研 究 集 会

# 第 25 回可換環論シンポジウム

2003 年 11 月 10 日〜13 日

於　ウェルサンピア多摩

平成１５年度科学研究費補助金
基盤研究（B）(1)（代表：西田憲司）
基盤研究（B）(2)（代表：吉野雄二）
基盤研究（B）(2)（代表：渡辺敬一）

# 序

この本に収録されているのは論文は, 第25回可換環論シンポジウムの講演の記録です。このシンポジウムは, 西田憲司氏 (基盤研究 (B)(1)), 吉野雄二氏 (基盤研究 (B)(2)), 渡辺敬一氏 (基盤研究 (B)(2)) の科学研究費補助金のサポートの下に, 2003年11月10日から13日にかけて東京都多摩センターで行われました。今回は, 向井茂氏 (京都大学数理解析研究所) と Moty Katzman 氏 (University of Sheffield) を招待し, 両氏から大変興味深い講演を聞くことができました。また、Katzman 氏の招聘では大阪大学COEから援助を頂くこともできました。講演・報告集にご尽力頂いた講演者の皆様, 会場の運営を手伝って頂いた学生の皆様に心から感謝の念を述べさせて頂きます。

2004年2月8日

明治大学　後藤四郎・蔵野和彦・中村幸男

# Program

１１月１０日（月）

17:00 ~ 17:10　あいさつと諸注意

17:10 ~ 17:50　後藤 四郎 (明治大・理工)
Towards a theory of stable local rings

19:10 ~ 19:50　大杉 英史 (立教大・理)
Prestable ideals and Sagbi bases

20:00 ~ 20:50　川崎 健 (都立大・理)
Cousin コホモロジーの有限性

１１月１１日（火）

9:00 ~ 9:30　居相 真一郎（北海道教育大学)
随伴次数環が Gorenstein になるための条件について

9:40 ~ 10:10　高山 幸秀 (立命館大・理工)
加群の b-列と generalized Cohen-Macaulay ideals の近似

10:30 ~ 11:10　寺井 直樹 (佐賀大・文化)、吉田 健一 (名大・多元)
Buchsbaum Stanley–Reisner rings with linear resolution

11:20 ~ 12:00　M. Katzman (Univ. of Sheffield)
The associated primes of top local cohomology modules

13:30 ~ 14:10　柳川 浩二 (阪大・理)
BGG correspondence and Roemer's duality of an exterior algebra

14:20 ~ 15:10　原 伸生 (東北大・理)
A few remarks on a generalization of tight closure

15:30 ~ 16:00　橋本 光靖 (名大・多元)
"Geometric quotients are algebraic schemes" based on Fogarty's idea

16:10 ~ 16:40　谷本 龍二 (阪大・理)
ヒルベルトの第 14 問題に対する線形な反例について

17:00 ~ 18:00　向井 茂 (京大・数理研)
Hilbert の第 14 問題－ Hilbert の有限生成性定理と永田型作用

１１月１２日（水）

9:10 ∼ 9:50 寺井 直樹 (佐賀大・文化)
Arithmetical rank of monomial ideals

10:05 ∼ 10:45 M. Katzman (Univ. of Sheffield)
Some properties of the Frobenius closure of ideals

11:00 ∼ 12:00 向井 茂 (京大・数理研)
永田の反例ー永田の論法 ($n = 16$)、その簡易版 ($n = 9$) と永田の予想

13:30 ∼ 14:30 向井 茂 (京大・数理研)
Hilbert の第 14 問題ー簡約でない場合の肯定的な結果と予想

14:40 ∼ 15:30 張間 忠人 (四国大), 渡辺 純三 (東海大・理)
巾零行列の交換子代数と可換アルティン代数への応用

15:50 ∼ 16:35 泊 昌孝 (日大・文理)
正規孤立特異点の多重種数と filtered blowing-up (下からの評価)

16:45 ∼ 17:30 渡辺 敬一 (日大・文理)、吉田 健一 (名大・多元)
Recent developments on Hilbert-Kunz multiplicities

18:30 ∼ 20:30 懇親会

１１月１３日（木）

9:00 ∼ 9:40 加藤　希理子 (大阪女子大・理)
Morphisms represented by monomorphisms

9:50 ∼ 10:20 高橋 亮 (岡山大・理)
The number of isomorphism classes of indecomposable modules of $G$-dimension zero

10:30 ∼ 11:10 吉野 雄二 (岡山大・理)
加群の退化

# Contents

# TOWARDS A THEORY OF STABLE LOCAL RINGS

Shiro Goto


Abstract

My talk is based on a work jointly with F. Hayasaka and Y. Shimoda. Our purpose is to give a structure theorem of stable local rings. The results are summarized into the following.


**Theorem.** *Let $A$ be a Noetherian local ring with the maximal ideal $\mathfrak{m}$. Assume that* $\operatorname{depth} A > 0$ *and the field $A/\mathfrak{m}$ is infinite. Then the following three conditions are equivalent to each other.*

(1) $I = \widetilde{I}$ *for every regular ideal $I$ in $A$.*
(2) $\dim A = 1$ *and every $\mathfrak{m}$-primary ideal $I$ in $A$ is stable, that is, the equality $I^2 = aI$ holds true for some $a \in I$.*
(3) $\dim A = 1$, *and either* (i) $\mathrm{e}(A) \leq 2$, *or* (ii) $\operatorname{Min}\widehat{A} = \{\mathfrak{p}\}$, $\mathfrak{p} \neq (0)$, $\mathfrak{p}^2 = (0)$, *and the ring $\widehat{A}/\mathfrak{p}$ is a* DVR.

Here $\mathrm{e}(A)$ denotes the multiplicity of $A$ with respect $\mathfrak{m}$ and $\widehat{A}$ stands for the $\mathfrak{m}$-adic completion of $A$. For every regular ideal $I$ (that is, an ideal $I$ in $A$ which contains at least one non-zerodivisor in $A$) we denote by $\widetilde{I} = \bigcup_{n \geq 0}[I^{n+1} :_A I^n]$ the Ratliff-Rush closure of $I$.

The local rings satisfying condition (2) in my theorem are called stable ([SV1, SV2, Li]). The equivalence in my theorem between conditions (2) and (3) holds true for every Cohen-Macaulay local ring $A$ of dimension 1, which is the main result of my talk. When $A$ contains a field, condition (3) (ii) is equivalent to saying that

$$\widehat{A} \cong k[[t]] \ltimes k[[t]]^{(e-1)}$$

(the idealization), where $e = \mathrm{e}(A)$ and $k[[t]]$ denotes the formal power series ring over a field $k$. Consequently, thanks to the method of the late Professor Tetsushi Ogoma for constructing bad Noetherian local rings (cf. [Le]), one knows that for every integer $e \geq 1$ there exists a stable local integral domain $R$ with $\mathrm{e}(R) = e$.

## References


[Le] C. Lech, *A method for constructing bad Noetherian local rings with multiplicity 2*, Algebra, algebraic topology,and their interactions (Stockholm, 1983), Lecture Notes in Math. **1183** (1986), 241-247.

[Li] J. Lipman, *Stable ideals and Arf rings*, Amer. J. Math. **93** (1971), 649-685.

[SV1] J. Sally and W. V. Vasconcelos, *Stable rings*, J. Pure and Appl. Alg. **4** (1974), 319-336.

[SV2] J. Sally and W. V. Vasconcelos, *Stable rings and a problem of Bass*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 574-576.



Department of Mathematics, School of Science and Technology, Meiji University, 214-8571 JAPAN

*E-mail address*: goto@math.meiji.ac.jp


Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

# 局所安定環の構造

明大・理工　後藤 四郎

## 1　はじめに

この報告は早坂太君・下田保博君との共同研究 [GHS] に基づきます。

以下，$A$ は可換な Noether 環とし，$\mathcal{F} = \{I \mid I$ は $A$ のイデアルであって，少なくとも一つの非零因子を含む$\}$ と定める。即ち，$\mathcal{F}$ は環 $A$ の正則イデアル全体より成る集合である。

安定環の定義から始めよう。

**定義 1.1.** 環 $A$ が安定である (stable) とは，次の 3 条件が満たされることをいう。

(1) $A$ は半局所環である。

(2) $M$ を環 $A$ の極大イデアルとすれば，$\mathrm{ht}_A M = 1$ であって，局所環 $A_M$ は Cohen – Macaulay である。

(3) いかなる $I \in \mathcal{F}$ に対しても，適当な元 $a \in I$ が存在し等式 $I^2 = aI$ が成り立つ。

安定環の概念の初出は 1974 年の Sally-Vasconcelos の論文 [SV1] であるが，元来は Lipman の論文 [Li] に出自があると考えられる。彼等は必ずしも半局所環ではない Noether 環に対し安定環を定義しているが，本稿では局所安定環に主要な関心があるため，上記のような半局所環を安定環と呼ぶことにしたい。

安定環の極大イデアルによる局所化は安定環である。半局所環が安定環であるための必要十分条件は，Jacobson 根基に関する完備化が安定環であることである。安定環の準同型像が定義 1.1 の条件 (2) を満たすなら，必ず安定環である。安定環の有限双有理拡大は安定環となる。

課題は次の問題である。

**問 1.2. 局所安定環の構造を定めよ。**

本稿の主結果，即ちこの問題を考察して得られた結果は，次節で述べる。その前に，何故このような局所環と課題に興味を持ったかという理由を説明しておきたい。Noether 環 $A$ の正則イデアル $I$ に対し

$$\widetilde{I} = \bigcup_{n \geq 0} (I^{n+1} : I^n)$$

と定め，イデアル $I$ の Ratliff-Rush 閉包と呼ぶ。イデアル $I$ の Ratliff-Rush 閉包 $\widetilde{I}$ は次の性質を持つ。即ち，$J$ を環 $A$ のイデアルであって $I \subseteq J$ なるものとすれば

$$
\begin{aligned}
J \subseteq \widetilde{I} \;&\Leftrightarrow\; \text{ある整数 } n > 0 \text{ に対し等式 } I^n = J^n \text{が成り立つ}\\
&\Leftrightarrow\; \text{十分大なる任意の整数 } n \text{ に対し等式 } I^n = J^n \text{が成り立つ}
\end{aligned}
$$

従って，例えば $(A, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環であって $\operatorname{depth} A > 0$ なるとき，$\mathfrak{m}$-準素イデアル $I$ に対し，$\widetilde{I}$ は $I$ を含むような環 $A$ の $\mathfrak{m}$-準素イデアルの中で，イデアル $I$ と同じ Hilbert 多項式をもつ最大のイデアルである。

この記号の下に最近，下田保博君が次の主張を証明した。

**命題 1.3 (下田保博，2003 年).** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とする。$\operatorname{depth} A > 0$ であって $\sharp(A/\mathfrak{m}) = \infty$ なるものと仮定せよ。このとき次の条件は互いに同値である。

(1) 任意のイデアル $I \in \mathcal{F}$ に対し，等式 $I = \widetilde{I}$ が成り立つ。

(2) 任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル $I$ に対し，等式 $I = \widetilde{I}$ が成り立つ。

(3) (i) 環 $A$ は Cohen − Macaulay であって，(ii) 環 $A$ のいかなる $\mathfrak{m}$-準素イデアル $I$ に対しても，イデアル $I$ の極小 reduction $Q$ の中に等式 $I^2 = QI$ を満たすものが存在する。

(4) (i) $\dim A = 1$ であって，(ii) 環 $A$ のいかなる $\mathfrak{m}$-準素イデアル $I$ に対しても，ある元 $a \in I$ が存在して等式 $I^2 = aI$ が成り立つ。即ち環 $A$ は安定局所環である。

命題 1.3 の証明は第 4 節で述べる。下田君はこの結果に満足していた様子であるが，私には彼のこの結果は依然として特徴付けに過ぎず，命題 1.3 の条件 (4) を満たす局所環は非常に特殊なものであって多くは存在しないはずであり，何らかの構造定理があって然るべきであると思え，考察を開始したというのが経緯である。問題 1.2 の解答が得られたあとで，早坂太君が Sally-Vasconcelos の論文 [SV1]，[SV2] を見出し，安定環の概念に出会い，証明は大幅に簡略化された。その分面白味が減ったきらいがあるが，本稿では簡略化された方の証明を紹介したいと思う。

## 2 主結果

本稿の主結果を述べる前に，局所安定環の例を述べよう。次の結果は Sally-Vasconcelos [SV1] による。

**命題 2.1 ([SV1]).** $(A, \mathfrak{m})$ は次元 1 の Cohen-Macaulay 局所環とせよ。$\mathrm{e}(A) \leq 2$ なら，環 $A$ は安定である。

但し，$\mathrm{e}(A)$ は，環 $A$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する重複度 $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(A)$ を表す。

**証明.** $\mathrm{e}(A) \leq 2$ であるから，環 $A$ のいかなるイデアルも 2 元で生成される。$I$ を環 $A$ の任意のイデアルとし，$I = (a, b)$ と書くと，$I^2 = (a^2, ab, b^2)$ であって，イデアル $I^2$ も多寡だか 2 元で生成される。従って，イデアル $I^2$ を生成するには，元 $a^2, ab, b^2$ のうち少なくとも 1 つが不要となる。$I^2 = (a^2, ab)$ なら $I^2 = aI$ である。同様に $I^2 = (ab, b^2)$ なら $I^2 = bI$ となる。$I^2 \neq aI$ であって $I^2 \neq bI$ であると仮定せよ。すると $I^2 = (a^2, b^2)$ であって $ab \in (a^2, b^2)$ となる。$ab = a^2x + b^2y$ $(x,\ y \in A)$ と表し，$a_1 = a - b$ とおくと，$a = a_1 + b$ であるから

$$\begin{aligned} ab = a_1b + b^2 &= (a_1 + b)^2x + b^2y \\ &= a_1^2x + 2a_1bx + b^2(x + y). \end{aligned}$$

故に $b^2(1 - (x + y)) \in (a_1^2, a_1b)$ である。しかるに，$x, y \in \mathfrak{m}$ であるから，$b^2 \in (a_1^2, a_1b)$ となり，$I = (a, b) = (a_1, b)$ であるから，$I^2 = a_1I$ が得られる。即ち，$(a)$ か $(b)$ か又は $(a - b)$ がイデアル $I$ の reduction であって，$I^2$ が表現されることがわかる。 □

安定局所環の重複度は必ずしも 2 以下とは限らない。

**命題 2.2.** $(A, \mathfrak{m})$ は次元 1 の Cohen-Macaulay 局所環とせよ。$\mathrm{Min}\, A = \{\mathfrak{p}\}$，$\mathfrak{p} \neq (0)$，$\mathfrak{p}^2 = (0)$ であってかつ環 $A/\mathfrak{p}$ が離散的付値環なら，環 $A$ は安定である。

**証明.** $I$ を環 $A$ の任意のイデアルとせよ。環 $A/\mathfrak{p}$ のイデアル $(I + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}$ を見るに，$A/\mathfrak{p}$ は離散的付値環であるから，ある元 $a \in I$ を選んで等式 $(I + \mathfrak{p})/\mathfrak{p} = (\overline{a})$ が成り立つようにできる。但し $\overline{*}$ は環 $A/\mathfrak{p}$ 内での像を表す。故に $I + \mathfrak{p} = (a) + \mathfrak{p}$ であって $I = (a) + (I \cap \mathfrak{p})$ であり，従って $I^2 = aI + (I \cap \mathfrak{p})^2$ となるが，$\mathfrak{p}^2 = (0)$ であるので等式 $I^2 = aI$ が得られ，環 $A$ が安定局所環であることがわかる。 □

$R = k[[t]]$ を体 $k$ 上 1 変数の巾級数環とし，$M = R^{(n)}$ $(n \geq 0)$ とおき，イデアル化 $A = R \ltimes M$ を考えると，命題 2.2 により，環 A は安定局所環であって $\mathrm{e}(A) = n + 1$ を持つ。小駒哲司君が示したように，このような局所環は必ず適当な Noether 局所整域 $R$ の完備化である (cf. [L])。Noether 局所環 $R$ が安定であるための必要十分条件は，その極大イデアルに関する完備化 $\widehat{R}$ が安定であることである。故に次の主張が従う。

**系 2.3.** 任意の整数 $e \geq 1$ に対し，$\mathrm{e}(R) = e$ を持つ局所安定整域 $R$ が存在する。

主結果を述べる準備が整った。本稿の主結果は下記の定理であって，$\mathrm{e}(A) \geq 3$ であって環 $A$ が完備局所環であれば，命題 2.2 は逆も正しいことを主張するものである。

**定理 2.4.** $(A, \mathfrak{m})$ は安定局所環とせよ。$\mathrm{e}(A) \geq 3$ ならば，$\mathrm{Min}\, \widehat{A} = \{\mathfrak{p}\}$，$\mathfrak{p} \neq (0)$，$\mathfrak{p}^2 = (0)$ であって，かつ環 $\widehat{A}/\mathfrak{p}$ は離散的付値環である。

但し，$\widehat{A}$ は，環 $A$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する完備化を表す。従って，環 $A$ が体を含むなら，$\mathrm{e}(A) \geq 3$ の完備安定局所環 $A$ は，上に述べたイデアル化 $A = R \ltimes R^{(n)}$ $(n = \mathrm{e}(A) - 1)$ の如きものしか存在しない。

## 3　定理 2.4 の証明のための鍵

定理 2.4 の証明の概略は第 4 節で与える。証明の鍵は Sally-Vasconcelos [SV2] の次の結果である。[SV2] では,「環 $A$ が被約であってかつ全商環 $\mathrm{Q}(A)$ の中で考えた環 $A$ の整閉包が $A$-加群として有限生成である」という仮定の下に, (2)⇒(1) が示されている。

**定理 3.1 ([SV2]).** $(A, \mathfrak{m})$ は次元 1 の Cohen-Macaulay 局所環とせよ。次の 2 条件は互いに同値である。

(1) $\mathrm{e}(A) \leq 2$ である。

(2) (i) 環 $A$ は安定であって, (ii) $\widehat{A}$ の全商環 $\mathrm{Q}(\widehat{A})$ は Gorenstein 環である。

**証明.** $\mathrm{e}(A) \leq 2$ なら, 命題 2.1 より環 $A$ は安定であって, Gorenstein 環である。(2)⇒(1) が成り立つことを示そう。一般に, $I \in \mathcal{F}$ とすれば, $I^2 = aI$ を満たす元 $a \in I$ が存在する。勿論, 元 $a$ は環 $A$ の非零因子である。環 $A$ の全商環 $\mathrm{Q}(A)$ の中で, 集合 $\frac{I}{a} = \{\frac{i}{a} \mid i \in I\}$ を考える。$I^2 = aI$ であるから, 集合 $\frac{I}{a}$ は環 $\mathrm{Q}(A)$ の部分環である。他方で, $I : I = \{x \in \mathrm{Q}(A) \mid xI \subseteq I\}$ とおけば, $I : I$ も環 $\mathrm{Q}(A)$ の部分環であって, $I \in \mathcal{F}$ であるから, $A$-代数として $I : I \cong \mathrm{End}_A I$ となる。$B = \frac{I}{a}$ とおくと, $I = aB$ であるから集合 $I$ は環 $B$ のイデアルでもあり, 包含関係と $A$-代数の同型

$$A \subseteq B \subseteq I : I \subseteq \mathrm{Q}(A), \quad I : I \cong \mathrm{End}_A I$$

が得られる。今, イデアル $I$ は $B$-加群として一元 $a$ で生成されるので, $I$ を自然に $(I : I)$-加群とみても元 $a$ で生成される。元 $a$ は環 $\mathrm{Q}(A)$ の単元であるから, $(I : I)$-加群として $I \cong I : I$ である。故に, $A$-加群としても $I \cong I : I$ であって, $A$-加群の同型

$$I \cong \mathrm{End}_A I$$

が従う。

以上は安定環 $A$ とその正則イデアル $I$ についての一般論である。もしも全商環 $\mathrm{Q}(\widehat{A})$ が Gorenstein 環であれば, 局所環 $A$ は正準加群 $\mathrm{K}_A$ を持ち, $\mathrm{K}_A$ は環 $A$ にイデアルとして含まれる (cf. [HK])。即ち, $I = \mathrm{K}_A$ となるような環 $A$ のイデアル $I$ が存在する。$\mathrm{End}_A \mathrm{K}_A \cong A$ であるから, $\mathrm{Ann}_A \mathrm{K}_A = (0)$ であり, イデアル $I = \mathrm{K}_A$ は正則である。上で議論したイデアル $I$ としてこの正準イデアル $I = \mathrm{K}_A$ を取れば, $A$-加群として $\mathrm{K}_A \cong \mathrm{End}_A \mathrm{K}_A \cong A$ となり, 環 $A$ が Gorenstein であることが従う。環 $A$ は安定であるから, ある元 $a \in \mathfrak{m}$ があって等式 $\mathfrak{m}^2 = a\mathfrak{m}$ が成り立つ。上記の如く環 $A$ は Gorenstein であるから, 極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する重複度 $\mathrm{e}(A)$ の上からの評価

$$\mathrm{e}(A) = \ell_A(A/(a)) = \ell_A(A/\mathfrak{m}) + \ell_A(\mathfrak{m}/(a)) \leq 2$$

が得られ, $\mathrm{e}(A) \leq 2$ を得る。但し $\ell_A(*)$ は組成列の長さを表す。 $\square$

## 4 定理2.4の証明

定理2.4の証明を与えよう。$(A, \mathfrak{m})$ は完備安定局所環と仮定する。定理2.4の証明は次の3つの部分に分割される。

**(1)** $\sharp \operatorname{Ass} A \leq 2$ である。

**(2)** $\sharp \operatorname{Ass} A = 2$ ならば，環 $A$ は被約である。故に，定理3.1より，$\mathrm{e}(A) = 2$ であることを得る。また，重複度公式

$$\mathrm{e}(A) = \Sigma_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A} \ell_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) \mathrm{e}(A/\mathfrak{p})$$

より，各 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A$ に対し環 $A/\mathfrak{p}$ は離散的付値環であることが従う。

**(3)** $\sharp \operatorname{Ass} A = 1$ と仮定し $\operatorname{Ass} A = \{\mathfrak{p}\}$ とせよ。このとき，もしも $\mathfrak{p} \neq (0)$ ならば，$\mathfrak{p}^2 = (0)$ であってかつ環 $A/\mathfrak{p}$ は離散付値環である。

以下この3段階に従って定理2.4の証明を行う。

**定理2.4の証明.** **(1)** $\sharp \operatorname{Ass} A \geq 3$ と仮定し，$\operatorname{Ass} A$ の異なる3元 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ をとって $B = A/[\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_3]$ と定める。すると，環 $B$ は被約安定であるので，定理3.1より $\mathrm{e}(B) \leq 2$ であることを得る。重複度公式

$$\mathrm{e}(B) = \Sigma_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} B} \ell_{B_\mathfrak{p}}(B_\mathfrak{p}) \mathrm{e}(B/\mathfrak{p})$$

は，このことが不可能であることを示す。

**(2)** $\sharp \operatorname{Ass} A = 2$ と仮定し，$\operatorname{Ass} A = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$ とせよ。環 $A$ は Cohen – Macaulay であるから，環 $A$ が被約であることを示すには，局所環 $A_{\mathfrak{p}_1}$ と $A_{\mathfrak{p}_2}$ が体であることを示せば十分である。環 $A_{\mathfrak{p}_1}$ ば体でないと仮定し，矛盾を導く。剰余類環 $A/[\mathfrak{p}_1^{(2)} \cap \mathfrak{p}_2]$ を通すことによって，環 $A_{\mathfrak{p}_2}$ は体であり，$\mathfrak{p}_1^2 A_{\mathfrak{p}_1} = (0)$ ではあるが，環 $A_{\mathfrak{p}_1}$ が体ではないような反例を得る。そのような反例の中から，長さ $\ell_{A_{\mathfrak{p}_1}}(A_{\mathfrak{p}_1})$ $(\geq 2)$ が最小のものを選ぶことにしよう。

さて，$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ とおき，$a \in \mathfrak{m}$ を等式 $\mathfrak{m}^2 = a\mathfrak{m}$ が成り立つように取る。すると，環 $A/\mathfrak{a}$ は被約安定であるから，定理3.1により $\mathrm{e}(A/\mathfrak{a}) = 2$ である。故に，重複度公式より，環 $A/\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2)$ は離散的付値環であることが従う。$\mathrm{e}(A/\mathfrak{a}) = 2$ であるから，$\mathrm{v}(A/\mathfrak{a}) = 2$ でもある。但し $\mathrm{v}(A/\mathfrak{a})$ は局所環 $A/\mathfrak{a}$ の埋め込み次元を表す。元 $a$ は $A/\mathfrak{a}$-非零因子であるので，$[\mathfrak{a} + (a)]/(a) \cong \mathfrak{a}/a\mathfrak{a}$ である。故に，$A$-加群の完全列

$$0 \to \mathfrak{a}/a\mathfrak{a} \to \mathfrak{m}/(a) \to \mathfrak{m}/[(a) + \mathfrak{a}] \to 0$$

を得る。加群 $\mathfrak{m}/(a)$ は体 $A/\mathfrak{m}$ 上のベクトル空間であるから，$\mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{a}/a\mathfrak{a}) = (0)$ である。故に，$\mathfrak{m}\mathfrak{a} = a\mathfrak{a}$ であることが従う。$v = \mathrm{v}(A)$ とおけば，上記完全列から等式 $\mu_A(\mathfrak{a}) = \ell_A(\mathfrak{a}/a\mathfrak{a}) = (v-1) - 1 = v - 2$ が従う。但し $\mu_A(*)$ は生成元の個数を表す。$\ell = v - 2$

とおけ。すると，等式 $\mathfrak{m}^2 = a\mathfrak{m}$ より $v = \mathrm{e}(A)$ であって，一方で環 $A/\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2)$ が離散的付値環であるので，重複度公式により $v = \ell_{A_{\mathfrak{p}_1}}(A_{\mathfrak{p}_1}) + 1 = \ell + 2$ であって，故に $\ell_{A_{\mathfrak{p}_1}}(A_{\mathfrak{p}_1}) = \ell + 1$ であることが従う。さて，元 $x_1, x_2, \cdots, x_\ell \in \mathfrak{a}$ を等式

$$\mathfrak{a} = (x_1, x_2, \cdots, x_\ell)$$

が成り立つように取る。すると

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}_1} &= (x_1, x_2, \cdots, x_\ell)A_{\mathfrak{p}_1} \\ &= \mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{p}_1} \end{aligned}$$

である。一方で，$\mathfrak{p}_1^2 A_{\mathfrak{p}_1} = (0)$ であるから，等式 $\ell + 1 = \ell_{A_{\mathfrak{p}_1}}(A_{\mathfrak{p}_1}) = \ell_{A_{\mathfrak{p}_1}}(\mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{p}_1}) + 1 = \mu_{A_{\mathfrak{p}_1}}(\mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{p}_1}) + 1$ が成り立つ。故に，$\mu_{A_{\mathfrak{p}_1}}(\mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{p}_1}) = \ell$ である。即ち，元 $x_1, x_2, \cdots, x_\ell$ の像は環 $A_{\mathfrak{p}_1}$ 内でその極大イデアル $\mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{p}_1}$ の極小生成系をなす。そこで，

$$I = (x_1, x_2, \cdots, x_{\ell-1})A_{\mathfrak{p}_1} \cap A$$

とおき，剰余類環 $B = A/[I \cap \mathfrak{p}_2]$ を考察するに，環 $B$ は次元 1 の Cohen-Macaulay 局所環であって $\sharp \operatorname{Ass} B = 2$ を持ち，しかも $A_{\mathfrak{p}_2} = B_{\mathfrak{p}_2}$ は体であり，環

$$B_{\mathfrak{p}_1} = A_{\mathfrak{p}_1}/(x_1, x_2, \cdots, x_{\ell-1})A_{\mathfrak{p}_1}$$

は体ではなく，$(\mathfrak{p}_1 B_{\mathfrak{p}_1})^2 = (0)$ が成り立つ。環 $B$ は安定であるから，反例 $A$ に於ける長さ $\ell_{A_{\mathfrak{p}_1}}(A_{\mathfrak{p}_1})$ の最小性により，$(x_1, x_2, \cdots, x_{\ell-1})A_{\mathfrak{p}_1} = (0)$，すなわち $\ell = 1$ でなければならない。故に，$\mu_{A_{\mathfrak{p}_1}}(\mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{p}_1}) = \ell_{A_{\mathfrak{p}_1}}(\mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{p}_1}) = 1$ であるから，局所環 $A_{\mathfrak{p}_1}$ は Gorenstein であることが従う。即ち，環 $A$ の全商環 $\mathrm{Q}(A)$ は Gorenstein 環であり，定理 3.1 より $\mathrm{e}(A) \leq 2$ であり，重複度公式によって環 $A$ は被約でなければならないが，これは不可能である。

**(3)** $\operatorname{Ass} A = \{\mathfrak{p}\}$ とし，$\mathfrak{p} \neq (0)$ と仮定する。元 $a \in \mathfrak{m}$ を環 $A$ の任意の巴系とせよ。$\mathfrak{p} = \sqrt{(0)}$ であるから，イデアル $(a)$ は $I = (a) + \mathfrak{p}$ の reduction である。$I \in \mathcal{F}$ であるから，$I^2 = bI$ を満たす元 $b \in I$ が存在する。環 $A$ は次元 1 の Cohen-Macaulay 局所環であるので（あるいは，随伴次数環 $\mathrm{G}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$ は Cohen-Macaulay 環であるから），等式 $I^2 = aI$ がイデアル $I$ のこの reduction $(a)$ に対しても成り立つ。特に $\mathfrak{p}^2 \subseteq (a)$ である。元 $a$ は環 $A$ の任意の巴系であったので，いかなる整数 $\ell \geq 1$ に対しても，$\mathfrak{p}^2 \subseteq (a^\ell)$ である。故に $\mathfrak{p}^2 = (0)$ となる。

次に，環 $A/\mathfrak{p}$ は離散的付値環であることを示そう。$B = A/\mathfrak{p}$ とおく。元 $a \in \mathfrak{m}$ を等式 $\mathfrak{m}^2 = a\mathfrak{m}$ が成り立つようにとり，$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/\mathfrak{p}$，$b = \overline{a}$ とおく。但し $\overline{*}$ は環 $B$ 内での像を表す。環 $B$ は離散付値環ではないと仮定し矛盾を導くことを考える。環 $B$ は安定局所整域である。故に，定理 3.1 より，等式 $\mathrm{v}(B) = \mathrm{e}(B) = 2$ が従う。さて，$\varphi : \mathrm{Q}(A) \to \mathrm{Q}(B)$ を，等式 $\varphi(\frac{x}{c}) = \frac{\overline{x}}{\overline{c}}$ (但し，$c, x \in A$ であって，元 $c$ は環 $A$ の非零因子である) によって定まる環の射とすれば，環 $\frac{\mathfrak{n}}{b}$ は環 $\frac{\mathfrak{m}}{a}$ の $\varphi$ による像であって，導来された射 $\frac{\mathfrak{m}}{a} \to \frac{\mathfrak{n}}{b}$ の核は $\frac{\mathfrak{p}}{a} = \{\frac{x}{a} \mid x \in \mathfrak{p}\}$ である。即ち次の可換図形が得られる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & Q(A) & \xrightarrow{\varphi} & Q(B) & & \\
 & & & & \bigcup & & \bigcup & & \\
0 & \to & \dfrac{\mathfrak{p}}{a} & \to & \dfrac{\mathfrak{m}}{a} & \to & \dfrac{\mathfrak{n}}{b} & \to & 0 \\
 & & \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \\
0 & \to & \mathfrak{p} & \to & A & \to & B & \to & 0.
\end{array}$$

環 $\frac{\mathfrak{m}}{a}$ は有限生成 $A$-加群であるから，環 $\frac{\mathfrak{m}}{a}$ はNoether環である。$(\frac{\mathfrak{p}}{a})^2 = (0)$ であって剰余類環 $\frac{\mathfrak{n}}{b} = \frac{\mathfrak{m}}{a}/\frac{\mathfrak{p}}{a}$ が局所環であるので，環 $\frac{\mathfrak{m}}{a}$ は局所環であり，Min $\frac{\mathfrak{m}}{a} = \{\frac{\mathfrak{p}}{a}\}$ であることを得る。環 $\frac{\mathfrak{m}}{a}$ が安定であることは容易に確認できる。即ち，環 $\frac{\mathfrak{m}}{a}$ は完備安定局所環であって，環 $A$ と全く同じ仮定「Ass $\frac{\mathfrak{m}}{a} = \{\frac{\mathfrak{p}}{a}\}$ であって，$\frac{\mathfrak{p}}{a} \neq (0)$ である」を満たす。今，環 $\frac{\mathfrak{n}}{b}$ は次元1の完備局所整域 $B$ の極大イデアル $\mathfrak{n}$ を中心とするblowing-upであって，その環構造は環 $B$ に比してよくなっている(実際，$V$ によって環 $B$ のその商体 $Q(B)$ 内の整閉包を表せば，局所環の有限拡大 $V/B$ に剰余体の拡大がなければ，環 $B$ のvalue semi-groupが，拡大 $V/B$ に剰余体の拡大がある場合には，conductor $B : V$ の様相がよくなる)ことに注目すれば，上記操作を何回か繰り返しながら，環 $A$ を $\frac{\mathfrak{m}}{a}$ で置き換えることによって，我々の反例 $A$ を特に等式 $\frac{\mathfrak{n}}{b} = V$ が成り立つように選ぶことができる。

一方で，既に示したように $\mathfrak{p}^2 = (0)$ であったから，イデアル $\mathfrak{p}$ は捩れの無い $B$-加群の構造を持つ。勿論 $[\mathfrak{p} + (a)]/(a) \cong \mathfrak{p}/a\mathfrak{p}$ であるから，$A$-加群の完全列

$$0 \to \mathfrak{p}/a\mathfrak{p} \to \mathfrak{m}/(a) \to \mathfrak{m}/[(a) + \mathfrak{p}] \to 0$$

が得られる。加群 $\mathfrak{m}/(a)$ は体 $A/\mathfrak{m}$ 上のベクトル空間であるから，$\mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{p}/a\mathfrak{p}) = (0)$ であることが従い，等式 $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = a\mathfrak{a}$ と $\mu_A(\mathfrak{p}) = \mu_A(\mathfrak{m}) - 2$ が得られる。$\mathfrak{m}\mathfrak{p} = a\mathfrak{p}$ であるから，$\mathfrak{n}\mathfrak{p} = b\mathfrak{p}$ が成り立ち，イデアル $\mathfrak{p}$ は離散的付値環 $V = \frac{\mathfrak{n}}{b}$ 上の加群であることが従う。(作用の定義は，$x \in \mathfrak{n}$，$f \in \mathfrak{p}$ としたとき，$xf = bg$ となる $g \in \mathfrak{p}$ が一意的に定まるので，この $g \in \mathfrak{p}$ を用いて，$\frac{x}{b} \cdot f = g$ と定める。) $V$ は離散的付値環であり $V$-加群 $\mathfrak{p}$ は捩れがないので，$\mathfrak{p}$ は有限生成自由 $V$-加群である。即ち $\mathfrak{p} \cong V^{(r)}$ $(r = \mathrm{rank}_V \mathfrak{p})$ である。一方で，$V = \frac{\mathfrak{n}}{b}$ であるから，$\mathfrak{n} = bV \cong V$ である。以上によって，$\mathfrak{p} = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_r$ (但し，$I_i$ は環 $A$ のイデアルであって，$A$-加群として $I_i \cong \mathfrak{n}$ である)と表すことを得る。従って，完全列

$$0 \to \mathfrak{p}/[I_2 \oplus I_3 \oplus \cdots \oplus I_r] \to A/[I_2 \oplus I_3 \oplus \cdots \oplus I_r] \to B \to 0$$

を通して，環 $A$ の代りに環 $A/[I_2 \oplus I_3 \oplus \cdots \oplus I_r]$ を考察し，イデアル $\mathfrak{p}$ の代りにイデアル $\mathfrak{p}/[I_2 \oplus I_3 \oplus \cdots \oplus I_r] = I_1$ を考察することによって，$r = 1$ の反例を得る。故に $\mu_A(\mathfrak{p}) = 2$ であって $\mu_A(\mathfrak{m}) = 4$ である。さて，$\mathfrak{n} = (b, \overline{c})$ $(c \in \mathfrak{m})$ と表し，$A$-加群の同型写像 $f : \mathfrak{p} \to \mathfrak{n}$ を任意に固定しよう。元 $\alpha, \beta \in \mathfrak{p}$ を $f(\alpha) = b = \overline{a}$，$f(\beta) = \overline{c}$ が成り立つように取れば，$\mathfrak{p} = (\alpha, \beta)$ である。故に，$\mathfrak{m} = (\alpha, \beta) + (a, c)$ であり，元 $\alpha, \beta, a, c$ は極大

イデアル $\mathfrak{m}$ の極小生成系をなすことが従う。ここで $I=(a,c,\alpha)$ とおく。すると，イデアル $(a)$ は極大イデアル $\mathfrak{m}$ の reduction であるので，イデアル $I$ に対しても reduction であり，故に等式 $I^2=aI$ が従う。特に，$c\alpha\in aI$ が成り立つ。しかしながら，等式

$$f(c\alpha)=c\overline{a}=\overline{ca},$$
$$f(a\beta)=a\overline{c}=\overline{ac}$$

（ここで，$\overline{*}$ は環 $B$ 内での像を表す）より，等式 $c\alpha=a\beta$ が得られるので，$c\alpha\in aI$ 即ち $a\beta\in aI$ となり，元 $a$ は $A$-非零因子であることから $\beta\in I$ が従う。これは，元 $\alpha,\beta,a,c$ が極大イデアル $\mathfrak{m}$ の極小生成系であることに反する。以上により定理 2.4 の証明が完成した。 □

以上の議論を下田保博君の結果と併せて，本稿の主張としたい。

**定理 4.1 ([GHS]).** $(A,\mathfrak{m})$ は Noether 局所環であって，$\operatorname{depth}A>0$，$\sharp(A/\mathfrak{m})=\infty$ なるものとせよ。このとき次の 5 条件は互いに同値である。

(1) 任意のイデアル $I\in\mathcal{F}$ に対し，等式 $I=\widetilde{I}$ が成り立つ。

(2) 任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル $I$ に対し，等式 $I=\widetilde{I}$ が成り立つ。

(3) (i) 環 $A$ は Cohen – Macaulay であって，(ii) 環 $A$ のいかなる $\mathfrak{m}$-準素イデアル $I$ に対しても，イデアル $I$ の極小 reduction $Q$ の中に等式 $I^2=QI$ を満たすものが存在する。

(4) (i) $\dim A=1$ であって，(ii) 環 $A$ のいかなる $\mathfrak{m}$-準素イデアル $I$ に対しても，ある元 $a\in I$ が存在して等式 $I^2=aI$ が成り立つ。即ち環 $A$ は安定局所環である。

(5) $\dim A=1$ であって，(i) $\mathrm{e}(A)\le 2$ であるか又は，(ii) $\mathrm{e}(A)\ge 3$ であって，$\operatorname{Min}\widehat{A}=\{\mathfrak{p}\}$，$\mathfrak{p}\ne(0)$，$\mathfrak{p}^2=(0)$，かつ $\widehat{A}/\mathfrak{p}$ は離散的付値環である。

このとき，環 $A$ が完備であれば，$A$ の任意のイデアル $I$ に対し，ある元 $a\in I$ が存在して等式 $I^2=aI$ が成り立つ。

**証明.** (1) $\Rightarrow$ (2) と (4) $\Rightarrow$ (3) は自明であって，(4) $\Leftrightarrow$ (5) は既に済んでいる。

(2) $\Rightarrow$ (4) $d=\dim A\ge 2$ と仮定し，$a_1,a_2,\cdots,a_d$ を環 $A$ の巴系であって，とくに元 $a=a_1$ は非零因子であるように取ろう。$I=(\prod_{i=1}^d a_i^{n_i}\mid 0\le n_i\in\mathbb{Z}\ (1\le i\le d)$ であって $\sum_{i=1}^d n_i=2d$ であるが, $(n_1,n_2,\cdots,n_d)\ne(2,2,\cdots,2))$, $J=(a_1,a_2,\cdots,a_d)^{2d}$ とおく。すると $I\in\mathcal{F}$ であって，$J=I+(\prod_{i=1}^d a_i^2)$ となる。容易に確認できるように，等式 $I^2=J^2$ が成り立つ。故に，第 1 節序文に述べた Ratliff-Rush 閉包の基本性質により，$J\subseteq\widetilde{I}=I$ となり，等式 $I=J$ が成り立つことを得る。しかし局所環の巴系は解析的独立であって，元 $a_1,a_2,\cdots,a_d$ の $2d$ 次の単項式は全体としてイデアル $J=(a_1,a_2,\cdots,a_d)^{2d}$ の極小生成系をなすはずであるから，等式 $I=J$ は不可能である。故に $\dim A=1$ でな

ければならない。$I$ を環 $A$ の任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとし，元 $a \in I$ をイデアル $(a)$ が $I$ の reduction になるよう取ると，ある整数 $n \geq 1$ に対して等式 $I^{n+1} = aI^n$ が成り立つ。$(aI)^n I^2 = a^n I^{n+2} = a^n a I^{n+1} = (aI)^{n+1}$ であるから，定義により $I^2 \subseteq \widetilde{aI} = aI$ となって，環 $A$ は安定であることが従う。

(4) $\Rightarrow$ (1) $I \in \mathcal{F}$ とせよ。$I \neq A$ としてよいので $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ である。故に，$I^2 = aI$ となる元 $a \in I$ が存在する。$x \in \widetilde{I}$ を任意に取る。すると，ある整数 $n \geq 1$ に対し $x \in I^{n+1} : I^n$ が成り立つ。$xI^n \subseteq I^{n+1} = a^n I$ であるから，$xa^n \in a^n I$ であり，$x \in I$ が成り立ち，等式 $I = \widetilde{I}$ が得られる。

(3) $\Rightarrow$ (2) $I$ を環 $A$ の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。$d = \dim A$ とし，$Q = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ をイデアル $I$ の極小な reduction で等式 $I^2 = QI$ を満たすものとせよ。仮定により環 $A$ は Cohen − Macaulay であるから，等式

$$(a_1, a_2, \cdots, a_i) \cap I^\ell = (a_1, a_2, \cdots, a_i) I^{\ell-1}$$

が任意の整数 $1 \leq i \leq d$ と $\ell \in \mathbb{Z}$ に対し成り立つ。$x \in \widetilde{I}$ とし，整数 $n \gg 0$ を $xI^n \subseteq I^{n+1}$ が成り立つように取れば，$a_1^n x \in I^{n+1}$ である。$(a_1) \cap I^\ell = a_1 I^{\ell-1}$ が任意の $\ell \in \mathbb{Z}$ に対し成り立つので，容易に $x \in I$ が従う。故に $I = \widetilde{I}$ である。 □

# 参考文献


[L] C. Lech, *A method for constructing bad Noetherian local rings with multiplicity 2* Algebra, algebraic topology, and their interactions (Stockholm, 1983), Lecture Notes in Math. **1183** (1986), 241-247, Springer-Verlag, Berlin·Heidelberg·New York·Tokyo.

[Li] J. Lipman, *Stable ideals and Arf rings*, Amer. J. Math. **93** (1971), 649-685.

[GHS] S. Goto, Y. Shimoda, and F. Hayasaka, *Towards a theory of stable local rings*, Preprint 2003.

[HK] J. Herzog and E. Kunz (eds.), Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings, Lecture Notes in Math. **238** (1971), Springer-Verlag, Berlin·Heidelberg·New York·Tokyo.

[SV1] J. Sally and W. V. Vasconcelos, *Stable rings* J. Pure and Appl. Alg. **4** (1974), 319-336.

[SV2] J. Sally and W. V. Vasconcelos, *Stable rings and problem of Bass* Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 574-576.

# PRESTABLE IDEALS AND SAGBI BASES

大杉英史（立教大学理学部数学科）
日比孝之（大阪大学大学院情報科学研究科）

## Introduction

Let $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ denote the polynomial ring in $n$ variables over a field $K$ with each $\deg x_i = 1$ and let $I \subset R$ be an ideal which is generated by monomials $u_1, \ldots, u_m$ with $\deg u_1 = \cdots = \deg u_m$. The Rees algebra of $I$ is the subalgebra $\mathcal{R}(I) = K[x_1, \ldots, x_n, u_1 t, \ldots, u_m t]$ of $R[t]$. Let $A = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] = R[y_1, \ldots, y_m]$ denote the polynomial ring over $K$ and define the surjective homomorphism $\pi : A \to \mathcal{R}(I)$ by setting $\pi(x_i) = x_i$ and $\pi(y_j) = u_j t$. The toric ideal $J_{\mathcal{R}(I)}$ of $\mathcal{R}(I)$ is the kernel of $\pi$. Blum [1] proved that if $J_{\mathcal{R}(I)}$ is Koszul, then all powers of $I$ have linear resolutions. Thus in particular if $J_{\mathcal{R}(I)}$ has a quadratic Gröbner basis, then all powers of $I$ have linear resolutions. However, the existence of a quadratic Gröbner basis of $J_{\mathcal{R}(I)}$ is a rather strong condition which guarantees that all powers of $I$ have linear resolutions. In [8] a much weaker condition, called the $x$-condition, for $J_{\mathcal{R}(I)}$ is introduced and it is proved that if $J_{\mathcal{R}(I)}$ satisfies the $x$-condition, then all powers of $I$ have linear resolutions.

In the present paper, a new class of monomial ideals, the class of prestable ideals, which contains the stable ideals [4] is introduced. If $I$ is prestable, then $J_{\mathcal{R}(I)}$ satisfies the $x$-condition and all powers of $I$ have linear resolutions. See Corollary 1.5. We then discuss a class of prestable squarefree monomial ideals $I$ arising from finite pure posets (partially ordered sets) such that $J_{\mathcal{R}(I)}$ has a quadratic Gröbner basis. See Theorem 2.1 and Corollary 2.2. Finally, as one of the applications of such prestable ideals coming from finite pure posets, Sagbi bases of the algebras studied in [5] will be determined. See Theorem 3.2.

## 1. Prestable sets

Let $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ denote the polynomial ring in $n$ variables over a field $K$ with each $\deg x_i = 1$, and write $V_n^{(d)}$ for the set of all monomials of $R$ of degree $d$.

A nonempty subset $\mathcal{N} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset V_n^{(d)}$ is said to be a *prestable set* if $\mathcal{N}$ possesses the exchange property $(*)$ as follows:

$(*)$ For all $N = 1, 2, \ldots$ and for any two monomials $\prod_{j=1}^{N} u_{i_j}$ and $\prod_{\ell=1}^{N} u_{k_\ell}$ with $\prod_{j=1}^{N} u_{i_j} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ and $\prod_{\ell=1}^{N} u_{k_\ell} = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n}$ such that $a_1 = b_1, \ldots, a_{q-1} = b_{q-1}$ and $a_q < b_q$ for some $1 \leq q < n$, there exist $1 \leq j \leq N$ and $q < p \leq n$ such that $x_q(u_{i_j}/x_p) \in \mathcal{N}$.

One of the most fundamental classes of prestable sets is

1

**Example 1.1.** Recall that a set of monomials $\mathcal{N} \subset V_n^{(d)}$ is stable if, for all $u \in \mathcal{N}$ and for all $i < m(u)$, one has $x_i(u/x_{m(u)}) \in \mathcal{N}$. Here $m(u)$ is the largest $i$ for which $x_i$ divides $u$. A stable set $\mathcal{N}$ is prestable. In fact, if $\prod_{j=1}^{N} u_{i_j} = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ and $\prod_{\ell=1}^{N} u_{k_\ell} = x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_n^{b_n}$, with each $u_{i_j}, u_{k_\ell} \in \mathcal{N}$ such that $a_1 = b_1, \ldots, a_{q-1} = b_{q-1}$ and $a_q < b_q$, then there is $p > q$ with $a_p > b_p$. In particular $x_p$ divides some $u_{i_j}$. Since $m(u_{i_j}) \geq p > q$ and since $\mathcal{N}$ is stable, one has $x_q(u_{i_j}/x_{m(u_{i_j})}) \in \mathcal{N}$.

Let $I \subset R$ be an ideal generated by monomials of degree $d$ and $G(I)$ the minimal system of monomial generators of $I$, i.e., $G(I) = I \cap V_n^{(d)}$. We say that $I$ is prestable if $G(I) \subset V_n^{(d)}$ is a prestable set. The *Rees algebra* of $I$ is the semigroup ring

$$\mathcal{R}(I) = K[x_1, \ldots, x_n, \{ut\}_{u \in G(I)}] \quad (\subset R[t] = K[x_1, \ldots, x_n, t]).$$

Let $A = K[x_1, \ldots, x_n, \{y_u\}_{u\in G(I)}] = R[\{y_u\}_{u \in G(I)}]$ denote the polynomial ring over $K$ with each $\deg x_i = \deg y_u = 1$. The *toric ideal* of $\mathcal{R}(I)$ is the ideal $J_{\mathcal{R}(I)} \subset A$ which is the kernel of the surjective homomorphism $\pi : A \to \mathcal{R}(I)$ defined by setting $\pi(x_i) = x_i$ for each $1 \leq i \leq n$ and $\pi(y_u) = ut$ for each $u \in G(I)$.

Let $<^{(\sharp)}$ be an arbitrary monomial order on the polynomial ring $K[\{y_u\}_{u\in G(I)}]$ and $<_{lex}$ the lexicographic order on $R$ induced by $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. We then introduce the new monomial order $<_{lex}^{(\sharp)}$ on $A$ by setting $\mathbf{x^a y^b} <_{lex}^{(\sharp)} \mathbf{x^{a'} y^{b'}}$ if either (i) $\mathbf{x^a} <_{lex} \mathbf{x^{a'}}$ or (ii) $\mathbf{x^a} = \mathbf{x^{a'}}$ and $\mathbf{y^b} <^{(\sharp)} \mathbf{y^{b'}}$. Here each of $\mathbf{x^a}$ and $\mathbf{x^{a'}}$ is a monomial belonging to $R$ and each of $\mathbf{y^b}$ and $\mathbf{y^{b'}}$ is a monomial belonging to $K[\{y_u\}_{u\in G(I)}]$.

We now state the reason why we are intereted in prestable ideals. We refer the reader to, e.g., [3] for fundamental materials on Gröbner bases.

Since a prestable set satisfies the $\ell$-exchange property [7] for all monomial orders $<^{(\sharp)}$ on $K[\{y_u\}_{u\in G(I)}]$, Theorem 1.2 below is a special case of [7, Theorem 5.1].

**Theorem 1.2.** *Work with the same notation as above. Suppose that $I \subset R$ is a prestable ideal and $\mathcal{G}$ is a Gröbner basis of $J_{\mathcal{R}(I)} \cap K[\{y_u\}_{u\in G(I)}]$ with respect to $<^{(\sharp)}$. Then*

$$\mathcal{G} \cup \{x_i y_u - x_j y_v \,;\, u, v \in G(I), x_i u = x_j v\}$$

*is a Gröbner basis of $J_{\mathcal{R}(I)}$ with respect to $<_{lex}^{(\sharp)}$.*

The elimination property of the lexicographic order together with Theorem 1.2 guarantees that

**Corollary 1.3.** *Suppose that $I \subset R$ is a prestable ideal and $\mathcal{G}$ is a Gröbner basis of $J_{\mathcal{R}(I)} \cap K[\{y_u\}_{u\in G(I)}]$ with respect to $<^{(\sharp)}$. Then for each $1 \leq \ell \leq n$*

$$\mathcal{G} \cup \{\, x_i y_u - x_j y_v \,;\, u, v \in G(I),\ \ell \leq i, j \leq n,\ x_i u = x_j v \,\}$$

*is a Gröbner basis of*

$$J_{\mathcal{R}(I)} \cap K[x_\ell, x_{\ell+1}, \ldots, x_n, \{y_u\}_{u\in G(I)}]$$

*with respect to $<_{lex}^{(\sharp)}$ on $K[x_\ell, x_{\ell+1}, \ldots, x_n, \{y_u\}_{u\in G(I)}]$.*

**Corollary 1.4.** *Let $I \subset R$ be a prestable ideal and suppose that $J_{\mathcal{R}(I)} \cap K[\{y_u\}_{u\in G(I)}]$ possesses a quadratic Gröbner basis. Then the toric ideal $J_{\mathcal{R}(I)}$ has a quadratic Gröbner basis. Thus in particular the Rees algebra $\mathcal{R}(I)$ is Koszul.*

Conca and De Negri [2] discovered an example of a strongly stable ideal $I \subset R$ for which $J_{\mathcal{R}(I)} \cap K[\{y_u\}_{u \in G(I)}]$ possesses *no* quadratic Gröbner basis.

If $f \in A$ is a homogeneous polynomial, then its *$x$-degree* is the degree $\deg_x(f)$ of $f$ as a polynomial in the variables $x_1, \ldots, x_n$ with coefficients in $K[\{y_u\}_{u \in G(I)}]$. For example, if $f = x_1^2 x_2 y_1 y_2 - x_3^3 y_3 y_4$, then its $x$-degree is $\deg_x(f) = 3$. We say that $J_{\mathcal{R}(I)}$ satisfies the *$x$-condition* [8] if there exists a Gröbner basis $\mathcal{G}$ of $J_{\mathcal{R}(I)}$ such that $\deg_x(g) \leq 1$ for each $g \in \mathcal{G}$.

**Corollary 1.5.** *Let $I \subset R$ be a prestable ideal. Then all powers of $I$ have linear resolutions.*

*Proof.* If $I \subset R$ is a prestable ideal, then the toric ideal $J_{\mathcal{R}(I)}$ satisfies the $x$-condition. Thus [8, Corollary 1.2] says that all powers of $I$ have linear resolutions. □

## 2. Prestable ideals arising from pure posets

In the present section we are interested in finding a reasonable class of prestable ideals $I \subset R$ for which $J_{\mathcal{R}(I)} \cap K[\{y_u\}_{u \in G(I)}]$ has a quadratic Gröbner basis.

Let $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_d$ be a finite pure poset [11, p. 99] of rank $d-1$, where each $\Omega_i$ is the set of rank $i-1$ elements of $\Omega$. Let $\Omega_i = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_{p_i}^{(i)}\}$, and let $R = K[\{x_j^{(i)}\}_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq p_i}}]$ denote the polynomial ring over a field $K$ with each $\deg x_j^{(i)} = 1$. We will associate each maximal chain

$$C : x_{q_1}^{(1)} < x_{q_2}^{(2)} < \cdots < x_{q_d}^{(d)}$$

of $\Omega$ with the squarefree monomial

$$x_C = x_{q_1}^{(1)} x_{q_2}^{(2)} \cdots x_{q_d}^{(d)}$$

of $R$ of degree $d$. Let $\mathcal{M}(\Omega)$ denote the set of maximal chains of $\Omega$.

**Theorem 2.1.** *Work with the same notation as above. Suppose that $\Omega$ satisfies the condition that if $x_j^{(i)} > x_k^{(i-1)}$, then $x_{j'}^{(i)} > x_k^{(i-1)}$ for all $j'$ with $j' < j$ and $x_j^{(i)} > x_{k'}^{(i-1)}$ for all $k'$ with $k < k'$. Then $\{x_C \,;\, C \in \mathcal{M}(\Omega)\}$ is a prestable set.*

*Proof.* We work with the ordering

$$x_1^{(d)}, x_2^{(d)}, \cdots, x_{p_d}^{(d)}, x_1^{(d-1)}, \cdots, x_{p_{d-1}}^{(d-1)}, x_1^{(d-2)}, \cdots, x_{p_2}^{(2)}, x_1^{(1)}, \cdots, x_{p_1}^{(1)}.$$

Let $\prod_{\lambda=1}^N x_{C_{p_\lambda}} = \prod_{i,j} x_j^{(i) a_j^{(i)}}$ and $\prod_{\mu=1}^N x_{C_{q_\mu}} = \prod_{i,j} x_j^{(i) b_j^{(i)}}$. Suppose that $a_{j_0}^{(i_0)} < b_{j_0}^{(i_0)}$ and $a_j^{(i)} = b_j^{(i)}$ for all $i$ and $j$ with either (i) $i > i_0$ or (ii) $i = i_0$ and $j < j_0$. Let $A_j = \{p_\lambda \,;\, x_j^{(i_0)} \in C_{p_\lambda}\}$ and $B_j = \{q_\mu \,;\, x_j^{(i_0)} \in C_{q_\mu}\}$. Then $\sum_{j=1}^{j_0} |A_j| < \sum_{j=1}^{j_0} |B_j|$, where $|A_j|$ stands for the cardinality of the finite set $A_j$. It then follows that there exist $C_{p_\lambda}$ and $C_{q_\mu}$ such that $C_{p_\lambda} \cap \Omega_{i_0+1} = C_{q_\mu} \cap \Omega_{i_0+1}$, $C_{p_\lambda} \cap \Omega_{i_0} \subset \{x_{j_0+1}^{(i_0)}, \cdots, x_{p_{i_0}}^{(i_0)}\}$ and $C_{q_\mu} \cap \Omega_{i_0} \subset \{x_1^{(i_0)}, \ldots, x_{j_0}^{(i_0)}\}$. Let $C_{p_\lambda} \cap \Omega_{i_0+1} = \{x_r^{(i_0+1)}\}$, $C_{p_\lambda} \cap \Omega_{i_0} = \{x_{j'}^{(i_0)}\}$ and $C_{q_\mu} \cap \Omega_{i_0} = \{x_{j''}^{(i_0)}\}$. Then $j'' \leq j_0 < j'$. Since $x_{j''}^{(i_0)} < x_r^{(i_0+1)}$ in $\Omega$, one has $x_{j_0}^{(i_0)} < x_r^{(i_0+1)}$. Let $C_{p_\lambda} \cap \Omega_{i_0-1} = \{x_k^{(i_0-1)}\}$. Since $x_k^{(i_0-1)} < x_{j'}^{(i_0)}$ in $\Omega$, one has

$x_k^{(i_0-1)} < x_{j_0}^{(i_0)}$. Hence $x_k^{(i_0-1)} < x_{j_0}^{(i_0)} < x_r^{(i_0+1)}$. Thus $(C_{p_\lambda} \setminus \{x_{j'}^{(i_0)}\}) \cup \{x_{j_0}^{(i_0)}\} \in \mathcal{M}(\Omega)$, as required. □

**Corollary 2.2.** *Suppose that $\Omega$ satisfies the same condition as in Theorem 2.1 and let $I \subset R$ denote the prestable ideal with $G(I) = \{x_C\,;\, C \in \mathcal{M}(\Omega)\}$. Then all powers of $I$ have linear resolutions. Moreover, the toric ideal $J_{\mathcal{R}(I)}$ of the Rees algebra $\mathcal{R}(I)$ possesses a squarefree and quadratic Gröbner basis. (A Gröbner basis is called squarefree if the initial monomial of each polynomial belonging to the Gröbner basis is squarefree.)*

**Example 2.3.** Let $R = K[\{x_j^{(i)}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}]$, where $n \leq m$, denote the polynomial ring in $nm$ variables and $\mathcal{N}$ the set of all monomials $x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(2)} \cdots x_{j_n}^{(n)}$ with $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq m$. Let $I \subset R$ be the ideal with $G(I) = \mathcal{N}$. Then all powers of $I$ have linear resolutions and the toric ideal $J_{\mathcal{R}(I)}$ of the Rees algebra $\mathcal{R}(I)$ possesses a squarefree and quadratic Gröbner basis. It follows from Corollary 1.3 that, for each $1 \leq \ell \leq n$, the ideal $J_{\mathcal{R}(I)} \cap K[\{x_j^{(i)}\}_{\substack{\ell \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \{y_u\}_{u \in G(I)}]$ (as well as the ideal $J_{\mathcal{R}(I)} \cap K[\{x_j^{(i)}\}_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq j \leq m}}, \{y_u\}_{u \in G(I)}]$) possesses a squarefree and quadratic Gröbner basis.

