\Gamma(I_0(\Gamma))$ で与えられる．

この様な $\Lambda$ を**有限表現型**と呼び，一方 $\Gamma$ を **Auslander 代数**と呼ぶ．「有限表現型」という表現論的な性質と，「Auslander 代数」というホモロジー代数的な性質の対応を示す興味深いものである．これはアルチン代数の表現論において最も重要なものであり，ここから後の Auslander-Reiten 理論 [ARS] が生じたといえる．また Auslander-Gorenstein 環上のある duality にも関係しているのだが [I6]，それらについては深入りしない．

自然な問題として，上記の $\Gamma$ においてより一般的なホモロジー代数的性質を与えた時，何か良い表現論的性質を持つ $\Lambda$ が対応しないだろうか？例えば通常の Auslander-Reiten 理論を '2 次元版' とする '高次元 Auslander-Reiten 理論' が存在しないだろうか？その一つの方向として Auslander は「$\mathrm{gl.dim}\,\Gamma \leq n$ かつ $\mathrm{dom.dim}\,\Gamma \geq 2$」なる条件の対応物として，表現次元という概念を次の様に導入した [A1]．

**3.2** アルチン代数 $\Lambda$ の**表現次元**を $\mathrm{rep.dim}\,\Lambda := \inf \mathrm{gl.dim}\,\Gamma$ により定める．ここで $\Gamma$ はアルチン代数のうち，$\mathrm{dom.dim}\,\Gamma \geq 2$ かつ $\mathrm{End}_\Gamma(I_0(\Gamma))$ が $\Lambda$ と森田同値になるもの全体を動く．Auslander は更に次の基本的な結果を示した．後の考察には定義自身よりも (1) の方が便利である．

**定理** (1) $\mathrm{rep.dim}\,\Lambda = \inf\{\mathrm{gl.dim}\,\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda \oplus \Lambda^* \oplus N) \mid N \in \mathrm{mod}\,\Lambda\}$.
(2) $\Lambda$ が有限表現型である必要十分条件は $\mathrm{rep.dim}\,\Lambda \leq 2$.

(2) の意味で表現次元は「$\Lambda$ がどの位有限表現型から離れているか？」を計るわけだが，表現次元に関して知られている事は多くはない (e.g. 3.5)．その原因の一つとしては，表現次元がある種のホモロジー代数的難問と関係している事があるのかもしれない (3.6)．逆に言えばそれらに '表現論的アプローチ' とでも呼ぶべきものの足がかりを与えてくれる可能性もある (e.g. 3.6.2)．それはさておき下の問題 3.3(1) も最近まで未解決だったのだが，この章の目的はそれを証明する事にある [I5]．より一般に，Ringel-山形の予想 3.3(2) を証明する．$M = \Lambda \oplus \Lambda^*$ とおく事により，3.3(2) から 3.3(1) が従う (2.5)．

**3.3 問題** [X2](1) 任意のアルチン代数 $\Lambda$ に対して $\mathrm{rep.dim}\,\Lambda$ は有限か？
(2) 任意のアルチン代数 $\Lambda$ 及び任意の $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ に対して，ある $N \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ が存在して，$\mathrm{End}_\Lambda(M \oplus N)$ は準遺伝代数になるか？

**3.4** 問題 3.3(2) を証明する為には 2.7 によると，$M$ を含む $\mathrm{mod}\,\Lambda$ の部分圏 $\mathcal{C}$ で，右 rejective 鎖を持つものを構成すればよい．それは 3.4.1 の様にして実現されるのだが，証明は省略する [I5]．特に 3.3(1) は 3.4.2 の様に解決され，2.7(2) より $\mathrm{rep.dim}\,\Lambda$ の値は $(\Lambda, \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda \oplus \Lambda^*))$-加群 $\Lambda \oplus \Lambda^*$ の長さを超えない事が分かる．

**3.4.1 定理** $\Lambda$ をアルチン代数とする．任意の $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ に対して，$M_0 := M$, $M_{n+1} := M_n J_{\mathrm{End}_\Lambda(M_n)} \subsetneq M_n$ と置くと十分大きな $m$ に対して $M_m = 0$ となる．この時，$\mathcal{C}_n := \mathrm{add} \bigoplus_{l=n}^{m-1} M_l$ と置くと，$0 = \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}_0$ は $\mathcal{C}_0$ から $0$ への右 rejective 鎖を与える．特に $\mathrm{End}_\Lambda(\bigoplus_{l=0}^{m-1} M_l)$ は準遺伝代数となる．

**3.4.2 系** $\Lambda$ をアルチン代数とする．この時任意の $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ に対して，ある $N \in \operatorname{mod}\Lambda$ が存在して，$\operatorname{End}_\Lambda(M \oplus N)$ は準遺伝代数になる．特に $\operatorname{rep.dim}\Lambda$ は有限である．

**3.5** 表現次元に関して知られている結果をいくつか挙げる．

(1) $\operatorname{gl.dim}\Lambda \leq 1$ または $J_\Lambda^2 = 0$ ならば，$\operatorname{rep.dim}\Lambda \leq 3$ [A1].

(2) $\Lambda$ が selfinjective ならば，$\operatorname{rep.dim}\Lambda$ は $\Lambda$ の Loewy length を超えない [A1].

(3) $\Lambda$ と $\Gamma$ が完全体 $k$ 上の代数なら，$\operatorname{rep.dim}(\Lambda \otimes_k \Gamma) \leq \operatorname{rep.dim}\Lambda + \operatorname{rep.dim}\Gamma$ [X1]. 特に $\operatorname{rep.dim} \mathrm{T}_2(\Lambda) \leq \operatorname{rep.dim}\Lambda + 2$ [FGR].

(4) $\operatorname{rep.dim}\Lambda$ は森田型の安定同値で不変 [X2].

(5) $\Lambda$ が special biserial 代数ならば，$\operatorname{rep.dim}\Lambda \leq 3$ [EHIS].

**3.6 問題** ではΛをアルチン代数全体を動かした時，集合 $\{\operatorname{rep.dim}\Lambda\}$ はどの様なものになるであろうか？3.5 の様に，幾つかのクラスの $\Lambda$ が $\operatorname{rep.dim}\Lambda \leq 3$ を満たす事が示されているが，ごく最近 Rouquier により $\operatorname{rep.dim}\Lambda = 4$ となる例が与えられる以前は，$\operatorname{rep.dim}\Lambda > 3$ となる例はなかなか見つからなかった．

今，$\operatorname{fin.dim}\Lambda$ で **finitistic 次元** $\sup\{\operatorname{pd}_\Lambda X \mid X \in \operatorname{mod}\Lambda,\ \operatorname{pd}_\Lambda X < \infty\}$ を表す [B]. 古くからの未解決問題として，finitistic 次元予想，即ち「任意のアルチン代数は $\operatorname{fin.dim}\Lambda < \infty$ を満たすのではないか？」というものがある [Z]. これは中山予想等の多くのホモロジー代数における未解決問題の中でもかなり強い予想である．さて近年 Igusa-Todorov は次の興味深い結果を示した [IT].

**3.6.1 定理** $\Gamma$ をアルチン代数で $\operatorname{gl.dim}\Gamma \leq 3$ なるものとする．この時，任意の $P \in \operatorname{pr}\Gamma$ に対して $\Lambda := \operatorname{End}_\Gamma(P)$ は $\operatorname{fin.dim}\Lambda < \infty$ を満たす．

これより直ちに $\operatorname{rep.dim}\Lambda \leq 3$ ならば $\operatorname{fin.dim}\Lambda < \infty$ となる事が分かり，finitistic 次元の研究に表現次元を用いる事が出来る．特に，3.5(5) より次の系を得る [EHIS].

**3.6.2 系** $\Lambda$ が special biserial 代数ならば，$\operatorname{fin.dim}\Lambda < \infty$ が成立．

**3.7 order の表現次元** $R$ を完備離散付値環，$\Lambda$ を $R$-order とし $A = \Lambda \otimes_R K$ が半単純と仮定する．Auslander 対応の 1 次元版は Auslander-Roggenkamp により与えられた [AR]. 今，$\Lambda$ の**表現次元**を $\operatorname{rep.dim}\Lambda := \inf\{\operatorname{gl.dim}\operatorname{End}_\Lambda(\Lambda \oplus \Lambda^* \oplus N) \mid N \in \operatorname{lat}\Lambda\}$ により定義する．この時，$\Lambda$ が有限表現型 (i.e. $\#\operatorname{ind}(\operatorname{lat}\Lambda) < \infty$) である必要十分条件は $\operatorname{rep.dim}\Lambda \leq 2$ である．さらに，次の様に 3.4 の類似が成立する [I8].

**3.7.1 定理** $\Lambda$ を $R$-order, $M \in \operatorname{lat}\Lambda$ とする．

(1) $M_0 := M$, $M_{n+1} := M_n J_{\operatorname{End}_\Lambda(M_n)} \subsetneq M_n$ と置く．この時ある $m$ が存在して，$\mathcal{C}_n := \operatorname{add}\bigoplus_{l=n}^{m-1} M_l$ と置くと $\mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}_0$ は $\mathcal{C}_0$ から $\mathcal{C}_m$ への右 rejective 鎖を与え，更に $\Lambda$ のある遺伝 overring $\Gamma$ に対して $\mathcal{C}_m = \operatorname{lat}\Gamma$ となる．特に $\operatorname{End}_\Lambda(\bigoplus_{l=0}^{m-1} M_l)$ は準遺伝 order となる．

(2) ある $N \in \operatorname{lat}\Lambda$ が存在して，$\operatorname{End}_\Lambda(M \oplus N)$ は準遺伝 order になる．特に $\operatorname{rep.dim}\Lambda$ は有限である．

**3.7.2 問題** 表現次元の高次元版を以下のように定義する．$R$ を完備局所正則環，$\Lambda$ を $R$-order とし $\mathrm{lat}\,\Lambda$ を $\Lambda$-lattice のなす圏とする (§1)．$\Lambda$ の**表現次元**を $\mathrm{rep.dim}\,\Lambda := \inf\{\mathrm{gl.dim}\,\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda \oplus \Lambda^* \oplus N) \mid N \in \mathrm{lat}\,\Lambda\}$ により定義する．この時，$\mathrm{rep.dim}\,\Lambda$ は有限か？どのような値を取りうるか？

## 4 Solomon ゼータ関数

以下 $R$ を $\mathbb{Z}$ もしくは $p$ 進完備化 $\mathbb{Z}_p$ とする．$R$-order $\Lambda$ に対し，その **Solomon ゼータ関数**は $\zeta_\Lambda(s) := \sum_L (\Lambda : L)^{-s}$ により定義される．ここで $s$ は複素変数であり，$L$ は $\Lambda$ の左イデアルで $(\Lambda : L) < \infty$ なるもの全体を動く [S1]．この時 $\zeta_\Lambda$ は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きければ収束するが，全平面の有理型関数に解析接続される事が証明される．Solomon ゼータ関数は代数体の Dedekind ゼータ関数の一般化を与えている．$R = \mathbb{Z}$ の場合，$\Lambda_p := \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ と置くとオイラー積公式 $\zeta_\Lambda = \prod_{p:\mathrm{prime}} \zeta_{\Lambda_p}$ が成立する [S1]．$\Lambda$ が Gorenstein order の場合には関数等式が成立する事が知られている [G]．後に Bushnell-Reiner は Solomon ゼータ関数を用いて，代数体の整数環に対しては良く知られている [L] 素数定理やイデアルの漸近分布公式等を，一般の order に対して得る事に成功した [BR1,2,3,4]．

例えば $\zeta_{\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})}(s)$ は $\prod_{i=0}^{n-1} \zeta_{\mathbb{Z}}(ns-i)$ に等しい．より一般に，Hey は $\Lambda$ の極大 overorder $\Gamma$ に対して，$\zeta_\Gamma$ を Dedekind ゼータ関数を用いて記述した ([BR2]§2)．一方 $\{p : \mathrm{prime} \mid \Lambda_p \neq \Gamma_p\}$ は有限集合なので，$\zeta_\Lambda$ と $\zeta_\Gamma$ の違いは有限個の素点においてしか現れない．以下ではそれを調べる為に，$R = \mathbb{Z}_p$ の場合のみ扱う．

より一般に，以下では 1 章と同様に $R$ を完備離散付値環とし $K$ をその商体とする．但し $R$ の剰余体 $k$ に対し $p := \#k$ が有限であるとする．イデアルよりも一般に加群に対してゼータ関数を定義するのが自然である．

**4.1 定義** 以下 $\Lambda$ を $R$-order とし，$K$-代数 $A := \Lambda \otimes_R K$ が半単純であると仮定する．$\widetilde{(\ )}$ で関手 $(\ ) \otimes_R K : \mathrm{lat}\,\Lambda \to \mathrm{mod}\,A$ を表す．長さ有限の $A$-加群 $V$ に対し，$\mathfrak{L}_\Lambda(V)$ で $V$ の中の full $\Lambda$-lattice (即ち $\Lambda$-lattice $L$ で $L \subset V$, $KL = V$ となるもの) 全体のなす半順序集合を表す．$\simeq$ で $\Lambda$-加群の同型を表す時，$\overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V) := \mathfrak{L}_\Lambda(V)/\simeq$ は Jordan-Zassenhaus の定理より有限集合である [CR]．さて $L, M \in \overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V)$ に対し，Solomon は

$$\textbf{部分ゼータ関数} \qquad \mathrm{Z}(L, M; s) := \sum_{N \subseteq L,\ N \simeq M} (L : N)^{-s}$$

$$n \times n\ \textbf{のゼータ行列} \qquad \mathbf{Z}_\Lambda(V; s) := (\mathrm{Z}(L, M; s))_{L, M \in \overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V)} \quad (n := \#\overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V))$$

を研究した．彼は $\mathbf{Z}_\Lambda(V; s)$ が逆行列を $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}[p^{-s}])$ の中に持つ事を組合せ的な議論 (Möbius inversion) で示した [S1]．特に $\mathrm{Z}(L, M; s)$ は $\mathbb{Q}(p^{-s})$ に入る．更に彼は [S2] の中で次の二つの予想を提出した．

**4.2 問題** (1) $A$ の極大 order $\Gamma$ に対し，$\mathrm{Z}(L, M; s)/\mathbf{Z}_\Gamma(V; s) \in \mathbb{Z}[p^{-s}]$ である．($\mathbf{Z}_\Gamma(V; s)$ は $1 \times 1$ 行列である.)

(2) $\det \mathbf{Z}_\Lambda(V; s)$ は有限積 $\prod_i (1 - p^{a_i - b_i s})^{-1}$ $(a_i \in \mathbb{N}_{\geq 0},\ b_i \in \mathbb{N}_{>0})$ である．

第一予想 (1) の方は Bushnell-Reiner によりゼータ積分を用いて証明された [BR1]．し

かし第二予想 (2) の方は, $\Lambda$ が遺伝的 ($\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = 1$) である特別な場合に Denert [D] により証明された以外は, 最近まで未解決のままであった. 以下では一般の $\Lambda$ に対して $\det \mathbf{Z}_\Lambda(V;s)$ を明確に与え, 特に (2) が正しい事を示す [I4].

**4.3 例** (1) $\Lambda := \begin{pmatrix} R & R & R & \cdots & R \\ J_R & R & R & \cdots & R \\ J_R & J_R & R & \cdots & R \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ J_R & J_R & J_R & \cdots & R \end{pmatrix} \subset A := \mathrm{M}_n(K)$, $V := \mathrm{M}_{n,1}(K)$ と置く. すると $\Lambda$ の第 $i$ 列 $P_i$ に対して $\overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V) = \{P_i\}_{1\le i\le n}$ が成立する. $T := p^{-s}$ に対し,

$$\mathbf{Z}_\Lambda(V;s) = (1-T^n)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & T^{n-1} & T^{n-2} & \cdots & T \\ T & 1 & T^{n-1} & \cdots & T^2 \\ T^2 & T & 1 & \cdots & T^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T^{n-1} & T^{n-2} & T^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

これより $\det \mathbf{Z}_\Lambda(V;s) = (1-T^n)^{-1}$ を得る.

(2) $\Lambda_n$ を 1.2(2) の order とし, $T := p^{-s}$ と置く. すると $\overline{\mathfrak{L}}_{\Lambda_n}(A) = \{\Lambda_i\}_{0\le i\le n}$ が成立する. 例えば $\mathbf{Z}_{\Lambda_3}(A;s)$ は

$$(1-T)^{-2} \begin{pmatrix} 1-2T+(p+1)T^2-2pT^3+(p^2+p)T^4-2p^2T^5+p^3T^6 & T-2T^2+(p+1)T^3-2pT^4+p^2T^5 & T^2-2T^3+pT^4 & T^3 \\ pT-2pT^2+(p^2+p)T^3-2p^2T^4+p^3T^5 & 1-2T+(p+1)T^2-2pT^3+p^2T^4 & T-2T^2+pT^3 & T^2 \\ p^2T^2-2p^2T^3+p^3T^4 & pT-2pT^2+p^2T^3 & 1-2T+pT^2 & T \\ (p^3-p^2)T^3 & (p^2-p)T^2 & (p-1)T & 1 \end{pmatrix}.$$

これに行の基本変形を施すと,

$$(1-T)^{-2} \begin{pmatrix} 1-2T+T^2 & 0 & 0 & 0 \\ pT-2pT^2+(p^2+p)T^3-2p^2T^4+p^3T^5 & 1-2T+(p+1)T^2-2pT^3+p^2T^4 & T-2T^2+pT^3 & T^2 \\ p^2T^2-2p^2T^3+p^3T^4 & pT-2pT^2+p^2T^3 & 1-2T+pT^2 & T \\ (p^3-p^2)T^3 & (p^2-p)T^2 & (p-1)T & 1 \end{pmatrix}$$

となりこれは $\begin{pmatrix} 1 & O \\ * & \mathbf{Z}_{\Lambda_2}(A;s) \end{pmatrix}$ に等しい. 特に $\det \mathbf{Z}_{\Lambda_3}(A;s) = \det \mathbf{Z}_{\Lambda_2}(A;s)$ が成立する. 同様の議論で $\det \mathbf{Z}_{\Lambda_n}(A;s) = \det \mathbf{Z}_{\Lambda_0}(V;s) = (1-T)^{-2}$ を得る.

(3) $\Lambda_n$ を 1.2(3) の order とし, $T := p^{-s}$ と置く. すると $\overline{\mathfrak{L}}_{\Lambda_n}(A) = \{\Lambda_i\}_{0\le i\le n}$ が成立する. 例えば $\mathbf{Z}_{\Lambda_3}(A;s)$ は

$$(1-T)^{-1} \begin{pmatrix} 1-T+pT^2-pT^3+p^2T^4-p^2T^5+p^3T^6 & T-T^2+pT^3-pT^4+p^2T^5 & T^2-T^3+pT^4 & T^3 \\ pT-pT^2+p^2T^3-p^2T^4+p^3T^5 & 1-T+pT^2-pT^3+p^2T^4 & T-T^2+pT^3 & T^2 \\ p^2T^2-p^2T^3+p^3T^4 & pT-pT^2+p^2T^3 & 1-T+pT^2 & T \\ p^3T^3 & p^2T^2 & pT & 1 \end{pmatrix}.$$

これに行の基本変形を施すと,

$$(1-T)^{-1} \begin{pmatrix} 1-T & 0 & 0 & 0 \\ pT-pT^2+p^2T^3-p^2T^4+p^3T^5 & 1-T+pT^2-pT^3+p^2T^4 & T-T^2+pT^3 & T^2 \\ p^2T^2-p^2T^3+p^3T^4 & pT-pT^2+p^2T^3 & 1-T+pT^2 & T \\ p^3T^3 & p^2T^2 & pT & 1 \end{pmatrix}$$

となりこれは $\begin{pmatrix} 1 & O \\ * & \mathbf{Z}_{\Lambda_2}(A;s) \end{pmatrix}$ に等しい. 特に $\det \mathbf{Z}_{\Lambda_3}(A;s) = \det \mathbf{Z}_{\Lambda_2}(A;s)$ が成立する. 同様の議論で $\det \mathbf{Z}_{\Lambda_n}(A;s) = \det \mathbf{Z}_{\Lambda_0}(V;s) = (1-T)^{-1}$ を得る.

上の例 (2) 及び (3) で分かるように, しばしば $\Lambda$ の overorder の"良い"列 $\det \mathbf{Z}_\Lambda(A;s)$ を計算するのに用いる事が出来る. 一般にはそのように良い列は存在するとは限らない. しかし, overorder の良い列の一般化である (2.6) 右 rejective 鎖を代わりに用いる事が, 必ず出来る事を以下で見る.

**4.4** 以下 [I4] に従う. 我々のアプローチの基本は, Solomon ゼータ関数を $\operatorname{lat}\Lambda$ の部分圏に対して定義する事にある. $\operatorname{lat}\Lambda$ の部分圏 $\mathcal{C}$ に対し, $\mathfrak{L}_\Lambda(V)$ (resp. $\overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V)$) の元のうち $\mathcal{C}$ に含まれるものより成る部分集合を $\mathfrak{L}_\mathcal{C}(V)$ (resp. $\overline{\mathfrak{L}}_\mathcal{C}(V)$) と表す事にする. 更に $\mathbf{Z}_\Lambda(V;s)$ の小行列を $\mathbf{Z}_\mathcal{C}(V;s) := (\mathrm{Z}(L,M;s))_{L,M\in\overline{\mathfrak{L}}_\mathcal{C}(V)}$ で定める. 一般の部分圏 $\mathcal{C}$ に対しては, $\det \mathbf{Z}_\mathcal{C}(V;s)$ は 4.2(2) の形になるとは限らない. しかし 4.6(2) で見るように, $\Lambda$ のある極大 overring $\Gamma$ に対して, $\mathcal{C}$ から $\operatorname{lat}\Gamma$ への右 rejective 鎖 (2.6) が存在するならば $\det \mathbf{Z}_\mathcal{C}(V;s)$ を求める事ができ, 特に 4.2(2) の形になる事が分かる. 一方そのような $\mathcal{C}$ の例として, 次の 4.5 の様に $V \in \operatorname{mod} A$ から定まる部分圏 $\mathcal{C}_V$ がある. この時 $\mathbf{Z}_\Lambda(V;s) = \mathbf{Z}_{\mathcal{C}_V}(V;s)$ が成立するので, $\det \mathbf{Z}_\Lambda(V;s)$ も 4.2(2) の形をしている事が分かる.

**4.5 定理** $\Lambda$ を $R$-order, $V \in \operatorname{mod} A$ とし, $\mathcal{C}_V := \operatorname{add} \bigoplus_{X\in\operatorname{ind}(\operatorname{lat}\Lambda),\ X\subset V} X$ と置く. この時, ある $\Lambda$ の極大 overring $\Gamma$ に対して, $\mathcal{C}_V$ から $\operatorname{lat}\Gamma$ への右 rejective 鎖が存在する. 特に $\operatorname{End}_\Lambda(\bigoplus_{X\in\operatorname{ind}\mathcal{C}_V} X)$ は準遺伝 order となる.

**4.6** 主定理を述べる. $A = \prod_{j=1}^r A_j$ を単純 $K$-代数 $A_j$ への分解とする. $e_j$ を $A_j$ の単位元, $\Gamma_j$ を $A_j$ の中の $e_j\Lambda$ の極大 overorder とし, $\Gamma := \prod_{j=1}^r \Gamma_j$ と置く. $S_j$ を単純 $A_j$-加群とし, $G_j$ を単純 $\Gamma_j$-加群とすると, $(S_j)_{1\le j\le r}$ (resp. $(G_j)_{1\le j\le r}$) は単純 $A$-加群 (resp. 単純 $\Gamma$-加群) の同型類の完全代表系を与える. $X \in \operatorname{mod} A$ に対し $l_j(X)$ で $X$ の組成因子中の $S_j$ の重複度を表し, $q_j := \#\operatorname{End}_\Gamma(G_j) = p^{\dim_k \operatorname{End}_\Gamma(G_j)}$ $(1 \le j \le r)$ と置く. すると $q_j$ は $\Gamma_j$ の選択によらず一定である.

**定理** $\Lambda$ を $R$-order とし, $V \in \operatorname{mod} A$ に対して $V_j := V/S_j^{l_j(V)}$ $(1 \le j \le r)$ と置く.
(1) この時次式が成立する. 特に Solomon の第二予想は正しい.

$$\det \mathbf{Z}_\Lambda(V;s) = \prod_{j=1}^{r} \prod_{n=0}^{l_j(V)-1} (1 - q_j^{n-l_j(A)s})^{-\#\overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(S_j^n \oplus V_j)}.$$

(2) $\mathcal{C}$ を $\operatorname{lat}\Lambda$ の部分圏で, ある $\Lambda$ の極大 overring $\Gamma$ に対して $\mathcal{C}$ から $\operatorname{lat}\Gamma$ への右 rejective 鎖が存在するものとする. この時次式が成立する.

$$\det \mathbf{Z}_\mathcal{C}(V;s) = \prod_{j=1}^{r} \prod_{n=0}^{l_j(V)-1} (1 - q_j^{n-l_j(A)s})^{-\#\overline{\mathfrak{L}}_\mathcal{C}(S_j^n \oplus V_j)}.$$

**4.7** 以下で 4.6 の証明の概略を与える. 簡単の為 $r = 1$ 即ち $A$ が単純であると仮定し, $S := S_1$, $l := l_1$ 及び $q := q_1$ と置く. 更に, $V \in \operatorname{mod} K$ 及び $L, M \in \mathfrak{L}_R(V)$ に対

して $(L:M) := (L:L\cap M)\cdot(M:L\cap M)^{-1}$ と置く．この記号は歪対称的であり，$(L:M)\cdot(M:N)=(L:N)$ を満たす．次の 4.7.1 は容易に示される．

**4.7.1** 任意の $N\in\operatorname{lat}\Lambda$ に対し，ある写像 $b^N:\mathfrak{L}_\Lambda(V)\to\mathbb{R}_{>0}$ で，任意の $L,M\in\mathfrak{L}_\Lambda(V)$ に対して次を満たすものが存在する．

$$b^N_L\cdot(b^N_M)^{-1}=(\operatorname{Hom}_\Lambda(N,L):\operatorname{Hom}_\Lambda(N,M))\cdot(L:M)^{-l(\widetilde{N})/l(A)}$$

**4.7.2** 次の重要な補題は，4.3(2) および (3) の計算を一般化する．

**補題** $\mathcal{C}'\subset\mathcal{C}$ を右 rejective 鎖の続いた 2 項とし，$\operatorname{ind}\mathcal{C}-\operatorname{ind}\mathcal{C}'=\{X\}$ であるとする．この時 $X\subset V$ を満たす任意の $V\in\operatorname{mod}A$ に対して，ある対角行列 $\mathbf{B}$ と冪零行列 $\mathbf{C}$ が存在して次式が成立する．

$$(1-\mathbf{C})\cdot\mathbf{Z}_{\mathcal{C}}(V;s)=\begin{pmatrix}\mathbf{B}\cdot\mathbf{Z}_{\mathcal{C}}(V/\widetilde{X};s-l(\widetilde{X})/l(A))\cdot\mathbf{B}^{-1} & O\\ * & \mathbf{Z}_{\mathcal{C}'}(V;s)\end{pmatrix}$$

ここで行列 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ は，任意の $L\in\overline{\mathfrak{L}}_{\mathcal{C}}(V/\widetilde{X})$ に対して $\mathbf{B}_{L,L}=b^X_L$ 及び $\mathbf{C}_{X\oplus L,Y\oplus L}=(X:Y)^{-s}$ であり，他の成分は 0 であるものである．

**4.7.3 定理 4.6(2) の略証** 右 rejective 鎖 $\operatorname{lat}\Gamma=\mathcal{C}_m\subset\cdots\subset\mathcal{C}_1\subset\mathcal{C}_0=\mathcal{C}$ をとる．列を細分する事により，各 $\operatorname{ind}\mathcal{C}_n$ と $\operatorname{ind}\mathcal{C}_{n+1}$ が一つの元しか違わないと仮定しても良い事がわかる．$m=0$ の時 4.6(2) が成立する事は，(Hey の公式の最も単純な場合に相当し) 易しいので省略する．$\mathcal{C}':=\mathcal{C}_1$ に対して 4.6(2) が成立していると仮定する．この時，$\mathcal{C}$ に対しても 4.6(2) が成立する事を，$V$ の長さに関する帰納法で示す．その際に 4.7.2 を用いるが，$\det(1-\mathbf{C})=1$ が成立する事を注意しておく．

$$\begin{aligned}
&\det\mathbf{Z}_{\mathcal{C}}(V;s)\overset{4.7.2}{=}\det\mathbf{Z}_{\mathcal{C}}(V/\widetilde{X};s-l(\widetilde{X})/l(A))\cdot\det\mathbf{Z}_{\mathcal{C}'}(V;s)\\
=&\prod_{n=0}^{l(V/\widetilde{X})-1}(1-q^{n-l(A)(s-l(\widetilde{X})/l(A))})^{-\#\overline{\mathfrak{L}}_{\mathcal{C}}(S^n)}\cdot\prod_{n=0}^{l(V)-1}(1-q^{n-l(A)s})^{-\#\overline{\mathfrak{L}}_{\mathcal{C}'}(S^n)}\\
=&\prod_{n=0}^{l(V)-1}(1-q^{n-l(A)s})^{-\#\overline{\mathfrak{L}}_{\mathcal{C}}(S^{n-l(\widetilde{X})})-\#\overline{\mathfrak{L}}_{\mathcal{C}'}(S^n)}\\
=&\prod_{n=0}^{l(V)-1}(1-q^{n-l(A)s})^{-\#\overline{\mathfrak{L}}_{\mathcal{C}}(S^n)}
\end{aligned}$$

Krull-Schmidt の定理より $\#\overline{\mathfrak{L}}_{\mathcal{C}}(S^{n-l(\widetilde{X})})+\#\overline{\mathfrak{L}}_{\mathcal{C}'}(S^n)=\#\overline{\mathfrak{L}}_{\mathcal{C}}(S^n)$ となる事を用いた．∎

## 5 Solomon ゼータ関数と Ringel-Hall 代数

この章では Solomon ゼータ関数と Hall 代数の関係に付いて考察する．再び $R$ を完備離散付値環，$k$ を剰余体，$K$ を商体とし，$p:=\#k$ が有限であると仮定する．$\Lambda$ を $R$-order

とし, $A = \Lambda \otimes_R K$ が半単純であると仮定する. $\Lambda$-加群 $X, Y, Z$ に対し, $\mathcal{F}_{XZ}^{Y}$ で $Y$ の部分加群 $W$ で $W \simeq Z$ かつ $Y/W \simeq X$ となるもの全体を表し, $F_{XZ}^{Y} := \# \mathcal{F}_{XZ}^{Y} \in \mathbb{N}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ と置く. $\mathrm{fin}\,\Lambda$ で長さ有限の $\Lambda$-加群の同型類のなす集合を表す. $\Lambda$ は finitary なので, **Hall 代数** $\mathcal{H}(\Lambda)$ が, $(u_X)_{X \in \mathrm{fin}\,\Lambda}$ を基底に持つ自由 $\mathbb{Z}$-加群に積を $u_X u_Z := \sum_{Y \in \mathrm{fin}\,\Lambda} F_{XZ}^{Y} u_Y$ と定める事により定義される [R1]. $\mathcal{H}(\Lambda)$ は単位元 $u_0$ を持つ環を成す [R1].

次に Hall 代数の手法により $\mathcal{H}(\Lambda)$-加群の族を構成する. $V \in \mathrm{mod}\,A$ に対し, $(u_L)_{L \in \overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V)}$ (4.1) を基底に持つ自由 $\mathbb{Z}$-加群を $\mathcal{M}_V(\Lambda)$ で表す. $u_X \in \mathcal{H}(\Lambda)$ の $\mathcal{M}_V(\Lambda)$ への作用を $u_X u_M := \sum_{L \in \overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V)} F_{XM}^{L} u_L$ $(M \in \overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V))$ により定義すると, $\mathcal{M}_V(\Lambda)$ は $\mathcal{H}(\Lambda)$-加群を成す. これを **Hall 加群**と呼ぶ事にする.

**5.1** $T := p^{-s}$, $\widehat{\mathcal{H}}(\Lambda) := \varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{H}(\Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T]/(T^n)$ 及び $\widehat{\mathcal{M}}_V(\Lambda) := \mathcal{M}_V(\Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[[T]]$ と置くと, $\widehat{\mathcal{H}}(\Lambda)$ は自然に $\widehat{\mathcal{M}}_V(\Lambda)$ に作用する. ゼータ行列と Hall 代数の関係が次で与えられる.

**命題** $z := \sum_{X \in \mathrm{fin}\,\Lambda} u_X \otimes (\# X)^{-s} \in \widehat{\mathcal{H}}(\Lambda)$ と置く. この時, 自由 $\mathbb{Z}[[T]]$-加群 $\widehat{\mathcal{M}}_V(\Lambda)$ への $z$ の作用はゼータ行列 $\mathbf{Z}_\Lambda(V; s)$ により与えられる.

証明 $M \in \overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V)$ に対し, 次の計算より主張が従う.

$$
\begin{aligned}
z \cdot u_M &= \sum_{X \in \mathrm{fin}\,\Lambda} u_X u_M \otimes (\# X)^{-s} \\
&= \sum_{L \in \overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V)} u_L \otimes \sum_{X \in \mathrm{fin}\,\Lambda} F_{XM}^{L} (\# X)^{-s} \\
&= \sum_{L \in \overline{\mathfrak{L}}_\Lambda(V)} u_L \otimes \mathrm{Z}(L, M; s) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

**5.2 遺伝 order の Hall 代数と $U(\mathfrak{gl}_n)$**

以下 [I7] に従う. order $\Lambda$ が**遺伝的**とは $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = 1$ となる事であった. $\Delta = \widetilde{A}_{n-1}$ を $n$ 個の頂点を持つ巡回 quiver とし, 頂点の集合を $\Delta_0$ で表す. order $\Lambda$ が **$\Delta$ 型**であるとは, ある斜体の中の極大 order $\Omega$ が存在して $\mathrm{T}_n(\Omega) = \{(x_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\Omega) \mid x_{ij} \in J_\Omega \text{ for any } i > j\}$ と $\Lambda$ が森田同値になる事とする. この時 $q_\Lambda := \#(\Omega/J_\Omega)$ と置く. $\Delta$ 型の order は遺伝的であり, 逆に全ての遺伝 order はそのような order の直積に同型である [CR].

以下, $\Lambda$ は $\Delta$ 型の order とする. 各 $i \in \Delta_0$ に対し, 単純加群 $S_i = S_{i1} \in \mathrm{fin}\,\Lambda$ が定まる. また各 $j > 0$ に対し, 長さ $j$ の直既約加群 $S_{ij} \in \mathrm{fin}\,\Lambda$ で top が $S_i$ であるものが存在し, $(S_{ij})_{(i,j) \in \Delta_0 \times \mathbb{N}}$ が $\mathrm{fin}\,\Lambda$ の直既約加群全体を与える. 一方, $\Pi$ で $n$ 個の分割の組全体を表す事にする. 即ち, $\Pi$ の元 $\lambda$ は $\lambda = (1^{l_{i1}} 2^{l_{i2}} 3^{l_{i3}} \cdots)_{i \in \Delta_0}$ の様に表される. $M(\lambda) := \bigoplus_{(i,j) \in \Delta_0 \times \mathbb{N}} S_{ij}^{l_{ij}}$ と置く事により, 全単射 $M = M_\Lambda : \Pi \to \mathrm{fin}\,\Lambda$ を得る.