## 3. Computations of Sagbi bases

Let $K[\mathbf{t}] = K[t_1, \ldots, t_d]$ denote the polynomial ring in $d$ variables over a field $K$. Given a finite set $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\} \subset K[\mathbf{t}]$, we write $K[\mathcal{F}] = K[f_1, \ldots, f_n]$ for the subalgebra of $K[\mathbf{t}]$ generated by $f_1, \ldots, f_n$. The *initial algebra* of $K[\mathcal{F}]$ with respect to a monomial order $<$ on $K[\mathbf{t}]$ is the subalgebra

$$in_<(K[\mathcal{F}]) = K[\{in_<(f)\,;\, f \in K[\mathcal{F}]\}]$$

of $K[\mathbf{t}]$. A subset $\mathcal{S}$ of $K[\mathcal{F}]$ is said to be a *Sagbi basis* of $K[\mathcal{F}]$ with respect to $<$ if $in_<(K[\mathcal{F}])$ is generated by $\{in_<(s)\,;\, s \in \mathcal{S}\}$. A Sagbi basis always exists. However, a *finite* Sagbi basis does not necessarily exist.

Let $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ denote the polynomial ring in $n$ variables over $K$ with eacg $\deg x_i = 1$ and $I_\mathcal{F}$ $(\subset R)$ the defining ideal of $K[\mathcal{F}]$. Thus $I_\mathcal{F}$ is the kernel of the surjective ring homomorphism from $R$ to $K[\mathcal{F}]$ defined by setting $x_i \mapsto f_i$.

Given a generic weight vector $w \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ on $K[\mathbf{t}]$, we introduce the new weight vector $\tilde{w} = (w \cdot \mathbf{a}_1, \ldots, w \cdot \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ on $R$, where $in_w(f_i) = \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i} = t_1^{a_i^{(1)}} \cdots t_d^{a_i^{(d)}}$ with $\mathbf{a}_i = (a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(d)})$. The initial ideal $in_{\tilde{w}}(I_\mathcal{F})$ of $I_\mathcal{F}$ with respect to $\tilde{w}$ may not be a monomial ideal. Let $J_{in_w(\mathcal{F})}$ $(\subset R)$ denote the toric ideal of the semigroup ring $K[in_w(f_1), \ldots, in_w(f_n)]$. It is known [12, Lemma 11.3] that $in_{\tilde{w}}(I_\mathcal{F}) \subset J_{in_w(\mathcal{F})}$. Moreover, [12, Theorem 11.4] says that

**Lemma 3.1.** *A subset $\mathcal{F} \subset K[\mathcal{F}]$ is a Sagbi basis of $K[\mathcal{F}]$ with respect to a weight vector $w$ if and only if $J_{in_w(\mathcal{F})} \subset in_{\tilde{w}}(I_\mathcal{F})$.*

Fix integers $1 \leq \ell < n \leq m$. Let $X = \left(x_j^{(i)}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ be the $n \times m$ matrix of variables and $K[X] = K[\{x_j^{(i)}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}]$ the polynomial ring over $K$. The notation $[j_1, j_2, \ldots, j_n]$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq m$, stands for the $n \times n$ submatrix

$$\begin{pmatrix} x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(1)} & \cdots & x_{j_n}^{(1)} \\ x_{j_1}^{(2)} x_{j_2}^{(2)} & \cdots & x_{j_n}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{j_1}^{(n)} x_{j_2}^{(n)} & \cdots & x_{j_n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

of $X$. Let $X_\ell = \{x_j^{(i)} \,;\, 1 \leq i \leq \ell,\, 1 \leq j \leq m\}$ and

$$\Gamma(X) = \{\det([j_1, j_2, \ldots, j_n]) \,;\, 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq m\}.$$

In [5] the authors discuss the subalgebra $R_\ell(X) = K[\Gamma(X) \cup X_\ell]$ of $K[X]$. If $\ell = 1$, then a Sagbi basis of $R_1(X)$ is given in [9, Proposition 2.1] (when $n = 2$) and [6] (when $n \geq 2$). Using Example 2.3 we determine a Sagbi basis of $R_\ell(X)$ for all $\ell \geq 1$.

Recall that a *diagonal order* on $K[X]$ is a monomial order $<$ on $K[X]$ such that

$$in_<(\det([j_1, j_2, \ldots, j_n])) = x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(2)} \cdots x_{j_n}^{(n)}$$

for all $\det([j_1, j_2, \ldots, j_n]) \in \Gamma(X)$. We work with the diagonal order $<_{diag}$ on $K[X]$ defined by the weight vector $w = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$.

**Theorem 3.2.** *The finite set $\Gamma(X) \cup X_\ell$ is a Sagbi basis of $R_\ell(X)$ with respect to the weight vector $w = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$. Moreover, the toric ideal $J_{in_w(\Gamma(X) \cup X_\ell)}$ possesses a squarefree and quadratic initial ideal. In particular the initial algebra $in_w(R_\ell(X))$ is normal and Koszul.*

*Proof.* Example 2.3 says that the toric ideal $J_{in_w(\Gamma(X))}$ possesses a squarefree quadratic Gröbner basis $\mathcal{G}$ and that

$$\mathcal{G} \cup \{x_j^{(i)} y_u - x_{j'}^{(i)} y_v \,;\, u, v \in \mathcal{N}, x_j^{(i)} u = x_{j'}^{(i)} v, 1 \leq i \leq \ell\}$$

is a squarefree quadratic Gröbner basis of $J_{in_w(\Gamma(X) \cup X_\ell)}$. Since $\Gamma(X)$ is a Sagbi basis of $K[\Gamma(X)]$ with respect to the weight vector $w = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ ([12, Theorem 11.8]), it follows that $\mathcal{G} \subset in_{\tilde{w}}(I_{\Gamma(X)}) \subset in_{\tilde{w}}(I_{\Gamma(X) \cup X_\ell})$. By virtue of Lemma 3.1, our work is to show that each binomial $x_j^{(i)} y_u - x_{j'}^{(i)} y_v \in J_{in_w(\Gamma(X) \cup X_\ell)}$ belongs to $in_{\tilde{w}}(I_{\Gamma(X) \cup X_\ell})$.

Let $x_j^{(i)} y_u - x_{j'}^{(i)} y_v \in J_{in_w(\Gamma(X) \cup X_\ell)}$. Then there exist

$$1 \leq k_1 < \cdots < k_{i-1} < j < j' < k_{i+1} < \cdots < k_n \leq m$$

such that $u$ (resp. $v$) is the main diagonal monomial of $\det(U)$ (resp. $\det(V)$), where $U = [k_1, \ldots, k_{i-1}, j', k_{i+1}, \ldots, k_n]$ (resp. $V = [k_1, \ldots, k_{i-1}, j, k_{i+1}, \ldots, k_n]$). Now, we introduce the $(n+1) \times (n+1)$ matrix

$$M = \begin{pmatrix} x_{k_1}^{(1)} & \cdots & x_j^{(1)} & x_{j'}^{(1)} & \cdots & x_{k_n}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k_1}^{(i)} & \cdots & x_j^{(i)} & x_{j'}^{(i)} & \cdots & x_{k_n}^{(i)} \\ x_{k_1}^{(i)} & \cdots & x_j^{(i)} & x_{j'}^{(i)} & \cdots & x_{k_n}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k_1}^{(n)} & \cdots & x_j^{(n)} & x_{j'}^{(n)} & \cdots & x_{k_n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

with $\det(M) = 0$. Since

$$\begin{aligned}\det(M) &= \sum_{p=1}^{i-1}(-1)^p x_{k_p}^{(i)} \det(k_1, \ldots, k_{p-1}, k_{p+1}, \ldots, j, j', \ldots, k_n) \\ &\quad + (-1)^i x_j^{(i)} \det(U) + (-1)^{i+1} x_{j'}^{(i)} \det(V) \\ &\quad - \sum_{p=i+1}^{n} (-1)^p x_{k_p}^{(i)} \det(k_1, \ldots, j, j', \ldots, k_{p-1}, k_{p+1}, \ldots, k_n),\end{aligned}$$

the polynomial

$$f = (-1)^i (x_j^{(i)} y_u - x_{j'}^{(i)} y_v) + \sum_{p=1}^{i-1}(-1)^p x_{k_p}^{(i)} y_{u_p} - \sum_{p=i+1}^{n} (-1)^p x_{k_p}^{(i)} y_{u_p},$$

where each of the $u_p$'s is equal to either $\det[k_1, \ldots, k_{p-1}, k_{p+1}, \ldots, j, j', \ldots, k_n]$ or $\det[k_1, \ldots, j, j', \ldots, k_{p-1}, k_{p+1}, \ldots, k_n]$, belongs to the defining ideal $I_{\Gamma(X) \cup X_\ell}$. Since the main diagonal monomial of $\det(M)$ is $in_w(x_j^{(i)} \det(U)) = in_w(x_{j'}^{(i)} \det(V))$, it follows that $in_{\tilde{w}}(f) = x_j^{(i)} y_u - x_{j'}^{(i)} y_v$, as desired. □

## References


[1] S. ハ Blum, Subalgebras of bigraded Koszul algebras, *J. Algebra* **242** (2001), 795 – 809

[2] A. Conca and E. De Negri, $M$-sequences, graph ideals, and ladder ideals of linear type, *J. Algebra* **211** (1999), 599 – 624.

[3] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, "Ideals, Varieties and Algorithms," Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

[4] S. Eliahou and M. Kervaire, Minimal resolutions of some monomial ideals, *J. Algebra* **129** (1990), 1 – 25.

[5] S. Goto, F. Hayasaka, K. Kurano and Y. Nakamura, Algebras generated by the entries of a certain submatrix and the maximal minors, preprint, 2003.

[6] 早坂太, 加群の Rees 代数, 第 15 回可換環論セミナー報告集.

[7] J. Herzog, T. Hibi and M. Vladoiu, Ideals of fiber type and Polymatroids, preprint, 2003.

[8] J. Herzog, T. Hibi and X. Zheng, Monomial ideals whose powers have a linear resolution, preprint, 2003.

[9] J. Herzog, Z. Tang and S. Zarzuela, Symmetric and Rees algebras of Koszul cycles and their Gröbner bases, preprint.

[10] H. Ohsugi and T. Hibi, Normalized volumes of configurations related with root systems and complete bipartite graphs, *Discrete Math.* **268** (2003), 217 – 242.

[11] R. Stanley, "Enumerative Combinatorics, Volume I," Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, CA, 1986.

[12] B. Sturmfels, "Gröbner Bases and Convex Polytopes," Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.



Hidefumi Ohsugi
Department of Mathematics
Faculty of Science
Rikkyo University
Toshima, Tokyo 171-8501, Japan
E-mail:ohsugi@rkmath.rikkyo.ac.jp

Takayuki Hibi
Department of Pure and Applied Mathematics
Graduate School of Information Science and Technology
Osaka University
Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan
E-mail:hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp

# FINITENESS OF COUSIN COHOMOLOGY, I

KAWASAKI, TAKESI

## 1. Introduction

The main theorem of this paper is

**Theorem 1.1.** *Let $A$ be a Noetherian ring and $M$ a finitely generated $A$-module. Then all the cohomology modules of the Cousin complex of $M$ are finitely generated and they are zero except for finitely many ones if*

(C1) *$A$ is universally catenary;*
(C2) *all the formal fibers of all the localization of $A$ are Cohen-Macaulay;*
(C3) *the Cohen-Macaulay locus of arbitrary of finite type $A$-algebra is open and*
(QU)

$$\dim M_{\mathfrak{q}} = \operatorname{ht} \mathfrak{q}/\mathfrak{p} + \dim M_{\mathfrak{p}}$$

*for any pair $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$ of prime ideals in* $\operatorname{Supp} M$.

This is already known by Dibaei-Tousi [1] if $A$ has a dualizing complex or if $A$ is local. The novelty of Theorem 1.1 is generalizing their theorem for non-local rings.

As consequence of Theorem 1.1, we obtain two corollaries.

**Corollary 1.2.** *Let $A$ be a Noetherian ring of positive dimension. The following statements are equivalent:*

1. *$A$ has an arithmetic Macaulayfication, that is, there is an ideal $\mathfrak{b}$ of positive height such that the Rees algebra $\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{b}^n$ is Cohen-Macaulay;*
2. *$A$ satisfies* (C1)–(C3) *of Theorem* 1.1,

$$\operatorname{ht} \mathfrak{q} = \operatorname{ht} \mathfrak{q}/\mathfrak{p} + \operatorname{ht} \mathfrak{p}$$

*for any pair of prime ideals $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$ and $A$ has no embedded primes.*

**Corollary 1.3.** *A Noetherian ring is a homomorphic image of a Cohen-Macaulay ring if and only if it satisfies* (C1)–(C3) *of Theorem* 1.1 *and has a codimension function. In particular, an excellent ring is a homomorphic image of a Cohen-Macaulay ring if it has a codimension function.*

Although the author prove these corollaries for local rings without Cousin complex, we can prove them for non-local ring by using Theorem 1.1.

In this paper, we describe a part of the proof of Theorem 1.1 in detail. The rest part will be appear in [3]. There is a complete proof of Theorem 1.1 in [2]

Throughout this paper, let $A$ be a Noetherian ring and $M$ a finitely generated $A$-module.

## 2. Preliminaries

We recall the definition and basic properties of Cousin complexes. For a prime ideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$, the $M$-height of $\mathfrak{p}$ is defined to be $\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = \dim M_{\mathfrak{p}}$. If $\mathfrak{b} \subset A$ is an ideal such that $M \neq \mathfrak{b}M$, then let $\operatorname{ht}_M \mathfrak{b} = \inf\{\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M \cap V(\mathfrak{b})\}$. For an integer $l \geq 0$, let $U^l(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M \mid \operatorname{ht}_M \mathfrak{p} \geq l\}$.

**Definition 2.1.** The Cousin complex $M^\bullet$ of $M$ is defined as follows: Let $M^{-2} = 0$, $M^{-1} = M$ and $d_M^{-2}\colon M^{-2} \to M^{-1}$ the zero map. If $p \geq -1$ and $d_M^{p-2}\colon M^{p-2} \to M^{p-1}$ is given, then we put

$$M^p = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M \\ \operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = p}} (\operatorname{Coker} d_M^{p-2})_{\mathfrak{p}}$$

and $d_M^{p-1}\colon M^{p-1} \to M^p$ is defined to be

$$d_M^{p-1}(a) = (\dots, a/1, \dots).$$

By definition, the construction of Cousin complexes commutes with localization. That is, $S^{-1}M^\bullet = (S^{-1}M)^\bullet$ as complexes of $S^{-1}A$-modules if $S \subset A$ is a multiplicatively closed set.

If $A$ is a local ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$ and $d = \operatorname{ht}_M \mathfrak{m}$, then $M^d = (\operatorname{Coker} d_M^{d-2})_{\mathfrak{m}} = \operatorname{Coker} d_M^{d-2}$. In other words, $H^d(M^\bullet) = H^{d-1}(M^\bullet) = 0$. Therefore, if $A$ is not local, then $\operatorname{Supp} H^p(M^\bullet) \subset U^{p+2}(M)$ for all $p$.

The following theorem has many applications.

**Theorem 2.2** (Colon Capturing). *Let $x_1, \dots, x_n \in A$ such that $\operatorname{ht}_M(x_1, \dots, x_n)A = n$. Then*

$$(x_1, \dots, x_{n-1})M : x_n \subset (x_1, \dots, x_{n-1})M : \prod_{q<n-1} \operatorname{ann} H^q(M^\bullet).$$

*If, in addition, $x_1, \dots, x_n$ are in the Jacobian radical, then*

$$(x_1, \dots, x_{i-1})M : x_i \subset (x_1, \dots, x_{i-1})M : \prod_{q<n-1} \operatorname{ann} H^q(M^\bullet)$$

*for any $i \leq n$.*

*Proof.* Let $K^\bullet$ be the Koszul complex with respect to $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$. The double complex $K^\bullet \otimes M^\bullet$ gives two spectral sequences

$$'E_2^{pq} = H^p(\boldsymbol{x}; H^q(M^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(K^\bullet \otimes M^\bullet),$$
$$''E_2^{pq} = H^p(H^q(\boldsymbol{x}; M^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(K^\bullet \otimes M^\bullet).$$

Since $\operatorname{ht}_M(x_1, \dots, x_n)A = n$ and $M^p = \bigoplus_{\operatorname{ht}_M \mathfrak{p} = p} (\operatorname{Coker} d_M^{p-2})_{\mathfrak{p}}$, $''E_2^{pq} = 0$ if $0 \leq p < n$. Hence $H^{n-2}(K^\bullet \otimes M^\bullet) \cong H^{n-1}(\boldsymbol{x}; M)$. On the other hand, $'E_2^{n-q-2,q}$ is annihilated by $\operatorname{ann} H^q(M^\bullet)$. Therefore

$$\left( \prod_{q<n-1} \operatorname{ann} H^q(M^\bullet) \right) H^{n-1}(\boldsymbol{x}; M) = 0.$$

Since

$$H^{q-1}(\boldsymbol{x}; M) \longrightarrow M/(x_1, \dots, x_{n-1})M \xrightarrow{\pm x_n} M/(x_1, \dots, x_{n-1})M$$

is exact, we obtain the first assertion. By using Krull's intersection theorem, we obtain the second assertion. □

## 3. The Proof of Main Theorem, I

In this section we prove the following claim.

**Claim 1.** *Assume that $A$ satisfies (C1)–(C3) of Theorem 1.1 and that $M$ satisfies (QU) of Theorem 1.1. If $H^{-1}(M^\bullet), \dots, H^{l-1}(M^\bullet)$ are finitely generated and*

$$\overline{\bigcup_{p\geq l} \operatorname{Supp} H^p(M^\bullet)} \subset U^{l+2}(M),$$

*then $H^l(M^\bullet)$ is finitely generated.*

*Proof.* Let $\mathfrak{b} \subset A$ be an ideal such that $V(\mathfrak{b}) = \overline{\bigcup_{p\geq l} \operatorname{Supp} H^p(M^\bullet)}$. Then $\operatorname{ht}_M \mathfrak{b} \geq l+2$. Let $F_\bullet$ be a free resolution of $A/\mathfrak{b}$. The double complex $\operatorname{Hom}(F_\bullet, M^\bullet)$ gives two spectral sequences

$$'E_2^{pq} = H^p(\operatorname{Ext}^q(A/\mathfrak{b}, M^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(\operatorname{Hom}(F_\bullet, M^\bullet))$$
$$''E_2^{pq} = \operatorname{Ext}^q(A/\mathfrak{b}, H^p(M^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(\operatorname{Hom}(F_\bullet, M^\bullet)).$$

If $0 \leq p \leq l+1$, then $'E_2^{pq} = 0$ and hence $H^l(\operatorname{Hom}(F_\bullet, M^\bullet)) = \operatorname{Ext}^{l+1}(A/\mathfrak{b}, M)$ is finitely generated and hence $'E_\infty^{0l}$ is also. On the other hand, $''E_r^{pq}$ is finitely generated if $q < l$. Since

$$0 \longrightarrow {}''E_{r+1}^{0l} \longrightarrow {}''E_r^{0l} \longrightarrow {}''E_r^{r,l-r+1}$$

is exact, we find that $''E_2^{0l} = \operatorname{Hom}(A/\mathfrak{b}, H^l(M^\bullet))$ is finitely generated. Since $\operatorname{Supp} H^l(M^\bullet) \subset V(A/\mathfrak{b})$, $\operatorname{Ass} H^l(M^\bullet) = \operatorname{Ass} \operatorname{Hom}(A/\mathfrak{b}, H^l(M^\bullet))$ is a finite set. If $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} H^l(M^\bullet)$, then $H^l(M^\bullet)_\mathfrak{p}$ is a finitely generated $A_\mathfrak{p}$-module because of the result of Dibaei-Tousi. There is an integer $N$ such that $\mathfrak{b}^N H^l(M^\bullet)_\mathfrak{p} = 0$ for each $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} H^l(M^\bullet)$. This means that $\mathfrak{b}^N H^l(M^\bullet) = 0$. Since $V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{b}^N)$, $H^l(M^\bullet) = \operatorname{Hom}(A/\mathfrak{b}^N, H^l(M^\bullet))$ is finitely generated. $\square$

The proof of $\overline{\bigcup H^p(M^\bullet)} \subset U^{l+2}(M)$ will be appeared in [3].

## References


[1] M. T. Dibaei and M. Tousi, *A generalization of the dualizing complex structure and its applications*, J. Pure Appl. Algebra **155** (2001), no. 1, 17–28. MR **2001m:13022**

[2] Takesi Kawasaki, *Finiteness of Cousin cohomologies*, in preparation.

[3] Takesi Kawasaki, *Finiteness of Cousin cohomology. II*, to appear in the Proceedings of the 16th Seminar of Commutative Ring Theory.



Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University, Hachioji, Minami-Ohsawa 1-1, Tokyo, 192-0397

# Cohen-Macaulay associated graded rings

Shin-ichiro Iai

This is a joint work with S. Goto [GI]. Let $A$ be a Noetherian local ring with the maximal ideal $\mathfrak{m}$ and $\dim A = d$. Let $I(\neq A)$ be an ideal in $A$ and $s = \mathrm{ht}_A I$. We always suppose that $\dim A/I = d - s$. We put $G = \mathrm{G}(I) := \bigoplus_{i\geq 0} I^i/I^{i+1}$, which is called the associated graded ring of $I$. Let $\ell$ be an integer such that $\ell \leq d$ and let $J$ be a reduction of $I$ generated by elements $a_1, a_2, \cdots, a_\ell$. We denote by $\mathrm{r}_J(I)$ the reduction number of $I$ with respect to $J$. The analytic spread of $I$ is $\lambda(I) := \dim A/\mathfrak{m} \otimes_A G$. Then $s \leq \lambda(I) \leq \ell$. We always assume that the generating set $\{a_1, a_2, \cdots, a_\ell\}$ of $J$ is a *basic* generating set for $J$ in the sense of Aberbach, Huneke, and Trung [AHT], which means that $J_i A_\mathfrak{q}$ is a reduction of $IA_\mathfrak{q}$ for all $\mathfrak{q} \in \mathrm{V}(I)$ with $i = \mathrm{ht}_A \mathfrak{q} < \ell$. Here let $\mathrm{V}(I)$ be a set of prime ideals in $A$ containing $I$ and $J_i := (a_1, a_2, \cdots, a_i)$ for $0 \leq i \leq \ell$. By [AHT], 7.2, there always exists a basic generating set for $J$ if the field $A/\mathfrak{m}$ is infinite. When the ring $A$ is Cohen-Macaulay, the ideal $J_s$ is a complete intersection (see Lemma 2). For $s \leq i \leq \ell$, let

$$\mathrm{r}_i(I) := \max\{\mathrm{r}_{J_{i_\mathfrak{p}}}(I_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I) \text{ and } \mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = i\}.$$

We set $\mathrm{r}_i = \mathrm{r}_i(I)$ for short. Put $n = \mathrm{r}_s$, which is a generic reduction number. Let $\mathrm{a}(G)$ stand for the $a$-invariant of $G$ (cf. [GW], 3.1.4). When the ring $G$ is Cohen-Macaulay, we will use repeatedly the $a$-invariant formula: $\mathrm{a}(G) = \max\{\mathrm{r}_i - i \mid s \leq i < \ell\} \cup \{\mathrm{r}_J(I) - \ell\}$ (cf. [U], 1.4).

The main purpose of this paper is to extend a theorem given by [GNN] in the case where the number $n$ is arbitrary (see Proposition 20). First of all, let us state the following.

**Proposition 1.** *For each a basic generating set $\{a_1, a_2, \cdots, a_\ell\}$ for $J$, the following two assertions hold true.*

1. *If $G$ is a Cohen-Macaulay ring, then there exists an integer $a \geq -s$ such that*
   (1) $\mathrm{r}_J(I) \leq a + \ell$,
   (2) $J_s \cap I^i = J_s I^{i-1}$ *for all* $1 \leq i \leq a + s$, *and*
   (3) $(J_i : a_{i+1}) \cap I^{a+i+1} = J_i I^{a+i}$ *for all* $s \leq i < \ell$.

2. *Conversely, assume that there is an integer $a \geq -s$, which satisfies the conditions* (1), (2), *and* (3) *above. Let $J_s$ be a complete intersection ideal and let $\delta$ be an integer with* $\operatorname{depth} A \geq \delta \geq s$. *Then*
$$\operatorname{depth} G \geq \delta$$
   *if* $\operatorname{depth} A/I^i + J_s \geq \min\{\delta - s, \delta + a - i\}$ *for all* $1 \leq i \leq a + \ell$.

**Remark.** By [Tr], 3.6 together with Lemma 9, the least number $a$ that satisfies the above conditions (1), (2), and (3) (in case it exists) becomes the $a^*$-invariant of $G$: $\mathrm{a}^*(G) := \max\{\mathrm{a}_i(G) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ if $J_s$ is a complete intersection. We note $\mathrm{a}^*(G) \geq -s$ because

$a^*(G) \geq -\operatorname{grade} G_+$ by [Tr], 2.3, and $-\operatorname{ht}_G G_+ \geq \dim G/G_+ - \dim G = \dim A/I - d = -s$ by our standard assumption that $\dim A/I = d - s$. The ideal $J_s$ is a complete intersection if the ring $A$ is Cohen-Macaulay (see Lemma 2).

We will prepare some results for a proof of Proposition 1. Take an integer $i$ with $s \leq i < \ell$. Then we have $\operatorname{ht}_A I + [J_i I^{r_i} : I^{r_i+1}] \geq i+1$ because $I^{r_i+1}A_{\mathfrak{p}} = J_i I^{r_i} A_{\mathfrak{p}}$ for all prime ideals $\mathfrak{p} \in V(I)$ with $\operatorname{ht}_A \mathfrak{p} \leq i$. Therefore we can choose a system of parameters $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_d$ for the ring $A/I$ such that $x_{i+1} \in J_i I^{r_i} : I^{r_i+1}$ for all $s \leq i < \ell$. We put $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \ldots, a_s, x_{s+1} - a_{s+1}, x_{s+2} - a_{s+2}, \ldots, x_\ell - a_\ell, x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, \ldots, x_d)$. Then we get the following.

**Lemma 2.** $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$.

*Proof.* Let $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{q})$. We shall prove that $a_1, a_2, \ldots, a_i \in \mathfrak{p}$ for all $0 \leq i \leq \ell$ by induction on $i$. We may assume $s+1 \leq i \leq \ell$ and $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1} \in \mathfrak{p}$. We have $x_i^{r_{i-1}+2} \equiv x_i a_i^{r_{i-1}+1}$ mod $\mathfrak{p}$, as $x_i \equiv a_i$. By the choice of $x_i$ and by the inductive hypothesis on $i$, we get $x_i a_i^{r_{i-1}+1} \in J_{i-1} I^{r_{i-1}} \subseteq \mathfrak{p}$. And hence $x_i^{r_{i-1}+2} \in \mathfrak{p}$. Therefore $x_i \in \mathfrak{p}$, so that $a_i \in \mathfrak{p}$. Thus we see $J$ and $(x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_d)$ are contained in $\mathfrak{p}$, and hence $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ (recall that $I^{r_J(I)+1} \subseteq J$ and $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_d$ is a system of parameters for $A/I$). $\square$

For $0 \leq i \leq d$, we put

$$A_i := \begin{cases} (a_1 t, a_2 t, \ldots, a_s t)G & (0 \leq i \leq s) \\ A_s + (x_{s+1} - a_{s+1}t, x_{s+2} - a_{s+2}t, \ldots, x_i - a_i t)G & (s+1 \leq i \leq \ell) \\ A_\ell + (x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, \ldots, x_i)G & (\ell+1 \leq i \leq d) \end{cases}$$

and

$$B_i := \begin{cases} (a_1 t, a_2 t, \ldots, a_s t)G & (0 \leq i \leq s) \\ B_s + (x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_i, a_{s+1}t, a_{s+2}t, \ldots, a_i t)G & (s+1 \leq i \leq \ell) \\ B_\ell + (x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, \ldots, x_i)G & (\ell+1 \leq i \leq d). \end{cases}$$

Then we get $\sqrt{A_j} = \sqrt{B_j}$ for all $0 \leq j \leq d$. In fact, let $0 \leq j \leq d$. We may assume $j > s$. The inclusion $A_j \subseteq B_j$ is trivial. Similarly as in the proof above, we take $Q \in V(A_j)$. It is enough to show $a_1 t, a_2 t, \ldots, a_i t \in Q$ for all $0 \leq i \leq j$. Let us use induction on $i$. We may assume that $s+1 \leq i \leq j$ and that it holds true for $i-1$. Since $x_i \equiv a_i t \mod Q$, we have $x_i^{r_{i-1}+2} \equiv x_i (a_i t)^{r_{i-1}+1}$ because $(x_i a_i^{r_{i-1}+1}) t^{r_{i-1}+1} \in (J_{i-1} I^{r_{i-1}} t^{r_{i-1}+1})G \subseteq Q$ by the choice of $x_i$ and by the inductive hypothesis on $i$. Hence $x_i \in Q$. Therefore $a_i t \in Q$.

In the case where $J$ is a *special* reduction of $I$ in the sense of Aberbach and Huneke, the following lemmas have been proved in their paper [AH]. Put $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}G + G_+$. For each graded $G$-module $E$, let $E_j$ stand for the homogeneous component of $E$ of degree $j$. We set $E_{\geq m} = \oplus_{i \geq m} E_i$ for each $m \in \mathbb{Z}$.

**Lemma 3.** *$G$ is a Cohen-Macaulay ring if and only if the sequence*

$$a_1 t, a_2 t, \ldots, a_s t, x_{s+1} - a_{s+1}t, x_{s+2} - a_{s+2}t, \ldots, x_\ell - a_\ell t, x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, \ldots, x_d$$

*is $G$-regular.*

*Proof.* Let $0 \leq j \leq d$. The equality $\sqrt{A_j} = \sqrt{B_j}$ implies that all minimal prime ideals of $A_j$ are graded because $B_j$ is a graded ideal, and moreover $\sqrt{A_d} = \mathfrak{M}$ because $\sqrt{B_d} = \mathfrak{M}$ (recall that $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_d$ is a system of parameters for $A/I$). Therefore, if $G$ is a Cohen-Macaulay ring, then that sequence is $G$-regular because all associated prime ideals of $A_j$ are graded. The converse implication is trivial. $\square$

**Lemma 4.** *Let $i$ be an integer with $0 \leq i < \ell$. If $G$ is a Cohen-Macaulay ring, then*

$$[(a_1t, a_2t, \ldots, a_it)G :_G a_{i+1}t]_{\geq \mathrm{a}(G)+i+1} \subseteq (a_1t, a_2t, \ldots, a_it)G.$$

*Proof.* Thanks to the $a$-invariant formula: $\mathrm{a}(G) = \max\{\mathrm{r}_i - j \mid s \leq j < \ell\} \cup \{\mathrm{r}_J(I) - \ell\}$ (cf. [U], 1.4), we have $\mathrm{r}_j \leq \mathrm{a}(G) + j$ for all $s \leq j < \ell$. Since the sequence $a_1t, a_2t, \ldots, a_st$ is $G$-regular by Lemma 3, we may assume $s = 0$ by [VV]. We need the following.

**Lemma 5.** *Let $s = 0$ and $0 \leq i \leq \ell$. Assume $\mathrm{r}_j \leq \mathrm{a}(G) + j$ for all $0 \leq j < \ell$. Then*

$$(x_1 - a_1t, x_2 - a_2t, \ldots, x_i - a_it)G \cap [G]_{\geq \mathrm{a}(G)+i+1} = [(a_1t, a_2t, \ldots, a_it)G]_{\geq \mathrm{a}(G)+i+1}.$$

*Proof.* We have $[(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1})G]_{\geq \mathrm{a}(G)+i+1} \subseteq [(a_1t, a_2t, \ldots, a_it)G]_{\geq \mathrm{a}(G)+i+1}$ for all $0 \leq i < \ell$ because $x_{i+1}I^{m+1} \subseteq J_iI^m$ for all $m \geq \mathrm{r}_i + 1$ by the choice of $x_{i+1}$ (recall that $\mathrm{a}(G) + i + 1 \geq \mathrm{r}_i + 1$). Hence the left side of the required equality is contained in the right side. To prove the converse inclusion, we will use induction on $i$. We may assume $i > 0$ and it is true for $i - 1$. Let $m \geq \mathrm{a}(G) + i + 1$ and take any element $\eta \in [(a_1t, a_2t, \ldots, a_it)G]_m$. Write $\eta = \sum_{\alpha=1}^{i}(a_\alpha t)\eta_\alpha$ for some $\eta_\alpha \in [G]_{m-1}$. Then $\sum_{\alpha=1}^{i} x_\alpha \eta_\alpha \in [(x_1, x_2, \ldots, x_i)G]_{\geq a+i} \subseteq [(a_1t, a_2t, \ldots, a_{i-1}t)G]_{\geq \mathrm{a}(G)+i}$ (recall that the above inclusion). So $\sum_{\alpha=1}^{i} x_\alpha\eta_\alpha \in (x_1 - a_1t, x_2 - a_2t, \ldots, x_{i-1} - a_{i-1}t)G$ by the inductive hypothesis on $i$. Therefore $\eta = \sum_{\alpha=1}^{i} x_\alpha\eta_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{i}(x_\alpha - a_\alpha t)\eta_\alpha \in (x_1 - a_1t, x_2 - a_2t, \ldots, x_i - a_it)G$. $\square$

Lemma 5 leads to an injective homomorphism

$$[G/(a_1t, a_2t, \ldots, a_it)G]_{\geq \mathrm{a}(G)+i+1} \hookrightarrow G/(x_1 - a_1t, x_2 - a_2t, \ldots, x_i - a_it)G$$

of $G$-modules for all $0 \leq i \leq \ell$. Let $0 \leq i < \ell$. Then since the element $x_{i+1} - a_{i+1}t$ is $G/(x_1 - a_1t, x_2 - a_2t, \ldots, x_i - a_it)G$-regular by Lemma 3, it is also $[G/(a_1t, a_2t, \ldots, a_it)G]_{\geq \mathrm{a}(G)+i+1}$-regular by the injective map above. Hence $a_{i+1}t$ is $[G/(a_1t, a_2t, \ldots, a_it)G]_{\geq \mathrm{a}(G)+i+1}$-regular (recall that $x_{i+1}[G]_{\geq \mathrm{a}(G)+i+1} \subseteq [(a_1t, a_2t, \ldots, a_it)G]_{\geq \mathrm{a}(G)+i+1}$). This completes the proof of Lemma 4 $\square$

**Corollary 6.** *If $G$ is a Cohen-Macaulay ring, then the conditions* (1), (2), *and* (3) *in Proposition 1 are fulfilled for the integer* $\mathrm{a}(G)$.

*Proof.* We have $\mathrm{a}(G) \geq -s$ (see Remark in this paper). Since $G$ is a Cohen-Macaulay ring, the sequence $a_1t, a_2t, \ldots, a_st$ is $G$-regular by Lemma 3, so that $J_s \cap I^i = J_sI^{i-1}$ for all $i \in \mathbb{Z}$ by [VV]. Then Lemma 4 means that the sequence $a_1t, a_2t, \ldots, a_\ell t$ is $G_+$-filter regular, and hence the assertion follows from [Tr], 3.6. $\square$

Let $a$ be an integer with $a \geq -s$ and $\delta$ an integer with $s \leq \delta \leq \operatorname{depth} A$. For each integer $m \geq s$, we consider the following two conditions.

($\mathrm{A}_m$) depth $A/J_jI^{a+i} \geq \delta - i$ whenever $s \leq i \leq m$ and $0 \leq j \leq i$.

($\mathrm{B}_m$) $(J_i : a_{i+1}) \cap I^{a+i+1} = J_iI^{a+i}$ whenever $s \leq i \leq m < \ell$.

Recall that ($\mathrm{B}_{\ell-1}$) is our condition (3) in Proposition 1. Now let us note the following lemmas due to [GNN], which are delicately used in this paper.

**Lemma 7.** *Let $s \leq m < \ell$ and assume the condition* ($\mathrm{B}_m$) *is satisfied. Then $J_{\alpha-1} \cap I^{a+i} = J_{\alpha-1}I^{a+i-1}$ if $s+1 \leq \alpha \leq i \leq m+1$.*

*Proof.* See [GNN], Proof of Claim 3. □

**Lemma 8.** *Let $s \leq i \leq \ell$. Assume $\mathrm{r}_J(I) \leq a + \ell$ and the condition* ($\mathrm{B}_{\ell-1}$) *is satisfied. Then $J_i \cap I^j = J_iI^{j-1}$ for all $j \geq a+i+1$, and hence we have*

$$[(a_1t, a_2t, \ldots, a_it)G :_G a_{i+1}t]_{\geq a+i+1} \subseteq (a_1t, a_2t, \ldots, a_it)G$$

*if $s \leq i < \ell$.*

*Proof.* Using the same arguments as in the proof of in [GNN], 3.1, we get $J_i \cap I^j = J_iI^{j-1}$ for all $j \geq a+i+1$. For the last assertion, see in [GNN], 4.1. □

As a direct consequence of Lemma 8, we note the next claim.

**Corollary 9.** *Assume that the conditions* (1), (2), *and* (3) *in Proposition 1 are fulfilled for an integer $a$. Then $J_s \cap I^j = J_sI^{j-1}$ for all $j \in \mathbb{Z}$.*

*Proof.* Lemma 8 implies $J_s \cap I^j = J_sI^{j-1}$ for all $i \geq a+s+1$. Then we get the required equality by condition (2). □

In the rest of this paper we always assume $J_s$ is a complete intersection ideal. We will use repeatedly the result of [VV] that, for each integer $h$, if $J_s \cap I^i = J_sI^{i-1}$ for all $1 \leq i \leq h$, then $J_j \cap I^i = J_jI^{i-1}$ whenever $1 \leq i \leq h$ and $0 \leq j \leq s$. We also use the isomorphism $M/N \xrightarrow{\sim} \alpha M/\alpha N$ form $x \mod N$ to $\alpha x \mod \alpha N$, where $M$, $N$, and $\alpha$ denote an $A$-module, an $A$-submodule of $M$, and an $M$-regular element, respectively.

**Lemma 10.** *Let $h$ be an integer and let $0 \leq j \leq s$. Assume that $J_s \cap I^i = J_sI^{i-1}$ for all $1 \leq i \leq h$. Then* depth $A/I^i + J_j \geq \min\{\delta - s, \delta + a - i\}$ *for all $1 \leq i \leq h$ if so is* depth $A/I^i + J_s$.

*Proof.* Descending induction on $j$. The assertion being trivial for $j = s$, we may assume that $j < s$ and that it is true for $j+1$. We need to show that the assertion holds true for $j$. Suppose that it is not true and take an integer $1 \leq i \leq h$ as small as possible, so that we have $i > 1$. We set $\overline{A} = A/J_j$. Then depth $\overline{A}/I^i\overline{A} + a_{j+1}\overline{A} \geq \min\{\delta - s, \delta + a - i\}$ by the inductive hypothesis on $j$. We consider the canonical exact sequence

$$0 \to \frac{I^i\overline{A} + a_{j+1}\overline{A}}{I^i\overline{A}} \to \frac{\overline{A}}{I^i\overline{A}} \to \frac{\overline{A}}{I^i\overline{A} + a_{j+1}\overline{A}} \to 0$$

of $A$-modules. Since $J_{j+1} \cap I^i = J_{j+1}I^{i-1}$ and since $a_{j+1}$ is an $\overline{A}$-regular element, we get the isomorphisms

$$\frac{I^i\overline{A} + a_{j+1}\overline{A}}{I^i\overline{A}} \cong \frac{a_{j+1}\overline{A}}{a_{j+1}I^{i-1}\overline{A}} \cong \frac{\overline{A}}{I^{i-1}\overline{A}}$$

as $A$-modules. We have that $\operatorname{depth} \overline{A}/I^{i-1}\overline{A} \geq \min\{\delta - s, \delta + a - i + 1\}$ by the minimality of $i$, and hence, applying the depth lemma to the short exact sequence above, we get $\operatorname{depth} \overline{A}/I^i\overline{A} \geq \min\{\delta - s, \delta + a - i\}$. This is a contradiction, which completes the proof. □

**Corollary 11.** *Let $s \leq m < \ell$. Assume that $J_s \cap I^i = J_sI^{i-1}$ for all $1 \leq i \leq a + s$. Then* $\operatorname{depth} A/I^i \geq \min\{\delta - s, \delta + a - i\}$ *for all $1 \leq i \leq a + m + 1$ if* $(\mathrm{B}_m)$ *is satisfied.*

*Proof.* By Lemma 7 together with the assumption that $J_s \cap I^i = J_sI^{i-1}$ for all $1 \leq i \leq a+s$, we get $J_s \cap I^i = J_sI^{i-1}$ for all $1 \leq i \leq a + m + 1$, so that the required inequality follows from Lemma 10. □

**Lemma 12.** *Let $h$ be an integer and let $0 \leq j \leq s$. Assume that $J_s \cap I^i = J_sI^{i-1}$ for all $1 \leq i \leq h$. Then* $\operatorname{depth} A/J_jI^i \geq \delta - s$ *for all $1 \leq i \leq h$ if so is* $\operatorname{depth} A/I^i + J_s$.

*Proof.* We use induction on $j$. If $j = 0$, our claim is clear since $\operatorname{depth} A \geq \delta$. Assume that $j > 0$ and that $\operatorname{depth} A/J_{j-1}I^i \geq \delta - s$. Let $\overline{A} = A/J_{j-1}$. Recall that $\operatorname{depth} \overline{A}/I^i\overline{A} \geq \delta - s$ by Lemma 10. Looking at the following exact sequence and isomorphism:

$$0 \to \frac{a_j\overline{A}}{a_jI^i\overline{A}} \to \frac{\overline{A}}{a_jI^i\overline{A}} \to \frac{\overline{A}}{a_j\overline{A}} \to 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{a_j\overline{A}}{a_jI^i\overline{A}} \cong \frac{\overline{A}}{I^i\overline{A}},$$

we see that $\operatorname{depth} \overline{A}/a_jI^i\overline{A} \geq \delta - s$ by the depth lemma. Hence $\operatorname{depth} A/J_jI^i + J_{j-1} \geq \delta - s$. We consider the two natural exact sequences

$$0 \to \frac{J_{j-1}}{J_jI^i \cap J_{j-1}} \to \frac{A}{J_jI^i} \to \frac{A}{J_jI^i + J_{j-1}} \to 0 \quad \text{and} \quad 0 \to \frac{J_{j-1}}{J_{j-1}I^i} \to \frac{A}{J_{j-1}I^i} \to \frac{A}{J_{j-1}} \to 0$$

of $A$-modules. Here we have $J_{j-1}/J_jI^i \cap J_{j-1} = J_{j-1}/J_{j-1}I^i$ because

$$\begin{aligned}
J_{j-1} \cap J_jI^i &= J_{j-1} \cap (J_{j-1}I^i + a_jI^i) \\
&= J_{j-1}I^i + (J_{j-1} \cap a_jI^i) \\
&= J_{j-1}I^i + a_j((J_{j-1} : a_j) \cap I^i) \\
&= J_{j-1}I^i + a_j(J_{j-1} \cap I^i) \\
&= J_{j-1}I^i + a_jJ_{j-1}I^{i-1} \\
&= J_{j-1}I^i.
\end{aligned}$$

Therefore we get $\operatorname{depth} A/J_jI^i \geq \delta - s$ by the depth lemma. □

**Corollary 13.** *Assume that $J_s \cap I^i = J_sI^{i-1}$ for all $1 \leq i \leq a + s$. Then the condition* $(\mathrm{A}_s)$ *is satisfied if* $\operatorname{depth} A/I^i \geq \delta - s$ *for all $1 \leq i \leq a + s$*

Furthermore, we arrange the following three Lemmas.

**Lemma 14.** *Let $s \leq m < \ell$. Assume that $J_s \cap I^i = J_s I^{i-1}$ for all $1 \leq i \leq a+s$ and the condition* $(\mathrm{B}_m)$ *is satisfied. Then $I^{a+i}/J_{\alpha-1}I^{a+i-1} \cong J_\alpha I^{a+i}/J_{\alpha-1}I^{a+i}$ as $A$-modules for all $1 \leq \alpha \leq i \leq m+1$.*

*Proof.* Let $I^{a+i}/J_{\alpha-1}I^{a+i-1} \to J_\alpha I^{a+i}/J_{\alpha-1}I^{a+i}$ ($x \mod J_{\alpha-1}I^{a+i-1} \mapsto a_\alpha x \mod J_\alpha I^{a+i}$). It suffices to show this is injective. Let $x \in I^{a+i}$ and suppose $a_\alpha x \in J_{\alpha-1}I^{a+i}$. Then we have $x \in (J_{\alpha-1} : a_\alpha) \cap I^{a+i} = [(J_{\alpha-1} : a_\alpha) \cap I^{a+\alpha}] \cap I^{a+i} \subseteq J_{\alpha-1} \cap I^{a+i}$ (use the fact that $a_\alpha$ is $A/J_{\alpha-1}$-regular if $\alpha \leq s$ and use the condition $(\mathrm{B}_m)$ if $\alpha > s$). We shall show $J_{\alpha-1} \cap I^{a+i} = J_{\alpha-1}I^{a+i-1}$. In fact, by Lemma 7, we obtain that $J_{\alpha-1} \cap I^{a+i} = J_{\alpha-1}I^{a+i-1}$ if $s+1 \leq \alpha \leq j \leq m+1$. And moreover, by Lemma 7 together with our standard assumption, we see $J_s \cap I^j = J_s I^{j-1}$ for all $1 \leq j \leq a+m+1$, so that $J_k \cap I^j = J_k I^{j-1}$ if $1 \leq k \leq s$ and $1 \leq j \leq a+m+1$ by [VV]. Thus the required equality follows. Then $x \in J_{\alpha-1}I^{a+i-1}$ and hence it is injective. □

**Lemma 15.** *Let $s \leq m < \ell$. Assume that $J_s \cap I^i = J_s I^{i-1}$ for all $1 \leq i \leq a+s$. Then the implication* $(\mathrm{B}_m) \Rightarrow (\mathrm{A}_{m+1})$ *holds true if* $\operatorname{depth} A/I^i + J_s \geq \min\{\delta - s, \delta + a - i\}$ *for all $1 \leq i \leq a+m+1$.*

*Proof.* We must prove that $\operatorname{depth} A/J_\alpha I^{a+i} \geq \delta - i$ whenever $s \leq i \leq m+1$ and $0 \leq \alpha \leq i$. Let us use induction on $\alpha$. When $i = s$, our assertion follows form Corollary 13. Let $i > s$. If $\alpha = 0$, it is clear. We may assume $\alpha > 0$ and it holds true for $\alpha - 1$. Then, applying the depth lemma to the natural exact sequences

$$0 \to J_\alpha I^{a+i}/J_{\alpha-1}I^{a+i} \to A/J_{\alpha-1}I^{a+i} \to A/J_\alpha I^{a+i} \to 0$$

and

$$0 \to I^{a+i}/J_{\alpha-1}I^{a+i-1} \to A/J_{\alpha-1}I^{a+i-1} \to A/I^{a+i} \to 0$$

of $A$-modules, we get the assertion by Corollary 11 and Lemma 14. □

**Lemma 16.** *Assume that the conditions* (1), (2), *and* (3) *in Proposition 1 are satisfied. Then*

$$\operatorname{depth} I^{a+i+1}/J_i I^{a+i} + I^{a+i+2} \geq \delta - i - 2$$

*for all $s \leq i < \ell$ if* $\operatorname{depth} A/I^i + J_s \geq \min\{\delta - s, \delta + a - i\}$ *for all $1 \leq i \leq a+\ell$.*

*Proof.* The condition $(\mathrm{A}_\ell)$ is satisfied by Lemma 15. Looking at the natural exact sequences

$$0 \to I^{a+i+1}/J_i I^{a+i} \to A/J_i I^{a+i} \to A/I^{a+i+1} \to 0$$

and

$$0 \to I^{a+i+2}/J_i I^{a+i+1} \to A/J_i I^{a+i+1} \to A/I^{a+i+2} \to 0$$

of $A$-modules, we get $\operatorname{depth} I^{a+i+1}/J_i I^{a+i} \geq \delta - i$ and $\operatorname{depth} I^{a+i+2}/J_i I^{a+i+1} \geq \delta - i - 1$ by the depth lemma together with Corollary 11 and $(\mathrm{A}_\ell)$. We consider the canonical exact sequence

$$0 \to I^{a+i+2}/J_i I^{a+i} \cap I^{a+i+2} \to I^{a+i+1}/J_i I^{a+i} \to I^{a+i+1}/J_i I^{a+i} + I^{a+i+2} \to 0$$

of $A$-modules. $J_i I^{a+i} \cap I^{a+i+2} \subseteq J_i \cap I^{a+i+2} = J_i I^{a+i+1}$ by Lemma 8. Hence we get the equality $I^{a+i+2}/J_i I^{a+i} \cap I^{a+i+2} = I^{a+i+2}/J_i I^{a+i+1}$, so that the assertion follows from applying the depth lemma to the exact sequence above. □

We denote by $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(\ )$ $(i \in \mathbb{Z})$ the graded $i^{\underline{\text{th}}}$ local cohomology functor of $G$ with respect to $\mathfrak{M}$. Let $\mathrm{a}_i(E) = \max\{j \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(E)]_j \neq (0)\}$ $(i \in \mathbb{Z})$. We are now ready to prove Proposition 1.

*Proof of Proposition 1.* The assertion 1 directly follows from Corollary 6. Let us prove the assertion 2. Since $J_s$ is a complete intersection, the sequence $a_1t, a_2t, \ldots, a_st$ is $G$-regular by [VV] together with Corollary 9. Hence, passing to the ring $A/J_s$, we may assume $s = 0$ (cf. [GNN], 3.4). For each $0 \leq i \leq \ell$, we put $\mathrm{U}^{(i)} = [G/J_itG]_{\geq a+i+1}$. Then $a_{i+1}t$ is an $\mathrm{U}^{(i)}$-regular element for $0 \leq i < \ell$ by Lemma 8. Let $\mathrm{V}^{(i)} = \mathrm{U}^{(i)}/a_{i+1}t\,\mathrm{U}^{(i)}$. We have the natural exact sequence

$$0 \to \mathrm{U}^{(i+1)} \to \mathrm{V}^{(i)} \to \mathrm{W}^{(i)} \to 0 \qquad (\sharp)$$

of graded $G$-modules. Here $\mathrm{W}^{(i)} = [\mathrm{W}^{(i)}]_{a+i+1} \cong [\mathrm{U}^{(i)}]_{a+i+1} \cong I^{a+i+1}/J_iI^{a+i} + I^{a+i+2}$. Then $\operatorname{depth} \mathrm{W}^{(i)} \geq \delta - i - 2$ for all $0 \leq i < \ell$ by Lemma 16. We have the claim that

$$\mathrm{a}_j(\mathrm{U}^{(i)}) \leq a + i \text{ whenever } 0 \leq i \leq \ell \text{ and } j \in \mathbb{Z}.$$

In fact, We will prove it by descending induction on $i$. The assertion holds true if $i = \ell$ because $\mathrm{U}^{(\ell)} = (0)$ (recall that $\mathrm{r}_J(I) \leq a + \ell$). Let $i < \ell$ and assume that $\mathrm{a}_j(\mathrm{U}^{(i+1)}) \leq a + i + 1$ for all $j \in \mathbb{Z}$. Applying the local cohomology functors $\mathrm{H}^j_{\mathfrak{M}}(*)$ $(j \in \mathbb{Z})$ to the exact sequence $(\sharp)$, we get the resulting exact sequence

$$\cdots \to \mathrm{H}^j_{\mathfrak{M}}(\mathrm{U}^{(i+1)}) \to \mathrm{H}^j_{\mathfrak{M}}(\mathrm{V}^{(i)}) \to \mathrm{H}^j_{\mathfrak{M}}(\mathrm{W}^{(i+1)}) \to \cdots$$

of graded local cohomology modules. we have $\mathrm{a}_j(\mathrm{V}^{(i)}) \leq a + i + 1$ by the inductive hypothesis on $i$ (recall that $\mathrm{W}^{(i)}$ is concentrated in degree $a+i+1$). Thus $\mathrm{a}_j(\mathrm{U}^{(i)}) \leq a+i$, as $a_{i+1}t$ is an $\mathrm{U}^{(i)}$-regular element.

Hence we have in particular that $\mathrm{a}_j(\mathrm{U}^{(0)}) \leq a$ for all $j \in \mathbb{Z}$. We consider the canonical exact sequence

$$0 \to \mathrm{U}^{(0)} \to G \to C \to 0 \qquad (\sharp\sharp)$$

of graded $G$-modules. Then $C = C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_a$, so that $\mathrm{a}_j(C) \leq a$ (see [GH], 2.2). Hence we get $\mathrm{a}_j(G) \leq a$ for all $j \in \mathbb{Z}$.

Now let us prove $\operatorname{depth} G \geq \delta$. Firstly, we shall consider the case where $\ell = 0$. Then $G = G_0 \oplus G_1 \oplus \cdots \oplus G_{\mathrm{r}_J(I)}$. Let $0 \leq j \leq \mathrm{r}_J(I)$. By our standard assumption of the depths, we have $\operatorname{depth} A/I^j \geq \delta$, as $\mathrm{r}_J(I) \leq a$. Then applying the depth lemma to the exact sequence $0 \to I^j/I^{j+1} \to A/I^{j+1} \to A/I^j \to 0$ of $A$-modules, we get $\operatorname{depth} I^j/I^{j+1} \geq \delta$. Then $\operatorname{depth} G_j \geq \delta$, so that $\operatorname{depth} G \geq \delta$ by [GH], 2.2.

Let $\ell > 0$. Hence $\mathrm{U}^{(0)} \neq (0)$. Suppose that $\operatorname{depth} G < \delta$. We put $t = \operatorname{depth} G$ and $\alpha = \mathrm{a}_t(G)$. Then by [KN], 3.1, we have $\alpha < a$ because $\mathrm{a}_j(G) \leq a$ for all $j \in \mathbb{Z}$. We have $\operatorname{depth} C \geq t$ and $\mathrm{H}^t_{\mathfrak{M}}(C) = [\mathrm{H}^t_{\mathfrak{M}}(C)]_a$ by our standard assumption (recall that $\operatorname{depth} C_j = \operatorname{depth} I^j/I^{j+1} \geq \delta$ for all $0 \leq j \leq a - 1$ and that $\operatorname{depth} C_a = \operatorname{depth} I^a/I^{a+1} \geq \delta - 1$). Therefore, from the resulting exact sequence

$$\cdots \to 0 \to 0 \to \mathrm{H}^t_{\mathfrak{M}}(\mathrm{U}^{(0)}) \to \mathrm{H}^t_{\mathfrak{M}}(G) \to \mathrm{H}^t_{\mathfrak{M}}(C) \to \cdots$$

of graded local cohomology modules from $(\sharp\sharp)$ we obtain $\operatorname{depth} \mathrm{U}^{(0)} = t$ and $\mathrm{a}_t(\mathrm{U}^{(0)}) = \alpha$ because $\alpha < a$. Then by [GNN], *Claim*, we have the fact that

$$\mathrm{U}^{(i)} \neq (0),\ \operatorname{depth} \mathrm{U}^{(i)} = t - i, \text{ and } \mathrm{a}_{t-i}(\mathrm{U}^{(i)}) = \alpha + i \text{ for any } 0 \leq i \leq \ell.$$

But let us give a sketch of proof for the sake of completeness. In deed, assume that the assertion is not true and take $i$ as small as possible. Then $i > 0$. Since $a_{i-1}t$ is $\mathrm{U}^{(i-1)}$-regular, we have depth $\mathrm{V}^{(i-1)} = t - i$ and $\mathrm{a}_{t-i}(\mathrm{V}^{(i-1)}) = \alpha + i$ by minimality of $i$. By depth $\mathrm{W}^{(i-1)} \geq \delta - i - 1$ we obtain the resulting exact sequence

$$\cdots \to 0 \to 0 \to \mathrm{H}_{\mathfrak{M}}^{t-i}(\mathrm{U}^{(i)}) \to \mathrm{H}_{\mathfrak{M}}^{t-i}(\mathrm{V}^{(i-1)}) \to \mathrm{H}_{\mathfrak{M}}^{t-i}(\mathrm{W}^{(i-1)}) \to \cdots$$

of graded local cohomology modules from ($\sharp$). Hence, because $\mathrm{W}^{(i-1)} = [\mathrm{W}^{(i-1)}]_{a+i}$ and because $\mathrm{a}_{t-i}(\mathrm{V}^{(i-1)}) = \alpha + i < a + i$, we get $\mathrm{U}^{(i)} \neq (0)$, depth $\mathrm{U}^{(i)} = t - i$ and $\mathrm{a}_{t-i}(\mathrm{U}^{(i)}) = \alpha + i$, which is contradiction to the choice of $i$.

Thus we get $\mathrm{U}^{(i)} \neq (0)$ for any $0 \leq i \leq \ell$. However, this contradicts $\mathrm{U}^{(\ell)} = (0)$. Therefore depth $G \geq \delta$. □

We note a direct consequence of Proposition 1.

**Corollary 17.** *Let the ring $A$ be Cohen-Macaulay and assume that there exists an integer $a \geq -s$ such that*

(1) $\mathrm{r}_J(I) \leq a + \ell$,

(2) $J_s \cap I^i = J_s I^{i-1}$ *for all* $1 \leq i \leq a + s$,

(3) $(J_i : a_{i+1}) \cap I^{n-s+i+1} = J_i I^{n-s+i}$ *for all* $s \leq i < \ell$, *and*

(4) depth $A/I^i + J_s \geq \min\{d - s, d + a - i\}$ *for all* $1 \leq i \leq a + \ell$.