任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Pi$ に対し, **Hall 多項式**と呼ばれる $\phi_{\lambda\nu}^{\mu} \in \mathbb{Z}[T]$ で, 任意の $\Delta$ 型の order $\Lambda$ に対して $F_{M(\lambda)M(\nu)}^{M(\mu)} = \phi_{\lambda\nu}^{\mu}(q_\Lambda)$ が成立するものが存在する [Gu]. この時**一般 Hall 代数** $\mathcal{H}(\Delta)$ が, $(u_\lambda)_{\lambda \in \Pi}$ を基底に持つ自由 $\mathbb{Z}[T]$-加群に積を $u_\lambda u_\nu = \sum_{\mu \in \Pi} \phi_{\lambda\nu}^{\mu} u_\mu$ と定める事に

より定義される. 任意の $\Delta$ 型の order $\Lambda$ に対して, 同型 $M : \mathcal{H}(\Delta)/(T-q_\Lambda) \to \mathcal{H}(\Lambda)$ が $M(u_\lambda) := u_{M(\lambda)}$ により定まる. $n=1$ の時, $\mathcal{H}(\Delta)$ は古典的 Hall 代数 [M] である.

**5.2.1 一般 Hall 加群** $\Lambda$ を $\Delta$ 型の order, $A = \Lambda \otimes_R K$, $V$ を長さ $m$ の $A$-加群とする. 集合 $\Pi_m^\infty$ を, $\mu = (m_i)_{i\in\Delta_0}$ で $m_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ かつ $\sum_{i\in\Delta_0} m_i = m$ なるもの全体とする. 各 $i \in \Delta_0$ に対し, $S_i$ の射影被覆を $P_i$ とする. $M(\mu) := \bigoplus_{i\in\Delta_0} P_i^{m_i}$ と置く事により, 全単射 $M = M_\Lambda : \Pi_m^\infty \to \mathfrak{L}_V(\Lambda)$ が得られる.

任意の $\lambda \in \Pi$ 及び $\mu, \nu \in \Pi_m^\infty$ に対し, 多項式 $\phi_{\lambda\nu}^\mu \in \mathbb{Z}[T]$ で, 任意の $\Delta$ 型の order $\Lambda$ に対して $F_{M(\lambda)M(\nu)}^{M(\mu)} = \phi_{\lambda\nu}^\mu(q_\Lambda)$ が成立するものが存在する. この時**一般 Hall 加群**と呼ばれる $\mathcal{H}(\Delta)$-加群 $\mathcal{M}_m(\Delta)$ を, $(u_\mu)_{\mu\in\Pi_m^\infty}$ を基底に持つ自由 $\mathbb{Z}[T]$-加群に作用を $u_\lambda u_\nu = \sum_{\mu\in\Pi_m^\infty} \phi_{\lambda\nu}^\mu u_\mu$ と定める事により定義する. 任意の $\Delta$ 型の order $\Lambda$ に対して, $\mathcal{H}(\Delta)$-加群の同型 $M : \mathcal{M}_m(\Delta)/(T-q_\Lambda) \to \mathcal{M}_V(\Lambda)$ が $M(u_\mu) := u_{M(\mu)}$ により定まる.

**5.2.2** $\mathcal{H}(\Delta)_1^{\mathbb{C}} := \mathcal{H}(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}/(T-1)$ および $\mathcal{M}_m(\Delta)_1^{\mathbb{C}} := \mathcal{M}_m(\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}/(T-1)$ と置くと, $\mathcal{M}_m(\Delta)_1^{\mathbb{C}}$ は $\mathcal{H}(\Delta)_1^{\mathbb{C}}$-加群を成す. 一方, $e_i$ を $(i,i)$-成分が 1 で他が 0 である $\mathfrak{gl}_n$ の元とし, $h_i := e_i - e_{i+1}$ と置く. $\omega_1$ を, $\omega_1(h_i) = \delta_{1i}$ $(1 \leq i < n)$ により定義される $\mathfrak{sl}_n$ の基本ウェイトとする.

**定理** $\mathcal{H}(\Delta)_1^{\mathbb{C}}$ の両側イデアル $I$ で以下の性質を満たすものが存在する.
(1) $\mathcal{H}(\Delta)_1^{\mathbb{C}}/I$ は $\mathfrak{gl}_n$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ に同型.
(2) 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathcal{H}(\Delta)_1^{\mathbb{C}}$-加群 $\mathcal{M}_m(\Delta)_1^{\mathbb{C}}$ は $I\,\mathcal{M}_m(\Delta)_1^{\mathbb{C}} = 0$ を満たし, $\mathcal{M}_m(\Delta)_1^{\mathbb{C}}$ の $U(\mathfrak{sl}_n)$ への制限は最高ウェイトが $m\omega_1$ の $\binom{m+n-1}{n-1}$ 次元既約加群である.

特に $n=2$ の場合, $(\mathcal{M}_m(\Delta)_1^{\mathbb{C}})_{m\in\mathbb{N}}$ は全ての有限次既約 $U(\mathfrak{sl}_2)$-加群を与える. 一般に, 全ての既約 $U(\mathfrak{sl}_n)$-加群を Hall 代数の手法で実現する事は, 興味深い問題と思われる.

## References


[A1] M. Auslander: Representation dimension of Artin algebras, Lecture notes, Queen Mary College, London, 1971.

[A2] M. Auslander: Isolated singularities and existence of almost split sequences. Representation theory, II (Ottawa, Ont., 1984), 194–242, Lecture Notes in Math., 1178, Springer, Berlin-New York, 1986.

[AB] M. Auslander, R. O. Buchweitz: The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations, Soc. Math. de France, Mem. no. 38 (1989) 5–37.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smal: Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[AS1] M. Auslander, S. O. Smalo: Preprojective modules over Artin algebras. J. Algebra 66 (1980), no. 1, 61–122.

[AS2] M. Auslander, S. O. Smalo: Almost split sequences in subcategoies. J. Algebra 69 (1981), no. 2, 426–454.

[As] H. Asashiba: On realization of simple Lie algebras via Hall algebras, preprint.

[B] H. Bass: Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960) 466-488.

[BR1] C. J. Bushnell, I. Reiner: Zeta functions of arithmetic orders and Solomon's conjectures. Math. Z. 173 (1980), no. 2, 135–161.

[BR2] C. J. Bushnell, I. Reiner: Zeta-functions of orders. Integral representations and applications (Oberwolfach, 1980), pp. 159–173, Lecture Notes in Math., 882, Springer, Berlin-New York, 1981.

[BR3] C. J. Bushnell, I. Reiner: The prime ideal theorem in noncommutative arithmetic. Math. Z. 181 (1982), no. 2, 143–170.

[BR4] C. J. Bushnell, I. Reiner: New asymptotic formulas for the distribution of left ideals of orders. J. Reine Angew. Math. 364 (1986), 149–170.

[CPS1] E. Cline, B. Parshall, L. Scott: Finite-dimensional algebras and highest weight categories. J. Reine Angew. Math. 391 (1988), 85–99.

[CPS2] E. Cline, B. Parshall, L. Scott: Algebraic stratification in representation categories. J. Algebra 117 (1988), no. 2, 504–521.

[CR] C. W. Curtis, I. Reiner: Methods of representation theory. Vol. I. With applications to finite groups and orders. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

[D] M. Denert: Solomon's second conjecture: a proof for local hereditary orders in central simple algebras. J. Algebra 139 (1991), no. 1, 70–89.

[DK1] Y. A. Drozd, V. V. Kiričenko: The quasi-Bass orders. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 36 (1972), 328–370.

[DK2] Y. A. Drozd, V. V. Kiričenko: Primary orders with a finite number of indecomposable representations. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 37 (1973), 715–736.

[DKR] Y. A. Drozd, V. V. Kiričenko, A. V. Roĭter: Hereditary and Bass orders. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 31 1967 1415–1436.

[DR1] V. Dlab, C. M. Ringel: Quasi-hereditary algebras. Illinois J. Math. 33 (1989), no. 2, 280–291.

[DR2] V. Dlab, C. M. Ringel: Every semiprimary ring is the endomorphism ring of a projective module over a quasihereditary ring. Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), no. 1, 1–5.

[DR3] V. Dlab, C. M. Ringel: Auslander algebras as quasi-hereditary algebras. J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no. 3, 457–466.

[DW] E. Dieterich, A. Wiedemann: The Auslander-Reiten quiver of a simple curve singularity, Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986) 455-475.

[EHIS] K. Erdmann, T. Holm, O. Iyama, J. Schröer: Radical embeddings and representation dimension, preprint.

[FGR] R. M. Fossum, P. Griffith, I. Reiten: Trivial extensions of abelian categories. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 456. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[G] V. M. Galkin: Zeta-functions of certain one-dimensional rings. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 37 (1973), 3–19.

[Gu] J. Guo: The Hall polynomials of a cyclic serial algebra. Comm. Algebra 23 (1995), no. 2, 743–751.

[HN1] H. Hijikata, K. Nishida: Classification of Bass orders. J. Reine Angew. Math. 431 (1992), 191–220.

[HN2] H. Hijikata, K. Nishida: Bass orders in nonsemisimple algebras. J. Math. Kyoto Univ. 34 (1994), no. 4, 797–837.

[HN3] H. Hijikata, K. Nishida: Primary orders of finite representation type. J. Algebra 192 (1997), no. 2, 592–640.

[I1] O. Iyama: A generalization of rejection lemma of Drozd-Kirichenko. J. Math. Soc. Japan 50 (1998), no. 3, 697–718.

[I2] O. Iyama: Some categories of lattices associated to a central idempotent. J. Math. Kyoto Univ. 38 (1998), no. 3, 487–501.

[I3] O. Iyama: $\tau$-categories I–III, to appear in Algebras and Representation theory.

[I4] O. Iyama: A proof of Solomon's second conjecture on local zeta functions of orders, to appear in Journal of Algebra.

[I5] O. Iyama: Finiteness of Representation dimension, to appear in Proceedings of the American Mathematical Society.

[I6] O. Iyama: The relationship between homological properties and representation theoretic realization of artin algebras, preprint.

[I7] O. Iyama: On Hall algebras of hereditary orders, preprint.

[I8] O. Iyama: On the representation dimension of orders, preprint.

[IT] K. Igusa, G. Todorov: On the finitistic global dimension conjecture, preprint.

[KW] S. König, A. Wiedemann: Global dimension two orders are quasi-hereditary. Manuscripta Math. 66 (1989), no. 1, 17–23.

[L] S. Lang: Algebraic number theory. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley 1970.

[Lu] G. Lusztig: Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc., 4 (1991), 365-421.

[M] I. G. Macdonald: Symmetric functions and Hall polynomials. Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995. x+475 pp.

[R1] C. M. Ringel: Hall algebras. Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), 433–447, Banach Center Publ., 26, Part 1, PWN, Warsaw, 1990.

[R2] C. M. Ringel: The composition algebra of a cyclic quiver. Proc. London Math. Soc. (3) 66 (1993), no. 3, 507–537.

[Ro1] K. W. Roggenkamp: Lattices over orders. II. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 142 Springer-Verlag, Berlin-New York 1970.

[Ro2] K. W. Roggenkamp: The construction of almost split sequences for integral group rings and orders. Comm. Algebra 5 (1977), 1363-1373.

[Ru1] W. Rump: Lattice-finite rings, preprint.

[Ru2] W. Rump: The category of lattices over a lattice-finite ring, preprint.

[S1] L. Solomon: Zeta functions and integral representation theory. Advances in Math. 26 (1977), no. 3, 306–326.

[S2] L. Solomon: Partially ordered sets with colors. Relations between combinatorics and other parts of mathematics (Proc. Sympos. Pure Math., Ohio State Univ., Columbus, Ohio, 1978), pp. 309–329, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIV, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Sc] O. Schiffmann: The Hall algebra of a cyclic quiver and canonical bases of Fock spaces. Internat. Math. Res. Notices 2000, no. 8, 413–440.

[T] H. Tachikawa: Quasi-Frobenius rings and generalizations. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 351. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[W] A. Wiedemann: Classification of the Auslander-Reiten quivers of local Gorenstein orders and a characterization of the simple curve singularities. J. Pure Appl. Algebra 41 (1986), no. 2-3, 305–329.

[X1] C. C. Xi: On the representation dimension of finite dimensional algebras. J. Algebra 226 (2000), no. 1, 332–346.

[X2] C. C. Xi: Representation dimension and quasi-hereditary algebras, to appear in Adv. Math.

[Y] Y. Yoshino: Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings. London Mathematical Society Lecture Note Series, 146. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. viii+177 pp.

[Z] H. B. Zimmermann: The finitistic dimension conjectures—a tale of 3.5 decades. Abelian groups and modules (Padova, 1994), 501–517, Math. Appl., 343, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

Department of Mathematics, Himeji Institute of Technology, Shosha 2167, Himeji, 671-2201, Japan

*iyama@sci.himeji-tech.ac.jp*

# Gorenstein form rings

Shin-ichiro Iai
Hokkaido University of Education

## 1 Introduction.

This is a joint work with S. Goto. Let $A$ be a Gorenstein local ring with the maximal ideal $\mathfrak{m}$ and $\dim A = d$. Let $I(\neq A)$ be an ideal in $A$ of height $s$. This article studies the question of when the form ring $\mathcal{G}(I) := \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ is Gorenstein. We always assume that the ring $\mathcal{G}(I)$ is Cohen-Macaulay and the field $A/\mathfrak{m}$ is infinite. Therefore there exists an $A$-regular sequence $a_1, a_2, \cdots, a_s$ in $I$, which is super regular. We set $J_i = (a_1, a_2, \cdots, a_i)$ for $0 \leq i \leq s$. Let $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I))$ stand for the $a$-invariant of $\mathcal{G}(I)$. We write

$$n = \mathrm{n}(I) := \max\{\mathrm{a}(\mathcal{G}(I_{\mathfrak{p}})) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Assh} A/I\} + s.$$

Then we have $n \geq 0$. If $n = 0$, then the ideal $I$ is generically a complete intersection. Let $\ell = \lambda(I) := \dim A/\mathfrak{m} \otimes_A \mathcal{G}(I)$. We say that our ideal $I$ is height unmixed if all associated prime ideals of $I$ have same codimension. With this notation the main result of this article can be stated as follows.

**Theorem 1.1.** *Assume that $I$ is a height unmixed ideal with $s > 0$ and* $\operatorname{depth} A/I^i + J_s \geq \min\{d-s, d-s+n-i\}$ *for all $1 \leq i \leq n-s+\ell$. Then the following two conditions are equivalent.*

(1) *$\mathcal{G}(I)$ is a Gorenstein ring.*

(2) *$\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) = n - s$ and $J_s^n : I^n \subseteq I^n$.*

Many authors have investigated the Gorenstein property of the form rings of ideals. However, all authors we recall assumed the number $\mathrm{n}(I)$ to be at most 1 and we lack satisfactory references analyzing ideals for which $\mathrm{n}(I)$ is large. In our result we have assumed that the ideal $I$ is height unmixed. But it enables us to handle even the case where the number $\mathrm{n}(I)$ is arbitrary.

Our proof of Theorem 1.1 is based on reduction to the case where $s = 0$. But our result in such a case is entirely different from that in the case where $s$ is positive. Let us state the following.

**Theorem 1.2.** *Assume that $I$ is a height unmixed ideal with $s = 0$ and* $\operatorname{depth} A/I^i \geq \min\{d, d+n-i\}$ *for all $1 \leq i \leq n+\ell$. Then the following two conditions are equivalent.*

(1) *$\mathcal{G}(I)$ is a Gorenstein ring.*

(2) *$\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) = n$ and $(0) : I^i \subseteq I^{n-i+1}$ for all $1 \leq i \leq n$.*

Throughout this paper we denote $\mathcal{G}(I)$ simply by $G$. Let $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}G + G_+$. We denote by $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(*)$ $(i \in \mathbb{Z})$ the $i^{\underline{\text{th}}}$ local cohomology functor of $G$ with respect to $\mathfrak{M}$. For each graded $G$-module $E$, let $[E]_n$ stand for the homogeneous component of $E$ of degree $n$ and let $\mathrm{a}_i(E) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(E)]_n \neq (0)\}$ $(i \in \mathbb{Z})$. Put $E_{\geq m} = \oplus_{i \geq m} E_i$ for each $m \in \mathbb{Z}$. We denote by $\mathrm{K}_G$ the graded canonical modules of $G$.

# 2 Proof of Theorem 1.2.

The goal of this section is to prove Theorem 1.2. Let $s = 0$. Then $n = \max\{\mathrm{r}_{(0)_\mathfrak{p}}(I_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Assh} A/I\}$. Let $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ stand for the canonical $I$-filtration of $\mathrm{K}_A$ ([GI]). Hence we have $I^{i+1} \subseteq \omega_{-\mathrm{a}(G)+i}$ for all $i \in \mathbb{Z}$ and $\mathrm{K}_G \cong \bigoplus_{i \geq -\mathrm{a}(G)} \omega_{i-1}/\omega_i$ as graded $G$-modules. We put $\mathfrak{a} = (0) : I$ and $T = \mathcal{G}(IA/\mathfrak{a})$. Let us begin with the following lemma, which does not need Gorensteinness of the ring $A$.

**Lemma 2.1.** *Assume that $G$ is a Cohen-Macaulay ring with $\mathrm{a}(G) = n$ and $I^n \supseteq \mathfrak{a}$. Then the following two assertions are satisfied:*

(1) *$T$ is a Cohen-Macaulay ring if $A/\mathfrak{a}$ is a Cohen-Macaulay ring.*

(2) *$\omega_{-n} = I\mathrm{K}_A$ and $\mathrm{a}(T) \leq n-1$ if $\mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A$ satisfies the Serre's condition $(S_1)$.*

*Proof.* We consider the natural exact sequence

$$0 \to \ker \varepsilon \to G \xrightarrow{\varepsilon} T \to 0 \qquad (\sharp)$$

of graded $G$-modules. We put $L = \ker \varepsilon$. Then $L = L_n = \mathfrak{a}$ because $I^{n+1} \cap \mathfrak{a} = (0)$ and $I^n \supseteq \mathfrak{a}$.

(1) Assume that $A/\mathfrak{a}$ is a Cohen-Macaulay ring. We apply the local cohomology functors $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(*)$ $(i \in \mathbb{Z})$ to the graded exact sequences $(\sharp)$. Then by the resulting graded exact sequences

$$0 \to \mathrm{H}^{d-1}_{\mathfrak{M}}(T) \to \mathrm{H}^d_{\mathfrak{M}}(L) \to \mathrm{H}^d_{\mathfrak{M}}(G) \to \mathrm{H}^d_{\mathfrak{M}}(T) \to 0$$

and

$$0 \to \mathrm{H}^{i-1}_{\mathfrak{M}}(T) \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(L) \to 0 \ (i \leq d-1)$$

of local cohomology modules, we have $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(T) = [\mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(T)]_n$ for all $i \leq d-1$ and $\mathrm{a}(T) \leq n$ because $L = L_n$ and $\mathrm{a}(G) = n$. From [KN], 3.1 we obtain that $T$ is a Cohen-Macaulay ring.

(2) Suppose that $\mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A$ satisfies the Serre's condition $(S_1)$. Then $\mathrm{ht}_A\, \mathfrak{q} = 0$ for all $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_A \mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A$. Take the $\mathrm{K}_G$-dual of the sequence $(\sharp)$, and we get the exact sequence

$$0 \to \mathrm{K}_T \to \mathrm{K}_G \to \operatorname{Hom}_G(L, \mathrm{K}_G) \to \operatorname{Ext}^1_G(T, \mathrm{K}_G) \to 0$$

of graded $G$-modules. Let $[\ \ ]^* = \operatorname{Hom}_A(\ \ , \mathrm{K}_A)$. We see $\operatorname{Hom}_G(L, \mathrm{K}_G) \cong [\mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A]^{**}$ as $A$-module because $L_n \cong \operatorname{Hom}_A(A/I, A) \cong \operatorname{Hom}_A(\mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A, \mathrm{K}_A)$. Then by $[\mathrm{K}_G]_{-n} \cong \mathrm{K}_A/\omega_{-n}$ we get $A$-linear map $\phi : \mathrm{K}_A/\omega_{-n} \to [\mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A]^{**}$. Since $I\mathrm{K}_A \subseteq \omega_{-n}$, we have the natural surjective map $\pi : \mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A \to \mathrm{K}_A/\omega_{-n}$. Let $\varphi = \phi \circ \pi$. We put $K = \ker \varphi$. We want to show $K = (0)$. Assume that $K \neq (0)$ and choose $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A K$. Then $\mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p} = 0$.

We see the map $\varphi_{\mathfrak{p}} : (\mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A)_{\mathfrak{p}} \to ([\mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A]^{**})_{\mathfrak{p}}$ is surjective, as $\mathrm{Ext}^1_G(T, \mathrm{K}_G)_{\mathfrak{p}} = (0)$. Moreover we have the canonical isomorphism $([\mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A]^{**})_{\mathfrak{p}} \cong (\mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A)_{\mathfrak{p}}$ because $(\mathrm{K}_A/I\mathrm{K}_A)_{\mathfrak{p}}$ is Cohen-Macaulay, and hence we get the map $\varphi_{\mathfrak{p}}$ is bijective. This is a contradiction. Therefore $K = (0)$, so that $\varphi$, $\pi$, and $\phi$ are injective. Thus we have $\mathrm{a}(T) \leq n-1$ and $\omega_{-n} = I\mathrm{K}_A$. □

Now let us prove Theorem 1.2. To do this, we may assume the number $n$ is positive (see [I]).

*Proof of Theorem 1.2.* Suppose that $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) = n$ and $(0) : I^i \subseteq I^{n-i+1}$ for all $1 \leq i \leq n$. We may assume $\ell > 0$ by [GI], 2.4. Let $0 \leq j \leq n$. Put $A_j = A/(0) : I^j$. Then the ring $A_j$ is a Cohen-Macaulay ring of $\dim A_j = d$ because so is $A/I^j$. We note that $\mathrm{ht}_A IA_j = 0$ and $\lambda(IA_j) = \ell$. The canonical module of $A_j$ is $I^j$, as $I^j = (0) : [(0) : I^j]$. Let $n_j = \mathrm{n}(IA_j)$. It is routine to check $n_j = n - j$ and $I^{n_j}A_j \supseteq (0) : IA_j$. Let $T_j = \mathcal{G}(IA_j)$. We denote by $\{\omega_i^{(j)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ the canonical $IA_j$-filtration of $I^j$.

**Claim 2.2.** *$T_j$ is a Cohen-Macaulay ring with $\mathrm{a}(T_j) = n_j$.*

*Proof.* We prove by induction on $j$. The assertion is true if $j = 0$, as $G = T_0$ and $n = n_0$. Let $j > 0$ and assume that it is true for $j - 1$. We have $A_{j-1}/(0) : IA_{j-1} \cong A_j$, which is Cohen-Macaulay. We see $\mathrm{K}_{A_{j-1}}/I\mathrm{K}_{A_{j-1}} = I^{j-1}/I^j$ that satisfies the Serre's condition $(S_1)$ because $I^j$ is a height unmixed ideal. Then by Lemma 2.1 we get $T_j$ is a Cohen-Macaulay ring with $\mathrm{a}(T_j) \leq n_{j-1}-1$. Hence $\mathrm{a}(T_j) = n_j$ because $n_{j-1}-1 = n-(j-1)-1 = n-j = n_j$ and $\mathrm{a}(T_j) \geq n_j$ (recall that $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) \geq \mathrm{a}(\mathcal{G}(I)_{\mathfrak{p}})$ for all $\mathfrak{p} \in \mathrm{Assh}_A A/I$). □

**Claim 2.3.** *If $0 \leq j < n$, then $\omega_{-n_j}^{(j)} = I^{j+1}$ and hence $[\mathrm{K}_{T_j}]_{n_j} = I^j/I^{j+1}$.*

*Proof.* $T_j$ is a Cohen-Macaulay ring with $\mathrm{a}(T_j) = n_j$ and $\mathrm{K}_{A_j}/I\mathrm{K}_{A_j} = I^j/I^{j+1}$ that satisfies the Serre's condition $(S_1)$. Hence the assertion follows from Lemma 2.1. □

Here we note that $IA_n$ is generically a complete intersection, as $A_n \cong A/(0) : I^n$.

**Claim 2.4.** *$\mathrm{K}_{T_n} \cong G_{\geq n}(n)$ as graded $G$-modules.*

*Proof.* Let $1 \leq i \leq \ell$. In order to prove the assertion, we shall show that $\mathrm{depth}\, A_n/I^iA_n \geq d - i + 1$. Look at the exact sequence

$$0 \to A/(0) : I^n \cap I^i \to A/(0) : I^n \oplus A/I^i \to A/(0) : I^n + I^i \to 0$$

of $A$-modules. We have $(0) : I^n \cap I^i = (0) : I^{n-i+1}$. In fact, if $i \geq n+1$, then $(0) : I^n \cap I^i = (0) = (0) : I^{n-i+1}$. Let $i \leq n$. Then the inclusion $(0) : I^n \cap I^i \supseteq (0) : I^{n-i+1}$ is obvious. Assume that we can find $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A \frac{(0):I^n \cap I^i}{(0):I^{n-i+1}}$. Since $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = 0$, we see $I^i_{\mathfrak{p}} = (0) : I^{n-i+1}_{\mathfrak{p}}$ and hence $(0) : I^n_{\mathfrak{p}} \cap I^i_{\mathfrak{p}} = (0) : I^{n-i+1}_{\mathfrak{p}}$. This contradicts to the choice of $\mathfrak{p}$. Therefore $A/(0) : I^n \cap I^i = A/(0) : I^{n-i+1}$, which is a $d$-dimensional Cohen-Macaulay ring. Since $A/(0) : I^n$ is Cohen-Macaulay, we get $\mathrm{depth}\, A_n/I^iA_n = \mathrm{depth}\, A/I^i \geq \min\{d, d+n-i\} \geq d-i+1$ by the depth lemma. Then by $T_n$ is a Cohen-Macaulay ring with $\mathrm{a}(T_j) = 0$, it follows from [GNN1], 1.1 that $\mathrm{K}_{T_n}$ is generated by elements of degree 0. Therefore thanks to [HSV], 2.4, we obtain that $\mathrm{K}_{T_n} \cong G_{\geq n}(n)$ as graded $G$-modules, as $\mathrm{K}_{A_n} = I^n$. □

**Claim 2.5.** *$\mathrm{K}_{T_j} \cong G_{\geq j}(n)$ as graded $G$-modules.*

*Proof.* Descending induction on $j$. We may assume $j < n$ and it is true for $j+1$ by claim above. Consider the natural exact sequence

$$0 \to L \to T_j \to T_{j+1} \to 0$$

of graded $G$-modules. We have $L = L_{n_j} = (0) : IA_j$. Take the $\mathrm{K}_{T_j}$-dual of this, and we get the exact sequence

$$0 \to \mathrm{K}_{T_{j+1}} \to \mathrm{K}_{T_j} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}_{T_j}}(L, \mathrm{K}_{T_j}) \to 0$$

of graded $G$-modules. By the inductive hypothesis on $j$, we get $\mathrm{K}_{T_{j+1}} \cong G_{\geq j+1}(n)$ and hence $G_{\geq j+1}(n) \cong [\mathrm{K}_{T_j}]_{\geq -n_j+1}$ as graded $G$-modules because $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}_{T_j}}(L, \mathrm{K}_{T_j})$ is concentrated in degree $-n_j$.

Now let us prove $\omega^{(j)}_{-n_j+i} = I^{i+j+1}$ for all $i \geq 0$ by induction on $i$. By Claim 2.3 we may assume that $i > 0$ and $\omega^{(j)}_{-n_j+i-1} = I^{i+j}$. Then by $G_{\geq j+1}(n) \cong [\mathrm{K}_{T_j}]_{\geq -n_j+1}$ we get $I^{i+j}/I^{i+j+1} \cong \omega^{(j)}_{-n_j+i-1}/\omega^{(j)}_{-n_j+i} = I^{i+j}/\omega^{(j)}_{-n_j+i}$, and hence the natural surjective map $I^{i+j}/I^{i+j+1} \to I^{i+j}/\omega^{(j)}_{-n_j+i}$ is bijective (recall that $I^{i+j+1} \subseteq \omega^{(j)}_{-n_j+i}$). Thus $\omega^{(j)}_{-n_j+i} = I^{i+j+1}$ and the proof of claim is completed. $\square$

Thus we see $\mathrm{K}_G \cong G(n)$ as graded $G$-modules and hence $G$ is a Gorenstein ring.

Conversely suppose $G$ is a Gorenstein ring. Then $\mathrm{a}(G) = \mathrm{a}(\mathcal{G}(I_\mathfrak{q}))$ for all $\mathfrak{q} \in \mathrm{V}(I)$, so that $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) = n$. By [GI], 4.4, we have $(0) : I^i \subseteq I^{n-i+1}$ for all $1 \leq i \leq n$. $\square$

# 3 Proof of Theorem 1.1.

The purpose of this section is to prove Theorem 1.1. Let $s > 0$. We may assume the number $n$ is positive (see [I]). We always assume depth $A/I^i + J_s \geq \min\{d-s, d-s+n-i\}$ for all $1 \leq i \leq n - s + \ell$. Recall that the $A$-regular sequence $a_1, \dots, a_s$ is super regular. Then $J_s \cap I^i = J_s I^{i-1}$ for all $1 \leq i \leq n$ by [VV]. We get $J_s A_\mathfrak{p}$ is a minimal reduction of $IA_\mathfrak{p}$ for all $\mathfrak{p} \in \mathrm{Assh}\, A/I$ because the ring $\mathcal{G}(I/J_s)_\mathfrak{p}$ is finitely graded. Moreover we have $n = \max\{\mathrm{r}_{J_{s\mathfrak{p}}}(I_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Assh}\, A/I\}$ by $a$-invariant formula. To begin with, we note

**Lemma 3.1.** *The ring $A/I^i + J_j$ is a Cohen-Macaulay ring if $0 \leq j \leq s$ and $1 \leq i \leq n$.*

*Proof.* Let us prove the claim by descending induction on $j$. The assertion being trivial for $j = s$, we may assume that $j < s$ and that it is true for $j+1$. We need to show that $A/I^i + J_j$ is a Cohen-Macaulay ring. Suppose that this is not true and take an integer $1 \leq i \leq n$ as small as possible, so that we have $i > 1$. We set $\overline{A} = A/J_j$. Then $\overline{A}/I^i\overline{A} + a_{j+1}\overline{A}$ is Cohen-Macaulay by the inductive hypothesis on $j$. We consider the canonical exact sequence

$$0 \to \frac{I^i\overline{A} + a_{j+1}\overline{A}}{I^i\overline{A}} \to \frac{\overline{A}}{I^i\overline{A}} \to \frac{\overline{A}}{I^i\overline{A} + a_{j+1}\overline{A}} \to 0.$$

We have $a_1, a_2, \dots a_s$ is an $A$-regular sequence, so that $J_j \cap I^i = J_j I^{i-1}$ if $0 \leq j \leq s$ and $1 \leq i \leq n$. Therefore we get the isomorphisms

$$\frac{I^i\overline{A} + a_{j+1}\overline{A}}{I^i\overline{A}} \cong \frac{a_{j+1}\overline{A}}{a_{j+1}I^{i-1}\overline{A}} \cong \frac{\overline{A}}{I^{i-1}\overline{A}}.$$

We obtain that $\overline{A}/I^{i-1}\overline{A}$ is a Cohen-Macaulay ring by the minimality of $i$, and hence so is $\overline{A}/I^{i}\overline{A}$ by the depth lemma. This is a contradiction. Thus we have completed the proof of Lemma 3.1. $\square$

As a direct consequence of Lemma 3.1, we get the following.

**Corollary 3.2.** *$I^n$ is a height unmixed ideal.*

We now ready to prove Theorem 1.1.

*Proof of Theorem 1.1.* Suppose that $G$ is a Gorenstein ring. Then we have $\mathrm{a}(G) = \mathrm{a}(\mathcal{G}(I_{\mathfrak{q}}))$ for all $\mathfrak{q} \in \mathrm{V}(I)$, so that $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) = n - s$. We want to show $J_s^n : I^n \subseteq I^n$. Let $L = \frac{J_s^n : I^n + I^n}{I^n}$. Assume that $L \neq (0)$ and take $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A L$. Then we get $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = s$ by Corollary 3.2. Since $\mathrm{r}_{J_{s\mathfrak{p}}} I_{\mathfrak{p}} = \mathrm{a}(\mathcal{G}(I_{\mathfrak{p}})) - s = \mathrm{a}(G) - s = n$ and $\mathcal{G}(I_{\mathfrak{p}})$ is a Gorenstein ring, we get $J_{s\mathfrak{p}}^n : I_{\mathfrak{p}}^n = I_{\mathfrak{p}}^n$ by [GI], 1.4. This is a contradiction. Thus $L = (0)$ and hence we have $J_s^n : I^n \subseteq I^n$.

Conversely suppose that $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) = n - s$ and $J_s^n : I^n \subseteq I^n$. Let $1 \leq i \leq n$. Thanks to Theorem 1.2, it is enough to show $J_s : I^i \subseteq I^{n-i+1} + J_s$ because the $A$-regular sequence $a_1, \ldots, a_s$ is super regular. Assume that there exists $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A \frac{J_s : I^i + I^{n-i+1}}{I^{n-i+1} + J_s}$. Then $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = s$, as the ring $A/I^{n-i+1} + J_s$ is Cohen-Macaulay. Let $r = \mathrm{r}_{J_{s\mathfrak{p}}}(I_{\mathfrak{p}})$. Then $r \leq n$. We have $I_{\mathfrak{p}}^r \subseteq J_{s\mathfrak{p}}^r : I_{\mathfrak{p}}^r \subseteq J_{s\mathfrak{p}}^n : I_{\mathfrak{p}}^n \subseteq I_{\mathfrak{p}}^n$ (see [GI], Claim 2). Therefore $r = n$ and $J_{s\mathfrak{p}}^n : I_{\mathfrak{p}}^n = I_{\mathfrak{p}}^n$, so that we get $\mathcal{G}(I_{\mathfrak{p}})$ is a Gorenstein ring by [GI], 1.4 and hence so is $\mathcal{G}(I(A/J_s)_{\mathfrak{p}})$. Then $(0)(A/J_s)_{\mathfrak{p}} : I^i(A/J_s)_{\mathfrak{p}} = I^{n-i+1}(A/J_s)_{\mathfrak{p}}$ by [O]. Consequently $J_{s\mathfrak{p}} : I_{\mathfrak{p}}^i = I_{\mathfrak{p}}^{n-i+1} + J_{s\mathfrak{p}}$, which is impossible. Thus we get $J_s : I^i \subseteq I^{n-i+1} + J_s$. $\square$

# References


[GI] S. Goto and S.-i. Iai, Embeddings of certain graded rings into their canonical modules, J. Algebra, 228 (2000), 377-396.

[GNN1] S. Goto, Y. Nakamura, and K. Nishida, Cohen-Macaulayness in graded rings associated to ideals, J. Math. Kyoto Univ. 36 (1996), 229-250.

[HSV] J. Herzog, A. Simis, and W. V. Vasconcelos, On the canonical module of the Rees algebra and the associated graded ring of an ideal, J. Algebra 105 (1987), 285-302.

[I] S.-i. Iai, Gorenstein graded rings associated to ideals, The reports of 23rd Symposium on Commutative Ring Theory (2002).

[KN] T. Korb and Y. Nakamura, On the Cohen-Macaulayness of multi-Rees algebras and Rees algebras of powers of ideals, J. Math. Soc. Japan, 50 (1998), 451-467.

[O] A. Ooishi, On the Gorenstein Property of the Associated Graded Ring and the Rees Algebra of an ideal, J. Algebra, 115 (1993), 397-414.

[VV] P. Valabrega and G. Valla, Form rings and regular sequences, Nagoya Math. J., 72 (1978), 93-101.



Mathematics laboratory
Hokkaido University of Education, Sapporo
002-8502 JAPAN
e-mail: iai@sap.hokkyodai.ac.jp

# Associated Graded Ring の Depth について

**千葉大学自然科学研究科**
**西田　康二**

Cohen-Macaulay 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ のイデアル $I$ に随伴する次数付き環 $\mathrm{G}(I) = \oplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$ の Cohen-Macaulay 性を調べるという問題については既に多くの研究がなされている。古くは、Valabrega-Valla による super regular sequence の特徴付けから直ちに導かれる結果で reduction number が 1 以下の $\mathfrak{m}-$ 準素イデアルに関するものが有名である。一方、$s := \mathrm{ht}_A\, I < d := \dim A$ の場合には、斉次元のみからなるパラメーター系がとれなくなる為、新しいアイディアが必要とされた。そこで Huckaba と Huneke は [3, 4] において $I$ の analytic spread $\ell(I) = \dim A/\mathfrak{m} \otimes_A \mathrm{G}(I)$ と $\mathrm{ht}_A\, I$ の差 $\mathrm{ad}(I) = \ell(I) - \mathrm{ht}_A\, I$ (これを $I$ の analytic deviation と言う) に注目して $I$ の解析を進めようという試みを始め、$\mathrm{ad}(I) \leq 2$ の場合に $\mathrm{G}(I)$ が Cohen-Macaulay 環となる為の充分条件を与えた。この結果は多くの研究者の興味をひき、様々な角度から拡張されるに至ったのであるが、[2] ではそれまでに得られていた結果を次のような形で統合することができた：

**定理 1** $A/\mathfrak{m}$ は無限体とし $J = (a_1, \cdots, a_\ell)$ は $I$ の minimal reduction とせよ。さらに $a_1, \cdots, a_\ell$ は $I$ について filter regular sequence をなすと仮定する (このような $a_1, \cdots, a_\ell$ は常に存在する)。$1 \leq i \leq \ell$ に対して $J_i = (a_1, \cdots, a_i)$ とおく。このとき、ある $0 \leq r \in \mathbb{Z}$ に対して次の 4 条件：

(a) $\mathrm{r}_J(I) \leq r$.

(b) $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$, $\mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p} = i < \ell$ ならば $J_i A_\mathfrak{p}$ は $IA_\mathfrak{p}$ の reduction であって $\mathrm{r}_{J_i A_\mathfrak{p}}(IA_\mathfrak{p}) \leq \max\{0\,,\, i - \ell + r\}$.

(c) $s \leq i < \ell - r$ ならば $A/J_i : I$ は Cohen-Macaulay.

(d) $1 \leq n \leq r$ ならば depth $A/I^n \geq d - \ell + r - n$.

が成立していれば $\mathrm{G}(I)$ は Cohen-Macaulay 環になる。

その後、この方向での研究は沈静化し、さらなる拡張を試みる動きはいくつかあったものの、大きなものは見られなくなってきたようである。しかし、今年になって J. Algebara に掲載された Laura Ghezzi の論文 [1] にある主結果は注目すべきものであると思われる。それは定理 1 と似た条件の下で $\mathrm{G}(I)$ の depth を評価しようというもので、完全に含まれる訳ではないが、定理 1 を拡張する方向にある結果と言ってよい。Ghezzi の主張は Artin-Nagata property 等の難しい概念を用いて記述されるので、それを筆者の流儀で書き直してみると (Ghezzi のものよりほんの少し一般化されている) 次のようになる：

**定理 2** $J=(a_1,\cdots,a_\ell)$ は $I$ の reduction であって (minimal とは仮定しない)、$a_1,\cdots,a_\ell$ は $I$ について filter regular sequence をなすと仮定せよ。このとき $r\in\mathbb{Z}$ について次の 4 条件：

(a) $\mathrm{r}_J(I)\le\max\{0\,,r\}$.

(b) $\mathfrak{p}\in\mathrm{V}(I)$, $\mathrm{ht}_A\,\mathfrak{p}\le i<\ell$ ならば $J_iA_\mathfrak{p}$ は $IA_\mathfrak{p}$ の reduction であって、$\mathrm{r}_{J_iA_\mathfrak{p}}(IA_\mathfrak{p})\le\max\{\,0\,,\,i-\ell+r\}$.

(c) $s\le i<\ell-r$, $J_i:I\ne A$ ならば $A/J_i:I$ は Cohen-Macaulay.

(d) $1\le n\le r$, $\mathfrak{p}\in\mathrm{V}(I)$ ならば $\operatorname{depth}\mathrm{G}(I)\ge\min\{\,\mathrm{ht}_A\,\mathfrak{p}-\ell+r-n\,,\,r-n\}$.

が充たされれば

$$\operatorname{depth}\mathrm{G}(I)\ge\min\,\{d\}\cup\{\operatorname{depth}A/I^n+\ell-r+n\}_{1\le n\le r}\,.$$

この定理の条件は $I$ を含む素イデアルで局所化しても保たれる。このことに注目するとフィルトレーション版への拡張が見えてくる。

以下、$\mathcal{F}=\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $A$ のイデアルの族で

$$\begin{array}{ll}\text{(i)} & F_n\supseteq F_{n+1}\ \text{for}\ \forall n\\ \text{(ii)} & F_0=A,\ F_1\ne A\\ \text{(iii)} & F_mF_n\subseteq F_{m+n}\ \text{for}\ \forall m,\forall n\end{array}$$

なるものとし、対応する Rees 環 $\mathrm{R}(\mathcal{F})=\oplus_{n\ge0}F_n$ は Noether 環で $\dim\mathrm{R}(\mathcal{F})=d+1$ と仮定する。実は、定理 2 の一般化として次が示せる：

**定理 3** $\{a_i\in F_{k_i}\}_{1\le i\le\ell}$ は $F_1$ について filter regular sequence をなすような $\mathcal{F}$ の reduction であって、$k_0:=k_1\ge k_2\ge\cdots\ge k_\ell$ とする。$0\le i\le\ell$ に対して

$$\begin{aligned}K_i&=k_0+k_1+\cdots+k_i\\ N_i&=K_i-K_\ell+r\\ J_i&=(a_0,a_1,\cdots,a_i)\end{aligned}$$

とおく (但し $a_0=0$)。このとき、次の 4 条件：

(a) $n>\max\{\,0\,,\,r\}$ ならば

$$F_n=\sum_{i=1}^{\ell}a_iF_{n-k_i}\,.$$

(b) $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(F_1)$, $\mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p} \le i < \ell$, $n > \max\{0, N_i\}$ ならば

$$F_n A_\mathfrak{p} = \sum_{j=1}^{i} a_j F_{n-k_j} A_\mathfrak{p}\,.$$

(c) $0 \le i \le \ell$, $N_i < 0$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A\, A/J_i : F_1$ ならば

$$\mathrm{depth}(A/J_i : F_1)_\mathfrak{p} \ge \mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p} - i \ge 0\,.$$

(d) $0 \le \ell$, $N_{i-1} < n \le N_i$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(F_1)$ ならば

$$\mathrm{depth}(A/F_n)_\mathfrak{p} \ge \min\{\mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p} - i\,,\, \ell - i\} \quad (\text{但し}\ N_{-1} = -\infty)\,.$$

が成立していれば

$$\mathrm{depth}\, \mathrm{G}(\mathcal{F}) \ge \min\{d\} \cup \{\mathrm{depth}\, A/F_n + i \mid 0 \le i \le \ell\,,\, N_{i-1} < n \le N_i\}\,.$$

この結果をどのように用いるかを説明する為に、既に知られている簡単な例に応用してみる。$A$ は $X, Y, Z$ を変数とする体上の形式的ベキ級数環とし space monomial curve : $X = t^3, Y = t^4, Z = t^5$ の定義イデアルを $P$ とする。定理 3 を使って、この $P$ の symbolic power $P^{(n)}$ を計算してみよう。良く知られているように $P$ は

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X^2 \end{pmatrix}$$

の maximal minors で生成されている。そこで

$$a = Z^2 - X^2Y\,,\, b = X^3 - YZ\,,\, c = Y^2 - XZ$$

とおくと $P = (a, b, c)$ で

$$Xa + Yb + Zc = 0$$
$$Ya + Zb + X^2c = 0$$

が成り立つ。すると

$$(Xa + Yb)b = (-Zc)b = (-Zb)c = (Ya + X^2c)c$$

となり

$$X(ab - Xc^2) = Y(ac - b^2)$$

を得る。$X, Y$ は正則列なので

$$\begin{aligned} Xe &= ac - b^2 \\ Ye &= ab - Xc^2 \end{aligned}$$

なる $e \in A$ が存在するが、これらの等式は $e \in P^{(2)}$ であることを意味する。さらに

$$\begin{aligned} (Ze)c &= (Zc)e \\ &= -(Xa + Yb)e \\ &= -(Xe)a - (Ye)b \\ &= (b^2 - ac)a + (Xc^2 - ab)b \\ &= (Xbc - a^2)c \end{aligned}$$

なので

$$Ze = Xbc - a^2$$

も成り立つ。ここで $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$F_n = \sum_{2i+j=n} e^i P^j$$

と定めると $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ はフィルトレーションをなし、$F_1 = P$ で $\forall n \geq 2$ に対して

$$F_n = eF_{n-2} + cF_{n-1}$$

が成り立つ。そこで $r = 1$ とし $\{e \in F_2, c \in F_1\}$ について定理 3 を適用する。既に述べた様に条件 (a) は充たされている。$\mathrm{ht}_A F_1 = 2$ で $\ell = 2$ だから条件 (b) は何も主張していないことになる。さらに $N_0 = -2, N_1 = 0, N_2 = 1$ なので条件 (c), (d) も容易に確かめられ、

$$\operatorname{depth} \mathrm{G}(\mathcal{F}) \geq \min\{3, \operatorname{depth} A/F_1 + 2\} = 3$$

が成り立つ。従って $\mathrm{G}(\mathcal{F})$ は Cohen-Macaulay 環である。すると $\forall n > 0$ に対して $A/F_n$ が Cohen-Macaulay 環となることが分かる。一方、$P^n \subseteq F_n \subseteq P^{(n)}$ より $P^n A_P = F_n A_P$ であるから $P^{(n)} = F_n$ が得られる。

# 参考文献


[1] L. Ghezzi, *On the depth of the associated graded ring of an ideal*, J. Algebra **248** (2002), 688 – 707.

[2] S. Goto, Y. Nakamura and K. Nishida, *Cohen-Macaulay graded rings associated to ideals*, Amer. J. Math. **118** (1996), 1197 – 1213.

[3] S. Huckaba and C. Huneke, *Powers of ideals having small analytic deviation*, Amer. J. Math. **114** (1992), 367 – 403.

[4] S. Huckaba and C. Huneke, *Rees algebras of ideals having small analytic deviation*, Trans. Amer. Math. Soc. **339**, 373 – 402.

# SOME RESULTS ON BUCHSBAUMNESS IN THE EXTENDED REES ALGEBRAS

KIKUMICHI YAMAGISHI

The purpose of this note is to discuss several results on the extended Rees algebras. Let $(A, \mathfrak{m})$ be a Noetherian local ring. For an ideal $\mathfrak{a}$ of $A$, we denote by $R'$, $R$ and $G$ the *extended Rees algebra*, the *Rees algebra* and the *associated graded ring* of $\mathfrak{a}$, respectively; namely

$$R' := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{a}^n, \qquad R := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}^n, \qquad G := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}.$$

Moreover $\mathfrak{N}$ denotes the unique homogeneous maximal ideal of $R$, i.e., $\mathfrak{N} := \mathfrak{m}R + R_+$.

It is obvious that the extended Rees algebra $R'$ can be naturally regraded as a graded algebra over the Rees algebra $R$. Although the extended Rees algebra $R'$ is an *infinite* module over $R$, it is still an interested question that how the extended Rees algebra $R'$ behave as a graded $R$-algebra.

## 1. MAIN RESULTS

For a ($\mathbb{Z}$-)graded R-module $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n$ we define the following invariant, say $a_i(W)$, as follows:

$$a_i(W) := \max\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid [H^i_{\mathfrak{N}}(W)]_\alpha \neq (0)\},$$

and we call it the *i-th a-invariant* of $W$, cf. [T]. For convenience sake, we put $a_i(W) = -\infty$ when $H^i_{\mathfrak{N}}(W) = (0)$. Thus note that $-\infty \leq a_i(W) \leq \infty$ holds for all $i \geq 0$ in general. When $W$ is finitely generated over $R$ we know that the local cohomology module $H^i_{\mathfrak{N}}(W)$ is Artinian over $R$, hence we naturally get $a_i(W) < \infty$ for all $i$. (Recall that there exists an isomorphism $H^i_{\mathfrak{N}}(W) \cong H^i_{\mathfrak{N}R_{\mathfrak{N}}}(W_{\mathfrak{N}})$ for all $i$.) We usually write $a(W)$ instead of $a_s(W)$ in the case where $W$ is finitely generated over $R$ with $s := \dim_R W$, and call it the *a-invariant* of $W$, see [GW].

**Theorem 1.** *Let $(A, \mathfrak{m})$ be a Noetherian local ring of dimension $d$ and $\mathfrak{a}$ an ideal of $A$.*

(1) $a_i(R') \leq a_i(G)$ *for all* $0 \leq i \leq d-1$.
(2) $a_d(R') = a(G)$ *holds.*
(3) $H^i_{\mathfrak{N}}(R') = (0)$ *for all* $i \geq d+1$.

We denote by $\phi^i_{R'} : H^i(\mathfrak{N}; R') \longrightarrow H^i_{\mathfrak{N}}(R')$ the canonical morphism from the Koszul cohomology module into the local cohomology module of $R'$ relative to $\mathfrak{N}$. Moreover, we define also one more invariant of $A$, say $\mathbb{I}(A)$, which is just a generalization so-called the "Buchsbaum invariant" ([SV]), namely

$$\mathbb{I}(A) := \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \cdot l_A(H^i_{\mathfrak{m}}(A)).$$

With this notation, applying Theorem 10 below we have the second result in this note.

**Theorem 2.** *Let $(A, \mathfrak{m})$ be a Buchsbaum ring of dimension $d > 0$ and $\mathfrak{a}$ an $\mathfrak{m}$-primary ideal of $A$. Suppose that the equality $\mathbb{I}(G) = \mathbb{I}(A)$ holds. Then the canonical map*

$$\phi^i_{R'} : H^i(\mathfrak{N}; R') \longrightarrow H^i_{\mathfrak{N}}(R')$$

*is surjective for all $0 \leq i \leq d-1$. However, the canonical map $\phi^d_{R'}$ is not so.*

Hence, Theorem 2 may allow us to say that $R'$ is "Buchsbaum" as a graded $R$-algebra in the sense as above.

## 2. Preliminaries

Let $(A, \mathfrak{m})$ be a Noetherian local ring of dimension $d$ and $\mathfrak{a}$ an $\mathfrak{m}$-primary ideal of $A$. The next result is a natural consequence of the Lichtenbaum-Hartshorne vanishing theorem (cf., [S]), but here we can proof it in a much easier way.

**Proposition 3.** $H^i_{\mathfrak{N}}(R') = (0)$ *for all* $i \geq d+1$.

*Proof.* Since $H^i_{\mathfrak{N}}(W) = (0)$ for all $i > \dim R$ and for all $R$-module $W$, we enouhly deal with the case where $\dim R = d+1$ and $i = d+1$. Now for any integer $m \geq 0$, we denote by $L_m$ the graded $R$-submodule of $R'$ such as

$$L_m := \bigoplus_{n \geq -m} \mathfrak{a}^n \subset R'.$$

Then each $L_m$ is a finitely generated $R$-module and there exists a natual ascending chain

$$R = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_m \subset \cdots \subset R'$$

of graded $R$-modules. Moreover we have the following.

**Claim 4.** *One has the following statements.*

(1) $\dim_R L_m = d+1$ *and* $a(L_m) = -(m+1)$.
(2) $\varinjlim_m L_m \cong R'$ *as graded $R$-modules.*

Therefore for any integer $n \in \mathbb{Z}$ we get

$$[H^{d+1}_{\mathfrak{N}}(R')]_n = \varinjlim_m [H^{d+1}_{\mathfrak{N}}(L_m)]_n = (0),$$

because of $[H^{d+1}_{\mathfrak{N}}(L_m)]_n$ for all $m > -(n+1)$. This implies $H^{d+1}_{\mathfrak{N}}(R') = (0)$.

Usually, the extended Rees algebra $R'$ and the Rees algebra $R$ are regared as graded $A$-subalgebras of $A[t, t^{-1}]$ and $A[t]$ respectively, where $t$ is an indeterminate over $A$, such as,

$$R' = A[\mathfrak{a}t, t^{-1}] \subset A[t, t^{-1}], \qquad R = A[\mathfrak{a}t] \subset A[t].$$

For any integer $\alpha > 0$, we define the following new graded $R$-algebra, writing $G'_\alpha$, as follows:

$$G'_\alpha := R'/t^{-\alpha} \cdot R' = \bigoplus_{n > -\alpha} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+\alpha}.$$

cf., [HRS, §2], see also [Y2]. Note $G'_1 = G$ clearly.

Let $W = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$ be again a graded $R$-module. For any integer $m$, we denote by $W(m)$ the twisted module of $W$ by shifting $m$, i.e., $[W(m)]_n := W_{n+m}$ for each $n \in \mathbb{Z}$.

Then we have the following.

**Lemma 5.** *For any integer $\alpha \geq 2$ there exists an exact sequence of graded $R$-modules*

$$0 \longrightarrow G'_{\alpha-1}(1) \longrightarrow G'_\alpha \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

Using this exact sequence, we get the following inductively.

**Proposition 6.** *For any integer $\alpha > 0$ one has the following.*

(1) *$G'_\alpha$ is a finitely generated graded $R$-module with $\dim_R G'_\alpha = d$.*
(2) *$\alpha \cdot \mathbb{I}(A) \leq \mathbb{I}(G'_\alpha) \leq \alpha \cdot \mathbb{I}(G)$ holds.*
(3) *$a_i(G'_\alpha) \leq a_i(G)$ for all $0 \leq i \leq d-1$.*
(4) *$a(G'_\alpha) = a(G)$.*

Note that there is an exact sequence of graded $R$-modules such as

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R' \longrightarrow R'/R \longrightarrow 0.$$

Note that $[R'/R]_n = (0)$ for $n \geq 0$. Hence each element in $R_+$ acts on $R'/R$ as an element-wise nilpotent, so we see that

$$H^i_{\mathfrak{N}}(R'/R) = H^i_{\mathfrak{m}}(R'/R)$$

for all $i \in \mathbb{Z}$ regarding as graded $A$-modules via $A \longrightarrow R$. Combining this fact and the following exact sequence of graded $R$-modules

$$0 \longrightarrow R'(\alpha) \xrightarrow{t^{-\alpha}} R' \longrightarrow G'_\alpha \longrightarrow 0$$

Applying the Koszul cohomology functors and the local cohomology functors, we have the following commutative diagram (♯) with exact rows.

$$\begin{array}{ccccccc}
H^i(\mathfrak{N}; R')(\alpha) & \longrightarrow & H^i(\mathfrak{N}; R') & \longrightarrow & H^i(\mathfrak{N}; G'_\alpha) & \longrightarrow & H^{i+1}(\mathfrak{N}; R')(\alpha) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi^i_{R'}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^i_{G'_\alpha}} & & \downarrow \\
H^i_{\mathfrak{N}}(R')(\alpha) & \longrightarrow & H^i_{\mathfrak{N}}(R') & \longrightarrow & H^i_{\mathfrak{N}}(G'_\alpha) & \longrightarrow & H^{i+1}_{\mathfrak{N}}(R')(\alpha)
\end{array} \qquad (\sharp)$$

Then we get the next lemma in a routine.

**Lemma 7.** *Let $i \in \mathbb{Z}$. Then one has the following.*

(1) $[H^i(\mathfrak{N}; R')]_n = (0)$ *for all* $n \gg 0$.
(2) $[H^i_{\mathfrak{N}}(R')]_n = (0)$ *for all* $n \gg 0$.
(3) $[H^i(\mathfrak{N}; R')]_n \cong [H^i(\mathfrak{N}; G'_\alpha)]_n$ *holds for all* $n \in \mathbb{Z}$ *and for all* $\alpha \gg 0$ *(which is large enough depended on the given integer* $n$*).*
(4) $[H^i_{\mathfrak{N}}(R')]_n \cong [H^i_{\mathfrak{N}}(G'_\alpha)]_n$ *holds for all* $n \in \mathbb{Z}$ *and for all* $\alpha \gg 0$ *(which is large enough depended on the given integer* $n$*).*

By Proposition 6 and Lemma 7, we get the following at once.

**Proposition 8.** *For all* $\alpha \gg 0$, *it holds that* $a_i(R') = a_i(G'_\alpha)$ *for* $0 \leq i \leq d-1$ *and* $a_d(R') = a(G'_\alpha)$.

Combining three propositions above, we immediately get Theorem 1.

## 3. Buchsbaumness in the $G'_\alpha$

In this section, let $(A, \mathfrak{m})$ be a Buchsbaum ring of dimension $d > 0$ and $\mathfrak{a}$ an $\mathfrak{m}$-primary ideal of $A$. We always assume that the residue field $A/\mathfrak{m}$ is infinite. Then we have the following.

**Proposition 9.** *Let* $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ *be a minimal reduction of* $\mathfrak{a}$, *i.e.,* $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{a}$ *and* $\mathfrak{a}^{r+1} = \mathfrak{q}\mathfrak{a}^r$ *holds for some integer* $r \geq 0$. *Then the following statements are equivalent.*

(1) $\mathbb{I}(G) = \mathbb{I}(A)$ *holds.*
(2) $\mathbb{I}(G'_\alpha) = \alpha \cdot \mathbb{I}(A)$ *holds for all* $\alpha > 0$.
(3) $\mathbb{I}(G'_\alpha) = \alpha \cdot \mathbb{I}(A)$ *holds for some* $\alpha > 0$.
(4) *The equlity*

$$(a_1^2, a_2^2, \dots, a_d^2) \cap \mathfrak{a}^n = (a_1^2, a_2^2, \dots, a_d^2)\mathfrak{a}^{n-2}$$

*holds for all* $3 \leq n \leq r + d$.

By this obsrvations, we have the next result in this note, wich is a generalization of Theorem 1.1 (or Theorem 4.1) in [Y1].

**Theorem 10.** *Let* $(A, \mathfrak{m})$ *be a Buchsbaum ring of dimension* $d > 0$ *and* $\mathfrak{a}$ *an* $\mathfrak{m}$*-primary ideal of* $A$. *Suppose that the equality* $\mathbb{I}(G) = \mathbb{I}(A)$ *holds. Then, for any* $\alpha > 0$, $G'_\alpha$ *is a Buchsbaum* $R$*-module with* $\mathbb{I}(G'_\alpha) = \alpha \cdot \mathbb{I}(G)$.

## 4. Sketch of the proof of Theorem 2

It is enough to show that each homogeneous component of the canonical map $\phi^i_{R'}$

$$[\phi^i_{R'}]_n : [H^i(\mathfrak{N}; R')]_n \longrightarrow [H^i_{\mathfrak{N}}(R')]_n,$$

where $n \in \mathbb{Z}$, is surjective for each $0 \le i < d$. So choose $0 \le i < d$ and $n \in \mathbb{Z}$ arbitrary. Consider the homogeneous component of degree $n$ of the commutative diagram ($\sharp$) above.

$$\begin{array}{ccccccc}
[H^i(\mathfrak{N};R')]_{n+\alpha} & \longrightarrow & [H^i(\mathfrak{N};R')]_n & \longrightarrow & [H^i(\mathfrak{N};G'_\alpha)]_n & \longrightarrow & [H^{i+1}(\mathfrak{N};R')]_{n+\alpha} \\
 & & {\scriptstyle [\phi^i_{R'}]_n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle [\phi^i_{G'_\alpha}]_n} & & \\
[H^i_{\mathfrak{N}}(R')]_{n+\alpha} & \longrightarrow & [H^i_{\mathfrak{N}}(R')]_n & \longrightarrow & [H^i_{\mathfrak{N}}(G'_\alpha)]_n & \longrightarrow & [H^{i+1}_{\mathfrak{N}}(R')]_{n+\alpha}
\end{array}$$

Taking $\alpha$ large enough, we know that

$$[H^i(\mathfrak{N};R')]_{n+\alpha} = [H^{i+1}(\mathfrak{N};R')]_{n+\alpha} = (0), \quad [H^i_{\mathfrak{N}}(R')]_{n+\alpha} = [H^{i+1}_{\mathfrak{N}}(R')]_{n+\alpha} = (0)$$

by (1), (2) of Lemma 7. Then we get the following diagram.

$$\begin{array}{ccc}
[H^i(\mathfrak{N};R')]_n & \xrightarrow{\cong} & [H^i(\mathfrak{N};G'_\alpha)]_n \\
{\scriptstyle [\phi^i_{R'}]_n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle [\phi^i_{G'_\alpha}]_n} \\
[H^i_{\mathfrak{N}}(R')]_n & \xrightarrow{\cong} & [H^i_{\mathfrak{N}}(G'_\alpha)]_n
\end{array}$$

By Theorem 10 the map $[\phi^i_{G'_\alpha}]_n$ is surjective, hence the map $[\phi^i_{R'}]_n$ is surjective too.

Finally, if $\phi^d_{R'}$ is also surjective, then we easily see $\mathfrak{N} \cdot H^d_{\mathfrak{N}}(R') = (0)$. But this is impossible because of $H^d_{\mathfrak{N}}(R') \neq (0)$, and this finishes the proof of Theorem 2.

## References


[GW] S. Goto and K.-i. Watanabe, *On Graded Rings, I*, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 179–213.

[HRS] M. Herrmann, J. Ribbe and P. Schenzel, *On the Gorenstein property of form rings*, Math. Zeit. **213** (1993), 301–309.

[S] P. Schenzel, *Explicit computations around the Lichtenbaum-Hartshorne vanishing theorem*, manuscripta math. **78** (1993), 57–68.

[SV] J. Stückrad and W. Vogel, *Buchsbaum rings and applications*, Springer-Verlag, Berlin, New York, Tokyo, 1986.

[T] N. V. Trung, *Reduction exponent and degree bound for the defining equations of graded rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 229–236.

[Y1] K. Yamagishi, *The associated graded modules of Buchsbaum modules with respect to $\mathfrak{m}$-primary ideals in the equi-$\mathbb{I}$-invariant case*, J. Algebra **225** (2000), 1–27.

[Y2] K. Yamagishi, *Asymptotic property of the $\mathbb{I}$-invariant of the associated graded modules*, Comm. in Algebra (to appear).



Faculty of Econoinformatics, Himeji Dokkyo University, Kamiono 7-2-1, Himeji, Hyogo 670-8524, Japan

*E-mail address*: yamagisi@himeji-du.ac.jp

# Buchsbaum 局所環と等式 $I^2 = QI$

櫻井　秀人

明治大学大学院理工学研究科

## 1　序文

本報告は, 後藤四郎先生との共同研究です.

以下 $(A,\mathfrak{m})$ によって極大イデアルが $\mathfrak{m}$ であるような $d$ 次元の Noether 局所環を表し, $\mathrm{e}(A) = \mathrm{e}_{\mathfrak{m}}^0(A)$ によって極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する環 $A$ の重複度を表す. 特に断らない限り $Q = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$ は環 $A$ のパラメーターイデアルとし, $I = Q : \mathfrak{m}$ とおく. 考えたい問題は,

**問題** いつ等式 $I^2 = QI$ が成り立つか?

である. この問題を考えるきっかけとなったのは, 環 $A$ が Cohen-Macaulay であって正則でないならば, 必ず等式 $I^2 = QI$ が成り立つという A.Corso と C.Polini による結果であるが, より詳しく述べるならば次のような主張である.

**定理 1.1 ([CP, CPV, CHV, G4]).** *$A$ を Cohen-Macaulay 環で $\dim A = d$ , $Q$ を $A$ のパラメーターイデアルとし $I = Q : \mathfrak{m}$ とする. このとき, 次の 3 条件は互いに同値である.*

(1) $I^2 \neq QI$,

(2) $Q$ は *integrally closed* である,

(3) $A$ は正則であって, ある正則パラメーター系 $\{a_1, a_2, \ldots, a_d\}$ と正の整数 $q > 0$ が存在して, $Q = (a_1, \ldots, a_{d-1}, a_d^q)$ を満たす.

したがって, 環 $A$ が正則でないならば等式 $I^2 = QI$ が成り立つ.

我々は, 環 $A$ が必ずしも Cohen-Macaulay 環でないときにこの定理が成り立つであろうかと考え, Cohen-Macaulay 環の一般化である Buchsbaum 環のときの研究を始めた. 得られた結果のうちいくつかを今回紹介したいと思う. 主結果を紹介する上で, 次のような例が存在しているということにまず注意したい.

**Examples**

(1) ( cf. [GSa1] ) $R = k[[X,Y,Z]]$ ($k$ は体) をべき級数環とし, $A = R/(X^3, XY, Y^2 - XZ)$ とおく. $A$ は Buchsbaum 局所環で $\dim A = 1$, $\mathrm{e}(A) = 3$ である. 環 $A$ のパラメーターイデアル $Q = (z)$ については $I = Q + (x^2, y)$ であって, $I^3 = QI$ であるが $I^2 \neq QI$ である. 但し, $x, y, z$ は不定元 $X, Y, Z$ のイデアル $(X^3, XY, Y^2 - XZ)$ を法とする reduction を表す.

(2) ( cf. [GSa2, Section4] ) $1 \leq d < m$ を整数とする．このとき, 次の条件を満たす環 $A$ が存在する．$A$ は Buchsbaum 局所環, $\dim A = d$, $\operatorname{depth} A = d-1$, $\mathrm{e}(A) = 2m$ であって, $\exists Q \subseteq A$ パラメーターイデアル s.t. $I^2 \neq QI$ かつ $I^3 = QI^2$ となる．

(3) ( cf. [GSa1, Theorem(5.3)] ) $R = k[[X,Y,Z]]$ ($k$ は体) をべき級数環とし $2 \leq \ell$ を整数とする．$A = R/(X^\ell) \cap (Y,Z)$ とおくと, 環 $A$ は Buchsbaum 環ではなく（実は FLC 環ですらない）, $\dim A = 2$, $\operatorname{depth} A = 1$, $\mathrm{e}(A) = \ell$ であって, 環 $A$ 内のいかなるパラメーターイデアル $Q$ に対しても等式 $I^2 = QI$ が成り立つ．

つまり, Buchsbaum 環だからといって必ず $I^2 = QI$ が成り立つというわけではなく, 一方で Buchsbaum 環ですらないのに必ず $I^2 = QI$ が成り立つ環も存在するわけであり, 実際のところ何が $I^2 = QI$ を制御しているのかがわからない．しかし，2 章で示す結果より, Buchsbaum 環に限っていえばかなりのことがわかるのである．

この章の最後に注意しておきたいのは, 上の定理において「正則でない」(つまり, $\mathrm{e}(A) > 1$ ) という条件は何を意味しているのかである．次が一つの説明を与えていると思われる．

**定理 1.2 ([GSa1] Proposition(2.3)).** $(A, \mathfrak{m})$ を *Noether* 局所環とする．$Q$ を環 $A$ のパラメーターイデアルとし, $I = Q : \mathfrak{m}$ とする．このとき，もし $\mathrm{e}(A) > 1$ ならば, $I \subseteq \overline{Q}$ が成り立つ．但し, $\overline{Q}$ は $Q$ の *integral closure* を表す．

つまり, 重複度が 1 より大きければ少なくとも $Q$ は $I$ の reduction にはなっているのである．よってこのとき, $\mathfrak{m}I = \mathfrak{m}Q$ となることにも注意しておく．このことを念頭に置き以下では多くの場合, $\mathrm{e}(A) > 1$ を仮定して議論をしている．

# 2 主結果

次の三つの定理が我々の主結果である．

**定理 2.1.** $(A, \mathfrak{m})$ を *Buchsbaum* 局所環で $d = \dim A \geq 1$, $\mathrm{e}(A) > 1$ とする．$Q$ を環 $A$ のパラメーターイデアルとする．このとき，もし等式 $\ell_A((Q : \mathfrak{m})/Q) = \mathrm{r}(A)$ が成り立つならば, $I^2 = QI$ である．但し,

$$\mathrm{r}(A) = \sup \ell_A((Q : \mathfrak{m})/Q)$$

である．ここで, $Q$ は環 $A$ のパラメーターイデアル全てを走る．

環 $A$ が Buchsbaum の場合には, 不変量 $\mathrm{r}(A)$ は有限確定値をとり, 等式

$$\mathrm{r}(A) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(A) + \mu_{\widehat{A}}(K_{\widehat{A}})$$

が成り立つ ( cf. [GSu])．但し，$h^i(A) = \ell_A(\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(A))$ であって（ここで $\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(*)$ は局所コホモロジーを表す），$\widehat{A}$ は極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する $A$ の完備化を表し，$K_{\widehat{A}}$ は $\widehat{A}$ の canonical module とする．また, $\mu(*)$ は生成元の個数を表す．定理 2.1 は Corso と Polini の結果の拡張になっている．なぜならば, 環 $A$ が Cohen-Macaulay の場合には $\ell_A((Q : \mathfrak{m})/Q)$ はいつも $\mathrm{r}(A)$ と一致しているので, もし正則でない, つまり $\mathrm{e}(A) > 1$ ならば, 定理 2.1 から $I^2 = QI$ が成り立つのである．

**定理 2.2.** $(A,\mathfrak{m})$ を *Buchsbaum* 局所環で $d=\dim A\geq 1$ とすると, ある整数 $\ell\gg 0$ が存在し, 任意のパラメーターイデアル $Q\subseteq \mathfrak{m}^{\ell}$ に対し, 等式 $\ell_A((Q:\mathfrak{m})/Q)=\mathrm{r}(A)$ が成り立つ.

したがって, 定理 2.1 と組み合わせると Buchsbaum 環であれば, $I^2=QI$ を満たすパラメーターイデアルの方が満たさないものよりも多数派である, ということがいえるだろう. また, $\ell=1$ で取れれば全てのパラメーターイデアル $Q$ に対して, $I^2=QI$ が成り立つことが分かるが, 一章であげた例 (1) から何も仮定がないならば $\ell=1$ では取れないことが分かる. ところで, 例 (1) では $\ell=2$ で取れる.

最後に, Buchsbaum 環で次の仮定をすると, 全てのパラメーターイデアル $Q$ に対して $I^2=QI$ が成り立つ.

**定理 2.3.** $(A,\mathfrak{m})$ を *Buchsbaum* 局所環とし, $\mathrm{e}(A)=2$ かつ $\operatorname{depth} A>0$ とする. このとき, 環 $A$ のいかなるパラメーターイデアル $Q$ に対しても, 等式 $I^2=QI$ が成り立つ.

一章で挙げた例 (1) は $\mathrm{e}(A)=3$ だが, 実は $\operatorname{depth} A=0$ である. $\mathrm{e}(A)=3$ で $\operatorname{depth} A>0$ となる反例を著者は知らないが, おそらく反例があるだろうと考えている. 但し, 二つ目の例 (2) が $\mathrm{e}(A)=6$ だと反例があることを示している.

最後の注意として, 定理2.3の仮定の下では, $\ell_A((Q:\mathfrak{m})/Q)\neq\mathrm{r}(A)$ となるパラメーターイデアル $Q$ は存在する. つまり, 等式 $I^2=QI$ が成り立つからといって必ずしも $\ell_A((Q:\mathfrak{m})/Q)=\mathrm{r}(A)$ となっているわけではない, ということが分かる.