*Then $G$ is a Cohen-Macaulay ring. Moreover so is* $\mathrm{R}(I) := \bigoplus_{i \geq 0} I^i$ *if* $a < 0$.

By [TI], we get the last assertion on the Cohen-Macaulayness of the Rees algebra $\mathrm{R}(I)$ (see Remark in this paper). Next let us consider the case where $\mathrm{a}(G) = n - s$. We have the following corollary.

**Corollary 18.** *Let $A$ be a Cohen-Macaulay ring and assume that* depth $A/I^i + J_s \geq \min\{d - s, d - s + n - i\}$ *for all* $1 \leq i \leq n - s + \ell$. *Then the following two conditions are equivalent.*

*1.* *$G$ is a Cohen-Macaulay ring with* $\mathrm{a}(G) = n - s$.

*2.* (1) $\mathrm{r}_J(I) \leq n - s + \ell$,

(2) $J_s \cap I^i = J_s I^{i-1}$ *for all* $1 \leq i \leq n$, *and*

(3) $(J_i : a_{i+1}) \cap I^{n-s+i+1} = J_i I^{n-s+i}$ *for all* $s \leq i < \ell$.

*Proof.* Assume the condition 2 is fulfilled. Then the Cohen-Macaulayness of $G$ follows from the assertion 2 in Proposition 1. We shall prove $\mathrm{a}(G) = n - s$. Since the sequence $a_1 t, a_2 t, \ldots, a_s t$ is $G$-regular, we may assume $s = 0$ (cf. [GNN], 3.4). Recall that the exact sequence

$$0 \to \mathrm{U}^{(0)} \to G \to C \to 0 \qquad (\sharp\sharp)$$

of $G$-modules in the proof of Proposition 1. Since $\mathrm{a}(G) \leq n$, it suffices to show $\dim C_n = d$. Suppose $[C_n]_{\mathfrak{p}} = 0$ for all $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ with $\dim A/\mathfrak{p} = d$. Then, since the ring $A$ is Cohen-Macaulay and since $C_n \cong I^n/I^{n+1}$ as $A$-modules, $I_{\mathfrak{p}}^n = (0)$ for all $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$ with $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = 0$ by Nakayama's lemma. This contradicts to the choice of $n$. The converse implication follows from Corollary 6. □

In the rest of this paper we consider the case where $\delta = d$. We always assume our basic generating set $\{a_1, a_2, \cdots, a_\ell\}$ is an $I$-filter regular sequence, which means $a_i \notin \mathfrak{p}$ whenever $1 \le i \le \ell$ and $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A A/J_{i-1} \setminus \mathrm{V}(I)$. If the field $A/\mathfrak{m}$ is infinite, then there exists such a generating set of $J$ by [A], 2.3.

**Lemma 19.** *Let $s \le m < \ell$. Then the implication $(\mathrm{A}_m) \Rightarrow (\mathrm{B}_m)$ holds true if $\mathrm{r}_i \le a + i$ for all $s \le i \le m$.*

*Proof.* Let $s \le i \le m$ and $L = (J_i : a_{i+1}) \cap I^{a+i+1}$. Then $L \supseteq J_i I^{a+i}$. Take any $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A A/J_i I^{a+i}$. It suffices to show that $LA_\mathfrak{p} = J_i I^{a+i} A_\mathfrak{p}$. If $\mathfrak{p} \notin \mathrm{V}(I)$, then $a_{i+1} \notin \mathfrak{p}$ because $\{a_1, a_2, \cdots, a_\ell\}$ is a good generating set, so that we have nothing to prove. We may assume $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$. The condition $(\mathrm{A}_m)$ implies $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} \le i$, as $\delta = d$. Then $LA_\mathfrak{p} = J_i I^{a+i} A_\mathfrak{p}$ since $\mathrm{r}_i \le a + i$. □

**Proposition 20.** *Let the ring $A$ be Cohen-Macaulay and assume that there exists an integer $a \ge -s$ such that*

(1) $\mathrm{r}_J(I) \le a + \ell$,

(2) $\mathrm{r}_i \le a + i$ *for all* $s \le i < \ell$,

(3) $J_s \cap I^i = J_s I^{i-1}$ *for all* $1 \le i \le a + s$, *and*

(4) $\mathrm{depth}\, A/I^i + J_s \ge \min\{d - s, d + a - i\}$ *for all* $1 \le i \le a + \ell$.

*Then $G$ is a Cohen-Macaulay ring. Moreover so is $\mathrm{R}(I)$ if $a < 0$.*

*Proof.* Since $(\mathrm{A}_s)$ is satisfied by Corollary 13, $(\mathrm{B}_{\ell-1})$ is satisfied by Lemma 15 and 19. Therefore the assertion follows from Corollary 17. □

Notice that the conditions (1), (2), and (3) above are necessary conditions of the Cohen-Macaulayness of the ring $G$ with $\mathrm{a}(G) = a$ (recall that the $a$-invariant formula: $\mathrm{a}(G) = \max\{\mathrm{r}_i - i \mid s \le i < \ell\} \cup \{\mathrm{r}_J(I) - \ell\}$ (cf. [U], 1.4)).

Let us give some consequences of Proposition 20. The following corollary is a generalization of a result due to [VV].

**Corollary 21.** *Put $a = \max\{\mathrm{r}_i - i \mid s \le i < \ell\} \cup \{\mathrm{r}_J(I) - \ell\}$ and assume that $\mathrm{depth}\, A/I^i + J_s \ge \min\{d - s, d + a - i\}$ for all $1 \le i \le a + \ell$. Then the following two conditions are equivalent.*

1. *$G$ is a Cohen-Macaulay ring.*

2. *$A$ is a Cohen-Macaulay ring and $J_s \cap I^i = J_s I^{i-1}$ for all $1 \le i \le a + s$.*

*When this is the case, we have $\mathrm{a}(G) = a$, and hence the ring $\mathrm{R}(I)$ is Cohen-Macaulay if $a < 0$.*

The last assertion directly follows form $a$-invariant formula. The next corollary covers a result given by [N] in the case of ideal adic filtrations.

**Corollary 22.** *Let $A$ be a Cohen-Macaulay ring and put $a = \max\{\mathrm{r}_i - i \mid s \le i < \ell\} \cup \{\mathrm{r}_J(I) - \ell\}$. Assume that $\mathrm{depth}\, A/I^i + J_s \ge \min\{d - s, d + a - i\}$ for all $1 \le i \le a + \ell$. Then the following two conditions are equivalent.*

1. *G is a Cohen-Macaulay ring.*

2. $\mathrm{G}(I_{\mathfrak{p}})$ *is a Cohen-Macaulay ring for all* $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$ *with* $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = s$.

*When this is the case, we have* $\mathrm{a}(G) = a$, *and hence the ring* $\mathrm{R}(I)$ *is Cohen-Macaulay if* $a < 0$.

*Proof.* It is enough to prove that the condition 2 implies $J_s \cap I^i = J_s I^{i-1}$ for all $1 \leq i \leq a+s$ by Corollary 21. We will use induction on $i$. If $i = 1$, the assertion is clear. Let $i \geq 2$ and assume that it holds true for $i-1$. Take any $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A A/J_s I^{i-1}$. It suffices to show that $(J_s \cap I^i)A_{\mathfrak{p}} = J_i I^{i-1} A_{\mathfrak{p}}$ because it is trivial that $J_s \cap I^i \supseteq J_s I^{i-1}$. We may assume $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$. Thanks to Lemma 12, we get $\operatorname{depth} A/J_s I^{i-1} \geq d - s$ by the inductive hypothesis on $i$, and hence $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = s$. Since $\mathrm{G}(I_{\mathfrak{p}})$ is a Cohen-Macaulay ring, the sequence $a_1 t, a_2 t, \ldots, a_s t$, is $\mathrm{G}(I_{\mathfrak{p}})$-regular, so that $J_s A_{\mathfrak{p}} \cap I^j A_{\mathfrak{p}} = J_s I^{j-1} A_{\mathfrak{p}}$ for all $j \in \mathbb{Z}$ by [VV]. □

By [VV], when $I$ is an $\mathfrak{m}$-primary ideal, $G$ is a Cohen-Macaulay ring if so is $A$ and $\mathrm{r}_J(I) \leq 1$. Hence the following result follows from Corollary 22.

**Corollary 23.** *Let $A$ be a Cohen-Macaulay ring and put* $a = \max\{\mathrm{r}_i - i \mid s \leq i < \ell\} \cup \{\mathrm{r}_J(I) - \ell\}$. *Assume that* $\operatorname{depth} A/I^i + J_s \geq \min\{d-s, d+a-i\}$ *for all* $1 \leq i \leq a+\ell$. *Then $G$ is a Cohen-Macaulay ring if a generic reduction number $n$ is at most* 1.

Let us close this paper with the following result.

**Theorem 24.** *Let $A$ be a Cohen-Macaulay ring and assume that* $\operatorname{depth} A/I^i + J_s \geq \min\{d-s, d-s+n-i\}$ *for all* $1 \leq i \leq n-s+\ell$. *Then the following three conditions are equivalent.*

(1) *$G$ is a Cohen-Macaulay ring with* $\mathrm{a}(G) = n - s$.

(2) (i) $\mathrm{r}_J(I) \leq n - s + \ell$,
 (ii) $J_s \cap I^i = J_s I^{i-1}$ *for all* $1 \leq i \leq n$, *and*
 (iii) $\mathrm{r}_i \leq n - s + i$ *for all* $s \leq i < \ell$.

(3) (i) $\mathrm{r}_J(I) \leq n - s + \ell$,
 (ii) $J_s \cap I^i = J_s I^{i-1}$ *for all* $1 \leq i \leq n$, *and*
 (iii) $(J_i : a_{i+1}) \cap I^{n-s+i+1} = J_i I^{n-s+i}$ *for all* $s \leq i < \ell$.

*Proof.* (1) ⇒ (2): Lemma 3 implies the sequence $a_1 t, a_2 t, \ldots, a_s t$ is $G$-regular, so that the condition (ii) holds true by [VV]. The conditions (i) and (iii) follow from the $a$-invariant formula: $\mathrm{a}(G) = \max\{\mathrm{r}_i - i \mid s \leq i < \ell\} \cup \{\mathrm{r}_J(I) - \ell\}$. (2) ⇒ (3): Since the condition $(\mathrm{A}_s)$ is satisfied for $n - s$ by Corollary 13, we get $(\mathrm{B}_{\ell-1})$ is also satisfied for $n - s$ by Lemma 15 and 19. The implication (3) ⇒ (1) directly follows from Corollary 18. □

# References

[A] I. M. Aberbach, Local reduction numbers and Cohen-Macaulayness of associated graded rings, J. Algebra 178 (1995), 833-842.

[AH] I. M. Aberbach and C. Huneke, An improved Briançon-Skoda theorem with applications to the Cohen-Macaulayness of Rees algebras, Math. Ann. 297 (1993), 343-369.

[AHT] I. M. Aberbach, C. Huneke, and N. V. Trung, Reduction numbers Briancon-Skoda theorems and depth of Rees algebras, Compositio Math. 97 (1995), 403-434.

[GH] S. Goto and S. Huckaba, On graded rings associated to analytic deviation one ideals, Amer. J. Math. 116 (1994), 905-919.

[GI] S. Goto and S.-i. Iai, Gorenstein graded rings associated to ideals, Preprint 2003.

[GNN] S. Goto, Y. Nakamura, and K. Nishida, Cohen-Macaulay graded rings associated to ideals, Amer. J. Math. 118 (1996), 1197-1213.

[GW] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings I, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 179-213.

[KN] T. Korb and Y. Nakamura, On the Cohen-Macaulayness of multi-Rees algebras and Rees algebras of powers of ideals, J. Math. Soc. Japan, 50 (1998), 451-467.

[N] K. Nishida, On filtrations having small analytic deviation. Comm. Algebra 29 (2001), 2711–2729.

[Tr] N. V. Trung, The largest non-vanishing degree of graded local cohomology modules. J. Algebra 215 (1999), 481-499.

[TI] N. V. Trung and S. Ikeda. When is the Rees algebra Cohen-Macaulay?, Communications in Algebra, 17 (1989), 2893-2922.

[U] B. Ulrich, Cohen-Macaulayness of Associated Graded Rings and Reduction Numbers of Ideals, Workshop on Commutative Algebra and Its Relations to Combinatrics and Computer Algebra, ICTP, Trieste, May 1994.

[VV] P. Valabrega and G. Valla, Form rings and regular sequences, Nagoya Math. J., 72 (1978), 93-101.

Mathematics laboratory
Hokkaido University of Education, Sapporo
002-8502 JAPAN
e-mail: iai@sap.hokkyodai.ac.jp

# B-SEQUENCES AND APPROXIMATIONS OF GENERALIZED COHEN-MACAULAY IDEALS

YUKIHIDE TAKAYAMA
(RITSUMEIKAN UNIVERSITY)

## INTRODUCTION

Relation between Bourbaki sequences and local cohomomogies has been studied several times, for example, by Evans-Griffith [5] and Auslander-Buchweitz [2]. In [6], we studied approximations of generalized Cohen-Macaulay modules by (non-CM) maximal generalized Cohen-Macaulay modules.

Let $(R, \mathfrak{m})$ be a Gorenstein local ring and consider a generalized Cohen-Macaulay ideal $I \subset R$ of codimension $r(\geq 2)$, which is an ideal such that the local cohomology is $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I) \cong M_i$ $i = 0, \ldots, n-r-1$, for some finite length $R$-modules $M_i$. Then there exists a maximal generalized Cohen-Macaulay module $M$ fitting into a length $r$ long Bourbaki sequence

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow 0 \quad (exact)$$

where $F_i$ are $R$-free modules, such that $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(I)$ for $i \leq n-r$ and $H^{n-r+1}_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. If we restrict ourselves to consider $M$ satisfying the additional homological condition

$$(2) \qquad H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0 \qquad (n-r+2 \leq i \leq n-1),$$

then $M$ is unique up to direct $R$-free summands (See Proposition 8). We will call the Bourbaki sequence (1) an *approximation sequence* and $M$ an *approximation module* of $I$. The proof of this fact is carried out by constructing, with a homological method, approximation modules $M$ that always satisfy the condition (2).

In this paper, we are interested in approximation sequences that do not satisfy the condition (2). We do not know a systematic method to construct such sequences, particularly in the case of $r \geq 3$. Recall that length 2 Bourbaki sequence can be constructed by finding basic elements ([4] Chapter VII §4). In section 1 we introduce the notion of *b-sequences* for Bourbaki sequences of arbitrary length, which plays a similar role to basic elements. Then we give a characterization of long Bourbaki sequences in terms of b-sequences (Theorem 3). Section 2 gives a characterization of (non-trivial) approximation sequences that do not satisfy the condition (2) in a typical case in terms of b-sequences (Theorem 12). Some examples in the case of $r = 3$ are considered in section 3, where we focus on the special case of approximation modules $M$ such that $H^{t+1}_{\mathfrak{m}}(M) = H^{n-1}_{\mathfrak{m}}(M) = K$ (field) and $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ otherwise for $i < n$.

For a set $S$, we will denote by $\langle S\rangle$ the module generated by $S$. Also, for a module $M$ over a ring $R$, the $i$th syzygy module will be denoted by $\Omega_i(M)$.

## 1. B-SEQUENCES FOR MODULES

**1.1. b-sequences and long Bourbaki sequences.** Recall that length 2 Bourbaki sequences over a normal domain $R$

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow 0,$$

where $F$ is a $R$-free module, $M$ is a finitely generated torsion-free $R$ module and $I \subset R$ is an ideal, can be constructed by finding basic elements in $M$ ([4] Chapter VII §4). In this section, we introduce the notion of *b-sequence* , which is a couterpart of basic elements for long Bourbaki sequences

$$0 \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow M \longrightarrow I,$$

in particular for $r \geq 3$. We first prove

**Lemma 1.** *Let $R$ be a Noetherian ring and $M$ be a finitely generated $R$-module with a presentation $0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\varepsilon \longrightarrow U \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$, with a finitely generated free $R$-module $U$. Also let $f : F \longrightarrow G$ be a monomorphism of $R$-modules where $G$ is free of* $\operatorname{rank} G = q$. *Then, following are equivalent.*

(*i*) *We have an exact sequence*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{f} G \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow 0 \quad (exact)$$

*for an ideal $I \subset R$.*

(*ii*) *We have $\beta_1, \ldots, \beta_q \in U \setminus \operatorname{Ker}\varepsilon$ and $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(U, R)$ such that*

(*a*) $\operatorname{Ker}(\varphi) = \langle \beta_1, \ldots \beta_q\rangle + \operatorname{Ker}\varepsilon$, *and*

(*b*) *we have the following commutative diagram*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\beta\circ f \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta\circ f"'] & G \arrow[d, "\beta"'] & \\
0 \arrow[r] & \langle \beta_1, \ldots, \beta_q\rangle \cap \operatorname{Ker}\varepsilon \arrow[r] \arrow[d] & \langle \beta_1, \ldots, \beta_q\rangle \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

*where $\beta(m_i) = \beta_i$ for all $i$ with $\{m_1, \ldots, m_q\}$ a free basis of $G$.*

*In this case we have $I = \operatorname{Im}\varphi$.*

Now we introduce the notion of b-sequence .

**Definition 2.** *Let $R$ be a Noetherian ring. For a finitely generated $R$-module $M$ with a presentation $0 \to \operatorname{Ker}\varepsilon \longrightarrow U \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ and a $R$-module monomorphism $F \to G$ where $G$ is $R$-free, the sequence $\beta_1, \dots, \beta_q \in U \setminus \operatorname{Ker}\varepsilon$ together with $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(U, R)$ satisfying the condition (ii) in Lemma 1 is called a* b-sequence *for the pair $(f : F \to G, M)$.*

From Lemma 1 we immediagely have a characterization of long Bourbaki sequences.

**Theorem 3.** *Let $r \in \mathbb{Z}$ be $r \geq 2$. Let $R$ be a Noetherian ring and $M$ be a finitely generated $R$-module. Consider a $R$-module homomorphism $f_1 : F_1 \to M$ from a $R$-free module $F_1$. Then, following are equivalent.*

(i) *We have a long Bourbaki sequence of length $r$*

$$0 \longrightarrow F_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{\psi} I \longrightarrow 0$$

*where $I \subset R$ is an ideal and $F_i$ are $R$-free modules.*

(ii) *There exists a b-sequence $(\{\beta_i\}_i, \varphi)$ for $(\operatorname{Ker} f_1 \hookrightarrow F_1, M)$ such that*

$$0 \longrightarrow F_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} \cdots \xrightarrow{f_3} F_2 \xrightarrow{f_2} \operatorname{Ker} f_1 \longrightarrow 0 \quad (exact)$$

**Remark 4.** *Notice that a b-sequence in the case of length 2 Bourbaki sequence is not the same as a sequence of basic elements in the sense of [4]. If we choose a suitable b-sequence $\{\beta_i\}$ under a suitabule condition, $\{\varepsilon(\beta_i)\}$ can be a sequence of basic elements.*

1.2. **Sygygies of Artinian Gorenstein rings.** A b-sequence has slightly more explicit description for some class of modules over Gorenstein local rings. Let $(R, \mathfrak{m})$ be a Gorenstein local ring of dimension $n$. We will denote the dual $\operatorname{Hom}_R(-, R)$ by $(-)^*$. Let $J_i \subset R$ $(i = 0, \dots, d)$ $(d \leq n - r - 1)$ be Gorenstein ideals of grade $n$ and set $M_i = R/J_i$. Let $(F_\bullet^{(i)}, \partial_\bullet^{(i)})$ be a minimal $R$-free resolution of $M_i$. By self-duality of the resolution we immediately have

**Lemma 5.** *For all $i$, $\Omega_i(M_i) \cong \Omega_{n-i+1}(M_i)^* \cong \partial^*_{n-i+1}(\Omega_{n-i+1}(M)^*)$*

Now consider the module $M = \bigoplus_{i=0}^d \Omega_i(M_i)$. By Lemma 5 we have

**Proposition 6.** *Let $(\{\beta_i\}, \varphi)$ be a b-sequence for $M$. Then $\varphi = \bigoplus_{i=0}^d a_i \circ \partial_i^{(i)}$ where $a_i \in \partial_i^*(\Omega_i(M_i)^*)$.*

This range of $a_i$ has more explicit description if $J_i = \mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ and $R = S = K[x_1, \dots, x_n]$.

For $I = \{i_1, \dots, i_u\} \subset \{1, \dots, n\} = [n]$, we deonte by $e_I$ a base $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_u}$ of the Koszul complex $K_\bullet$ over $S$ of sequences $x_1, \dots, x_n$. A dual base to $e_I$ is denoted by $e_I^*$. For $J, K \subset [n]$ with $J \cap K = \emptyset$ we define $\sigma(J, K) = (-1)^i$ where $i = \sharp\{(j, k) \in J \times K \mid j > k\}$. Then we have $x_J \wedge x_K = \sigma(J, K) x_{J \cup K}$.

**Corollary 7.** *Let $M_i = K(= R/\mathfrak{m})$ for all $i$. Then $a_i$ in Proposition 6 is an elemet from*

$$\left\langle \sum_{k=1}^{i}(-1)^{k+1}\sigma(J\backslash\{j_k\},[n]-(J\backslash\{j_k\}))x_{j_k}e^*_{[n]-(J\backslash\{j_k\})} : J=\{j_1,\dots,j_i\}\subset[n] \right\rangle$$

## 2. Approximation of generalized Cohen-Macaulay ideals

2.1. **Approximation modules.** Let $(R,\mathfrak{m})$ be a Gorenstein local ring and consider a generalized Cohen-Macaulay ideal $I \subset R$ of codimension $r$ ($r \geq 2$) such that $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I) = M_i$ for $i = 0,\dots,n-r-1$ where $M_i$ are finite length $R$-modules. Then we have the following result, which is an immediate consequence from Lemma 1.3 [1] and Theorem 1.1 [6].

**Proposition 8.** *For a generalized Cohen-Macaulay ideal $I \subset R$ of codimension $r(\geq 2)$ there exists a maximal generalized Cohen-Macaulay module $M$ fitting into a Bourbaki sequence*

$$0 \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow I$$

*such that $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(I)$ for $i \leq n-r$, $H^{n-r+1}_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Moreover, if we assume the homological condition* (2), *then $M$ is unique up to $R$-free direct summands.*

Notice that in Proposition 8 , the ideal $I$ is approximated by the module $M$ in a similar sense to Auslander-Buchweitz (see [6] for detail). We will call the maximal Cohen-Macaulay module $M$ (or long Bourbaki sequence) an *approximation module* (or *approximation sequence*).

More specific result can be obtained when we consider a special class of ideals.

**Proposition 9.** *Let $(R,\mathfrak{m})$ be a regular local ring and let $I \subset R$ be an ideal of codimension $r$ ($\geq 2$). Assume that we have an approximation sequence*

$$0 \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow \Omega_{t+1}(N) \oplus H \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

*for some $R$-free modules $H$, $F_1,\dots,F_{r-1}$ and a finite length $R$-module $N$. Then, we have*

$$H^i_{\mathfrak{m}}(R/I) = \begin{cases} N & i=t \\ 0 & i<n-r, i\neq t \end{cases} \tag{3}$$

*Also the converse holds if*

(i) $r = 2$, *or*

(ii) $r \geq 3$ *and we assume the homological condition* (2) *for the approximation module $M$ of $I \subset R$.*

As proved in Proposition 8 and Proposition 9, the homological condition (2) assures the uniqueness of approximation modules $M$. If we do not assume this condition, we have a large varieties of $M$ even in cohomologically very simple cases. For example,

**Proposition 10.** *Let $r \geq 3$ and $0 \leq t \leq n-r-1$ be integers. Let $S = K[x_1, \dots, x_n]$ be a polynomial ring over a field $K$ and $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$. Let $M$ be a maximal generalized CM module over $S$ with* $\operatorname{depth} M = t+1$. *Consider a minimal $S$-free resolution of $M$:*

$$F_\bullet : 0 \longrightarrow F_{n-t-1} \xrightarrow{\varphi_{n-t-1}} F_{n-t-2} \xrightarrow{\varphi_{n-t-2}} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0.$$

*Also let $N$ be a non-zero finite length module over $S$. Then the following are equivalent.*

(*i*) *For any $l \in \mathbb{Z}$ such that $n-r+2 \leq l \leq n-1$, we have*

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) = \begin{cases} K & \text{if } i = t+1 \\ N & \text{if } i = l \\ 0 & \text{if } i < n, i \neq t+1, l \end{cases}$$

(*ii*) $\Omega_{n-l}(M) \cong F_{n-l}/E_{n+t+2-l}$, *and* $N^\vee \cong \Omega_{n-l}(M)^*/\operatorname{Im}\varphi^*_{n-l}$.
*where we denote $\Omega_s(K)$ simply by $E_s$, and we define* $(-)^* = \operatorname{Hom}_S(-, S(-n))$ *and* $(-)^\vee = \operatorname{Hom}_S(-, K)$.

A typical class of the modules that do not satisfy the homological condition (2) is $\bigoplus_{i=0}^{n-r-1} \Omega_{i+1}(M_i) \oplus \bigoplus_{i=n-r+2}^{n-1} \Omega_i(N_i)$ for finite length modules $M_i$ and $N_i$, which we will consider in the next subsection.

2.2. **Approximation sequences of non-trivial type.** In this subsection we assume $(R, \mathfrak{m})$ to be regular local. In the proof of Proposition 8 we construct approximation modules $M$ in a homological method, which always entails the homological condition (2). See [6] and [1]. Now we are interested in the following problem: how can we construct apprximation sequences as in Proposition 8 that do not satisfy the homological condition (2)? The simplest answer to this question is to make the direct sum of an approximation sequence as in Proposition 8 and the following exact sequences:

$$0 \longrightarrow G^{(i)}_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow G^{(i)}_i \longrightarrow \Omega_i(N_i) \longrightarrow 0 \qquad (i = n-r+2, \dots, n-1)$$

where $N_i$ are any finite length $R$-modules and $G^{(i)}_\bullet$ are minimal $R$-free resolutions of $N_i$. Then we have a Bourbaki sequence with the approximation module $M' = M \oplus \bigoplus_{i=n-r+2}^{n-1} \Omega_i(N_i)$ and the map from $M'$ to the ideal $I$ is trivial on $\bigoplus_{i=n-r+2}^{n-1} \Omega_i(N_i)$ part. We will call this an approximation sequence of *trivial type*.

Now we will consider approximation sequences of non-trivial type. Let $r \in \mathbb{Z}$ be $r \geq 2$ and $n \geq r+1$. Consider a long Bourbaki sequence of length $r$

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{g} M \oplus N \xrightarrow{\phi} I \longrightarrow 0$$

where $I \subset R$ is a generalized Cohen-Macaulay ideal of codimension $r$, $F_i$ are $R$-free modules, and $M = \bigoplus_{i=0}^{n-r-1} \Omega_{i+1}(M_i)$ and $N = \bigoplus_{i=n-r+2}^{n-1} \Omega_i(N_i)$. From this sequence, we construct the following diagram, where $U_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ and

$V_\bullet \xrightarrow{\eta} N$ are minimal free resolutions of $M$ and $N$, and the third row is the mapping cone $C(\alpha_\bullet)$ of a chain map $\alpha_\bullet$, which is a $R$-free resolution of $I$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{g} & \operatorname{Ker}\phi & \to 0 \\
 & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_1 \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & U_1 \oplus V_1 & \longrightarrow & U_0 \oplus V_0 & \xrightarrow{\varepsilon\oplus\eta} & M \oplus N & \to 0 \\
 & & & & & & \downarrow \phi & & \\
\cdots & \longrightarrow & U_1 \oplus V_1 \oplus F_1 & \longrightarrow & U_0 \oplus V_0 & \longrightarrow & I & \to 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Under this situation, we have

**Lemma 11.** *Following are equivalent.*

(*i*) *the approximation sequence* (4) *is of non-trivial type*

(*ii*) *For any free basis* $\{m_i\}_i$ *of* $F_1$ *there exists an index* $i$ *such that* $\alpha_1(m_i) \notin U_0$ *and* $\alpha_1(m_i) \notin V_0$.

From Lemma 11, we immediately have

**Theorem 12.** *The appriximation sequence (4) is of non-trivial type if and only if*

(*i*) *there exists a b-sequence* $\{\beta_i\}_i (\subset U_0 \oplus V_0)$ *and*

(*ii*) *the submodule* $N := \langle \{\beta_i\}_i \rangle$ *of* $U_0 \oplus V_0$ *cannot be decomposed in the form of* $N = A \oplus B$ *for some* $(0 \neq) A \subset U_0$ *and* $(0 \neq) B \subset V_0$

## 3. Some Applications in Codimension 3

3.1. **b-sequences for $E_{t+1}$ and $E_{t+1} \oplus E_{n-1}(d)$ $(d \in \mathbb{Z})$.** As an application of our theory, we will consider a special case. Let $S = K[x_1, \dots, x_n]$ and $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$. We consider the standard grading with $\deg(x_i) = 1$ for all $i$. Also, in the following, the dual $(-)^*$ always denotes $\operatorname{Hom}_S(-, S(-n))$. We now consider the graded approximation module $M = E_{t+1}$ and $E_{t+1} \oplus E_{n-1}(d)$, for arbitrarily $d \in \mathbb{Z}$.

First of all, by Lemma 1 and Corollary 7 we have the following.

**Corollary 13.** *Following are equivalent.*

(*i*) *We have a length* 3 *Bourbaki sequence*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} E_{t+1} \oplus E_{n-1}(d) \longrightarrow I(c) \longrightarrow 0 \quad (exact)$$

*where* $I \subset S$ *is a graded ideal and* $F$ *and* $G$ *are finitely generated* $S$*-free modules.*

(*ii*) $\operatorname{rank} F = \operatorname{rank} G - n + 2 - \binom{n-1}{t}$ *and we have a b-sequence* $(\{\beta_i\}_i, \varphi)$ *for* $(f, E_{t+1} \oplus E_{n-1}(d))$ *where* $\beta_i \in K_{t+1} \oplus K_{n-1}(d) \backslash E_{t+2} \oplus E_n(d)$ *and*

$\varphi = (a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, *with*

$$\mathcal{A} = \left\langle \sum_{j=1}^{n-t} (-1)^{j+1} \sigma(L \backslash \{i_j\}, ([n] \backslash L) \cup \{i_j\}) x_{i_j} e^*_{([n]\backslash L) \cup \{i_j\}} \mid L = \{i_1, \ldots, i_{n-t}\} \subset [n] \right\rangle$$

$$\mathcal{B} = \langle (-1)^i x_j e^*_{[n]\backslash\{i\}} - (-1)^j x_i e^*_{[n]\backslash\{j\}} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle,$$

*and thus* $\varphi : K_{t+1} \oplus K_{n-1}(d) \to S(-n)$ *is a degree 'n+c' homomorphism. In this case, we have* $I = \varphi(K_{t+1} \oplus K_{n-1}(d))(-c)$

We also consider the case of $M = E_{t+1}$.

**Corollary 14.** *Following are equivalent.*

(*i*) *We have a length* $r$ $(\geq 3)$ *Bourbaki sequence*

$$0 \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} E_{t+1} \longrightarrow I(c) \longrightarrow 0 \quad (exact)$$

*where* $I \subset S$ *is a graded ideal, and* $F_i$ *are finitely generated* $S$*-free modules.*

(*ii*) *We have* $\operatorname{rank} \operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{rank} F_1 + 1 - \binom{n-1}{t}$ *and a b-sequence* $(\{\beta_i\}_i \subset K_{t+1} \backslash E_{t+2}, \varphi \in \mathcal{A})$ *for* $(\operatorname{Ker} f_1 \hookrightarrow F_1, E_{t+1})$ *where*

$$\mathcal{A} = \left\langle \sum_{j=1}^{n-t} (-1)^{j+1} \sigma(L \backslash \{i_j\}, ([n] \backslash L) \cup \{i_j\}) x_{i_j} e^*_{([n]\backslash L) \cup \{i_j\}} \mid L = \{i_1, \ldots, i_{n-t}\} \subset [n] \right\rangle$$

*and thus* $\varphi : K_{t+1} \to S(-n)$ *defines a degree 'n + c' homomorphism. In this case, we have* $I = \varphi(K_{t+1})(n - c)$.

A small application of this explicit formula is

**Corollary 15.** *There is no graded ideal* $I \subset S$ *of codimension* $r$ $(\geq 2)$ *of* $\operatorname{depth}(S/I) = 0$ *such that local cohomology is trivial except* $H^0_{\mathfrak{m}}(S/I) = K(c)$ *(for some* $c \in \mathbb{Z}$*) and having a length* $r$ *approximation sequence with approximation module* $E_1$.

**Remark 16.** *By Proposition 9 it is assured that an ideal as in Corollary 15 has a length* $r$ *approximation sequence with approximation module* $E_1 \oplus H$, *with non-trivual* $S$*-free module* $H$. *We will show later that there exists an approximation sequence with approximation module* $E_1 \oplus E_{n-1}$, *due to Corollary 13. See Example 20.*

3.2. **Numerical condition for codimension 3.** Now we consider in par ticular the case of Corollary 13 . The existence of approximation sequences as in Corollary 13 only implies that $\operatorname{codim} I \leq 3$. To assure that the codimension is exactly 3, we need additional condition. We have

**Proposition 17.** *Let* $n \geq 4$ *and* $t \leq n-4$. *Assume that we have the following long Bourbaki sequence*

$$(5) \quad 0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{p} S(-a_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{q} S(-b_i) \longrightarrow E_{t+1} \oplus E_{n-1}(d) \longrightarrow I(c) \longrightarrow 0$$

*with $I \subset S$ a graded ideal and $c \in \mathbb{Z}$. Then we have* $\operatorname{codim} I \le 3$ *and the equality holds if and only if*

1. $q = p + \binom{n-1}{t} + n - 2$;
2. $\sum_{i=1}^{q} b_i - \sum_{i=1}^{p} a_i = n^2 - (2+d)n + c + d + \binom{n-2}{t-1} + \binom{n-1}{t} t$;
3. *and*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q} b_i^2 - \sum_{i=1}^{p} a_i^2 &= n^3 - (3+2d)n^2 + (d^2+4d+1)n - c^2 - d^2 \\ &\quad + \binom{n-1}{t}(t+1)^2 - \binom{n-2}{t}(2t+1) - 2\binom{n-3}{t-1}\end{aligned}$$

3.3. **Examples.** Now we give a few concrete examples in codimension 3.

**Example 18** (approximation module $E_{t+1}$ with $t = \operatorname{depth} S/I = 1$). *We first give an application of Corollary 14. Namely, a codimension 3 ideal $I$ with approximation module $E_{t+1}$. Let $t = 1$ and $n = 6$. We can choose a b-sequence $(\{\beta_i\}_i, a)$ with $a \in \mathcal{A}$ and $\beta_i \in K_2 \backslash E_3$ as follows:*

$$\begin{aligned} a &= x_1x_4e_{14}^* + x_1x_5e_{15}^* + x_1x_6e_{16}^* + x_2x_4e_{24}^* + x_2x_5e_{25}^* \\ &\quad + x_2x_6e_{26}^* + x_3x_4e_{34}^* + x_3x_5e_{35}^*sy + x_3x_6e_{36}^* \\ \beta_1 &= e_{12}, \quad \beta_2 = e_{13}, \quad \beta_3 = e_{23}, \quad \beta_4 = e_{45}, \quad \beta_5 = e_{46}, \quad \beta_6 = e_{56}\end{aligned}$$

*Then we obtain the long Bourbaki sequence*

$$0 \longrightarrow S^2(-3) \xrightarrow{f} S^6(-2) \xrightarrow{g} E_2 \xrightarrow{\varphi} I \longrightarrow 0.$$

*where*

$$f = \begin{bmatrix} x_3 & -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 & -x_5 & x_4 \end{bmatrix},$$

*$g(m_i) = \partial_2(\beta_i)$, $i = 1, \dots, 6$, with $S^{-6}(-2) = \bigoplus_{i=1}^{6} S \cdot m_i$, and $\varphi(\partial_2(e_{ij})) = x_ix_j$ if $(i,j) = (1,2), (1,3), (2,3), (4,5), (4,6), (5,6)$ and $\varphi(\partial_2(e_{ij})) = 0$ otherwise. and $I = (x_1, x_2, x_3)(x_4, x_5, x_6)$, with* $\operatorname{codim} I = 3$.

**Example 19** (approximation module $E_{t+1} \oplus E_{n-1}$ with $t = \operatorname{depth} S/I = 1$). *We continue to consider the situation in Example 18. As an application of Corollary 13, we can see that the same ideal fits into a long Bourbaki sequence with approximation module $E_{t+1} \oplus E_{n-1} = E_1 \oplus E_5$. In this case, we can set $a \in \mathcal{A}$ as in Example 18 and*

$$b = -x_1^2x_2x_4B_{14} = x_1^2x_2x_4^2e_{23456}^* + x_1^3x_2x_4e_{12356}^* \in \mathcal{B}.$$

*Also we set $\beta_1, \dots, \beta_6$ to be the same as those in Example 18 and $\beta_7 = x_1x_2x_4e_{14} - e_{23456}$, $\beta_8 = x_1^2x_2e_{14} - e_{12356}$, $\beta_9 = e_{13456}$, $\beta_{10} = e_{12456}$, $\beta_{11} = e_{12346}$, $\beta_{12} = e_{12345}$. Then we have an approximation sequence of non-trivial type*

$$0 \longrightarrow S^2(-3) \oplus S(-6) \xrightarrow{f} S^6(-2) \oplus S^6(-5) \xrightarrow{g} E_2 \oplus E_5 \xrightarrow{\varphi} I \longrightarrow 0$$

*where*

$$f = \begin{bmatrix} x_3 & -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 & -x_5 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & -x_4 & x_2 & -x_3 & -x_5 & x_6 \end{bmatrix},$$

$g(m_i) = (\partial_2 \oplus \partial_5)(\beta_i)$, $i = 1, \dots, 12$, *with* $S^6(-2) \oplus S^6(-5) = \bigoplus_{i=1}^{12} S \cdot m_i$, *and* $\varphi(\partial_2(e_{ij})) = x_i x_j$ *for* $(i,j) = (1,2), (1,3), (2,3), (4,5), (4,6), (5,6)$ *and* $\varphi(\partial_2(e_{ij})) = 0$ *otherwise. Furthermore,* $\varphi(\partial_5(e_{23456})) = x_1^2 x_2 x_4^2$, $\varphi(\partial_5(e_{12356})) = x_1^3 x_2 x_4$, *and* $\varphi(\partial_5(e_{ijklm})) = 0$ *otherwise. The ideal* $I$ *is the same as that in Example 18. We can also check that this sequence satisfies the numerical condition in Theorem 17*

**Example 20** (approximation module $E_{t+1} \oplus E_{n-1}(d)$ with $t = \operatorname{depth} S/I = 0$). *By Corollary 15, we do not have a long Bourbaki sequence with an approximation module* $E_1$ *and a codimension* 3 *generalized CM ideal* $I$. *However, there are long Bourbaki sequences with approximation modules* $E_1 \oplus E_5(d)$ *for* $d \in \mathbb{Z}$, *which is an application of Corollary 13. Let* $k = 1$ *and* $n = 6$. *Then, we choose a b-sequence* $(\{\beta_i\}_i, \varphi)$ *as follows: We set* $\beta_i \in K_1 \oplus K_5(1)$ *to be*

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -x_6 e_{12345} + x_5 e_{12346}, & \beta_2 &= x_6^5 e_3 - x_1^2 e_{13456}, \\ \beta_3 &= x_6^5 e_2 - x_1^2 e_{12456}, & \beta_4 &= x_2^4 x_5 e_2 - x_1 e_{12345}, \\ \beta_5 &= x_2^4 x_6 e_2 - x_1^2 e_{12346}, & \beta_6 &= -x_6^4 e_{12346} + x_2^4 e_{12456}, \\ \beta_7 &= e_{23456}, & \beta_8 &= e_{12356}. \end{aligned}$$

*Also let* $\varphi = (a, b)$ *be*

$$\begin{aligned} a &= x_1^3 e_1^* + x_1^2 x_2 e_2^* + x_1^2 x_3 e_3^* + x_1^2 x_4 e_4^* + x_1^2 x_5 e_5^* + x_1^2 x_6 e_6^* \\ b &= x_2^5 x_6 e_{12346}^* + x_2^5 x_5 e_{12345}^* + x_3 x_6^5 e_{13456}^* + x_2 x_6^5 e_{12456}^* \end{aligned}$$

*Then we have a non-trivial approximation sequence*

$$0 \to F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} E_1 \oplus E_5(1) \xrightarrow{\phi} I(2) \to 0$$

*where* $g(m_i) = \beta_i$, $i = 1, \dots, 8$, *and* $F = S(-10) \oplus S^2(-7) = \langle u, v, w \rangle$ *with* $f(u) = x_2^4 m_3 - x_6^4 m_4 + x_1^2 m_6$, $f(v) = -x_1^2 m_1 + x_6 m_4 - x_5 m_5$ *and* $f(w) = -x_1^2 m_1 - x_2 m_2 + x_3 m_3 - x_1^3 m_7 + x_1^2 x_4 m_8$. *The map* $\phi$ *is as follows:* $\phi(x_i) = x_i x_1^2$ $(i = 1, \dots, 6)$, $\phi(\partial_5(e_{12345})) = x_2^5 x_5$, $\phi(\partial_5(e_{12346})) = x_2^5 x_6$, $\phi(\partial_5(e_{12356})) = 0$, $\phi(\partial_5(e_{12456})) = x_2 x_6^5$, $\phi(\partial_5(e_{13456})) = x_3 x_6^5$, *and* $\phi(\partial_5(e_{23456})) = 0$. *The ideal is* $I = \operatorname{Im} \varphi = x_1^2 \mathfrak{m} + (x_2^5 x_6, x_2^5 x_5, x_3 x_6^5, x_2 x_6^5)$. *Finally we can check that this approximation sequence satisfies the numerical condition of Theorem 17, so that* $\operatorname{codim} I = 3$.

## References


[1] M. Amasaki, Basic sequences of homogeneous ideals in polynomial rings, J. Algebra 190 (1997) 329-360.

[2] M. Auslander and R-O. Buchweitz, The homological theory of Cohen-Macaulay approximations, Memo. Soc. Math. de France **38**, (1989) 5-37.

[3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge studies in advanced mathematics **39**, Cambridge, 1993.

[4] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Commutative Algebra, Chapter 1-7*, Springer, 1989.

[5] G. Evans and P. Griffith, Local cohomology modules for normal domains, J. London Math. Soc. **19**, (1979) 277-284.

[6] J. Herzog and Y. Takayama, Approximations of Generalized Cohen-Macaulay Modules, Illnois J. Math., **47** (4), (2003) 1287-1302.

YUKIHIDE TAKAYAMA, DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, RITSUMEIKAN UNIVERSITY, 1-1-1 NOJIHIGASHI, KUSATSU, SHIGA 525-8577, JAPAN

*E-mail address*: takayama@se.ritsumei.ac.jp

# Buchsbaum Stanley–Reisner rings with linear resolution

Naoki Terai (Saga University)
and
Ken-ichi Yoshida (Nagoya University)

## 1. Introduction

Let $\Delta$ be a simplicial complex on $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Let $k[\Delta] = S/I_\Delta$ denote the *Stanley–Reisner ring* of $\Delta$ over a field $k$, where $S = k[X_1, \ldots, X_n]$ and $I_\Delta$ is the ideal generated by all square-free monomials $X_{i_1} \cdots X_{i_p}$ such that $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}\} \notin \Delta$. Let

$$0 \to \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{p,j}(A)} \xrightarrow{\varphi_p} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{1,j}(A)} \xrightarrow{\varphi_1} S \to A := S/I_\Delta \to 0$$

be a graded minimal free resolution of $A$ over $S$. Then

$$\begin{aligned} \operatorname{reg} A &:= \max\{j - i \mid \beta_{ij}(A) \neq 0\}, && \textit{the Castelnuovo-Mumford regularity of } A; \\ \operatorname{indeg} A &:= \min\{j \mid (I_\Delta)_j \neq 0\}, && \textit{the initial degree of } A. \end{aligned}$$

In general, $\operatorname{reg} A \geq \operatorname{indeg} A - 1$, and we say that $A = k[\Delta]$ has a *$q$-linear resolution* (abbr., $A$ is $q$-linear or $\Delta$ is $q$-linear) if the equality holds and $\operatorname{indeg} A = q$. That is, $A$ is $q$-linear if and only if the graded minimal free resolution of $A$ over $S$ is the following form:

$$0 \to S(-(q+p-1))^{\beta_p} \to S(-(q+p-2))^{\beta_{p-1}} \to \cdots \to S(-q)^{\beta_1} \to S \to A \to 0.$$

If we put $\deg X_i = 1$ for all $i$, $A = k[\Delta]$ is a homogeneous reduced $k$-algebra with the unique homogeneous maximal ideal $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)A$. Also, if we put $d = \max\{\#F \mid F \in \Delta\}$ and $c = n - d$, then $\dim A = d$ and $\operatorname{codim} A = c$.

Let $f_i = f_i(\Delta)$, $0 \leq i \leq d-1$, denote the numbers of $i$-faces in $\Delta$. We define $f_{-1} = 1$. We call $f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$ the *$f$-vector* of $\Delta$.

Also, we define the *$h$-vector* $h(\Delta) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ of $\Delta$ by

$$\sum_{i=0}^{d} \frac{f_{i-1}t^i}{(1-t)^i} = \frac{h_0 + h_1 t + \cdots + h_d t^d}{(1-t)^d}. \tag{1.1}$$

Let $e(k[\Delta])$ denote the *multiplicity* of $k[\Delta]$. It is well known that $e(k[\Delta]) = f_{d-1}(\Delta) = \sum_{i=0}^{d} h_i(\Delta)$.

**Definition 1.1** ([StVo]). Let $A = k[\Delta]$ be a $d$-dimensional Stanley–Reisner ring. Then it is *Buchsbaum* if $H^i_{\mathfrak{m}}(A) = [H^i_{\mathfrak{m}}(A)]_0$ for all $i < d$. Then the invariant

$$I(A) := \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \dim_k [H^i_{\mathfrak{m}}(A)]_0.$$

is called the *$I$-invariant* or *Buchsbaum invariant* of $A$.

In this talk, the following two theorems play important roles.

**Theorem 1.2 (Hochster's formula).** *Let $k[\Delta]$ be a Stanley–Reisner ring and $\mathfrak{m}$ the unique homogeneous maximal ideal of $k[\Delta]$. Then the Hilbert series of the $i$th local cohomology* *module* $H^i_{\mathfrak{m}}(k[\Delta])$ *is given by*

$$F(H^i_{\mathfrak{m}}(k[\Delta]),t) = \sum_{F\in\Delta} \dim_k \widetilde{H}_{i-\#(F)-1}(\mathrm{link}_{\Delta} F;k) \left(\frac{t^{-1}}{1-t^{-1}}\right)^{\#(F)},$$

*where* $\mathrm{link}_{\Delta}(F) = \{G \in \Delta \mid F \cap G = \emptyset,\ F \cup G \in \Delta\}$.

If we define the *a-invariant* of a $d$-dimensional graded ring $A$ by

$$a(A) = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid [H^d_{\mathfrak{m}}(A)]_m \neq 0\},$$

then we always have $a(k[\Delta]) \leq 0$.

**Theorem 1.3 (Hoa–Miyazaki theorem).** *If $A$ is a Buchsbaum homogeneous $k$-algebra, then* $\operatorname{reg} A \leq a(A) + \dim A + 1$.

## 2. Motivation

In [EiGo], Eisenbud and Goto investigated rings with linear resolution and showed the significance of this property. Let us pick up some important results in the class of Stanley–Reisner rings. Fröberg [Fr1, Fr2] classified all $\Delta$ for which $k[\Delta]$ has 2-linear resolution. Hibi [Hi] gave a necessary and sufficient condition for a Buchsbaum Stanley–Reisner ring to have linear resolution in terms of the reduced homology of the simplicial complex and the $a$-invariants of its links.

Also, there is a well-known criterion for a Cohen–Macaulay (Stanley–Reisner) ring to have linear resolution in terms of its $h$-vector or its multiplicity with given initial degree and codimension (see e.g. [EiGo]). However, as for Buchsbaum case, it seems that there is no such a criterion. Hence we want to study the structure of Buchsbaum Stanley–Reisner rings with linear resolution in connection with their multiplicities.

## 3. Some basic results and fundamental conjecture

Now let $A = k[\Delta]$ be a $d$-dimensional Buchsbaum Stanley–Reisner ring with $q$-linear resolution, and put $c = \operatorname{codim} A$. Then we have $q \leq d+1$. Indeed, by Hochster's formula, we have $q = \operatorname{indeg} A = \operatorname{reg} A + 1 \leq d+1$. If $q = d+1$, then $\Delta$ is just a $(d-1)$-skeleton of $2^V$. So we may assume that $2 \leq q \leq d$. Then since $A$ is a Buchsbaum Stanley–Reisner ring, $[H^i_{\mathfrak{m}}(A)]_j = 0$ for all $i < d$ and for all $j \neq 0$. On the other hand, since $A$ is $q$-linear, $[H^i_{\mathfrak{m}}(A)]_j = 0$ for all $j \neq q-1-i$. In particular, $H^i_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ for all $i \neq q-1,\ d$. Also, $a(A) \leq q-d-1$. Furthermore, by Hoa-Miyazaki theorem, we have that $q - 1 = \operatorname{reg} A \leq a(A)+d+1$. In particular, $a(A) = q-d-1$ or $q-d-2$. By the above observation, we have

**Proposition 3.1.** *Let $2 \leq q \leq d$. Let $A = k[\Delta]$ be a $d$-dimensional Buchsbaum Stanley–Reisner ring with $q$-linear resolution, and put $c =$* $\operatorname{codim} A$. *Then*

(1) $H^i_{\mathfrak{m}}(A) = [H^i_{\mathfrak{m}}(A)]_0 \cong \widetilde{H}_{i-1}(\Delta;k) = 0$ *for all* $i \neq q-1, d$.
(2) $H^{q-1}_{\mathfrak{m}}(A) = [H^{q-1}_{\mathfrak{m}}(A)]_0 \cong \widetilde{H}_{q-2}(\Delta;k)$.
(3) $[H^d_{\mathfrak{m}}(A)]_0 = \widetilde{H}_{d-1}(\Delta;k) = 0$. *In fact,* $a(A) = q-d-1$ *or* $= q-d-2$.

Hence it seems that $h := \dim_k H^{q-1}_{\mathfrak{m}}(A)$ is an important invariant. We focus this invariant and prove the following fundamental theorem on Buchsbaum Stanley–Reisner rings with linear resolution. See also [TeYo], [EiGo] and [Hi].

**Theorem 3.2 (Properties of Buchsbaum Stanley–Reisner rings with linear resolution).** *Let $c, d, q$ be integers with $c \geq 1$ and $2 \leq q \leq d$. Suppose that $A$ is a $d$-dimensional Buchsbaum Stanley–Reisner ring with $q$-linear resolution and* $\operatorname{codim} A = c$. *Put $h = \dim_k H_{\mathfrak{m}}^{q-1}(A)$. Then*

(1) $e(A) = \binom{c+q-1}{q-1} - h\binom{d-1}{q-1}$ *and* $I(A) = h\binom{d-1}{q-1}$.

(2) *The h-vector of $A$ is* $\left(1,\ c,\ \cdots,\ \binom{c+q-2}{q-1},\ -\binom{d}{q}h,\ \binom{d}{q+1}h, \cdots, (-1)^{d-q+1}\binom{d}{d}h\right)$.

(3) *$h$ satisfies the following inequality:*

$$0 \leq h \leq h_{c,d,q} := \frac{(c+q-2)\cdots(c+1)c}{d(d-1)\cdots(d-q+2)}. \tag{3.1}$$

*Proof.* (1) follows from (2). First, we prove (2). Since $\operatorname{indeg} A = q$, one has

$$h_p = \binom{c+p-1}{p} \quad \text{for all } p = 0, 1, \ldots, q-1.$$

On the other hand, by the similar argument as in the proof of [Te1, Theorem 2.1], we have

$$\dim_k[H_{\mathfrak{m}}^d(A)]_{-1} = d \cdot h_d + h_{d-1}$$

$$\dim_k[H_{\mathfrak{m}}^d(A)]_{-2} = \binom{d+1}{2}h_d + d\cdot h_{d-1} + h_{d-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\dim_k[H_{\mathfrak{m}}^d(A)]_{-p} = \binom{d+p-1}{p}h_d + \binom{d+p-2}{p-1}h_{d-1} + \cdots + d\cdot h_{d-p+1} + h_{d-p}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\dim_k[H_{\mathfrak{m}}^d(A)]_{q-d} = \binom{2d-q-1}{d-q}h_d + \binom{2d-q-2}{d-q-1}h_{d-1} + \cdots + d\cdot h_{q+1} + h_q.$$

By Proposition 3.1, we have

$$(-1)^{d-1}h_d = \widetilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i=-1}^{d-1}(-1)^i \dim_k \widetilde{H}_i(\Delta; k) = (-1)^q h$$

and $\dim_k[H_{\mathfrak{m}}^d(A)]_j = 0$ for all $j = -1, -2, \ldots, q-d$. Solving the above equations, one can easily obtain that $h_p = (-1)^{p-q+1}\binom{d}{p}h$ for all $p = q, \ldots, d-1, d$. That is, we get (2). Also,

$$\binom{2d-q}{d-q+1}h_d + \cdots + d\cdot h_q + h_{q-1} = \dim_k[H_{\mathfrak{m}}^d(A)]_{q-d-1} \geq 0$$

implies that

$$\binom{c+q-2}{q-1} - \binom{d}{q-1}h \geq 0.$$

Namely, $h \leq h_{c,d,q}$, as required. □

Based on the above theorem, we pose the following conjecture:

**Conjecture 3.3.** *Let $d$, $c$, $q$, $h$ be integers with $c \geq 1$, $h \geq 0$, and $2 \leq q \leq d$. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *There exists a Buchsbaum Stanley–Reisner ring* $A = k[\Delta]$ *with $q$-linear resolution such that* $\dim A = d$, $\operatorname{codim} A = c$ *and* $\dim H_{\mathfrak{m}}^{q-1}(A) = h$.
(2) *The above inequality* (3.1) *holds.*

**Remark 3.4.** *In case of $q = 2$, the above conjecture is easy to prove. Also, we can prove that this is also true in the case of $q = d = 3$; see also the last section.*

## 4. Buchsbaum Stanley–Reisner rings with Minimal multiplicity of type $q$

In the following, let $c$, $d$, $q$ be integers with $c \geq 2$, $2 \leq q \leq d$. Let $A = k[A_1]$ be a homogeneous Buchsbaum $k$-algebra of dimension $d$ with the unique homogeneous maximal ideal $\mathfrak{m} = A_+$. In [Go1] and [Go2], Goto proved the following two inequalities

$$\dim_k A_1 \leq e(A) + d - 1 + I(A), \quad \text{and} \quad e(A) \geq 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} l_A(H_{\mathfrak{m}}^i(A))$$

and called the ring $A$ *a Buchsbaum ring with maximal embedding dimension* (resp. *a Buchsbaum ring with minimal multiplicity*) if equality holds in the first (resp. second) inequality. Also, he proved that for any Buchsbaum homogeneous $k$-algebra $A$, $A$ has maximal embedding dimension if and only if it has 2-linear resolution, and that if $A$ has minimal multiplicity then it has maximal embedding dimension.

In this section, in the class of Stanley–Reisner rings, we define the notion of *Buchsbaum ring with minimal multiplicity of type q* and prove that such a ring has $q$-linear resolution; see Theorem 4.1. Also, $A = k[\Delta]$ is a Buchsbaum Stanley–Reisner ring with minimal multiplicity of type 2 if and only if it has minimal multiplicity in the sense of Goto; see Proposition 4.2.

**Theorem 4.1 (Minimal multiplicity of type $q$).** *Let $A = k[\Delta]$ be a $d$-dimensional Buchsbaum Stanley–Reisner ring, and put* $\operatorname{indeg} A = q$ *and* $\operatorname{codim} A = c$. *Then*

(1) *$e(A)$ satisfies the following inequality:*

$$e(A) \geq \frac{c+d}{d} \binom{c+q-2}{q-2}.$$

*A is said to have a minimal multiplicity of type q if the equality holds.*

(2) *If $A$ has minimal multiplicity of type $q$, then it has $q$-linear resolution.*

**Proposition 4.2.** *Let $A = k[\Delta]$ be a $d$-dimensional Buchsbaum Stanley–Reisner ring, and put* $\operatorname{indeg} A \geq 2$ *and* $\operatorname{codim} A = c$. *Then the following conditions are equivalent:*

(1) *$A$ has a minimal multiplicity in the sense of Goto* [Go2]. *That is,*

$$e(A) = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} l_A(H_{\mathfrak{m}}^i(A)).$$

(2) *$A$ has minimal multiplicity of type* 2.
(3) *$\Delta$ is a finite disjoint union of $(d-1)$-simplexes.*

*Proof.* (1) $\Longrightarrow$ (2) : Suppose that $A$ has minimal multiplicity. Then since $A$ has 2-linear resolution, $H_{\mathfrak{m}}^i(A) = 0$ for all $i \neq 1, d$ by Proposition 3.1. Thus $e = 1+h$ and $I(A) = (d-1)h$, where $h = \dim_k H_{\mathfrak{m}}^1(A)$. Also, since $A$ has maximal embedding dimension, we have

$$n = \operatorname{emb}(A) = e + d - 1 + I(A) = e + d - 1 + (d-1)(e-1) = de.$$

Hence $e = \frac{n}{d} = \frac{c+d}{d}$, as required.

(2) $\iff$ (3) : Note that $e$ is equal to the number of facets of $\Delta$. Since each facet of $\Delta$ is a $(d-1)$-simplex, we have $n \le de$ by counting the vertices of $\Delta$. Furthermore, equality holds if and only if $\Delta$ is a disjoint union of all facets.

We omit the proof of (3) $\Longrightarrow$ (1). $\square$

*Proof of Theorem* 4.1. (1) Put $\Gamma_i =: \mathrm{link}_\Delta(\{x_i\})$, and let $\mathfrak{m}_i$ be the homogeneous maximal ideal of $k[\Gamma_i]$ for all $i$. Then $k[\Gamma_i]$ is a $(d-1)$-dimensional Cohen–Macaulay ring since $A$ is Buchsbaum. Also, $\operatorname{codim} k[\Gamma_i] = c$ and $\operatorname{indeg} k[\Gamma_i] \ge q-1$ by the assumption. By [EiGo, Corollary 1.11], we get

$$e(k[\Gamma_i]) \ge \binom{c+(q-1)-1}{(q-1)-1} = \binom{c+q-2}{q-2}.$$

On the other hand, counting the number of facets of $\Delta$, we have

$$d \cdot e(A) = \sum_{i=1}^{n} e(k[\Gamma_i]) \ge (c+d)\binom{c+q-2}{q-2},$$

as required.