# 3 主結果の証明の概略

**定理 2.1 の証明.** $d$ に関する induction で示す. $I=Q:\mathfrak{m}$, $W=\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)$ とおく. $\ell_A((Q:\mathfrak{m})/Q)=\mathrm{r}(A)$ より $I=(Q+W):\mathfrak{m}$ となる. $d=1$ のとき, $I=(Q+W):\mathfrak{m}$ より $I$ は $A/W$ という Cohen-Macaulay 環の中で $Q:\mathfrak{m}$ に等しく, 定理 1.1 より環 $A/W$ の中では $I^2=QI$ が成り立っているので $I^2\subseteq QI+W$ となる. いま $I\subseteq\mathfrak{m}$ だから $I^2\subseteq Q$ となるので, $I^2\subseteq QI+(W\cap Q)$ となる. ここで, 環 $A$ は Buchsbaum だから $W\cap Q=(0)$ となるので, $I^2=QI$ が成り立つ. $d>1$ として $d-1$ まで成り立つとする. $Q=(a_1,a_2,\ldots,a_d)$ とかく. $B=A/(a_1)$ とすると $QB$ は $B$ のパラメーターイデアルであり, 自明ではないが $\ell_B((QB:\mathfrak{m})/QB)=\mathrm{r}(B)$ となることが分かる. すると induction の仮定より $B$ の中では $I^2=QI$ が成り立つので, $I^2\subseteq QI+(a_1)$ であり, よって $I^2=QI+(a_1)\cap I^2$ となる. ここで,

**Claim 1.** $(a_1)\cap I^2\subseteq a_1 I$ である.

(Claim の証明) $x\in(a_1)\cap I^2$ をとり, $x=a_1z$ $(z\in A)$ とかく. 定理 1.2 より $\mathfrak{m}I^2=\mathfrak{m}Q^2\subseteq Q^2$ だから, $\alpha\in\mathfrak{m}$ に対して $\alpha x=\alpha a_1 z\in(a_1)\cap Q^2$ である. ここで環 $A$ は Buchsbaum だから, $(a_1)\cap Q^2=a_1Q$ となるので, $a_1\alpha z=a_1 y$ $(y\in Q)$ とかくと, $a_1(\alpha z-y)=0$ であり, よって $\alpha z-y\in(0):a_1$ となる. すると, 環 $A$ は Buchsbaum だから $(0):a_1=W$ となるので, $\alpha z\in Q+W$ となり $z\in(Q+W):\mathfrak{m}=Q:\mathfrak{m}=I$ となる. よって Claim が示せた.

したがって, $I^2=QI$ が成り立つ. □

**定理 2.2 の証明.**

$$\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(A) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{Ext}^d_A(A/\mathfrak{m}^n, A)$$

だから $\ell \gg 0$ をとると, 極限に向かう自然な写像 $\sigma$ ;

$$\sigma \ : \ \mathrm{Ext}^d_A(A/\mathfrak{m}^\ell, A) \longrightarrow \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(A) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{Ext}^d_A(A/\mathfrak{m}^n, A)$$

が socle の上で全射となる. つまり, 写像 $\sigma$ から誘導される socle の間の写像

$$(0) :_{\mathrm{Ext}^d_A(A/\mathfrak{m}^\ell, A)} \mathfrak{m} \longrightarrow (0) :_{\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(A)} \mathfrak{m}$$

が全射となる. この $\ell$ が求めるものである. 実際, パラメーターイデアル $Q \subseteq \mathfrak{m}^\ell$ をとり, $Q = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$ とかく. すると次の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^d_A(A/\mathfrak{m}^\ell, A) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(A) = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{Ext}^d_A(A/\mathfrak{m}^n, A) \\
{\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\
\mathrm{Ext}^d_A(A/Q, A) & \longrightarrow & \mathrm{H}^d_{Q}(A) = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{Ext}^d_A(A/Q^n, A)
\end{array}$$

が得られる. ここで, 写像 $\theta$ は同型であり, 写像 $\alpha$ は自然な写像 $A/Q \to A/\mathfrak{m}^\ell$ から誘導されるものである. また次の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^d_A(A/Q, A) & \longrightarrow & \mathrm{H}^d_{Q}(A) = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{Ext}^d_A(A/Q^n, A) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\
A/Q = \mathrm{H}^d(\underline{a}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{H}^d_{\underline{a}}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{H}^d(\underline{a}^n)
\end{array}$$

が存在していて写像 $\eta$ は同型である. 但し,

$$\mathrm{H}^\bullet(\underline{a}^n) = \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Hom}_A(\mathrm{K}_\bullet(\underline{a}^n), A))$$

である. ここで, $\mathrm{K}_\bullet(\underline{a}^n)$ は列 $\underline{a}^n = {a_1}^n, {a_2}^n, \ldots, {a_d}^n$ で生成された環 $A$ の koszul complex とする. すると, 写像 $\sigma$ が socle の上で全射だから写像 $\varphi$ も socle の上で全射となる. いま環 $A$ は Buchsbaum だから,

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \sum_{i=1}^{d} \Big[\Big((a_1, \ldots, \check{a}_i, \ldots, a_d) : a_i\Big) + Q\Big]/Q$$

([G3] Theorem (4.7)), $\mathfrak{m}[\mathrm{Ker}\,\varphi] = (0)$ であり $\ell_A(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(A)$ ([G3] Proposition (3.6)) である. そして $\mu_{\widehat{A}}(K_{\widehat{A}}) = \ell_A((0) :_{\mathrm{H}^d_{\underline{a}}(A)} \mathfrak{m})$ なので,

$$\begin{aligned}
\ell_A(I/Q) &= \ell_A(\mathrm{Ker}\,\varphi) + \ell_A((0) :_{\mathrm{H}^d_{\underline{a}}(A)} \mathfrak{m}) \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(A) + \mu_{\widehat{A}}(K_{\widehat{A}}) \\
&= \mathrm{r}(A)
\end{aligned}$$

が得られる. $\square$

最後に, 定理 2.3 は証明の概略を述べて終わりにしたいと思う. 先ず次の命題を挙げておく.

**命題 3.1.** $(B,\mathfrak{n})$ を *Gorenstein* 局所環で $d=\dim B\geq 2$ とする. $A\subseteq B$ 部分環で $B$ は $A$-加群として有限生成であるとし $\ell_A(B/A)=1$ とする. このとき, 環 $A$ の全てのパラメーターイデアル $Q\subseteq A$ に対して, 等式 $I^2=QI$ が成り立つ. 但し, $I=Q:\mathfrak{m}$ である ( $\mathfrak{m}$ は環 $A$ の極大イデアル) .

**定理 2.3 の証明の概略.** 環 $A$ は完備でかつ剰余体は無限体であるとしてよい. また定理 1.1 より環 $A$ は Cohen-Macaulay でないとしてよい. したがって $d=\dim A\geq 2$ となるから,

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)=(0)\ \ (\ i\neq 1,d\ ),\quad \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(A)\cong A/\mathfrak{m}$$

である ([G2] Theorem 1.1). ここで $B$ を $A$ の Cohen-Macaulay 化とする. つまり, $A\subseteq B\subseteq Q(A)$ 中間環 (但し, $Q(A)$ は環 $A$ の全商環) であって, $B$ は $A$-加群として有限生成であり, $\operatorname{depth}_A B=d$ かつ $\mathfrak{m}B=\mathfrak{m}$ である ( cf. [G1] Theorem (1.1)). このとき二つの場合が考えられる. 一つは環 $B$ が局所環のとき, もう一つは環 $B$ が局所環でないときである. 先ず環 $B$ が局所環のときは, $B$ が Gorenstein 局所環となることが分かるので命題 3.1 より環 $A$ の全てのパラメーターイデアル $Q$ に対して, 等式 $I^2=QI$ が成り立つ. 環 $B$ が局所環でないとき, このとき環 $A$ は reduced であって $\sharp\operatorname{Ass}A=2$ となる. $\operatorname{Ass}A=\{\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2\ \}$ とかくと, $A/\mathfrak{p}_i$ は $d$ 次元の正則局所環 ( $i=1,\ 2$ ) であり $\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2=\mathfrak{m}$ である. ここで, $\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2=(0)$ なので $\mathfrak{p}_1\oplus\mathfrak{p}_2=\mathfrak{m}$ となる. するとこのときは, この条件をうまく使って計算すると $I^2=QI$ が成り立つことが示される. 最後にその計算の概略を述べて終わりにしたい. 先ずこのとき, $\mathrm{r}(A)=d+2$ であることが分かる. $A_i=A/\mathfrak{p}_i$ , $\mathfrak{m}_i=\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i$ ( $i=1,2$ ) とおく. ここで $\varepsilon:A\to A_2$ を自然な写像とすると, $\mathfrak{p}_1\oplus\mathfrak{p}_2=\mathfrak{m}$ であるからこの $\varepsilon$ を通して $\mathfrak{p}_1\cong\mathfrak{m}_2$ となる. $Q=(a_1,a_2,\ldots,a_d)$ を $A$ のパラメーターイデアルとし, $a_i=\ell_i+m_i$ ( $1\leq i\leq d,\ \ell_i\in\mathfrak{p}_1,\ m_i\in\mathfrak{p}_2$ ) とかく. $I=Q:\mathfrak{m}$ とおくと定理 2.1 より, $\ell_A(I/Q)\leq d+1$ としてよい. ここで, 次の二つの場合分けを考える ; (1) $QA_i\neq\overline{QA_i}$ $(\exists i)$ のとき, (2) $QA_i=\overline{QA_i}$ $(i=1,2)$ のとき. 先ず (1) のとき, $i=2$ としてよい. 次の完全列

$$0\to\mathfrak{p}_1\to A\to A_1\to 0$$

より完全列

$$0\to\mathfrak{p}_1/Q\mathfrak{p}_1\to A/Q\to A_1/QA_1\to 0$$

が得られる. ここで, $\mathfrak{p}_1/Q\mathfrak{p}_1\cong\mathfrak{m}_2/Q\mathfrak{m}_2$ である. ところで, $QA_2\neq\overline{QA_2}$ ということから, $\ell((0):_{\mathfrak{m}_2/Q\mathfrak{m}_2}\mathfrak{m}_2)=d+1$ であり

$$(0):_{\mathfrak{m}_2/Q\mathfrak{m}_2}\mathfrak{m}_2=(QA_2+\xi A_2)/Q\mathfrak{m}_2=(\ell_1,\ldots,\ell_d,\xi)A_2/Q\mathfrak{m}_2\ \ (\ \exists\xi\in\mathfrak{p}_1\ )$$

であることが分かる. したがって, 上の完全列より $\ell_A(I/Q)=d+1$ であって $I=Q+(\ell_1,\ldots,\ell_d,\xi)$ である. よって, $I^2\subseteq QI+(\ell_1,\ldots,\ell_d,\xi)^2$ となる. ここで,

**Claim 2.** $\ell_i\ell_j,\ \ell_i\xi\in QI$ $(1\leq i,\ j\leq d)$ である.

(Claim の証明) $QI\ni a_i\ell_j=(\ell_i+m_i)\ell_j=\ell_i\ell_j+m_i\ell_j=\ell_i\ell_j$ である. 同様に, $\ell_i\xi\in QI$ も分かる.

よって, 後は$\xi^2 \in QI$を示せばよい. これは定理1.1より$A_2$内では$I^2 = QI$が成り立つことから$\xi^2 \in QI$であることが分かる. したがって, (1)のときは$I^2 = QI$が成り立つ.

(2)のとき, 先ず(1)のときと同様に次の完全列

$$0 \to \mathfrak{p}_1/Q\mathfrak{p}_1 \to A/Q \to A_1/QA_1 \to 0$$

が存在し$\mathfrak{p}_1/Q\mathfrak{p}_1 \cong \mathfrak{m}_2/Q\mathfrak{m}_2$という同型があることに注意する. すると$QA_2 = \overline{QA_2}$ということから, $\ell((0) :_{\mathfrak{m}_2/Q\mathfrak{m}_2} \mathfrak{m}_2) = d$であり

$$(0) :_{\mathfrak{m}_2/Q\mathfrak{m}_2} \mathfrak{m}_2 = QA_2/Q\mathfrak{m}_2 = (\ell_1, \ldots, \ell_d)A_2/Q\mathfrak{m}_2$$

であることが分かる. したがって完全列より, $\ell_A(I/Q) = d$であるかまたは$\ell_A(I/Q) = d+1$であるが, $QA_1 = \overline{QA_1}$であることから実は$\ell_A(I/Q) = d$であることが分かる. 故に, $I = Q + (\ell_1, \ldots, \ell_d)$となり$I^2 = QI$が成り立つ. $\square$

## 参考文献


[CHV] A. Corso, C. Huneke, and W. V. Vasconcelos, *On the integral closure of ideals*, manuscripta math. **95** (1998), 331-347.

[CP] A. Corso and C. Polini, *Links of prime ideals and their Rees algebras*, J. Alg. **178** (1995), 224-238.

[CPV] A. Corso, C. Polini, and W. V. Vasconcelos, *Links of prime ideals*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **115** (1994), 431-436.

[G1] S. Goto, *On the Cohen-Macaulayfication of certain Buchsbaum rings*, Nagoya Math. J. **80** (1980), 107-116.

[G2] S. Goto, *Buchsbaum rings with multiplicity 2*, J. Alg. **74** (1982), 494-508.

[G3] S. Goto, *On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings*, J. Alg. **85** (1983), 490-534.

[G4] S.Goto, *Integral closedness of complete-intersection ideals*, J. Alg. **108** (1987), 151-160.

[GSa1] S. Goto and H. Sakurai, *The equality $I^2 = QI$ in Buchsbaum rings*, Preprint 2002.

[GSa2] S. Goto and H. Sakurai, *The equality $I^2 = QI$ in Buchsbaum rings with multiplicity two*, Preprint 2002.

[GSu] S. Goto and N. Suzuki, *Index of reducibility of parameter ideals in a local ring*, J. Alg. **87** (1984), 53-88.

# Parametric decomposition of powers of ideals

後藤四郎（明大理工）・下田保博（北里大一般教育）

## 1　序

以下Aは可換環で単位元$1 \neq 0$を持つものとする。$\underline{a}=a_1,a_2,\cdots,a_s (s \geqq 1)$は環Aの元の列とし、$Q=(a_1,a_2,\cdots,a_s)$とおく。整数$n \geqq 1$に対して

$$\Lambda_{s,n}=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) \in Z^s \mid \alpha_i \geqq 1 \text{ for } 1 \leqq i \leqq s \text{ かつ } \Sigma \alpha_i=s+n-1\}$$

とおき、各$\alpha \in \Lambda_{s,n}$について$(\underline{a};\alpha)=(a_1^{\alpha_1},a_2^{\alpha_2},\cdots,a_s^{\alpha_s})$によって、イデアル$(\underline{a};\alpha)$を定める。このとき、$Q^n \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda_{s,n}} (\underline{a};\alpha)$が任意の整数$n \geqq 1$について成立するが、Heinzer-Ratliff-Shah [HRS]は、更に次の主張が正しいことを示した。

定理1 ([HRS]). $a_1,a_2,\cdots,a_s$がA－正則列ならば、等式$Q^n=\bigcap_{\alpha \in \Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$が、すべての整数$n \geqq 1$について成り立つ。

（Heinzer-Ratliff-Shahはこの分解をparametric decompositio nと呼んでいる。そこで我々もこの中では上記の等式をparametric decompositionということにしたい。）

この定理1に対して自然な問として

問題2.　定理1 [HRS]の逆は、正しいか？

が考えられる。ここではこの問に対して得られた結果と、それに附随した事柄に関して報告する。主結果は次のものである。

定理3 ([GS1]).　(A,m)はNoether局所環であって、$Q \subset A$と仮定する。このとき、次は同値である。

（1）　$a_1,a_2,\cdots,a_s$は環A内で正則列をなす。

（2）　$a_i$はすべて環Aの非零因子であって、等式$Q^n=\bigcap_{\alpha \in \Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$が、任意の整数$n \geqq 1$に対して成り立つ。

この定理からただちに次の結果が得られる。

系4 ([GS1]).　(A,m)はnoether局所環で$\dim A=d \geqq 1$と仮定する。このとき次の条

件は同値である。

（１）A は Cohen-Macaulay である。

（２）任意の $p\in \mathrm{Ass}\ A$ に対して $\dim A/p=d$ であってかつ、環 A のパラメター系 $\underline{a}=a_1,a_2,\cdots,a_d$ で、等式

$$Q^n=\cap_{\alpha\in\Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$$

が任意の整数 $n\geqq 1$ について成立するようなものが存在する。

上記の結果によって元の列が正則列であるための条件　　　　　　　　が parametric decomposition によって特徴付けられるという結論がえられたことは非常に興味深く思われる。

## 2　定理３の証明

定理の（１）ならば（２）であることはよく知られているのでここでは省く。（後藤ー下田の論文 [GS1] ではこの場合の簡潔な証明を与えている。[GS1,命題２,2] を参照して下さい)。　以下では（２）ならば（１）が成り立つことを示す。

まず、証明をより簡潔にするために $1\leqq i\leqq s$ に対して

$$Q_i=(a_1,a_2,\cdots,a_i)$$

とイデアル $Q_i$ を定めておくことにする。

定理３の証明の key となる補題が次のものである。

補題１. $a_s$ は環 A で非零因子であり、等式 $Q^n=\cap_{\alpha\in\Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$ が、任意の整数 $n\geqq 1$ について成り立つと仮定する。このとき等式

$$Q_{s-1}:a_s=Q_{s-1}$$

が成り立つ。

この補題を示すのに次の２つの事実を用意する。

事実１.　等式 $Q^n=\cap_{\alpha\in\Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$ が任意の $n\geqq 1$ について成り立つならば、任意の２つの整数 k、$m\geqq 1$ に対して

$$(a_s{}^k)\cap Q_{s-1}{}^m\subseteq Q^{k+m}$$

が成り立つ。

事実２．環Ａの元ａが任意の整数$k \geqq 1$に対して

$$(0) : a^k \subseteq (a)$$

を満たすならば、元ａはＡ内で非零因子である。

事実１の証明：

$n=k+m$のとき、等式$Q^n=\cap_{\alpha \in \Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$が成り立つので、任意の$\alpha \in \Lambda_{s,k+m}$に対して　$(a_s^k) \cap Q_{s-1}{}^m \subseteq (\underline{a};\alpha)$を示せばよい。

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$とおく。２つの場合が考えられる。

場合１．$1 \leqq \alpha_s \leqq k$のとき。

このときは、$(a_s^k) \subseteq (\underline{a};\alpha)$が成り立つ。

場合２．$\alpha_s \geqq k+1$のとき。

$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}=k+m+s-1-\alpha_s \leqq m+s-2$より

$\delta=m+s-2-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1})$とおき、

$\beta=(\alpha_1+\delta、\alpha_2、\cdots、\alpha_{s-1})$とすると、

$$(\alpha_1+\delta)+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}=s+m-2=(s-1)+m-1$$

だから、$\beta \in \Lambda_{s-1,m}$となるので、$Q_{s-1}{}^m \subseteq (a_1,a_2,\cdots,a_{s-1};\beta) \subseteq (\underline{a};\alpha)$が成り立つ。

いずれの場合も　$(a_s^k) \cap Q_{s-1}{}^m \subseteq (\underline{a};\alpha)$が示せた。

事実２の証明：　$x \in A$を$x \neq 0$かつ$xa=0$を満たすものとする。環ＡがNoether局所環だから、充分大きな整数ｋに対して$x \in (a^k) \setminus (a^{k+1})$とできる。このとき、環Ａの元ｙを用いて$x=ya^k$と表すと、$0=xa=ya^{k+1}$となり、$y \in (0) : a^{k+1} \subseteq (a)$。従って、$x \in (a^{k+1})$となりｋの取り方に反する。

上で示した２つの事実を用いて補題１を示すことができる。

補題１の証明：　事実２より任意の整数$k \geqq 1$に対して

$$Q_{s-1} : a_s^k \subseteq Q$$

をいえばよいことになる。

$a_s$ は非零因子だから上の事柄は任意の整数 $k \geqq 1$ に対して

$$(a_s{}^k) \cap Q_{s-1} \subseteq (a_s{}^k) Q$$

であることと同値になる。

主張：　任意の整数 $m \geqq 1$ に対して

$$(a_s{}^k) \cap Q_{s-1} \subseteq (a_s{}^k)Q + Q^{k+m}$$

が成り立つ。

実際、$m=1$ のときは、事実1そのものである。この主張 を $m$ に関する帰納法で示す。$m>1$ として $m$ のとき、上の主張が正しいと仮定する。$x$ を $(a_s{}^k) \cap Q_{s-1}$ の元とすると、$x \in (a_s{}^k)Q + Q^{k+m}$ となる。このとき、$Q^{k+m}$ の元で $(a_s{}^k)$ に含まれるものを除いて考えると $x \in (a_s{}^k)Q + Q_{s-1}{}^{k+m}$ が得られる。従って、$(a_s{}^k)$ の元 $y$ が存在して $x-y \in Q_{s-1}{}^{k+m}$ となる。このとき、$x-y \in (a_s{}^k) \cap Q_{s-1}{}^{k+m}$ より事実1によって $x-y \in Q^{k+m+1}$。ゆえに $x \in (a_s{}^k)Q + Q^{k+m+1}$。

この主張と Krull の intersection 定理を用いれば補題1の結果が導かれる。

定理3を示すのに必要なもう1つの補題が次の補題2である。

補題2. 等式 $Q^n = \cap_{\alpha \in \Lambda_{s,n}} (\underline{a}; \alpha)$ が、すべての整数 $n \geqq 1$ について成り立つならば、等式 $Q_i{}^n = \cap_{\beta \in \Lambda_{i,n}} (a_1, a_2, \cdot\cdot\cdot, a_i; \beta)$ がすべての $1 \leqq i \leqq s-1$ と任意の整数 $n \geqq 1$ について成り立つ。

証明の概略：　$i=s-1$ のときこの補題を示せば、それ以外 の $i$ に関しては $s-i$ の帰納法で主張がいえる。等式の左辺⊆右辺は明かより、逆の包含関係を示す。

そこで、 $x$ を右辺の元とするとき、 $x$ が左辺に含まれなければ、 Krull の intersection 定理を利用することで、$x \in (a_s{}^k) + Q_{s-1}{}^n$ だが $x \in (a_s{}^{k+1}) + Q_{s-1}{}^n$ とはならないような整 数 $k \geqq 1$ が存在する。従って、 環Aの元 $y$ で $y \in Q_{s-1}{}^n$ かつ $x-y \in (a_s{}^k)$ を満たすものがとれる。このとき、事実1の証明

と同じようにして、$x-y \in Q^{n+k} = \cap_{\alpha \in \Lambda_{s,n+k}}(\underline{a};\alpha)$ を示すことができる。
このことより、$x \in (a_s^{k+1}) + Q_{s-1}{}^n$ が導かれるが、これは整 数 k のとり方に反する。よって、補題２は成立する。

定理３の（２）⇒（１）の証明： 補題２から s に関する仮定が s－１でも成立することが分かるので、帰納法により $a_1, a_2, \cdot\cdot\cdot, a_{s-1}$ が環 A 内で正則列をなすことが分かる。ところで補題１によって $a_s$ は環 $A/(a_1, a_2, \cdot\cdot\cdot, a_{s-1})$ 内で非零因子になるので、$a_1, a_2, \cdot\cdot\cdot a_s$ は環 A 内で正則列をなすことが導かれる。

## 3　定理に関する２、３の注意と関連した結果について

まず、次のような注意を与えておきたい。

注意５．定理３の条件（２）内の仮定「$a_i$ はすべて環 A の非零因子である」は、一般には取り除くことができない。正則列でなくても、等式 $Q^n = \cap_{\alpha \in \Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$ がすべての整数 $n \geqq 1$ に対して成立するような簡単な例がある。

実際、k は体、$A = k[[X,Y,Z]]/(XY)$ とし、$a_1 = z \bmod (XY)$, $a_2 = x \bmod (XY)$, $Q = (a_1, a_2)$ とおく。このとき、等 式 $Q^n = \cap_{\alpha \in \Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$ が、すべての整数 $n \geqq 1$ について成立する。

より一般的に等式 $Q^n = \cap_{\alpha \in \Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$ を満たすが、正則列ではないような例をかなり多く作ることが可能である。実際、次のような命題が成り立つ。

命題６ ([GS2]). (A,m) は Noether 局所環で、dim $A = d \geqq 2$ なるものとする。I を環 A のイデアルで、環 A/I は d 次元の Cohen-Macaulay 環であって、I 自身も、加群として、d－１次元の Cohen-Macaulay A－加群であると仮定する。$a_1, a_2, \cdot\cdot\cdot, a_d$ は環 A のパラメター系であって、$a_1 I = 0$ を満たすものとすれば、
等式 $Q^n = \cap_{\alpha \in \Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$ が、すべての整数 $n \geqq 1$ について成立する。

この命題の証明に関しては [GS2],Proposition 2.2 を参照されたい。

以下では定理３に関連したことがらを少し述べたいが、これらの詳しい結果や証明は後藤一下田 [GS 2] の論文を参照されたい。

まず等式 $Q^n=\bigcap_{\alpha\in\Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$ が、すべての整数 $n\geqq 1$ について成立するような元の列 $a_1,a_2,\cdots,a_d$ の満たす条件を求めたいが、これは非常に難しく思われる。そこで、次のような問題で考えてみることにしたい。

問題７.(A,m) は Noether 局所環とする。任意のパラメターイデアル $Q=(a_1,a_2,\cdots,a_d)$ と任意の整数 $n\geqq 1$ について、等式 $Q^n=\bigcap_{\alpha\in\Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$ が成り立つために、環 A が満たすべき条件は何か？

この問に対する答は以下のものである。

定理８ ([GS2]). (A,m) は Noether 局所環で $d=\dim A\geqq 2$ なるものと仮定し、$W=H_m^0(A)$ とおく。このとき次の条件は同値である。

（１）A／W は Cohen-Macaulay 環であって、$mW=(0)$ が成り立つ。

（２）環 A の任意のパラメターイデアル $Q=(a_1,a_2,\cdots,a_d)$ と任意の整数 $n\geqq 1$ について、等式 $Q^n=\bigcap_{\alpha\in\Lambda_{s,n}}(\underline{a};\alpha)$ が成り立つ。

参考文献

[GS1] S.Goto and Y.Shimoda, Parametric decomposition of powers of ideals versus regularity of sequences, to appear in Proc.A.M.S.

[GS2] S.Goto and Y.Shimoda, Parametric decomposition of powers of parameter ideals, Preprint.

[HRS] W.Heinzer,L.J.Ratliff, and K.Shah, Parametric decomposition of monomial ideals (I),Houston J.Math. 21 (1995), 29-52.

# On almost complete intersection monomial ideals

寺井直樹 (佐賀大文化教育)

$R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を体 $k$ 上の多項式環と $I$ をその squarefree monomial ideal であるとする。$I = (m_1, m_2, \ldots m_\mu)$ と表す。$I$ に $V = \{1, 2, \ldots \mu\}$ を頂点集合とする hypergraph $H$ を次の様に対応させる。ただし、$H$ が $V$ を頂点集合とする hypergraph であるとは $H$ が $V$ の冪集合 $\mathbf{2}^V$ の部分集合で

$$\cup_{F \in H} F = V$$

を充たすこととする。

$$\begin{array}{lll} F \in H \Leftrightarrow_{\text{def}} & \text{For} & \exists i (1 \leq i \leq n) \text{ such that} \\ & x_i & | m_j \text{ if } j \in F, \\ & x_i & \not| m_j \text{ if } j \in V \setminus F. \end{array}$$

このとき、この hypergraph $H$ は、

$$\text{For } \forall i, j \in V (i \neq j), \exists F, G \in H \text{ such that}$$
$$i \in F \cap (V \setminus G),\ j \in G \cap (V \setminus F)$$

を 充たす。

逆に上の条件を 充たす hypergraph $H$ は 一意ではないがあるイデアルに対応している。

$C \subset H$ が $H$ の vertex cover であるとは

$$\cup_{F \in C} F = V$$

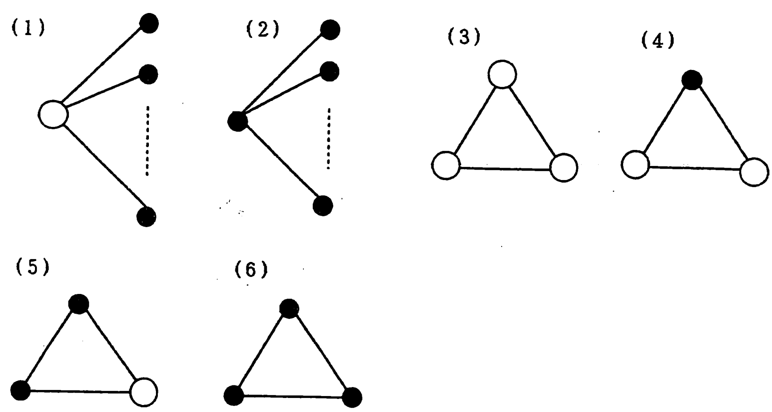
をみたすことである。$C$ の 真部分集合が $H$ の vertex cover にならないとき、$H$ の vertex cover $C$ は $H$ の minimal vertex cover であるという。

命題 squarefree monomial ideal $I$ が height $h$ の prime component を持つことと、$I$ に対応する hypergraph $H$ が濃度 $h$ の minimal vertex cover を持つことは同値。従って、$I$ の height が $h$ であることと $I$ に対応する hypergraph $H$ が濃度 $h$ の minimal vertex cover を持ち、かつ、$H$ の任意の minimal vertex cover の濃度が $h$ 以上であることは同値。

以上の準備のもと、almost complete intersection squarefree monomial ideal を分類する。まず、$\mu(I) = \mathrm{ht}(I)+1$ であるとき、$I$ は almost complete intersection であるという。ただし、$\mu(I)$ は $I$ の極小生成系の個数とする。

頂点が $(h+1)$ 個で命題の条件を充たす hypergraph $H$ を分類すればよい。$H$ の頂点の個数と minimal vertex cover の濃度が高々 1 しか違わないことから、$H$ は $\dim H \leq 1$ で 2 independent edge を含んではいけないことがわかる。

命題 almost complete intersection squarefree monomial ideal に対応する hypergraph $H$ は次のいずれかの形である。




定理 $I \subset R$ を height $h \geq 1$ の almost complete intersection squarefree monomial ideal とする。このとき、$I$ は次のいずれかの形で表せる。ただし、$A_1 \ldots, B_1, \ldots$ はどの 2 つも互いに素な squarefree monomial とする。

(1)$(A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_pB_p, A_{p+1}, \ldots, A_h, B_1B_2\cdots B_p)$
ただし、$p \geq 2$ とし, また、$A_1 \ldots A_h, B_1, \ldots, B_p \neq 1$ とする。
このとき、$R/I$ は C.M.type $p$ の C.M.ring である。

(2)$(A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_pB_p, A_{p+1}, \ldots, A_h, A_{h+1}B_1B_2\cdots B_p)$
ただし、$p \geq 1$ とし, また、$A_1 \ldots A_{h+1}, B_1, \ldots, B_p \neq 1$ とする。
このとき、$R/I$ は pure でない。

(3)$(A_1B_1B_2, A_2B_1B_3, B_2B_3, A_4, \ldots, A_{h+1})$

ただし、$A_4,\ldots,A_{h+1},B_1,B_2,B_3\neq 1$ とする。
このとき、 $R/I$ は C.M.type 2 の C.M.ring である。

(4)$(A_1B_1B_2, A_2B_1B_3, A_3B_2B_3, A_4,\ldots,A_{h+1})$
ただし、$A_1,\ldots,A_{h+1},B_1,B_2,B_3\neq 1$ とする。
このとき、 $R/I$ は pure でない。

polarization を考えることにより、一般の almost complete intersection monomial ideal も分類できる。

$A=x_{i_1}^{j_1}x_{i_2}^{j_2}\cdots x_{i_m}^{j_m}\in R$ をモノミアルとするとき (ただし、$j_1,j_2,\ldots,j_m>0$)、$\sqrt{A}=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}$ とする。

定理 $I\subset R$を height $h\geq 1$ の almost complete intersection monomial ideal とする。このとき、$I$ は 次の いずれかの形で 表せる。ただし、$A_1\ldots,B_1,\ldots$ は どの2つも互いに素なモノミアルとする。

(1)$(B_1,\ldots,B_p,A_{p+1}B_{p+1},\ldots,A_qB_q,A_{q+1},\ldots,A_h,A_{h+1}B_1'B_2'\cdots B_q')$
ただし、$p\geq 0, q\geq 1, p\leq q, \sqrt{B_i}=\sqrt{B_i'}(i=1,2,\ldots q)$ とし、$B_i'$ は $B_i$ で割り切れないとする $(i=1,2,\ldots p)$。また、$A_{p+1}\ldots A_h,B_1,\ldots,B_q\neq 1$ とする。もし、$q=1, A_{h+1}=1$ ならば、$B_1$ は $B_1'$ で割り切れないとする。

(2)$(A_1B_1B_2, A_2B_1'B_3, A_3B_2'B_3', A_4,\ldots,A_{h+1})$
ただし、$\sqrt{B_i}=\sqrt{B_i'}(i=1,2,3),\quad A_4,\ldots,A_{h+1},B_1,B_2,B_3\neq 1$ とする。

次に arithmetical rank について考察する。

$$\mathrm{ara}(I):=\min\{r;\exists a_1,a_2,\ldots,a_r\in I \text{ such that } \sqrt{(a_1,a_2,\ldots,a_r)}=\sqrt{I}\}$$

を I の arithmetical rank と言う。一般に $\mathrm{ara}(I)\geq \mathrm{ht}(I)$ で、$\mathrm{ara}(I)=\mathrm{ht}(I)$ のとき、$I$ を set-theoretic complete intersection と言う。

次の事実が知られている。

定理 ( **[Ly], see also [Te]**) $I$ を squarefree monomial ideal とする。このとき

$$\mathrm{projdim} R/I=\mathrm{cd}(I)$$

である。ただし、

$$\mathrm{cd}(I)=\max\{i; H_I^i(R)\neq 0\}$$

である。

$H_I^i(R)$ は up to radical で決まるから、

$$\mathrm{cd}(I)\leq \mathrm{ara}(I).$$

したがって、

$$\mathrm{projdim} R/I \le \mathrm{ara}(I).$$

このことから、$I$ を　squarefree monomial ideal とするとき、$I$ が set-theoretic complete intersection ならば、$R/I$ は Cohen-Macaulay であることがわかる。

問題 $I$ を　squarefree monomial ideal とするとき、いつ、 $\mathrm{ara}(I) = \mathrm{projdim} R/I$ が、成立するか？特に、いつ、$I$ はset-theoretic complete intersection となるか。

以下、$I$ が、almost complete intersection squarefree monomial ideal のときに 焦点を当てて 上の問題を考察したい。

命題 $I = (A_1, A_2, \ldots, A_\mu) \subset R$ を height $h \ge 1$ の squarefree monomial ideal とする。

$$\mathrm{projdim} R/I \le \mu(I) - 1$$

ならば、

$$\mathrm{ara}(I) \le \mu(I) - 1$$

である。

証明 $\mathrm{projdim} R/I < \mu(I)$ だから、$I$ の Tayor resolution は 極小自由分解でないことがわかる。したがって、$A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ を $I$ のモノミアル極小生成系とするとき、$A_\mu | A_1 A_2 \cdots A_{\mu-1}$ と仮定してよい。$S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu - 1)$ を $A_1, A_2, \ldots, A_{\mu-1}$ の $i$ 次基本対称式とするとき、

$$A_j^{\mu-1} - S_1 A_j^{\mu-2} + \cdots + (-1)^{\mu-1} S_{\mu-1} = 0$$

だから $A_\mu | S_{\mu-1}$ により、

$$A_j^{\mu-1} \in (S_1, S_2, \ldots S_{\mu-2}, A_\mu).$$

よって、

$$\sqrt{(S_1, S_2, \ldots S_{\mu-2}, A_\mu)} = I.$$

系 $I \subset R$ を height $h \ge 1$ の squarefree monomial ideal とする。このとき、次の 条件は同値である。

(1)$\mathrm{projdim} R/I = \mu(I)$

(2)$\mathrm{ara}(I) = \mu(I)$

系 $I = (A_1, A_2, \ldots, A_{h+1}) \subset R$ を height $h \geq 1$ の almost complete intersection squarefree monomial ideal とする。このとき、次の 条件は同値である。

(1)$R/I$ は Cohen-Macaulay。

(2)$R/I$ は pure。

(3)$A_p \mid A_1 A_2 \cdots A_{\hat{p}} \cdots A_{h+1}$ なる $A_p$ が存在する。

(4)$I$ は set-theoretic complete intersection。

注意 $R/I$ が complete intersection でないとき、一般に (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) が成立するが、逆は必ずしも成り立たない。

(３) は projdim$R/I < \mu(I)$ と言い替えてもよい。

# 参考文献


[Br-He] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen-Macaulay Rings," Cambridge University Press, Cambridge / New York / Sydney, 1993.