(2) If we suppose that the equality holds, then $e(k[\Gamma_i]) = \binom{c+q-2}{q-2}$ for all $i$. Thus $k[\Gamma_i]$ has $(q-1)$-linear resolution by [EiGo]. In particular, $a(k[\Gamma_i]) = q-1-(d-1)-1 = q-d-1$. Also, $\operatorname{indeg} A = q$ since $\operatorname{indeg} A \ge q$ and $\operatorname{indeg} k[\Gamma_i] = q-2$. Thus the assertion follows from Theorem 4.3 below. $\square$

**Theorem 4.3.** *Let $A = k[\Delta]$ be a $d$-dimensional Buchsbaum Stanley-Reisner ring of $\Delta$ on $V$. Put $\operatorname{indeg} A = q$. If $a(k[\mathrm{link}_\Delta\{x_i\}]) = q-d-1$ for all $i$, then $A$ has $q$-linear resolution and $a(A) = q-d-2$.*

*Proof.* If we put $\Gamma_i = \mathrm{link}_\Delta(\{x_i\})$ for all $i = 1, \dots, n$,

then $k[\Gamma_i]$ is Cohen–Macaulay for all $i$ and $H^p_{\mathfrak{m}}(A) = [H^p_{\mathfrak{m}}(A)]_0 = \widetilde{H}_{p-1}(\Delta; k)$ for all $p \le d-1$. By Hochster's formula, we have

$$F(H^d_{\mathfrak{m}}(A), t) = \sum_{F \in \Delta} \dim_k \widetilde{H}_{d-\#(F)-1}(\mathrm{link}_\Delta F; k) \left(\frac{t^{-1}}{1-t^{-1}}\right)^{\#(F)};$$

$$F(H^{d-1}_{\mathfrak{m}_i}(k[\Gamma_i]), t) = \sum_{G \in \Gamma_i} \dim_k \widetilde{H}_{d-\#(G)-2}(\mathrm{link}_{\Gamma_i} G; k) \left(\frac{t^{-1}}{1-t^{-1}}\right)^{\#(G)}.$$

First we compute the $a$-invariant of $A$.

**Claim 1:** $[H^d_{\mathfrak{m}}(A)]_j = 0$ for all $j = -1, \dots, q-d, q-d-1$.

Since $a(k[\Gamma_i]) = q-d-1 \le -1$, we have $[H^{d-1}_{\mathfrak{m}_i}(k[\Gamma_i])]_0 = [H^{d-1}_{\mathfrak{m}_i}(k[\Gamma_i])]_{q-d} = 0$ for all $i = 1, \dots, n$. Now let $F$ be a face of $\Delta$ with $1 \le \#(F) \le d-q+1$. As $F$ contains a vertex of $\Delta$ (say $x_i$), if we put $G = F \setminus \{x_i\}$, then $G \in \Gamma_i$ and $\mathrm{link}_{\Gamma_i} G = \mathrm{link}_\Delta F$. If $G \ne \emptyset$, then $1 \le \#(G) = \#(F) - 1 \le d-q$. Then

$$\widetilde{H}_{d-\#(F)-1}(\mathrm{link}_\Delta F; k) = \widetilde{H}_{d-\#(G)-2}(\mathrm{link}_{\Gamma_i} G; k) = 0$$

because $[H^{d-1}_{\mathfrak{m}_i}(k[\Gamma_i])]_{q-d} = 0$. If $G = \emptyset$, then $F = \{x_i\}$ and thus

$$\widetilde{H}_{d-\#(F)-1}(\mathrm{link}_\Delta F; k) = \widetilde{H}_{d-2}(\Gamma_i; k) = [H^{d-1}_{\mathfrak{m}_i}(k[\Gamma_i])]_0 = 0.$$

Hence $\widetilde{H}_{d-\#(F)-1}(\mathrm{link}_\Delta F; k) = 0$ for all $F \in \Delta$ with $1 \le \#(F) \le d-q+1$. This yileds that $[H^d_{\mathfrak{m}}(k[\Delta])]_j = 0$ for all $j = -1, \dots, q-d-1$ by Hochster's formula.

**Claim 2:** $[H^d_{\mathfrak{m}}(A)]_0 \cong \widetilde{H}_{d-1}(\Delta; k) = 0$.

Let $K_A$ be the graded canonical module of $A$, that is, $[K_A]_j = \mathrm{Hom}_k([H^d_{\mathfrak{m}}(A)]_{-j}, k)$. Then $[K_A]_1 = 0$ by Claim 1. Thus

$$[K_A]_0 \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (0) :_{K_A} x_i = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, K_A) = 0,$$

where the last vanishing follows from $\operatorname{depth} K_A > 0$. Thus $[H^d_{\mathfrak{m}}(A)]_0 = 0$, as required.

By virtue of the above two claims, we get $a(A) \le q - d - 2$. Hence we have $\operatorname{reg} A \le a(A)+d+1 \le q-1$ by Hoa–Miyazaki theorem. On the other hand, $\operatorname{reg} A \ge \operatorname{indeg} A - 1 = q-1$. Therefore $A$ has $q$-linear resolution and $a(A) = q - d - 2$. □

Note that we can prove an improvement of Hibi's criterion ([Hi]) using the similar method as above.

**Theorem 4.4 (An improved version of Hibi's criterion).** *Let $A = k[\Delta]$ be a $d$-dimensional Buchsbaum Stanley–Reisner ring of $\Delta$ on $V$. Put* $\operatorname{indeg} A = q$. *Then $A$ has $q$-linear resolution if and only if the following two conditions are satisfied:*

(1) $\widetilde{H}_{q-1}(\Delta; k) = 0$.
(2) $a(k[\operatorname{link}_\Delta\{x_i\}]) \le q - d$ *for all* $i = 1, \ldots, n$.

*When this is the case,* $\widetilde{H}_i(\Delta; k) = 0$ *for all* $i \ne q-2$.

For any Buchsbaum Stanley–Reisner ring $A$ with minimal multiplicity of type $q$, we have that $\dim_k H^{q-1}_{\mathfrak{m}}(A) = h_{c,d,q}$. In fact, we have the following characterizations.

**Theorem 4.5 (Characterizations of minimal multiplicity).** *Let $A = k[\Delta]$ be a $d$-dimensional Buchsbaum Stanley–Reisner ring such that* $\operatorname{codim} A = c$ *and* $\operatorname{indeg} A = q$. *Then the following conditions are equivalent:*

(1) *$A$ has minimal multiplicity of type $q$, that is,*

$$e(A) = \frac{c+d}{d}\binom{c+q-2}{q-2}.$$

(2) *$A$ has $q$-linear resolution and* $\dim_k H^{q-1}_{\mathfrak{m}}(A) = h_{c,d,q}$.
(3) *The $h$-vector of $A$ is*

$$\left(1, c, \ldots, \binom{c+q-2}{q-1}, -\binom{d}{q}h, \binom{d}{q+1}h, \ldots, (-1)^{d-q+1}\binom{d}{d}h\right), \quad \text{where } h = h_{c,d,q}.$$

(4) *$k[\operatorname{link}_\Delta\{x_i\}]$ has $(q-1)$-linear resolution for all $i$.*
(5) $a(A) = q - d - 2$.
(6) *$k[\Delta^*]$, where $\Delta^* = \{F \subseteq V \mid V \setminus F \notin \Delta\}$ is the Alexander dual of $\Delta$, is Cohen–Macaulay with pure and almost $c$-linear resolution and with $a(k[\Delta^*]) = 0$, that is, the graded minimal free resolution of $k[\Delta^*]$ over $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ $(n = c+d)$ can be written as follows:*

$$0 \to S(-(c+d))^{\beta^*_q} \to S(-(c+q-2))^{\beta^*_{q-1}} \to \cdots \to S(-c)^{\beta^*_1} \to S \to k[\Delta^*] \to 0.$$

*When this is the case,* $\beta^*_q = h_{c,d,q}$.

*Proof.* It suffices to show the following implications: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1), (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (2) and (5) $\Leftrightarrow$ (6).

We first show that (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). If we suppose (1), then $A$ has $q$-linear resolution by Theorem 4.1. Putting $h = \dim_k \widetilde{H}_{q-2}(\Delta; k)$, by Theorem 3.2, we get

$$\frac{c+d}{d}\binom{c+q-2}{q-2} = e(A) = \binom{c+q-2}{q-2} - h\binom{d-1}{q-1}.$$

This implies that $h = h_{c,d,q}$. In particular, we get (2). Also, (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) follows from Theorem 3.2.

(1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (2) follows from the proof of Theorems 4.1 and 4.3. To complete the proof, we must show (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (2). In order to do that, we need the following theorem, for which we do not give a proof here.

**Theorem 4.6.** *Let $c, d, q$ be integers with $c \geq 2$, $2 \leq q \leq d$. Let $A = k[\Delta]$ be a $d$-dimensional Stanley–Reisner ring with* $\operatorname{codim} A = c$ *and* $\operatorname{indeg} A = q$, *and let $\Delta^*$ denote the Alexander dual of $\Delta$. Put $A^* := k[\Delta^*]$. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *$A$ is Buchsbaum with $q$-linear resolution.*
(2) *$A^*$ is Cohen–Macaulay with almost $c$-linear resolution and the graded minimal free resolution of $A^*$ over $S$ can be written as follows:*

$$0 \to F_q \to F_{q-1} = S(-(c+q-2))^{\beta^*_{q-1}} \to \cdots \to F_1 = S(-c)^{\beta^*_1} \to S \to A^* \to 0,$$

*where* $F_q = S(-(c+d))^{\beta^*} \oplus S(-(c+q-1))^{\beta^{*\prime}}$.

*When this is the case, $\beta^* = \dim_k H^{q-1}_{\mathfrak{m}}(A)$ and $\beta^{*\prime} = \dim_k H^d_{\mathfrak{m}}(A)_{q-d-1}$.*

**Remark 4.7.** *$\Delta$ is Cohen–Macaulay if and only if $\Delta^*$ has a linear resolution; see* [EaRe].

We return to the proof of Theorem 4.5. If we suppose (5), then $A$ has $q$-linear resolution with $\beta^{*\prime} = 0$ by Theorem 4.3. Thus by Theorem 4.6, the graded minimal free resolution of the Alexander dual $k[\Delta^*]$ becomes the required form. Conversely, suppose (6). By Theorem 4.6, $A = k[\Delta]$ has $q$-linear resolution. On the other hand, since $k[\Delta^*]$ is a Cohen–Macaulay homogeneous $k$-algebra with pure resolution of type $(c_1, \ldots, c_q) = (c, c+1, \ldots, c+q-2, c+d)$, we have

$$\beta^*_q = (-1)^{q+1}\prod_{j=1}^{q-1}\frac{c_j}{c_j - c_q} = h_{c,d,q}.$$

by Herzog–Kühl's formula. Combining with $h = \beta^*_q$, we obtain that $h = h_{c,d,q}$, as required. $\square$

Now let us gather several examples of Buchsbaum Stanley–Reisner rings with minimal multiplicity of some type.

**Example 4.8 (The Alexander dual of cyclic polytope).** Let $q$, $d$ be integers with $2 \leq q \leq d$. Put $n = 2d - q + 2$ and $f = 2(d - q + 1)$. Let $\Gamma = \Gamma_{n,f}$ be the boundary complex of the cyclic polytope $C(n, f)$, that is, $C(n, f)$ be the convex hull of any distinct $n$-points over the algebraic curve $M \subseteq \mathbb{R}^f$ defined by parametrically by $x(t) = (t, t^2, \ldots, t^f)$, $t \in \mathbb{R}$. Also, let $\Delta = \Gamma^*$ be the Alexander dual of $\Gamma$. Then $k[\Delta]$ is a $d$-dimensional Buchsbaum Stanley–Reisner ring with minimal multiplicity of type $q$.

In particular, Conjecture 4.1 is true for $h_{c,d,q} = 1$.

**Example 4.9** (Hibi [Hi] ). Let $d \geq 2$ be an integer, and let $k$ be a field. Put $n = 2d-1$ and $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Let $\Delta$ be the simplicial complex which is spanned by

$$S = \left\{ \{\bar{i}, \overline{i+1}, \ldots, \overline{i+d-1}\} \mid i = 1, 2, \ldots, 2d-1 \right\},$$

where $\overline{p}$ stands for $q \in V$ with $p \equiv q \pmod{2d-1}$.

Then $k[\Delta]$ is a $d$-dimensional Buchsbaum Stanley–Reisner ring with minimal multiplicity of type 3.

**Example 4.10** ([Te1, Theorem 3.3]). Let $n$ be an integer such that $n > 3$, and suppose that $2n+1$ is a prime number. Let $\Delta$ be the simplicial complex on $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ which is spanned by

$$\begin{aligned} S = & \{\{a, b, a+b\} \mid 1 \leq a < b,\ a+b \leq n\} \\ & \cup \{\{a, b, c\} \mid 1 \leq a < b < c \leq n,\ a+b+c = 2n+1\}. \end{aligned}$$

Then $A = k[\Delta]$ is a 3-dimensional Buchsbaum Stanley–Reisner ring such that $e(A) = \frac{n(n-2)}{3}$. In particular, $A$ has a minimal multiplicity of type 3.

**Example 4.11** (Hanano [Ha]). Let $n$ be an integer with $n \geq 5$. Let $\Delta$ be the simplicial complex on $V$ which is spanned by the following set $S$. Then $k[\Delta]$ is a 3-dimensional Buchsbaum Stanley–Reisner ring with 3-linear resolution of maximal homology. Furthermore, $k[\Delta]$ has minimal multiplicity of type 3 if and only if $n \equiv 0$ or $\equiv 2 \pmod 3$.

(1) The case of $n \not\equiv 1 \pmod 3$. Put $V := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ and

$$\begin{aligned} S \ = \ & \left\{ \{\bar{i}, \overline{i+k}, \overline{i+2k}\} \mid 0 \leq i \leq k-1 \right\} \\ & \cup \left\{ \{\bar{i}, \overline{i+k}, \overline{i+j}\} \mid 0 \leq i \leq 3k-1,\ k+1 \leq j \leq 2k-1 \right\}, \end{aligned}$$

when $n = 3k$ and

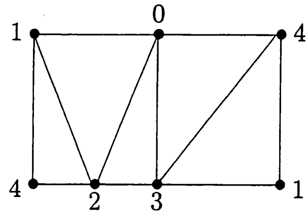
$$S = \left\{ \{\bar{i}, \overline{i+1}, \overline{i+3j+2}\} \mid 0 \leq i \leq 3k+1,\ 0 \leq j \leq k-1 \right\},$$

where $n = 3k+2$. Here $\overline{p}$ stands for $q \in V$ with $p \equiv q \pmod n$.

(2) The case of $n \equiv 1 \pmod 3$. Put $V := \{\infty, 0, 1, \ldots, n-2\}$ and

$$\begin{aligned} S \ = \ & \left\{ \{\infty, \bar{i}, \overline{i+1}\} \mid 0 \leq i \leq 3k-1 \right\} \\ & \cup \left\{ \{\bar{i}, \overline{i+1}, \overline{i+3j}\} \mid 0 \leq i \leq 3k-1,\ 1 \leq j \leq k-1 \right\}, \end{aligned}$$

when $n = 3k+1$. Here $\overline{p}$ stands for $q \in V$ with $p \equiv q \pmod{n-1}$.

$\Delta =$ 


$$k[\Delta] = \frac{k[x, y, z, w, u]}{(xyw, xyu, xzu, yzw, zwu)}$$

$(n = 5,\ d = q = 3,\ c = 2,\ h = 1)$

## 5. Approach to the conjecture in case of $q = d$

In this section, we put an idea to attack to the conjecture in case of $q = d$. Namely, we introduce the notion of Cohen–Macaulay cover as follows:

**Definition 5.1.** Let $\Delta$ be a $(d-1)$-dimensional pure simplicial complex on $V$. A simplicial complex $\widetilde{\Delta}$ is said to be a *Cohen–Macaulay cover* of $\Delta$ over $k$ if $\widetilde{\Delta}$ is a $(d-1)$-dimensional Cohen–Macaulay simplicial complex on $V$ which is $d$-linear and it contains $\Delta$.

Now suppose that $q = d$. Let $\Delta^{\min}$ be a $(d-1)$-dimensional Buchsbaum simplicial complex with $d$-linear resolution and $\dim_k H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(k[\Delta^{\min}]) = \lfloor h_{c,d,d} \rfloor$. Then one can reduce our conjecture to the existence of $\Delta^{\min}$. In fact, we have

**Theorem 5.2 (Existence of Cohen–Macaulay cover).** *If $k[\Delta]$ is a $d$-dimensional Buchsbaum Stanley-Reisner ring having $d$-linear resolution, then there exists a Cohen–Macaulay cover $\widetilde{\Delta}$ of $\Delta$ over $k$.*

**Theorem 5.3.** *Let $\Delta^- \subseteq \Delta \subseteq \Delta^+$ be simplicial complexes on $V$. If both $k[\Delta^-]$ and $k[\Delta^+]$ are Buchsbaum Stanley-Reisner rings with $d$-linear resolution, then so is $k[\Delta]$.*

Now suppose that $d = 3$. Let $c$, $h$ be integers with $c \geq 1$ and $0 \leq h \leq \lfloor h_{c,3,3} \rfloor = \frac{c(c+1)}{6} =: h_0$. Then for any integer $c \geq 1$, we have a Buchsbaum Stanley–Reisner ring $k[\Delta^-]$ with 3-linear resolution and $\dim_k H_{\mathfrak{m}}^2(k[\Delta^-]) = h_0$ by virtue of Hanano's examples. Take a Cohen–Macaulay cover $\Delta^+$ of $\Delta^-$. Then we note that the difference of facets, that is, $e(k[\Delta^+] - e(k[\Delta^-])$ is equal to $h_0$. Choose any distinct $(h_0 - h)$ facets $F_0, \ldots, F_{h_0-h}$ of $\Delta^+ \setminus \Delta^-$ and consider $\Delta := \Delta^- \cup \{F_0, \ldots, F_{h_0-h}\}$. Then $k[\Delta]$ is a Buchsbaum Stanley–Reisner ring with 3-linear resolution and $\dim_k H_{\mathfrak{m}}^2(k[\Delta]) = h$, as required. Thus we can prove the following theorem.

**Theorem 5.4.** *Conjecture* 3.3 *is true in the case of $q = d = 3$.*

## References


[EaRe] J. A. Eagon and V. Reiner, *Resolutions of Stanley-Reisner rings and Alexander duality,* J. Pure and Applied Algebra **130** (1998), 265–275.

[EiGo] D. Eisenbud and S. Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicity,* J. Algebra **88** (1984), 89–133.

[Fr1] R. Fröberg, *Rings with monomial relations having linear resolutions,* J. Pure Appl. Algebra **38** (1985), 235-241.

[Fr2] R. Fröberg, *On Stanley-Reisner rings,* in "Topics in algebra," Banach Center Publications, No. **26**, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1990, pp. 57–70.

[Go1] S. Goto, *Buchsbaum Rings of maximal embedding dimension,* J. Algebra **76** (1982), 383–399.

[Go2] S. Goto, *On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings,* J. Algebra **85** (1983), 490–534.

[Ha] K. Hanano, *Construction of two-dimensional Buchsbaum simplicial complexes,* Europ. J. Combinatorics **22** (2001), 171–178.

[HeKu] J. Herzog and M. Kühl, *On the betti numbers of finite pure and linear resolutions,* Comm. Alg. **22** (1984), 1627–1646.

[Hi] T. Hibi, *Buchsbaum complexes with linear resolutions,* J. Algebra **179** (1996), 127–136.

[HoMi] L. T. Hoa and C. Miyazaki, *Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for generalized Cohen–Macaulay graded rings,* Math. Ann. **301** (1995), 587–598.

[Hoc] M. Hochster, *Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes,* in Ring Theory II (Proc. Second Oklahoma Conference) (B. R. McDonald and R. Morris ed.), Dekker, New York, 1977, pp.171–223.

[StVo] J. Stückrad and W. Vogel, *Buchsbaum Rings and Applications*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986.

[Te1] N. Terai, *On h-vectors of Buchsbaum Stanley–Reisner rings*, Hokkaido Math. J. **25** (1996), 137–148.

[Te2] N. Terai, *Alexander duality theorem and Stanley-Reisner ring*, in Free resolutions of coordinate rings of projective varieties and related topics (Japanese) (Kyoto, 1998). R.I.M.S. No. **No. 1078** (1999), pp.174–184.

[TeYo] N. Terai and K.Yoshida, *Buchsbaum Stanley–Reisner ring with minimal multiplicity*, preprint.

# BGG CORRESPONDENCE AND RÖMER'S THEOREM ON AN EXTERIOR ALGEBRA

KOHJI YANAGAWA

This article is edited from my recent paper [14].

ABSTRACT. Let $E = K\langle y_1, \dots, y_n\rangle$ be the exterior algebra. The *(cohomological) distinguished pairs* of a graded $E$-module $N$ describe the growth of a minimal graded injective resolution of $N$. Römer gave a duality theorem between the distinguished pairs of $N$ and those of its dual $N^*$. In this paper, we show that under Bernstein-Gel'fand-Gel'fand correspondence, his theorem is translated into a natural corollary of Serre duality for (complexes of) graded $S = K[x_1, \dots, x_n]$-modules. Using this idea, we also give a $\mathbb{Z}^n$-graded version of Römer's theorem.

## INTRODUCTION

In this section, to introduce a background of the present article, we summarize results of Aramova-Herzog [2] and Römer [11].

Let $S = K[x_1, \dots, x_n]$ be the polynomial ring over a field $K$, and $M$ a finitely generated graded $S$-module. The $ij$th Betti number $\beta_{i,j}(M) = \dim_K \operatorname{Tor}_i^S(K, M)_j$ of $M$ is an important invariant. Following Bayer-Charalambous-Popescu [4], we say a Betti number $\beta_{k,m}(M) \neq 0$ is *extremal*, if $\beta_{i,j}(M) = 0$ for all $(i,j) \neq (k,m)$ with $i \geq k$ and $j - i \geq m - k$. This notion has two remarkable properties. First, a homogeneous ideal $I \subset S$ has the same extremal Betti numbers as its generic initial ideal $\operatorname{Gin}(I)$. Another important property is the following.

**Theorem A** (Bayer-Charalambous-Popescu, [4, Theorem 2.8]) *Let $\Delta \subset 2^{\{1,\dots,n\}}$ be a simplicial complex, and $K[\Delta] = S/I_\Delta$ the Stanley-Reisner ring. And let $\Delta^\vee$ be the Alexander dual complex of $\Delta$. Then $\beta_{i,i+j}(K[\Delta])$ is extremal if and only if so is $\beta_{j,i+j}(I_{\Delta^\vee})$. Moreover, if this is the case, then $\beta_{i,i+j}(K[\Delta]) = \beta_{j,i+j}(I_{\Delta^\vee})$.*

In the sense of combinatorial topology, this duality corresponds to the Alexander duality and its generalization using *iterated Betti numbers* (c.f. [5]).

Let $E = K\langle y_1, \dots, y_n\rangle$ be the exterior algebra. To understand Theorem A, Aramova-Herzog [2] introduced *distinguished pairs* for a graded $E$-module $N$. See Definition 1.6 below. (*We use a different convention to describe these pairs. See Remark 1.7.*) The distinguished pairs of $N$ roughly describe the growth of the minimal graded (infinite) injective resolution of $N$. Let $K\{\Delta\} = E/J_\Delta$ be the exterior face ring of $\Delta$. Then [2, Corollary 9.6] states that $(d,i)$ is a distinguished pair for $K\{\Delta\}^* := \operatorname{Hom}_E(K\{\Delta\}, E)$ if and only if $\beta_{d+i-n,d}(K[\Delta])$ is extremal.

Römer proved that $(d,i)$ is distinguished for $N$ if and only if so is $(d, 2n-d-i)$ for $N^*$. Since $k\{\Delta\}^* = J_{\Delta^\vee}$, his result implies Theorem A. (Their argument can also manage the value of extremal Betti numbers $\beta_{i,j}(K[\Delta])$.)

Bernstein-Gel'fand-Gel'fand correspondence (BGG correspondence, for short) is a well known theorem which states that the derived category $D^b(\operatorname{gr} S)$ of finitely generated graded $S$-modules is equivalent to the similar category $D^b(\operatorname{gr} E)$ for $E$. In this paper, we give a new proof of the result of Römer using BGG correspondence. More precisely, under this correspondence, Römer's theorem is translated into a statement on $D^b(\operatorname{gr} S)$ which is a natural consequence of the local duality (Serre duality). A key point is that the duality functor $\operatorname{Hom}_E(-, E)$ on $D^b(\operatorname{gr} E)$ corresponds to the duality functor $R\operatorname{Hom}_S(-, \omega^\bullet)$ on $D^b(\operatorname{gr} S)$, where $\omega^\bullet$ is a dualizing complex of $S$.

The original paper [4] states Theorem A in the $\mathbb{Z}^n$-graded context, while the arguments in [2, 11] are hard to work in this context. But, since BGG correspondence also holds for $\mathbb{Z}^n$-graded modules, our method is powerful in this context too. See §2. This part of the present paper is a continuation of my previous paper [13].

## 1. $\mathbb{Z}$-graded case

Let $W$ be an $n$-dimensional vector space over a field $K$, and $S = \bigoplus_{i \geq 0} \operatorname{Sym}_i W$ the polynomial ring. We regard $S$ as a graded ring with $S_i = \operatorname{Sym}_i W$. Let $\operatorname{Gr} S$ be the category of graded $S$-modules and their degree preserving $S$-homomorphisms, and $\operatorname{gr} S$ the full subcategory of $\operatorname{Gr} S$ consisting of finitely generated modules. Then there is an equivalence $D^b(\operatorname{gr} S) \cong D^b_{\operatorname{gr} S}(\operatorname{Gr} S)$. (For derived categories, consult [9].) So we will freely identify these categories. For $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i \in \operatorname{Gr} S$ and an integer $j$, $M(j)$ denotes the shifted module with $M(j)_i = M_{i+j}$. For $M^\bullet \in D^b(\operatorname{Gr} S)$, $M^\bullet[j]$ denotes the $j$th translation of $M^\bullet$, that is, $M^\bullet[j]$ is the complex with $M^\bullet[j]^i = M^{i+j}$. So, if $M \in \operatorname{Gr} S$, $M[j]$ is the cochain complex $\cdots \to 0 \to M \to 0 \to \cdots$, where $M$ sits in the $(-j)$th position. If $M \in \operatorname{gr} S$ and $N \in \operatorname{Gr} S$, then $\operatorname{Hom}_S(M, N)$ has the structure of a graded $S$-module with $\operatorname{Hom}_S(M, N)_i = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Gr} S}(M, N(i))$.

Let $\omega^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$ be a minimal graded injective resolution of $S(-n)[n]$. That is, $\omega^\bullet$ is a graded normalized dualizing complex of $S$. Then $\mathbf{D}_S(-) := \operatorname{Hom}^\bullet_S(-, \omega^\bullet)$ gives a duality functor from $D^b(\operatorname{gr} S)$ to itself. The $i$th cohomology of $\mathbf{D}_S(M^\bullet)$ is $\operatorname{Ext}^i_S(M^\bullet, \omega^\bullet)$. For $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$ and $i \in \mathbb{Z}$, set $d_i(M^\bullet) := \dim_S H^i(M^\bullet)$. Here the Krull dimension of the 0 module is $-\infty$.

**Definition 1.1.** We say $(d, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ is a *distinguished pair* for a complex $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$, if $d = d_i(M^\bullet)$ and $d_j(M^\bullet) < d + i - j$ for all $j$ with $j < i$.

Let $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$ and $d = d_i(M^\bullet) \geq 0$. If $d = \max\{ d_j(M^\bullet) \mid j \in \mathbb{Z} \}$, then $(d, i)$ is distinguished for $M^\bullet$. On the other hand, if $i = \min\{ j \mid H^j(M^\bullet) \neq 0 \}$, then $(d, i)$ is also distinguished. Thus $M^\bullet$ has several distinguished pairs in general.

In this paper, $\deg_S(M)$ denotes the multiplicity of a module $M \in \operatorname{gr} S$ (i.e., $e(M)$ of [6, Definition 4.1.5]).

**Theorem 1.2.** *For $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$, we have the following.*

*(1) A pair $(d, i)$ is distinguished for $M^\bullet$ if and only if $(d, -d-i)$ is distinguished for $\mathbf{D}_S(M^\bullet)$.*

*(2) If $(d, i)$ is a distinguished pair for $M^\bullet$, then*

$$\deg_S H^i(M^\bullet) = \deg_S \operatorname{Ext}_S^{-d-i}(M^\bullet, \omega^\bullet).$$

*Proof.* (1) Since the statement is "symmetric", it suffices to prove the direction $\Rightarrow$.

From the double complex $\operatorname{Hom}^\bullet_S(M^\bullet, \omega^\bullet)$, we have a spectral sequence $E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^p_S(H^{-q}(M^\bullet), \omega^\bullet) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}_S(M^\bullet, \omega^\bullet)$. For simplicity, set $e_r^{p,q} := \dim_S E_r^{p,q}$. Since $\operatorname{Ext}^i_S(M, \omega^\bullet) \cong \operatorname{Ext}^{n+i}_S(M, S(-n))$ for $M \in \operatorname{gr} S$, the following inequality follows from argument analogous to [6, §8.1, Theorem 8.1.1].

$$(1.1) \qquad e_2^{p,q} = \dim_S \operatorname{Ext}^p_S(H^{-q}(M^\bullet), \omega^\bullet) = \begin{cases} -p & \text{if } p = -d_{-q}(M^\bullet), \\ \leq -p & \text{if } -d_{-q}(M^\bullet) < p \leq 0, \\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(I) By (1.1), we have $e_2^{-d,-i} = d$. On the other hand, we have $e_2^{p,q} < d$ for all $(p,q) \neq (-d,-i)$ with $p+q = -d-i$. In fact, the assertion follows from (1.1) if $p > -d$. So we may assume that $p < -d$ and $q = -d-i-p > -i$. Since $(d,i)$ is distinguished, we have $d_{-q}(M^\bullet) < d+i+q = -p$. Thus $E_2^{p,q} = 0$ in this case. Anyway, we have $e_\infty^{p,q} < d$ for all $(p,q) \neq (-d,-i)$ with $p+q = -d-i$.

(II) Since $d_{i-j+1}(M^\bullet) < d+j-1 < d+j$ for all $j \geq 2$, we have that $E_2^{-d-j,-i+j-1} = 0$. So we have $E_r^{-d-j,-i+j-1} = 0$ for all $r \geq 2$. Next we will show that $d = e_2^{-d,-i} = e_3^{-d,-i} = \cdots = e_r^{-d,-i}$ by induction on $r$. Recall that $E_{r+1}^{-d,-i}$ is the cohomology of

$$E_r^{-d-r,-i+r-1} \to E_r^{-d,-i} \to E_r^{-d+r,-i-r+1}.$$

But we have seen that $E_r^{-d-r,-i+r-1} = 0$. Moreover, $e_r^{-d+r,-i-r+1} \leq e_2^{-d+r,-i-r+1} \leq d-r < d$ by (1.1), and $e_r^{-d,-i} = d$ by the induction hypothesis. Thus $e_{r+1}^{-d,-i} = d$. Hence $e_\infty^{-d,-i} = d$. From this fact and (I), we have that $\dim_S \operatorname{Ext}^{-d-i}_S(M^\bullet, \omega^\bullet) = d$.

(III) Finally, we will show that $\dim_S \operatorname{Ext}^{-d-i-j}_S(M^\bullet, \omega^\bullet) < d+j$ for all $j > 0$. To see this, it suffices to show that $e_2^{p,q} < d+j$ for all $j > 0$ and all $(p,q)$ with $p+q = -d-i-j$. If $p > -d-j$, the assertion is clear. If $p = -d-j$, then $q = -i$ and $d_{-q}(M^\bullet) = d < -p$. So $E_2^{p,q} = 0$ in this case. Hence we may assume that $p < -d-j$ and $-q = d+i+j+p < i$. Since $(d,i)$ is distinguished, $d_{-q}(M^\bullet) < d+(i+q) = -j-p < -p$. So we have $E_2^{p,q} = 0$ in this case too.

(2) Since $\deg_S E_r^{-d,-i} = \deg_S E_{r+1}^{-d,-i}$ for all $r \geq 2$ by the argument in (II) of the proof of (1), we have $\deg_S E_2^{-d,-i} = \deg_S E_\infty^{-d,-i}$. Hence

$$\deg_S \operatorname{Ext}^{-d-i}_S(M^\bullet, \omega^\bullet) = \deg_S E_\infty^{-d,-i} = \deg_S E_2^{-d,-i} = \deg_S \operatorname{Ext}^{-d}_S(H^i(M^\bullet), \omega^\bullet),$$

where the first equality follows from (I) and (II). But, since $\dim(H^i(M^\bullet)) = d$, we have $\deg_S \operatorname{Ext}^{-d}_S(H^i(M), \omega^\bullet) = \deg_S H^i(M^\bullet)$. $\square$

*Remark* 1.3. For the above theorem, only (1.1) and the fact that $\operatorname{inj.dim}_S \omega^\bullet < \infty$ are essential. So the theorem holds in much wider contexts.

(1) Theorem 1.2 (1) also holds for a noetherian local commutative ring $R$ admitting a dualizing complex. The part (2) also holds for $R$, if we replace $\deg_S(-)$ by $l_{R_\mathfrak{p}}(- \otimes_R R_\mathfrak{p})$ for a prime ideal $\mathfrak{p} \subset R$ with $\dim R/\mathfrak{p} = d$.

(2) Let $A$ be an associative ring with 1. For a left (or right) $A$-module $M$, set $j(M) := \min\{\, i \mid \operatorname{Ext}^i_A(M, A) \neq 0 \,\}$. We say $A$ is *Auslander Gorenstein* if $A$ is left and right noetherian, $\operatorname{inj.dim}{}_A A = \operatorname{inj.dim} A_A < \infty$, and satisfies the following

condition: For every finitely generated left (or right) $A$-module $M$ and for all $i \geq 0$, we have $j(N) \geq i$ for all submodule $N \subset \operatorname{Ext}^i_A(M, A)$.

Familiar examples of Auslander Gorenstein rings include commutative Gorenstein local rings (in this case, $j(M) = \dim A - \dim M$), Weyl algebras, and universal enveloping algebras of finite dimensional Lie algebras. See [3] for further information.

If $A$ is Auslander Gorenstein, then $-j(M)$ is an exact dimension function. If we use this "dimension" to define distinguished pairs for objects in $D^b(\mathrm{mod}_A)$ or $D^b(\mathrm{mod}_{A^{\mathrm{op}}})$, Theorem 1.2 also holds for the duality functor $R\operatorname{Hom}_A(-, A)$ between $D^b(\mathrm{mod}_A)$ and $D^b(\mathrm{mod}_{A^{\mathrm{op}}})$. More generally, the theorem holds for rings with *Auslander dualizing complexes* (see [15]).

Next, we assume that $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ is a graded $K(\cong A_0)$-algebra satisfying the following conditions.

(a) There is a polynomial $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ such that $f(i) = \dim_K A_i$ for $i \gg 0$.

(b) $A$ is Auslander regular (i.e., $A$ is Auslander Gorenstein and $\operatorname{gl.dim} A < \infty$).

(c) $A$ is Cohen-Macaulay with respect to Gel'fand-Kirillov dimension (c.f. [3]).

Then a finitely generated graded $A$-module $M$ has the Hilbert polynomial, and we can define the multiplicity $\deg_A(M)$. If we use Gel'fand-Kirillov dimension to define distinguished pairs, both (1) and (2) of Theorem 1.2 hold for $A$. So the under the additional assumption that $A$ is Koszul, it might be interesting to generalize Corollary 1.8 below and related results to the quadratic dual ring $A^!$.

Let $V$ be the dual vector space of $W$, and $E = \bigwedge V$ the exterior algebra. We regard $E$ as a negatively graded ring with $E_{-i} = \bigwedge^i V$ (this is the opposite convention from [2, 11]). Let $\operatorname{gr} E$ be the category of finitely generated graded $E$-modules and their degree preserving $E$-homomorphisms. Here "$E$-module" means a left and right module $N$ with $ea = (-1)^{(\deg e)(\deg a)} ae$ for all homogeneous elements $e \in E$ and $a \in N$.

Let $\{x_1, \ldots, x_n\}$ be a basis of $W$, and $\{y_1, \ldots, y_n\}$ its dual basis of $V$. For a complex $N^\bullet$ in $\operatorname{gr} E$, set $\mathbf{L}(N^\bullet) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S \otimes_K N^i$ and $\mathbf{L}(N^\bullet)^m = \bigoplus_{i-j=m} S \otimes_K N^i_j$. The differential defined by

$$\mathbf{L}(N^\bullet)^m \supset S \otimes_K N^i_j \ni 1 \otimes z \mapsto \sum_{1 \leq l \leq n} x_l \otimes y_l z + (-1)^m (1 \otimes \delta^i(z)) \in \mathbf{L}(N^\bullet)^{m+1}$$

makes $\mathbf{L}(N^\bullet)$ a cochain complex of free $S$-modules. Here $\delta^i$ is the $i$th differential map of $N^\bullet$. Moreover, $\mathbf{L}$ gives a functor from $D^b(\operatorname{gr} E)$ to $D^b(\operatorname{gr} S)$.

For $M \in \operatorname{gr} S$ and $i \in \mathbb{Z}$, we can define a graded $E$-module structure on $\operatorname{Hom}_K(E, M_i)$ by $(af)(e) = f(ea)$. Then $\operatorname{Hom}_K(E, M_i) \cong E(-n) \otimes_K M_i$. Set $\mathbf{R}(M) = \operatorname{Hom}_K(E, M)$ and $\mathbf{R}^i(M) = \operatorname{Hom}_K(E, M_i)$. The differential defined by

$$\mathbf{R}^i(M) = \operatorname{Hom}_K(E, M_i) \ni f \mapsto [e \mapsto \sum_{1 \leq j \leq n} x_j f(y_j e)] \in \operatorname{Hom}_K(E, M_{i+1}) = \mathbf{R}^{i+1}(M)$$

makes $\mathbf{R}(M)$ a cochain complex of free $E$-modules. We can also construct $\mathbf{R}(M^\bullet)$ from a complex $M^\bullet$ in natural way. Then $\mathbf{R}$ gives a functor from $D^b(\operatorname{gr} S)$ to $D^b(\operatorname{gr} E)$. See [7] for details. The following is a crucial result.

**Theorem 1.4** (BGG correspondence, c.f.[7]). *The functors* $\mathbf{L}$ *and* $\mathbf{R}$ *give a category equivalence* $D^b(\operatorname{gr} S) \cong D^b(\operatorname{gr} E)$.

For $N \in \operatorname{gr} E$, then $N^* := \operatorname{Hom}_E(N, E) \cong \operatorname{Hom}_K(N, K)(n)$ is a graded $E$-module again. $(-)^*$ gives an exact duality functor on $\operatorname{gr} E$, and it can be extended to the duality functor $\mathbf{D}_E$ on $D^b(\operatorname{gr} E)$.

**Proposition 1.5.** *For* $N^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} E)$, *we have*

$$\mathbf{D}_S \circ \mathbf{L}(N^\bullet) \cong \mathbf{L} \circ \mathbf{D}_E(N^\bullet)(-2n)[2n].$$

*Proof.* Since $\mathbf{L}(N^\bullet)$ consists of free $S$-modules, we have

$$\mathbf{D}_S \circ \mathbf{L}(N^\bullet) \cong \operatorname{Hom}^\bullet_S(\mathbf{L}(N^\bullet), S(-n)[n]).$$

It is easy to see that

$$\operatorname{Hom}^m_S(\mathbf{L}(N^\bullet), S(-n)[n]) \cong \bigoplus_{j-i=m+n} S(-n) \otimes_K (N^i_j)^\vee,$$

where $(-)^\vee$ means the graded $K$-dual. On the other hand,

$$\begin{aligned}\mathbf{L} \circ \mathbf{D}_E(N^\bullet)^m = \bigoplus_{i-j=m} S \otimes_K \mathbf{D}_E(N^\bullet)^i_j &= \bigoplus_{i-j=m} S(n) \otimes_K (N^{-i}_{-n-j})^\vee \\ &= \bigoplus_{j-i=m-n} S(n) \otimes_K (N^i_j)^\vee.\end{aligned}$$

So we can easily construct a quasi-isomorphism $\mathbf{D}_S \circ \mathbf{L}(N^\bullet) \to \mathbf{L} \circ \mathbf{D}_E(N^\bullet)(-2n)[2n]$. □

For $N^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} E)$, we have $H^i(\mathbf{L}(N^\bullet))_j \cong \operatorname{Ext}^{j+i}_E(K, N^\bullet)_j$ by [7, Theorem 3.7]. So the Laurent series $P_i(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\dim_K \operatorname{Ext}^{j+i}_E(K, N^\bullet)_j) \cdot t^j$ is the Hilbert series of the finitely generated graded $S$-module $H^i(\mathbf{L}(N^\bullet))$. If $H^i(\mathbf{L}(N^\bullet)) \neq 0$, there exists a Laurent polynomial $Q_i(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ such that

$$P_i(t) = \frac{Q_i(t)}{(1-t)^d},$$

where $d = d_i(\mathbf{L}(N^\bullet)) = \dim_S H^i(\mathbf{L}(N^\bullet))$. Set $e_i(N^\bullet) := Q_i(1) = \deg_S H^i(\mathbf{L}(N^\bullet))$. So $d_i(\mathbf{L}(N^\bullet))$ and $e_i(N^\bullet)$ measure the growth of the "$(-i)$-linear strand" of a minimal injective resolution of $N^\bullet$.

A *(cohomological) distinguished pair* for a module $N \in \operatorname{gr} E$ was introduced in [11, Definition 3.4] (see also [2]). Here we generalize this notion to a complex.

**Definition 1.6.** Let $N^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} E)$. We say $(d, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ is a *distinguished pair* for $N^\bullet$ if and only if it is distinguished for $\mathbf{L}(N^\bullet)$ (in the sense of Definition 1.1).

*Remark* 1.7. $(d, i)$ is a distinguished pair for a module $N \in \operatorname{gr} E$ in the above sense if and only if $(n + 1 - d, i)$ is a "cohomological distinguished pair" for $N$ in the sense of [11]. (Recall that $E$ is a positively graded ring in [2, 11].) [2] also use the term "distinguished pair". But this is "homological distinguished pair" of [11], and $(d, i)$ is a distinguished pair for $N$ in our sense if and only if $(n + 1 - d, n - i)$ is a distinguished pair for $N^*$ in the sense of [2].

**Corollary 1.8** (c.f. [11, Theorem 3.8]). *Let $N^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} E)$. A pair $(d,i)$ is distinguished for $N^\bullet$ if and only if $(d, 2n-d-i)$ is distinguished for $\mathbf{D}_E(N^\bullet)$. If this is the case, we have $e_i(N^\bullet) = e_{2n-d-i}(\mathbf{D}_E(N^\bullet))$.*

*Proof.* For the first statement, it suffices to prove the direction $\Rightarrow$. By Theorem 1.2, $(d, -d-i)$ is a distinguished pair for $\mathbf{D}_S \circ \mathbf{L}(N^\bullet) \cong \mathbf{L} \circ \mathbf{D}_E(N^\bullet)(-2n)[2n]$. For a complex $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$, we have $H^j(M^\bullet(-2n)[2n]) = H^{2n+j}(M^\bullet)(-2n)$ and $d_j(M^\bullet(-2n)[2n]) = d_{2n+j}(M^\bullet)$. Thus $(d, 2n-d-i)$ is distinguished for $\mathbf{L}\circ\mathbf{D}_E(N^\bullet)$. The last equality follows from Theorem 1.2 (2). $\square$

For a module $N \in \operatorname{gr} E$, $d_i(\mathbf{L}(N))$ can be 0 quite often. But we have the following.

**Proposition 1.9.** *Assume that a module $N \in \operatorname{gr} E$ does not have a free summand. If $(d,i)$ is a distinguished pair for $N$, then we have $d > 0$.*

*Proof.* Let $0 \to N \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ (resp. $\cdots \to I^{-1} \to I^0 \to N \to 0$) be a minimal injective (resp. projective) resolution of $N$. For $j \geq 0$, set $\Omega_j(N) := (\ker(I^j \to I^{j+1}))[-j]$. Obviously, $0 \to \Omega_j(N) \to I^j \to I^{j+1} \to \cdots$ is a minimal injective resolution. On the other hand, since $N$ does not have a free summand, $\cdots \to I^{-1} \to I^0 \to \cdots \to I^{j-1} \to \Omega_j(N) \to 0$ is a minimal projective resolution. If $d_i(\mathbf{L}(N)) > 0$, then $d_i(\mathbf{L}(\Omega_j(N))) = d_i(\mathbf{L}(N))$ for all $j \geq 0$. But, if $d_i(\mathbf{L}(N)) = 0$, then $d_i(\mathbf{L}(\Omega_j(N))) = -\infty$ for $j \gg 0$. On the other hand, since a minimal injective resolution of $N^*$ is the dual of a minimal projective resolution of $N$, we have $d_i(\mathbf{L}(N^*)) = d_i(\mathbf{L}(\Omega_j(N)^*))$ for all $i$ and all $j \geq 0$. So $N^*$ and $\Omega_j(N)^*$ have the same distinguished pairs. For a contradiction, we assume that $(0,i)$ is a distinguished pair for $N$. Then $(0, 2n-i)$ is a distinguished pair for $N^*$ and $\Omega_j(N)^*$. So $(0,i)$ is a distinguished pair for $\Omega_j(N)$ for all $j \geq 0$. This contradicts the above observation. $\square$

We say a distinguished pair $(d,i)$ is *positive*, if $d > 0$. Since [2, 11] study a distinguished pair for a module, they only treat a positive one.

*Remark* 1.10. When $N^\bullet$ is a module, Corollary 1.8 was proved in [11, Theorem 3.8]. On the other hand, for positive distinguished pairs, we can prove the corollary from [11, Theorem 3.8] directly: Let $I^\bullet$ be an injective resolution of $N^\bullet$ and $P^\bullet$ a projective resolution of $I^\bullet$. From the quasi-isomorphism $f : P^\bullet \to I^\bullet$, we have the exact complex $(T^\bullet, \partial^\bullet) := \operatorname{cone}(f)$. Then $N := \ker \partial_0$ (resp. $N^*$) has the same positive distinguished pairs as $N^\bullet$ (resp. $\mathbf{D}_E(N^\bullet)$).

A variant of BGG correspondence gives an equivalence $\underline{\operatorname{gr}} E \cong D^b(\operatorname{Coh}(\mathbb{P}^{n-1}))$ of triangulated categories, where $\underline{\operatorname{gr}}\, E$ is the stable category, and $\operatorname{Coh}(\mathbb{P}^{n-1})$ is the category of coherent sheaves on $\mathbb{P}^{n-1} = \operatorname{Proj} S$. More precisely, the composition of the functor $\mathbf{L} : \operatorname{gr} E \to D^b(\operatorname{gr} S)$ and the natural functor $D^b(\operatorname{gr} S) \to D^b(\operatorname{Coh}(\mathbb{P}^{n-1}))$ induces this equivalence. Note that the functor $\operatorname{gr} S \ni M \to \tilde{M} \in \operatorname{Coh}(\mathbb{P}^{n-1})$ ignores modules of finite length. Hence if $d_i(M^\bullet) = 0$ then $H^i(\tilde{M}^\bullet) = 0$. In this sense, the duality in [11] corresponds to a duality on $D^b(\operatorname{Coh}(\mathbb{P}^{n-1}))$.

In the rest of this section, we assume that $K$ is algebraically closed. Let $N \in \operatorname{gr} E$. Following [1], we say $v \in E_{-1} = V$ is *$N$-regular* if $\operatorname{Ann}_N(v) = vN$. It is easy to see that $v$ is $N$-regular if and only if it is $N^*$-regular. We say $V_E(N) = \{v \in V \mid v \text{ is } \textit{not } N\text{-regular}\}$ is the *rank variety* of $N$ (see [1]). [1, Theorem 3.1] states that $V_E(N)$ is an algebraic subset of $V = \operatorname{Spec} S$, and $\dim V_E(V) = \max\{\, d_i(\mathbf{L}(N)) \mid i \in \mathbb{Z}\,\}$. By the above remark, $V_E(N) = V_E(N^*)$. We can refine this observation using the grading of $N$.

Recall that $S$ can be seen as the Yoneda algebra $\operatorname{Ext}^*_E(K,K)$, and $\operatorname{Ext}^*_E(K,N)$ has the $S$-module structure. By the same argument as [1, Theorem 3.9] (see also the proof of [8, Corollary 3.2 (b)]), we have that

$$V_E(N) = \{\, v \in V \mid \xi(v) = 0 \text{ for all } \xi \in \operatorname{Ann}_S(\operatorname{Ext}^*_E(K,N))\,\}.$$

But $[\operatorname{Ext}^{*+i}_E(K,N)]_* := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \operatorname{Ext}^{j+i}_E(K,N)_j$ is an $S$-module which is isomorphic to $H^i(\mathbf{L}(N))$ (see the proof of [7, Proposition 2.3]), and we have $\operatorname{Ext}^*_E(K,N) \cong \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}[\operatorname{Ext}^{*+i}_E(K,N)]_*$. Set

$$V^i_E(N) = \{\, v \in V \mid \xi(v) = 0 \text{ for all } \xi \in \operatorname{Ann}_S([\operatorname{Ext}^{*+i}_E(K,N)]_*)\,\}.$$

We have $V_E(N) = \bigcup_i V^i_E(N)$ and $d_i(\mathbf{L}(N)) = \dim V^i_E(N)$. For an algebraic set $X \subset \operatorname{Spec} S$ of dimension $d$, set $\operatorname{Top}(X)$ to be the union of the all irreducible components of $X$ of dimensions $d$.

**Proposition 1.11.** *If $(d,i)$ is a distinguished pair for $N \in \operatorname{gr} E$, then we have $\operatorname{Top}(V^i_E(N)) = \operatorname{Top}(V^{2n-d-i}_E(N^*))$.*

*Proof.* By the proof of Theorem 1.2, $\operatorname{Ann}_S(H^i(\mathbf{L}(N)))$ has the same top dimensional components as $\operatorname{Ann}_S(H^{-d-i}(\mathbf{D}_S \circ \mathbf{L}(N)))$. □

In the above situation, we have $V^i_E(N) \neq V^{2n-d-i}_E(N^*)$ in general.

## 2. Squarefree case

In this section, we regard $S = K[x_1, \dots, x_n]$ as an $\mathbb{N}^n$-graded ring with $\deg x_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ where 1 is in the $i$th position. Similarly, $E = K\langle y_1, \dots, y_n\rangle$ is a $-\mathbb{N}^n$-graded ring with $\deg y_i = -\deg x_i$. Let $^*\operatorname{gr} S$ (resp. $^*\operatorname{gr} E$) be the category of finitely generated $\mathbb{Z}^n$-graded $S$-modules (resp. $E$-modules). The functors $\mathbf{L}$ and $\mathbf{R}$ defining the BGG correspondence $D^b(\operatorname{gr} S) \cong D^b(\operatorname{gr} E)$ also work in the $\mathbb{Z}^n$-graded context. That is, the functors $\mathbf{L} : D^b({}^*\operatorname{gr} E) \to D^b({}^*\operatorname{gr} S)$ and $\mathbf{R} : D^b({}^*\operatorname{gr} S) \to D^b({}^*\operatorname{gr} E)$ are defined by the same way as the $\mathbb{Z}$-graded case, and they give an equivalence $D^b({}^*\operatorname{gr} S) \cong D^b({}^*\operatorname{gr} E)$, see [13, Theorem 4.1]. Note that the dualizing complex $\omega^\bullet$ of $S$ is $\mathbb{Z}^n$-graded, and $\mathbf{D}_S(-) = \operatorname{Hom}^\bullet_S(-, \omega^\bullet)$ is also a duality functor on $D^b({}^*\operatorname{gr} S)$. Similarly, $\mathbf{D}_E(-) = \operatorname{Hom}_E(-, E)$ is a duality functor on $D^b({}^*\operatorname{gr} E)$. As Proposition 1.5, for $N^\bullet \in D^b({}^*\operatorname{gr} E)$, we have $\mathbf{D}_S \circ \mathbf{L}(N^\bullet) \cong \mathbf{L} \circ \mathbf{D}_E(N^\bullet)(-\mathbf{2})[2n]$ in $D^b({}^*\operatorname{gr} S)$. Here we set $\mathbf{j} := (j, j, \dots, j) \in \mathbb{N}^n$ for $j \in \mathbb{Z}$.

For $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, set $\operatorname{supp}(\mathbf{a}) := \{i \mid a_i > 0\} \subset [n] := \{1, \dots, n\}$ and $|\mathbf{a}| = \sum_{i=1}^n a_i$. We say $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ is *squarefree* if $a_i = 0, 1$ for all $i \in [n]$. When $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ is squarefree, we sometimes identify $\mathbf{a}$ with $\operatorname{supp}(\mathbf{a})$.

**Definition 2.1** ([12]). We say a $\mathbb{Z}^n$-graded $S$-module $M$ is *squarefree*, if the following conditions are satisfied.

(a) $M$ is $\mathbb{N}^n$-graded (i.e., $M_{\mathbf{a}} = 0$ if $\mathbf{a} \notin \mathbb{N}^n$) and finitely generated.
(b) The multiplication map $M_{\mathbf{a}} \ni y \mapsto (\prod x_i^{b_i}) \cdot y \in M_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ is bijective for all $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ with $\operatorname{supp}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \operatorname{supp}(\mathbf{a})$.

For a simplicial complex $\Delta \subset 2^{[n]}$, the Stanley-Reisner ideal $I_\Delta := (\prod_{i \in F} x_i \mid F \notin \Delta)$ and the Stanley-Reisner ring $K[\Delta] := S/I_\Delta$ are squarefree modules. Note that if $M$ is squarefree then $M_{\mathbf{a}} \cong M_F$ as $K$-vector spaces for all $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ with $\operatorname{supp}(\mathbf{a}) = F$. Let $\mathrm{Sq}_S$ be the full subcategory of $^*\mathrm{gr}\, S$ consisting of squarefree modules. In $^*\mathrm{gr}\, S$, $\mathrm{Sq}_S$ is closed under kernels, cokernels and extensions ([12, Lemma 2.3]), and we have that $D^b(\mathrm{Sq}_S) \cong D^b_{\mathrm{Sq}_S}(^*\mathrm{gr}\, S)$. If $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_S)$, then $\mathbf{D}_S(M^\bullet) \in D^b_{\mathrm{Sq}_S}(^*\mathrm{gr}\, S)$ (see [13]). So $\mathbf{D}_S$ gives a duality functor on $D^b(\mathrm{Sq}_S)$.

**Definition 2.2** (Römer [11]). A $\mathbb{Z}^n$-graded $E$-module $N = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n} N_{\mathbf{a}}$ is *squarefree* if $N$ is finitely generated and $N = \bigoplus_{F \subset [n]} N_{-F}$.

For example, any monomial ideal of $E$ is a squarefree module. Any monomial ideal of $E$ is of the form $J_\Delta = (\prod_{i \in F} y_i \mid F \notin \Delta)$ for some simplicial complex $\Delta \subset 2^{[n]}$. We say $K\{\Delta\} := E/J_\Delta$ is the *exterior face ring* of $\Delta$.

Let $\mathrm{Sq}_E$ be the full subcategory of $^*\mathrm{gr}\, E$ consisting of squarefree $E$-modules. Then there exist functors $\mathcal{S} : \mathrm{Sq}_E \to \mathrm{Sq}_S$ and $\mathcal{E} : \mathrm{Sq}_S \to \mathrm{Sq}_E$ giving an equivalence $\mathrm{Sq}_S \cong \mathrm{Sq}_E$. Here $\mathcal{S}(N)_F = N_{-F}$ for $N \in \mathrm{Sq}_E$, and the multiplication map $\mathcal{S}(N)_F \ni z \mapsto x_i z \in \mathcal{S}(N)_{F \cup \{i\}}$ for $i \notin F$ is given by $\mathcal{S}(N)_F = N_{-F} \ni z \mapsto (-1)^{\alpha(i,F)} y_i z \in N_{-(F \cup \{i\})} = \mathcal{S}(N)_{F \cup \{i\}}$, where $\alpha(i,F) = \#\{j \in F \mid j < i\}$. For example, $\mathcal{S}(K\{\Delta\}) = K[\Delta]$. See [11] for further information. Of course, $\mathcal{S}$ and $\mathcal{E}$ can be extended to the functors between $D^b(\mathrm{Sq}_S)$ and $D^b(\mathrm{Sq}_E)$.

If $N \in \mathrm{Sq}_E$, then $N^* = \mathrm{Hom}_E(N, E)$ is squarefree again. So $(-)^*$ gives the duality functor $\mathbf{D}_E$ on $D^b(\mathrm{Sq}_E)$. For example, $K\{\Delta\}^* = J_{\Delta^\vee}$, where $\Delta^\vee = \{F \subset [n] \mid [n] \setminus F \notin \Delta\}$ is the Alexander dual complex of $\Delta$. We have the *Alexander duality functor* $\mathbf{A} := \mathcal{S} \circ \mathbf{D}_E \circ \mathcal{E}$ on $\mathrm{Sq}_S$ (or $D^b(\mathrm{Sq}_S)$). Of course, $\mathbf{A}(K[\Delta]) = I_{\Delta^\vee}$. In general, we have $\mathbf{A}(H^i(M^\bullet))_F = (H^{-i}(M^\bullet)_{[n] \setminus F})^\vee$.

An associated prime ideal of $M \in {}^*\mathrm{gr}\, S$ is of the form $P_F = (x_i \mid i \notin F)$ for some $F \subset [n]$. Let $M \in \mathrm{Sq}_S$ be a squarefree module. A monomial prime ideal $P_F$ is a minimal prime of $M$ if and only if $F$ is a maximal element of the set $\{G \subset [n] \mid M_G \neq 0\}$. The following is a squarefree version of Definition 1.1.

**Definition 2.3.** We say $(F, i) \in 2^{[n]} \times \mathbb{Z}$ is a *distinguished pair* for a complex $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_S)$, if $P_F$ is a minimal prime of $H^i(M^\bullet)$ and $H^j(M^\bullet)_G = 0$ for all $j$ with $j < i$ and $G \supset F$ with $|G| < |F| + i - j$.