[Ei] D. Eisenbud, "Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry," Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg /New York / Tokyo, 1995.

[Ly] G. Lyubeznik, *On local cohomology modules $H_a^i$ for ideals generated by monomials in an R-sequence,* in "Complete Intersections, Acireale 1983 (S. Greco and R. Strano eds.)," Lect. Notes in Math., No. 1092, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg /New York / Tokyo, 1984 pp.214 – 220.

[Te] N. Terai, *Local cohomology modules with respect to monomial ideals,* in "第２０回可換環論シンポジウム報告集," pp.181 – 189.

[Vi] R.H. Villarreal, "Monomial Algebrac," Marcel Dekker, New York / Basel, 2001.



Department of Mathematics
Faculty of Culture and Education
Saga University
Saga 840-8502, Japan
*E-mail address* : terai@cc.saga-u.ac.jp

# 正則局所環内の $\mathfrak{a}$-tight closure について

吉田 健一
(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

この講演では, 原伸生氏により定義された正標数のネーター環における $\mathfrak{a}$-tight closure ([HY]) について考察する. この概念を用いて定義される $\tau(\mathfrak{a})$ は双有理幾何学で重要な研究対象である multiplier ideal $\mathcal{J}(\mathfrak{a})$ の "正標数化" とみなすことができる. $\mathfrak{a}$-Tight Closure の理論については, [HY] の Section 1 でも触れられているが, Tight Closure の理論では基本的な結果 (例えば「整域の場合に帰着される方法」など) に対応する結果がいくつか欠けている. 前半では, この点を補っておきたい. また, 後半では, $\mathfrak{a}$-tight closure の局所化の問題について考察し, 正則環の場合に肯定的な結果を証明する.

以下, 特に断らない限り, $A$ は標数 $p>0$ (の体を含む) 有限次元ネーター環とする. また, $A$ の極小素因子全体, $A$ の素因子全体をそれぞれ $\mathrm{Min}(A)$, $\mathrm{Ass}(A)$ と表し, $A^o := A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(A)} \mathfrak{p}$ とおく. $A$ のイデアルと $q=p^e$ に対して, $I^{[q]} := (a^q \mid a \in I)A$ とおく.

## 1 $\mathfrak{a}$-Tight Closure の定義と基本性質

最初に, $\mathfrak{a}$-Tight Closure の定義を与えよう.

**Definition 1.1 (原 [HY]).** $A$ を標数 $p>0$ のネーター環とし, $\mathfrak{a}, I$ を $A$ のイデアルとする. このとき,

$$z \in I^{*\mathfrak{a}} \iff \exists c \in A^o \text{ s.t. } cz^q\mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]}\ (\forall q = p^e,\ e \gg 0)$$

により, $I$ の $\mathfrak{a}$-tight closure $I^{*\mathfrak{a}}$ を定義する. $I^{*\mathfrak{a}} = I$ が成り立つとき, $I$ は $\mathfrak{a}$-tightly closed であると言う.

**Remark 1.** $\mathfrak{a} = A$ のとき, $I^{*A}$ は Hochster と Huneke により定義された, $I$ の tight closure $I^*$ ([HH2]) と一致する.

**Remark 2.** ネーター環の準同型 $\phi: A \to B$ を通して $B$ を $A$ 上の代数とみなすとき, $\mathfrak{a} \subseteq A$, $L \subseteq B$ に対して, $L^{*\mathfrak{a}B}$ の代わりに $L^{*\mathfrak{a}}$ と書く.

**Lemma 1.2 ($\mathfrak{a}$-Tight Closure の基本性質 [HY]).** $A$ を標数 $p>0$ のネーター環とし, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $I$, 及び $J$ を $A$ のイデアルとする. このとき, 次が成立する.

(1) $I^{*\mathfrak{a}}$ は $I$ を含む $A$ のイデアルである.

(2) $I \subseteq J$ ならば, $I^{*\mathfrak{a}} \subseteq J^{*\mathfrak{a}}$ である. また, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ ならば, $I^{*\mathfrak{a}} \subseteq I^{*\mathfrak{b}}$ である.

(3) $(I^{*\mathfrak{a}})^{*\mathfrak{b}} \subseteq I^{*\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \subseteq I^{*\mathfrak{a}} : \mathfrak{b}$ である. また, $\mathfrak{b} = bA$ のとき, 等号が成立する.

(4) $I^{*\mathfrak{a}} \subseteq (I^{*\mathfrak{a}})^{*\mathfrak{a}} \subseteq I^{*\mathfrak{a}^2} \subseteq I^{*\mathfrak{a}} : \mathfrak{a}$ である. 一般に, $I^{*\mathfrak{a}}$ は tightly closed であるが, $\mathfrak{a}$-tightly closed ではない.

*Proof.* (1), (2) は明らか.

(3) $z \in (I^{*\mathfrak{a}})^{*\mathfrak{b}}$ とすると, ある $c_1 \in A^o$ があって, 任意の $q = p^e$, $e \gg 0$ に対して, $c_1 z^q \mathfrak{b}^q \subseteq (I^{*\mathfrak{a}})^{[q]}$ が成り立つ. $I^{*\mathfrak{a}}$ はネーター環 $A$ のイデアルだから, $I^{*\mathfrak{a}} = (z_1, \ldots, z_n)$ と書ける. このとき, ある $c_2 \in A^o$ が存在して, 十分大きな任意の $q = p^e$ と任意の $i$ に対して, $c_2 z_i^q \mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]}$ とできる. 特に, $c_2 (I^{*\mathfrak{a}})^{[q]} \mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]}$ である. よって, $c_1 c_2 z^q (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^q \subseteq I^{[q]}$ $(\forall q = p^e)$ となり, $z \in I^{*\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ を得る. ゆえに, $(I^{*\mathfrak{a}})^{*\mathfrak{b}} \subseteq I^{*\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ である.

$z \in I^{*\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ と仮定すると, ある $c \in A^o$ が存在して, 十分大きな任意の $q = p^e$ に対して, $cz^q \mathfrak{a}^q \mathfrak{b}^q \subseteq I^{[q]}$ となる. よって, 任意の $b \in \mathfrak{b}$ に対して, $c(zb)^q \mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]}$ となり, $zb \in I^{*\mathfrak{a}}$ を得る. 言い換えると, $z \in I^{*\mathfrak{a}} : \mathfrak{b}$ を得る. また, $\mathfrak{b} = bA$ のとき, 等号 $(I^{*\mathfrak{a}})^{*bA} = I^{*\mathfrak{a}} : b$ が成り立つことも同様に分かる.

(4) 前半は (3) で, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ とすれば得られる. また, $\mathfrak{b} = A$ とすれば, $(I^{*\mathfrak{a}})^* \subseteq I^{*\mathfrak{a}} : A = I^{*\mathfrak{a}}$ を得る. 従って, $I^{*\mathfrak{a}}$ は tightly closed である. □

**Example 1.3.** 一般には, $I^{*\mathfrak{a}}$ は $\mathfrak{a}$-tightly closed ではない. 実際, $A = k[[x,y]]$, $\mathfrak{m} = (x,y)A$, $I = \mathfrak{m}^2$, $\mathfrak{a} = xA$ とすると, $I^{*\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}^2 : x = \mathfrak{m}$, $(I^{*\mathfrak{a}})^{*\mathfrak{a}} = \mathfrak{m} : x = A$ である.

**Remark 3 ([HT], [HY]).** $(A, \mathfrak{m})$ を excellent で, 被約 (reduced) な局所環と仮定する. このとき, 任意のイデアル $\mathfrak{a}$ と有理数 $t \geq 0$ に対して,

$$z \in I^{*\mathfrak{a}^t} \iff \exists c \in A^o \text{ s.t. } cz^q \mathfrak{a}^{\lceil tq \rceil} \subseteq I^{[q]} \ (\forall q = p^e,\ e \gg 0)$$

により, 有理数係数の $\mathfrak{a}$-tight closure $I^{*\mathfrak{a}^t}$ を定義すると, 基本性質の大半はこの場合に自然に拡張されうるが, ここでは省略する.

次の性質は, $\mathfrak{a}$-tight closure を計算する際に重要である.

**Lemma 1.4 ($\mathfrak{a}$-Tight Closure の基本性質).** $A$ を標数 $p > 0$ のネーター環とし, $\mathfrak{a}, I$ を $A$ のイデアルとする. このとき, 次が成立する.

(1) $\sqrt{0} \subseteq (0)^{*\mathfrak{a}}$ である. また, $\mathfrak{a} \cap A^o \neq \emptyset$ ならば, 等号が成立する.

(2) $A_{\mathrm{red}} = A/\sqrt{0}$ とおくとき, $\mathfrak{a} \cap A^o \neq \emptyset$ ならば, 次が成り立つ:

$$I^{*\mathfrak{a}}/\sqrt{0} = I^{*\mathfrak{a}} A_{\mathrm{red}} = (IA_{\mathrm{red}})^{*\mathfrak{a}}.$$

(3) $A$ が reduced のとき, 次が成り立つ:

$$z \in I^{*\mathfrak{a}} \iff z + \mathfrak{p} \in \left(\frac{I + \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}\right)^{*\mathfrak{a}} \quad (\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A)).$$

(4) ([HY]) $\mathfrak{a} \cap A^o \neq \emptyset$ で $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の reduction ならば, $I^{*\mathfrak{a}} = I^{*\mathfrak{b}}$ である.

*Proof.* (1) $\sqrt{0} \subseteq (0)^*$ は明らか．$\mathfrak{a} \cap A^o \neq \emptyset$ と仮定して，逆の包含関係を言う．$a \in \mathfrak{a} \cap A^o$ を取ると，任意の $z \in (0)^{*\mathfrak{a}}$ に対して，ある $c \in A^o$ があって，$cz^q a^q \in cz^q \mathfrak{a}^q = 0$. 特に，任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A)$ に対して，$cz^q a^q \in \mathfrak{p}$ である．一方，$c, a \notin \mathfrak{p}$ だから，$z \in \mathfrak{p}$ を得る．よって，$z \in \cap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}(A)}\mathfrak{p} = \sqrt{0}$ を得る．

(2) $(IA_{\mathrm{red}})^{*\mathfrak{a}} \subseteq I^{*\mathfrak{a}} A_{\mathrm{red}}$ を言えば十分である．$(\sqrt{0})^{[q']} = 0$ となる $q' = p^{e'}$ を取り固定する．$\mathfrak{a} \cap A^o \neq \emptyset$ だから，$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in A^o)$ と書くことができる．

$z + \sqrt{0} \in (IA_{\mathrm{red}})^{*\mathfrak{a}}$ と仮定すると，ある $c \in A^o$ があって，

$$cz^q \mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]} + \sqrt{0} \quad (\forall q = p^e, e \gg 0)$$

とできる．$a_1^{q'} \cdots a_n^{q'}(a_1, \ldots, a_n)^{qq'} \subseteq (a_1^{q'}, \ldots, a_n^{q'})^q$ に注意して，上の式の両辺を $q'$ 乗すると，

$$c^{q'} a_1^{q'} \cdots a_n^{q'} z^{qq'} \mathfrak{a}^{qq'} \subseteq c^{q'} z^{qq'} (\mathfrak{a}^q)^{[q']} \subseteq I^{[qq']} + (\sqrt{0})^{[q']} = I^{[qq']}$$

を得る．これより，$z \in I^{*\mathfrak{a}}$ を得る．

(3) $A^o$ の $A/\mathfrak{p}$ における像は $(A/\mathfrak{p})^o$ の元だから，$\Longrightarrow$ は明らか．

$\Longleftarrow$ を言う．$\mathrm{Min}(A) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ とおく．$z \in A$ が $z + \mathfrak{p}_i \in \left(\frac{I+\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{p}_i}\right)^{*\mathfrak{a}}$ $(i = 1, \ldots, r)$ を満たすと仮定して，$z \in I^{*\mathfrak{a}}$ を言う．仮定より，ある $c_i \in A \setminus \mathfrak{p}_i$ があって，$cz^q \mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]} + \mathfrak{p}_i$ $(\forall e \geq e_i)$. 各 $i$ に対して $d_i \in \prod_{j\neq i} \mathfrak{p}_j \setminus \mathfrak{p}_i$ を取り，$d = \sum_{i=1}^r c_i d_i$ とおくと，$d \in A^o$ である．また，$\sqrt{0} = (0)$ だから，任意の $i$ に対して，

$$d_i c_i z^q \mathfrak{a}^q \subseteq (I^{[q]} + \mathfrak{p}_i) \prod_{j\neq i} \mathfrak{p}_j \subseteq I^{[q]} + \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r = I^{[q]}$$

である．特に，$dz^q \mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]}$ $(\forall q = p^e,\ e \gg 0)$ であり，$z \in I^{*\mathfrak{a}}$ を得る．

(4) $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の reduction だから，$\mathfrak{a}^{r+1} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^r$ となる $r \geq 0$ が取れる．このとき，$\mathfrak{b}^q \mathfrak{a}^r = \mathfrak{a}^r \mathfrak{a}^q$ だから，$z \in I^{*\mathfrak{b}}$ と仮定すると，ある $c \in A^o$ が存在して，$cz^q \mathfrak{b}^q \subseteq I^{[q]}$ $(\forall q = p^e, e \gg 0)$ である．

$a \in \mathfrak{a} \cap A^o$ を取れば，

$$ca^r z^q \mathfrak{a}^q \in c\mathfrak{a}^r z^q \mathfrak{a}^q = cz^q \mathfrak{b}^q \mathfrak{a}^r \subseteq I^{[q]} \quad (\forall q = p^e)$$

となり，$z \in I^{*\mathfrak{a}}$ を得る．従って，$I^{*\mathfrak{b}} \subseteq I^{*\mathfrak{a}}$ を得る．逆の包含関係は Lemma 1.2 より明らかである． □

Tight closure の persistence と言われる性質は，$z \in I^*$ に対して，$z$ の $A/J$ における像 $z + J$ が $(\frac{I+J}{J})^*$ に含まれることを主張する ([HH3]). $cz^q \in I^{[q]}$ となる $c$ が $J$ に含まれる場合があり得るので，この事実は必ずしも自明ではない．同様の persistence は $\mathfrak{a}$-tight closure に関しても同様に証明できる．

**Proposition 1.5 (Persistence of $\mathfrak{a}$-Tight Closure).** $\varphi : A \to B$ を標数 $p > 0$ のネーター環の準同型とし，$A$ を excellent と仮定する．このとき，$z \in I^{*\mathfrak{a}}$ ならば，$\varphi(z) \in (IB)^{*\mathfrak{a}B}$ である．

*Proof.* 証明は後で行う． □

さて, $\mathfrak{a}$-tight closure の概念を導入したモチベーションについて述べよう. そのために, 次の概念を定義しよう.

**Definition 1.6 (cf. [HY]).** $(A, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の excellent で被約な局所環とする.

(1) $c \in A^o$ が, $(\forall I \subseteq A)(\forall z \in I^{*\mathfrak{a}})(\forall q = p^e, e \geq 0)(cz^q\mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]})$ を満たすとき, $\mathfrak{a}$-test element であると言う.

(2) $\tau(\mathfrak{a}) = \bigcap_{I \subseteq A} I : I^{*\mathfrak{a}}$ とおく.

$\mathfrak{a} = A$ のとき, $\tau(\mathfrak{a}) = \tau(A)$ は test ideal である. $A$ の test element $c$ は $\tau(A) \cap A^o$ に属するが, $A$ の $\mathfrak{a}$-test element $c$ は $\tau(\mathfrak{a}) \cap A^o$ に属するとは限らない. 実際, (1) で $e = 0$ の場合を考えても $cz\mathfrak{a} \subseteq I$ しか得られない. また, $A$ が 2 次元以上の正則局所環のとき, 1 は任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対する $\mathfrak{a}$-test element であるが, $A$ のイデアル $I$ で $\mathfrak{a}$-tightly closed でないものがある.

**Theorem 1.7 (cf. [HY], [HT]).** $A$ を標数 $p > 0$ の被約なネーター環とし, $c \in A^o$ が次のいずれかの条件を満たすと仮定する:

(1) $A$ は F-finite で, $A_c$ は strongly F-regular である.

(2) $A$ は excellent 局所環で, $A_c$ は Gorenstein F-regular (例えば, 正則環) である.

このとき, $c$ の十分高い巾 $c^n$ は $A$ のすべてのイデアル $\mathfrak{a}$ に対する $\mathfrak{a}$-test element である. (注) $n$ は $\mathfrak{a}$ によらず定まる.

Multiplier ideal の概念は, Nadel により解析的に定義され, Ein と Lazarsfeld らにより代数幾何学的に再定義されたものであるが, 現在も双有理幾何学において重要な研究対象である. また, この概念は Lipman [Li] により (可換環論的に) 任意標数の正則局所環に対して定義された adjoint ideal の概念の拡張である. ただ, この用語は紛らわしいので, 今後は mutiplier ideal という用語を用いる.

**Definition 1.8 (cf. [La], [HY]).** $(A, \mathfrak{m})$ を標数 0 の体 $k$ 上本質的有限型な $\mathbb{Q}$-Gorenstein normal 局所整域とする. $\mathfrak{a} \neq 0$ を $A$ のイデアルとし, $f : X \to Y = \operatorname{Spec} A$ を $\mathfrak{a}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-Z)$ が可逆層となるような特異点解消とする. このとき,

$$\mathcal{J}(\mathfrak{a}) := H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X - f^*K_Y - Z \rceil))$$

を $\mathfrak{a}$ の multiplier ideal と言う.

$\tau(\mathfrak{a})$ は "$\mathcal{J}(\mathfrak{a})$ の正標数化" とみなすことができる ([Ha, HY, Sm1, Ta] 参照). 従って, $\mathfrak{a}$-Tight Closure の理論を整備することは, multiplier ideal への環論的アプローチを可能にする.

## 2 主定理ー正則局所環内の $\mathfrak{a}$-Tight Closure と局所化

$\tau(A) = A$, すなわち, $I^* = I$ $(\forall I \subseteq A)$ を満たす環は weakly F-regular 環と呼ばれている. 例えば, 正則局所環は weakly F-regular 環であり, その直和因子もそうである. 一般に, $A$ の任意の積閉集合 $W$ に対して $A_W$ が weakly F-regular であるような環は F-regular 環と呼ばれている. Weakly F-regular が常に F-regular であるかどうかは, Tight Closure の理論において, 未解決な問題の1つであり, その一般化としての次の問いは基本的である.

| | |
|---|---|
| (Q1) | $(IA_W)^* = I^*A_W$ $(\forall W: A$ の積閉集合$)$ が成り立つか? |
| (Q2) | $\tau(A_W) = \tau(A)A_W$ $(\forall W: A$ の積閉集合$)$ が成り立つか? |

(Q1) に関しては, [AHH] における結果 (すなわち, $A$ が excellent 局所環で, $A/I$ が finite phantom projective dimension を持つならば, (Q1) は正しい) が知られている.

(Q2) に関しては, [AM] らの結果 (excellent $\mathbb{Q}$-Gorenstein Cohen–Macaulay normal 局所整域に対して, (Q2) が正しい) が知られている.

上の問いを $\mathfrak{a}$-TC の理論の枠内で考えると, 次の問いを得る.

| | |
|---|---|
| (Q1') | $(IA_W)^{*\mathfrak{a}A_W} = I^{*\mathfrak{a}}A_W$ $(\forall W: A$ の積閉集合$)$ が成り立つか? |
| (Q2') | $\tau(\mathfrak{a}A_W) = \tau(\mathfrak{a})A_W$ $(\forall W: A$ の積閉集合$)$ が成り立つか? |

(Q2') に対しては, 原氏と高木氏により, (Q2) の解答に近い結果が得られている (cf. [HT]). 一方, (Q1') に対しては, 正則環の場合すら未解決であるように思われる. (※ F-regular に対して, (Q1) は自明に正しいことに注意!) このような状況を考慮して考察した結果が, 次に述べる本講演の主定理である.

**Theorem 2.1 (主定理).** $A$ を標数 $p > 0$ の正則環とし, $\mathfrak{a}, I$ を $A$ のイデアルとする.

(1) $I_1, \ldots, I_n$ を $A$ のイデアルとするとき, $(I_1 \cap \cdots \cap I_n)^{*\mathfrak{a}} = I_1^{*\mathfrak{a}} \cap \cdots \cap I_n^{*\mathfrak{a}}$ が成り立つ.

(2) $I$ が $\mathfrak{p}$-primary のとき, もし, $I^{*\mathfrak{a}} \neq A$ ならば, $I^{*\mathfrak{a}}$ も $\mathfrak{p}$-primary である.
特に, $I$ は pure height $h$ で, $I^{*\mathfrak{a}} \neq A$ ならば, $I^{*\mathfrak{a}}$ も pure height $h$ である.

(3) $A$ の積閉集合 $W$ に対して, $I^{*\mathfrak{a}}A_W = (IA_W)^{*\mathfrak{a}A_W}$ が成り立つ.

この定理の証明において本質的な部分は, Kunz の定理である.

**Theorem 2.2 (Kunz の定理 [Ku1]).** $A$ を標数 $p > 0$ の正則環とすると, Frobenius 射 $F: A \to A$ $(a \mapsto a^p)$ は平坦 (flat) である.
特に, $A$ のイデアル $I, I_1, \ldots, I_n$ と $q = p^e$ に対して,

(1) $(I_1 \cap \cdots \cap I_n)^{[q]} = I_1^{[q]} \cap \cdots \cap I_n^{[q]}$ である.

(2) $I$ が $\mathfrak{p}$-primary ならば, $I^{[q]}$ も $\mathfrak{p}$-primary である.

(注) 正確には, Kunz の定理は Frobenius 射の平坦性を用いて, 正則環を特徴付けている.

**Theorem 2.1 の証明のスケッチ.**

(1) $(I_1 \cap \cdots \cap I_n)^{[q]} = I_1^{[q]} \cap \cdots \cap I_n^{[q]}$ $(\forall q = p^e)$ と $\mathfrak{a}$-tight closure の定義より明らか.

(2) $I$ を $\mathfrak{p}$-primary とし, $I^{*\mathfrak{a}} \neq A$ と仮定する. $xy \in I^{*\mathfrak{a}}$, $y \notin \mathfrak{p}$ と仮定して, $x \in I^{*\mathfrak{a}}$ を言う. $xy \in I^{*\mathfrak{a}}$ より, ある $c \in A^o$ が存在して, 十分大きな任意の $q = p^e$ に対して, $cx^q y^q \mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]}$ が成り立つ. $I$ が $\mathfrak{p}$-primary で, $y \notin \mathfrak{p}$ だから, $y$ は $A/I$-regular である. また, $\mathrm{pd}_A A/I < \infty$ だから, $y$ は $A/I^{[q]}$-regular でもある. よって, $cx^q \mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]}$ $(\forall q = p^e, e \gg 0)$ となり, $x \in I^{*\mathfrak{a}}$ を得る.

(3) $(IA_W)^{*\mathfrak{a}} \subseteq I^{*\mathfrak{a}} A_W$ を言えばよい. $A$ は整域としてよい. $z/1 \in (IA_W)^{*\mathfrak{a}}$ とすると, ある $c \in A^o$ が存在して, $cz^q \mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]} A_W \cap A$ $(\forall q = p^e,\ e \gg 0)$ が成り立つ.

$$I = I_1 \cap \cdots \cap I_r \cap I_{r+1} \cap \cdots \cap I_s \quad (I_i \text{ は } \mathfrak{p}_i\text{-primary})$$

を $I$ の無駄のない準素分解とし, $\mathfrak{p}_i \cap W = \emptyset \iff 1 \leq i \leq r$ と仮定する. 簡単のため, $U = I_1 \cap \cdots \cap I_r$, $J = I_{r+1} \cap \cdots \cap I_s$ とおく. このとき, $I^{[q]} = I_1^{[q]} \cap \cdots \cap I_s^{[q]}$ は $I^{[q]}$ の準素分解で, $cz^q \mathfrak{a}^q \subseteq I_1^{[q]} \cap \cdots \cap I_r^{[q]} = U^{[q]}$ である. よって, $z \in U^{*\mathfrak{a}}$ である. また, (1) より, $I^{*\mathfrak{a}} A_W = U^{*\mathfrak{a}} A_W \cap J^{*\mathfrak{a}} A_W$ であるが, $J^{*\mathfrak{a}} A_W = A_W$ だから, $z/1 \in I^{*\mathfrak{a}} A_W$ を得る. □

また, 主定理の系として, 次を得る.

**Corollary 2.3.** $A$ を正則整域 $B$ の module-finite な部分環とすると, $A$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}, I$ と積閉集合 $W$ に対して, 次が成り立つ:

$$I^{*\mathfrak{a}} A_W = (IA_W)^{*\mathfrak{a} A_W}.$$

この系の証明には, 次の結果を用いる. これは, TC の場合と同様に示すことができるが, 一応証明しておこう.

**Proposition 2.4 ($\mathfrak{a}$-TC from Contraction).** $A \hookrightarrow B$ をネーター整域の module-finite な拡大とする. このとき, $A$ のイデアル $\mathfrak{a}, I$ に対して, 次が成り立つ:

$$I^{*\mathfrak{a}} = (IB)^{*\mathfrak{a}B} \cap A.$$

*Proof.* $A$ の商体を $K$ とすると, $B$ の商体は $B \otimes_A K$ に等しい. 実際, $B \subseteq (A \setminus 0)^{-1} B \subseteq Q(B)$ だから, $L := B \otimes_A K$ が体であることを見ればよい. 任意の $P \in \mathrm{Spec}\, B$ s.t.$P \cap A = 0$ に対して, $A \subseteq B/P$ は module-finite な整域の拡大で, $\dim B = \dim A = \dim B/P$ である. $B$ は整域ゆえ, $P = 0$ である. よって, $L$ は体である.

さて, Proposition を証明するには, $(IB)^{*\mathfrak{a}} \cap A \subseteq I^{*\mathfrak{a}}$ を言えばよい. 任意の $z \in (IB)^{*\mathfrak{a}} \cap A$ に対して, ある $\tilde{c} \in B^o$ が存在して, $\tilde{c} z^q \mathfrak{a}^q B \subseteq I^{[q]} B$ $(\forall q = p^e)$ とできる. $\tilde{c}$ は ($K$ 上有限次元ベクトル空間) $L$ の基底の一部にできるから, $\Phi \in \mathrm{Hom}_K(L, K)$ で $\Phi(\tilde{c}) = 1$ となるものが取れる. また, $\mathrm{Hom}_K(L, K) = \mathrm{Hom}_A(B, A) \otimes_A K$ に注意すると, ある $d \in A^o$ とある $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(B, A)$ が存在して, $\Phi = \frac{1}{d}\varphi$ と書ける. このとき, $\varphi(\tilde{c}) = d \in A^o$ である. この $\varphi$ を上の式に施せば, $dz^q \mathfrak{a}^q \subseteq I^{[q]}$ $(\forall q = p^e)$. ゆえに, $z \in I^{*\mathfrak{a}}$ を得る. □

**Corollary 2.3 の証明.** $A \hookrightarrow B$ が module-finite だから, $A_W \hookrightarrow B_W$ もそう. Proposition 2.4 より,

$$I^{*\mathfrak{a}} = (IB)^{*\mathfrak{a}} \cap A \cdots (\text{ア}), \quad (IA_W)^{*\mathfrak{a}} = (IB_W)^{*\mathfrak{a}} \cap A_W \cdots (\text{イ})$$

である. $B$ は regular ゆえ, Theorem 2.1(3) より, $(IB_W)^{*\mathfrak{a}} = (IB)^{*\mathfrak{a}} B_W \cdots (\text{ウ})$ である. 簡単のため, $L := (IB)^{*\mathfrak{a}} \subseteq B$ とおくと, $W$ は $A$ の積閉集合ゆえ, $LB_W \cap A_W = (L \cap A)A_W \cdots (\text{エ})$ である. 従って,

$$\begin{aligned} I^{*\mathfrak{a}} A_W &= (L \cap A)A_W \quad (\because (\text{ア}) \text{より}) \\ &= LB_W \cap A_W \quad (\because (\text{エ}) \text{より}) \\ &= (IB_W)^{*\mathfrak{a}} \cap A_W \quad (\because (\text{ウ}) \text{より}) \\ &= (IA_W)^{*\mathfrak{a}} \quad (\because (\text{イ}) \text{より}) \end{aligned}$$

を得る. □

**Proposition 1.5 の証明.** Lemma 1.4 より, $B$ は整域としてよい. $Q = \ker(\varphi : A \to B)$ とおくと, $(I \cdot A/Q)^{*\mathfrak{a}} \subseteq (IB)^{*\mathfrak{a}}$ だから, $B$ の代わりに $A/Q$ を考えて, $B = A/Q$, $\varphi : A \to A/Q$ $(a \mapsto a + Q)$ としてよい.

$Q = Q_h \supseteq Q_{h-1} \supseteq \cdots \supseteq Q_0$, $\mathrm{height}(Q_i/Q_{i-1}) = 1$, $Q_0 \in \mathrm{Min}(A)$ を素イデアルの鎖とすると, $z \in I^{*\mathfrak{a}}$ ならば, $z + Q_0 \in (I \cdot A/Q_0)^{*\mathfrak{a}}$ である. $A$ の代わりに $A/Q_0$ を考えて, $A$ は整域で, $\mathrm{height}(Q) = 1$ としてよい.

$A$ の商体 $K$ 内の整閉包を $A'$ とすれば, $A'$ は $A$ 上 module-finite な excellent 整域である. $Q' \in \mathrm{Spec}\, A$ を $Q' \cap A = 0$ となるように取ると, $A/Q \hookrightarrow A'/Q'$ も module-finite な拡大ゆえ, $\dim A' - \mathrm{height}\, Q' = \dim A'/Q' = \dim A/Q = \dim A - 1$, 特に, $\mathrm{height}\, Q' = 1$ である. $A'$ が excellent で, $A'_{Q'}$ が正則局所環ゆえ, ある $c \in A' \setminus Q'$ があって, $c$ は $A'$ の $\mathfrak{b}$-test element $(\forall \mathfrak{b} \subseteq A')$ である (Theorem 1.7). よって, 任意の $z \in I^{*\mathfrak{a}}$ に対して, $\varphi(z) = z \in (IA')^{*\mathfrak{a}}$ と見ると, $cz^q \mathfrak{a}^q A' \subseteq I^{[q]} A'$. これを $A' \to A'/Q'$ で写すと, $\overline{cz^q \mathfrak{a}^q} \subseteq I^{[q]} \cdot A'/Q'$. すなわち, $\overline{z} \in (I \cdot A'/Q')^{*\mathfrak{a}}$. Proposition 2.4 (Contraction) を $A/Q \hookrightarrow A'/Q'$ に適用して, $\varphi(z) \in (I \cdot A/Q)^{*\mathfrak{a}}$ を得る. □

**Remark 4.** $I$ が $A$-regular sequence で生成されているときは, Tight closure の場合の証明 (例えば, [BH] 参照) と同様にして, 任意の積閉集合と $A$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して, $I^* A_W = (IA_W)^*$ を示すことができる. この場合は, $I^{[q]}$ の準素分解の構造が正則局所環の場合ほど自明でないため, 上と同じ証明は通用しない. これらを [AHH] のアイデアにそって統一するのが今後の目標である.

**Example 2.5.** $(A, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の正則局所環とする. $\mathfrak{a} \subseteq A$ とし, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ とする. このとき,

(1) $\mathfrak{p}^{*\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}$ または $\mathfrak{p}^{*\mathfrak{a}} = A$.

(2) $\mathrm{height}\, \mathfrak{p} \geq 2$ のとき, $\mathfrak{p}^{*\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.

(3) $\mathrm{height}\, \mathfrak{p} = 1$ のとき, $\mathfrak{p}^{*\mathfrak{p}} = A$. 実際, $(aA)^{*\mathfrak{a}} = aA : \mathfrak{a}$ である.

(4) $\mathrm{height}\, \mathfrak{a} \geq 2$ ならば, $\mathfrak{a}^{*\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ である.

(5) $\dim A = 2$ で, $J$ が $A$ のパラメーターイデアルのとき, $J^{*J} = \overline{J}$ である.

(6) $A$ の任意のイデアル $I$ に対して, $I^{*\mathfrak{m}^{d-1}} = I$ が成り立つ.

*Proof.* (1) ある $z \in \mathfrak{p}^{*\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}$ が存在したと仮定すると, ある $c \in A^o$ があって, $cz^q\mathfrak{a}^q \subseteq \mathfrak{p}^{[q]}$ $(\forall q = p^e, e \gg 0)$ である. $z$ は $A/\mathfrak{p}$-regular ゆえ, $A/\mathfrak{p}^{[q]}$-regular である. よって, $c\mathfrak{a}^q \subseteq \mathfrak{p}^{[q]}$ となるが, これは $1 \in \mathfrak{p}^{*\mathfrak{a}}$ を意味する.

(2) $\mathfrak{p}^{*\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{p}$ と仮定すると, (1) より, $1 \in \mathfrak{p}^{*\mathfrak{p}}$ である. 矛盾を得るためには, (Theorem 2.1(3) より) $\mathfrak{p}$ で局所化して, $(A, \mathfrak{p})$ を $d$ 次元の正則局所環としてよい. このとき, $\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_d)$ と書ける. $1 \in \mathfrak{p}^{*\mathfrak{p}}$ より, ある $c \in A^o$ が存在して, $c\mathfrak{p}^q \subseteq \mathfrak{p}^{[q]}$ $(\forall q = p^e, e \gg 0)$ とできる. このとき,

$$c \in \mathfrak{p}^{[q]} : \mathfrak{p}^q = \mathfrak{p}^{(d-1)(q-1)} + \mathfrak{p}^{[q]} \subseteq \mathfrak{p}^{q-1}$$

であるが, Krull の共通部分定理により, $c = 0$ となり矛盾する.

(3) $(aA)^{*\mathfrak{a}} = aA : \mathfrak{a}$ を言う. $aA$ の準素分解を考えて, Theorem 2.1(1) より, $aA$ は $\mathfrak{p}$-primary としてよい. $aA \subseteq (aA)^{*\mathfrak{a}} \subseteq aA : \mathfrak{a}$ ゆえ, $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ ならば, すべて等号となる. 特に, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ としてよい. また, $(aA)^{*\mathfrak{a}}$, $aA : \mathfrak{a}$ は共に ($A$ または) $\mathfrak{p}$-primary だから, $\mathfrak{p}$ で局所化して, $(A, \mathfrak{p})$ は離散付値環としてよい. このとき, $\mathfrak{a}$ は単項イデアルだから, $(aA)^{*\mathfrak{a}} = aA : \mathfrak{a}$ である.

(4) 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A/\mathfrak{a})$ で局所化して, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}$-primary, $d = \dim A \geq 2$ として, $\mathfrak{a}^{*\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{m}$, すなわち, $1 \notin \mathfrak{a}^{*\mathfrak{a}}$ を言えばよい. 実際, 1 が $\mathfrak{a}$-test element だから, $1 \in \mathfrak{a}^{*\mathfrak{a}}$ とすると, $\mathfrak{a}^q \subseteq \mathfrak{a}^{[q]}$ $(\forall q = p^e)$ である. このとき, $l_A(A/\mathfrak{a}^{[q]}) \leq l_A(A/\mathfrak{a}^q)$ であるが, 両辺を $q^d$ で割って, $q \to \infty$ とすると, $e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{a}) \leq \frac{e(\mathfrak{a})}{d!}$ を得る. Hilbert-Kunz 重複度の理論 ([WY] 参照) によれば, 逆向きの不等式が常に成り立つことが知られているが, さらに, $d \geq 2$ のときは, 真の不等式になる (Hanes [Ha]). ゆえに, 矛盾を得る.

(5),(6) は [HY] 参照. □

**Question 2.6.** $\mathfrak{a}$ を $A$ のイデアルで, $\mathrm{height}\,\mathfrak{a} \geq 2$ と仮定する. このとき, $\mathfrak{a}^{*\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ であるか? (注) ($A/\mathfrak{m}$ が無限体のとき) $\mathrm{height}\,\mathfrak{a} \leq 1$ ならば $\mathfrak{a}^{*\mathfrak{a}} = A$ である.

**Example 2.7.** $k$ を標数 $p > 0$ の体とし, $A = k[[x, y, z]]/(xy - z^2)$ とおく. このとき, $\mathfrak{p} = (x, z)$ は $\mathrm{height}\,\mathfrak{p} = 1$ の素イデアルで, $\mathfrak{p}^{*\mathfrak{p}} = (x, y, z)$ である.

*Proof.* 1 が $\mathfrak{p}$-test element であることに注意すると, $\mathfrak{p}^q \not\subseteq \mathfrak{p}^{[q]}$ だから, $1 \notin \mathfrak{p}^{*\mathfrak{p}}$ である. また, $y^q\mathfrak{p}^q \subseteq \mathfrak{p}^{[q]}$ を見るのは易しい. □

# 参考文献

[Ab] I. M. Aberbach, *Tight closure in F-rational rings*, Nagoya Math. J. **135** (1994), 43–54.

[AE] I.M.Aberbach and F. Enescu, *Test ideals and base change problems in tight closure theory*, preprint.

[AHH] I.M.Aberbach, M. Hochster and C.Huneke, *Localization of tight closure and modules of finite phantom projective dimension*, J. Reine angew. Math. **434** (1993), 67–114.

[AKM] I. Aberbach, M. Katzman, and B. MacCrimmon, *Weak F-regularity deforms in $\mathbb{Q}$-Gorenstein rings*, J. Algebra **204** (1998), 281–285.

[AM] I. Aberbach and B. MacCrimmon, *Some results on test ideals*, Proc. Edinburch Math. Soc. (2) **42** (1999), 541–549.

[BH] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings*(2nd), Cambridge studies in advanced mathematics, **39**, Cambridge UK, 1993. University Press.

[DEL] J.-P. Demailly, L. Ein and R. Lazarsfeld, *A subadditivity property of multiplier ideals*, Michigan Math. J. **48** (2000), 137–156.

[Ei] L. Ein, *Multiplier ideals, vanishing theorems and applications:*, in Algebraic Geometry—Santa Cruz 1995 pp. 203–219, Proc. Symp. Pure Math. **62** (1997), American Mathematical Society, Providence.

[EV] H. Esnault and E. Viehweg, *Lectures on Vanishing Theorems*, DMV Seminar, Band 20 Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[Han] D. Hanes, Bounds on Multiplicities of Local Rings, Comm. Alg. **30** (2002), 3789–3812.

[Ha] N. Hara, *Geometric interpretation of tight closure and test ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 1885–1906.

[HT] N. Hara and S. Takagi, *Some remarks on a generalization of test ideals*, preprint; **e-print: 0210138** (12 Oct, 2002).

[HY] N. Hara and K. Yoshida, *A generalization of tight closure and multiplier ideals*, (to appear in Trans. Amer. Math. Soc.); **e-print: 0211008** (1 Nov, 2002).

[HH1] M. Hochster and C. Huneke, *Tight Closure and strong F-regularity*, Mem. Soc. Math. France **38** (1989), 119–133.

[HH2] M. Hochster and C. Huneke, *Tight Closure, invariant theory, and Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31–116.

[HH3] M. Hochster and C. Huneke, *F-regularity, test elements, and smooth base change*, Trans. Amer. Math. Soc. **346** (1994), 1–62.

[Hu] C. Huneke, *Tight Closure and Its Applications*, C.B.M.S. Regional Conf. Ser. in Math. No.**88** (1996), American Mathematical Society.

[How] J. A. Howald, *Multiplier ideals of monomial ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 2665–2671.

[Hu1] C. Huneke, *Tight Closure, Parameter Ideals, and Geometry*: in Six Lectures on Commutative Algebra, Progress in Mathematics, Vol **166**, pp.187–239, (J.Elias, J.M.Giral, R.M.Miró-Roig, and S.Zarzuela (eds.)), Birkhaüser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1998.

[Ku1] E, Kunz, *Characterizations of regular local rings of characteristic p*, Amer. J. Math. **41** (1969), 772–784.

[Ku2] E. Kunz, *On Noetherian rings of characteristic* $p > 0$, Amer. J. Math. **98** (1976), 999–1013.

[La] R. Lazarsfeld, *Multiplier ideals for algebraic geometers*, preprint.

[Li] J. Lipman, *Adjoints of ideals in regular local rings*, Math. Res. Letters **1** (1994), 739–755.

[LS] G. Lyubeznik and K. E. Smith, *On the commutation of the test ideal with localization and completion*, Trans. Amer. Math. Soc., **353** (2001), 3149–3180.

[Ma] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin, 1970.

[Mc] B. MacCrimmon, *Weak F-regularity is strong F-regularity for rings with isolated non-$\mathbb{Q}$-Gorenstein points*, (to appear. in Trans. Amer. Math. Soc.)

[Nad] A. Nadel, *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*, Ann. Math. **132**, 549–596.

[Sm1] K. E. Smith, *The multiplier ideal is a universal test ideal*, Comm. Algebra (special volume in honor of R. Hartshorne) **28** (2000), 5915–5929.

[Sm2] K. E. Smith, *Test ideals in local rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 3453–3472.

[Ta] S. Takagi, *An interpretation of multiplier ideals via tight closure*, preprint.

[WY] K.-i. Watanabe and K. Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity and an inequality between multiplicity and colength*, J. Algebra **230** (2000), 295–317.

[Wi] L. J. Williams, *Uniform stability of kernels of Koszul cohomology indexed by the Frobenius endomorphism*, J. Algebra **172** (1995), 721–743.

〒464–8602 名古屋市千種区不老町
名古屋大学大学院多元数理科学研究科
吉田 健一
E-mail: `yoshida@math.nagoya-u.ac.jp`

# A CHARACTERIZATION OF THE IDEAL $\tau(I)$ AND ITS APPLICATIONS

HARA NOBUO AND SHUNSUKE TAKAGI

Let $R$ be a Noetherian commutative ring of characteristic $p > 0$. The test ideal $\tau(R)$ of $R$ is defined to be the annihilator ideal of all tight closure relations in $R$ and plays an important role in the theory of tight closure. In [HY], Hara and Yoshida introduced a generalization of tight closure, which we call $\mathfrak{a}$-tight closure associated to a given ideal $\mathfrak{a}$, and defined the ideal $\tau(\mathfrak{a})$ to be the annihilator ideal of all $\mathfrak{a}$-tight closure relations in $R$. In this article, we give a characterization of the ideal $\tau(\mathfrak{a})$ and see that this characterization has many interesting applications.

Throughout this article, let $R$ be a Noetherian excellent reduced local ring of characteristic $p > 0$. We denote by $R^\circ$ the set of elements of $R$ which are not in any minimal prime ideal, and by $F : R \to R$ the Frobenius map which sends $x$ to $x^p$. We say that $R$ is *F-finite* if $F : R \to R$ is a finite map.

Fisrt we reall the definition of $\mathfrak{a}$-tight closure and the ideal $\tau(\mathfrak{a})$.

**Definition.** Let $\mathfrak{a}, J$ be ideals of a ring $R$ of characteristic $p > 0$ and $M$ an $R$-module. Then the $\mathfrak{a}$-*tight closure* $J^{*\mathfrak{a}}$ of $J$ is defined to be the ideal of $R$ consisting of all elements $z \in R$ for which there exsits $c \in R^\circ$ such that

$$c\mathfrak{a}^q z^q \subseteq J^{[q]}$$

for every $q = p^e \gg 0$. The $\mathfrak{a}$-*tight closure* $0^{*\mathfrak{a}}_M$ of the zero submodule in $M$ is defined as follows: for any $z \in M$, $z$ is contained in $0^{*\mathfrak{a}}_M$ if and only if there exists $c \in R^\circ$ such that $c\mathfrak{a}^q z^q := c\mathfrak{a}^q \otimes z = 0$ in ${}^eR \otimes_R M$ for all $q = p^e \gg 0$, where ${}^eR$ denotes $R$ itself, but viewed as an $R$-module via $e$-times iterated Frobenius map $F^e : R \to R$.

**Proposition-Definition.** ([HY, Definition-Theorem 1.9, Theorem 1.13]) *Let $R$ be an excellent reduced local ring of characteristic $p > 0$ and $\mathfrak{a}$ be an ideal of $R$. Let $E = E_R(R/\mathfrak{m})$ be the injective envelope of the residue field $R/\mathfrak{m}$. Then the following ideals are equal to each other and we denote it by $\tau(\mathfrak{a})$.*

(i) $\bigcap_M \operatorname{Ann}_R(0^{*\mathfrak{a}}_M)$, *where $M$ runs through all finitely generated $R$-modules.*

(ii) $\bigcap_{M \subseteq E} \operatorname{Ann}_R(0^{*\mathfrak{a}}_M)$, *where $M$ runs through all finitely generated submodules of $E$.*

(iii) $\bigcap_{J \subseteq R} (J : J^{*\mathfrak{a}})$, *where $J$ runs through all ideals of $R$.*

*If $R$ is normal $\mathbb{Q}$-Gorenstein, then the following ideal is also equal to $\tau(\mathfrak{a})$.*

(iv) $\operatorname{Ann}_R(0^{*\mathfrak{a}}_E)$.

*Remark* 1. (1) In the case where $\mathfrak{a} = R$ is the unit ideal, then $\tau(\mathfrak{a}) = \tau(R)$ is nothing but the test ideal.

(2) We can consider $\mathfrak{a}^t$-tight closure and the ideal $\tau(\mathfrak{a}^t)$ with rational exponent $t \geq 0$. Refer to [HT] and [HY] for detail.

(3) Given an ideal $\mathfrak{a}$ of a normal $\mathbb{Q}$-Gorenstein ring essentially of finite type over a field of characteristic zero, the multiplier ideal (or the adjoint ideal in the sense of [Li]) $\mathcal{J}(\mathfrak{a})$ coincides, after reduction to characteristic $p \gg 0$, with the ideal $\tau(\mathfrak{a})$. See [HY].

Finally we recall the notion of an $\mathfrak{a}$-test element, which is quite useful to treat the $\mathfrak{a}$-tight closure operation.

**Definition.** Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of a ring $R$ of characteristic $p > 0$. An element $d \in R^\circ$ is called an $\mathfrak{a}$-*test element* if for every finitely generated $R$-module $M$, the following holds: $z \in 0_M^{*\mathfrak{a}}$ if and only if $d\mathfrak{a}^q z^q := d\mathfrak{a}^q \otimes z = 0$ in ${}^eR \otimes_R M$ for all $q = p^e > 0$.

The following lemma gives a characterization of $\tau(\mathfrak{a})$ when $R$ is $\mathbb{Q}$-Gorenstein normal.

**Key Lemma.** *Let $(R, \mathfrak{m})$ be an F-finite $\mathbb{Q}$-Gorenstein normal local ring of characteristic $p > 0$ and $\mathfrak{a}$ an ideal of $R$. Fix a sysytem of generators $x_1^{(e)}, \dots, x_{r_e}^{(e)}$ of $\mathfrak{a}^q$ for each $q = p^e$. Then for any element $c \in R$, the following three conditions are equivalent to each other.*

(i) $c \in \tau(\mathfrak{a})$.

(ii) *For any element $d \in R^\circ$ and any nonnegative integer $e_0$, there exist an integer $e_1 \geq e_0$ and $R$-homomorphisms $\phi_i^{(e)} \in \operatorname{Hom}_R(R^{1/p^e}, R)$ for all $e_0 \leq e \leq e_1$ and $1 \leq i \leq r_e$ such that*

$$c = \sum_{e=e_0}^{e_1} \sum_{i=1}^{r_e} \phi_i^{(e)}((dx_i^{(e)})^{1/p^e}).$$

(iii) *For an $\mathfrak{a}$-test element $d \in R^\circ$, there exist a positive integer $e_1$ and $R$-linear maps $\phi_i^{(e)} \in \operatorname{Hom}_R(R^{1/p^e}, R)$ for all $0 \leq e \leq e_1$ and $1 \leq i \leq r_e$ such that*

$$c = \sum_{e=0}^{e_1} \sum_{i=1}^{r_e} \phi_i^{(e)}((dx_i^{(e)})^{1/p^e}).$$

*Proof.* We will prove that the conditions (i) and (ii) are equivalent to each other. Let $F^e \colon E_R \to E_R \otimes_R {}^eR$ be the $e$-times iterated Frobenius map on the injective envelope $E_R = E_R(R/\mathfrak{m})$ of the residue field, and for an element $d \in R^\circ$ and a nonnegative integer $e$, we write

$$d\mathbf{x}^{(e)}F^e = {}^t(dx_1^{(e)}F^e, \dots, dx_{r_e}^{(e)}F^e) \colon E_R \to (E_R \otimes_R {}^eR)^{\oplus r_e}.$$

By definition and the condition $(*)$, $c \in \tau(\mathfrak{a})$ if and only if $c \cdot \bigcap_{e \geq e_0} \operatorname{Ker}(d\mathbf{x}^{(e)}F^e) = 0$ for any element $d \in R^\circ$ and any nonnegative integer $e_0$. Since $E_R$ is an Artinian

$R$-module, there exists an integer $e_1 \geq e_0$ such that

$$\bigcap_{e \geq e_0} \mathrm{Ker}\,(d\mathbf{x}^{(e)}F^e) = \bigcap_{e=e_0}^{e_1} \mathrm{Ker}\,(d\mathbf{x}^{(e)}F^e).$$

Therefore denoting

$$d\mathbf{x}F = {}^t(d\mathbf{x}^{(e_0)}F^{e_0}, \dots, d\mathbf{x}^{(e_1)}F^{e_1})\colon E_R \to \bigoplus_{e=e_0}^{e_1} (E_R \otimes_R {}^eR)^{\oplus r_e},$$

$c \in \tau(\mathfrak{a})$ if and only if $c \cdot \mathrm{Ker}\,(d\mathbf{x}F) = 0$ for every $d \in R^\circ$.

On the other hand, let $\varphi_i^{(e)}\colon \mathrm{Hom}_R(R^{1/p^e}, R) \to \mathrm{Hom}_R(R, R) = R$ be an $R$-module homomorphism induced by the $R$-linear map $R \xrightarrow{(dx_i^{(e)})^{1/p^e}} R^{1/p^e}$, and denote

$$\Phi = (\bigoplus_{i=1}^{r_{e_0}} \varphi_i^{(e_0)}, \dots, \bigoplus_{i=1}^{r_{e_1}} \varphi_i^{(e_1)})\colon \bigoplus_{e=e_0}^{e_1} \mathrm{Hom}_R(R^{1/p^e}, R)^{\oplus r_e} \to R.$$

Now we consider the following exact sequence.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(d\mathbf{x}F) \longrightarrow E_R \xrightarrow{d\mathbf{x}F} \bigoplus_{e=e_0}^{e_1} (E_R \otimes_R {}^eR)^{\oplus r_e}.$$

Taking the Matlis dual of the above sequence and considering that the completion $R \hookrightarrow \hat{R}$ is faithfully flat, we obtain the following exact sequence

$$\bigoplus_{e=e_0}^{e_1} \mathrm{Hom}_R(R^{1/p^e}, R)^{\oplus r_e} \xrightarrow{\Phi} R \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \Phi \longrightarrow 0,$$

and the condition $c \cdot \mathrm{Ker}\,(d\mathbf{x}F) = 0$ is equivalent to saying $c \in \mathrm{Im}\ \Phi$.

By the definition of $\Phi$, this condition implies that there exist $R$-linear maps $\phi_i^{(e)} \in \mathrm{Hom}_R(R^{1/p^e}, R)$ for all $e_0 \leq e \leq e_1$ and $1 \leq i \leq r_e$ such that

$$c = \sum_{e=e_0}^{e_1} \sum_{i=1}^{r_e} \phi_i^{(e)}((dx_i^{(e)})^{1/p^e}).$$

The equivalence of conditions (i) and (iii) is obtained by the same way. □

**Corollary 1.** *Let $(R, \mathfrak{m})$ be an F-finite $\mathbb{Q}$-Gorenstein normal local ring of characteristic $p > 0$. Then a test element of $R$ is an $\mathfrak{a}$-test element for all ideals $\mathfrak{a}$ of $R$.*

*Proof.* Let $c$ be a test element of $R$, that is, an element of $\tau(R) \cap R^\circ$. Given any ideals $\mathfrak{a}, J$ of $R$, any element $z \in J^{*\mathfrak{a}}$ and any power $q$ of $p$, it is enough to show that $cz^q\mathfrak{a}^q \subseteq J^{[q]}$. Since $z \in J^{*\mathfrak{a}}$, there exist $d \in R^\circ$ and $e_0 \in \mathbb{N}$ such that $dz^Q\mathfrak{a}^Q \subseteq J^{[Q]}$ for every power $Q \geq p^{e_0}$ of $p$. Then by Key Lemma, there exist $e_1 \in \mathbb{N}$

and $\phi_e \in \mathrm{Hom}_R(R^{1/p^e}, R)$ for $e_0 \le e \le e_1$ such that $c = \sum_{e=e_0}^{e_1} \phi_e(d^{1/p^e})$. Since $dz^{qp^e}(\mathfrak{a}^q)^{[p^e]} \subseteq dz^{qp^e}\mathfrak{a}^{qp^e} \subseteq J^{[qp^e]}$ for every $e_0 \le e \le e_1$, we have

$$d^{1/p^e} z^q \mathfrak{a}^q R^{1/p^e} \subseteq J^{[q]} R^{1/p^e}.$$

Applying $\phi_e$ and summing up, we obtain

$$cz^q\mathfrak{a}^q = \sum_{e=e_0}^{e_1} \phi_e(d^{1/p^e}) z^q \mathfrak{a}^q \subseteq \sum_{e=e_0}^{e_1} \phi_e(J^{[q]}R^{1/p^e}) \subseteq J^{[q]},$$

as required. $\square$

*Remark* 2. Since $\tau(\mathfrak{a}) \subseteq \tau(R)$, we see from Corollary 1 that any element of $\tau(\mathfrak{a}) \cap R^\circ$ is an $\mathfrak{a}$-test element. Also, Corollary 1 is considered a refinement of [HY, Theorem 1.7], which asserts that, if the localized ring $R_c$ at an element $c \in R^\circ$ is strongly F-regular, then some power $c^n$ of $c$ is an $\mathfrak{a}$-test element for all ideals $\mathfrak{a} \subseteq R$. Indeed, if $R_c$ is strongly F-regular, then some power $c^n$ of $c$ is a test element by [HH1] (see also [HH3]), so that $c^n$ is an $\mathfrak{a}$-test element for all $\mathfrak{a}$ by Corollary 1.

Key Lemma has interesting applications. In [Li], Lipman proves under the Grauert–Riemenschneider vanishing theorem that, if $\mathfrak{a}$ is an ideal of a regular local ring with a reduction generated by $l$ elements, then $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^l) = \mathcal{J}(\mathfrak{a}^{l-1})\mathfrak{a}$. This result is called Skoda's theorem [La] and formulated algebraically by Lipman in his proof of "modified Briançon–Skoda theorem." As an application of Key Lemma, we give a simple proof of the corresponding equality for the ideal $\tau(\mathfrak{a})$.

**Main Theorem.** *Let $(R, \mathfrak{m})$ be an F-finite $\mathbb{Q}$-Gorenstein normal local ring of characteristic $p > 0$ and let $\mathfrak{a} \subset R$ be an ideal of positive height with a reduction generated by $l$ elements. Then*

$$\tau(\mathfrak{a}^l) = \tau(\mathfrak{a}^{l-1})\mathfrak{a}.$$

*Proof.* We may assume without loss of generality that $\mathfrak{a}$ is generated by $l$ elements, so that $\mathfrak{a}^{ql} = \mathfrak{a}^{q(l-1)}\mathfrak{a}^{[q]}$ for all $q = p^e$. We fix an element $d \in R^\circ$ such that $R_d$ is regular and then, thanks to Lemma 1 and Remark 2, some power $d^n$ is an $\mathfrak{a}^k$-test element for all $k \ge 0$.

By Key Lemma, an element $c \in R$ is in $\tau(\mathfrak{a}^l)$ if and only if there exist finitely many $R$-homomorphisms $\phi_i^{(e)} \in \mathrm{Hom}_R(R^{1/p^e}, R)$ for $0 \le e \le e_1$ and $1 \le i \le r_e$ such that

$$c \in \sum_{e=0}^{e_1} \sum_{i=1}^{r_e} \phi_i^{(e)}((d^n \mathfrak{a}^{p^e l})^{1/p^e}).$$

Since

$$\begin{aligned} \phi_i^{(e)}((d^n\mathfrak{a}^{p^e l})^{1/p^e}) &= \phi_i^{(e)}((d^n \mathfrak{a}^{p^e(l-1)}\mathfrak{a}^{[p^e]})^{1/p^e}) \\ &= \phi_i^{(e)}((d^n\mathfrak{a}^{p^e(l-1)})^{1/p^e})\mathfrak{a} \\ &\subseteq \tau(\mathfrak{a}^{l-1})\mathfrak{a} \end{aligned}$$

again by Key Lemma, this is equivalent to saying that $c \in \tau(\mathfrak{a}^{l-1})\mathfrak{a}$. □

*Remark* 3. We can prove the above theorem under a slightly different assumption. Precisely speaking, we can replace the F-finiteness and $\mathbb{Q}$-Gorensteinness assumptions in the above theorem by the completeness. See [HT].

**Corollary 2.** (Modified Briançon–Skoda cf. [BS], [HY], [HH2], [Li]) *Let $(R, \mathfrak{m})$ and $\mathfrak{a} \subset R$ be as in the above theorem. Then*

$$\tau(\mathfrak{a}^{n+l-1}) \subseteq \mathfrak{a}^n$$

*for all $n \geq 0$. In particular, if $R$ is weakly F-regular, then $\overline{\mathfrak{a}^{n+l-1}} \subseteq \mathfrak{a}^n$ for all $n \geq 0$.*

**Corollary 3.** *Let $(R, \mathfrak{m})$ be a $d$-dimensional $\mathbb{Q}$-Gorenstein normal local ring of characteristic $p > 0$ with infinite residue field $R/\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{a} \subseteq R$ an ideal of positive height. Then for any $n \geq 0$ one has*

$$\tau(\mathfrak{a}^{n+d-1}) = \tau(\mathfrak{a}^{d-1})\mathfrak{a}^n.$$

*Proof.* We can assume that $\mathfrak{a}$ is a proper ideal of $R$. Since the residue field $R/\mathfrak{m}$ is infinite, by [NR], $\mathfrak{a}$ has a reduction ideal generated by at most $d$ elements. Therefore the assertion immediately follows from Main Theorem. □

## References


[BS] Briançon, J. and Skoda, H., *Sur la clôture intégrale dún idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de $C^n$*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **278** (1974), 949–951.

[HH1] Hochster, M. and Huneke, C., *Tight Closure and strong F-regularity*, Mem. Soc. Math. France **38** (1989), 119–133.

[HH2] ———, C., *Tight closure, invariant theory and the Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math.Soc. **3** (1990), 31–116.

[HH3] ———, *F-regularity, test elements, and smooth base change*, Trans. Amer. Math. Soc. **346** (1994), 1–62.

[HT] Hara, N. and Takagi, S., *On a genelarizaition of test ideals*, math.AC/0210131.

[HY] Hara, N. and Yoshida, K., *A generalization of tight closure and multiplier ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[La] Lazarsfeld, R., *Multiplier ideals for algebraic geometers*, preprint.

[Li] Lipman, J., *Adjoints of ideals in regular local rings*, Math. Research Letters **1** (1994), 739–755.

[NR] Northcott, D. G. and Rees, D., *Reductions of ideals in local rings*, Proc. Camb. Philos. Soc. **50** (1954), 145–158.



Mathematical Institute, Tohoku University, Sendai 980-8578, Japan
*E-mail address*: hara@math.tohoku.ac.jp

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1, Komaba, Meguro, Tokyo 153-8914, Japan
*E-mail address*: stakagi@ms.u-tokyo.ac.jp

# F-PURITY OF $(R, sI)$ AND INDEX OF RATIONALITY

高木俊輔（東大・数理）・ 渡辺敬一（日大・文理）

## 1. 序

F-pure 環の概念は Hochster-Roberts により導入され，更に原 [HW] により環と有理係数因子の対 $(R, D)$ の F-pure の概念に拡張された．本稿では環と有理係数付イデアルの対 $(R, sI)$ の F-pure の概念に拡張する．これにより，特異点の log terminal, log canonical の概念，log canonical threshold の概念などを環論で扱えるようにする．また環 (特異点) の「良さ」を量るために導入された Index of rationality をこの概念を用いて述べ，更に log canonical (F-pure) でない環に対してもこの概念を延長する．

なお，本稿はシンポジウムの際の講演の原稿に手を入れてあるので記号なども一部講演の時と異なったものを用いていることをお断りしておく．

## 2. F-purity and F-regularity of $(A, sI)$ and F-pure threshold

本稿では特に断らない限り $(A, \mathfrak{m})$ は標数 $p > 0$ のネーター局所環で，Frobenius 写像 $F : A \to A$, $F(a) = a^p$ が finite であるもの ($F$-finite) とする．文字 $q$ は常に $p$ のベキ $q = p^e$ とする．また，本稿では $A$ は常に reduced とし，$F^e : A \to A$ と包含写像 $A \hookrightarrow A^{1/q}$ $(q = p^e)$ を同一視する．

**Definition 2.1.** *$I$ を $A$ のイデアル，$s \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ とする．$s \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ に対し，$I^{sq} = I^n$ ($n$ は $n \leq sq$ なる最大の整数) と定義する．また，$A^\circ$ を $A$ の minimal prime に属さない元の集合 ($A$ が reduced のとき $A$ の非零因子の集合) とする．またイデアル $I$ に対し，$I^{[q]} = (a^q | a \in I)$ とおく．*

1. *$(A, sI)$ が F-pure $\Longleftrightarrow$ $q \gg 1$ に対し $\exists a \in I^{s(q-1)}, A \to A^{1/q}, 1 \to a^{1/q}$ splits as A-module hom.*
2. *$(A, sI)$ が strongly F-regular $\Longleftrightarrow$ $\forall c \in A^\circ; \exists q$ and $a \in I^{s(q-1)}$ such that $A \to A^{1/q}, 1 \to (ca)^{1/q}$ splits as A-module hom.*
3. *$\beta(I) = \beta_A(I) = \sup\{s \in \mathbb{Q} \mid (A, sI)$ is F-pure$\}$．この $\beta(I)$ を $I$ の F-pure threshold という．*

**Remark 2.2.** 次の性質は定義から明らかである．

1. $\exists a \in A, A \to A^{1/q}, 1 \to a^{1/q}$ *splits* ならば $A \to A^{1/q}, 1 \to 1$ *splits,* すなわち $A$ は *F-pure.*
2. $I \supset J$ ならば $\beta(I) \geq \beta(J)$.
3. $\beta(I) = \beta(\bar{I})$. 但し $\bar{I}$ は $I$ の整閉包 ($(A, sI)$ が *F-pure* と $(A, s\bar{I})$ が *F-pure* とは必ずしも同値ではない).

4. $\beta(I) = r\beta(I^r)$.

**Example 2.3.** (1) $k$ が体, $A = k[[X_1, X_2, \ldots, X_d]]$, $I = \mathfrak{m}$ のとき, $(X_1X_2\cdots X_d)^{(q-1)/q}$ は $A^{1/q}$ の $A$ 上の *free base* の一員にとれるので, $(A, d\mathfrak{m})$ は *F-pure*. ゆえに $\beta(\mathfrak{m}) \geq d$ がわかる (実は $\beta(\mathfrak{m}) = d$ である).

(2) $A = k[[X, Y]] \subset I = (f)$, $f = X^a + Y^b$ とおく $(a, b \geq 2)$. このとき $A \to A^{1/q}$, $1 \to f^{s/q}$ が *split* するためには $f^s \notin (X^q, Y^q)$ が必要十分である. ゆえに, $\beta(I) = 1/a + 1/b$ となる.

(3) $(A, \mathfrak{m}) = k[[X_1, X_2, \ldots, X_d]] \supset (B, \mathfrak{n}) = A^{(r)}$ を $r$ 次 *Veronese subring* とする. このとき $\beta_B(\mathfrak{n}) = \beta_A(\mathfrak{n}A) = \beta_A(\mathfrak{m}^r) = d/r$.

**Example 2.4.** $(A, \mathfrak{m}) = k[[X, Y, Z]]/(f)$ を *2*次元の有理 *2*重点とする. *5*種類の分類に従って, $\beta_A(\mathfrak{m})$ は以下の通りである.

$(A_n)$ $f = XY + Z^{n+1}$ $\beta(\mathfrak{m}) = 1$.
$(D_n)$ $f = X^2 + Y(Z^2 + Y^{n-2})$ $\beta(\mathfrak{m}) = 1/2$ $(p > 2)$.
$(E_6)$ $f = X^2 + Y^3 + Z^4$ $\beta(\mathfrak{m}) = 1/3$ $(p > 3)$.
$(E_7)$ $f = X^2 + Y(Y^2 + Z^3)$ $\beta(\mathfrak{m}) = 1/4$ $(p > 3)$.
$(E_8)$ $f = X^2 + Y^3 + Z^5$ $\beta(\mathfrak{m}) = 1/6$ $(p > 5)$.

purity と resolution の例外因子の discrepancy とは次の関係がある. 証明は [HW, Theorem 3.3] と同様である.

**Proposition 2.5.** $(A, \mathfrak{m})$ が *normal*, $\mathbb{Q}$*-Gorenstein* を仮定し, $(A, sI)$ が *F-pure* とする. $g : X \to Y = \mathrm{Spec}(A)$ を *projective birational morphism* で, $X$ が正規でかつ $I\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-Z)$ が可逆となるものとする. $E = \cup_i E_i$ が例外因子, $Z = \sum_i b_i E_i$, $K_X = f^*K_Y + \sum_i k_i E_i$ とするとき, $\forall i, k_i \geq -1 + sb_i$.

**Remark 2.6.** $\beta(I)$ の定義は $\beta(I) = \sup\{s \in \mathbb{Q} \mid (A, sI)$ *is strongly F-regular*$\}$ としても同じである. 原・吉田の $\mathfrak{a}$*-tight closure* の理論により, $(A, sI)$ が *strongly F-regular* と $\tau(sI) = A$ は同値である. また, $\tau(sI)$ と *multiplier ideal* $\mathcal{J}(sI)$ との対応により, $I$ が標数 *0* からの *reduction* のとき $p \gg 0$ で *F-pure threshold* と *log canonical threshold* が一致する ([HY], [Laz] 参照).

上の例の計算は次のように行う. 次の補題が重要である.

**Lemma 2.7.** *(Hochster-Roberts,* [HR]*)* $(A, \mathfrak{m})$ が *Noetherian local ring*, $M$ が有限生成 $A$ 加群のとき $A$ 加群の写像 $f : A \to M$ が *split* $\Longleftrightarrow$ $f \otimes 1 : E = A \otimes E \to M \otimes E$ が単射. 但し $E = E_A(A/\mathfrak{m})$ は剰余体の *injective envelope*.

**Example 2.8.** $A = k[[X, Y, Z]]/(X^2 + Y^3 + Z^5), I = (y, z)$ とおく. $A$ が *Gorenstein* のとき $E = H^d_{\mathfrak{m}}(A)$ だから, $A/I$ の *socle* $x$ に対して $z^{(q-1)/6}x^q = z^{(q-1)/6}(y^3 + z^5)^{q/2} \notin (y^q, z^q)$ $(p > 5)$ より $\beta(\mathfrak{m}) = 1/6$ を得る.

## 3. Big values of $\beta(\mathfrak{m})$

**Theorem 3.1.** $(A,\mathfrak{m})$ は $d$ 次元の局所環とする. $J$ を $I$ の *minimal reduction* とする.

(1) $\forall I$, $\beta(I) \le \mathrm{ht}(I)$. $\beta(\mathfrak{m}) > d-1$ のとき $A$ は正則.
(1′) $\beta(I) > d-r$ のとき $I^r \subset J$.
(2) $A$ が *Gorenstein*, $\beta(\mathfrak{m}) = d-1$ のとき $\exists(x_1,\dots,x_{d-1}) \subset \mathfrak{m}$, $\hat{A}/(x_1,\dots,x_{d-1}) \cong k[[X,Y]]/(XY)$.
(3) $K_A$ の $Cl(A)$ での位数が $r>1$ のとき, $\beta(\mathfrak{m}) \le d-1-1/r$.

*Proof.* (1′) を示せば (1) が従う. $J$ は $I$ の minimal reduction だから $\exists s, I^{n+s} = J^n I^s$ $(n \ge 0)$. $q$ を $(q-1)\beta(I) > (d-r)q+s$ にとり, $a \in I^{(n-r)q+s}$ を $A \to A^{1/q}, 1 \to a^{1/q}$ が split するようにとる. さて $x \in I^r$ を任意にとる. $x \in J$ を示すには splitting より $ax^q \in J^{[q]}$ を示せばよい. さて $ax^q \in I^{dq+s} \subset J^{dq}$ だが $J$ が $d$ 個で生成されているので $J^{dq} \subset J^{[q]}$. □

(2),(3) を示すには次の補題を用いる.

**Lemma 3.2.** *$I \cong K_A$ が pure height 1, $I^{(r)} = wA$ (単項, $I^{(r)}$ は symbolic power), $A/I$ が Gorenstein のとき $\beta_A(\mathfrak{m}) \ge \beta_{A/I}(\mathfrak{m}/I) + \mathrm{ord}(w)/r$.*

*(2),(3) の証明.* Lemma より $\hat{A}/(x_1,\dots,x_{d-1}) \cong k[[X,Y]]/(XY)$ のとき $\beta_{k[[X,Y]]/(XY)}((x,y)) = 0$ だから $\beta_A(\mathfrak{m}) \ge d-1$. (1) より $\beta_A(\mathfrak{m}) > d-1$ ならば $A$ は正則になり $\beta_A(\mathfrak{m}) = d$ になるから $\beta_A(\mathfrak{m}) = d-1$. 逆に $\beta_A(\mathfrak{m}) = d-1$ とすると (1′) より $\mathfrak{m} \subset J$. $A$ が Gorenstein なので $A$ は 2 次の超曲面. もし $\hat{A} \cong k[[X_0,\dots,X_d]]/(f)$, $f = X_0^2 + (X_1,\dots,X_d$ の 3 次式以上) とすると $\beta_A(\mathfrak{m}) \le d-1-1/2$ となる. これで (2) が示された.