**Theorem 2.4.** *Let $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_S)$. A pair $(F, i)$ is distinguished for $M^\bullet$ if and only if $(F, -|F| - i)$ is distinguished for $\mathbf{D}_S(M^\bullet)$. If this is the case, $\dim_K H^i(M^\bullet)_F = \dim_K H^{-|F|-i}(\mathbf{D}_S(M^\bullet))_F$.*

*Proof.* Like the proof of Theorem 1.2, we consider the spectral sequence $E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_S^p(H^{-q}(M^\bullet), \omega^\bullet) \Rightarrow \mathrm{Ext}_S^{p+q}(M^\bullet, \omega^\bullet)$. Then $E_r^{p,q}$ is squarefree for all $p, q$ and

$r \geq 2$. When we consider a distinguished pair $(F, i)$, we set

$$\dim_F M := \begin{cases} -\infty & \text{if } M_G = 0 \text{ for all } G \supset F \\ \max\{\,|G| \mid G \supset F,\ M_G \neq 0\,\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

for $M \in \mathrm{Sq}_S$. Set $d_i(M^\bullet) := \dim_F H^i(M^\bullet)$ and $e_2^{p,q} := \dim_F \mathrm{Ext}^p_S(H^{-q}(M^\bullet), \omega^\bullet)$ for $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_S)$. We also remark that $\dim_K M_F = l_{S_{P_F}}(M \otimes_S S_{P_F})$ for $M \in \mathrm{Sq}_S$. The equation (1.1) holds in this context, and the proof of Theorem 1.2 works verbatim. □

If $N^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_E)$, then it is easy to see that $\mathbf{L}(N^\bullet)(-\mathbf{1}) \in D^b(\mathrm{Sq}_S)$. So $\mathcal{L}(-) := \mathbf{L}(-)(-\mathbf{1})$ gives a functor from $D^b(\mathrm{Sq}_E)$ to $D^b(\mathrm{Sq}_S)$. Moreover, we have $\mathcal{L} \cong \mathbf{A} \circ \mathbf{D}_S \circ \mathcal{S}$ by [13, Proposition 4.3].

**Definition 2.5.** Let $N^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_E)$. We say $(F, i)$ is a *distinguished pair* for $N^\bullet$ if it is a distinguished pair for $\mathcal{L}(N^\bullet) \in D^b(\mathrm{Sq}_S)$ in the sense of Definition 2.3.

The next result can be proved by the same way as Corollary 1.8 using Theorem 2.4.

**Proposition 2.6.** *Let $N^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_E)$. A pair $(F, i)$ is distinguished for $N^\bullet$ if and only if $(F, 2n - |F| - i)$ is distinguished for $\mathbf{D}_E(N^\bullet)$. If this is the case, we have $\dim_K H^i(\mathcal{L}(N^\bullet))_F = \dim_K H^{2n-|F|-i}(\mathcal{L} \circ \mathbf{D}_E(N^\bullet))_F$.*

If $M^\bullet \in D^b({}^*\mathrm{gr}\, S)$, then $\mathrm{Tor}^S_i(K, M^\bullet) := H^{-i}(K \otimes_E P^\bullet)$ is a $\mathbb{Z}^n$-graded module, where $P^\bullet$ is a graded free resolution of $M^\bullet$. Set $\beta_{i,\mathbf{a}}(M^\bullet) := \dim_K \mathrm{Tor}^S_i(K, M^\bullet)_{\mathbf{a}}$ for $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$. We say $\beta_{i,\mathbf{a}}(M^\bullet)$ is the $(i, \mathbf{a})$th Betti number of $M^\bullet$. If $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_S)$ and $\beta_{i,\mathbf{a}}(M^\bullet) \neq 0$, then $\mathbf{a}$ is squarefree (see [13]).

**Definition 2.7** (c.f. [4]). A Betti number $\beta_{i,F}(M^\bullet) \neq 0$ is *extremal* if $\beta_{j,G}(M^\bullet) = 0$ for all $(j, G) \neq (i, F)$ with $j \geq i$, $G \supset F$, and $|G| - j > |F| - i$.

**Proposition 2.8** (c.f. [2]). *Let $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_S)$ and $N^\bullet := \mathcal{E}(M^\bullet) \in D^b(\mathrm{Sq}_E)$. A pair $(F, i)$ is distinguished for $\mathbf{D}_E(N^\bullet)$ if and only if $\beta_{i+|F|-n,F}(M^\bullet)$ is an extremal Betti number. If this is the case, then $\beta_{i+|F|-n,F}(M^\bullet) = \dim_K H^i(\mathcal{L} \circ \mathbf{D}_E(N^\bullet))_F$.*

*Proof.* For $j \in \mathbb{Z}$ and $G \subset [n]$, we have the following.

$$\begin{aligned} \beta_{j,G}(M^\bullet) &= \dim_K [H^{|G|-j-n}(\mathbf{D}_S \circ \mathbf{A}(M^\bullet))]_{[n]\setminus G} \quad \text{(by [13, Corollary 3.6])} \\ &= \dim_K [H^{n+j-|G|}(\mathbf{A} \circ \mathbf{D}_S \circ \mathbf{A}(M^\bullet))]_G \\ &= \dim_K [H^{n+j-|G|}(\mathcal{L} \circ \mathcal{E} \circ \mathbf{A}(M^\bullet))]_G \\ &= \dim_K [H^{n+j-|G|}(\mathcal{L} \circ \mathbf{D}_E(N^\bullet))]_G. \end{aligned}$$

The assertion easily follows from this equality. □

**Corollary 2.9.** *Let $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_S)$. A Betti number $\beta_{i,F}(M^\bullet)$ is extremal if and only if so is $\beta_{|F|-i,F}(\mathbf{A}(M^\bullet))$. If this is the case, $\beta_{i,F}(M^\bullet) = \beta_{|F|-i,F}(\mathbf{A}(M^\bullet))$.*

*Proof.* If $\beta_{i,F}(M^\bullet)$ is extremal, then $(F, n+i-|F|)$ is a distinguished pair for $\mathbf{D}_E \circ \mathcal{E}(M^\bullet)$ by Proposition 2.8. By Proposition 2.6, $(F, n-i)$ is a distinguished pair for $\mathcal{E}(M^\bullet) \cong \mathbf{D}_E \circ \mathcal{E} \circ \mathbf{A}(M^\bullet)$. So $\beta_{|F|-i,F}(\mathbf{A}(M^\bullet))$ is extremal. The converse implication can be proved by the same way. The last equality follows from Proposition 2.6. □

This corollary generalizes results of Bayer-Charalambous-Popescu [4], Römer [11] and Miller [10]. Roughly speaking, the above proof is a "complex version" of [11]. But, his argument itself does not work in the $\mathbb{Z}^n$-graded context, since he use a generic base change of $V = E_{-1}$.

For $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_S)$. Set $\operatorname{proj.dim}(M^\bullet) = \max\{\, i \mid \beta_{i,F}(M^\bullet) \neq 0 \text{ for some } F \,\}$ and $\operatorname{reg}(M^\bullet) = \max\{\, |F| - i \mid \beta_{i,F}(M^\bullet) \neq 0 \,\}$. Since Betti numbers $\beta_{i,F}(M^\bullet)$ which give $\operatorname{proj.dim}(M^\bullet)$ or $\operatorname{reg}(M^\bullet)$ are extremal, the next result follows from Corollary 2.9.

**Corollary 2.10** (c.f.[10, 11]). *If* $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}_S)$, *then* $\operatorname{proj.dim}(M^\bullet) = \operatorname{reg}(\mathbf{A}(M^\bullet))$.

## References


[1] A. Aramova, L. Avramov and J. Herzog, Resolutions of monomial ideals and cohomology over exterior algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 579-594.

[2] A. Aramova and J. Herzog, Almost regular sequences and Betti numbers, Amer. J. Math. **122** (2000), 689-719.

[3] K. Ajitabh, S.P. Smith and J.J. Zhang, Auslander-Gorenstein rings, Comm. Algebra 26 (1998), 2159–2180.

[4] D. Bayer, H. Charalambous and S. Popescu, Extremal Betti numbers and applications to monomial ideals, J. Algebra **221** (1999), 497–512.

[5] E. Babson, I. Novik and R. Thomas, Symmetric iterated Betti numbers, preprint (math.CO/0206063).

[6] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, revised edition, Cambridge University Press, 1998.

[7] D. Eisenbud, G. Fløystad and F.-O. Schreyer, Sheaf cohomology and free resolutions over exterior algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4397-4426.

[8] D. Eisenbud, S. Popescu and S. Yuzvinsky, Hyperplane arrangement cohomology and monomials in the exterior algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4365-4383.

[9] S.I. Gelfand and Y.I. Manin, Methods of homological algebra. Springer-Verlag, 1996.

[10] E. Miller, The Alexander duality functors and local duality with monomial support, J. Algebra. **231** (2000), 180–234.

[11] T. Römer, Generalized Alexander duality and applications, Osaka J. Math. **38** (2001), 469–485.

[12] K. Yanagawa, Alexander duality for Stanley-Reisner rings and squarefree $\mathbb{N}^n$-graded modules, J. Algebra **225** (2000), 630–645.

[13] K. Yanagawa, Derived category of squarefree modules and local cohomology with monomial ideal support, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[14] K. Yanagawa, BGG correspondence and Römer's theorem on an exterior algebra, preprint.

[15] A. Yekutieli and J. Zhang, Rings with Auslander dualizing complexes, J. Algebra 213 (1999) 1–51.



Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

*E-mail address*: yanagawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

# A FEW REMARKS ON A GENERALIZATION OF TIGHT CLOSURE

原 伸生
東北大学大学院理学研究科

Hochster–Huneke [HH1] によって導入された密着閉包 (tight closure) の理論において, 判定イデアル (test ideal)—正標数の環 $R$ の判定元の全体によって生成されるイデアル $\tau(R)$—は重要な役割を果たしている. このイデアルは, 標数 0 における乗数イデアル $\mathcal{J}(R)$ と, 標数 0 から $p \gg 0$ への還元を通して対応することが知られているが, 後者に関しては, 任意のイデアル $\mathfrak{a} \subseteq R$ と有理指数 $t \geq 0$ に付随する乗数イデアル $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ が定義されており, これにより様々な興味深い応用が可能となる.

以上を踏まえて, 吉田健一氏 (名大・多元数理) との共同研究 [HY] において我々は, 密着閉包を $\mathfrak{a}^t$-密着閉包の概念に一般化し, これを用いて判定イデアルの一般化であるイデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ を定義した. その結果, 標数 0 から $p \gg 0$ への還元を通した乗数イデアル $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ とイデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ の対応や, 標数 0 の特異点解消と消滅定理等を用いて得られる乗数イデアルの種々の性質 (Skoda の定理, 正則環における subadditivity 等) がイデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ に対しても成り立つことが示された.

本稿では, 上述の結果 ([HY], [HT]) に手短に触れた後, $\mathfrak{a}^t$-密着閉包とイデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ のさらなる一般化として, 任意のイデアルのフィルター $\mathfrak{a}_\bullet$ に付随して定まる $||\mathfrak{a}_\bullet||$-密着閉包とイデアル $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ を定義し, その応用として, Ein–Lazarsfeld–Smith [ELS], Hochster–Huneke [HH3] が, 正則局所環におけるイデアルの形式的ベキ乗の振舞いに関して得た結果に対する簡単な別証明を [H] から紹介する. 『別証明』とは云っても種を明かせば, イデアル $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ を『漸近的乗数イデアル』$\mathcal{J}(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ の代わりに使って [ELS] の証明の真似をするだけなので, 基礎となる密着閉包の一般化の勘所に出来るだけ触れて頂けるようにしたい.

## 1. $\mathfrak{a}^t$-密着閉包とイデアル $\tau(\mathfrak{a})$

本節では, [HY] で定義した $\mathfrak{a}^t$-密着閉包とイデアル $\tau(\mathfrak{a})$ の基礎的事項をまとめておく. 着想の源泉となった密着閉包については, [HH2], [HH3], [Hu] を参照されたい.

以下ではとくに断らない限り, $R$ は標数 $p$ の (すなわち, 標数 $p > 0$ の素体を含む) ネーター環とし, 文字 $q$ は標数 $p$ のベキ $p^e$ を表すものとする. また, $R^\circ$ で $R$ のどんな極小素イデアルにも属さない元の全体, $F\colon R \to R$; $z \to z^p$ で $R$ のフロベニウス写像を表す. さらに, 環 $R$ を $e$ 回フロベニウス写像 $F^e\colon R \to R$ を通して $R$-加群とみたものを ${}^eR$ と書く. 云うまでもないことであるが, $R$ が整域ならば $R^\circ = R \setminus \{0\}$, また, $R$ が被約ならば $F^e\colon R \to {}^eR$ は自然な包含写像 $R \hookrightarrow R^{1/q}$ と同一視されることに注意しておく. $R$-加群 ${}^1R$ (または $R^{1/p}$) が有限生成のとき, $R$ は F-有限であると云われる.

$M$ を $R$-加群とする. 各 $e \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{F}^e(M) := {}^eR \otimes_R M$ とおき, これを $R = {}^eR$ の左からの作用により $R$-加群とみなす. すると, $M$ の $e$ 回フロベニウス写像 $F^e\colon M = R \otimes_R M \to \mathbb{F}^e(M) = {}^eR \otimes_R M$ がひきおこされるが, この写像による $z \in M$ の像も $z^q := F^e(z) \in \mathbb{F}^e(M)$ と書くことにする. また, $M$ の $R$-部分加群 $N \subseteq M$ に対しひきおこされる写像 $\mathbb{F}^e(N) \to \mathbb{F}^e(M)$ の像を $N_M^{[q]}$ と表す. とくに $I$ が $R$ のイデアルのとき, $I_R^{[q]} = I^{[q]} = (a^q \mid a \in I) \subseteq R$ である.

**定義 1.1.** $R$ を標数 $p>0$ のネーター環, $\mathfrak{a}\subseteq R$ を $\mathfrak{a}\cap R^\circ\neq\emptyset$ なるイデアルとし, 非負有理数 $t\geq 0$ を固定する. $R$-加群 $M$ とその部分加群 $N\subseteq M$ に対し, $N$ の $M$ における $\mathfrak{a}^t$-密着閉包 ($\mathfrak{a}^t$-tight closure) $N_M^{*\mathfrak{a}^t}\subseteq M$ を次で定義する: $z\in M$ に対し

$$z\in N_M^{*\mathfrak{a}^t}\iff \exists c\in R^\circ \text{ such that } c\mathfrak{a}^{\lceil tq\rceil}z^q\subseteq N_M^{[q]} \text{ for all } q=p^e\gg 0.$$

ここに, $\lceil tq\rceil$ は有理数 $tq$ の『切り上げ』を表す. イデアル $I\subseteq R$ の $\mathfrak{a}^t$-密着閉包は $I^{*\mathfrak{a}^t}=I_R^{*\mathfrak{a}^t}$ と定める.

**注意 1.2.** (1) 上の定義で, イデアル $\mathfrak{a}$ の有理数ベキ $\mathfrak{a}^t$ は形式的な記号だが, 実際のイデアルとしての整数ベキと両立する. すなわち, 非負整数 $n$ に対し $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}^n$ とおくとき, $\mathfrak{b}^t$-密着閉包 $=\mathfrak{a}^{nt}$-密着閉包である. これは, イデアルの包含 $\mathfrak{a}^{n\lceil tq\rceil}\subseteq\mathfrak{a}^{\lceil ntq\rceil}$ の『差』が乗数 $c\in R^\circ$ に吸収されるからである. そこで, $t=1$ のときの $\mathfrak{a}^1$-密着閉包を単に $\mathfrak{a}$-密着閉包と書く.

(2) $\mathfrak{a}=R$ が単位イデアルのときの $R$-密着閉包 $N_M^{*R}$ は, Hochster–Huneke [HH1] によって定義された密着閉包 (tight closure) $N_M^*$ に他ならない. しかしながら, $\mathfrak{a}$ が単位イデアルでないと不等号 $N_M^{*\mathfrak{a}^t}\subsetneq(N_M^{*\mathfrak{a}^t})_M^{*\mathfrak{a}^t}$ が起こり得るので, Hochster–Huneke の密着閉包と違って, $\mathfrak{a}^t$-密着閉包は一般には所謂『閉包操作』を与えない.

(3) 定義 1.1 は, 複数個のイデアル $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_r\subseteq R$ と有理数 $t_1,\dots,t_r\geq 0$ に対しても拡張される. すなわち, $N$ の $M$ における $\mathfrak{a}_1^{t_1}\cdots\mathfrak{a}_r^{t_r}$-密着閉包 $N_M^{*\mathfrak{a}_1^{t_1}\cdots\mathfrak{a}_r^{t_r}}$ が次で定義される:

$$z\in N_M^{*\mathfrak{a}_1^{t_1}\cdots\mathfrak{a}_r^{t_r}}\iff \exists c\in R^\circ \text{ such that } cz^q\mathfrak{a}_1^{\lceil t_1q\rceil}\cdots\mathfrak{a}_r^{\lceil t_rq\rceil}\subseteq N_M^{[q]} \text{ for all } q=p^e\gg 0.$$

次に挙げる $\mathfrak{a}^t$-密着閉包の基本性質の証明は易しい.

**命題 1.3** ([HY]). どんな極小素イデアルにも含まれないイデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subseteq R$ と有理数 $t\geq 0$, 及び, $R$-加群 $M$ とその部分加群 $N$ に対して次が成り立つ.

1. $N_M^{*\mathfrak{a}^t}$ は $N$ を含む $M$ の $R$-部分加群で, $N_M^{*\mathfrak{a}^t}/N\cong 0_{M/N}^{*\mathfrak{a}^t}$.
2. $N_M^{*\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}}\subseteq(N_M^{*\mathfrak{a}^t}:\mathfrak{b})_M$.
3. $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$ ならば $N_M^{*\mathfrak{a}^t}\subseteq N_M^{*\mathfrak{b}^t}$ で, さらに $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の節減ならば, $N_M^{*\mathfrak{a}^t}=N_M^{*\mathfrak{b}^t}$.

**定義 1.4.** $R$ を標数 $p>0$ のネーター環, $\mathfrak{a}\subseteq R$ を $\mathfrak{a}\cap R^\circ\neq\emptyset$ なるイデアルとし, $t\geq 0$ を非負有理数とする. 元 $c\in R^\circ$ が, 任意のイデアル $I\subseteq R$ と $z\in I^{*\mathfrak{a}^t}$, 及び $p$ の任意のベキ $q=p^e$ に対して, $c\mathfrak{a}^{\lceil tq\rceil}z^q\subseteq I^{[q]}$ をみたすとき, $c$ は $\mathfrak{a}^t$-判定元 ($\mathfrak{a}^t$-test element) であるという.

$\mathfrak{a}=R$ が単位イデアルのときの $R$-判定元は Hochster–Huneke [HH1] の意味での判定元 (test element) に他ならないが, 上の定義 1.4 には実は弱点がある. つまり, $\mathfrak{a}^t$-密着閉包そのものとは違って, 非負整数 $n$ に対し $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}^n$ とおくとき, $\mathfrak{b}^t$-判定元と $\mathfrak{a}^{nt}$-判定元とが同じとは少なくともアプリオリには云えない (cf. 注意 1.2 (1)). しかし, ($\mathfrak{a}^t$-) 判定元については『存在すること』が重要で, 普通の状況では次の定理により, すべての $\mathfrak{a}$ と $t$ に対して有効な『普遍的』判定元[1]がとれるので, こうした細かいことは気にしないことにする. (さらに [HT] では, 適当な条件の下で [HH1] の意味での判定元が『普遍的』判定元になることが示されている.)

**定理 1.5** ([HY], cf. [HH2]). $R$ を標数 $p>0$ の優秀局所環とし, 元 $c\in R^\circ$ による局所化 $R_c$ が Gorenstein かつ弱 F-正則[2] であるとする. すると, $c$ のあるベキ $c^n$ は, すべての $\mathfrak{a}\cap R^\circ\neq\emptyset$ なるイデアル $\mathfrak{a}\subseteq R$ とすべての有理数 $t\geq 0$ に対して, $\mathfrak{a}^t$-判定元である.

---

[1] これは, [HH1] における universal test element とは意味が違うので, ここだけの用語である.

[2] $R$ のすべてのイデアル $I$ が密着的閉, すなわち, $I^*=I$ であるとき, $R$ は弱 F-正則であるという. 正標数の正則環は弱 F-正則である.

**定理-定義 1.6** ([HY]). $R$ を標数 $p>0$ の被約な優秀環, $\mathfrak{a}\subseteq R$ を $\mathfrak{a}\cap R^\circ\neq\emptyset$ なるイデアルとし, $t\geq 0$ を非負有理数とする. $R$ のすべての極大イデアル $\mathfrak{m}$ について剰余体 $R/\mathfrak{m}$ の入射包絡の直和をとったものを $E=\bigoplus_{\mathfrak{m}}E_R(R/\mathfrak{m})$ とおく. このとき, 次の 1, 2, 3 のイデアルは互いに相等しい. このイデアルを $\tau(\mathfrak{a}^t)$ で表す.

1. $\displaystyle\bigcap_M \mathrm{Ann}_R(0_M^{*\mathfrak{a}^t})$, ここに, $M$ はすべての有限生成 $R$-加群をわたる.
2. $\displaystyle\bigcap_{M\subseteq E} \mathrm{Ann}_R(0_M^{*\mathfrak{a}^t})$, ここに, $M$ は $E$ のすべての有限生成 $R$-部分加群をわたる.
3. $\displaystyle\bigcap_{I\subseteq R}(I:I^{*\mathfrak{a}^t})$, ここに, $I$ は $R$ のすべてのイデアルをわたる.

さらに, $R$ が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規環であれば, $\tau(\mathfrak{a}^t)=\mathrm{Ann}_R(0_E^{*\mathfrak{a}^t})$ が成り立つ.

**注意 1.7.** $\mathfrak{a}=R$ が単位イデアルのとき, $\tau(\mathfrak{a})=\tau(R)$ は判定イデアル (test ideal) とよばれる [HH1]. これは, $\tau(R)\cap R^\circ$ が $R$ の判定元全体の集合と一致するからであるが, $\tau(\mathfrak{a}^t)\cap R^\circ$ は一般には $\mathfrak{a}^t$-判定元全体の集合とは一致しないので, $\tau(\mathfrak{a}^t)$ を $\mathfrak{a}^t$-判定イデアルとは (少なくとも筆者は) 云わない.

命題 1.3 から次の $\tau(\mathfrak{a}^t)$ の基本性質がしたがう.

**命題 1.8.** 標数 $p>0$ のネーター環 $R$ のどんな極小素イデアルにも含まれないイデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subseteq R$ と有理数 $t\geq 0$ に対して次が成り立つ.

1. $\tau(\mathfrak{a}^t)\mathfrak{b}\subseteq\tau(\mathfrak{a}^t\mathfrak{b})$.
2. $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$ ならば $\tau(\mathfrak{b}^t)\subseteq\tau(\mathfrak{a}^t)$ で, さらに, $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の節減ならば $\tau(\mathfrak{b}^t)=\tau(\mathfrak{a}^t)$.
3. $R$ が弱 F-正則ならば, $\mathfrak{a}\subseteq\tau(\mathfrak{a})$.

密着閉包の理論における重要な未解決問題の一つに, 局所化との可換性がある. この問題は環 $R$ が F-正則[3] ならば普通の密着閉包については自明になってしまうが, $\mathfrak{a}^t$-密着閉包についてはそうではない. より緩やかな問題設定としては, 判定イデアルやイデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ の局所化との可換性がある. 次の結果はこれらに対する部分的解答を与えている.

**命題 1.9.** $(R,\mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ のネーター局所環, $\mathfrak{a}\subseteq R$ を $\mathfrak{a}\cap R^\circ\neq\emptyset$ なるイデアルとし, $t\geq 0$ を非負有理数とする.

1. (吉田 [Y]): $R$ が正則環ならば, すべてのイデアル $I\subset R$ とすべての積閉集合 $W\subset R$ に対して, $I^{*\mathfrak{a}^t}R_W=(IR_W)^{*(\mathfrak{a}R_W)^t}$. とくに, $\tau(\mathfrak{a}^t)R_W=\tau((\mathfrak{a}R_W)^t)$.
2. ([HT]): $R$ が F-有限な $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規環ならば, $\tau(\mathfrak{a}^t)R_W=\tau((\mathfrak{a}R_W)^t)$.

さて, 冒頭でも述べたように, 密着閉包の概念を $\mathfrak{a}^t$-密着閉包に一般化したのは, イデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ に『乗数イデアル $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ の正標数版』としての応用を期待したからである. 乗数イデアルの定義や標数 0 から $p\gg 0$ への還元による乗数イデアル $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ とイデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ との対応の詳細については [E], [La], [HY] を参照して頂くことにして, 乗数イデアル $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ とイデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ の共通の性質をみておくことにしよう. 以下の定理はイデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ の性質として述べるが, 標数 0 の乗数イデアル $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ についても同様の結果が成り立つ ([DEL], [La], [Li]).

**定理 1.10** (Subadditivity [HY], cf. [DEL]). $(R,\mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ の完備正則局所環とするとき, $R$ の任意のイデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\,(\neq(0))$ と有理数 $t,t'\geq 0$ に対して次が成り立つ.

$$\tau(\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}^{t'})\subseteq\tau(\mathfrak{a}^t)\tau(\mathfrak{b}^{t'}).$$

[3] すべての局所化が弱 F-正則な環を F-正則と云う. そもそもこのように F-正則と弱 F-正則を区別しなければならないのは密着閉包と局所化の可換性がわかっていないからである.

**定理 1.11** (Skoda 型定理 [HT], cf. [La], [Li]). $(R, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の局所環とし, $R$ が完備であるか, または F-有限な $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規環であると仮定する. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \subseteq R$ を $R$ のどんな極小素イデアルにも含まれないイデアル, $t \geq 0$ を非負有理数とする. イデアル $\mathfrak{a}$ が $r$ 個の元で生成される節減をもつとすると, 次が成り立つ.

$$\tau(\mathfrak{a}^r \mathfrak{b}^t) = \tau(\mathfrak{a}^{r-1}\mathfrak{b}^t)\mathfrak{a}.$$

**系 1.12** ([HT]). $(R, \mathfrak{m})$ を剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が無限体である標数 $p > 0$ の $d$ 次元局所環とし, さらに, $R$ が完備であるか, または F-有限な $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規環であると仮定する. すると, $\mathfrak{a} \cap R^\circ \neq \emptyset$ なる任意のイデアル $\mathfrak{a} \subseteq R$ と任意の整数 $n \geq d$ に対して次が成り立つ.

$$\tau(\mathfrak{a}^n) = \tau(\mathfrak{a}^{d-1})\mathfrak{a}^{n+1-d}.$$

Skoda 型定理の証明は既に数箇所で話しているので詳述はしないが, 命題 1.8 (2) より $\mathfrak{a}$ 自身が $r$ 個で生成されているとしてよく, そうすると各 $q = p^e$ に対して $\mathfrak{a}^{qr} = \mathfrak{a}^{[q]}\mathfrak{a}^{q(r-1)}$ が成り立つという, 小学生でもわかる (?)[4] 事実を使って驚く程簡単に示される. この簡明さ, そしてそれにも拘らず, 次節で述べるような乗数イデアルと同等の応用が可能であることが, イデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ の長所だと筆者は考える.

## 2. フィルターに付随した密着閉包と形式的ベキ乗への応用

標数 0 の乗数イデアルは, 与えられたイデアル $\mathfrak{a}$ に付随するものだけでなく, イデアルのフィルター $\mathfrak{a}_\bullet$ に付随するものをも定義することができる. 文献 [ELS], [La] 等ではこれを『漸近的乗数イデアル』と呼び $\mathcal{J}(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ と表している. 漸近的乗数イデアルの利点は, フィルターすなわち乗法的なイデアル族 $\mathfrak{a}_\bullet$ に属する無限個のイデアルの特異性に関するある種の情報がたった一つのイデアル $\mathcal{J}(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ に詰まっていることであるといえよう. Ein–Lazarsfeld–Smith [ELS] はこうした着想を, 標数 0 の正則環におけるイデアルの形式的ベキ乗の振舞いに関する結果を証明する際に有効に使っている. また, そのすぐ後に Hochster–Huneke [HH3] は密着閉包の理論を応用してこの結果の正標数版を証明している.

本節では, 漸近的乗数イデアルに対応するイデアル $\tau(\mathfrak{a})$ の変種を定義し, その応用として, 上述の [ELS], [HH3] の結果に対する別証明を与える. この別証明は [HH3] と同じく正標数の世界での議論であるにも拘らず, その本質的な着想と手法は標数 0 の世界で [ELS] が用いたものと同じであると云ってよい.

以下では, ネーター環 $R$ のイデアル族 $\mathfrak{a}_\bullet = \{\mathfrak{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ で次の条件をみたすものを $R$ のイデアルのフィルター (filtration of ideals)[5] とよぶ:

1. $\mathfrak{a}_1 \cap R^\circ \neq \emptyset$.
2. $\mathfrak{a}_m \cdot \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}_{m+n}$ for all $m, n \geq 1$.

ここで本質的なのは条件 2 であって, 条件 1 は $\mathfrak{a}_\bullet$ に付随した密着閉包を定義するための付帯的条件に過ぎない. 自明な例としては, $\mathfrak{a} \cap R^\circ \neq \emptyset$ なるイデアル $\mathfrak{a} \subseteq R$ の通常のベキからなるフィルター $\mathfrak{a}^\bullet = \{\mathfrak{a}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ がある. 本稿で応用したいのは, $\mathfrak{a}$ の記号的ベキ乗からなるフィルター $\mathfrak{a}^{(k\bullet)} = \{\mathfrak{a}^{(kn)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ であるが, $\mathfrak{a}$ が非混合イデアルのとき, その記号的ベキ乗は

$$\mathfrak{a}^{(n)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R/\mathfrak{a})} \mathfrak{a}^n R_{\mathfrak{p}} \cap R \quad (\mathfrak{p} \text{ はイデアル } \mathfrak{a} \text{ のすべての極小素因子をわたる})$$

と表されることに注意しておこう.

次の $\mathfrak{a}^t$-密着閉包の一般化は任意のフィルターに付随して定義できる.

---

[4]同意してくれない人々も多い.

[5][ELS] では graded family of ideals なる用語を使っている.

**定義 2.1.** $R$ を標数 $p>0$ のネーター環, $\mathfrak{a}_\bullet$ を $R$ のイデアルのフィルターとする. $R$-加群 $M$ とその部分加群 $N \subseteq M$ に対し, $N$ の $M$ における $||\mathfrak{a}_\bullet||$-密着閉包 ($||\mathfrak{a}_\bullet||$-tight closure) $N_M^{*||\mathfrak{a}_\bullet||} \subseteq M$ を次で定義する: $z \in M$ に対し

$$z \in N_M^{*||\mathfrak{a}_\bullet||} \iff \exists c \in R^\circ \text{ such that } c\mathfrak{a}_q z^q \subseteq N_M^{[q]} \text{ for all } q = p^e \gg 0.$$

上の定義でフィルターを $\mathfrak{a}_\bullet = \mathfrak{a}^{\lceil t\bullet \rceil}$ (或いは整閉包をとって $\mathfrak{a}_\bullet = \overline{\mathfrak{a}^{\lceil t\bullet \rceil}}$) としたものが $\mathfrak{a}^t$-密着閉包である.

**観察 2.2** (cf. [La]). $\mathfrak{a}_\bullet$ を標数 $p>0$ のネーター環 $R$ のイデアルのフィルターとする. すると, $R$ のイデアルの昇鎖条件から, イデアルの集合 $\{\tau((\mathfrak{a}_k)^{1/k}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ は包含関係に関して極大元をもち, この極大元は唯一つしかない. 実際, 整数 $k, l > 0$ と $q = p^e$ に対してフィルターの性質から $(\mathfrak{a}_k)^{\lceil q/k \rceil} \subseteq (\mathfrak{a}_{kl})^{\lceil q/kl \rceil}$ となるから, 任意の $R$-加群 $M$ に対して $0_M^{*(\mathfrak{a}_{kl})^{1/kl}} \subseteq 0_M^{*(\mathfrak{a}_k)^{1/k}}$, したがって, 任意の $k, l > 0$ に対して

$$\tau((\mathfrak{a}_k)^{1/k}) \subseteq \tau((\mathfrak{a}_{kl})^{1/kl})$$

が成り立つ. よって, $\tau((\mathfrak{a}_k)^{1/k})$ と $\tau((\mathfrak{a}_l)^{1/l})$ が共に極大であれば, 両者は $\tau((\mathfrak{a}_{kl})^{1/kl})$ に一致することになり, 極大元の一意性がしたがう.

これと同様の形式論が標数 0 の乗数イデアルに対しても成り立ち, イデアルのフィルター $\mathfrak{a}_\bullet$ に付随する『漸近的乗数イデアル』$\mathcal{J}(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ が, イデアルの集合 $\{\mathcal{J}((\mathfrak{a}_k)^{1/k}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ の唯一の極大元として定義されている ([La]). 一方, 正標数においては定義 1.6 に倣って, 2.1 で定義した $||\mathfrak{a}_\bullet||$-密着閉包の零化イデアルとして $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ を定義するのが最も自然であることに異論を挟む余地はあるまい. この自然な定義による $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ が『漸近的 $\tau$』すなわち $\{\tau((\mathfrak{a}_k)^{1/k}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ の唯一の極大元と一致することを保証するのが『普遍的』判定元の存在であることを次にみよう.

**命題-定義 2.3.** $(R, \mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ の優秀局所環, $E = E_R(R/\mathfrak{m})$ をその剰余体の入射包絡とし, $\mathfrak{a}_\bullet$ を $R$ のイデアルのフィルターとする. このとき, イデアル $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ を次で定義する:

$$\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||) = \bigcap_{M \subset E} \mathrm{Ann}_R(0_M^{*||\mathfrak{a}_\bullet||}),$$

ここに, 右辺の共通部分は $E$ のすべての有限生成 $R$-部分加群にわたってとるものとする. すると, $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ はイデアルの集合 $\{\tau((\mathfrak{a}_k)^{1/k}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ の包含関係に関する唯一の極大元と等しい.

**証明.** $\tau((\mathfrak{a}_k)^{1/k}) = \bigcap_M \mathrm{Ann}_R(0_M^{*(\mathfrak{a}_k)^{1/k}})$ が極大となるように $k \in \mathbb{N}$ をとっておく. 包含 $\tau((\mathfrak{a}_k)^{1/k}) \subseteq \tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ は, $(\mathfrak{a}_k)^{\lceil q/k \rceil} \subseteq \mathfrak{a}_q$ $(\forall q)$ より $0_M^{*(\mathfrak{a}_k)^{1/k}} \supseteq 0_M^{*||\mathfrak{a}_\bullet||}$ であることからただちにしたがう. 逆の包含を示すために, 任意の有限生成部分加群 $M \subset E$ を固定して, $z \in 0_M^{*(\mathfrak{a}_k)^{1/k}}$ とする. $E$ の部分加群の降鎖条件から集合 $\{0_M^{*(\mathfrak{a}_l)^{1/l}} \mid l \in \mathbb{N}\}$ は唯一の極小元をもち, それが $0_M^{*(\mathfrak{a}_k)^{1/k}}$ であると仮定してよい. すると, $z \in 0_M^{*(\mathfrak{a}_q)^{1/q}}$ $(\forall q)$ ゆえ, 定理 1.5 で存在が保証されている『普遍的』判定元 $c \in R^\circ$ をとれば, $q' \geq q$ なる $p$ のすべてのベキ $q, q'$ に対して, $c(\mathfrak{a}_q)^{q'/q} z^{q'} = 0$ が成り立つ. とくに $q = q'$ として $c\mathfrak{a}_q z^q = 0$ $(\forall q)$, したがって, $z \in 0_M^{*||\mathfrak{a}_\bullet||}$ を得る. □

イデアル $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ を『漸近的 $\tau$』として記述することにより, $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ のいくつかの性質を $\tau(\mathfrak{a}^t)$ の性質に帰着することが可能となる. 例えば, 命題 1.9 から $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ と局所化の可換性がわかるし, 定理 1.10 とイデアルの形式的な有理数ベキに関するちょっとしたトリックから次が容易に示される.

**命題 2.4** (Subadditivity). $(R, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の完備正則局所環, $\mathfrak{a}_\bullet$ を $R$ のイデアルのフィルターとすると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ.

$$\tau(||\mathfrak{a}_{n\bullet}||) \subseteq \tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)^n.$$

**注意 2.5.** ここまでの議論から, 正標数の正則局所環のイデアルのフィルター $\mathfrak{a}_\bullet$ に付随するイデアル $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ は, 標数0における『漸近的乗数イデアル』$\mathcal{J}(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ と同様, 以下の性質をみたしていることがわかる.

1. $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ は局所化と可換であり, $r$ 個の元で生成されるイデアル $\mathfrak{a}$ のベキからなる自明なフィルター $\mathfrak{a}^\bullet$ については次の Skoda の定理が成り立つ:
$$\tau(||\mathfrak{a}^{r\bullet}||) = \tau(\mathfrak{a}^r) \subseteq \mathfrak{a}.$$
2. 任意の $n \geq 1$ に対し, $\mathfrak{a}_n \subseteq \tau(||\mathfrak{a}_{n\bullet}||)$.
3. 任意の $n \geq 1$ に対し, $\tau(||\mathfrak{a}_{n\bullet}||) \subseteq \tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)^n$.

これらのうち, 性質1においては環の正則性は本質的でなく, 性質2についても正則性より弱い弱F-正則性を仮定すれば十分であるが (命題1.8 (3)), 性質3 (subadditivity) に関しては正則性が本質的な仮定である.

Ein–Lazarsfeld–Smith はイデアルの形式的ベキ乗の振舞いに関する定理—後述の定理2.6—を導く際に用いた (漸近的) 乗数イデアルの諸性質を性質1–3として公理的に抽出して, このような性質をもつ『乗数イデアル的な』イデアルの純代数的な構成法を問うている [ELS, Remark 3.1]. この問に対する一つの解答が本稿の主題である密着閉包の一般化とイデアル $\tau(||\mathfrak{a}_\bullet||)$ であると云うわけであるが, これが定理2.6に対する標数0の乗数イデアルを用いた証明 [ELS] と正標数のフロベニウス写像を用いた証明 [HH3] の間の "missing link" を探す手掛かりとなることを期待したい.

能書きが長くなったが, ここまで来れば次の定理の証明は [ELS] のそれを辿るだけである.

**定理 2.6** ([ELS], [HH3]). $(R, \mathfrak{m})$ を剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が無限体である標数 $p > 0$ の完備正則局所環, $\mathfrak{a} \neq (0)$ をその非混合イデアルとし, $\mathfrak{a}$ の極小素因子の高さの最大値を $h := \max\{\operatorname{ht} \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(R/\mathfrak{p})\}$[6]とおく. すると, 任意の整数 $k \geq h$ と $n \geq 1$ に対し,

$$\mathfrak{a}^{(kn)} \subseteq (\mathfrak{a}^{(k+1-h)})^n$$

が成り立つ, とくに, 任意の $n \geq 1$ に対し,

$$\mathfrak{a}^{(hn)} \subseteq \mathfrak{a}^n.$$

**証明.** 2.5の性質2と3より,

$$\mathfrak{a}^{(kn)} \subseteq \tau(||\mathfrak{a}^{(kn\bullet)}||) \subseteq \tau(||\mathfrak{a}^{(k\bullet)}||)^n.$$

であるから, $\tau(||\mathfrak{a}^{(k\bullet)}||) \subseteq \mathfrak{a}^{(k+1-h)}$ を示せばよい. $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}$ の任意の極小素因子とすると, $\mathfrak{a}^{(kn)}R_\mathfrak{p} = (\mathfrak{a}R_\mathfrak{p})^{kn}$ で $\dim R_\mathfrak{p} \leq h$ だから, 性質1より

$$\tau(||\mathfrak{a}^{(k\bullet)}||) \subseteq \tau(||\mathfrak{a}^{(k\bullet)}R_\mathfrak{p}||) = \tau((\mathfrak{a}R_\mathfrak{p})^k) \subseteq (\mathfrak{a}R_\mathfrak{p})^{k+1-h} = \mathfrak{a}^{k+1-h}R_\mathfrak{p}.$$

したがって, $\tau(||\mathfrak{a}^{(k\bullet)}||) \subseteq \bigcap_\mathfrak{p} \mathfrak{a}^{k+1-h}R_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{a}^{(k+1-h)}$ となり, 定理が示された. □

なお, Hochster–Huneke [HH3, Theorem 1.1] においては, $\mathfrak{a}$ が非混合イデアルでない場合も $h = \max\{\operatorname{ht} \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{p})\}$ とおけば定理の包含関係 $\mathfrak{a}^{(kn)} \subseteq (\mathfrak{a}^{(k+1-h)})^n$ が成り立つことが示されている. 講演においては形式的ベキ乗の定義に関し誤解があり仮定が錯綜していましたが, 講演直後に後藤四郎氏から上述の Hochster–Huneke によるより一般化な主張について御指摘頂いたことを感謝致します.

[6]Huneke はこれを big height と呼んでいる.

## REFERENCES


[DEL] Demailly, J.-P., Ein, L. and Lazarsfeld, R., *A subadditivity property of multiplier ideals*, Michigan Math. J. **48** (2000), 137–156.

[E] Ein, L., *Multiplier ideals, vanishing theorems and applications*, in "Algebraic Geometry–Santa Cruz 1995," pp. 203–219, Proc. Symp. Pure Math. **62**, AMS, Providence, 1997.

[ELS] Ein, L., Lazarsfeld, R. and Smith, K. E., *Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties*, Invent. Math. **144** (2001), 241–252.

[H] Hara, N., *A characteristic p analog of multiplier ideals and applications*, preprint.

[HT] Hara, N. and Takagi, S., *Some remarks on a generalization of test ideals*, Nagoya Math. J, to appear.

[HY] Hara, N. and Yoshida, K., *A generalization of tight closure and multiplier ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3143–3174.

[HH1] Hochster, M. and Huneke, C., *Tight closure, invariant theory and the Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31–116.

[HH2] Hochster, M. and Huneke, C., *F-regularity, test elements, and smooth base change*, Trans. Amer. Math. Soc. **346** (1994), 1–62.

[HH3] Hochster, M. and Huneke, C., *Comparison of symbolic and ordinary powers of ideals*, Invent. Math. **147** (2002), 349–369.

[Hu] Huneke, C., *Tight Closure and Its Applications*, CBMS Regional Conference Series in Math., No. 88, AMS, Providence, 1996.

[La] Lazarsfeld, R., *Positivity in algebraic geometry*, preprint.

[Li] Lipman, J., *Ajoints of ideals in regular local rings*, Math. Research Letters **1** (1994), 739–755.

[Y] 吉田健一, 正則局所環内の $\mathfrak{a}$-tight closure について, 第 24 回可換環論シンポジウム報告集, 2002.



MATHEMATICAL INSTITUTE, TOHOKU UNIVERSITY, SENDAI 980-8578, JAPAN
*E-mail address*: hara@math.tohoku.ac.jp

# Fogarty のアイデアによる "Geometric quotients are algebraic schemes"

橋本 光靖

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
hasimoto@math.nagoya-u.ac.jp

## 1. 序

[1] において Fogarty は次のことを主張している。

**定理 1 (Fogarty).** $S$ がエクセレントスキーム, $G$ は連結ファイバーを持つ $S$ 上有限型な $S$ 群スキームとする。$X$ は $S$ 上有限型な $G$ スキームとする。もし $(Y, \varphi)$ が $G$ の $X$ への作用の strict orbit space ならば, $Y$ は $S$ 上有限型である。さらに, もし $\mathcal{F}$ が連接な $(G, \mathcal{O}_X)$-module (連接な $G$-linearlized $\mathcal{O}_X$-module) であれば, $(\varphi_*\mathcal{F})^G$ は連接な $\mathcal{O}_Y$-module である。

この小文の目標はこの不変式論における重要な定理を理解することにある。筆者はまだ彼の証明を理解できていないが, 彼のアイデアは透明であり, $G$ が $S$ 平坦で, $\varphi$ が universally submersive と仮定すれば彼の証明の後追いをすることにさほどの困難は無く, 他のいくつかの仮定を外すことさえできる。すなわち我々は次を示す。

**定理 2.** $S$ がネータスキームで, $G$ は平坦な有限型 $S$ 群スキームとする。$X$ は $S$ 上有限型な $G$ スキームとする。もし $(Y, \varphi)$ が $G$ の $X$ への作用の普遍強軌道空間 (universal strict orbit space, [1] 参照) であれば, $Y$ は $S$ 上有限型である。さらにもし $\mathcal{F}$ が連接な $(G, \mathcal{O}_X)$-module であれば, $(\varphi_*\mathcal{F})^G$ は連接な $\mathcal{O}_Y$-module である。

$(G, \mathcal{O}_X)$-module の間の $G$ 同変な $\mathcal{O}_X$ 加群の射の像や核が再び $(G, \mathcal{O}_X)$-module になることを用いるので, $G$ が平坦であるという仮定は我々の証明には重要である。平坦性を使うもうひとつのメリットは普遍軌道空間の universal openness [8, p.6] である。

我々は $S$ がエクセレントであるとは仮定しない。我々は $G$ が連結幾何的ファイバーを持つとは仮定しない。定理は $X=G$ である場合も含む。だから $X_{\mathrm{red}}$ が $G$ 不変であるとは仮定しないし, $X$ の既約成分が $G$ 不変であるとも仮定しない。

もっとも本質的な場合である $Y$ が被約で $S$ がエクセレントの場合の証明は純粋に環論的である (定理 5)。証明は Fogarty [1] と小野田 [9] のアイデアに深く依存している。$S$ がエクセレントの仮定を除くには, 小野田の結果 [9, (2.20)] を用いる。

上記で使われたテクニックを利用し, 群作用と直接には関係のない有限生成性に関する結果も証明する。以下序文の終りまで, $S$ がネータスキームで $\varphi: X \to Y$ が $S$-schemes の全射で $X$ は $S$ 上有限型とする。

もし $\varphi$ が平坦ならば $Y$ は有限型である (系 7)。もし $S$ がエクセレントで $\varphi$ が固有射で $Y$ がネータであれば$Y$ は有限型である (定理 10)。

小野田 [9] は次を示した。$S$ が永田で $S$ 上本質的に有限なすべての正規局所環が解析的既約 (例えば $S$ がエクセレント) で, $Y$ がネータ正規で, $X$ の任意の既約成分の生成点は $Y$ の既約成分の生成点に写されるとする。然らば $Y$ は有限型である。Fogarty [2] も同じ結果を後に独立に証明している。

以上述べたことは [5] に詳細が出ている。その後, 次が分かった。

$X=\operatorname{Spec} B$, $Y=\operatorname{Spec} A$ はともに affine で, $A \to B$ は pure とする。この時 $Y$ は有限型である。証明には上に述べたことに加えて Gruson-Raynaud の flatenning を用いる。

本稿の内容に関して重要な助言を下さった小駒哲司先生, 小野田信春先生, 向井茂先生, [5] のレフェリーに感謝致します。

## 2. 主定理 — 被約な場合

この節を通して, $S$ はネータスキーム, $\varphi: X \to Y$ は $S$ スキームの間の全射である $S$ 射で, $X$ は $S$ 上有限型とする。次は Fogarty [1] による。

**命題 3.** $S = \operatorname{Spec} R$ がアフィンで, $Y = \operatorname{Spec} B$ はアフィンで $B$ が整域とする。すると $B$ の $R$ 上有限生成な部分代数 $A$ が存在して誘導される射 $\eta: Y = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A =: Z$ が双有理かつ幾何学的に単射となる。

**証明.** $(U_i)$ を $X$ の有限アフィン開被覆とする。すると $X$ を $\coprod_i U_i$ で置き換えて, $X = \operatorname{Spec} C$ はアフィンとして良い。

$J$ を自然な写像 $C \otimes_R C \to C \otimes_B C$ の核とする。すると $b_1, \ldots, b_r \in B$ で $J$ が

$$b_1 \otimes 1 - 1 \otimes b_1, \ldots, b_r \otimes 1 - 1 \otimes b_r$$

で生成されるようなものが取れる。$A_0 = R[b_1, \ldots, b_r]$ とおく。$y, y' \in Y(\xi)$ を $Y$ の相異なる geometric points とする。ここに $\xi$ は代数閉体である。$\varphi$ は全射で有限型だから, $x, x' \in X(\xi)$ であって $\varphi(x) = y$ かつ $\varphi(x') = y'$ であるものが存在する。$(x, x') \in (X \times X)(\xi) \setminus (X \times_Y X)(\xi)$ であるから, ある $i$ が存在して $b_i(x) \neq b_i(x')$ である。これは $y$ と $y'$ の $(\operatorname{Spec} A_0)(\xi)$ における像が異なることを示す。従って $Y \to \operatorname{Spec} A_0$ は幾何学的に単射である。ある $a_1, \ldots, a_t \in B$ があって $A = A_0[a_1, \ldots, a_t]$ が $B$ に双有理になることは明白である。すると $Y \to \operatorname{Spec} A$ はまだ幾何学的に単射だから, $A$ は求める部分代数である。 □

次は [1, Lemma 3] である。

**補題 4.** $\psi : U \to Z$ が整スキームの間のアフィン双有理な射とする。もし $Z$ がネータ正規で $\psi(U)$ が $Z$ の開部分集合ならば, $\psi$ は開埋入である。

証明は省略する。

次は Fogarty [1] と 小野田 [9] のアイデアに基づいている。

**定理 5.** $S$ は強鎖状かつ永田なスキーム (つまり $S$ の任意のアフィン開集合 $U = \operatorname{Spec} R$ に対して, $R$ が強鎖状かつ永田) で $\varphi \colon X \to Y$ は全射である universally open な $S$ スキームの $S$ 射とする。もし $X$ が $S$ 上有限型で $Y$ が被約ならば, $Y$ は $S$ 上有限型である。

**証明.** 明らかに $Y$ は準コンパクトである。よって問題は $S$ についても $Y$ についても局所的であり, よって $S = \operatorname{Spec} R$ および $Y = \operatorname{Spec} B$ はアフィンだとして良い。$(U_i)$ を $X$ の有限アフィン開被覆とせよ。すると $X$ を $\coprod_i U_i$ で置き換えて, $X = \operatorname{Spec} C$ もアフィンとして良い。

$X$ が有限個の既約成分しか持たず, $\varphi$ が全射であるから, $B$ は有限個の極小素イデアルしか持たない。$B \to \prod_{P \in \operatorname{Min}(B)} B/P$ が単射で有限だから, $P \in \operatorname{Min}(B)$ について $B/P$ が有限型であることをいえば良い。$B$ を $B/P$ で置き換えて, $B$ は整域であるとして良い。

$A \hookrightarrow B$ を 命題 3 のように取り, $\eta : Y = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A = Z$ が幾何学的に単射かつ双有理で, $Z$ が $R$ 上有限型であるようにする。さて, $A'$ は $A$ の正規化とし, $B' = B[A']$ とおく。$R$ が永田であるから, 付随する射 $\alpha : Z' = \operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A = Z$ は有限である。$Y' = \operatorname{Spec} B'$, $X' = X \times_Y Y'$ とおく。

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{\varphi'} & Y' & \xrightarrow{\eta'} & Z' \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \xrightarrow{\eta} & Z \end{array}$$

$Y'$ は $Y\times_Z Z'$ の閉部分スキームであることに注意する。特に $\alpha$ と閉埋入は有限だから $\beta$ もそうである。同様に, $\eta'$ は幾何学的に単射である。明らかに $\gamma$ は有限で $\varphi'$ は universally open である。

$x'\in X'$ とせよ。$y'=\varphi'(x')$, $z'=\eta'(y')$, $F=\mathcal{O}_{X',x'}$, $E=\mathcal{O}_{Y',y'}$, $D=\mathcal{O}_{Z',z'}$ とおく。すると $\varphi'$ は open だから, $F$ の minimal prime $Q$ に対して $Q\cap E=0$ である。

$Z'$ は強鎖状だから, 小野田の次元公式 [9, (1.11)] により, ある $n\geq 0$ が存在して

$$\dim E(t_1,\ldots,t_n)-\dim D=\\ \operatorname{trans.deg}_{R(Z')}R(Y')(t_1,\ldots,t_n)-\operatorname{trans.deg}_{\kappa(z')}\kappa(y')(t_1,\ldots,t_n)$$

となる。ここに $t_1,\ldots,t_n$ は変数を表し, 局所環 $(O,\mathfrak{m})$ に対して, $O(t_1,\ldots,t_n)$ は局所環 $O[t_1,\ldots,t_n]_{\mathfrak{m}[t_1,\ldots,t_n]}$ を表す。$\eta'$ が幾何学的に単射なので, [3, (3.5.8)] により, $\kappa(y')$ は $\kappa(z')$ の純非分離代数拡大である。$R(Z')=R(Y')$ であるから上の式の右辺は 0 となる。

$P$ を $\dim F\otimes_E\kappa(y')=\dim F/P$ であるような $\mathfrak{m}_{y'}F$ の極小素因子とする。$\varphi'\times 1: X'\times\mathbb{A}^n\to Y'\times\mathbb{A}^n$ が開写像だから,

$$\operatorname{ht}P=\operatorname{ht}P[t_1,\ldots,t_n]\geq\dim E(t_1,\ldots,t_n)=\dim D$$

である。従って $\eta'$ が幾何学的に単射であることにより,

$$\dim F\geq\dim D+\dim(F\otimes_E\kappa(y'))=\dim D+\dim(F\otimes_D\kappa(z'))$$

となる。逆の不等式は成り立つから [7, (15.1)], $\dim F=\dim D+\dim(F\otimes_D\kappa(z'))$ である。

$r\geq 0$ に対して $X'(r)$ を $(\bigcup X'_r)\setminus(\bigcup X'_{>r})$ と定義する。ここに $X'_r$ (または $X'_{>r}$) は $X'$ の既約成分 (に被約な構造をいれたもの) で $\operatorname{trans.deg}_{R(Y')}R(X'_r)=r$ (または $\operatorname{trans.deg}_{R(Y')}R(X'_{>r})>r$) であるもの全体を走る。$x'\in X'(r)$ とする。次元公式 [6, (14.C)] により,

$$\dim\mathcal{O}_{X'(r),x'}=\dim\mathcal{O}_{X',x'}=\dim\mathcal{O}_{Z',z'}+\dim\mathcal{O}_{X',x'}\otimes_{\mathcal{O}_{Z',z'}}\kappa(z')\\ \geq\dim\mathcal{O}_{Z',z'}+\dim\mathcal{O}_{X'(r),x'}\otimes_{\mathcal{O}_{Z',z'}}\kappa(z')$$

である。ここに $z'=(\eta'\varphi')(x')$ である。従って

$$\dim\mathcal{O}_{X'(r),x'}=\dim\mathcal{O}_{Z',z'}+\dim\mathcal{O}_{X'(r),x'}\otimes_{\mathcal{O}_{Z',z'}}\kappa(z')$$

である。$X'(r)$ のすべての局所環は次元公式によって等次元だから, $\eta'\varphi'|_{X'(r)}$ はすべての $r$ について等次元である [4, (13.3.6)]。$Z'$ は正規なので, Chevalley の判定法 [4, (14.4.4)] により, $\eta'\varphi'|_{X'(r)}$ はすべての $r$ に対して universally open である。$X' = \bigcup_{r>0} X'(r)$ であるから, $\eta'\varphi'$ は universally open である。

$\varphi'$ は全射だから, $\eta'(Y') = (\eta'\varphi')(X')$ は $Z'$ において開である。$\eta'$ はアフィンで双有理, $Z'$ はネータで正規だから, 補題 4 により, $\eta'$ は開埋入である。よって $Y'$ は有限型である。$B'$ が有限生成で $B \to B'$ が有限で単射だから, $B$ は有限生成である。 □

**系 6.** $S$ がエクセレントスキームで $G$ は平坦有限型な $S$ 群スキームとし, $X$ は $S$ 上有限型な $G$ 作用とする。もし $\varphi : X \to Y$ が普遍強軌道空間で $Y$ が被約ならば, $Y$ は有限型である。

**証明.** $\varphi$ は [8, p.6] により全射で universally open であるから定理が適用できる。 □

**系 7.** $S$ がネータスキームで, $\varphi : X \to Y$ は $S$ スキームの忠実平坦な $S$ 射とする。$X$ が $S$ 上有限型ならば, $Y$ は $S$ 上有限型である。

**証明.** $S = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $X = \operatorname{Spec} C$ はすべてアフィンだと仮定して良い。$B$ が $C$ の純な部分環で $C$ がネータだから, $B$ もネータである。$B$ の巾零根基が有限生成イデアルだから, $B_{\mathrm{red}}$ が有限型だと示せば良い。$B$ を $B_{\mathrm{red}}$ で, $C$ を $C \otimes_B B_{\mathrm{red}}$ で置き換え, $B$ は被約だと仮定して良い。よって $\prod_{P \in \mathrm{Min}(B)} B/P$ が有限型だと示せば良い。$B$ を $B/P$ で置き換えて, $B$ は整域だとして良い。$C$ は整域 $B$ の上に忠実平坦だから, ある $C$ の素イデアル $Q$ が存在して $Q \cap B = 0$ である。[9, (2.11) and (2.20)] により, $R$ は局所環と仮定して良い。Descent [4, (2.7.1)] により, $R$ は完備局所環として良い。必要ならば $B$ をもう一度取り替えて, 依然として $B$ は整域と仮定して良い。$R$ がエクセレントで $B$ が整域だから, 定理によって $B$ は有限型である。 □

## 3. 一般の場合

この節では定理 2 を証明する。まず次を証明する。

**補題 8.** $S$ はネータスキームで, $G$ は平坦有限型な $S$ 群スキームとする。$X$ は $S$ 上有限型な $G$ スキームとする。任意の $X$ の閉 $G$ 部分スキーム $X_1$ とその普遍強軌道空間 $\psi : X_1 \to Y_1$ に対して, $Y_1$ が被約ならば $Y_1$ は有限型 (例えば $S$ がエクセレントの場合。Corollary 6 を見よ) とする。もし $(Y, \varphi)$ が $G$ の作用に対する普遍強軌道空間ならば, $Y$ は $S$ 上有限型である。さらに

もし $\mathcal{F}$ が連接な $(G, O_X)$-module ならば, $(\varphi_*\mathcal{F})^G$ はネータ $\mathcal{O}_Y$-module である。

**証明.** $S = \operatorname{Spec} R$ と $Y = \operatorname{Spec} B$ はアフィンとして良い。

まず最後の主張を連接イデアル層 $\underline{\operatorname{ann}}\,\mathcal{F} := \operatorname{Ker}(\mathcal{O}_X \to \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}))$. に関するネータ帰納法によって証明することにする。$\mathcal{F} \neq 0$ であるとして良い。我々は $\nu(\mathcal{F}) := \sum_V \operatorname{length}_{\mathcal{O}_{X,v}} \mathcal{F}_v$ に関する帰納法も用いる。ここに $V$ は $\operatorname{supp}\mathcal{F} = V(\underline{\operatorname{ann}}\,\mathcal{F})$ の既約成分を走り, $v$ は $V$ の生成点である。

$\mathcal{G}$ を $(\varphi_*\mathcal{G})^G$ がネータ $\mathcal{O}_Y$-module であるような $\mathcal{F}$ の連接 $(G, \mathcal{O}_X)$-submodule の中で極大なものとする。$(\varphi_*?)^G$ は左完全なので, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ で置き換えることにより, $\mathcal{G} = 0$ であるとして良い。特に任意の 0 でない $\mathcal{F}$ の連接 $(G, \mathcal{O}_X)$ 部分層は, $\mathcal{F}$ と同じ annihilator を持つ。

もし $(\varphi_*\mathcal{F})^G = 0$ ならば証明すべきことは何もない。よって $H^0(X, \mathcal{F})^G = (\varphi_*\mathcal{F})^G \neq 0$ である場合を考える。$a \in H^0(X, \mathcal{F})^G \setminus \{0\} = \operatorname{Hom}_{G, \mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \setminus \{0\}$ を取る。すると $a\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{F}$ の 0 でない連接 $(G, \mathcal{O}_X)$ 部分層である。よって $\nu(a\mathcal{O}_X) \neq 0$ である。もし $\nu(\mathcal{F}) > \nu(a\mathcal{O}_X)$ ならば, 帰納法の仮定によって $\mathcal{G} \supset a\mathcal{O}_X \neq 0$ となり矛盾である。よって $\nu(\mathcal{F}) = \nu(a\mathcal{O}_X)$ である。従って $\nu(\mathcal{F}/a\mathcal{O}_X) = 0$ であり, よって $\operatorname{supp}(\mathcal{F}/a\mathcal{O}_X) \subsetneq \operatorname{supp}\mathcal{F}$ である。帰納法によって $\varphi_*(\mathcal{F}/a\mathcal{O}_X)^G$ はネータである。$\mathcal{F} \neq 0 = \mathcal{G}$ としているので, よって $\varphi_*(a\mathcal{O}_X)^G$ はネータでない。

$\mathcal{J}$ を $a : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ の核とし, $Z$ を $\mathcal{O}_X$ の連接な $G$ イデアル層 $\mathcal{J}$ で定義される $X$ の $G$ 不変閉部分スキームとする。我々は最初から $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Z$ として良い。もし $H^0(X, \mathcal{O}_Z)^G$ が被約でないならば, $b \in H^0(X, \mathcal{O}_Z)^G \setminus \{0\}$ であって $b^2 = 0$ であるものが存在する。すると $0 \neq b\mathcal{O}_Z \subset \mathcal{O}_Z$ であって, $b\mathcal{O}_Z$ の annihilator は $\mathcal{O}_Z$ のそれより真に大きい。帰納法の仮定によりこれは矛盾である。したがって $B_1 = H^0(X, \mathcal{O}_Z)^G$ は被約でなければならない。

$Y_1 := \operatorname{Spec} B_1$ とし, $B_0$ は自然な準同型 $B \to B_1$ の像とし, $Y_0 = \operatorname{Spec} B_0$ は $Y_1 \to Y$ のスキーム論的な像とする。$\varphi_1 : Z \to Y_1$ と $\eta' : Y_1 \to Y_0$ を自然な写像とせよ。$Z$ が $G$ 不変な閉集合で $\varphi$ が軌道空間だから, 集合論的に $Y_0 = \varphi(Z) = \operatorname{Im}(\eta'\varphi_1)$ である。集合論的に $\varphi^{-1}(Y_0) = Z$ であるから, 埋入 $Z \hookrightarrow \varphi^{-1}(Y_0)$ は universal homeomorphism である。従って $\eta'\varphi_1$ は全射で universally open である。よって $(Y_0, \eta'\varphi_1)$ は不変強軌道空間である。$Y_0$ は被約なので, $Y_0$ は仮定によって有限型である。

[1, Proposition 1] により, $(Y_1, \varphi_1)$ は universal な geometric quotient であり, $\eta'$ は universal homeomorphism である。特に $Y_1$ は仮定により有限型である。よって $\eta' : Y_1 \to Y_0$ はネータスキームの間の有限型な universal homeomorphism である。よって $\eta'$ は有限である。よって $B_1$ は $B_0$ 有限加群である。$B_0$ は $R$ 上有限型だから $B_1$ はネータ $B_0$ 加群である。よって

$(\varphi_* \mathcal{O}_Z)^G$ はネータ $\mathcal{O}_Y$ 加群である。

次に, $Y = \operatorname{Spec} B$ が有限型であることを示す。ネータ帰納法を用い, $G$ 不変な閉部分スキーム $X_1 \subsetneq X$ とその普遍強軌道空間 $\varphi_1 : X_1 \to Y_1$ に対して $Y_1$ は有限型であると仮定して良い。もし $Y$ が被約ならば, 何も示すべき事はない。そこで $b \in B \setminus \{0\}$ で $b^2 = 0$ なるものが存在するとして良い。

仮定により, $B \subset \tilde{B} := H^0(X, \mathcal{O}_X)^G$ であり, $\tilde{B}$ は既に証明したことにより, ネータ $B$ 加群である。$B$ は $\tilde{B}$ の $B$ 部分加群だから, $B$ はネータ環である。よって $B_{\mathrm{red}}$ が有限型であることを示すだけで良い。

$X_1$ を $b\mathcal{O}_X$ で定義される $X$ の $G$ 不変な閉部分スキームとし, $Y_1$ を $X_1 \hookrightarrow X \to Y$ のスキーム論的な像とする。すると $X_1 \to Y_1$ は普遍強軌道空間であり, 従って帰納法の仮定により $Y_1$ は有限型である。従って $Y_{\mathrm{red}} = (Y_1)_{\mathrm{red}}$ も求める通り有限型である。 □

**定理 2 の証明.** 補題 8 の仮定を確かめれば良い。よって, $Y$ は被約だと仮定し, $Y$ が有限型であることをいえば良い。$S = \operatorname{Spec} R$ と $Y = \operatorname{Spec} B$ はアフィンとして良い。

任意の平坦 $R$ 代数 $R'$ に対し, 底変換 $\varphi' : X' \to Y'$ は再び普遍強軌道空間になることに注意する。小野田の定理 [9, (2.11) and (2.20)] により, $R$ は局所環として良い。$\hat{R}$ はエクセレントなので, 再び補題 8 により $\hat{R} \otimes_R Y$ は $\hat{R}$ 上有限型である。Descent [4, (2.7.1)] により, $Y$ は有限型である。 □

## 4. 固有射

$R$ はネータ環で, $\varphi : X \to Y$ は $R$ スキームの間の全射である $R$ 射で, $X$ は有限型であるとする。

**補題 9.** $R$ が強鎖状で, $\varphi : X \to Y$ が固有射で, $Y$ はネータとする。この時 $Y$ は強鎖状 (つまり, $Y$ のすべての局所環が強鎖状) である。

**証明.** $Y$ を $Y$ 上有限型な整スキームで置き換えることにより, 補題の仮定の下で, もし $Y = \operatorname{Spec} B$ がアフィンで整で, $Q, P \in \operatorname{Spec} B$ で $Q \subset P$, $\operatorname{ht}(P/Q) = 1$ であるならば $\operatorname{ht} P = \operatorname{ht} Q + 1$ であることを示せば良い。$X$ を $Y$ に全射で写される $X$ の既約成分に被約な構造をいれたもので置き換えて, $X$ は整スキームだとして良い。

命題 3 により, 有限生成 $R$ 部分代数 $A \subset B$ であって $\eta : Y = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ が双有理かつ幾何学的に単射であるものが存在する。$\varphi$ は全射なので, 次元公式が成立し [9, (1.11)], $\operatorname{ht} P = \operatorname{ht}(P \cap A)$ であり, $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht}(Q \cap A)$ である。

$\varphi$ は閉射なので, $X$ の点 $x_0, x_P, x_Q$ であって $x_0$ は generic fiber の閉点, $x_Q$ は $x_0$ の specialization で $f(x_Q) = Q$, $x_P$ は $x_Q$ の specialization で $f(x_P) = P$ であるものが存在する。すると次元公式により,

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{O}_{X,x_P} &= \operatorname{ht} P + \operatorname{trans.deg}_{R(Y)} R(X) - \operatorname{trans.deg}_{\kappa(P)} \kappa(x_P) \\
\dim \mathcal{O}_{X,x_Q} &= \operatorname{ht} Q + \operatorname{trans.deg}_{R(Y)} R(X) - \operatorname{trans.deg}_{\kappa(Q)} \kappa(x_Q) \\
\dim \mathcal{O}_{\overline{x_Q},x_P} &= \operatorname{ht}(P/Q) + \operatorname{trans.deg}_{\kappa(Q)} \kappa(x_Q) - \operatorname{trans.deg}_{\kappa(P)} \kappa(x_P)
\end{aligned}$$

である。$\mathcal{O}_{X,x_P}$ は鎖状なので,

$$\dim \mathcal{O}_{X,x_P} = \dim \mathcal{O}_{X,x_Q} + \dim \mathcal{O}_{\overline{x_Q},x_P}$$

である。従って, 求める通り $\operatorname{ht} P = \operatorname{ht} Q + \operatorname{ht}(P/Q) = \operatorname{ht} Q + 1$ である。 □

**定理 10.** $R$ がエクセレント環で, $f : X \to Y$ は $R$ スキームの全射である固有射とする。もし $X$ が $R$ 上有限型で $Y$ がネータスキームならば, $Y$ は $R$ 上有限型である。

**証明.** $Y = \operatorname{Spec} B$ はアフィンで整であるとして良い。$X$ も整であるとして良い。補題 9 の証明と同様にして, $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ が幾何学的に単射であるように $B$ の有限生成 $R$ 部分代数 $A$ をとる。次元公式が $A$ と $B$ の間で (勝手な素イデアルに対して) 成立し, $B$ は強鎖状である。[9, (4.9)] によって, $B$ は有限型である。 □

## 5. Pure な部分環

次は Raynaud-Gruson によって証明された定理の特別な場合である [11], [10]。

**定理 11.** $A \to B$ がネータ環の有限型な準同型とし, $\varphi$: $X \to Y$ は付随するアフィンスキームの射とする。$U \subset Y$ は開部分集合で $\varphi$: $\varphi^{-1}(U) \to U$ は平坦と仮定する。この時, ある $A$ のイデアル $I$ が存在して, $V(I) \cap U = \emptyset$ であり, Rees 環の間に誘導される次数付環の準同型 $R_A(I) := A[tI] \to R_B(BI) := B[tBI]$ から定まる射 $\Phi$: $\operatorname{Proj} R_B(BI) \to \operatorname{Proj} R_A(I)$ が平坦であるものが存在する。

定理のような $\Phi$ を $\varphi$ の flattening と呼ぶ。

**定理 12.** $R$ がネータ環, $A \to B$ は $R$ 代数の準同型, $A$ が $B$ の純な部分環であり, $B$ が $R$ 上有限生成ならば, $A$ は $R$ 上有限生成である。

**証明.** $B$ は $R$ 上有限生成だからネータであり, $A$ は $B$ の純な部分環だからネータである。$A$ を $A_{\mathrm{red}}$ で置き換え, $B$ を $B \otimes_A A_{\mathrm{red}}$ で置き換えて, $A$ は被約として良い。$A \to \prod_{P \in \mathrm{Min}(A)} A/P$ は単射で有限なので, 各 $A/P$ が有限生成であることをいえば良く, 底変換して $A$ が整域として良い。$A$ が $B$ の純な部分環なので, $B$ の極小素イデアル $P$ であって $P \cap A = 0$ であるものが存在する。実際もしそうでなければ, $A$ は整域だから $B$ のすべての極小素イデアルに含まれる 0 でない元が取れるはずだが, そのような元は巾零だから矛盾である。従って小野田の定理 [9, (2.11) and (2.20)] により, $R$ は局所環として良い。Descent の議論 [4, (2.7.1)] により, $R$ は完備局所環として良い。この時必要ならば再度 $A$ を取り直して, 尚 $A$ は整域であるとして良い。

$\varphi\colon X \to Y$ を $A \to B$ に付随するアフィンスキームの射とする。$\varphi$ はネータスキームの間の有限型な射である。$\mathrm{Flat}(\varphi)$ で $\varphi$ の flat locus を表すとする。$\varphi(X \setminus \mathrm{Flat}(\varphi))$ は可構集合で $Y$ の生成点は含まない。だから $U = Y \setminus \overline{\varphi(X \setminus \mathrm{Flat}(\varphi))}$ とおけば $U$ は $Y$ の稠密な開集合であって, $\varphi$ は $\varphi^{-1}(U)$ 上平坦である。定理 11 によって, ある $A$ の 0 ではないイデアル $I$ が存在して, $\Phi\colon \operatorname{Proj} R_B(BI) \to \operatorname{Proj} R_A(I)$ が平坦である。

$J$ が $R_A(I)$ の斉次イデアルとすると $J = \bigoplus_{n \geq 0} J_n t^n$ $(J_n \subset I^n)$ と表される。$JR_B(BI) = \bigoplus_{n \geq 0} (J_n B) t^n$ だから, $A$ が $B$ の純部分環であることにより $J_n B \cap I^n = J_n$ なので, $JR_B(BI) \cap R_A(I) = J$。$P$ が $R_A(I)$ の斉次素イデアルとせよ。$PR_B(BI)$ の極小素因子 $Q$ であって $Q \cap R_A(AI) = P$ であるものが存在する。実際もしそうでないと, $PR_B(BI)$ のすべての極小素因子に含まれるが $P$ に含まれない元 $a \in (\sqrt{PR_B(BI)} \cap R_A(I)) \setminus P$ が取れるが, これは

$$\sqrt{PR_B(BI)} \cap R_A(I) = \sqrt{PR_B(BI) \cap R_A(I)} = \sqrt{P} = P$$

に反して矛盾である。以上により, $\Phi\colon \operatorname{Proj} R_B(BI) \to \operatorname{Proj} R_A(I)$ は忠実平坦である。

$\operatorname{Proj} R_B(BI)$ は $R$ 上有限型だから, 系 7 により, $\operatorname{Proj} R_A(I)$ も $R$ 上有限型である。自然な射 $\operatorname{Proj} R_A(I) \to Y$ は全射の固有射である。$R$ はエクセレントだから, 定理 10 により, $Y$ は有限型であり, $A$ は $R$ 上有限生成である。 □

## 参考文献

[1] J. Fogarty, Geometric quotients are algebraic schemes, *Adv. Math.* 48 (1983), 166–171.

[2] J. Fogarty, Finite generation of certain subrings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **99** (1987), 201–204.

[3] A. Grothendieck, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, *IHES Publ. Math.* 4 (1960).

[4] A. Grothendieck, *Eléments de Géométrie Algébrique IV*, *IHES Publ. Math.* **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).

[5] M. Hashimoto, "Geometric quotients are algebraic schemes" based on Fogarty's idea, to appear in *J. Math. Kyoto Univ.*

[6] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, 2nd ed., Benjamin (1980).

[7] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, first paperback edition, Cambridge (1989).

[8] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, third edition, Springer (1994).

[9] N. Onoda, Subrings of finitely generated rings over a pseudo-geometric ring, *Japan. J. Math.* **10** (1984), 29–53.

[10] M. Raynaud, Flat modules in algebraic geometry, *Compositio Math.* **24** (1972), 11–31.

[11] M. Raynaud and L. Gruson, Critères de platitude et de projectivité. Techniques de "platification" d'un module, *Invent. Math.* **13** (1971), 1–89.

# ヒルベルトの第14問題に対する線型な反例について

谷本 龍二　(RYUJI TANIMOTO)

〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学教室
E-mail address: sm5028tr@ecs.cmc.osaka-u.ac.jp

## 1　序

$k$ を体とし，$G$ を一般線型群 $\mathrm{GL}_n(k)$ の部分群とする．$G$ は，$k$ 上の $n$ 変数多項式環 $R$ に線型変換として作用する．このとき，不変式環 $R^G$ は有限生成な $k$ 代数になるか？

この問題（[15] では the original fourteenth problem of Hilbert と呼ばれている）は 19 世紀後半から現在に至るまで多くの数学者を悩まし続けてきた．現在でも，上記の問題に関連していくつかの未解決問題 ([3, 4, 5, 10, 11] を参照) が残っている．

20 世紀前半，ヒルベルト [8] によって代数群 $G$ が線型簡約について，ヴァイツエンベック [19] によって $k$ の加法群 $\mathbb{G}_a$ について the original fourteenth problem of Hilbert が肯定的に解けることが知られていた．このような肯定的経緯に反し，永田 [14] は 1958 年に the original fourteenth problem of Hilbert に対する反例を構成した．以降，the original fourteenth problem of Hilbert は否定的に解決されたとみなされ，しばらく休眠に入ることになる．次に目がさめたのは 1990 年ロバーツ [16] がヒルベルトの第 14 問題に対する反例を構成したときである．しかし，ロバーツの反例は the original fourteenth problem of Hilbert に対する反例ではなかった．そこで，アカンポ-ノイエン [1] は，ロバーツの反例にあらわれる 7 変数多項式環と局所べき零微分の組に対し，次のような線型化問題を解き，19 変数多項式環と 12 個の局所べき零線型微分の組みで与えられる線型な反例 (the original fourteenth problem of Hilbert に対する反例) を構成した．

**線形化問題**　体 $k$ 上の $n$ 変数多項式環 $R$ における $k$ 上の局所べき零微分 $D$ に対して，次をみたす $k$ 上の次数付き多項式環 $A$ と，$A$ における $k$ 上の局所べき零線型微分 $D_1, \cdots, D_r$ と，$R$ 上の変数 $W$ がとれる．

(1) $R$ は $A$ の次数付き $k$ 部分代数になる.

(2) $D_1|_R = D$.

(3) $\bigcap_{i=1}^r A^{D_i} = R^D[W]$.

ただし，$R^D := \{f \in R \mid D(f) = 0\}$, $A^{D_i} := \{f \in A \mid D_i(f) = 0\}$ とする.

この問題を線形化問題と呼ぶ理由は，与えられた微分 $D$ が斉次 1 次式を斉次 1 次式に移していないとしても，大きな環 $A$ でみれば (2) の条件より線型な微分の制限になっているということにある．(3) の条件は，$R^D$ が $k$ 代数として有限生成でなければ，$\bigcap_{i=1}^r A^{D_i}$ も $k$ 代数として有限生成でないということを意味する.

ヒルベルトの第 14 問題に対する様々な反例 [1, 2, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17] が知られているが高次元であるため，ヒルベルトの第 14 問題に対する反例の研究は，変数の多さや代数群の大きさを下げる方向ですすんでいる．20 世紀末，多項式環の変数を減らすという視点で，フロイデンバーグやデイグル [2, 4] はヒルベルトの第 14 問題に対する反例を構成した．しかし，それらの反例はロバーツの反例同様 the original fourteenth problem of Hilbert に対する反例になっていない．そこで，この論説では，アカンポ-ノイエンの考え（線形化問題を解く）を利用することにより，非線型な反例から線型な反例を構成する．ここで，デイグルとフロイデンバーグの反例 [2] とは次のようなものである.

**デイグルとフロイデンバーグの反例** $R := k[X, S, T, U, V]$ を $k$ 上の 5 変数多項式環とし，

$$D := X^3\frac{\partial}{\partial S} + S\frac{\partial}{\partial T} + T\frac{\partial}{\partial U} + X^2\frac{\partial}{\partial V} \in \mathrm{Der}_k(R),$$

とおく．このとき，$R^D$ は $k$ 代数として有限生成でない.

著者は，このデイグルとフロイデンバーグの反例 $(R, D)$ を線形化することにより，13 変数多項式環に $\mathbb{G}_a^7 \rtimes \mathbb{G}_a$ が線型に作用していて，その不変式環が有限生成でないものを得た (定理 2)．また，その得られた線型な反例は多項式環の変数が 13 変数であり，現在知られている線型な反例の中で最小の変数を持つものである.

可換環論シンポジウムでは，多くの人から貴重なご意見をいただき，深く感謝しております.

## 2 デイグルとフロイデンバーグの反例から構成できる線型な反例について

以下，$k$ を標数 0 の体とする．$k$ 代数 $R$ における $k$ 上の微分 $D$ が**局所べき零**であるとは，任意の $R$ の元 $a$ に対して，ある自然数 $n$ が存在して $D^n(a) = 0$ となることである．また，$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ が次数付き $k$ 代数であるとき，$R$ における $k$ 上の微分 $D$ が**線型**であるとは $D(R_1) \subset R_1$ となることで定める．

主定理 (定理 2) で必要な記号，代数群 $G$ と，$G$ の線型表現 $\rho$, $G$ の作用する多項式環 $A$ を定義する．

$$G := \{(t, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6) \in k^8\}$$

に演算を次のように定める．この演算で $G$ は体 $k$ 上の代数群になる．

$$\begin{aligned}
&(t, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6) \cdot (t', \mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4, \mu'_5, \mu'_6) \\
&:= (t + t', \mu_0 + \mu'_0, \mu_1 + \mu'_1, \mu_2 + t\mu'_1 + \mu'_2, \mu_3 + \tfrac{1}{2}t^2\mu'_1 + t\mu'_2 + \mu'_3, \\
&\qquad \mu_4 + \mu'_4, \mu_5 + t\mu'_4 + \mu'_5, \mu_6 + \tfrac{1}{2}t^2\mu'_4 + t\mu'_5 + \mu'_6).
\end{aligned}$$

この $G$ は次のような構造を持つ．

**補題 1**

$$\begin{aligned}
H &:= \{(t, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in G \mid t \in k\}, \\
G_i &:= \{(0, \cdots, 0, \mu_i, 0, \cdots, 0) \in G \mid \mu_i \in k\}, \quad 0 \le i \le 6, \\
N &:= \{(0, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6) \in G \mid \mu_i \in k, \quad 0 \le i \le 6\}
\end{aligned}$$

とおく．このとき，$H \simeq \mathbb{G}_a$，$G_i \cong \mathbb{G}_a$, $N \cong \mathbb{G}_a^7$ である．さらに，$N$ は $G$ の正規部分群で，$G$ は $H$ の $N$ による半直積になる．すなわち，$G \cong \mathbb{G}_a^7 \rtimes \mathbb{G}_a$.

**証明．** 代数群 $G$ の定義と，$0 \to N \to G \to H \to 0$ は分裂する完全列であることより容易に従う．　**証明終**

次に，$G$ の線型表現 $\rho$ を構成する．各 $(t, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6) \in G$ に対して，正則行列 $\rho(t, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6)$ を次で定める．

$$
\left(\begin{array}{cc|ccc|ccc|ccc|cc}
1 & 0 & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & & & & & \\
\hline
\mu_4 & t & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
\mu_5 & \frac{1}{2}t^2 & t & 1 & 0 & & & & & & & & \\
\mu_6 & \frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{2}t^2 & t & 1 & & & & & & & & \\
\hline
-\mu_1 & \mu_4 & & & & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
-\mu_2 & \mu_5 & & & & t & 1 & 0 & & & & & \\
-\mu_3 & \mu_6 & & & & \frac{1}{2}t^2 & t & 1 & & & & & \\
\hline
0 & \mu_1 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & \mu_2 & & & & & & & t & 1 & 0 & & \\
0 & \mu_3 & & & & & & & \frac{1}{2}t^2 & t & 1 & & \\
\hline
\mu_0 & t & & & & & & & & & & 1 & 0 \\
0 & \mu_0 & & & & & & & & & & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

ただし，空白の成分は全て 0 とする．べき単代数群 $G$ は $\rho$ を経由して自然に $k$ 上の 13 変数多項式環 $A := k[W, X, S_1, T_1, U_1, S_2, T_2, U_2, S_3, T_3, U_3, V_1, V_2]$ に作用する．すなわち，$\rho(t, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6)$ は列ベクトル ${}^t(W, X, S_1, T_1, U_1, S_2, T_2, U_2, S_3, T_3, U_3, V_1, V_2)$ に左から作用する．

この論説の主定理は次の定理である．

**定理 2** 上記の記号のもとで，不変式環 $A^G$ は，デイグルとフロイデンバーグの有限生成でない不変式環 $R^D$ 上の 1 変数多項式環と同型になる．したがって，$A^G$ は有限生成でない $k$ 代数になる．

定理 2 の証明をする前に，次の補題を用意する．この補題は定理 2 の証明で，$\mathbb{G}_a$ 不変式環を局所べき零微分の核で表示するときに必要になる．

**補題 3** $\rho : \mathbb{G}_a \to \mathrm{GL}_n(k)$ を忠実な多項式線型表現とする．$\mathbb{G}_a$ は，$k$ 上の $n$ 変数多項式環 $R = k[x_1, \dots, x_n]$ へ自然に作用しているとする．すなわち，$\rho(t)$ が左から列ベクトル ${}^t(x_1, \dots, x_n)$ へ作用している．$M := \left.\dfrac{d}{dt}\rho(t)\right|_{t=0}$ とおき，$\alpha_i := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j$, $1 \leq i \leq n$ と

おく．ただし，$M_{i,j}$ は行列 $M$ の $(i,j)$ 成分とする．さらに，

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathrm{Der}_k(R)$$

とおく．このとき，$\Delta$ は局所べき零微分で，次が成り立つ．

(1) $t \cdot f = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Delta^{\ell}(f)}{\ell!} t^{\ell}$.

(2) $R^{\mathbb{G}_a} = R^{\Delta}$.

**補題 3 の証明．** $\rho$ が準同型より，$\rho(t) = \exp(tM)$ となる．関係式 $\Delta(x_i) = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} x_j$ を $\Delta$ で $(\ell-1)$ 回微分すれば，$\Delta^{\ell}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} (M^{\ell})_{i,j} x_j$, $\ell \geq 1$ を得る．ゆえに，

$$\begin{aligned} t \cdot x_i &= \sum_{j=1}^{n} \rho(t)_{i,j} x_j &&= \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(M^{\ell})_{i,j}}{\ell!} t^{\ell} x_j \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{(M^{\ell})_{i,j} x_j}{\ell!} t^{\ell} \right) &&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Delta^{\ell}(x_i)}{\ell!} t^{\ell} \end{aligned}$$

となる．$\rho$ は多項式表現より，$M$ はべき零行列になり，$\Delta$ は局所べき零微分になる．また，$\varphi : R \to R[t]$ を $a \mapsto \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Delta^{\ell}(a)}{\ell!} t^{\ell}$ で定めると，$\varphi$ は $k$ 代数の準同型になる．したがって，任意の $f \in R$ に対して，$\varphi(f) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = f(t \cdot x_1, \ldots, t \cdot x_n) = t \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$. よって (1) が示せた．さらに，$f \in R^{\mathbb{G}_a} \Leftrightarrow$「任意の $t \in \mathbb{G}_a$ に対して，$t \cdot f = f$」$\Leftrightarrow \Delta(f) = 0$.

**証明終**

**定理 2 の証明．** 補題 1 より，各 $H, G_i$ は $\mathbb{G}_a$ と $k$ 上の代数群として同型である．補題 3 より，各 $H, G_i$ に対して，次のような局所べき零微分が対応する．

$$\Delta := X\frac{\partial}{\partial S_1} + S_1\frac{\partial}{\partial T_1} + T_1\frac{\partial}{\partial U_1} + S_2\frac{\partial}{\partial T_2} + T_2\frac{\partial}{\partial U_2} + S_3\frac{\partial}{\partial T_3} + T_3\frac{\partial}{\partial U_3} + X\frac{\partial}{\partial V_1},$$

$$\Delta_0 := X\frac{\partial}{\partial V_2} + W\frac{\partial}{\partial V_1}, \quad \Delta_1 := -W\frac{\partial}{\partial S_2} + X\frac{\partial}{\partial S_3}, \quad \Delta_2 := -W\frac{\partial}{\partial T_2} + X\frac{\partial}{\partial T_3},$$

$$\Delta_3 := -W\frac{\partial}{\partial U_2} + X\frac{\partial}{\partial U_3}, \quad \Delta_4 := X\frac{\partial}{\partial S_2} + W\frac{\partial}{\partial S_1}, \quad \Delta_5 := X\frac{\partial}{\partial T_2} + W\frac{\partial}{\partial T_1},$$

$$\Delta_6 := X\frac{\partial}{\partial U_2} + W\frac{\partial}{\partial U_1}.$$

$G$は部分群 $H$ と $G_i$ $(0 \le i \le 6)$ で生成されているので,

$$A^G = A^\Delta \cap \bigcap_{i=0}^{6} A^{\Delta_i}$$

となる. $\Delta_6$ の核は, $k$ 代数として, $W, X, S_1, T_1, S_2, T_2, U := XU_1 - WU_2, S_3, T_3, U_3, V_1, V_2$ で生成され, $k$ 上の 12 変数多項式環 $k^{[12]}$ になる. (証明の詳細は, アカンポ-ノイエン [1] の *Lemma* を見よ). $\Delta$ と $\Delta_i$ $(0 \le i \le 5)$ を 12 変数多項式環 $k^{[12]}$ へ制限して, 変数 $U$ を用いて, それらの制限された微分を書き下すと次のようになる. ただし, $\Delta' := \Delta|_{k^{[12]}}$, $\Delta'_i := \Delta_i|_{k^{[12]}}$ $(0 \le i \le 5)$ とおく.

$$\Delta' = X\frac{\partial}{\partial S_1} + S_1\frac{\partial}{\partial T_1} + S_2\frac{\partial}{\partial T_2} + (XT_1 - WT_2)\frac{\partial}{\partial U} + S_3\frac{\partial}{\partial T_3} + T_3\frac{\partial}{\partial U_3} + X\frac{\partial}{\partial V_1},$$

$$\Delta'_0 = X\frac{\partial}{\partial V_2} + W\frac{\partial}{\partial V_1}, \quad \Delta'_1 = -W\frac{\partial}{\partial S_2} + X\frac{\partial}{\partial S_3}, \quad \Delta'_2 = -W\frac{\partial}{\partial T_2} + X\frac{\partial}{\partial T_3},$$

$$\Delta'_3 = W^2\frac{\partial}{\partial U} + X\frac{\partial}{\partial U_3}, \quad \Delta'_4 = X\frac{\partial}{\partial S_2} + W\frac{\partial}{\partial S_1}, \quad \Delta'_5 = X\frac{\partial}{\partial T_2} + W\frac{\partial}{\partial T_1}.$$

$A^\Delta \cap k^{[12]} = (k^{[12]})^{\Delta'}$ かつ $A^{\Delta_i} \cap k^{[12]} = (k^{[12]})^{\Delta'_i}$, $0 \le i \le 5$ より,

$$A^G = (k^{[12]})^{\Delta'} \cap \bigcap_{i=0}^{5} (k^{[12]})^{\Delta'_i}$$

を得る. 次に, $\Delta'_5$ の核を求めると, 11 変数多項式環を得, その上に $\Delta'$ と $\Delta'_i$ $(0 \le i \le 4)$ を制限する. それらを $\Delta'' := \Delta'|_{k^{[11]}}$, $\Delta''_i := \Delta'_i|_{k^{[11]}}$ $(0 \le i \le 4)$ とおく. すると,

$$A^G = (k^{[11]})^{\Delta''} \cap \bigcap_{i=0}^{4} (k^{[11]})^{\Delta''_i}$$

を得る. この操作を, $\Delta_4$, $\Delta_3$, $\Delta_2$, $\Delta_1$, $\Delta_0$ の順で $A^G = (k^{[6]})^{\Delta|_{k^{[6]}}}$ になるまで続ける. すると, $k^{[6]}$ は $k$ 上の 6 変数多項式環 $k[W, X, S, T, U, V]$, $(S = X^2S_1 - XWS_2 - W^2S_3$, $T = X^2T_1 - XWT_2 - W^2T_3$, $U = X^2U_1 - XWU_2 - W^2U_3$, $V = XV_1 - WV_2)$ になり, $\Delta$ の $k^{[6]}$ への制限は

$$\Delta|_{k^{[6]}} = X^3\frac{\partial}{\partial S} + S\frac{\partial}{\partial T} + T\frac{\partial}{\partial U} + X^2\frac{\partial}{\partial V}$$

で与えられる.

**証明終**

# 参考文献


[1] A. A'Campo-Neuen, Note on a counterexample to Hilbert's fourteenth problem given by P. Roberts, Indag. Math. (N. S.) **5** (1994), 253–257.

[2] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem in dimension five, J. Algebra **221** (1999), 528–535.

[3] A. Fauntleroy, On Weitzenbock's theorem in positive characteristic, Proc. Amer. Math. Soc. **64** (1977), no. 2, 209–213.

[4] G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem in dimension six, Transformation Groups **5** (2000), 61–71.

[5] G. Freudenburg, A survey of counterexamples to Hilbert's fourteenth problem, Serdica Math. J. **27** (2001), no. 3, 171–192.

[6] G. Freudenburg, Recent progress on Hilbert's fourteenth problem via triangular derivations, Polynomial automorphisms and related topics (Krakow, 1999), Ann. Polon. Math. **76** (2001), no. 1-2, 95–99.

[7] D. Hilbert, Mathematische Probleme, Archiv der Math. und Physik **1** (1901), 44–63, 213–237.

[8] D. Hilbert, Über die Theorie der algeraischen Formen, Math. Ann., **36** (1890), 473–534.

[9] H. Kojima and M. Miyanishi, On Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, J. Pure Appl. Algebra **122** (1997), 277–292.

[10] S. Kuroda, A generalization of Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, to appear in Tohoku Math. J.

[11] S. Mukai, Counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem for the 3-Dimensional Additive Group, RIMS preprint, **1343** (2001).

[12] S. Mukai, Geometric Realization of $T$-Shaped Root Systems and Counterexamples to Hilbert's Fourteenth Problem, RIMS preprint, **1372** (2002).

[13] M. Nagata, On the 14-th Problem of Hilbert, Amer. J. Math. **81**, 1959, 766–772.

[14] M. Nagata, On the Fourteenth Problem of Hilbert, Proc. I.C.M. 1958, Cambridge University Press, 1960, 459–462.

[15] M. Nagata, Lectures on the fourteenth problem of Hilbert, Notes by P. Murthy, Tata Inst. of Fund. Res. Lect. Math. **31**, 1965.

[16] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, J. Algebra **132** (1990), 461-473.

[17] R. Steinberg, Nagata's example, In: Algebraic groups and Lie groups, edited by Gus Lehrer, A. L. Carey, J. B. Carrell, M. K. Murray and T. A. Springer, Cambridge University Press, 1997, 375–384.

[18] R. Tanimoto, Linear counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert, to appear in J. Algebra.

[19] R. Weitzenböck, Über die invarianten von linearen Gruppen, Acta Math. **58** (1932), 231–293.

# Hilbert の第 14 問題

向井 茂（京都大学数理解析研究所）

$\mathbf{C}$ は複素数体とし，代数群 $G$ が，$n$ 次元 $\mathbf{C}$-ベクトル空間 $V$ に $\mathbf{C}$-線型に作用しているとする．$V$ を多項式環 $S := \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ の一次斉次式全体と同一視することにより，$G$ は $S$ に作用する．このとき，代数群 $G$ は多項式環 $S$ へ線型に作用するという．$S^G$ でこの作用による不変式全体からなる $S$ の部分環を表す．この状況で,「不変式環 $S^G$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成か?」という問題を本来の Hilbert の第 14 問題 (original Hilbert's 14th problem)[1] という．この問題に関し永田 [N1] は 1958 年に反例を与えた．これ以後は，不変式環が有限生成になる（あるいは有限生成でない）ための良い条件を求めることが問題となった．これを進歩した Hilbert の第 14 問題 (advanced Hilbert's 14th problem) という．

## 1 Hilbert の第 14 問題—Hilbert の有限生成性定理と永田型作用

ここでは，Hilbert の第 14 問題に関する Hilbert 自身による肯定的結果と，第 14 問題の反例について考察する．

**定義 1.1.** $G$ を代数群とする．任意の $G$-加群の全射 $V \to W$ に対してこれが導く写像 $V^G \to W^G$ も全射であるときに，$G$ は線型簡約 (linearly reductive) という．

**例 1.2.** (1) 乗法群 $\mathrm{G}_m$ や特殊線型代数群 $\mathrm{SL}_n$ は線型簡約である．

(2) 加法群 $\mathrm{G}_a$ は線型簡約ではない．$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で定まる準同型 $\mathrm{G}_a \to \mathrm{GL}_2$ を考える．これによって $V = \mathbf{C}^2$ は $G$-加群になる．このような $V$ を，2 次元べき単表現 (unipotent representation) という．このとき，$G$-加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow V \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

の導く $G$-不変部分の列

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$

[1] [N1] の序文参照．
線型ではない群作用での反例は Roberts [R] のものが有名である．これらと関連する線型な群作用の話に関しては，この報告集にある谷本氏の結果を見ていただきたい．

は完全である．しかし，最後の写像は全射ではない．よって $\mathrm{G}_a$ は線型簡約ではない．

線型簡約な代数群の作用による不変式については，(本質的に) Hilbert による次の結果がある．

**定理 1.3 (Hilbert 1890).** $G$ が線型簡約ならば不変式環 $S^G$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成である．

## 1.1 Hilbert の議論

$R$ を $\mathbf{C}$ 上の代数とし，$G$ は $R$ に作用しているものとする．

**命題 1.4.** $G$ は線型簡約とする．このとき，$R$ がネーター環ならば $R^G$ もネーター環である．

**証明.** ([M1]) $I$ を $R^G$ のイデアルとする．$\widetilde{I}$ を $I$ で生成された $R$ のイデアルとする．$R$ はネーター環だから，有限個の元からなる $\widetilde{I}$ の生成系 $y_1,\ldots,y_N \in I \subset R$ がとれる．$G$-, $R$-加群の全射

$$R^{\oplus N} \xrightarrow{(y_1\ \cdots\ y_N)} \widetilde{I}$$

を考える．これにより導かれる $R^G$-加群の準同型写像

$$(R^G)^{\oplus N} \xrightarrow{(y_1\ \cdots\ y_N)} \widetilde{I}^G$$

は，$G$ が線型簡約により全射である．故に $\widetilde{I}^G = \sum_{i=1}^N y_i R^G \subset I$ である．$I \subset \widetilde{I}^G$ は明らかだから，$I = \sum_{i=1}^N y_i R^G$ である．□

$R^G$ が $R$ の pure 部分環であることを示すことにより，$R^G$ がネーター環であることを示すという別証明もある．

代数群 $G$ が多項式環 $S$ に線型に作用しているときは，$S^G$ が次数環になる．このことにより，$S^G$ がネーター環であれば，$S^G$ は 0 次斉次成分上有限生成となる．よって，命題 1.4 により定理 1.3 がわかる．

## 1.2 永田型作用

$V_1,\ldots,V_n$ を $\mathrm{G}_a$ の 2 次元べき単表現とする．群 $\mathbf{C}^n = \mathrm{G}_a^n$ は直和 $\bigoplus_{i=1}^n V_i$ に作用する．これにより，群 $\mathbf{C}^n = \mathrm{G}_a^n$ は多項式環 $S_{2n} = \mathbf{C}[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]$ に次の様に作用する．

$$\mathbf{C}^n \curvearrowright S_{2n} = \mathbf{C}[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]$$

$$(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbf{C}^n \qquad \begin{cases} x_i \longmapsto x_i & (1 \le i \le n) \\ y_i \longmapsto t_i x_i + y_i & (1 \le i \le n). \end{cases}$$

$G\subset \mathbf{C}^n$ を余次元 $r$ の一般的な部分空間とする．上で定めた作用を $G$ へ制限することにより，$G$ は $S_{2n}$ に作用する．この作用を，永田型作用と言うことにする．この状況で，

**定理 1.5 (永田 [N1]).** $r=3, n=16$ のとき，$S_{32}^G$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成ではない．

が成立する．これを精密化した次が主定理である．

**定理 1.6.** $\mathbf{C}^n$ の余次元 $r$ の一般的な部分空間 $G$ について，次の二条件は同値である．

(1) $S_{2n}^G$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成である．

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r}>1$.

上の条件 (2) は，Dynkin 図形 $T_{2,r,n-r}$ のワイル群 $W(T_{2,r,n-r})$ が有限群であることと同値である [K].

上の定理において，$(n,r)=(9,6)$ の場合を考えることによって次を得る．

**系 1.7.** $G=\mathrm{G}_a^3$ の $S_{18}$ への永田型作用による不変式環 $S^G$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成ではない．

定理 3.1 で見るが，$\mathrm{G}_a$ が多項式環 $S$ に線型に作用しているときは，その不変式環 $S^G$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成である．よって，次が未解決問題として残っている．

**問題 1.8.** $G=\mathrm{G}_a^2$ が多項式環 $S$ に線型に作用しているときに，その不変式環 $S^G$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成か？

## 1.3 定理 1.6 の (1) $\Longrightarrow$ (2) の証明

(A) $S$ の次数付けを使って証明する．(半群の非有限生成性に帰着させる.)

$$
\begin{aligned}
i\text{-degree} &= x_i \text{ と } y_i \text{ に関する次数の和} \quad (i=1,\cdots,n)\\
x\text{-degree} &= x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ に関する次数の和}\\
y\text{-degree} &= y_1, y_2, \ldots, y_n \text{ に関する次数の和}
\end{aligned}
$$

$f\in S$ の $i$-degree, $x$-degree, $y$-degree をそれぞれ $i$-deg$(f)$, $x$-deg$(f)$, $y$-deg$(f)$ と表す．

(1) $i=1,\ldots,n$ を一つ選ぶ．このとき，$t\in \mathrm{G}_m$ に対して

$$
\begin{aligned}
x_i,\ y_i &\mapsto tx_i,\ ty_i\\
x_j,\ y_j &\mapsto x_j,\ y_j \quad (j\neq i)
\end{aligned}
$$

と定めることにより，乗法群 $\mathrm{G}_m$ は $S$ に作用する．この作用は $G$ の $S$ への作用と可換である．よって，任意の $t\in \mathrm{G}_m$ に対して $t(S^G)\subset S^G$ となる．このことにより，$S^G$ は $i$-degree によって次数環になるということがわかる．

(2) $t \in \mathrm{G}_m$ に対して

$$\begin{aligned} x_1, \ldots, x_n &\mapsto tx_1, \ldots, tx_n \\ y_1, \ldots, y_n &\mapsto y_1, \ldots, y_n \end{aligned}$$

と定めることにより，乗法群 $\mathrm{G}_m$ は $S$ に作用する．この作用と $(t_1, \ldots, t_n) \in G$ の作用とは可換ではないが，任意の $t \in \mathrm{G}_m$ に対して $(t_1 t, \ldots, t_n t) \cdot t = t \cdot (t_1, \ldots, t_n)$ が成立する．このことにより $t(S^G) \subset S^G$ となり，$S^G$ は $x$-degree によって次数環になるということがわかる．

関係式 $\sum_{i=1}^n i\text{-deg} = x\text{-deg} + y\text{-deg}$ が成立することより，$S^G$ は $y$-degree によっても次数環になる．

$$\overrightarrow{\deg}(f) = (1\text{-deg}(f), \ldots, n\text{-deg}(f), y\text{-deg}(f)) \in \mathbf{Z}^{n+1}$$

と定義する．これにより，$S$ を $\mathbf{Z}^{n+1}$-次数環と見る．このとき，上の (1), (2) の議論によって $S^G$ は $S$ の $\mathbf{Z}^{n+1}$-次数付部分環となることがわかる．

(B) $(t_1, \ldots, t_n) \in G$ により $x_i \mapsto x_i$, $y_i \mapsto y_i + t_i x_i$ と写される．よって，$y_i/x_i \mapsto y_i/x_i + t_i$ となることに注意．

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \left(\mathbf{C}\frac{y_1}{x_1} + \cdots + \mathbf{C}\frac{y_n}{x_n}\right)\prod_{i=1}^n x_i \bigcap S^G \\ &= \left\{ \left(a_1\frac{y_1}{x_1} + \cdots + a_n\frac{y_n}{x_n}\right)\prod_{i=1}^n x_i \;\middle|\; \begin{array}{l} (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n \text{ は } \forall (t_1, \ldots, t_n) \in G \\ \text{に対して } \sum_{i=1}^n a_i t_i = 0 \text{ を満たす} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

とおく．$G$ は余次元 $r$ であるので $\dim \mathcal{J} = r$ である．

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\deg}(x_i) &= (0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{i\text{ 番目}}, 0, \ldots, 0; 0), \\ \overrightarrow{\deg}(\mathcal{J}) &= (1, \ldots, 1; 1) \end{aligned}$$

に注意．

**定義 1.9.** $(f_1, \ldots, f_n; \mathfrak{q})$ は，斉次不変式の $r$ 次元部分空間 $\mathfrak{q}$ と $n$ 個の互いに素な斉次不変式 $f_1, \ldots, f_n$ の組であるとする．$|I| \leq r$ を満たす任意の添え字集合 $I \subset \{1, \ldots, n\}$ に対して，

$$\operatorname{codim}\{g \in \mathfrak{q} \mid \text{任意の } i \in I \text{ に対し } g \text{ は } f_i \text{ で割り切れる}\} = |I|$$

が成り立つときに，$(f_1, \ldots, f_n; \mathfrak{q})$ は裏返し可能 (reversible) であると言う．

**例 1.10.** $(x_1, \ldots, x_n; \mathcal{J})$ は裏返し可能である．

不変式と不変式の部分空間との組 $(f_1,\ldots,f_n;\mathfrak{q})$ は，裏返し可能であるとする．$1\le i\le r$ に対して，$g_i$ を 1 次元ベクトル空間

$$\{g\in\mathfrak{q}\mid\ f_j|g\ \ \forall j=1,\ldots,\check{i},\ldots,r\}$$

の生成元とする．$g_i$ は定数倍を除いて決まる．ここで，$\check{i}$ は「$i$ を除く」を意味するものとする．

$$f'_i=\begin{cases}\frac{g_i}{f_1\cdots\check{f_i}\cdots f_r} & (1\le i\le r)\\ f_i & \text{その他}\end{cases}$$

とおき，$\mathfrak{q}'$ は $\mathbf{C}$ 上

$$\left\{\frac{g_1\cdots\check{g}_i\cdots g_r}{(f_1\cdots f_r)^{r-2}}\ \middle|\ 1\le i\le r\right\}$$

で張られる $S^G$ の部分空間とする．組 $(f'_1,\ldots,f'_n;\mathfrak{q}')$ を組 $(f_1,\ldots,f_n;\mathfrak{q})$ の裏返し (reversion) という．不変式と部分空間の組で裏返し可能であるもの全体を $R$ とおく．$R$ 内の操作

(i) 不変式 $f_1,\ldots,f_n$ の置換

(ii) 裏返し

を考える．ここで，組 $(x_1,\ldots,x_n;\mathcal{J})$ に上記 (i), (ii) の操作を繰り返せるだけ繰り返して得られる組の全体を $R_0$ とおく．(i), (ii) の操作によって次数の行列

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{\deg}(f_1)\\ \vdots\\ \overrightarrow{\deg}(f_n)\\ \overrightarrow{\deg}(\mathfrak{q})\end{pmatrix}\tag{1}$$

は変化していく．それを記述するために $\mathbf{Z}^{n+1}$ の元 $\overrightarrow{w_1}=(a_1,\ldots,a_n;b)$ と $\overrightarrow{w_2}=(a'_1,\ldots,a'_n;b')$ に対して，内積を

$$<\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}>=(r-2)bb'-\sum_{i=1}^{n}a_ia'_i$$

によって定義する．

$j=1,\ldots,n-1$ に対して，$\mathbf{Z}^{n+1}$ の元

$$\overrightarrow{u_j}=(0,\ldots,0,\overbrace{1}^{j\text{ 番目}},\overbrace{-1}^{j+1\text{ 番目}},0,\ldots,0;0)$$

は，$(-2)$-ベクトルである．つまり，$<\overrightarrow{u_j},\overrightarrow{u_j}>=-2$ となる．このルートに関する reflection は，$\mathbf{Z}^{n+1}$ の第 $j$ 成分と第 $j+1$ 成分の置換である．$R_0$ 上の (i) の操作，例えば $f_j$ と $f_{j+1}$ の交換を行うと，次数の行列 (1) の第 $j$ 行と第

$j+1$ 行の置換が起こる．つまり，元 $\overrightarrow{u_j}$ の内積 $<\ ,\ >$ に関する reflection の行列を，行列 (1) に左からかけたものが得られる．

次に，$\mathbf{Z}^{n+1}$ の元

$$\vec{v} = (\overbrace{-1,\dots,-1}^{r\text{ 個}},0,\dots,0;1)$$

を見る．これも，$(-2)$-ベクトルである．$R_0$ 上で (ii) の操作を行なったときは，次数の行列 (1) は，$\vec{v}$ の reflection の行列を左からかけたものと一致する．

上の内積 $<\ ,\ >$ と $n$ 個のルート $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{n-1}}, \vec{v}$ に対応する Dynkin 図形は $T_{2,r,n-r}$ である．ルート系 $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{n-1}}, \vec{v}$ の reflection 等で生成される $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{Z})$ の部分群 (これを，$T_{2,r,n-r}$ のワイル群という) が有限群であるための必要十分条件は，定理 1.6 の条件 (2) の $\frac{1}{2}+\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r}>1$ であることが知られている [K].

ここで，$\frac{1}{2}+\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r}\leq 1$ と仮定する．すると，ワイル群は無限群であり，特に $R_0$ の中に出てくる $f_i$ に対応する $\overrightarrow{\deg}(f_i)\in\mathbf{Z}^{n+1}$ は無限個あることがわかる．つまり，無限個の $\vec{v}\in\mathbf{Z}^{n+1}$ が $\overrightarrow{\deg}(f_i)$ (但し，$(f_1,\dots,f_n;\mathfrak{q})\in R_0$) として現れる．

ここで，次が示される．

**主張 1.11.** $G$ が一般的な部分空間のとき，裏返しが好きなだけできる．さらに，$(f_1,\dots,f_r;\mathfrak{q})\in R_0$ ならば，不変式 $f_1,\dots,f_r$ は既約多項式である．

とくに，$R_0$ から出てくる $f_i$ に対して，$\overrightarrow{\deg}(f_i)$ は半群 $\mathrm{Supp}(S^G)$ の既約元である．ただし，$\mathrm{Supp}(S^G)$ は不変式環 $S^G$ の台 $\{\vec{v}\in\mathbf{Z}^{n+1}\mid (S^G)_{\vec{v}}\neq 0\}$ である．

このように既約元を無限個もつので半群 $\mathrm{Supp}(S^G)$ は有限生成ではない．よって，次の簡単な補題により，$S^G$ は有限生成ではないことがわかる．

**補題 1.12.** $A$ は $\mathbf{Z}^{n+1}$-次数付き環で整域とする．このとき，$A$ が $A_0$ 上環として有限生成ならば，$\mathrm{Supp}(A)$ は半群として有限生成である．

# 2 永田の反例—永田の論法 ($n=16$), その簡易版 ($n=9$) と永田予想

ここでは，Hilbert の第 14 問題に対する永田による反例に関して，もともとの永田の論法 [N1] ($n=16$), Steinberg [St] によるその簡易版 ($n=9$), それに関連した永田予想の紹介を行う．

$V_i$ は，加法群 $\mathrm{G}_a$ の 2 次元のべき単表現であるとする．つまり，$t\in\mathrm{G}_a$ は，$V_i=\mathbf{C}^2$ に $\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ によって作用するとする．これを，$i=1,\dots,n$ に対して和をとるこ

とにより,

$$\mathbf{C}^n \curvearrowright \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$$

を得る. $G$ を $\mathbf{C}^n$ の一般の余次元 $r$ の部分空間とすると, 上の作用を $G$ に制限することにより $G$ は $2n$ 変数多項式環 $S_{2n}$ に次の様に作用する.

$$G \curvearrowright S_{2n} = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$$

$$(t_1, \ldots, t_n) \in G \qquad \begin{cases} x_i \longmapsto x_i & (1 \le i \le n) \\ y_i \longmapsto t_i x_i + y_i & (1 \le i \le n). \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_n$ はこの作用で不変なので, $G$ は $S_{2n}$ を $x_1, \ldots, x_n$ で局所化した環

$$\widetilde{S_{2n}} = \mathbf{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, y_1, \ldots, y_n] = \mathbf{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, \frac{y_1}{x_1}, \ldots, \frac{y_n}{x_n}]$$

に作用する. $(t_1, \ldots, t_n) \in G$ は, $\frac{y_i}{x_i} \mapsto \frac{y_i}{x_i} + t_i$ と作用することに注意. $S_{2n}^G$ の $r$ 次元部分空間

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \left(\mathbf{C}\frac{y_1}{x_1} + \cdots + \mathbf{C}\frac{y_n}{x_n}\right) \prod_{i=1}^{n} x_i \bigcap S^G \\ &= \left\{ \left(a_1 \frac{y_1}{x_1} + \cdots + a_n \frac{y_n}{x_n}\right) \prod_{i=1}^{n} x_i \;\middle|\; \begin{array}{l} (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n \text{ は } \forall (t_1, \ldots, t_n) \in G \\ \text{に対して } \sum_{i=1}^{n} a_i t_i = 0 \text{ を満たす} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

の基底を $J^{(1)}, \ldots, J^{(r)}$ とおく. 今,

$$G = \left\{ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{C}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} t_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(2)} t_i = \cdots = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(r)} t_i = 0 \right\}$$

によって $a_i^{(j)} \in \mathbf{C}$ を定めれば,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} \frac{y_i}{x_i}, \ \sum_{i=1}^{n} a_i^{(2)} \frac{y_i}{x_i}, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{n} a_i^{(r)} \frac{y_i}{x_i} \in \widetilde{S_{2n}}^G$$

であり, 例えば $J^{(j)} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)} \frac{y_i}{x_i}\right) \cdot x_1 \cdots x_n$ とおけば $J^{(1)}, \ldots, J^{(r)}$ は $\mathcal{J}$ の基底になることがわかる.

このとき,

$$\begin{aligned} \widetilde{S_{2n}}^G &= \mathbf{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, y_1, \ldots, y_n]^G \\ &= \mathbf{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, \frac{y_1}{x_1}, \ldots, \frac{y_n}{x_n}]^G \\ &= \mathbf{C}\left[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} \frac{y_i}{x_i}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_i^{(r)} \frac{y_i}{x_i}\right] \\ &= \mathbf{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, J^{(1)}, \ldots, J^{(r)}] \end{aligned}$$

である．よって，

$$
\begin{aligned}
S_{2n}^G &= \widetilde{S_{2n}}^G \cap S_{2n} \\
&= \mathbf{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, J^{(1)}, \ldots, J^{(r)}] \cap \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \\
&= R[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}] \cap S_{2n} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

である．ただし，$\mathbf{C}$ 上 $J^{(1)}, \ldots, J^{(r)}$ で生成された $S_{2n}^G$ の部分環を $R$ とおいた．$R$ は $\mathbf{C}$ 上の $r$ 変数の多項式環と同型であることに注意する．

$\mathcal{J}_i = \{f \in \mathcal{J} \mid f$ は $x_i$ で割り切れる$\}$ とおく．$I_i$ を $\mathcal{J}_i$ で生成された $R$ のイデアルとする．このとき，$f \in R$ に対して，

$$
f \in I_i \Longrightarrow f \text{ は } x_i \text{ で割り切れる} \Longrightarrow \frac{f}{x_i} \in S_{2n}^G
$$

が成り立つ．より一般に $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{Z}$ に対し

$$
f \in I^{b_1} \cap \cdots \cap I^{b_n} \Longrightarrow \frac{f}{x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}} \in S_{2n}^G
$$

が成り立つ．但し，$b \leq 0$ ならば $I^b = R$ とする．従って，$I_1, \ldots, I_n$ に関する拡大多重 Rees 環

$$
\sum_{b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{Z}} \left(I_1^{b_1} \cap \cdots \cap I_n^{b_n}\right) x_1^{-b_1} \cdots x_n^{-b_n} \subset R[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}] \qquad (3)
$$

は，$S_{2n}^G$ の部分環であることがわかる．($x_1, \ldots, x_n$ は，$R$ 上代数的独立であることに注意．)

実は，次が成り立っている．

**命題 2.1.** 不変式環 $S_{2n}^G$ と拡大多重 Rees 環 (3) は一致する．すなわち，

$$
S_{2n}^G = \sum_{b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{Z}} \left(I_1^{b_1} \cap \cdots \cap I_n^{b_n}\right) x_1^{-b_1} \cdots x_n^{-b_n}
$$

が成り立つ．

これは，等式 (2) と次の主張から従う．

**主張 2.2.** $f \in R$ について，$f \in I_i^{b_i}$ であることと $f$ が $x_i^{b_i}$ で割り切れることは同値である．

## 2.1 幾何学的解釈

$\mathbf{C}$ 上 $J^{(1)}, \ldots, J^{(r)}$ で生成される部分環 $R$ は $r$ 変数多項式環と同型であった．$R$ のイデアル $I_i$ に対応する $\mathrm{Proj}(R) \cong \mathbf{P}^{r-1}$ の点を $p_i$ とする．$G$ は $\mathbf{C}^n$ の一般の部

分空間であったので，$n$ 点 $p_1, \ldots, p_n$ は一般の位置にある．$\mathbf{P}^{r-1}$ の $p_1, \ldots, p_n$ を中心とする爆発を $\pi : X = X_G \to \mathbf{P}^{r-1}$ とする．例外因子 $\pi^{-1}(p_i)$ を $e_i$ とし，$h$ を超平面の引き戻しとすれば，$X$ の Picard 群 Pic$(X)$ は $h, e_1, \ldots, e_n$ の類を $\mathbf{Z}$ 基底にもつ階数 $n+1$ の自由アーベル群である．ここで，

$$\begin{aligned}\mathcal{TC}(X) &= \bigoplus_{a,b_1,\ldots,b_n\in\mathbf{Z}} H^0\left(\mathcal{O}_X\left(ah-\sum_{i=1}^n b_ie_i\right)\right)x_1^{-b_1}\cdots x_n^{-b_n}\\ &\simeq \bigoplus_{L\in\mathrm{Pic}(X)} H^0(X,L)\end{aligned}$$

とおき，これを $X$ の全座標環と呼ぶ．(自然な積を持ち，可換整域になる．) ここで，$H^0\left(\mathcal{O}_X\left(ah-\sum_{i=1}^n b_ie_i\right)\right)$ は，点 $p_1, \ldots, p_n$ においてそれぞれ重複度 $b_1, \ldots, b_n$ を持ち，次数が $a$ である多項式全体からなる $R$ の $a$ 次斉次成分の部分空間である．つまり，この全座標環 $\mathcal{TC}(X)$ は拡大多重 Rees 環 (3) と同型である．従って，命題 2.1 より次を得る．

**定理 2.3 ($r=3$ の場合は [N1] による).** 不変式環 $S_{2n}^G$ は $X_G$ の全座標環 $\mathcal{TC}(X_G)$ と同型である．

ここで，全座標環 $\mathcal{TC}(X_G)$ の台

$$\mathrm{Supp}\,\mathcal{TC}(X_G) = \left\{L\in\mathrm{Pic}(X) \mid H^0(X_G,L)\neq 0\right\} = \mathrm{Eff}(X_G)\subset\mathrm{Pic}(X_G)$$

を考える．ここで，Eff$(X_G)$ は，効果的直線束 (effective line bundle) によって生成された Pic$(X_G)$ の部分半群であるとする．第 1 章における議論は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r}\leq 1 &\implies \mathrm{Eff}(X_G)\text{ は半群として有限生成ではない}\\ &\implies \text{全座標環 }\mathcal{TC}(X_G)=S_{2n}^G\text{ は }\mathbf{C}\text{ 上有限生成ではない}\end{aligned}$$

ということであった．

## 2.2 余次元 3 の場合

余次元 $r=3$ の場合を考察する．主定理の条件

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n-3}\leq 1$$

は $n\geq 9$ と同値である．不変式環 $S_{2n}^G$ は射影平面 $\mathbf{P}^2$ を $n$ 点で爆発してえられる有理曲面 $X$ の全座標環 $\mathcal{TC}(X)$ と同型である．[N2] で最初に示されたように，$n\geq 9$ ならば，射影平面の一般の位置にある $n$ 点での爆発 $X$ は，無限個の第 1 種例外曲線 ($E\simeq\mathbf{P}^1$ かつ $E^2=-1$ を満たすもの) をもつ．よって $G$ が余次元 3 で一般的な $\mathbf{C}^n$ の部分空間の場合，$n\geq 9$ ならば Eff$(X)$ は半群として有限生成ではなく，従っ

て $S^G_{2n}$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成ではないことがわかる．これが $r=3$ の場合における第 1 章の議論である．しかし，永田 [N1] のもともとの証明はこれとは異なり，$\mathcal{TC}(X)$ の対角的部分環

$$\mathcal{TC}^{\Delta}(X) = \bigoplus_{a,b\in\mathbf{Z}} H^0\left(\mathcal{O}_X(ah-be)\right), \qquad e=\sum_{i=1}^{n} e_i$$

を考える．そして，次を示している．

**命題 2.4** ($n=16$). $\mathrm{Supp}(\mathcal{TC}^{\Delta}(X))\otimes\mathbf{Q} = \{(a,b)\mid a\geq 0,\ a>4b\}\subset \mathbf{Q}^2$ .