(3) $I \cong K_A$, $I^{(r)} = wA$ とおく. $J$ を $\mathfrak{m}$ の minimal reduction とする. $\mathfrak{m}^{n+s} = J^n\mathfrak{m}^s$ $(n \ge 0)$ となる $s$ をとる. $\beta(\mathfrak{m}) > d-1-1/r$ とすると $\exists a \in \mathfrak{m}^N, N > (d-1-1/r)q+s$ で $A \to A^{1/q}, 1 \to a^{1/q}$ が split するものがとれる. すると $E \otimes A^{1/q} \cong [H^d_{\mathfrak{m}}(I^{(q)})]^{1/q}$ だから $I/JI \to I^{(q)}/J^{[q]}I^{(q)}, x \to ax^q$ が単射である. しかし, $z$ を $I/JI$ の socle の生成元とすると $I/JI$ と $A/J$ は Matlis dual だから $z = by, \exists y \in I, b \in \mathfrak{m}$. $y^r \in I^{(r)}$ は生成元ではないので $y^r = cw, c \in \mathfrak{m}$. $q = rt+i$ とおくと $az^q = a(by)^q = ab^qc^t(w^ty^i)$, $ab^qc \in \mathfrak{m}^{dq+s} \subset J^{[q]}$ より $az^q \in J^{[q]}I^{(q)}$ となり矛盾. ゆえに $\beta(\mathfrak{m}) \le d-1-1/r$. □

*Lemma の証明.* $A$ の巴系 $J = (a,x_2,\dots,x_d)$ を $a \in I$, $(x_2,\dots,x_d)$ が $A/I$ の巴系になるようにとる. $x = (x_2,\dots,x_d)$ と書く. $\exists c \in \mathfrak{m}^N, A/I \to (A/I)^{1/q}, 1 \to c^{1/q}$ split とする. $z$ を $A/(I+(x))$ の socle とすると $I/JI$ の socle は $az$ で与えられる. $I^{(r)} = wA, q = rm+i$ とおくと $cw^m(az)^q \notin J^{[q]}I^{(r)}$ を示す. $cw^m(az)^q \in J^{[q]}I^{(r)} = w^mJ^{[q]}I^{(i)}$ とすると $\exists b \in I^{(i)}, (cz^q-b)a^q \in x^{[q]}I^{(i)}$, $cz^q \in I + x^{[q]}A$ となり仮定に矛盾. これより結論が従う. □

**Remark 3.3.** $K_A$ の位数が無限で $\beta(\mathfrak{m}) = d-1$ になる例として，$A = k[[X_{ij}|1 \le i \le d-1, j = 1,2]]/(X_{k1}X_{l2} - X_{k2}X_{l1}|1 \le k < l \le d-1)$ *(Segre* 積*)* がある．逆に $\beta(\mathfrak{m}) = d-1$ で $A$ が *Gorenstein* でないとき，$A$ の *associated graded ring* $G_{\mathfrak{m}}(A) \cong k[X_{ij}|1 \le i \le d-1, j = 1,2]/(X_{k1}X_{l2} - X_{k2}X_{l1}|1 \le k < l \le d-1)$ と予想される．

## 4. $\beta_A(I) > 1$ の場合と multiplier ideal

multiplier ideal $\mathcal{J}(\mathfrak{a})$ は $A$ が log terminal (= strongly F-regular +$\mathbb{Q}$ Gorenstein) のとき $\mathcal{J}(\mathfrak{a}) \supset \mathfrak{a}$ だが，いつ真に大きくなるかを問題にする．$I, \mathfrak{a}$ が $\mathfrak{m}$ primary のとき $\beta_A(I) > 1$ ならば $\mathcal{J}(\mathfrak{a}) \supset \mathfrak{a} : I$ がわかる．

multiplier ideal の定義から始める．

**Definition 4.1.** *(*[Laz],[?]*)* $\mathfrak{a}$ を $A$ のイデアルとする．$A$ の *resolution* $f : X \to \operatorname{Spec} A$ で $\mathfrak{a}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-F)$ が *invertible* かつ $\sum_{i=1}^{s} E_i + F$ が *simple normal crossing support* となるものをとる．*(*$\operatorname{Exc}(f) = \sum_{i=1}^{s} E_i$ は $f$ の例外因子とする．$\mathcal{J}(\mathfrak{a}) = \mathcal{J}(A, \mathfrak{a}) = H^0(X, \mathcal{O}_X(\lceil K_X - f^*K_A - F \rceil)) \subseteq A$ を $\mathfrak{a}$ の *multiplier ideal* という．ここで $K_X$, $K_A$ はそれぞれ $X$, $\operatorname{Spec} A$ の標準因子である．

$A$ が $\mathbb{Q}$ Gorenstein で $K_X - f^*K_A$ のとき $A$ を terminal singularity という ($A$ が標数 0 の体上の特異点のとき)．$\mathcal{J}(\mathfrak{a})$ が $\mathfrak{a}$ より真に大きくなると一見思われるが，そうではない．たとえば $A = k[[X,Y,Z,U,V]]/(X^3 + Y^4 + Z^4 + U^6 + V^6)$ (M.Reid の例) は terminal だが $\mathcal{J}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ である．実はこのとき $\beta_A(\mathfrak{m}) = 1$ となっている．

**Definition 4.2.** $(A, \mathfrak{m})$ が *normal local,* $I$ を $\operatorname{Sing}(A)$ の定義イデアルとする．$\beta_A(I) > 1$ のとき $A$ を *F-terminal* という．

**Theorem 4.3.** $(A, \mathfrak{m})$ は標数 *0* の体上 *essentially of finite type,* $A$ は正則または孤立特異点をもつとする．このとき次の条件は同値．

1. $\forall I$, $\mathfrak{m}$ *primary,* $\mathcal{J}(I)$ は $I$ を真に含む．
2. $\forall I$, $\mathfrak{m}$ *primary,* $\mathcal{J}(I) \supset I : \mathfrak{m}$.
3. 上述の条件をみたす *resolution* $f : X \to \operatorname{Spec} A$ で $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-Z_0)$ が *invertible* かつ $\lceil K_X - f^*K_A \rceil \ge Z_0$ であるものがとれる．
4. $A$ は *F-terminal type (*$A$ の標数 $p \gg 0$ への *reduction* が *F-terminal.*

*Proof.* $\mathcal{J}(\mathfrak{m}) = A$ とすると $\mathcal{J}(\mathfrak{m})$ の定義より $\lceil K_X - f^*K_A \rceil \ge Z_0$. 逆にこの条件を仮定すると，$\mathfrak{m}$ の general element $a$ に対して $\operatorname{div}_X(a) = Z_0 + (non - exceptional)$ より $ax \in I$ から $x \in \mathcal{J}(I)$ が従う． □

これを一般化すると次になる．

**Proposition 4.4.** 定理の仮定の下で，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{m}$ *primary* で $\beta_A(\mathfrak{a}) > 1$ ならば $\forall I$, $\mathfrak{m}$ *primary,* $\mathcal{J}(I) \supset I : \mathfrak{a}$.

**Example 4.5.** $(A, \mathfrak{m})$ が正則, $\dim A = d$ のとき $\beta_A(\mathfrak{m}^{d-1}) = d/(d-1) > 1$ だから $\forall I$, $\mathfrak{m}$ *primary,* $\mathcal{J}(I) \supset I : \mathfrak{m}^{d-1}$.

**Remark 4.6.** 前に渡辺は「$\dim A = 3$ のとき $A$ が *terminal* $\Longleftrightarrow$ *F-terminal type*」と発表したことがあったが, *3*次元 *terminal* で $\beta_A(\mathfrak{m}) = 2/3 < 1$ となるものの存在がわかった. 謹んで訂正させて頂きます. ただ, *1*つの目的であった次の補題 *(2)* はあるていど統一的に扱える。*(*この結果は垣見氏 [Ka] によって分類を用いて示されている。*)*

**Lemma 4.7.** *(1)* $(A, \mathfrak{m})$ *normal,* $cl(K_A)$ の位数が $r > 1$ とする。$\beta_A(\mathfrak{m}) > d - 2 - 1/r$ ならば $\mathfrak{m}^2 \subset J$, 但し $J$ は $\mathfrak{m}$ の *minimal reeduction.*
*(2)* $A$ が 3 次元 *terminal singularity* なら $\mathfrak{m}^2 \subset J$.

*Proof.* (1) の証明は Theorem 3.1 (3) と基本的に同じである。(1) だけでは (2) はカヴァーされないが、その場合は $r \geq 3$ なので、分類より Theorem 3.1 (3) の証明で $y^r = cw, c \in \mathfrak{m}^{r-1}$ となり $\mathfrak{m}^2 \subset J$ が従う。 □

## 5. Negative values of $\beta_A(I)$

「$a \in A^0, A \to A^{1/q}, 1 \to a^{1/q}$ splits」が成立するとき埋め込み $A \subset A^{1/q}$ も split するから $A$ は F-pure である. しかし F-pure threshold の概念は F-pure でないときも考えたい. また log canonical singularity と F-pure ring の対応も示したいが, 直接は様々な状況を見ると絶望的である. そこで次の定義を考える.

**Definition 5.1.** $\beta_A(I) \geq -n + s$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, s \in \mathbb{Q})$ $\Longleftrightarrow$ $\forall a \in I^n, \exists c \in I^{sq}, \exists \phi : A^{1/q} \to A$, $A \to A^{1/q}, 1 \to c^{1/q}$ と $\phi$ の合成写像が $a$ による掛け算写像.

計算には次の補題を使う.

**Lemma 5.2.** 上の $\phi$ が存在する $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,[E = A \otimes E \to A^{1/q} \otimes E, 1 \to a^{1/q}] \subset [0 : a]_E$.

**Example 5.3.** $A = k[[X, Y, Z]]/(X^2 + Y^3 + Z^7)$ のとき, $\beta_A(\mathfrak{m}) = -1/6$.

**Definition 5.4.** $\mathrm{Sing}(A)$ の定義イデアル $I$ に対して $\beta_A(I) \geq 0$, すなわち $\forall \epsilon > 0, \beta_A(I) \geq -e$ のとき $A$ を *quasi F-pure* という。

この概念を導入する目的は次の予想である。

**Conjecture 1.** $(A, \mathfrak{m})$ *normal,* 標数 *0* の体上 *essentially of finite type,* $cl(K_A)$ が有限位数のとき、$A$ が *log canonical* $\Longleftrightarrow$ $A$ が *quasi f-pure ?*

$A$ が gradded ring, 孤立特異点、$a(A) = 0$ のときは予想は成立する。

## References

[HR] M.Hochster and J.Roberts, The purity of the Frobenius and local cohomology, Adv. Math. **21** (1976), 117–172.

[HW] N. Hara and K. Watanabe, F-regular and F-pure rings vs. Log terminal and Log canonical Singularities, J.Alg.Geom., **17** (2001), 363-392.

[HY] N. Hara and K. Yoshida, A generalization of tight closure and multiplier ideals, math.AC/021108, Nov. 2002.

[Ka] N.Kakimi, On the multiplicity of terminal singularities on threefolds, Math.AG/0004105.

[Laz] R. Lazarsfeld, Multiplier Ideals for Algebraic Geometers, Lecture Note, Aug. 14, 2002.

[Li] J.Lipman, Adjoints of ideals in regular local rings, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 739–755.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, KOMABA, MEGURO, TOKYO 153-8914, JAPAN

*E-mail address*: `stakagi@ms.u-tokyo.ac.jp`

DEPARTMENT OF MATHEMATIS, COLLEGE OF HUMANITIES AND SCIENCES, NIHON UNIVERSITY SETAGAYA, TOKYO 156-8550, JAPAN

*E-mail address*: `watanabe@math.chs.nihon-u.ac.jp`

# KOSZUL COMPLEX の HIGHER EULER-POINCARÉ 標数について

川崎 謙一郎, 高橋 一嘉, 寺川 宏之, 日野原 幸利

ABSTRACT. 本稿の目的は，以下の定理 1 と定理 2 が同値であることを示しその直接的な証明を与えることにある.

参考文献 [10, IV, Appendice II] において J. -P. Serre は次の定理を述べている：$A$ をネーター局所環, $\mathbf{x}$ を巴系 (a system of parameters) とすると, 任意の $j$ $(j \geq i \geq 1)$ に対して

$$(\#) \qquad \chi_i(\mathbf{x}, M) := \sum_{j \geq i} (-1)^{j-i} \ell_A(H_j(\mathbf{x}, M)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad H_j(\mathbf{x}, M) = 0$$

が成り立つ.

この定理を少し一般化した形にする.

**定理 1.** $A$ をネーター環, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を $A$ の任意の元の列, $M$ を有限生成 $A$-加群とすると, ある $i \geq 1$ について $H_i(\mathbf{x}, M)$ が有限の長さ (*finite length*) であるならば, $\chi_i(\mathbf{x}, M)$ が定義され, $\chi_i(\mathbf{x}, M) = 0$ ならば任意の $j$ $(j \geq i)$ に対して $H_j(\mathbf{x}, M) = 0$ が成り立つ.

一方, 次の命題を考える.

**定理 2.** $A$ をネーター環, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を $A$ の任意の元の列, $M$ を有限生成 $A$-加群とすると, $i \geq 1$ ならば $H_i(\mathbf{x}, M)$ の台 (*support*) の任意の極小元は $H_{i-1}(\mathbf{x}, M)$ の素因子 (*associated prime ideal*) である.

本稿の目的は, 定理 1 と定理 2 が同値であることを示すことにある. 更に, 定理 2 が正しいことを示す. 従って, 定理 1 の直接的な証明を与えることになる. 以下, 次の記号を使う.

| | | |
|---|---|---|
| Supp $(M)$ | : | $M$ の台. |
| Ass $(M)$ | : | $M$ の素因子全体の集合. |
| Min $(M)$ | : | Supp $(M)$ の極小元全体の集合. |

## 1. 準 備

$A$ をネーター環とし, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を $A$ の元の任意の列とする. Koszul complex $K_\bullet(\mathbf{x}, A)$ には rigidity と呼ばれる性質が成り立つことが知られている (cf. [2, Proposition 2.6], [1, §2]). つまり, 任意の有限生成 $A$-加群 $M$ について $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$ ならば任意の $j$ $(j \geq i)$ に対して $H_j(\mathbf{x}, M) = 0$ である. 我々はこの rigidity を次の形で使う.

**命題 1.** $A$ をネーター環, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を $A$ の元の任意の列, $M$ を有限生成 $A$-加群とすると, 次の包含関係が成り立つ.

$$\mathit{Supp}\,(H_0(\mathbf{x}, M)) \supseteq \mathit{Supp}\,(H_1(\mathbf{x}, M)) \supseteq \cdots \supseteq \mathit{Supp}\,(H_n(\mathbf{x}, M)).$$

従って $H_i(\mathbf{x}, M)$ が有限の長さであるならば $H_j(\mathbf{x}, M)$ がすべての $j$ $(j \geq i)$ について有限の長さであり, $\chi_i(\mathbf{x}, M)$ が定義される.

この命題の一つの証明が [5, Theorem 1] にある.

## 2. 定理 2 を使った定理 1 の証明

この節では, 定理 2 が正しいと仮定して, 定理 1 の主張が正しいことを証明する.

**注意 1.** もし $H_i(\mathbf{x}, M) \neq 0$ ならばすべての素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathit{Supp}\,(H_i(\mathbf{x}, M))$ について $H_i(\mathbf{x}, M_\mathfrak{p}) = H_i(\mathbf{x}, M)_\mathfrak{p} \neq 0$ である. 故に 命題 *1* により, 任意の $l$ $(l \leq i)$ に対して $H_l(\mathbf{x}, M_\mathfrak{p}) \neq 0$ となり, 列 $(x_1, \ldots, x_n)$ は $\mathfrak{p}$ に含まれる.

定理 2 が正しいと仮定して定理 1 の主張が正しいことを証明するのに, 次の命題を示せば十分である.

**命題 2.** もし $H_i(\mathbf{x}, M)$ がある $i \geq 1$ について *zero* でないならば, *Supp* $(H_i(\mathbf{x}, M))$ の任意の極小元 $\mathfrak{p}$ と任意の $j$ $(j \geq i)$ について $H_j(\mathbf{x}, M_\mathfrak{p})$ は有限の長さであり, $\chi_i(\mathbf{x}, M_\mathfrak{p})$ は正値である.

証明. $(A, \mathfrak{p})$ は局所環で, $H_i(\mathbf{x}, M)$ は zero ではなく, 有限の長さであると仮定してよい. $n$ についての帰納法を使う. $n = 1$ の場合は自明である. $n > 1$ として, $n-1$ については命題が真であると仮定する. $\mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ を $\mathbf{x}$ の部分列とする. 次の長い完全列 $(*)$ を考察する (例えば, [7, XXI, Theorem 4.5.(a)] を参照).

$$
(*) \qquad
\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathbf{x}, M) & \longrightarrow & H_i(\mathbf{y}, M) & \xrightarrow{\xi_i} & \\
H_i(\mathbf{y}, M) & \xrightarrow{\psi_i} & H_i(\mathbf{x}, M) & \longrightarrow & H_{i-1}(\mathbf{y}, M) & \xrightarrow{\xi_{i-1}} & \\
H_{i-1}(\mathbf{y}, M) & \longrightarrow & H_{i-1}(\mathbf{x}, M) & \longrightarrow & \cdots & &
\end{array}
$$

もし $\psi_i$ が zero 写像ならば $\xi_i$ は全射である. 注意 1 により, $x_n \in \mathfrak{p}$ であるから, 中山の補題により $H_i(\mathbf{y}, M) = 0$ である. 命題 1 より, すべての $j$ $(j \geq i)$ に対して $H_j(\mathbf{y}, M) = 0$ である. このことは すべての $k$ $(k \geq i+1)$ に対して $H_k(\mathbf{x}, M) = 0$ であることを意味する. 故に $\chi_i(\mathbf{x}, M) = \ell_A(H_i(\mathbf{x}, M)) > 0$ である.

もし $\psi_i$ が zero 写像でないならば Coker $(\xi_i)$ は zero でなく, 有限の長さである. このとき $\dim(H_i(\mathbf{y}, M)) \leqslant 1$ である. 以下, 2 つの場合に分けて定理 2 を証明する (証明の際に, Herbrand 商 についての補題が必要である. Herbrand 商 については [4, Appendix A] を参照).

*Case 1.* $\dim H_i(\mathbf{y}, M) = 1$ と仮定する.

$$e_A(x_n, H_i(\mathbf{y}, M)) = \ell_A(\mathrm{Coker}\,(\xi_i)) - \ell_A(\mathrm{Ker}\,(\xi_i))$$

は定義されて正値である. 完全列 $(*)$ を分解して次を得る.

$$0 \to \mathrm{Coker}\,(\xi_l) \to H_l(\mathbf{x}, M) \to \mathrm{Ker}\,(\xi_{l-1}) \to 0 \quad (i \leq l \leq n)$$

今, Coker $(\xi_n) = 0$ だから

$$
\begin{aligned}
\chi_i(\mathbf{x}, M) &= \textstyle\sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \ell_A(H_{i+j}(\mathbf{x}, M)) \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{n-i-1} (-1)^j (\ell_A(\mathrm{Coker}\,(\xi_{i+j})) + \ell_A(\mathrm{Ker}\,(\xi_{i+j-1}))) + (-1)^{n-i}\ell_A(\mathrm{Ker}\,(\xi_{n-1})) \\
&= \ell_A(\mathrm{Ker}\,(\xi_{i-1})) + \textstyle\sum_{j=0}^{n-i-1} (-1)^j (\ell_A(\mathrm{Coker}\,(\xi_{i+j})) - \ell_A(\mathrm{Ker}\,(\xi_{i+j}))) \\
&= \ell_A(\mathrm{Ker}\,(\xi_{i-1})) + \textstyle\sum_{j=0}^{n-i-1} (-1)^j e_A(x_n, H_{i+j}(\mathbf{y}, M))
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 一方, 命題 1 より

$$\mathrm{Supp}\,(H_i(\mathbf{y}, M)) \supseteq \mathrm{Supp}\,(H_{i+1}(\mathbf{y}, M)) \supseteq \cdots$$

が成り立つので, $e_A(x_n, H_{i+j}(\mathbf{y}, M))$ は任意の $j \geq 0$ について定義されている. ここで, $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ を $\mathrm{Supp}\,(H_i(\mathbf{y}, M))$ の極小元とする. このとき, 帰納法の仮定から次を得る.

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=0}^{n-i-1}(-1)^j e_A(x_n, H_{i+j}(\mathbf{y}, M)) \\
&\quad = \textstyle\sum_{j=0}^{n-i-1}(-1)^j \Big( \sum_{l=1}^{s} \ell_{A_{\mathfrak{q}_l}}(H_{i+j}(\mathbf{y}, M)_{\mathfrak{q}_l}) \cdot e_A(x_n, A/\mathfrak{q}_l)\Big) \\
&\quad = \textstyle\sum_{l=1}^{s} \Big( \sum_{j=0}^{n-i-1}(-1)^j \ell_{A_{\mathfrak{q}_l}}(H_{i+j}(\mathbf{y}, M)_{\mathfrak{q}_l})\Big) \cdot e_A(x_n, A/\mathfrak{q}_l) \\
&\quad = \textstyle\sum_{l=1}^{s} \chi_i(\mathbf{y}, M)_{\mathfrak{q}_l} \cdot e_A(x_n, A/\mathfrak{q}_l) > 0.
\end{aligned}
$$

故に

$$
\chi_i(\mathbf{x}, M) = \ell_A(\mathrm{Ker}\,(\xi_{i-1})) + \sum_{l=1}^{s} \chi_i(\mathbf{y}, M_{\mathfrak{q}_l}) \cdot e_A(x_n, A/\mathfrak{q}_l) > 0
$$

が成り立つ.

*Case 2.* $\dim(H_i(\mathbf{y}, M)) = 0$ と仮定する.

$H_i(\mathbf{y}, M) = 0$ ならば命題 1 より, すべての $j$ $(j \geq i)$ に対して $H_j(\mathbf{y}, M) = 0$ となり, すべての $j$ $(j \geq i+1)$ に対して $H_j(\mathbf{x}, M) = 0$ となる. 故に $\chi_i(\mathbf{x}, M) = \ell_A(H_i(\mathbf{x}, M)) > 0$ である. $H_i(\mathbf{y}, M) \neq 0$ ならば $\mathrm{Supp}\,(H_i(\mathbf{y}, M)) = \{\mathfrak{p}\}$ であり, 定理 2 より $\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{y}, M))$ に含まれる. $H_i(\mathbf{x}, M)$ は zero でないので, $x_n \in \mathfrak{p}$ に注意して, $x_n$ は $H_{i-1}(\mathbf{y}, M)$ の零因子となる. つまり $\xi_{i-1}$ は単射ではない. もし $\chi_i(\mathbf{x}, M) = 0$ と仮定すると 命題 1 よりすべての $j$ $(j \geq i)$ に対して, $H_j(\mathbf{y}, M)$ も $H_j(\mathbf{x}, M)$ もすべて有限の長さとなり,

$$
\chi_i(\mathbf{y}, M) - \chi_i(\mathbf{x}, M) + (\ell_A(\mathrm{Coker}\,(\psi_i)) - \chi_i(\mathbf{y}, M)) = 0
$$

を得る. 従って $\ell_A(\mathrm{Coker}\,(\psi_i)) = 0$ となり, $\psi_i$ は全射, すなわち $\xi_{i-1}$ は単射となって矛盾である. 故に $\chi_i(\mathbf{x}, M)$ は 正値 でなければならない. □

## 3. 定理 1 を使った定理 2 の証明

この節では, 定理 1 が正しいと仮定して, 定理 2 の主張が正しいことを証明する.

証明. $A$ をネーター環, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を $A$ の元の列, $M$ を有限生成 $A$-加群とする. もし $H_i(\mathbf{x}; M) = 0$ ならば, そのとき $\mathrm{Min}\,(H_i(\mathbf{x}; M))$ は空集合であり, そしてそれは $\mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{x}; M))$ に含まれる. よって, 主張は成立する. 今 $H_i(\mathbf{x}; M) \neq 0$ であると仮定し, そしてある $i \geq 1$ に対して, $\mathrm{Min}\,(H_i(\mathbf{x}; M)) \not\subseteq \mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{x}; M))$ であるとする. そのとき $\mathrm{Supp}\,(H_i(\mathbf{x}; M))$ の極小元 $\mathfrak{p}$ で, $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{x}; M))$ であるような素イデアルを見つけることができる. $\mathfrak{p}$ で局所化して, $(A, \mathfrak{p})$ が局所環であり, $H_i(\mathbf{x}; M)$ が zero でなく, 有限の長さであるであると仮定してよい. このとき 定理 1 (または下の補助定理 1) によって, $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{x}; M))$ となる. さらに $\mathfrak{p}$ に含まれる $H_{i-1}(\mathbf{x}; M)$-正則元 (regular element) $x_{n+1}$ を見つけることができる. さて $\mathbf{z} = x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ に対して, Koszul complex $K_\bullet(\mathbf{z}; M)$ を考え, 長い完全列:

$$
\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow\ & H_i(\mathbf{x}; M) \xrightarrow{\eta_i} H_i(\mathbf{x}; M) \xrightarrow{\mu_i} H_i(\mathbf{z}; M) \\
\longrightarrow\ & H_{i-1}(\mathbf{x}; M) \xrightarrow{\eta_{i-1}} H_{i-1}(\mathbf{x}; M) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{z}; M) \longrightarrow \cdots,
\end{aligned}
$$

を考察しよう. 但し, $\eta_j$ は $x_{n+1}$ による積写像を表す. $\eta_{i-1}$ が単射であるので, $\mu_i$ が全射であることが分かり, よって $H_i(\mathbf{x}; M)$ が有限の長さであるであるから, $H_i(\mathbf{z}; M)$ は有限の長さであるである. 命題 1 から, 任意の $j$ $(j \geq i)$ に対して, すべての加群 $H_j(\mathbf{x}; M)$ とすべての加群 $H_j(\mathbf{z}; M)$ は有限の長さとなる. そのとき $\chi_i(\mathbf{z}; M) = 0$ を得る. よって定理 1 から,

$H_i(\mathbf{z}; M) = 0$ であり $\eta_i$ が全射であるという結論になる. $x_{n+1}$ が $\mathfrak{p}$ に含まれるので, 中山の補題により $H_i(\mathbf{x}; M) = 0$ を得る. これは矛盾である. よって証明が終わる. □

## 4. 定理 2 の証明

次の 補助定理 1 については, elementary な証明も与える事ができるが, 局所コホモロジーを使うとすっきりするので, ここでは柳川氏による証明を与える.

**補助定理 1.** *$A$ をネーター環, $M$ を有限生成 $A$-加群とし, $\varphi$ を $M$ の $A$-自己準同型 (A-endomorphism) とする. このとき, Min (Ker ($\varphi$)) は Ass (Coker ($\varphi$)) に含まれる.*

証明 (柳川氏による証明). $(A, \mathfrak{m})$ は局所環, Ker $(\varphi)$ は zero でなく, 有限の長さである $A$-加群と仮定してよい. 完全列

$$0 \to \mathrm{Ker}\,(\varphi) \to M \xrightarrow{\varphi} M \to \mathrm{Coker}\,(\varphi) \to 0$$

を次の二つの完全列に分解する.

$$0 \to \mathrm{Ker}\,(\varphi) \to M \to \mathrm{Im}\,(\varphi) \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Im}\,(\varphi) \to M \to \mathrm{Coker}\,(\varphi) \to 0.$$

ここで, 局所コホモロジー関手 (local cohomology functor) $\Gamma_\mathfrak{m}$ を施して次の完全列を得る.

$$0 \to \Gamma_\mathfrak{m}(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) \to \Gamma_\mathfrak{m}(M) \to \Gamma_\mathfrak{m}(\mathrm{Im}\,(\varphi)) \to 0,$$

$$0 \to \Gamma_\mathfrak{m}(\mathrm{Im}\,(\varphi)) \to \Gamma_\mathfrak{m}(M) \xrightarrow{\psi} \Gamma_\mathfrak{m}(\mathrm{Coker}\,(\varphi)) \to \mathrm{Coker}\,(\psi) \to 0.$$

このとき,

$$\begin{aligned} \ell_A(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) &= \ell_A(\Gamma_\mathfrak{m}(\mathrm{Ker}\,(\varphi))) = \ell_A(\Gamma_\mathfrak{m}(M)) - \ell_A(\Gamma_\mathfrak{m}(\mathrm{Im}\,(\varphi))) \\ &= \ell_A(\Gamma_\mathfrak{m}(\mathrm{Coker}\,(\varphi))) - \ell_A(\mathrm{Coker}\,(\psi)) \end{aligned}$$

となるから $\Gamma_\mathfrak{m}(\mathrm{Coker}\,(\varphi)) \neq 0$ である. □

定理 *2* の証明.

$n$ についての帰納法を使う. $n = 1$ の場合は 補助定理 1 そのものである. $n > 1$ として, $n - 1$ の場合は定理 2 が正しいと仮定する. $\mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ を $\mathbf{x}$ の部分列とするとき, 命題 2 の証明で使ったものと同じ, 次の完全列を考察する.

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathbf{x}, M) & \longrightarrow & H_i(\mathbf{y}, M) & \xrightarrow{\xi_i} \\ H_i(\mathbf{y}, M) & \xrightarrow{\psi_i} & H_i(\mathbf{x}, M) & \longrightarrow & H_{i-1}(\mathbf{y}, M) & \xrightarrow{\xi_{i-1}} \\ H_{i-1}(\mathbf{y}, M) & \longrightarrow & H_{i-1}(\mathbf{x}, M) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

ここで, $\xi_i$ は $x_n$ による積写像である.

もし $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$ ならば $\mathrm{Min}\,(H_i(\mathbf{x}, M))$ は空集合であり, 従って $\mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{x}, M))$ に含まれるから, 定理 2 の主張は成り立っている. 故に $H_i(\mathbf{x}, M) \neq 0$ と仮定し, $\mathfrak{p}$ を $\mathrm{Supp}\,(H_i(\mathbf{x}, M))$ の極小元とする. 注意 1 により, $x_n \in \mathfrak{p}$ である. 今, $\mathfrak{p}$ で局所化して, $(A, \mathfrak{p})$ は局所環, $H_i(\mathbf{x}, M)$ は zero でない $A$-加群で, 有限の長さであるとしてよい. このとき, 任意の $j$ $(j = 0, \ldots, i)$ に対して, $H_j(\mathbf{x}, M) \neq 0$ である.

もし $\psi_i$ が zero 写像ならば, $H_i(\mathbf{x}, M) = \mathrm{Ker}\,(\xi_{i-1})$ であるから, 補助定理 1 より $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(\mathrm{Coker}\,(\xi_{i-1}))$ となる.

もし $\psi_i$ が zero 写像でないならば, Coker $(\xi_i)$ は zero でなく有限の長さであるから, $\dim(H_i(\mathbf{y}, M)) \leqslant 1$ である. 以下, 2 つの場合に分けて定理 2 を証明する.

*Case 1.* $\dim H_i(\mathbf{y}, M) = 0$ と仮定すると, $H_i(\mathbf{y}, M)$ は有限の長さであり $\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Supp}\,(H_i(\mathbf{y}, M))$ の極小元である. 帰納法の仮定から $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{y}, M))$ となり, $x_n \notin \mathfrak{q}$ だから $\xi_{i-1}$ は単射ではない. 従って, $\mathrm{Ker}\,(\xi_{i-1})$ は zero ではなく, 有限の長さとなる. 補助定理 1 から $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(\mathrm{Coker}\,(\xi_{i-1})) \subseteq \mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{x}, M))$ を得る.

*Case 2.* $\dim H_i(\mathbf{y}, M) = 1$ と仮定する. もし $\xi_{i-1}$ が単射でないならば Case 1 と同じ議論で $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{x}, M))$ である. $\xi_{i-1}$ が単射ならば $\mathfrak{q}$ を $\mathrm{Supp}\,((H_i(\mathbf{y}, M))$ の極小元とすると, 帰納法の仮定から $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{y}, M))$ である. このとき, $(\mathfrak{q}, x_n) \subseteq \mathfrak{p}'$ かつ $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{y}, M)/x_n H_{i-1}(\mathbf{y}, M)) = \mathrm{Ass}\,(\mathrm{Coker}\,(\xi_{i-1}))$ であるような素イデアル $\mathfrak{p}'$ がある. 一方, $\xi_{i-1}$ は単射だから $x_n \notin \mathfrak{q}$ である. $A$ は局所環で $\dim(H_i(\mathbf{y}, M)) = 1$ だから $\dim(A/\mathfrak{q}) = 1$ であり, 従って $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ となる. 故に $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(H_{i-1}(\mathbf{x}, M))$ を得る. □

## References


[1] M. Auslander, *Modules over unramified regular local rings*, Ill. J. Math. **5**, (1961) 631-647.
[2] M. Auslander and D. A. Buchsbaum, *Codimension and multiplicity*, Ann. of Math. **68**, (1958) 625-657.
[3] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, Rev. ed. Cambridge Studies in Adv. Math. **39**, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
[4] W. Fulton, Intersection theory, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin (1998).
[5] Y. Hinohara, K.-i. Kawasaki and K. Takahashi, *An application of Vasconcelos' Lemma*, Bull. Nara Univ. Ed. Natur. Sci. **49** no.2, (2000) 1-3.
[6] Huneke and Wiegand, *Tensor products of modules, rigidity and local cohomology*, Math. Scand. **81**, (1997). 161-183.
[7] S. Lang, Algebra, 3rd ed. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. (1993).
[8] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Studies in Adv. Math. **8**, Cambridge University Press, Cambridge (1986).
[9] S. Lichtenbaum, *On the vanishing of Tor in regular local rings*, Illinois J. Math., vol **10**, (1966), 220-226.
[10] J.-P. Serre, Algèbre Locale. Multiplicités, Lecture Notes in Math. **11**, Springer-Verlag, Berlin (1965).
[11] J.-P. Serre, Local Algebra, Springer Monographs in Math. Springer-Verlag, Berlin (2000).


証明についての補足: 定理 1 と定理 2 の証明に関して, 環の取り替え (change of rings) を使うと, 参考文献 [6], [9] の中の定理から得られることが分かる. 本稿では, 環の取り替えを使わない直接的な証明を与えている.

# Grassmann代数の拡張について

早坂　太

## 1　序

本報告の内容は，後藤四郎氏 (明治大学)，蔵野和彦氏 (東京都立大学)，中村幸男氏 (明治大学) との共同研究です．以下 $B$ は可換な Noether 環とし，$0 \le \ell \le m \le n$ は整数とする．$m \times n$ 型の不定元からなる行列 $X = (X_{ij})$ に対し，$X_\ell$ で $X$ の 1 行目から $\ell$ 行目からなる $\ell \times n$ 型の部分行列を表わす．$X_\ell$ の 1 次から $\ell$ 次の行列式からなる集合を $\Delta(X_\ell)$，$X$ の $m$ 次行列式からなる集合を $\Gamma(X)$ とおく．多項式環 $B[X] = B[X_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n]$ の部分代数で，部分行列 $X_\ell$ の各成分と $\Gamma(X)$ で生成される $B$-代数を $R_\ell(X)$ とおく．$\ell = m$ のとき，$R_m(X)$ は多項式環 $B[X]$ である．$\ell = 0$ のとき，(体 $B$ 上の代数)$R_0(X)$ はグラスマン多様体の斉次座標環であって，多くの人々によって研究されている．本報告では，任意の $\ell$ に対する $B$-代数 $R_\ell(X)$ の環構造について得られた結果を報告する．主結果は，次である．

**定理 1.1.** (1) $R_\ell(X)$ が *Cohen-Macaulay* 環 $\Longleftrightarrow$ $B$ が *Cohen-Macaulay* 環.

(2) $B$ が正規整域なら $R_\ell(X)$ もそうで，その因子類群 $\mathrm{Cl}(R_\ell(X))$ は, $\mathrm{Cl}(B)$ と同型である.

(3) $R_\ell(X)$ が *Gorenstein* 環 $\Longleftrightarrow$ $B$ が *Gorenstein* 環.

従って，特に $B$ が体の場合は環 $R_\ell(X)$ は Gorenstein, UFD であることがわかる．次の節で定理 1.1 の証明を与える．

我々の $B$-代数 $R_\ell(X)$ は，$B$ が無限体の場合，特殊線型群のある部分群の不変式環として現れる．以下，$B(=K)$ は体とする．$\mathrm{SL}_m(K)$ で $K$ 上の $m$ 次特殊線型群を表わす．$\mathrm{SL}_m(K)$ の部分群:

$$\mathrm{G}_m^\ell = \left\{ \left. \left( \begin{array}{c|c} \mathrm{E}_\ell & 0 \\ \hline C & D \end{array} \right) \;\right|\; C \in \mathrm{M}_{(m-\ell)\times\ell}(K), D \in \mathrm{SL}_{m-\ell}(K) \right\},$$

(ここで，$\mathrm{E}_\ell$ は $\ell$ 次単位行列，$\mathrm{M}_{(m-\ell)\times\ell}(K)$ は $(m-\ell)\times\ell$ 型の $K$ 上の行列全体を表わす) を考える．$\sigma \in G_m^\ell$, $f \in K[X]$ とする．群 $G_m^\ell$ は，$\sigma(f)(X) = f(\sigma X)$ という作用

で多項式環 $K[X]$ に作用している．その不変式環を $K[X]^{G_m^\ell}$ とする．$G_m^0 = \mathrm{SL}_m(K)$ であることに注意する．$K$ が無限体の場合，$K[X]^{\mathrm{SL}_m(K)} = R_0(X)$ となることは，不変式論の第1基本定理として知られている ([2], [1])．我々は任意の $\ell$ について次の結果を得た．

**定理 1.2.** $K$ は無限体とする．このとき，$R_\ell(X) = K[X]^{G_m^\ell}$ が成り立つ．

第3節で定理 1.2 の証明を与え，最後の第4節で，ある加群の Rees 代数への応用について述べる．

# 2 定理 1.1 の証明

定理 1.1 の証明には ASL(algebra with staraightening law) の理論 ([1]) を用いる．$\{1, \ldots, m\}$ (resp. $\{1, \ldots, n\}$) の部分集合 $\{a_1, \ldots, a_t\}$ (resp. $\{b_1, \ldots, b_t\}$) に対して $[a_1, \ldots, a_t | b_1, \ldots, b_t]$ で $X$ の部分行列 $(X_{a_i b_j})_{\substack{1 \le i \le t, \\ 1 \le j \le t}}$ の $t$ 次行列式を表す（但し，$a_i < a_{i+1}$，$b_i < b_{i+1}$ と仮定する）．$[a_1, \ldots, a_m]$ で $m$ 次行列式 $[1, \ldots, m | a_1, \ldots, a_m]$ を表わす．集合 $\Delta(X)$ に次のように順序を入れておく．$\alpha = [a_1, \ldots, a_u | b_1, \ldots, b_u]$, $\beta = [c_1, \ldots, c_v | d_1, \ldots, d_v]$ に対し，

$$\alpha \le \beta \Longleftrightarrow u \ge v \text{ かつ } a_i \le c_i,\ b_i \le d_i,\ i = 1, \ldots, v.$$

$\Delta(X)$ の部分集合についても上で入れた順序で poset (a partial orderd set) と見る．また任意の $i, j$ に対して $\deg X_{ij} = 1$ とする．このとき $R_0(X)$ は $\Gamma(X)$ を poset にもつ $B$ 上の graded ASL であり $R_m(X)$ は $\Delta(X)$ を poset にもつ $B$ 上の graded ASL であることが知られている．([1, Section 4])．任意の $0 \le \ell \le m$ について次が正しい．

**定理 2.1.** $R_\ell(X)$ は $\Delta(X_\ell) \cup \Gamma(X)$ を *poset* にもつ $B$ 上の *graded ASL* である．

**証明.** $\mathrm{H}_\ell = \Delta(X_\ell) \cup \Gamma(X)$ とおく．まず環 $R_\ell(X)$ が，斉次元からなる集合 $\mathrm{H}_\ell$ で生成される $B = R_\ell(X)_0$ 上の代数であることは明らかである．また $\mathrm{H}_\ell$ は $\Delta(X)$ の部分集合であり，環 $R_\ell(X)$ は多項式環 $B[X]$ の部分環であることから $R_\ell(X)$ の standard monomial の線型独立性は $B[X]$ が $\Delta(X)$ を poset にもつ $B$ 上の graded ASL であることから従う．よって $R_\ell(X)$ が straightening law をもつことを示せばよい．$\alpha, \beta$ を比較できない $\mathrm{H}_\ell$ の元とする．問題は $\alpha \in \Delta(X)$，$\beta \in \Gamma(X)$ のときであるが $\alpha\beta$ の $B[X]$ 内での straightening relation を詳しく見ると次が成り立っていることがわかる．

**補題 2.2.** $\alpha=[a_1,\ldots,a_t|b_1,\ldots,b_t]$, $\beta=[c_1,\ldots,c_m]$ とする．このとき，$\alpha\beta$ は次の形の *straightening relation* をもつ．

$$\alpha\beta=\sum b_\mu\mu_1\mu_2,\quad b_\mu\in B,\ b_\mu\neq 0.$$

（ここで，$\mu_1\in\Gamma(X)$, $\mu_2\in\Gamma\left((X_{a_ij})_{\substack{1\leq i\leq t,\\ 1\leq j\leq n}}\right)$, かつ $\mu_1\leq\mu_2$, $\mu_1\leq\alpha$, $\mu_1\leq\beta$.）

よって環 $R_\ell(X)$ は graded ASL である．

□

定理 *1.1(1)* の証明．poset $\mathrm{H}_\ell$ は distributive lattice の構造をもつことから wonderful poset である．従って，ASL の一般論から定理 1.1(1) を得る． □

定理 1.1(2) の証明の前に環 $R_\ell(X)$ の次元を調べておく．

**補題 2.3.** $B(=K)$ は体とし，$p$ を整数 $(1\leq p\leq n)$ とする．

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \{X_{1j},X_{ip}\mid 1\leq j\leq n,\ 2\leq i\leq\ell\},\\ \Psi_2 &= \{X'_{ij}\mid 2\leq i\leq m, 1\leq j\leq n, j\neq p\}\end{aligned}$$

とおく．(但し，$X'_{ij}=X_{ij}-X_{1j}X_{ip}X_{1p}^{-1}$.) $X'$ で $(m-1)\times(n-1)$ 行列 $(X'_{ij})$ を表す．このとき，$\ell>0$ ならば，集合 $\Psi=\Psi_1\cup\Psi_2$ は $K$ 上代数的独立であって，$R_\ell(X)[X_{1p}^{-1}]=(R_{\ell-1}(X'))[\Psi_1][X_{1p}^{-1}]$ が成立する．

**証明.** $K[X][X_{1p}^{-1}]=K[\Psi,\{X_{ip}\}_{\ell+1\leq i\leq m}][X_{1p}^{-1}]$ より $\dim K[\Psi,\{X_{ip}\}_{\ell+1\leq i\leq m}]=mn$ である．集合 $\Psi\cup\{X_{ip}\}_{\ell+1\leq i\leq m}$ の個数も $mn$ だから，これらは $K$ 上代数的独立である．また，後半の主張についても

$$\begin{aligned}R_\ell(X)[X_{1p}^{-1}] &= K[X_\ell,\Gamma(X)][X_{1p}^{-1}]\\ &= K[X'_{\ell-1},\Gamma(X'),\Psi_1][X_{1p}^{-1}]\\ &= (R_{\ell-1}(X'))[\Psi_1][X_{1p}^{-1}].\end{aligned}$$

より従う． □

**命題 2.4.** $\ell<m$ ならば, $\dim R_\ell(X)=\dim B+m(n-m+\ell)+1$ である．

**証明.** 定理 2.1 より，環 $R_\ell(X)$ は $\mathrm{H}_\ell$ を poset にもつ $B$ 上の graded ASL であるから $\dim R_\ell(X)=\dim B+\operatorname{rank}H_\ell$ である．従って，$B$ が体の場合を示せばよい．$\ell=0$

のときは正しい ([1, (5.12) Corollary]). $\ell > 0$ とする．補題2.3と帰納法の仮定から，

$$\begin{aligned} \dim R_\ell(X) &= \dim R_\ell(X)[X_{11}^{-1}] \\ &= \dim\left(R_{\ell-1}(X')\right)[\Psi_1][X_{1p}^{-1}] \\ &= (m-1)(n-1-(m-1)+\ell-1)+1+(n+\ell-1) \\ &= m(n-m+\ell)+1. \end{aligned}$$

□

定理 *1.1(2)* の証明．環 $B$ は正規整域する．まず，$\ell < m$ としてよい．$\delta = [1, \ldots, m]$ とし，$1 \le i \le m, m+1 \le j \le n$ に対して

$$\delta_j^i = [1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m, j],$$

$$\Psi = \left\{ \{X_{ij}\}_{\substack{1 \le i \le \ell \\ 1 \le j \le m}},\ \delta,\ \{\delta_j^i\}_{\substack{i \in \{1, \ldots, m\} \\ j \in \{m+1, \ldots, n\}}} \right\}$$

とおく．このとき，次が成り立っている．

**補題 2.5.** $\ell < m$ ならば，$R_\ell(X)[\delta^{-1}] = B[\Psi][\delta^{-1}]$ が成り立ち，$\Psi$ は $B$ 上代数的独立である．

つまり，$R_\ell(X)[\delta^{-1}] \cong B[T_1, \ldots, T_d][T_1^{-1}]$ である．(ここで，$T_1, \ldots, T_d$ は $B$ 上の不定元で，$d = m(n-m+\ell)+1$.) 従って，$R_\ell(X)[\delta^{-1}]$ は正規整域である．また，$\delta$ は $\mathrm{H}_\ell$ の極小元だから，ASLの一般論より $R_\ell(X)/\delta R_\ell(X)$ はreducedである．従って環 $R_\ell(X)$ は正規整域となる．実は $\delta$ は環 $R_\ell(X)$ の素元である．$\delta$ は多項式環 $B[X]$ の素元であるので，$\delta B[X] \cap R_\ell(X) = \delta R_\ell(X)$ を示せばよい．元 $\delta\alpha \in \delta B[X] \cap R_\ell(X)$ をとる．$\alpha = \sum b_\mu \mu$ (ここで，$b_\mu \in B$, $\mu$ は $B[X]$ の standard monomial) とかくと $\delta\alpha = \sum b_\mu(\delta\mu)$ である．$\delta$ が，$\Delta(X)$ の極小元であることに注意すれば，$\delta\mu$ は standard monomial だから，これは $R_\ell(X)$ の元である．よって $\mu \in R_\ell(X)$ となり $\delta\alpha \in \delta R_\ell(X)$ である．従って $\delta$ は環 $R_\ell(X)$ の素元なので因子類群の同型 $\mathrm{Cl}(R_\ell(X)) \cong \mathrm{Cl}(R_\ell(X)[\delta^{-1}])$ を得る．また，補題2.5より $\mathrm{Cl}(R_\ell(X)[\delta^{-1}]) \cong \mathrm{Cl}(B)$ である．よって因子類群 $\mathrm{Cl}(R_\ell(X)$ と $\mathrm{Cl}(B)$ は同型である．

□

以上より $B$ が体の場合は，環 $R_\ell(X)$ は Cohen-Macaulay, UFD であって故に Gorenstein 環であることがわかる．定理1.1(3)を示す．

定理 *1.1(3)* の証明．$R_\ell(X)$ は $B$ 上忠実平坦であるから $R_\ell(X)$ が Gorenstein 環ならば $B$ もそうである．$B$ が Gorenstein 環とする．$R_\ell(X)$ の任意の素イデアル $Q$ をとり $P = Q \cap B$ とおく．このときファイバー環 $(B_P/PB_P) \otimes R_Q$ は環 $(B_P/PB_P) \otimes R$ の局所化であり，この環は，$\mathrm{H}_\ell$ を poset にもつ体 $B_P/PB_P$ 上の graded ASL であるから，Gorenstein 環である．よって，ファイバー環は Gorenstein 環である．従って $R_\ell(X)_Q$ は Gorenstein 環である．

□

# 3 定理1.2の証明

この節では定理 1.2 の証明を行う．以下 $B$ は無限体とし $B = K$ とおく．

定理 *1.2* の証明．$\ell$ についての帰納法で示す．$\ell = 0$ のときは，不変式論の第一基本定理である．よって $\ell > 0$ として $\ell - 1$ まで正しいとする．もちろん $\ell < m$ としてよい．$1 \le p \le n$ の整数 $p$ をとり固定する．$\sigma \in \mathrm{G}_m^\ell$ に対し $\tilde{\sigma}$ で $\sigma$ の 1 行 1 列を除いた $\mathrm{G}_{m-1}^{\ell-1}$ の元を表わす．補題 2.3 の記号を使う．群 $\mathrm{G}_{m-1}^{\ell-1}$ は第 1 節で定めた作用と同様の方法で $K[X'] = K[\Psi_2]$ に作用している．

**Claim 1.** $g \in K[X']$，$\sigma \in \mathrm{G}_m^\ell$ とする．このとき，$\sigma(g) = \tilde{\sigma}(g)$.
これは任意の $X'_{ij} \in \Psi_2$ に対し $\sigma(X'_{ij}) = \tilde{\sigma}(X'_{ij})$ が成り立っていることから従う．
$R_\ell(X) \subseteq K[X]^{\mathrm{G}_m^\ell}$ であることは明らかなので，逆の包含を示せばよい．任意に $f \in K[X]^{\mathrm{G}_m^\ell}$ をとる．もちろん $f \in K[X][X_{1p}^{-1}] = K[\Psi, \{X_{ip}\}_{\ell+1 \le i \le m}][X_{1p}^{-1}]$ であるが，

**Claim 2.** $f \in K[\Psi][X_{1p}^{-1}]$ である．
$S = K[\Psi, X_{1p}^{-1}][\{X_{ip}\}_{\ell+1 \le i \le m-1}]$ とおく．$X_{mp}$ は $S$ 上代数的独立である．$f = f(X_{mp}) = \sum_{k=0}^{u} f_k X_{mp}^k$ $(f_k \in S)$ とかき，$c \in K$ に対し，

$$\sigma_c = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{E}_{m-1} & \\ 0 & & & \\ c & & & \end{array}\right)$$

とおく．すると，$f = \sigma_c(f) = \sum_{k=0}^{u} f_k (X_{mp} + cX_{1p})^k$．故に任意の $c \in K$ に対し $(f - f_0)(-cX_{1p}) = 0$ である．$K$ が無限体であることから $f - f_0 = 0$ となり故に $f \in S$．以下これを繰り返すことによって，$f \in K[\Psi][X_{1p}^{-1}]$ を得る．従って，$X_{1p}^t f \in K[\Psi]$ となる整数 $t \ge 0$ が存在する．$X_{1p}^t f = \sum_a f_a \underline{X}^a$ とかく．(ここで，

$a = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{2p}, \ldots, a_{\ell p})$, $\underline{X}^a = X_{11}^{a_{11}} \cdots X_{1n}^{a_{1n}} X_{2p}^{a_{2p}} \cdots X_{\ell p}^{a_{\ell p}}$, $f_a \in K[\Psi_2]$ である.)
$\sigma \in \mathrm{G}_m^\ell$ に対し,

$$X_{1p}^t f = \sigma(X_{1p}^t f) = \sum_a \sigma(f_a)\underline{X}^a = \sum_a \tilde{\sigma}(f_a)\underline{X}^a.$$

故に, 各 $a$ に対して $\tilde{\sigma}(f_a) = f_a$ となり, $f_a \in K[X']^{\mathrm{G}_{m-1}^{\ell-1}}$ である. ここで, 帰納法の仮定から $K[X']^{\mathrm{G}_{m-1}^{\ell-1}} = R_{\ell-1}(X')$ が成り立ち, 補題2.3より $f \in (R_{\ell-1}(X'))\,[\Psi_1][X_{1p}^{-1}] = R_\ell(X)[X_{1p}^{-1}]$ である. よって, 特に $f \in R_\ell(X)[X_{11}^{-1}] \cap R_\ell(X)[X_{12}^{-1}]$. 定理1.1より $R_\ell(X)$ はUFDであったので $f \in R_\ell(X)$ である.

□

# 4 加群のRees代数への応用

最後に $B$-代数 $R_\ell(X)$ が, 特殊な場合に, 加群のRees代数として現れることを述べる. 以下, $A = K[a_1, \ldots, a_d]$ を体 $K$ 上の $d$ 変数多項式環とし, $K_\bullet(\boldsymbol{a})$ で不定元の列 $\boldsymbol{a} = a_1, \ldots, a_d$ に関するKoszul複体を表わす. $M = M_2$ を $K_\bullet(\boldsymbol{a})$ の2ndシジジー加群とする. このとき, 加群 $M$ のRees代数 $\mathcal{R}(M)$ は $\mathrm{Im}(\mathrm{Sym}(M) \to \mathrm{Sym}(A^d))$ によって定義される ([3]). すなわち, $\mathcal{R}(M)$ は多項式環 $A[t_1, \ldots, t_d]$ の部分代数で $A$ 上 $\{a_i t_j - a_j t_i\}_{1 \le i < j \le d}$ によって生成される代数である. ここで,

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_d \\ t_1 & \cdots & t_d \end{pmatrix}$$

とおくと, Rees代数 $\mathcal{R}(M)$ は $R_1(X)$ と一致している. 従って, 定理1.1より次を得る.

**定理 4.1.** $A = K[a_1, \ldots, a_d]$ を $K$ 上の多項式環とする. このとき, 不定元の列 $a_1, \ldots, a_d$ に関する*Koszul*複体の*2nd*シジジー加群 $M = M_2$ の*Rees*代数 $\mathcal{R}(M)$ は*Gorenstein UFD*である.

**注意 4.2.** $\mathcal{R}(M_2)$ の*Gorenstein*性については, *Herzog, Tang, Zarzuela*によっても独立に証明されている.

# 参考文献

[1] W. Bruns and U. Vetter, Determinantal Rings, Lecture Notes in Math. 1327, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988.

[2] C. De Concini and D. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory, Adv. in Math. 21 (1976), 330-354.

[3] D. Eisenbud, C. Huneke and B. Ulrich, What is the Rees algebra of a module?, preprint, 2000

[4] S. Goto, F. Hayasaka, K. Kurano and Y. Nakamura, Algebras generated by the entries of a certain submatrix and the maximal minors, preprint, 2002

〒 214-8571 川崎市多摩区東三田 1-1-1
明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
e-mail：ee68048@math.meiji.ac.jp

# Todd classes of Grassmann varieties and pfaffian ideals


蔵野 和彦

東京都立大学大学院理学研究科


これは、Anurag K. Singh 氏 (MSRI) との共同研究です。詳しくは、[6] を参照。

$X = (x_{ij})$ を $d \times n$-変数行列とする。ただし、$1 \le d \le n-1$ とする。体 $k$ 上 $X$ の $d$ 次小行列式全体で生成された (多項式環 $k[x_{ij} \mid i, j]$ の) 部分環を $R$ とする。普通に次数を入れて $R$ は次数環と思うことにする。このとき、$G_d(n) = \mathrm{Proj}(R)$ は、$n$ 次元ベクトル空間 $k^n$ の $d$ 次元部分空間をパラメトライズするグラスマン多様体である。$R$ で決まるグラスマン多様体の射影空間への埋め込みを Plücker embedding という。ここで、$R$ の斉次極大イデアルでの局所化を $A_d(n)$ と書く。$A_d(n)$ は $d(n-d)+1$ 次元 Gorenstein 一意分解環であることが知られている。

ここで、主定理は次のものである。Roberts 環については [4] を参照。

**定理 1.** 自然数 $d, n$ は、$1 \le d \le n-1$ を満たすとしよう。このとき、$A_d(n)$ が *Roberts* 環であるための必要十分条件は、次のどれかが成立することである。

*(1)* $d = 1$
*(2)* $d = n-1$
*(3)* $d = 2$ かつ $n = 4$
*(4)* $d = 3$ かつ $n = 6$

上の (1), (2), (3) は完全交叉であるが、(4) はそうではない。

Roberts 環は、[5] の意味で numerically Roberts 環である。一般には逆は正しくないのであるが、$A_d(n)$ に関しては、Roberts 環であることは numerically Roberts 環であることは同値である。

Roberts 環や numerically Roberts 環に対しては、複体の Dutta multiplicity [2] とホモロジーの長さの交代和は等しい。このことより、これらの環に対しては vanishing theorem [7] が成立する。

この定理の系として、pfaffian で生成されたイデアルで割った環が、いつ Roberts 環になるかどうかが判定できる。

$m$ と $n$ は $2m \le n$ を満たす自然数とし、$Y = (y_{ij})$ を成分が変数である $n$ 次交代行列とする (すなわち、$y_{ii} = 0, y_{ij} = -y_{ji}$)。ここで、$1 \le s_1 < \cdots < s_{2m} \le n$ を満

たす整数列に対して、$\mathrm{pf}(s_1, \ldots, s_{2m})$ は、$2m \times 2m$ 交代行列 $(y_{s_i s_j})$ の pfaffian であるとしよう。(pfaffian とは、行列式の平方根のこと。) 多項式環の局所化 $k[y_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n]_{(y)}$ を $S$ とおく。このとき、

$$\mathrm{Pf}_m(Y) = (\mathrm{pf}(s_1, \ldots, s_{2m}) \mid 1 \leq s_1 < \cdots < s_{2m} \leq n)$$

と $S$ のイデアルを定義する。$B_m(n) = S/\mathrm{Pf}_m(Y)$ としよう。$B_m(n)$ も Gorenstein 一意分解環であることが知られている。

このとき、次が成立する。

**系 2.** 次は同値である。

*(1)* $B_m(n)$ は *Roberts* 環。
*(2)* $B_m(n)$ は完全交叉。
*(3)* $n = 2m$ あるいは $m = 1$。

「$m = 1$ のときは、$B_m(n)$ は完全交叉であり、上のことはすぐにわかる。$m = 2$ のときは、$B_2(n) = A_2(n)$ であるので、定理を使うことによって系が証明できる。$m \geq 3$ であるときは、局所化して $m = 2$ の場合に帰着させることによって証明する。」という具合に、定理から系が従う。

$m \leq 2$ であるときは、$B_m(n)$ に関しては、Roberts 環であることと numerically Roberts 環であることは同値である。しかし、$m \geq 3$ の場合に $B_m(n)$ がいつ numerically Roberts 環になるかは筆者は知らない。

主定理の証明には、次の定理 [3] を使う。

$R = \oplus_{n \geq 0} R_n = k[R_1]$ を、体 $k$ 上の Noetherian graded ring とする。$M$ を $R$ の斉次極大イデアルとする。$A = R_M$ とおく。$X = \mathrm{Proj}(R)$ は、$k$ 上スムーズとし、次元は $t$ であるとしよう。

$$\mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} = \oplus_{i=0}^{t} \mathrm{CH}^i(X)_{\mathbb{Q}}$$

を $\mathbb{Q}$-係数の $X$ のチャウ環であるとする (これは、$\mathbb{Z}$-graded 可換環)。埋め込み $X = \mathrm{Proj}(R)$ に対応した very ample 因子を $h \in \mathrm{CH}^1(X)_{\mathbb{Q}}$ とする。$\mathrm{td}(\Omega_X^{\vee})$ は、tangent sheaf $\Omega_X^{\vee}$ の Todd class としよう。このとき、次が成立する [3]。

**定理 3.** $A$ が *Roberts* 環であるための必要十分条件は、

$$\mathrm{td}(\Omega_X^{\vee}) \equiv 1 \mod h\mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}}$$

が成立することである。

$X$ がアーベル多様体であるときは tangent sheaf $\Omega_X^{\vee}$ は $X$ の構造層の直和になり、このことより $\mathrm{td}(\Omega_X^{\vee}) = 1$ となる。従って、定理 3 により、$A$ は Roberts 環になることがわかる。

定理 3 によると、スムーズな射影代数多様体 $X$ の

$$\underline{\text{チャウ環 } \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}}},\ \underline{\text{very ample 因子 } h},\ \underline{\text{tangent sheaf } \Omega_X^{\vee}}$$

がわかれば、埋め込み $h$ に対応した $X$ の affine cone が Roberts 環であるかどうかが判定できるわけである。

以下で、定理 1 の証明の概略を述べる。

最初に、証明中に出てくる locally free sheaf の Chern 類の公式を列挙しておく。

**Chern 類の性質** $E, F, E_i$ 等は、スムーズな代数多様体 $X$ 上の locally free sheaf とする。

(1) 非負整数 $m$ に対して $m$-th Chern 類 $c_m(E) \in \mathrm{CH}^m(X)_{\mathbb{Q}}$ が定まる。

$m > \mathrm{rank}(E)$ であれば、$c_m(E) = 0$ であり、$c_0(E) = 1$ である。

$m > 0$ のとき、$c_m(\mathcal{O}_X^{\oplus r}) = 0$ が成立する。

全ての $m$ に対して、$c_m(E^{\vee}) = (-1)^m c_m(E)$ が成立する。

(2) $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ が完全であるとき、次が成立。

$$\begin{aligned} c_1(E_2) &= c_1(E_1) + c_1(E_3), \\ c_2(E_2) &= c_2(E_1) + c_1(E_1)c_1(E_3) + c_2(E_3), \\ &\vdots \end{aligned}$$

(3) $\mathrm{rank}(E) = r$ であるとき、$c_1(E) = c_1(\wedge^r E)$ が成立。

(4) $\mathrm{rank}(E) = r$, $\mathrm{rank}(F) = s$ とおく。

$$\begin{aligned} c_1(E \otimes F) &= s \cdot c_1(E) + r \cdot c_1(F), \\ c_2(E \otimes F) &= \frac{s(s-1)}{2} c_1(E)^2 + \frac{r(r-1)}{2} c_1(F)^2 + (sr-1)c_1(E)c_1(F) \\ &\quad + s \cdot c_2(E) + r \cdot c_2(F), \\ &\vdots \end{aligned}$$

(5) $c_i = c_i(\Omega_X^{\vee})$ とおくと、次が成立。

$$\begin{aligned} \mathrm{td}(\Omega_X^{\vee}) &= 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2 \\ &\quad + \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 + c_1c_3 - c_4) + \cdots \end{aligned}$$

以下、$G = G_d(n)$ としよう。

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{O}_G{}^{\oplus n} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

を universal exact sequence (tautological exact sequence) としよう。つまり、$\mathcal{S}$ は tautological subbundle と呼ばれる階数 $d$ の $G$ 上の locally free sheaf、$Q$ は univrersal quotient と呼ばれる階数 $n-d$ の locally free sheaf である。(グラスマン多様体の universal property により、$k$-スキーム $X$ と階数 $n-d$ の locally free sheaf $\mathcal{E}$ と全射 $\mathcal{O}_X{}^{\oplus n} \to \mathcal{E}$ が与えられたら、(universal exact sequence の引き戻しの $\mathcal{O}_X{}^{\oplus n} \to f^*\mathcal{Q}$ が与えられた全射と一致するような) $k$-スキームの射 $f : X \to G$ が一意的に存在する。)

Plücker embedding に対応する very ample invertible sheaf は $\wedge^{n-d}Q$ である。また、tangent sheaf は $\Omega_G^\vee = \mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q}$ である。(例えば [1])

また、$\dim G = d(n-d)$ である。$t = d(n-d)$ とおく。$G$ の $\mathbb{Q}$-係数のチャウ環を

$$\mathrm{CH}^{\cdot}(G)_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i=0}^{t} \mathrm{CH}^i(G)_{\mathbb{Q}}$$

としよう。このとき、

$$\mathrm{CH}^i(G)_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{\lambda} \mathbb{Q} \cdot \{\lambda\}$$

となる。ただし、$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ は partition で、$n-d \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0$ と $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d = i$ を満たすものとする。$\{\lambda\}$ は、partition $\lambda$ に対応した生成元であり、Schubert cycle と呼ばれる。(Schubert calculus に関しては [1] を参照)

$\{(0, \ldots, 0)\}$ は、チャウ環 $\mathrm{CH}^{\cdot}(G)_{\mathbb{Q}}$ の乗法に関する単位元であり、

$$\mathrm{CH}^0(G)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cdot \{(0, \ldots, 0)\}$$

である。以下、$\{(1, 0, \cdots, 0)\}$ を $\square$、$\{(2, 0, \cdots, 0)\}$ を $\square\square$、$\{(1, 1, 0, \cdots, 0)\}$ を $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ などと表す

チャウ環 $\mathrm{CH}^{\cdot}(G)_{\mathbb{Q}}$ の積は、

$$\{\lambda\} \times \{\mu\} = \sum_{|\lambda|+|\mu|=|\rho|} N_{\lambda,\mu,\rho}\{\rho\}$$

で与えられる。$N_{\lambda,\mu,\rho}$ は、Littlewood-Richardson 係数である。ただし、partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ に対して、$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d$ と定義する。また、$\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ に対して、$\rho_1 > n-d$ または $\rho_{d+1} \neq 0$ の場合は、$\{\rho\} = 0$ とみなす。

(対称式の基本定理により、対称式からなる環は、環としては基本対称式で生成される。一方、対称式からなる環の $\mathbb{Z}$ 加群としての基底として、partition に関する Schur 関数 $s_\lambda$ がとれる。ただし、partition $\lambda = (\lambda_1, \dots)$ は、$\lambda_1$ が変数の個数を超えないものとする。このとき、対称式の積 $s_\lambda s_\mu$ は、再び Schur 関数の $\mathbb{Z}$ 線形結合で書けるが、

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{|\lambda|+|\mu|=|\rho|} N_{\lambda,\mu,\rho} s_\rho$$

となる。これが、Littlewood-Richardson 係数の定義である。)

$\{\lambda\}$ は、実際には次のように定義される。

$$\{(m, 0, \dots, 0)\} = c_m(\mathcal{Q})$$

であり、さらに $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ に対しては、

$$\{\lambda\} = \det \begin{pmatrix} c_{\lambda_1} & c_{\lambda_1+1} & c_{\lambda_1+2} & \cdots & c_{\lambda_1+d-1} \\ c_{\lambda_2-1} & c_{\lambda_2} & c_{\lambda_2+1} & \cdots & c_{\lambda_2+d-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{\lambda_d-d+1} & c_{\lambda_d-d+2} & \cdots & \cdots & c_{\lambda_d} \end{pmatrix}$$

である。

universal exact sequence により、

$$\mathcal{O}_G \simeq \wedge^n \mathcal{O}_G \simeq \wedge^d \mathcal{S} \otimes \wedge^{n-d} \mathcal{Q}$$

が成立する。すると、

$$\wedge^{n-d} \mathcal{Q} \simeq \left(\wedge^d \mathcal{S}\right)^\vee \simeq \wedge^d \mathcal{S}^\vee$$

が成立する。よって、Chern 類の性質により

$$\square = c_1(\mathcal{Q}) = c_1(\wedge^{n-d}\mathcal{Q}) = c_1(\wedge^d \mathcal{S}^\vee) = c_1(\mathcal{S}^\vee) = -c_1(\mathcal{S})$$

であり、上の元が Plücker embedding に対応した very ample divisor $h \in \mathrm{CH}^1(G)_\mathbb{Q}$ である。

ここで、

$$\mathrm{td}(\Omega_X^\vee) = \mathrm{td}_0 + \mathrm{td}_1 + \mathrm{td}_2 + \cdots$$

とおく。ただし、$\mathrm{td}_i \in \mathrm{CH}^i(G)_\mathbb{Q}$ であり、$\mathrm{td}_0 = 1 \in \mathrm{CH}^0(G)_\mathbb{Q}$ である。

定理 3 により、$G$ の homogeneous coordinate ring の原点での局所環 $A_d(n)$ が Roberts 環であるための必要十分条件は、$i > 0$ に対して

$$\mathrm{td}_i \equiv 0 \mod h\mathrm{CH}^{\cdot}(G)_\mathbb{Q}$$

が成立することである。
まず、Chern 類の性質 (4) により

$$\mathrm{td}_1 = \frac{1}{2}c_1(\Omega_X^\vee) = \frac{1}{2}c_1(\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q}) = \frac{1}{2}\left(d \cdot c_1(\mathcal{Q}) + (n-d)\cdot c_1(\mathcal{S}^\vee)\right) = \frac{n}{2}\Box \equiv 0$$

である。$\equiv$ は、$\mathrm{mod}\, h\mathrm{CH}^\cdot(G)_\mathbb{Q}$ を意味するものとする。(実は、$A_d(n)$ は Gorenstein 環であることから、$i$ が奇数なら $\mathrm{td}_i \equiv 0$ となることがわかる。)
Chern 類の性質により、

$$\begin{aligned}
\mathrm{td}_2 &= \frac{1}{12}\left(c_1(\Omega_X^\vee)^2 + c_2(\Omega_X^\vee)\right)\\
&\equiv \frac{1}{12}c_2(\Omega_X^\vee) = \frac{1}{12}c_2(\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q})\\
&\equiv \frac{1}{12}\left((n-d)\cdot c_2(\mathcal{S}^\vee) + d\cdot c_2(\mathcal{Q})\right)\\
&\equiv \frac{2d-n}{12}c_2(\mathcal{Q}) = \frac{2d-n}{12}\Box\Box
\end{aligned}$$

となる。ところで、

$$\mathrm{CH}^2(G)_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\cdot \begin{array}{c}\Box\\[-4pt]\Box\end{array} + \mathbb{Q}\cdot \Box\Box$$

であった。しかるに

$$h\mathrm{CH}^1(G)_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\cdot(\Box \times \Box)$$

であり、Littlewood-Richardson 公式 (あるいは、Pieri の公式) により

$$\Box \times \Box = \begin{array}{c}\Box\\[-4pt]\Box\end{array} + \Box\Box$$

が成立する。このことより、$d \geq 2,\ n-d \geq 2,\ 2d-n \neq 0$ であれば、

$$\frac{2d-n}{12}\Box\Box \notin h\mathrm{CH}^1(G)_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\cdot\left(\begin{array}{c}\Box\\[-4pt]\Box\end{array} + \Box\Box\right)$$

が云えて、この場合は $A_d(n)$ は Roberts 環ではないことがわかった。
同様の計算をすることにより、$n = 2d$ の場合は、$A_d(n)$ が Roberts 環であるための必要十分条件は $d \leq 3$ であることがわかる。

# 参考文献


[1] W. Fulton, *Intersection Theory*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[2] K. Kurano, *An approach to the characteristic free Dutta multiplicities*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 369–390.

[3] K. Kurano, *A remark on the Riemann-Roch formula on affine schemes associated with Noetherian local rings*, Tôhoku Math. J. **48** (1996), 121–138.

[4] K. Kurano, *On Roberts rings*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 333–355.

[5] K. Kurano, *Numerical equivalence defined on a Chow group of a Noetherian local ring*, in preparation.

[6] K. Kurano and A. K. Singh, *Todd classes of affine cones of Grassmannians*, Int. Math. Res. Notices **35** (2002), 1841–1855.

[7] P. Roberts, *The vanishing of intersection multiplicities of perfect complexes*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **13** (1985), 127–130.