とくに，$\mathrm{Supp}(\mathcal{TC}^{\Delta}(X))$ は半群として有限生成ではない．よって，やはり補題 1.12 より $\mathcal{TC}^{\Delta}(X)$ は有限生成ではない．このことにより $\mathcal{TC}(X)$ も $\mathbf{C}$ 上有限生成ではないことがわかり定理 1.5 が示される．

**予想 2.5 (永田).** $\mathbf{P}^2$ の一般的な位置にある $n$ 点での爆発を $X$ とする．$n\geq 10$ のとき，

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{TC}^{\Delta}(X))\otimes\mathbf{Q} = \left\{(a,b)\mid a\geq 0,\ a>\sqrt{n}b\right\}$$

が成り立つか? (包含関係 $\supset$ を示すのは易しい.)

$n$ が平方数のときは永田により示されているが，そうでないときは未解決である．

# 3 Hilbert の第 14 問題—簡約でない場合の肯定的な結果と予想

$G$ は代数群とし，多項式環 $S=\mathbf{C}[x_1,\ldots,x_n]$ に線型に作用しているものとする．このとき,「不変式環 $S^G$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成か?」というのが本来の Hilbert の第 14 問題であった．この章では $G$ が簡約でない場合のいくつかの散発的な肯定的結果について考察する．

## 3.1 $G$ が 1 次元加法群の場合

次が知られている．

**定理 3.1 (Weitzenböck 1932 [N3][Se] ).** 加法群 $\mathrm{G}_a$ が多項式環 $S$ に線型に作用しているときは，その不変式環 $S^G$ は有限生成である．

この定理の証明のアウトラインを述べる．

$G=\mathrm{G}_a$ が，$n$ 次元ベクトル空間 $V$ に線型に作用するとしよう．つまり，$\rho:\mathrm{G}_a\to\mathrm{GL}(V)$ が与えられているとする．$t\in\mathrm{G}_a$ を $\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2$ と同一視するこ

とにより，$\mathrm{G}_a$ は $\mathrm{SL}_2$ の部分群と思う．ジョルダンの標準形の議論により $\mathrm{SL}_2$ の表現 $\widetilde{\rho}: \mathrm{SL}_2 \to \mathrm{GL}(V)$ で，$\widetilde{\rho}|_{\mathrm{G}_a} = \rho$ を満たすものがある．standard 表現 $\mathrm{SL}_2 \to \mathrm{GL}_2$ により，$\mathbf{C}^2$ は $\mathrm{SL}_2$-加群となる．よって，$\mathrm{SL}_2$ は $V \oplus \mathbf{C}^2$ に作用する．よって，$\mathrm{G}_a$ は $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ に作用し，$\mathrm{SL}_2$ は $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, y_2]$ に作用する．このとき，

$$\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]^{\mathrm{G}_a} \simeq \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, y_2]^{\mathrm{SL}_2}$$

がいえる．$\mathrm{SL}_2$ は線型簡約であったから，定理 1.3 より上の環は有限生成である．

**注意** 作用 $\mathrm{SL}_2 \curvearrowright \mathbf{C}^2$ は，prehomogeneous vector space である．つまり，この作用は open dense orbit を持つ．また，stabilizer group は $G_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathrm{G}_a \right\}$ である．また，上の環同型は実質的には 2 元形式に対する半不変式と共変式の対応を与える Robert の定理に他ならない．

## 3.2 永田型作用の場合

ここでは，定理 1.6 の (2) $\Longrightarrow$ (1)，すなわち，「$G \subset \mathbf{C}^n$ を余次元 $r$ の一般的な部分空間とし，$2n$ 変数多項式環 $S_{2n}$ へ永田型で作用するとき，$\frac{1}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{n-r} > 1$ を満たすならば不変式環 $S_{2n}^G$ は有限生成である」に注目する．このことを，代表的ないくつかの場合に考察してみよう．

### 3.2.1 $r = 3$, $n \le 8 \Longrightarrow \mathcal{TC}(\mathrm{Bl}_{n\text{-pts}}\,\mathbf{P}^2)$ は有限生成

ここでは，$r = 3$, $n = 6$ のケースを見てみよう．Dynkin 図形 $E_6 = T_{2,3,3}$ が重要である．

**良く知られている事**

1) $X = \mathrm{Bl}_{6\text{-pts}}\,\mathbf{P}^2$ は 反標準線形系 $|-K| = |3h - \sum_{i=1}^{6} e_i|$ によって $\mathbf{P}^3$ に埋め込まれる．

2) $X$ 上には，自己交点数が $-1$ である 27 本の射影直線 $\ell_1, \dots, \ell_{27} \simeq \mathbf{P}^1$ が存在する．$E_6$ のワイル群は，この 27 本の直線に可移的に作用する．

3) $X$ は 72 通りに $\mathbf{P}^2$ の爆発として表される．ここで，$72 = {}^{\#}\{E_6 \text{ の root}\}$ である．

**あまり知られていない事**

4) $\mathrm{Eff}(X)$ は $\ell_1, \dots, \ell_{27}$ で生成されている．(Castelnuovo の termination of adjunction 論法を使う．$-K$ が豊富であるので

$$|D| \to |D + K| \to |D + 2K| \to \cdots \to |D + nK| = \emptyset$$

となる最小の $n$ がある．すると，$C \in |D+(n-1)K|$ が存在して，$C \simeq \mathbf{P}^1$ かつ $|C+K| = \emptyset$ となる．)

5) 任意の曲線 $E \subset X$ に対して $(D.E) \geq 0$ であるときに，因子 $D$ は nef であるという．nef 因子全体からなる $\mathrm{Pic}(X)$ の部分半群を $\mathrm{Nef}(X)$ と書く．

   半群 $\mathrm{Nef}(X) \subset \mathrm{Pic}(X)$ は次の $100 = 27+72+1$ 個の因子によって生成されている．

   a) $M_i = -K - \ell_i \quad (1 \leq i \leq 27)$．ここで，$|M_i|$ は固定点自由 (base point free) で $\mathbf{P}^1$ への conic bundle 射を与える．

   b) $N_j = \pi_j^* \mathcal{O}(1)$．ここで $\pi_j : X \to \mathbf{P}^2$ は上の 3) の 72 通りの爆発 $(1 \leq j \leq 72)$ とする．$|N_j|$ も固定点自由である．

   c) 反標準因子 $-K$．その線形系 $|-K|$ は固定点自由である．

このケースでは，$\mathrm{Nef}(X) \subset \mathrm{Eff}(X)$ が成立している．

ここで，$\mathcal{TC}^{\mathrm{nef}}(X) = \bigoplus_{L:\mathrm{nef}} H^0(X, L) \subset \mathcal{TC}(X)$ とおく．

**Step1.** nef 部分 $\mathcal{TC}^{\mathrm{nef}}(X)$ は有限生成である．以下，簡単に理由を述べる．階数 100 のベクトル束

$$\mathcal{E} := \left( \bigoplus_{i=1}^{27} \mathcal{O}_X(M_i) \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^{72} N_j \right) \oplus \mathcal{O}_X(-K)$$

を射影化した $\mathbf{P}^{99}$-束

$$Z = \mathbf{P}^*(\mathcal{E}) \longrightarrow X$$

を考える．ここで，tautological line bundle $\mathcal{O}_Z(1)$ は上の 5) の a), b), c) により固定点自由である．よって，Zariski の定理 によって，

$$\bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{O}_Z(n)) \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^0(S^n \mathcal{E})$$

は有限生成である．$\bigoplus_{n \geq 0} H^0(S^n \mathcal{E})$ から $\mathcal{TC}^{\mathrm{nef}}(X)$ への全射が存在するので $\mathcal{TC}^{\mathrm{nef}}(X)$ も有限生成であることがわかる．

**Step2.** $\mathcal{TC}(X)$ は，部分環 $\mathcal{TC}^{\mathrm{nef}}(X)$ 上 27 本の直線 $\ell_i \subset X$ の類 $1_{(i)} \in H^0(\mathcal{O}_X(\ell_i))$ によって生成されている．

よって，$\mathcal{TC}(X)$ は有限生成である．

### 3.2.2 $n - r = \dim G = 2$ の場合

この場合は，不変式環 $S_{2n}^G$ を与える有理多様体 $X$ は $\mathbf{P}^{n-3}$ の $n$ 点爆発である．有限生成性の証明には，$n$ 点付射影直線 $(\mathbf{P}^1; p_1, \ldots, p_n)$ 上の parabolic rank 2-bundle の理論 ([B]) を使う．$\mathrm{Nef}(X) \subset \mathrm{Mov}(X) \subset \mathrm{Eff}(X)$ を満たす movable cone $\mathrm{Mov}(X)$ や flip, flop などを使う議論が必要であるが，ここでは略す．

### 3.3 Sylvester 型作用の場合

ここで,

$$B_m = \{f(x,y) \mid \text{次数 } m \text{ の 2 変数斉次多項式}\}$$

とおく. $n > m$ としよう. 普通の積

$$B_{n-m} \times B_m \longrightarrow B_n$$

がある. $h \in B_{n-m}$ は, $(f,g) \in B_m \oplus B_n$ を $(f, g+hf) \in B_m \oplus B_n$ に写すこととすると, $\mathrm{G}_a^{n-m+1} = B_{n-m}$ は $B_m \oplus B_n$ に作用する. これより, 加法群 $\mathrm{G}_a^{n-m+1}$ が多項式環 $\mathbf{C}[a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n]$ に線形に作用する. この作用に関する不変式環は内藤君によって研究されており, 有限生成となることが示されている.

線型簡約群の表現や Sylvester 型の表現は, どちらも rigid である. よって, 次の自然な問題が提起される.

**問題 3.2.** $G$-加群 $V$ が rigid のとき, 不変式環 $S^G$ は有限生成か?

## 参考文献


[B] Bauer, S.: Parabolic bundles, elliptic surfaces and $SU(2)$-representation spaces of genus zero Fuchsian groups, Math. Ann. **290** (1991), 509–526.

[D] Dixmier, J.: Solution négative du problème des invariants, d'après Nagata, Sém. Bourbaki, **175** (1959), 97–107.

[Go] 後藤四郎 (代表) : Blow-up rings の環論的研究, 数研講究録, **801** (1992).

[Gr] Grosshans, F. D.: The invariants of unipotent radicals of parabolic subgroups, Invent. Math. **73** (1983), 1–9.

[Ha] Haboush, W.: Reductive groups are geometrically reductive, Ann. Math., **102** (1975), 67–83.

[HK] Hu, Y. and Keel, S.: Mori dream spaces and GIT, Michigan Math. J. **48** (2000) 331–348.

[K] Kac, V.: Infinite dimensional Lie algebras, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1990.

[M1] Mukai, S.: An Intoduction to Invariants and Moduli, Cambridge Univ. Press, 2003.

[M2] —: On Nagata's example of an infinitely generated ring of invariants, 第46回代数学シンポジウム報告集, 大阪大学, 2001年, pp. 140–151.

[M3] —: Counterexample to Hilbert's fourteenth problem for the 3-dimensional additive group, RIMS preprint, **1341** (2001).

[M4] —: Geometric realization of $T$-shaped root systems and counterexamples to Hilbert's fourteenth problem, RIMS preprint, **1372** (2002), to appear in *'Algebraic Transformation Groups and Algebraic Varieties'*(ed. V. L. Popov), Springer-Verlag, 2004.

[M5] —: 不変式環と双有理幾何 ―永田型不変式環とその一般化について―, 代数幾何学シンポジウム報告集（高次元多様体, 正標数上の話題を中心として), 2003年1月, 九州大学, pp.11–17.

[M6] —: Hilbert's 14th problem, quiver and Dynkin diagram, 第48回代数学シンポジウム報告集, 名古屋大学, 2003年, pp. 84–96.

[N1] Nagata, M.: On the fourteenth problem of Hilbert, Int'l Cong. Math., Edingburgh, 1948.

[N2] —: On rational surfaces, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A, **33** (1960), 271–293.

[N3] —: The fourteenth problem of Hilbert, Lecture Notes (1961–62), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

[R] Roberts, P.: An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's 14th problem, J. Algebra, **132** (1990), 461–473.

[Se] Seshadri, C. S.: On a theorem of Weitzenböck in invarinat theory, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 403–409.

[Sh] Shioda, T.: Mordell-Weil lattices and Galois representation, Proc. Japan Acad. **65A** (1989), 267–271, 296–299, 300–303.

[St] Steinberg, R.: Nagata's example, in *'Algebraic Groups and Lie Groups'*, Austral. Math. Soc. Lect. Ser. **9**, Cambridge Univ. Press, 1997, pp. 375–384.

京都大学数理解析研究所
606-8502 京都市左京区北白川追分町
e-mail : `mukai@kurims.kyoto-u.ac.jp`

(Note by 蔵野和彦・早坂太)

# Arithmetical rank of monomial ideals

Naoki Terai (Saga University)

## 1 Arithmetical rank of monomial ideals

We consider the arithmetical rank of monomial ideals. Let $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ be the polynomial ring over a field $k$. Let $I$ be an ideal of $R$. We define the arithmetical rank $\mathrm{ara}I$ of $I$ by

$$\mathrm{ara}I := \min\{r;\ \exists a_1, a_2, \ldots a_r \in I \text{ such that } \sqrt{(a_1, a_2, \ldots a_r)} = \sqrt{I}\}.$$

In general, $\mathrm{ara}I \geq \mathrm{ht}\, I$. And $I$ is said to be a set-theoretic complete intersection, if $\mathrm{ara}I = \mathrm{ht}I$. Let $H_I^i(R)$ be the $i$-th local cohomology module of $R$ with respect to $I$. The cohomological dimension $\mathrm{cd}\, I$ of $I$ is defined to be $\mathrm{cd}\, I := \max\{i;\ H_I^i(R) \neq 0\}$. It is easy to see $\mathrm{ara}I \geq \mathrm{cd}\, I$.

When $I$ is a squarefree monomial ideal, the following theorem is known :

**Theorem** **(Lyubeznik [Ly]).** *Let $I$ be a squarefree monomial ideal. Then we have*

$$\mathrm{projdim}\ (R/I) = \mathrm{cd}\, I.$$

**Corollary**. *Let $I$ be a squarefree monomial ideal. Then we have*

$$\mathrm{ara}\, I \geq \mathrm{projdim}\ (R/I).$$

*In particular, if $I$ is a set-theoretic complete intersection, then $R/I$ is Cohen-Macaulay.*

**Problem.** Let $I$ be a squarefree monomial ideal. Under what conditions do we have $\mathrm{ara}\, I = \mathrm{projdim}\ (R/I)$?

We do not always have $\mathrm{ara}\, I = \mathrm{projdim}\ (R/I)$ as the following example shows.

**Example (Yan [Ya]).** Let $I$ be the ideal in $R = k[u,v,w,x,y,z]$ generated by $uvw, uvy, vwx, uwz, uxy, uxz, vxz, vyz, wxy, wyz$. Then $I$ is the Stanley-Reisner ideal of a triangulation of $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ with six vertices. In this case, ara $I = 4$, which is proved by Yan, using the étale cohomology. On the other hand projdim $(R/I) = 3$ if char $(k) \neq 2$.

**Proposition.** *Let I be a squarefree monomial ideal. If*

$$\textit{projdim}\ (R/I) \leq \mu(I) - 1,$$

*then*

$$\textit{ara}\ I \leq \mu(I) - 1,$$

*where $\mu(I)$ is the number of minimal generators of I.*

**Corollary.** *Let I be a squarefree monomial ideal. If $\mu(I) -$ projdim $(R/I) \leq 1$, then we have*

$$\text{ara}\ I = \text{projdim}\ (R/I).$$

*Proof.* Since we have projdim $(R/I) \leq$ ara $I \leq \mu(I)$, we may assume $\mu(I) -$ projdim $(R/I) = 1$. By the proposition, we have

$$\text{projdim}\ (R/I) \leq \text{ara}\ I \leq \mu(I) - 1 = \text{projdim}\ (R/I).$$

Q.E.D.

**Corollary.** *Let I be an almost complete intersection squarefree monomial ideal. Then we have*

$$\text{ara}\ I = \text{projdim}\ (R/I).$$

For an ideal $I$ in $R$, we define the deviation $d(I)$ of $I$ by $d(I) = \mu(I) - \text{ht}\ I$.

**Corollary.** *Let I be a squarefree monomial ideal of deviation 2. If $R/I$ is not Cohen-Macaulay, then we have*

$$\text{ara}\ I = \text{projdim}\ (R/I).$$

*Proof.* Since $R/I$ is not Cohen-Macaulay, we have

$$\text{ht}\ I < \text{projdim}\ (R/I) \leq \text{ara}\ I \leq \mu(I).$$

Then we have $\mu(I)$ − projdim $(R/I) \leq 1$. Q.E.D.

For the Cohen-Macaulay case, we classify the Cohen-Macaulay squarefree monomial ideals of deviation 2 (see the next section). And by one-by-one checking we can show that they are set-theoretic complete intersections. Hence we obtain the following result:

**Theorem.** *Let $I$ be a squarefree monomial ideal of deviation 2. Then we have*

$$\text{ara}\, I = \text{projdim}\ (R/I).$$

We pick up some examples.

**Example.** Put $I = (abc, abd, acf, bde)$. Then $I$ is Cohen-Macaulay ideal of height 2 in the polynomial ring $R = k[a, b, c, d, e, f]$. Then we have $I = \sqrt{(ab(ac+bd), af(ac+bd)+be(ac+bd)+abc)}$, and $I$ is a set-theoretic complete intersection.

*Proof.* Since we have $I \supset (ab(ac+bd), af(ac+bd)+be(ac+bd)+abc)$, We have only to check $V(I) \subset V(ab(ac+bd), af(ac+bd)+be(ac+bd)+abc)$ by Nullstellensatz, where $V(I)$ is the algebraic set defined by $I$. Suppose $(a, b, c, d, e, f) \in V(I)$.

Case 1. Suppose $a = 0$. Since $bde = 0$, we have $(a, b, c, d, e, f) \in V(ab(ac+bd), af(ac+bd)+be(ac+bd)+abc)$.

Case 2. Suppose $b = 0$. Since $acf = 0$, we have $(a, b, c, d, e, f) \in V(ab(ac+bd), af(ac+bd)+be(ac+bd)+abc)$.

Case 3. Suppose $a \neq 0, b \neq 0$, and $ac + bd = 0$. Since $c = 0$, we have $d = 0$. Then we have $(a, b, c, d, e, f) \in V(ab(ac+bd), af(ac+bd)+be(ac+bd)+abc)$. Q.E.D.

**Example.** Put $I = (abf, acd, aefh, bcg, de)$. Then $I$ is Cohen-Macaulay ideal of height 3 in the polynomial ring $R = k[a, b, c, d, e, f, g, h]$. Then we have $I = \sqrt{(b(af-bcdg), he(af-bcdg)+acd, bcg+de)}$, and $I$ is a set-theoretic complete intersection.

**Example.** Put $I = (abcfgi, abd, aegj, bef, cdh)$. Then $I$ is Cohen-Macaulay ideal of height 3 in the polynomial ring $R = k[a, b, c, d, e, f, g, h, i, j]$. Then we have $I = \sqrt{(abd, abcfgi+aegj+bef, bef+cdh)}$, and $I$ is a set-theoretic complete intersection.

## 2 Classification of squarefree monomial ideals of deviation 2

In this section we explain how to classify equidimensional squarefree monomial ideals of deviation 2 using hypergraphs.

By a hypergraph $H$ on a vertex set V, we mean $H$ is a family of subsets of $V$ such that

$$\cup_{F \in H} F = V.$$

We call $F \in H$ a face of $H$. We define the dimension of $F$ by $\dim F = \sharp(F) - 1$, and of $H$ by $\dim H = \max\{\dim F; F \in H\}$.

Let $I$ be a squarefree monomial ideal in $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Put $I = (m_1, m_2, \ldots, m_\mu)$, where $\{m_1, m_2, \ldots, m_\mu\}$ is a minimal set of monomial generators. We define the hypergraph $H(I)$ on the vertex set $V = \{1, 2, \ldots, \mu\}$ by the follwing way:

$$\begin{aligned} F \in H(I) \Leftrightarrow\ & \text{there exists } i\ (1 \leq i \leq n) \text{ such that} \\ & \text{for all } j \in V, \\ & m_j \text{ is divisible by } x_i \text{ if } j \in F \\ & \text{and } m_j \text{ is not divisible by } x_i \text{ if } j \in V \setminus F. \end{aligned}$$

Since $\{m_1, m_2, \ldots, m_\mu\}$ is a minimal set of generators, for a squarefree monomial ideal $I$ the hypergraph $H = H(I)$ satisfies the following condition:

For all $i, j \in V (i \neq j)$, there exist $F, G \in H$ such that $i \in F \cap (V \setminus G)$ and $j \in G \cap (V \setminus F)$.

Conversely, a hypergraph $H$ with the above condition can be written as $H = H(I)$ for a squarefree monomial ideal $I$ in a polynomial ring with enough variables. We call a hypergraph with the above condition a smi-hypergraph.

A subset $C \in H$ is called a cover of $H$ if $\cup_{F \in C} F = V$. A cover $C$ of $H$ is called minimal if no proper subset is a cover of $H$.

**Proposition.** *The following condition is equivalent for a squarefree monomial ideal $I$:*
*(1)The ideal $I$ has a prime component of height $h$.*
*(2)The hypergraph $H(I)$ has a minimal cover of cardinality $h$.*

**Corollary.** *The following condition is equivalent for a squarefree monomial ideal $I$:*
*(1)The ideal $I$ has height $h$.*
*(2)The hypergraph $H(I)$ has a minimal cover of cardinality $h$, and all the minimal covers of $H(I)$ have at least cardinality $h$.*

**Corollary.** *The following condition is equivalent for a squarefree monomial ideal $I$:*
*(1)The ring $R/I$ is equidimensional.*
*(2)All the minimal covers of $H(I)$ have the same cardinality.*

For clsssifying the equidimensional squarefree monomial ideals of deviation 2, it is enough to classify all the smi-hypergraphs $H$ on the vertex set $V$ whose minimal covers have the same cardinality $\sharp(V) - 2$.

In this case, we have $\dim H \leq 2$ and $H$ contains either of the following type: (1)$\{\{x, y, z\}\}$ or (2)$\{\{x, w\}, \{y, z\}\}$, where $w, x, y, z$ are distinct. Moreover, $H$ does not contain neither of the following type: (1)$\{\{u, v, w\}, \{x, y, z\}\}$, (2)$\{\{u, v, w\}, \{u, x, y\}\}$, (3)$\{\{u, v, w\}, \{x, y\}\}$, nor (4)$\{\{u, v\}, \{w, x\}, \{y, z\}\}$, where $u, v, w, x, y, z$ are distinct.

We introduce some notion on hypergraphs. Let $H$ be a hypergraph on a vertex set $V$. The hypergraph $H$ is called disconnected if there exist hypergrphs $H_i \neq H$ on a vertex set $V_i$ ($i = 1, 2$) such that $H_1 \cup H_2 = H$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$, and $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. If $H$ is not disconnected, $H$ is called connected.

Let $H$ be a conected hypergraph on the vertex set $V$. The shadow of $H$ is defined to be $\{\{x, y\} \subset V; \{x, y\} \subset F$ for some $F \in H\}$ and is denoted by $\mathrm{sh}(H)$. The shadow $\mathrm{sh}(H)$ is also a hypergraph on the vertex set $V$.

A connected hypergraph $H$ is of suspension type if $\mathrm{sh}(H)$ satisfies the following condition:

$$\text{There exist } x, y \in V \text{ such that for all } F \in \mathrm{sh}(H), x \in F \text{ or } y \in F.$$

A vertex $x \in V$ is called an end vertex of $H$ if there exists a unique $F \in \mathrm{sh}(H)$ such that $x \in F$. If $x$ is an end vertex of $H$ and that $F = \{x, y\} \in H$, then $x$ is called an end vertex conncting with $y$. A connected hypergraph $H$ has multiple twigs if there exist $x, y, z \in V$ such that $x$ and $y$ are end vertices conncecting with the common $z$.

We may just concentrate our attention on hypergraphs with less than six vertices by the following lemma. Then we can classify them with the complete list of the graphs less than seven vertices in [Ha], for examples.

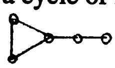
**Lemma.** *Let H be a connected hypergraphs H on the vertex set V whose minimal covers have the same cardinality $\sharp(V) - 2$. Suppose H does not have multiple twigs and that H is not of suspension type. Then we have $\sharp(V) \leq 5$.*

*Sketch of a proof.* Case (1). Suppose sh($H$) does not contain a cycle. In this case, $\dim H =$ 1, and sh($H$) must be a segment with $\sharp(V) = 4, 5$.

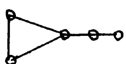
Case (2). Suppose sh($H$) contains a cycle of length 5. In this case there exists no other vertex than those of a cycle of length 5.

Case (3). Suppose sh($H$) contains a cycle of length 4, but none of length 5. In this case there may exist one more vertex at most.

Case (4). Suppose sh($H$) contains a cycle of length 3, but none of length 4 nor 5.

(a) The case that sh($H$) contains  .

In this case there exists no other vertex than these 5 vertices.

(b) The case that sh($H$) does not contain  .

If $H$ have more than five vertices, then each vertex of cycle connects with an end vertex, since $H$ is not of suspension type. But it is impossible since there must exist three independent edges. Q.E.D.

## Reference


[Ba] M. Barile, *On the number of equations defining certain varieties*, manuscripta math. **91**(1996), 483-494.

[Br-He] W. Bruns and J. Herzog," Cohen-Macaulay rings," Cambridge University Press, Cambridge/ New York /Sydney, 1993.

[Ei] D. Eisenbud, "Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry," Springer-Verlag, Berlin/ Hidelberg/ New york / Tokyo , 1995

[Ha] F. Harary, "Graph Theory," Addison Wesley, 1969.

[Ly] G. Lyubeznik, On local cohomology modules $H^i_{\alpha}(R)$ for ideals $\alpha$ generated by monomials in an $R$-sequence, in "Complete Intersection, Acireale 1983 (S. Greco and R. Strano eds.)", Lecture Notes in Mathematics No. 1092, Springer-Verlag, Berlin/ Hidelberg/ New york / Tokyo , 1984 pp.214-220

[Na-Vo] U. Nagel and W. Vogel, *Über Mengentheoretische Durchschnitte Zusammenhang algebraischer Mannigfaltigkeiten in* $\mathbf{P}^n$, Arch. Math. **49**(1987), 414-419.

[Ya] Z. Yan, *On étale analog of the Goresky-MacPherson formula for subspace arrangements,* Journal of Pure and Applied Algebra **146**(2000), 305-318.

# THE ASSOCIATED PRIMES OF TOP LOCAL COHOMOLOGY MODULES

MORDECHAI KATZMAN
THE UNIVERSITY OF SHEFFIELD

## 1. Infinitely many associated primes.

Let $(R, m)$ be a local Noetherian ring, let $I \subset R$ be any ideal and let $M$ be a finitely generated $R$-module.

**Conjecture** (Craig Huneke, 1990): Do the local cohomology modules $H^i_I(M)$ have finitely many associated primes for all $i$?

In this lecture we construct a counter-example to this conjecture.

**The example:** Let $k$ be any field, let $R_0 = k[x, y, s, t]$ and let $S = R_0[u, v]$. Define a grading on $S$ by declaring $\deg(x) = \deg(y) = \deg(s) = \deg(t) = 0$ and $\deg(u) = \deg(v) = 1$. Let

$$f = sx^2v^2 - (t+s)xyuv + ty^2u^2$$

and let $R = S/fS$. Notice that $f$ is homogeneous and hence $R$ is graded. Let $S_+$ be the ideal of $S$ generated by $u$ and $v$ and let $R_+$ be the ideal of $R$ generated by the images of $u$ and $v$.

Consider the local cohomology module $H^2_{R_+}(R)$: it is homogeneously isomorphic to $H^2_{S_+}(S/fS)$. The graded short exact sequence

$$0 \longrightarrow S(-2) \xrightarrow{f} S \longrightarrow S/fS \longrightarrow 0$$

induces the graded exact sequence

$$H^2_{S_+}(S)(-2) \xrightarrow{f} H^2_{S_+}(S) \longrightarrow H^2_{S_+}(S/fS) \longrightarrow 0$$

of graded $R$-modules.

What is $H^2_{S_+}(S)$? Take cohomology of the Čech complex

$$0 \to S \to S_u \oplus S_v \to S_{uv} \to 0$$

Now $H^2_{S_+}(S)$ as the module free $R_0$-module with free generators $u^{-\alpha}v^{-\beta}$. It is graded and the part of degree $-d$ has free basis

$$\left(u^{-\alpha}v^{-\beta}\right)_{\alpha,\beta>0,\ \alpha+\beta=-d}.$$

We study the graded components of $H^2_{S_+}(S/fS)$ by considering the cokernels of the $R_0$-homomorphisms

$$f_{-d} : R_0[u^-, v^-]_{-d-2} \longrightarrow R_0[u^-, v^-]_{-d} \quad (d \geq 2)$$

given by multiplication by $f$. To represent these by matrices, we specify an ordering for each of the bases by declaring that

$$u^{\alpha_1}v^{\beta_1} < u^{\alpha_2}v^{\beta_2}$$

(where $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 < 0$ and $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$) precisely when $\alpha_1 > \alpha_2$.

If we use this ordering for both the source and target of each $f_d$, we can see that each $f_d$ $(d \geq 2)$ is given by multiplication on the left by the tridiagonal $d-1$ by $d+1$ matrix

$$A_{d-1} := \begin{pmatrix} sx^2 & -xy(t+s) & ty^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & sx^2 & -xy(t+s) & ty^2 & 0\dots & 0 \\ 0 & 0 & sx^2 & -xy(t+s) & ty^2\dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & sx^2 & -xy(t+s) & ty^2 \end{pmatrix}.$$

We also define

$$\overline{A}_{d-1} := \begin{pmatrix} s & -(t+s) & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & -(t+s) & t & 0\dots & 0 \\ 0 & 0 & s & -(t+s) & t\dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & s & -(t+s) & t \end{pmatrix}$$

obtained by substituting $x = y = 1$ in $A_{d-1}$.

**Lemma: (i)** Let $B_i$ be the submatrix of $\overline{A}_i$ obtained by deleting its first and last columns. Then

$$\det B_i = \tau_i := (-1)^i(t^i + st^{i-1} + \dots + s^{i-1}t + s^i)$$

for all $i \geq 1$.

**(ii)** The ($k[s,t]$-)irreducible factors of $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$ form an infinite set.

**Theorem:** For every $d \geq 2$ the $R_0$-module $H^2_{R_+}(R)_{-d}$ has $\tau_{d-1}$-torsion. Hence $H^2_{R_+}(R)$ has infinitely many associated primes.

**Proof:** Introduce a bigrading in $R_0$ by declaring $\deg(x) = (1,0)$, $\deg(y) = (1,1)$ and $\deg(t) = \deg(s) = (0,0)$.

We also introduce a bigrading on the free $R_0$-modules $R_0^n$ by declaring $\deg(x^\alpha y^\beta s^a t^b \mathbf{e}_j) = (\alpha+\beta, \beta+j)$ for all non-negative integers $\alpha, \beta, a, b$ and all $1 \leq j \leq n$.

$R_0^n$ is a bigraded $R_0$-module when $R_0$ is equipped with the bigrading mentioned above.

Consider the $R_0$-module $\operatorname{Coker} A_{d-1}$; the columns of $A_{d-1}$ are bihomogeneous of bidegrees

$$(2,1), (2,2), \dots, (2, d+1).$$

We can now consider $\operatorname{Coker} A_{d-1}$ as a $k[s,t]$ module generated by the natural images of $x^\alpha y^\beta \mathbf{e}_j$ for all non-negative integers $\alpha, \beta$ and all $1 \leq j \leq d-1$. The $k[s,t]$-module of relations among these generators is generated by $k[x,y]$-linear combinations of the columns of $A_{d-1}$, and since these columns are bigraded, the $k[s,t]$-module of relations will be bihomogeneous and we can write

$$\operatorname{Coker} A_{d-1} = \bigoplus_{0\leq D,\ 1\leq j} (\operatorname{Coker} A_{d-1})_{(D,j)}\,.$$

Consider the $k[s,t]$-module $(\operatorname{Coker} A_{d-1})_{(d,d)}$. It is generated by the images of

$$xy^{d-1}\mathbf{e}_1, x^2y^{d-2}\mathbf{e}_2, \dots, x^{d-2}y^2\mathbf{e}_{d-2}, x^{d-1}y\mathbf{e}_{d-1}$$

and the relations among these generators are given by $k[s,t]$-linear combinations of

$$y^{d-2}\mathbf{c}_2, xy^{d-3}\mathbf{c}_3, \dots, x^{d-3}y\mathbf{c}_{d-1}, x^{d-2}\mathbf{c}_d$$

where $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{d+1}$ are the columns of $A_{d-1}$. So we have

$$(\operatorname{Coker} A_{d-1})_{(d,d)} = \operatorname{Coker} B_{d-1}$$

where $B_{d-1}$ is viewed as a $k[s,t]$-homomorphism $k[s,t]^{d-1} \to k[s,t]^{d-1}$.

Using the previous Lemma we deduce that for all $d \geq 2$ the direct summand $(\operatorname{Coker} A_{d-1})_{(d,d)}$ of $\operatorname{Coker} A_{d-1}$ has $\tau_{d-1}$ torsion, and so does $\operatorname{Coker} A_{d-1}$ itself.

The second part of the Lemma shows that there exist infinitely many irreducible homogeneous polynomials $\{p_i \in k[s,t] : i \geq 1\}$ each one of them contained in some associated prime of the $R_0$-module $\oplus_{d\geq 2} \operatorname{Coker} A_{d-1}$. Clearly, if $i \neq j$ then any prime ideal $P \subset R_0$ which contains both $p_i$ and $p_j$ must contain both $s$ and $t$.

Since the localisation of $(\operatorname{Coker} A_{d-1})_{(d,d)}$ at $s$ does not vanish, there exist $P_i, P_j \in \operatorname{Ass}_{R_0} \operatorname{Coker} A_{d-1}$ which do not contain $s$ and such that $p_i \subset P_i$, $p_j \subset P_j$, and the previous paragraph shows that $P_j \neq P_j$.

The second statement now follows from the fact that $H^2_{R_+}(R)$ is $R_0$-isomorphic to $\oplus_{d\geq 2} \operatorname{Coker} A_{d-1}$.

**Corollary:** Let $T$ be the localisation of $R$ at the irrelevant maximal ideal $\mathfrak{m} = \langle s,t,x,y,u,v\rangle$. Then $H^2_{(u,v)T}(T)$ has infinitely many associated primes.

**Proof:** Since $\tau_i \in \mathfrak{m}$ for all $i \geq 1$, $H^2_{(u,v)T}(T) \cong (H^2_{(u,v)R}(R))_{\mathfrak{m}}$ has $\tau_i$-torsion for all $i \geq 1$.

## 2. No associated primes.

Let $R_0$ be any domain, let $R = R_0[U_1, \ldots, U_s]/I$, where $U_1, \ldots, U_s$ are indeterminates and $I \subset R_0[U_1, \ldots, U_s]$ is a homogeneous ideal.

$\boxed{\textbf{When is } H^s_{R_+}(R) \textbf{ zero?}}$

**Notation:** $R_0$ an arbitrary commutative Noetherian domain, $U_1, \ldots, U_s$ indeterminates (of degree 1,) $S = R_0[U_1, \ldots, U_s]$, $I \subset S$ an homogeneous ideal, $R = S/I$, $R_+ = \langle U_1, \ldots, U_s\rangle$. For $\lambda \in \mathbb{Z}^s$ we write $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ and $\mathbf{U}^\lambda := U_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot U_s^{\lambda_s}$

**Lemma:** Let $I$ be generated by homogeneous elements $f_1, \ldots, f_r \in S$. Then there is an exact sequence of graded $S$-modules and homogeneous homomorphisms

$$\bigoplus_{i=1}^{r} H^s_{S_+}(S)(-\deg f_i) \xrightarrow{(f_1,\ldots,f_r)} H^s_{S_+}(S) \longrightarrow H^s_{R_+}(R) \longrightarrow 0.$$

**Proof:** The functor $H^s_{S_+}$ is right exact; apply it to the graded short exact sequence

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} S(-\deg f_i) \xrightarrow{(f_1,\ldots,f_r)} S \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

to obtain

$$\bigoplus_{i=1}^{r} H^s_{S_+}(S)(-\deg f_i) \xrightarrow{(f_1,\ldots,f_r)} H^s_{S_+}(S) \longrightarrow H^s_{R_+}(R) \longrightarrow 0.$$

$H^s_{S_+}(S)$ is the (graded) module $R_0[U_1^-, \ldots, U_s^-]$ of inverse polynomials:

For each $d \in \mathcal{D}$, $R_0[U_1^-, \ldots, U_s^-]_{-d}$ is a free $R_0$-module with base $\mathcal{B}(d) := (U^\lambda)_{-\lambda\in\mathbf{N}^s, |\lambda|=-d}$.

$R_0[U_1^-, \ldots, U_s^-]$ vanishes beyond degree $-s$.

We endow $R_0[U_1^-,\dots,U_s^-]$ with the structure of an $S$-module by defining for any $\mathbf{U}^\alpha \in S$, $\mathbf{U}^\beta \in R_0[U_1^-,\dots,U_s^-]$ the product $\mathbf{U}^\alpha\mathbf{U}^\beta \in R_0[U_1^-,\dots,U_s^-]$ to be zero if $\alpha+\beta$ has a non-negative coordinate, and $\mathbf{U}^{\alpha+\beta}$ otherwise.

Assume that $I$ is generated by one homogeneous element $f$ of degree $\delta$. For any $d \in \mathcal{D}$ we have a graded exact sequence

$$R_0[U_1^-,\dots,U_s^-]_{-d-\delta} \xrightarrow{\phi_d} R_0[U_1^-,\dots,U_s^-]_{-d} \longrightarrow H^s_{R_+}(R)_{-d} \longrightarrow 0.$$

The map of free $R_0$-modules $\phi_d$ is given by multiplication on the left by a $\#\mathcal{B}(d) \times \#\mathcal{B}(d+\delta)$ matrix: denote this matrix with $M(f;d)$.

If $I$ is generated by homogeneous elements $f_1,\dots,f_r \in S$, the previous lemma shows that the $R_0$-module $H^s_{R_+}(R)_{-d}$ is the cokernel of a matrix $M(f_1,\dots,f_r;d)$ whose columns consist of all the columns of $M(f_1,d),\dots,M(f_r,d)$.

For any $\lambda,\mu \in \mathbb{Z}^s$ with negative entries we declare that $\mathbf{U}^\lambda < \mathbf{U}^\mu$ if and only if $\mathbf{U}^{-\lambda} <_{\text{Lex}} \mathbf{U}^{-\mu}$ where "$<_{\text{Lex}}$" is the lexicographical term ordering in $S$ with $U_1 > \cdots > U_s$. We order the bases, and by doing so also the columns and rows of $M(f;d)$, in ascending order. Notice that the entry in $M(f;d)$ in the $\mathbf{U}^\alpha$ row and $\mathbf{U}^\beta$ column is the coefficient of $\mathbf{U}^\alpha$ in $f\mathbf{U}^\beta$.

**Lemma:** (multiplication reverses order) Let $\nu \in \mathbb{Z}^s$ have negative entries and let $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{N}^s$. If $\mathbf{U}^{\lambda_1} <_{\text{Lex}} \mathbf{U}^{\lambda_2}$ and $\mathbf{U}^\nu\mathbf{U}^{\lambda_1}$, $\mathbf{U}^\nu\mathbf{U}^{\lambda_2} \in R_0[U_1^-,\dots,U_s^-]$ do not vanish then $\mathbf{U}^\nu\mathbf{U}^{\lambda_1} > \mathbf{U}^\nu\mathbf{U}^{\lambda_2}$.

**Lemma:** Let $f \neq 0$ be a homogeneous element in $S$. For all $d \in \mathcal{D}$, the matrix $M(f;d)$ has maximal rank.

**Proof:** We exhibit a non-zero maximal minor of $M(f;d)$. Write $f = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda U^\lambda$ where $a_\lambda \in R_0 \setminus \{0\}$ for all $\lambda \in \Lambda$. Let $\lambda_0$ be such that $U^{\lambda_0}$ is the minimal member of $\{U^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ with respect to the lexicographical term order in $S$.

Let $\delta$ be the degree of $f$. Each column of $M(f;d)$ corresponds to a monomial $U^\lambda \in \mathcal{B}(d+\delta)$; its $\rho$-th entry is the coefficient of $U^\rho$ in $fU^\lambda \in R_0[U_1^-,\dots,U_s^-]_{-d}$.

Fix any $U^\nu \in \mathcal{B}(d)$ and consider the column $c_\nu$ corresponding to $U^{\nu-\lambda_0} \in \mathcal{B}(d+\delta)$. The $\nu$-th entry of $c_\nu$ is obviously $a_{\lambda_0}$.

By the previous lemma all entries in $c_\nu$ below the $\nu$th row vanish. Consider the square submatrix of $M(f;d)$ whose columns are the $c_\nu$ ($\nu \in \mathcal{B}(d)$); its determinant is clearly a power of $a_{\lambda_0}$ and hence is non-zero.

**Definition:** For any $f = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda U^\lambda \in R_0[U_1,\dots,U_s]$ we define the *content* $\mathrm{c}(f)$ of $f$ to be the ideal $\langle a_\lambda : \lambda \in \Lambda\rangle$ of $R_0$ generated by all the coefficients of $f$.

If $J \subset R_0[U_1,\dots,U_s]$ is an ideal, we define its *content* $\mathrm{c}(J)$ to be the ideal of $R_0$ generated by the contents of all the elements of $J$.

It is easy to see that if $J$ is generated by $f_1,\dots,f_r$, then

$$\mathrm{c}(J) = \mathrm{c}(f_1) + \cdots + \mathrm{c}(f_r).$$

**Lemma:** Suppose that $I$ is generated by homogeneous elements $f_1,\dots,f_r \in S$. Fix any $d \in \mathcal{D}$. Write $t = \operatorname{rank} M(f_1,\dots,f_r;d)$ and let $I_d$ be the ideal generated by all $t \times t$ minors of $M(f_1,\dots,f_r;d)$. Then $\mathrm{c}(I) \subseteq \sqrt{I_d}$.

**Proof:** It is enough to prove the lemma when $r = 1$; let $f = f_1$. Write $f = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda U^\lambda$. Assume that $\mathrm{c}(I) \not\subseteq \sqrt{I_d}$ and pick $\lambda_0$ so that $U^{\lambda_0}$ is the Lex-minimal element in $\{U^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ for which $a_\lambda \notin \sqrt{I_d}$.

Fix any $U^\nu \in \mathcal{B}(d)$ and consider the column $c_\nu$ corresponding to $U^{\nu-\lambda_0} \in \mathcal{B}(d+\delta)$. The $\nu$-th entry of $c_\nu$ is $a_{\lambda_0}$. For any other $\lambda_1 \in \Lambda$ with $U^{\lambda_1} <_{\text{Lex}} U^{\lambda_0}$, either $U^{\nu-\lambda_0+\lambda_1} = 0$ or $U^{\nu-\lambda_0+\lambda_1} > U^{\nu}$. So all the entries below the $\nu$-th row of $c_\nu$ are in $\sqrt{I_d}$.

Consider the matrix $M$ whose columns are $c_\nu$ ($\nu \in \mathcal{B}(d)$) and let $\overline{\phantom{x}} : R_0 \to R_0/\sqrt{I_d}$ denote the quotient map. We have

$$0 = \overline{\det(M)} = \det(\overline{M}) = \overline{a_{\lambda_0}}^t$$

and, therefore, $a_{\lambda_0} \in \sqrt{I_d}$, a contradiction.

**Theorem:** Suppose that $I$ is generated by homogeneous elements $f_1, \dots, f_r \in S$. Fix any $d \in \mathcal{D}$. Then each associated prime of $H^s_{R_+}(R)_{-d}$ contains $\mathrm{c}(I)$. In particular $H^s_{R_+}(R)_{-d} = 0$ if and only if $\mathrm{c}(I) = R_0$.

**Proof:** Let $M = M(f_1, \dots, f_r; d)$, so that $H^s_{R_+}(R)_{-d} \cong \operatorname{Coker} M$.

The ideal $\mathrm{c}(I)$ is contained in the radical of the ideal generated by the maximal minors of $M$; so the localization of $\operatorname{Coker} M$ at any $x \in \mathrm{c}(I)$ is zero and we deduce that $\mathrm{c}(I)$ is contained in all associated primes of $\operatorname{Coker} M$.

If $\mathrm{c}(I)$ is not the unit ideal, the ideal generated by all maximal minors of $M$ is contained in $\mathrm{c}(I)$ and cannot generate the unit ideal, so $\operatorname{Coker} M \neq 0$. If $\mathrm{c}(I) = R_0$ then $\operatorname{Ass} \operatorname{Coker} M = \emptyset$, i.e., $\operatorname{Coker} M = 0$.

**Corollary:** The following statements are equivalent:

1. $\mathrm{c}(I) = R_0$;
2. $H^s_{R_+}(R)_{-d} = 0$ for some $d \in \mathcal{D}$;
3. $H^s_{R_+}(R)_{-d} = 0$ for all $d \in \mathcal{D}$.

**Corollary:** The $R$-module $H^s_{R_+}(R)$ has finitely many minimal associated primes, and these are just the minimal primes of the ideal $\mathrm{c}(I)R + R_+$.

**Proof:** Let $r \in \mathrm{c}(I)$. The localization of $H^s_{R_+}(R)$ at $r$ is zero. Hence each associated prime of $H^s_{R_+}(R)$ contains $\mathrm{c}(I)R$. Such an associated prime must contain $R_+$, since $H^s_{R_+}(R)$ is $R_+$-torsion.

On the other hand, $H^s_{R_+}(R)_{-\Delta} \cong R_0/\mathrm{c}(I)$ and it is killed by $R_+$; therefore there is an element of the $(-\Delta)$-th component of $H^s_{R_+}(R)$ that has annihilator (over $R$) equal to $\mathrm{c}(I)R + R_+$.

**Conjecture:** Every local cohomology module (with respect to any ideal) of a finitely generated module over a local Noetherian ring has only finitely many *minimal* associated primes.

Some further evidence:

**Theorem:** (Gennady Lyubeznik) Let $R$ be any Noetherian ring of prime characteristic $p$ and let $I \subset R$ be any ideal generated by $f_1, \dots, f_s \in R$. The support of $H^s_I(R)$ is Zariski closed.

Department of Pure Mathematics, University of Sheffield, Hicks Building, Sheffield S3 7RH, United Kingdom, *Fax number*: 0044-114-222-3769

*E-mail address*: M.Katzman@sheffield.ac.uk

# 巾零行列の交換子代数と可換アルティン環への応用

張間忠人（四国大学） 渡辺純三（東海大学）

全行列環の中で一つの巾零行列を固定するとき，その交換子代数が決定できる．これは，何処かに書いてあっても良さそうなことなのだが，可換環論の範囲を多少逸脱するためか，これを話題として取り上げている可換環論の教科書はないようだ．本稿では，可換アルティン環論への応用を目標としながら，巾零行列の交換子代数の構造を詳しく調べる．ただし，今回は専ら交換子代数だけを扱い、その応用は、次回の可換環論シンポジウムで紹介する予定だ．

$K$ を任意の体とし, $\mathbf{M}(n)$ で次数 $n$ の $K$ 上の全行列環を表す．次数 $n$ の巾零行列の共役類は，$n$ の 分割 で表すことができる．すなわち，$J \in \mathbf{M}(n)$ を巾零行列とすれば，$M$ を，ジョルダン細胞に分解し，その細胞の次数を $n_1, n_2, \cdots, n_r$ とすれば，当然 $n$ の分割 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ が得られ，逆に，$n$ の分割から，その次数のジョルダン細胞を持つ巾零行列が構成できる．従って，$J$ の共役類 と自然数 $n$ の分割 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ が一対一に対応している．記号 $T = T(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ で $n$ の分割を表す．断らない限り $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r > 0$ とする．また，よく知られているとおり．同じ記号で，ヤング図形をも表す．すなわち, $T = T(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ がヤング図形であると言ったら, $n_i$ は, $T$ の $i$ 番目の行が $n_i$ 個の「箱」からなっていることを示す．また，$T = T(n_1, \cdots, n_r)$ を「数列」$T$ とも言及する．

$J \in \mathbf{M}(n)$ を一つの行列とするとき, $\mathfrak{C}(J)$ で $J$ の交換子代数を表す．すなわち, 集合としては

$$\mathfrak{C}(J) = \{X \in \mathbf{M}(n) | XJ = JX\}$$

である．$\mathfrak{C}(J)$ は 1 を持つ結合的代数である．

必ずしも正方ではない行列 $X = (x_{ij})$ について，「上半三角型 (行列)」と「バンド-コンスタント (行列)」を次の様に定義する．

**定義 1** $m \times n$ 行列 $X = (x_{ij})$ について，

1. $X$ が上半三角型 $\Leftrightarrow x_{ij} = 0$ *for* $j < i + \alpha$ ただし，$\alpha = \mathrm{Min}(0, n-m)$ とする．

2. $X$ がバンド-コンスタント $\Leftrightarrow x_{ij} = x_{i'j'}$ *for* $j' = j + 1$ *and* $i' = i + 1$

次の例は上半三角, かつバンド-コンスタントである．

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$
\begin{pmatrix}
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\
0 & x_0 & x_1 & x_2 \\
0 & 0 & x_0 & x_1 \\
0 & 0 & 0 & x_0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{2}
$$

さて，$J \in \mathrm{M}(n)$を巾零行列のジョルダン標準形とし，その共役類の型を$T = T(n_1, \cdots, n_r)$とすると，$\mathfrak{C}(J)$は次のように表される．

**命題 2** $M = (M_{ij})$を次の通りのブロック分解とする．

$$
M = \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1r} \\
\hline
M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2r} \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
M_{r1} & M_{r2} & \cdots & M_{rr} \\
\hline
\end{array}}_{n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_r}
\begin{array}{l}
\}n_1 \\
\}n_2 \\
\vdots \\
\}n_r
\end{array} \tag{3}
$$

このとき，

$$M \in \mathfrak{C}(J) \Leftrightarrow M \text{の各のブロック } M_{ij} \text{ は上半三角型バンドコンスタント行列}$$

**命題 3** 巾零行列 $J \in \mathrm{M}(n)$ のヤング図形を $T = T(n_1, \cdots, n_r)$ とし，巾零行列 $J' \in \mathrm{M}(n-r)$ の ヤング図形を$T' = T(n_1 - 1, n_2 - 1, \cdots, n_r - 1)$ とする．*($n_i - 1 = 0$ なら、その項は除く．)* このとき，環の全射 $\mathfrak{C}(J) \longrightarrow \mathfrak{C}(J')$が存在し，核の次元は$r$である．

**証明**．$J$と$J'$はジョルダン標準形であると仮定しても良い．特に，$J$の 各のブロックの最初の1列と最後の1行を除くことにより$J'$が得られるから，この意味で，$J'$を$J$の部分行列と見る．$\mathfrak{C}(J)$の各ブロックは，命題2より，上半三角型で，かつ，バンド-コンスタントである．$X \in \mathfrak{C}(n)$ に対して，$X'$ を$X$の各ブロックから最初の1列と最後の1行を除いて得られる部分行列であるとすれば，$X' \in \mathrm{M}(n-r)$ が得られ，同時に，$X' \in \mathfrak{C}(J')$であることがわかる．(このままでは，射影$X \longrightarrow X'$が環の準同型になっていることが見難いかも知れない．これに関しては，命題4を見て欲しい．)

次に，「ジョルダン標準形」を拡張解釈する．サイズ$n$のヤング図形

$$T = T(n_1, n_2, \cdots, n_r)$$

の全ての箱に1から$n$までの番号を振り，行列$M = (a_{ij})$を次のように定義する．

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & j \text{ が } i \text{ の右隣のとき}, \\ 0 & \text{それ以外}. \end{cases} \tag{4}$$

この様にして定義された行列が巾零であり, 異なる番号付けから得られる行列は, 全て共役であることは容易にわかる. 次の左図の様に横方向に番号を付けると, 普通のジョルダン標準形が得られる. 一方, 次の右図の様な縦方向の番号付けから得らる行列を, ここでは, ジョルダン第二標準形と言うことにする. (本来の意味の標準形は, 区別する必要がある場合には, 第一標準形と言うことにする. )

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | | |
| 9 | | | | |

,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 6 | 8 | 9 |
| 2 | 5 | 7 | | |
| 3 | | | | |

(5)

ジョルダン第二標準形を具体的に記述するためには, 分割 $T$ の双対を考える必要が生じる. ヤング図形 $T = T(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ は既に定義したが, 同じヤング図形を $T = \widehat{T}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p)$ とも表す. この意味は $T$ の $j$ 番目の列が $\nu_j$ 個の箱からなっていることを示す. 従って, 二つの分割 $n = \sum n_i$ と $n = \sum \nu_j$ は双対である.

$J$ を巾零行列の第一標準形とし, その共役類の型を

$$T = T(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \widehat{T}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p)$$

とする. このとき, $J$ の第二標準形 (記号で $\widehat{J}$ と書くとことにする) は次の通りである.

$$\widehat{J} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} O & I_1 & O & \cdots & O & O \\ \hline O & O & I_2 & \cdots & O & O \\ \hline O & O & O & \cdots & O & O \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \hline O & O & O & \cdots & O & I_{p-1} \\ \hline O & O & O & \cdots & O & O \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\nu_1 \\ \}\nu_2 \\ \}\nu_3 \\ \vdots \\ \}\nu_{p-1} \\ \}\nu_p \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \underbrace{\quad}_{\nu_1} & \underbrace{\quad}_{\nu_2} & \underbrace{\quad}_{\nu_3} & \cdots & & \underbrace{\quad}_{\nu_p} \end{array} \end{array} \tag{6}$$

ただし, $I_i$ は $\nu_i \times \nu_{i+1}$ の行列で

$$I_i = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} E \\ \hline O \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\nu_{i+1} \\ \}\nu_i - \nu_{i+1} \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{\nu_{i+1}} \end{array} \tag{7}$$

なるものとする．ここに $E$ は 次数 $\nu_{i+1}$ の単位行列, また, $O$ は, 次数 $(\nu_i - \nu_{i+1}) \times \nu_{i+1}$ の零行列である．

$T$ の箱に水平方向に番号を付けたもの (tableau と呼べば良いのだろうが, ここでは本格的には扱わない) を $T_h$ と 書き, 同様に $T_v$ を $T$ に縦方向に番号を付けたものとする．例えば,

$$T_h = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 & 8 \\ \cline{1-3} 9 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \xrightarrow{\pi} \quad T_v = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 5 & 7 \\ \cline{1-3} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

このとき,

$T_h$ における番号 $i$ の箱は $T_v$ では, 番号 $\pi(i)$ を持つ．

と主張することにより, $\pi$ は $n$ 文字集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換 $\pi$ を定義する．この $\pi$ を使えば, $\widehat{J} = P^{-1}JP$ となる. (ただし, $P$ は $\pi$ と同じ置換行列.) 従って, $P^{-1}\mathfrak{C}(J)P = \mathfrak{C}(\widehat{J})$ である．

集合としては, $\mathfrak{C}(J)$ がわかりやすいのだが, 環としての $\mathfrak{C}(J)$ の構造を見るには, $\mathfrak{C}(\widehat{J})$ の方が都合がよい．一般にブロック行列を $M = (x_{ij}^{(kl)})$ と書く. ただし, $x_{ij}^{(kl)}$ は, $(k, l)$ ブロックの $(i, j)$ 成分を表すものとする．このとき, $\widehat{M}$ を次の様に定義する．

$$\widehat{M} = (x_{kl}^{(ij)})$$

(注意: ここでは, 行の分割と列の分割が同じ場合を扱っているわけだが, 上記の写像

$$(x_{ij}^{(kl)}) \mapsto (x_{kl}^{(ij)})$$

は任意のブロック行列に対して意味を持つ．行の分割と列の分割が同じである必要はない．また, 分割が大小の順に並んでいる必要もない．)

$T = T(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \widehat{T}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p)$ とする. $M$ のブロック分割 $M = (x_{ij}^{(kl)}) \in \mathbf{M}(n)$ が $n = \sum_{i=1}^{i=r} n_i$ によるものであれば, $\widehat{M} = (x_{kl}^{(ij)})$ は, $n = \sum_{i=1}^{i=p} \nu_i$ によるブロック分割である．既に言ったことだが, $J$ の交換子代数の結合的代数としての構造を見るためには, $\mathfrak{C}(J)$ よりも $\mathfrak{C}(\widehat{J})$ の方が遙かにわかりやすい．$\mathfrak{C}(J)$ はブロック毎に上半三角型だが, 全体としてみれば, 三角型から最もかけ離れたものだ．一方, $\mathfrak{C}(\widehat{J})$ は, 全体を上半三角型に置こうということになる．その代わりに, 各ブロック毎には, 三角型としての見やすさは犠牲になる．

次の命題では, 上述の通りの記号を使う．$M \in \mathfrak{C}(J)$ とし, 更に, $\widehat{M} \in \mathfrak{C}(\widehat{J})$ とする．それに加えて, $N_1, N_2, \cdots, N_r$ で $\widehat{M}$ の対角ブロックを表す. (念の為に繰り返すと, $M$ は, 行と列を, $T = T(n_1, \cdots, n_r)$ によって分解して, ブロック行列と見なしている．一方, $\widehat{M}$ は行と列を $T = T(\nu_1, \cdots, \nu_p)$ によって分解して, ブロック行列と見ている．

**命題 4** $\widehat{M} \in \mathfrak{C}(\widehat{J})$ について, 次の命題が成り立つ.

$(i)$ 行列 $\widehat{M}$ はブロック上半三角型である. すなわち, $i > j$ であれば, $\widehat{M}$ の $(i,j)$ ブロックは $O$ である.

$(ii)$ $\widehat{J}$ は $T$ のジョルダン第二標準形である.

$(iii)$ $\widehat{J}$ の交換子代数 $\mathfrak{C}(\widehat{J}) \subset \mathbf{M}(n)$ は, 集合として $\{\widehat{M} | M \in \mathfrak{C}(J)\}$ と一致する.

$(iv)$ $T' = T(n_1 - 1, n_2 - 1, \cdots, n_r - 1)$ とする. 0が現れたら, それを無視する. $T'$ の箱の数は $n - r$ である. (自明な場合を除くため $n_1 > 1$ であると仮定する.) ヤング図形 $T'$ の箱に, 番号を水平方向に1から $n - r$ まで番号を付ける. $T'$ を共役類の型とするジョルダン第一標準形を $J'$ とし. $\mathfrak{C}(J') \subset \mathbf{M}(n-r)$ を $J'$ の交換子代数とする. $\widehat{M}$ の最初の $r$ 個の行と, 最初の $r$ 個の列を $\widehat{M}$ から取り去った行列を $\Psi(\widehat{M})$ で表す. このとき $\widehat{M} \mapsto \Psi(\widehat{M})$ によって定義される全射

$$\Psi : \mathfrak{C}(\widehat{J}) \longrightarrow \mathfrak{C}(\widehat{J}')$$

は環準同型である. 同じことを言い換えると. $\widehat{M}$ は適当な $\widehat{M'} \in \mathfrak{C}(J')$ を用いて

$\widehat{M} = \begin{array}{|c|c|} \hline N_1 & * \\ \hline O & \widehat{M'} \\ \hline \end{array}$ と表される. このとき, $\Psi(M) = \widehat{M'}$ である.

$(v)$ $M \in \mathfrak{C}(J)$ について. $\nu_1 = \nu_2$ であれば, $N_1 = N_2$ である.

$(vi)$ $\nu_1 > \nu_2$ であれば, $N_1$ は次のように分解する.

$$N_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{|c|c|} \hline N_2 & G' \\ \hline O & G \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \}r - m_s \\ \}m_s \end{array} \\ \underbrace{\qquad}_{r-m_s}\ \underbrace{\qquad}_{m_s} & \end{array} \tag{8}$$

また, $G$ の各元は $M$ の如何なる元とも独立の値をとり得る.

$(vii)$ $N_1$ は次のように分解する.

$$N_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline G_1 & * & * & * & * \\ \hline O & G_2 & * & * & * \\ \hline O & O & G_3 & * & * \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O & O & O & \cdots & G_s \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \}m_1 \\ \}m_2 \\ \}m_3 \\ \ \vdots \\ \}m_s \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{m_1}\ \underbrace{\quad}_{m_2}\ \underbrace{\quad}_{m_3}\ \cdots\ \underbrace{\quad}_{m_s} & \end{array} \tag{9}$$

**証明**. $(i)$ $j<i$であると仮定する．$x:=x_{kl}^{(ij)}$ を $\widehat{M}$ の $(ij)$ ブロック内の $(kl)$ 成分 であるとする．$x=0$であることを示せば良い．

$M$ と $\widehat{M}$ の関係を考えれば, $x$ は $M$ の $(kl)$ ブロック内の $(ij)$ 成分であることがわかる．ところが, $M\in\mathfrak{C}(J)$ は, ブロック毎に上半三角型だから, $x=0$ である．

$(ii)$ 既にやった．

$(iii)$ $(ii)$ より明らか．

$(iv)$ $(i)$ より任意の $M\in\mathfrak{C}(J)$ に対して, $\widehat{M}$ は次のように分解する．

$$\widehat{M}=\underbrace{\boxed{\begin{array}{c}N_1\\ \hline O\end{array}}}_{r}\underbrace{\boxed{\begin{array}{c}*\\ \hline Z\end{array}}}_{n-r}\begin{array}{l}\}r\\ \}n-r\end{array} \tag{10}$$

($Z$のことを$\Psi(\widehat{M})$ と書いている.) 一方既に見たとおり, 環の全射$\mathfrak{C}(J)\longrightarrow\mathfrak{C}(J')$が存在する．これは, $M\in\mathfrak{C}(J)$ のいくつかの行と列を除いて出来る部分行列へのプロジェクションであった．取り除く行と列の番号が丁度, $T_h$ の第一列の 箱の番号に対応していることに注意すれば, 証明が終わる．

$(v)$ $\nu_1=\nu_2$ であると言うことは, $M$ のいずれのブロックも, 少なくとも2行と2列を持つと言うことだ. だから, $M$のどのブロックも $(2,2)$ 成分を持っている．しかも, すべての $(k,l)$ について $x_{11}^{(kl)}=x_{22}^{(kl)}$ となる．従って , $\widehat{M}$ においては, $(1,1)$ ブロックと $(2,2)$ ブロックは, 同じ行列である．すなわち, $N_1=N_2$ が証明出来た．

$(vi)$ 仮定 $\nu_1>\nu_2$ より $\nu_1-\nu_2=m_s$ であること, および, $f_s=1$であることが従う．よって, $M$は1行1列からなるブロックを $m_s^2$ 個有する．$M$ をジェネリックに書くと, この$m^2$個の成分は, 互いに独立である．これが集まって, $G_s$となる．$N_1$ における, $G_s$の左側にある成分がすべて0 となる理由は, $M$のブロック分解において, 「1行多列」ブロックの第一成分が0であることによる．(ここで言う「多列」とは「2列以上」と言うことだ．)

$(vii)$ これは $(v)$ と $(vi)$ から直ちに従う．(証明終)

上に登場した,

$$G_1,G_2,\cdots,G_s$$

を $N_1$ の対角ブロック, ($N_i$の対角ブロックも同様の意味とする)

$$N_1,N_2,\cdots,N_r$$

を $\widehat{M}$ の粗い対角ブロック,

$$(\mathrm{diag}N_1,\mathrm{diag}N_2,\cdots,\mathrm{diag}N_s)$$

を $\widehat{M}$ の細かい対角ブロックという．

**例 5** $T=T(3,2,2)$ とする．このとき $\mathfrak{C}(J)$ の一般元の形は次の通りである．

$$M=\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} a & a' & a'' & b & b' & c & c' \\ 0 & a & a' & 0 & b & 0 & c \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d & d' & e & e' & f & f' \\ 0 & 0 & d & 0 & e & 0 & f \\ \hline 0 & g & g' & h & h' & i & i' \\ 0 & 0 & g & 0 & h & 0 & i \end{array}\right) \tag{11}$$

行と列の置換により $\widehat{M}$ になる:

$$\widehat{M}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} a & b & c & a' & b' & c' & a'' \\ 0 & e & f & d' & e' & f' & d' \\ 0 & h & i & g & h' & i' & g' \\ \hline 0 & 0 & 0 & a & b & c & d' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & f & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & i & g \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right) \tag{12}$$

$\widehat{M}$ の行と列の分割は $7=3+3+1$ となる．$N_1=N_2=\left(\begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{array}\right)$, $N_3=(a)$ と置く．

また，$G_1=(a), G_2=\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}$ と置く．

$$(N_1, N_2, N_3)$$

が $\widehat{M}$ の粗い対角ブロックであり，

$$(G_1, G_2, G_1, G_2, G_1)$$

が $\widehat{M}$ の細かい対角ブロックである．

前と同様, $T=T(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ をヤング図形とする．数列 $T(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ の単調減少数列で最も細かいものを $f_1,f_2,\cdots,f_s$ と書く．このとき，

$$(n_1,\cdots,n_r)=(\underbrace{f_1,\cdots f_1}_{m_1},\underbrace{f_2,\cdots,f_2}_{m_2},\cdots,\underbrace{f_s,\cdots,f_s}_{m_s}) \tag{13}$$

と書くことが出来る．

**定理 6** $\mathfrak{C}(J) \subset \mathbf{M}(n)$ を $J$ の交換子代数とする．$\rho$ を $\mathfrak{C}(J)$ のジャコブソン-ラディカルとする．このとき，

$$\mathfrak{C}(J)/\rho \cong \mathbf{M}(m_1) \times \mathbf{M}(m_2) \times \cdots \times \mathbf{M}(m_s).$$

**証明** $M \in \mathfrak{C}(J)$ とする．$N_1$ を $\widehat{M}$ の粗い対角ブロックの第一のものとし，$G_1, \cdots, G_s$ を $N_1$ の対角ブロックとする．写像

$$\Phi : \mathfrak{C}(J) \longrightarrow \mathbf{M}(m_1) \times \cdots \times \mathbf{M}(m_s)$$

を $\Phi(M) = (G_1, \cdots, G_s)$ によって定義する．このとき，これが環の準同型であることは明らかだ．しかも， この核が巾零であることも直ぐわかる．よって，この核がジャコブソン-ラディカルである．(証明終)

$V$ をベクトル空間とする．$V$ の基底を固定すれば $\mathrm{End}(V) = \mathbf{M}(n)$ (ただし，$n = \dim V$) と考えられる．上記の 結果を基底を使わないで言い直してみよう．

$J \in \mathrm{End}(V)$ を巾零とし，$\mathfrak{C}(J) = \{X \in \mathrm{End}(V) | XJ = JX\}$ と置き，

$$\nu_i = \dim(\mathrm{im}J^{i-1}/\mathrm{im}J^i), \quad i = 1, 2, \cdots, p.$$

と置く． ただし，$p$ は $\mathrm{im}J^{p-1} \neq 0$ かつ，$\mathrm{im}J^p = 0$ なるものとする．さらに，$T = T(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \widehat{T}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p)$ により，ヤング図形 $T$，および，数列 $n_1, \cdots, n_r$ を定義する．$(f_1, f_2, \cdots, f_s)$ を $(n_1, \cdots, n_r)$ の部分列で最も細かい単調減少列とする．前と同様，

$$(n_1, \cdots, n_r) = (\underbrace{f_1, \cdots f_1}_{m_1}, \underbrace{f_2, \cdots, f_2}_{m_2}, \cdots, \underbrace{f_s, \cdots, f_s}_{m_s}) \tag{14}$$

と書く．

$J$ の巾の核および像は $\mathfrak{C}(J)$-加群であり，従ってその和と共通部分は矢張り $\mathfrak{C}(J)$-加群であることに注意しよう．

今，

$$U_i = (\ker J^{f_i} + \mathrm{im}J)/(\ker J^{f_{i+1}} + \mathrm{im}J)$$

と置く．ただし，$i = 1, 2, \cdots, s$ である．(便宜的に $f_{s+1} = 0$ としておく．) このとき，環の全射

$$\Phi : \mathfrak{C}(J) \longrightarrow \mathrm{End}(U_1) \times \mathrm{End}(U_2) \times \cdots \times \mathrm{End}(U_s)$$

が出来るのだが，$\ker \Phi$ が $\mathfrak{C}(J)$ のジャコブソン-ラディカルである．

このことを見るためには，まず，基底を選び，$J$ を標準形に表すことを考える．

$$\nu_i = \dim(\mathrm{im}J^{i-1}/\mathrm{im}J^i)$$

と置くと, 数列 $\nu_1 \cdots, \nu_p$ が $J$ のジョルダン第二標準形を与え, 数列 $n_1 \cdots, n_r$ が $J$ のジョルダン第一標準形を与えることに注意をしよう. ただし, $p$ は, $J^p = 0$ なる最小数である. ヤング図形 $T$ の箱を $V$ の基底の元と同一視して良い. また, 写像 $J$ は「一つの箱をその右隣の箱に送る」と考えることが出来る. 右隣の箱が無ければ, それは, $J$ の核の元である. 従って, $\mathrm{ker}J$ の基底は $T$ の各行の最後の箱達で張られる. また, 同様の考え方から, $\mathrm{im}J^j$ は左から $(j+1)$ 番目の列およびそれ以降の列に現れる箱達で張られるベクトル空間である. この基底を使って $\mathrm{End}(V) = \mathrm{M}(n)$ と見るとき $M \in \mathfrak{C}(J)$ に対して, $\Phi(\widehat{M})$ が $\widehat{M}$ の 細かい対角ブロックの代表を一つずつ取り出したもの (前の記号で言えば, $\Phi(\widehat{M}) = (G_1, G_2, \cdots, G_s)$) であることがわかる.

**定理 7** 前と同様の記号を使う.

(*i*) $\widehat{M} \in \mathfrak{C}(\widehat{J})$ は, 細かい対角ブロックだけからなるとする. (すなわち, 細かい対角ブロック以外は $O$ であるとする. ) このとき

$$\mathrm{rank}(M+J) = \mathrm{rank}J + \mathrm{rank}G_1^{f_1} + \mathrm{rank}G_2^{f_2} + \cdots + \mathrm{rank}G_s^{f_s}$$

(*ii*) 次は (*i*) の言い換えである. 言うまでもなく同じ条件を付ける.

$$\mathrm{corank}(M+J) = \mathrm{corank}J - (\mathrm{rank}G_1^{f_1} + \mathrm{rank}G_2^{f_2} + \cdots + \mathrm{rank}G_s^{f_s})$$

(*iii*) $\widehat{M} \in \mathfrak{C}(\widehat{J})$ とし, $\widehat{L}$ を $\widehat{M}$ の細かい対角ブロックだけからなる行列とする. ( すなわち,$\widehat{L}$ は $\widehat{M}$ の細かい対角ブロック以外を $O$ としたもの. $L \in \mathfrak{C}(J)$ またはそれと同値の $\widehat{L} \in \mathfrak{C}(\widehat{J})$ であることは直ぐわかる. ) このときほとんど全ての $\lambda \in K$ について $\mathrm{rank}(L+\lambda J) \le \mathrm{rank}(M+\lambda J)$.

**証明**. (*i*) は, 行と列の基本変形で, 階段行列に直すだけだ. (*ii*) は前回 (=第24回) のシンポジウム報告集に書いた, 巾零行列の "Deformation" に関する補題を使う.

一つだけ, 可換アルティン代数への応用を示す. $(A, \mathfrak{m})$ を局所的アルティン $K$-代数とする. $z \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ を任意の元とする. $G = \mathrm{Gr}_{(z)}(A)$ と置く. ただし, $\mathrm{Gr}_{(z)}(A)$ は, 単項イデアル $(z)$ に関する形式環 ("associated from ring") である. このとき,

**定理 8** *1.* Rees number of $(A) \le$ Rees number of $(G)$

*2.* $A$ を標準的な次数つき環とするとき, ある一次式 $z$ について $G$ が弱レフシェツ条件 ( 強レフシェツ条件 ) をみたせば, $A$ も弱レフシェツ条件 ( 強レフシェツ条件 ) をみたす.

*3.* すべての $i = 1, 2, \cdots, s$ につき, $\times z \in \mathrm{End}(U_i)$ が極大階数をとるならば, $A$ は弱レフシェツ条件をみたす. ( ここに, $A$ は標準次数つき $K$-代数とする.)

*4.* $K$ の標数が零なら，上記 *3* は,「弱レフシェッ条件」を「強レフシェッ条件」で置き換えられる．

詳しい証明, より具体的な応用, 一般化, 強レフシェッ条件との関係などは, [1],[2] 等を参考にして欲しい．

## 参考文献


[1] T. Harima, J. Watanabe, *The commutator algebras of a nilpotent matrix and an application to the theory of commutative Artinitan algebra*, To appear

[2] T. Harima, J. Watanabe, *The finite free extension of Artinian $K$-algebra and the Strong Lefschetz property*, 第 24 回可換環論シンポジウム報告集

[3] T. Harima, J. Watanabe, *The finite free extension of Artinian $K$-algebra and the strong Lefschetz property*, To appear in Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova **110**, 2003.

[4] T. Harima and J. Watanabe, *Central modlues of an Artinian Gorenstein algebra*, To appear elsewhere.

# 正規孤立特異点の多重種数と filtered blowing-up
(下からの評価)

泊　昌孝 (Masataka Tomari)
日本大学文理学部・数学科

**Introduction.** $(V,p)$ を標数 0 の代数閉体上の $d(\geq 2)$ 次元正規特異点とし、その特異点解消を $\phi:(\tilde{V},A)\to(V,p)$ とする。このとき、多様体 $\tilde{V}$ (または例外集合 $A$ ) の解析的な不変量を固定した時、局所環 $O_{V,p}$ の代数的不変量がどのような制約を受け、分類されるかということは、私を含め、特異点の可換環論の問題として長く興味が持たれていたと思います。

その解析的不変量のうち、幾何種数 $p_g(V,p)=R^{d-1}\phi_*(O_{\tilde{V}})$ と、そして、$O_{V,p}$ の HIlbert function との関係は、おそらく、その最も基本的なものだと思われます。拙著 [8] では、特に 2 次元特異点については、各種の Hilbert function による $p_g$ の計算公式が ($p_g$ が大きくなる場合も込めた) 楕円型特異点の精密な環論的性質を調べることに有効であることを明らかにしています。が、一方、全く一般には上記の $p_g$-formula の各項の制限に到る結果は得られないことも [8] では発見されています ([10] なども参)。

第 7 回可換環論シンポジウム [9] では、Hilbert function または tangent cone のどのようデータが $p_g$ に関わるだろうかという問題意識から、tangent cone の 局所コホモロジーによる $p_g$ の下から評価に関する結果を得ています。その後、渡辺敬一先生との共同研究で、問題を filtered blowing-up に広げることで、幾何種数についてもう少し一般的な結果が得られています [11]§4。blowing-up を filtered まで拡張する事は、講演のはじめにお話しましたように 1 次元などでも、かなり広い特異点解消に関する状況を考えていることになります。

その後、幾何種数の様々な多重化が高次元特異点を調べるの有効であることが、渡辺公夫氏、石井志保子氏などをはじめとした多くの研究者によって示されました。その流れからも自然に、18 年前に考えていた問題を多重化し更に詳しい環論的な考察が得られないかと、今回この発表に到りました。問題にする多重種数は, 孤立特異点 $(V,p)$ に対して各自然数 $m\geq 1$ について、以下のように定まります：

$\gamma_m(V,p)=\dim\omega_V^{[m]}/\phi_*(\omega_{\tilde{V}}^{[m]})$ (Knöller)

$\delta_m(V,p)=\dim\omega_V^{[m]}/\phi_*(\omega_{\tilde{V}}^{[m]}((m-1)A_{red}))$ (Kimio Watanabe)

$\lambda_m(V,p)=\dim\omega_V^{[m]}/\phi_*(\omega_{\tilde{V}}^{[m]}(mA_{red}))$ (Morales)

ただし、後の 2 つでは、$\phi:(\tilde{V},A)\to(V,p)$ では、$A$ が normal crossing divisor になることを仮定します。これらの不変量に意味などは、石井の教科書 [5] などを参照ください。

以下、局所環 $O_{V,p}$ について環論的な局所環 $O_{V,p}$ は $d$ 次元正規孤立特異点, $F=\{F^k\}$ を [11] の意味での $O_{V,p}$ の ideal による filtration とする。すなわち、特に Rees 環 $\oplus_{k\geq 0}F^kT^k$ が有限生成 $O_{V,p}$-algebra であるとする。また、孤立特異点の改変を

おこなう為に、filtration の topology を定める $F^N$ が $ht(F^N)=d$ となっていると仮定する。以前 [11]§4 では、 associated graded ring　$G$ の Cohen-Macaulay 性を仮定して、特異点の幾何種数 $p_g$ を $G$ の不変量で下から評価し、等号成立の際に filtered blowin-up 後の rationality を論じた。ここでは、$G$ の Gorenstein 性を更に仮定することにより、上で導入した多重種数 $\gamma_m$ (by Knöller), $\delta_m$ (by 渡辺公夫) との関係で次のような結果を得た。

**Theorem 1.** $G$ が Gorenstein であって $a(G)=a$ とする [1]。この時、次の不等式がそれぞれ成立する。

$$\gamma_m(O_{V,p}) \geq \sum_{k=0}^{ma+(m-1)} l(G_k), \quad \delta_m(O_{V,p}) \geq \sum_{k=0}^{ma} l(G_k), \quad \lambda_m(O_{V,p},m) \geq \sum_{k=0}^{ma-1} l(G_k).$$

等号成立に関して、$\gamma_m, \delta_m$ についてそれぞれ次が成立する。

**Theorem 2.** Theorem 1 の条件下さらに $a=a(G)\geq 1$ とする。この時、次の 5 条件は互いに同値である。

(1) $\delta_m(O_{V,p}) = \sum_{k=0}^{ma} l(G_k)$ for all $m\geq 1$。

(2) $\lambda_m(O_{V,p}) = \sum_{k=0}^{ma-1} l(G_k)$ for all $m\geq 1$。

(3) $\lim_{m\to\infty} \frac{\delta_m(O_{V,p})}{m^d} = \frac{a^d}{d!} \lim_{\lambda\to 1}(1-\lambda)^d P(G,\lambda)$.

(4) $\lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_m(O_{V,p})}{m^d} = \frac{a^d}{d!} \lim_{\lambda\to 1}(1-\lambda)^d P(G,\lambda)$.

(5) $F$ による filtered blowing-up $\psi : X \to \mathrm{Spec}(O_{V,p})$ が特異点解消の log canonical model を与える。すなわち、$X$ は正規であり $E=\mathrm{Proj}(G)$ は reduced で、$X$ は $K_X+E$ に対して log canonical であり、さらに $K_X+E$ は $\psi$-relative ample である。

**Theorem 3.** 定理 1 の条件下さらに $a=a(G)\geq 0$ とする。この時、次の 3 条件は互いに同値である。

(1) $\gamma_m(O_{V,p}) = \sum_{k=0}^{ma+m-1} l(G_k)$ for all $m\geq 1$。

(2) $\lim_{m\to\infty} \frac{\gamma_m(O_{V,p})}{m^d} = \frac{(a+1)^d}{d!} \lim_{\lambda\to 1}(1-\lambda)^d P(G,\lambda)$

(3) $F$ による filtered blowing-up $\psi : X \to \mathrm{Spec}(O_{V,p})$ が特異点解消の canonical model を与える。すなわち、$X$ は標準特異点のみを持ちさらに $K_X$ は $\psi$-relative ample である。

**Remark.** [3,4] で石井は hypersurface case に minimal embedding の座標系の weight から定まる filtration について、我々テーマと関連する興味ある結果をいろいろ得ている。

**Key points.** 定理 1 では、resolution $\tau : \tilde{X} \to X$ に対して normal とは限らない $X$ じょうで、"$K_X+E$ " に相等する sheaf を $\tilde{X}$ からの sheaf と比較する事に注意を要する。定理 2,3 の (2) → (1) では、「泉の定理」[6] を用いた [12] の議論を使いやすくした石井の補題 [2] を用いる。(泉-泊-渡辺 (公)-石井の lemma) ここらへんは、

「2つの filtration に関する重複度が一致したとき、filtration が一致してしまう」という型の主張をみちびくひとつの典型である。可換環論的にはどのような議論が考えられるかという提言も込めて紹介したいと思う。

この報告集では、Theorem 1, 2 の証明を行う。　Theorem 3 の証明は、Theorem 2 と大きな流れでは変わらないのでページ数の関係もあり、省略する。

## §1. Proof of Theorem 1: $\delta_m, \gamma_m, \lambda_m$.

3つの主張はほぼ同時に証明される。ここでの、状況と記号は [11] とだいたい同じなので、参照してほしい。

$\psi : X = \mathrm{Proj}(\mathcal{R}) \to V = \mathrm{Spec}(O_{V,p})$ : the filtered blowing-up with $E = \mathrm{Proj}(G)$ であって、$\tau : (\tilde{X}, A) \to (X, E)$ は a resolution of singularity であって、$\psi\tau : \tilde{X} \to W$ が good resoliution すなわち、例外集合が simple normal crossing になるものとする。

**Claim 1.** $\tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}} + A)) \subset O_X(a(G))$ as $O_X$-modules.

証明. $O_X(n) = \tilde{\mathcal{R}(n)}$ は $(S_2)$ 条件を満たすので、上の主張は、$X$ の codimension 2 の closed scheme を除いた部分で証明すればよい。

とくに、$\tau : \tilde{X} \to X$ は（上のような codimension 2 の集合を除いて）normalization であると仮定してよい。

$\tau_*(O_{\tilde{X}}(m(K_{\tilde{X}} + A)))$ $O_X(ma)$ などは、locally constant sheaf $K(X) = K(\tilde{X})$ 内の subsheaf としての包含関係である。

$G$ が Gorenstein だから、$\omega_{O_{V,p}} \cong O_{V,p}$ の同一視のもとで、by [11] Theorem(3.5)(1)

$$\omega_X \cong O_X(a(G) + 1)$$

および

$$\omega_{\tilde{X}} \cong O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}})$$

である。

canonical sheaf 同士の natural trace morphism の関係として、

$$\tau_*(\omega_{\tilde{X}}) \subset \omega_X$$

なので、$K(X)$ の subsheaves として、

$$\tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}})) \subset O_X(a(G) + 1)$$

である。scheme theoretic sense で $\mathcal{I}_E = O_X(1) \subset O_X$ だが、$\mathcal{I}_E O_{\tilde{X}} \subset O_{\tilde{X}}(-A)$ ( $A$ は reduced struct ure で考えている。) なので、

$$O_X(1) \subset \tau_*(O_X(1) O_{\tilde{X}}) = \tau_*(\mathcal{I}_E O_{\tilde{X}}) \subset \tau_*(O_{\tilde{X}}(-A))$$

である。さて、まず自明な関係

$$\tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}}+A)) = \tau_*(Hom_{\tilde{X}}(O_{\tilde{X}}(-A), O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}}))$$

である。つぎに、$O_{\tilde{X}}(-A)$ および $O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}})$ は、normalization $\tau : \tilde{X} \to X$ について、$X$ の各点の近傍についてみると各々ひとつの global section で生成されている (principal $\tau_*(O_{\tilde{X}})$-module) ので次が成立する。

$$\tau_*(Hom_{\tilde{X}}(O_{\tilde{X}}(-A), O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}})) = Hom_X(\tau_*(O_{\tilde{X}}(-A), \tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}})))$$

自明な関係

$$Hom_X(\tau_*(O_{\tilde{X}}(-A), \tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}}))) \subset Hom_X(O_X(1), O_X(a(G)+1))$$

とあわせて、

$$\tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}}+A)) \subset Hom_X(O_X(1), O_X(a(G)+1))$$

が得られた。ここで、自然な map

$$\mu : O_X(a(G)) \to Hom_X(O_X(1), O_X(a(G)+1))$$

がある。以下、$O_X(a(G)+1) \cong \omega_X$ であることと Cohen-Macaulay 性を用いて $\mu$ が isomorphism であることを証明する。

基本的な完全列、

$$0 \to O_X(1) \to O_X \to O_E \to 0$$

に $Hom_X(-, \omega_X) \cong Hom_X(-, O_X(a(G)+1))$ を施して、

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & Hom_X(O_X, \omega_X) & \to & Hom_X(O_X(1), \omega_X) & \to & Ext^1_X(O_E, \omega_X) & \to & 0 \\
 & & \uparrow\cong & & \uparrow\mu & & \uparrow\eta & & \\
0 & \to & O_X(a(G)+1) & \to & O_X(a(G)) & \to & O_E(a(G)) & \to & 0
\end{array}$$

である。duality の一般論から

$$D_E = RHom_X(O_E, D_X)$$

であるが、$E$, $X$ は Cohen-Macaulay scheme なので、

$$\omega_E \cong Ext^1_X(O_E, \omega_X)$$

である。上記の $\uparrow\eta$ は同型写像である。5-lemma より、$\uparrow\mu$ も同型写像である。

以上をあわせて

$$\tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}}+A)) \subset O_X(a(G))$$

が得られた。

**Claim 2.** 整数 $m \geq s \geq 0$ について、$\tau_*(O_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + sA)) \subset O_X(ma(G) + (m-s))$ as $O_X$-modules.

証明：我々はすでに、$\tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}} + A)) \subset O_X(a(G))$ および、$\tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}})) \subset O_X(a(G)+1)$ as $O_X$-modules. を得ている。Claim 1 の証明の冒頭に述べた注意を思い出そう。

$O_X(n) = \tilde{\mathcal{R}(n)}$ は $(S_2)$ 条件を満たすので、上の主張は、$X$ の codimension 2 の closed scheme を除いた部分で証明すればよい。とくに、$\tau : \tilde{X} \to X$ は（上のような codimension 2 の集合を除いて）normalization であると仮定してよい。

また、$O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}})$ および $O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}} + A)$ は、normalization $\tau : \tilde{X} \to X$ について、$X$ の各点の近傍についてみると各々ひとつの global section で生成されている (principal $\tau_*(O_{\tilde{X}})$-module) ので、$K(X)$ の subsheaves として次が成立する。

$$\tau_*(O_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + sA)) = \tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}} + A)) \text{ の } s \text{ 個の積} \cdot \tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}})) \text{ の } (a-s) \text{ 個の積}$$

さらに、右辺は、$O_X(a(G))$ の $s$ 個の積 $\cdot$ $O_X(a(G)+1)$ の $(a-s)$ 個の積 に含まれる。一般に、$O_X(n) \cdot O_X(m) \subset O_X(n+m)$ なので、主張がしたがう。

**Claim 3.** 整数 $m \geq s \geq 0$ について、

$$\dim \omega_{O_{V,p}}^{[m]} / \phi_*(O_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + sA)) \geq \dim \omega_{O_{V,p}}^{[m]} / \psi_*(O_X(ma(G) + (m-s)))$$

ただし、$\phi : \tilde{X} \to W$ は $\phi = \psi\tau$ で得られる good resolutio n である。

証明。Claim 2 より明らか。

上記、Claim 3 の左辺の数は、$s = 0, m-1, m$ の時は、good resolution のとり方によらずに決まる量である。(その他の $s$ の時は、どのような事になっているかは知らない。)

ここまで来ると、最初に述べた Theorem 1 まで後ひと息。

**Claim 4.** ($G$ は Gorenstein とは限らない場合も) $H^0_{G_+}(G) = 0$ かつ $H^1_{G_+}(G) = 0$ ならば、$F^k = \psi_*(O_X(k))$ for any $k$ である。

証明:勿論これは、[11] に書かれている。(念の為に少しだけ思い出すと) $H^1_{G_+}(G) = 0$ ならは、 $R^1\psi_*(O_X(k)) \to H^2_m(O_{V,p})$ は injective for any $k \in \mathbf{Z}$. よって、$\psi_*(O_X(k))/\psi_*(O_X(k+1)) \cong H^0(O_E(k))$ for any $k \in \mathbf{Z}$. また、$H^0_{G_+}(G) = 0$ かつ $H^1_{G_+}(G) = 0$ ならば、$G = \oplus_{k\in\mathbf{Z}} H^0(O_E(k))$ より、$F^k = \psi_*(O_X(k))$ for any $k$ である。

結論：以上の 4 つの Claim をまとめると。

$G$ が Gorenstein ならば、

$$\gamma_m(O_{V,p}, m) \geq \sum_{k=0}^{ma+(m-1)} l(G_k)$$

$$\delta_m(O_{V,p}, m) \geq \sum_{k=0}^{ma} l(G_k)$$

$$\lambda_m(O_{V,p}, m) \geq \sum_{k=0}^{ma-1} l(G_k)$$

である。

## §2. 等号成立の特徴づけ: Theorem 2 の証明

Introduction の Theorem 2,3 はいくつかの命題を組み合わせて証明しよう。まず、$\lambda_m$ に対する等号条件として次をえる。これは、Theorem 2 の (2) → (5) に対応する。

**Theorem (2.1).** Let $(O_{V,p}, m)$: Gorenstein isolated singularity, $\{F^k\}$: a filtration such that $G$ is a Gorenstein ring with $a(G) \geq 1$. Suppose the equalities

$$\lambda_m(O_{V,p}, m) = \sum_{k=0}^{ma-1} l(G_k)$$

hold for all $m \geq 1$. Then $X$ is normal, $E = \mathrm{Proj}(G)$ is reduced, $X$ is log canonical with respect to $K_X + E$ and $K_X + E$ is relative ample with respect to the filtered blowing-up by $F$.

証明：すでに得られている不等式は、包含関係 (Claim 2)

$$\tau_*(O_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + mA)) \subset O_X(ma(G))$$

for $m \geq 1$ から自然に導かれる関係

$$\lambda_m(O_{V,p}) = \dim \omega^{[m]}_{O_{V,p}} / \phi_*(O_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + mA))$$

$$\geq \dim \omega^{[m]}_{O_{V,p}} / \psi_*(O_X(ma(G)))) = \sum_{k=0}^{ma-1} l(G_k)$$

for $m \geq 1$. という形で得られていた。ただし、$\phi : \tilde{X} \to W$ は $\phi = \psi\tau$ で得られる good resolutio n である。

等号成立 for $m \geq 1$ は、

$$\psi_*(\tau_*(O_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + mA)))) = \psi_*(O_X(ma(G))))$$

for $m \geq 1$ と同値である。今、$N \geq 1$ を、[11] にあるような filtration の topology を定める整数とする: $F^{kN} = (F^N)^k$ for $k \geq 1$ が成立すると仮定する。$O_X(N) = F^N O_X$ は locally principal $O_X$-ideal であり、the filtered blowing-up $\psi : X \to W$ に対して relative ample になる。整数 $k \geq 0$ を固定する。$m = N\ell + k$ なる $m$ に対して、

$$O_X(ma(G))) = O_X(ka(G) + Na(G)\ell) = O_X(N)^{\otimes a(G)\ell} O_X(ka(G))$$

である。ampleness により、適当な $L \geq 1$ があって、$\ell \geq L$ に対して、$O_X((N\ell + k)a(G))$ は $\psi$ に対して global section で生成される。(ここで、$a(G) \geq 1$ を使っている。) 次の commutative diagram に着目しよう。

$$\begin{array}{ccc} \psi_*(\tau_*(O_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + mA))))O_X & \to & \tau_*(O_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + mA) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\nu \\ \xi : \psi_*(O_X(ma(G))))O_X & \to & O_X(ma(G)) \end{array}$$

$m = N\ell + k$ with $\ell \geq L$ の時、$\xi$ がsurjective なので $\nu$ も surjective 特に isomorphism である。このような $m = N\ell + k$ に対して

$$\tau_*(O_{\tilde{X}}(k(K_{\tilde{X}} + A) + N\ell(K_{\tilde{X}} + A))) = (F^N)^{a(G)\ell} O_X(ka(G))$$

である。$\tau_*(N(K_{\tilde{X}} + A))) \subset O_X(Na(G)) = F^{a(G)N} O_X$ に気を付けて、ideal sheaf $J \subset O_X$ を

$$J = \tau_*(N(K_{\tilde{X}} + A)))(F^{a(G)N})^{-1} \subset O_X$$

とおく。$X$ の codimension 2 の点をのぞき $\tilde{X} \to X$ は normalization であると仮定できる。この上で、(不等式の証明でも示したように)

$$\begin{aligned} &\tau_*(O_{\tilde{X}}(k(K_{\tilde{X}} + A) + N\ell(K_{\tilde{X}} + A))) \\ &\qquad = \tau_*(O_{\tilde{X}}(k(K_{\tilde{X}} + A)) \cdot \tau_*(O_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}} + A)) \text{ の } N\ell \text{個の積} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} O_X(ka(G)) &= \tau_*(O_{\tilde{X}}(k(K_{\tilde{X}} + A) + N\ell(K_{\tilde{X}} + A)))(F^{a(G)N\ell})^{-1} \\ &= \tau_*(O_{\tilde{X}}(k(K_{\tilde{X}} + A)))J^\ell \subset \tau_*(O_{\tilde{X}}(k(K_{\tilde{X}} + A))) \end{aligned}$$

である。よって、$X$ の codimension 2 の点をのぞいて、$O_X(ka(G)) = \tau_*(O_{\tilde{X}}(k(K_{\tilde{X}} + A)))$ である。$k = 0$ の場合に適用すると、$X$ は codimension 2 の集合を除いて normal である事がわかる。また、$X$ は Cohen-Macaulay なので、$X$ は normal である。

$X$ の正規性より、あらためて、上で示した等号は次をみちびく。

$$(\tau_*(O_{\tilde{X}}(k(K_{\tilde{X}} + A))))^{**} = O_X(k(K_X + \tau(A))) = O_X(ka(G))$$

が $X$ 上で成立する for all $k \geq 0$。

$O_X(1) = O_X(-E)$ であり、

$$O_X(a(G)) = Hom_X(O_X(1), O_X(a(G)+1)) = \\ Hom_X(O_X(-E), \omega_X) = O_X(K_X + E)$$

より、$k=1$ の場合の等号より

$$O_X(K_X + \tau(A)) = O_X(K_X + E)$$

が従い、$E = \tau(A)$ となり、$E$ は reduced である。

$$O_X(N(K_X + E)) = O_X(Na(G)) = O_X(N)^{\otimes a(G)}$$

であり、右辺は $\psi$ に対して、relative ample な invertible sheaf である。$K_X + E$ が $Q$-Cartier であることも証明できた。残りの主張は、$K_X + E$ に対して $X$ が log canonical である事を証明する事である。

$\ell \geq L$ に対して

$$\tau_*(O_{\tilde{X}}(N\ell(K_{\tilde{X}} + A))) = O_X(N\ell a(G)) = O_X(\ell N(K_X + E)))$$

である。よって

$$O_X(\ell N(K_X + E)))O_{\tilde{X}} \subset O_{\tilde{X}}(N\ell(K_{\tilde{X}} + A))$$

であり、log canonical が示された。

Theorem (2.1) の証明終わり

(2.2) この逆の命題、すなわち Theorem 2 の (5) → (2) は、§1 の議論などより自然にしたがう。また、Theorem 2 の (5) → (1) も同様である。

Theorem 2 の残りの主張を見るために、次の関係に注意しよう。

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\delta_m(O_{V,p}, m)}{m^d} = \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_m(O_{V,p}, m)}{m^d}$$

および

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^d} \sum_{k=0}^{ma} l(G_k) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^d} \sum_{k=0}^{ma-1} l(G_k)$$

前者は石井の論文 [2] からわかります。また後者は環論の標準的な議論より従う。

さらに、$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^d} \sum_{k=0}^{ma} l(G_k) = \frac{a^d}{d!} \lim_{\lambda\to 1}(1-\lambda)^d P(G, \lambda)$ もわかるので、(3) ↔ (4) はは始めから分かっているものと見てもよい。(1) → (3), (2) → (4) は明らかです。

実質的に残っている部分は、(3) → (1) または (4) → (2) で、どちらかを示せば、全部が同値になります

(2.3) 以下は、(4) → (2) の証明：いわゆる、“「泉の定理」を用いた泊-渡辺（公）の論法” の石井による応用の典型的な議論です。

対偶を示します。

ある $m_0$ について、$\lambda_{m_0} > \sum_{k=0}^{ma-1} l(G_k)$ であったとする。すると包含関係

$$\phi_*(O_{\tilde{X}}(m_0(K_{\tilde{X}}+A)) \subset \psi_*(O_X(m_0a(G)))$$

は等号が成立しない。$\omega \in \psi_*(O_X(m_0a(G))) - \phi_*(O_{\tilde{X}}(m_0(K_{\tilde{X}}+A))$ とすると、$\omega \notin O_{\tilde{X}}(m_0(K_{\tilde{X}}+A)$ より、

$$div_{\tilde{X}}(\omega) + (m_0(K_{\tilde{X}}+A)$$

は not effective な $\tilde{X}$ 上の divisor である。map $\theta_m : O_{V,p} \to \psi_*(O_X(m \cdot m_0a(G))$ を $\theta_m(g) = g \cdot \omega^m$ と定め、ideal $\mathcal{I}^{(m)} \subset O_{V,p}$ を

$$\mathcal{I}^{(m)} = \theta_m^{-1}(\phi_*(O_{\tilde{X}}(m \cdot (m_0(K_{\tilde{X}}+A)))$$

とする。ここで、

$$\mathcal{I}^{(m)} = \phi_*(O_{\tilde{X}}(m(div_{\tilde{X}}(\omega) + m_0(K_{\tilde{X}}+A)))$$

であることが容易にわかる。そして

$$l(O_{V,p}/\mathcal{I}^{(m)}) \leq l\left(\frac{\psi_*(O_X(m \cdot m_0a(G))}{(\phi_*(O_{\tilde{X}}(m \cdot m_0(K_{\tilde{X}}+A))}\right) = \lambda_{m \cdot m_0}(O_{V,p}) - \sum_{k=0}^{mm_0a-1} l(G_k)$$

である。左辺を下から評価したい。

S. Ishii [2] の Lemma (1.5) (Tomari-Watanabe による、という記述がある) を思い出そう。

**Lemma. [2, (1.5)]** Assume that $\phi : \tilde{X} \to \mathrm{Spec}(O_{V,p})$ ( with the exceptional set $\cup_{i=1}^s A_i$) factors through the blowing up by the maximal ideal. Then there exist positive numbers $\beta \in \mathbf{R}$ and $b \in \mathbf{N}$ as follows:

For an $O_{V,p}$-ideal $\mathcal{I} = \phi_*(-\sum_{i=1}^s a_iA_i)$ with $a_i > b$ for some $i$, the inequalities $\dim O_{V,p}/\mathcal{I} \geq \beta(a_i)^n$ hold for $i = 1, 2, \ldots s$.

(因子の但一箇所についての仮定 $a_i > b$ より、全体の様子が出てしまうというのが、本質（泉の定理）。すぐ下で見るように、$\mathcal{I}^{(m)} = \phi_*(-m\sum_{i=1}^s a_iA_i)$ とい形の ideal の列の発散挙動について応用するには、$a_i > b$ より荒く、単に、$a_i > 0$ for some $i$ で十分に使える。)

さて、われわれの $\mathcal{I}^{(m)}$ については、$div_{\tilde{X}}(\omega) + m_0(K_{\tilde{X}}+A)$ が not effective divisor であるということより、この lemma を用いて、

$$\limsup \frac{l(O_{V,p}/\mathcal{I}^{(m)})}{m^d} > 0$$

が従う。よって、

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\lambda_m(O_{V,p},m)}{m^d} > \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^d}\sum_{k=0}^{ma-1} l(G_k)$$

となる。

(4) → (2) の証明終わり。

## References


1. Goto, S., Watanabe, K.-i.: On graded rings, I. J. Math. Soc. Japan.**30**,179-213 (1978)
2. S. Ishii: The asymptotic behavior of pluri-genera for a normal isolated singularity, Math. Ann. **286**,(1990)803-812.
3. S. Ishii: The canonical modifications by weighted blow-ups., J. Alg. Geometry **5** (1996) 783-799.
4. S. Ishii: Minimal, canonical and log-canonical models of hypersurface singularities. Contemp. Math. **207** (1997)63-77.
5. 石井志保子: 特異点入門、シュプリンガーフェアラーク東京 (1997)
6. S. Izumi: A measure of integrity for local analytic algebras. Publ. RIMS. Kyoto Univ. **21** (1985), 719-735.
7. M. Morales: Resolution of quasi-homogeneous singularities and plurigeneras, Compositio Math. **64**(1987),311-327
8. M. Tomari: A $p_g$-formula and elliptic singularities. (Thesis for the doctor degree 1985, Kyoto University ) Publ. RIMS. Kyoto Univ. **21**,no2, (1985) 297-354
9. 泊　昌孝：２次元正規特異点の幾何種数の下限について第７回可換環論シンポジウム報告集 (1985),126-144.
10. 泊　昌孝: ２次元正規特異点についてのひとつのサーベイ．研究集会「退化，被覆，特異点の代数幾何とトポロジー」報告集 (1996),144-165.
11. Tomari, M., Watanabe, Kei-ichi: Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with “star-shaped ” resolution. Publ. Res.Inst.Math.Sci. Kyoto Univ.**25**-5,681-740 (1989)
12. M. Tomari., Kimio Watanabe: On $L^2$-plurigenera of not-log-canonical Gorenstein isolated singularities. Proc. AMS **109** (1990) 931-935



M. Tomari: Department of Mathematics, College of Humanities and Sciences,

Nihon University, Setagaya, Tokyo, 156-8550, Japan,

e-mail:tomari@math.chs.nihon-u.ac.jp

# Recent Deveropments on Hilbert-Kunz multiplicities

Kei-ichi Watanabe (Nihon University)
and
Ken-ichi Yoshida (Nagoya University)

## 1. Background

Throughout this talk, let $A$ be a commutative Noetherian ring containing an infinite field of characteristic $p > 0$. Also, we assume that $A$ is excellent and is a homomorphic image of a Gorenstein ring of finite Krull dimension.

In [Ku1], Kunz proved that a local ring $A$ is regular if and only if $l_A(A/\mathfrak{m}^{[q]}) = q^d$ for any $q = p^n, n \geq 1$, where $I^{[q]} = (a^q \mid a \in I)$. Based on the idea of Kunz, Monsky proved that there exists a constant $c = c(A)$ such that $l_A(A/\mathfrak{m}^{[q]}) = cq^d + O(q^{d-1})$. In particular, we can define the following notion.

**Definition 1.1** (Kunz [Ku1, Ku2], Monsky [Mo1]). Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be a local ring of characteristic $p > 0$, and $I$ an $\mathfrak{m}$-primary ideal of $A$. Then **the Hilbert-Kunz multiplicity** $e_{\mathrm{HK}}(I)$ of $I$ is defined as follows:

$$e_{\mathrm{HK}}(I) = \lim_{q \to \infty} \frac{l_A(A/I^{[q]})}{q^d}.$$

By definition, we put $e_{\mathrm{HK}}(A) = e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{m})$.

In 1990's, Han and Monsky [HM] have given an algorism to compute the Hilbert-Kunz multiplicity for any hypersurface of Briskorn–Fermat type $k[[X_0, \ldots, X_d]]/(X_0^{e_0} + \cdots + X_d^{e_d})$. Also, Hochster and Huneke [HH1] have given "Length criterion for tight closure", which means that for any pair of ideals $I \subseteq J$, $I^* = J^*$ if and only if $e_{\mathrm{HK}}(I) = e_{\mathrm{HK}}(J)$, and indicated the close relationship between the tight closure and the Hilbert-Kunz multiplicity.

As a starting point of our study on Hilbert-Kunz multiplicities from the viewpoint of commutative algebra, we have proved a theorem which gives a characterization of regular local rings in terms of Hilbert-Kunz multiplicity:

**Theorem 1.2** ([WY1]). *Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be an unmixed local ring of positive characteristic. Then $A$ is regular if and only if $e_{\mathrm{HK}}(A) = 1$.*

Many researchers have given several theorems as improved versions of this theorem. For example, Blickle and Enescu recently proved the following theorem:

**Theorem 1.3** (Blickle–Enescu [BE]). *Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be an unmixed local ring of characteristic $p > 0$. Then the following statements hold:*

(1) *If $A$ is not F-rational, then $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq 1 + \frac{1}{d!}$.*
(2) *If $A$ is not regular, then $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq 1 + \frac{1}{p^d d!}$.*

It is natural to pose the following conjecture (after Huneke etc.).

**Conjecture 1.4.** *If $(A, \mathfrak{m}, k)$ is a non-regular unmixed local ring, then $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq 1 + \dfrac{1}{d!}$.*

The main purpose of this talk is to introduce some partial results to the following problem.

**Problem 1.5.** Let $d \geq 2$ be any integer. Determine the lower bound of Hilbert-Kunz multiplicities for $d$-dimensional non-regular unmixed local rings of characteristic $p$ (with multiplicity $e$). Also, characterize the local rings $A$ for which $e_{\mathrm{HK}}(A)$ is equal to the lower bound.

## 2. Main results and conjecture

Now consider the above problem. In case of 1-dimensional local rings, it is easy to answer to the problem. Indeed, $e_{\mathrm{HK}}(A) = e(A)$ is always an integer in this case.

In case of 2-dimensional local rings, a complete answer to the problem has been already given. Namely, we have

**Theorem 2.1** (cf. [WY2, Section 2]). *Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be a 2-dimensional unmixed local ring of positive characteristic. Put $e = e(A)$, the multiplicity of $A$. Then the following statements hold:*

(1) $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq \frac{e+1}{2}$.

(2) *Suppose that $k = \overline{k}$. Then $e_{\mathrm{HK}}(A) = \frac{e+1}{2}$ holds if and only if the associated graded ring $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ is isomorphic to the Veronese subring $k[X,Y]^{(e)}$.*

*In particular, if $A$ is not regular, then $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq \frac{3}{2}$. Also, suppose that $k = \overline{k}$ and* $\mathrm{char}\, k \neq 2$. *Then the equality holds if and only if $\widehat{A} \cong k[[X_0, X_1, X_2]]/(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2)$.*

The following theorem is the main result in this talk.

**Theorem 2.2** (cf. [WY4]). *Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be a 3-dimensional unmixed local ring of characteristic $p > 0$. Then the following statements hold:*

(1) *If $A$ is not regular, then $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq \frac{4}{3}$.*

(2) *Suppose that $k = \overline{k}$ and $p \neq 2$. Then the following conditions are equivalent:*

 (a) $e_{\mathrm{HK}}(A) = \frac{4}{3}$.

 (b) $\widehat{A} \cong k[[X_0, X_1, X_2, X_3]]/(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$.

 (c) $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \cong k[X_0, X_1, X_2, X_3]/(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$.

Now we put $A_{p,d} := \overline{\mathbb{F}_p}[[X_0, X_1, \ldots, X_d]]/(X_0^2 + \cdots + X_d^2)$ for any integer $d \geq 1$ and any prime number $p \neq 2$. Then it is known that

$$e_{\mathrm{HK}}(k[[X_0, \ldots, X_4]]/(X_0^2 + \cdots + X_4^2)) = \frac{29p^2 + 15}{24p^2 + 12}; \quad \text{see e.g. [BC, BCP, HM].}$$

Using a similar method as in the proof of the above theorem, we can prove the following theorem:

**Theorem 2.3** (cf. [WY4]). *Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be a 4-dimensional unmixed local ring of characteristic $p > 0$. Also, suppose that $k = \overline{k}$ and $p \neq 2$. Then*

(1) $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq \frac{5}{4}$ *if* $e(A) \geq 3$.

(2) *If $A$ is not regular, then $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq \frac{29p^2+15}{24p^2+12}$.*

(3) *The following conditions are equivalent:*

 (a) *Equality holds in* (2).

 (b) $e_{\mathrm{HK}}(A) < \frac{5}{4}$.

 (c) *$\widehat{A}$ is isomorphic to $A_{p,4}$.*

For $e_{\mathrm{HK}}(A_{p,d})$, Monsky proved the following surprising theorem.

**Theorem 2.4** (Monsky [Mo2]). *Under the above notation, we have*

$$\lim_{p\to\infty} e_{\mathrm{HK}}(A_{p,d}) = 1 + \frac{c_d}{d!}, \quad \textit{where} \quad \sec x + \tan x = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{c_d}{d!} x^d \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right).$$

TABLE 1

| $d$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_d$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 5 | 16 |
| $1+\frac{c_d}{d!}$ | 2 | 2 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{29}{24}$ | $\frac{17}{15}$ |

Now it is natural to pose the following conjecture.

**Conjecture 2.5.** *Suppose that $k = \overline{k}$ and $p \neq 2$. Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be a $d$-dimensional unmixed local ring of characteristic $p > 0$. Then*

(1) *If $A$ is not regular, then $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq e_{\mathrm{HK}}(A_{p,d})$.*
(2) *Equality holds in (1) if and only if $\widehat{A} \cong A_{p,d}$.*
(3) *If $A$ is not regular, then $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq 1 + \frac{c_d}{d!}$.*

One can easily see that $c_d$ is an integer and $c_d \uparrow \infty$ if $d \uparrow \infty$. Thus the above new conjecture implies Conjecture 1.4.

## 3. Sketch of the proof of the main result

In this section, we give a sketch of the proof of Theorem 2.2. But we omit the proof of Theorem 2.3 here.

In the following, let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be an excellent unmixed local ring of characteristic $p > 0$, and put $e = e(A)$, $d = \dim A \geq 1$. Let $J$ be a minimal reduction of $\mathfrak{m}$, that is, $J$ is a parameter ideal and $\mathfrak{m}^{n+1} = J\mathfrak{m}^n$ for some integer $n \geq 0$. Let $J^*$ denote the **tight closure** of $J$; see e.g. [Hu]. Then $A$ is $F$-**rational** if and only if $J^* = J$. Also, $e(J) = e(\mathfrak{m}) = e$.

First we need the following lemma.

**Lemma 3.1.** *Under the above notation, we have $\mu_A(\mathfrak{m}/J^*) \leq e - 1$. Also, if $A$ is not $F$-rational, then $\mu_A(\mathfrak{m}/J^*) \leq e - 2$.*

*Proof.* By Goto–Nakamura theorem ([GN]), we have

$$\mu_A(\mathfrak{m}/J^*) \leq l_A(A/J^*) - 1 \leq e(J) - 1 = e - 1,$$

and the equality holds in the second inequality if and only if $A$ is $F$-rational. □

The following lemma is the key of the proof of Theorem 2.2.

**Lemma 3.2.** *Let $r$ be an integer with $r \geq \mu_A(\mathfrak{m}/J^*)$, and let $s$ be a real number with $1 \leq s \leq 2$. If we put*

$$v_s = \mathrm{vol}\left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in [0,1]^d \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d} x_i \leq s \right\},$$

*then we have*

$$e_{\mathrm{HK}}(A) \geq e\left\{v_s - r\cdot\frac{(s-1)^d}{d!}\right\}.$$

(Rough sketch; see [WY4, Section 2] for details). In what follows, for any positive real number $\alpha$, we put $I^\alpha := I^n$, where $n$ is the minimum integer which does not exceed $\alpha$. Also, we put $L = J^*$ for simplicity.

In the proof, we may assume $J^{[q]} = L^{[q]}$ by Length criterion for tight closure by Hochster–Huneke ([HH1] or [Hu]). Furthermore, we may assume that $J^{sq} = L^{sq} = \mathfrak{m}^{sq}$ since $J$ is a reduction of $\mathfrak{m}$. Then we have

$$l_A(\mathfrak{m}^{[q]}/J^{[q]}) \leq l_A\left(\frac{\mathfrak{m}^{[q]}+\mathfrak{m}^{sq}}{L^{[q]}+\mathfrak{m}^{sq}}\right) + l_A\left(\frac{J^{[q]}+J^{sq}}{J^{[q]}}\right) + O(q^{d-1}) =: l_1 + l_2 + O(q^{d-1}).$$

By the assumption, we can write as $\mathfrak{m} = L + (a_1, \ldots, a_r)$ for some $a_i \in \mathfrak{m}$. Then since $\mathfrak{m}^{(s-1)q}a_i^q \subseteq \mathfrak{m}^{sq}$, we get

$$l_1 \leq r\cdot l_A(A/\mathfrak{m}^{(s-1)q}) = \frac{re(s-1)^d}{d!}q^d + O(q^{d-1}).$$

On the other hand, since $e_{\mathrm{HK}}(J) = e(J) = e$, we have

$$e - e_{\mathrm{HK}}(A) \leq \frac{re(s-1)^d}{d!} + \lim_{q\to\infty} l_A\left(\frac{J^{[q]}+J^{sq}}{J^{[q]}}\right)\Big/ q^d.$$

Moreover, since the last term is equal to $e(1-v_s)$, we obatin the required inequality. □

Applying Lemma 3.2 to the case where $r = e-1$ and $d = 3$, we have the following corollary.

**Corollary 3.3.** *If $(A, \mathfrak{m}, k)$ is a 3-dimensional unmixed local ring of characteristic $p > 0$, then*

$$e_{\mathrm{HK}}(A) \geq e\cdot\max_{1\leq s\leq 2}\left\{\frac{s^3}{6} - (e+2)\frac{(s-1)^3}{6}\right\}.$$

*Proof.* Indeed, we can take $r = e-1$ by Lemma 3.1. Also, if $1 \leq s \leq 2$, then we have

$$v_s = \frac{s^3}{6} - 3\cdot\frac{(s-1)^3}{6}.$$

Hence the assertion follows from Lemma 3.2. □

**Proposition 3.4.** *Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be a 3-dimensional unmixed local ring of characteristic $p > 0$. If $e \geq 3$, then $e_{\mathrm{HK}}(A) > \frac{3}{2}$.*

*Proof.* Put $f(s) := \frac{s^3}{6} - (e+2)\frac{(s-1)^3}{6}$. If $e \geq 13$, then $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq f(1) = \frac{e}{6} \geq \frac{13}{6} > 2$ by Corollary 3.3. Similarly, if $4 \leq e \leq 12$, then $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq f(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4} > \frac{3}{2}$. If $e = 3$, then $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq f(\frac{7}{4}) = \frac{13}{8} > \frac{3}{2}$. □

In the following, we consider the case of $e = 2$. By Corollary 3.3, we have $e_{\mathrm{HK}}(A) \geq f(2) = \frac{4}{3}$. Thus in order to complete the proof of Theorem 2.2, we focus the case where $e_{\mathrm{HK}}(A) = \frac{4}{3}$. Then we may assume that $A$ is a hypersurface by the following lemma.

**Lemma 3.5.** *Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be an unmixed local ring of characteristic $p > 0$. Suppose that $e = 2$. Then $\widehat{A}$ is $F$-rational if and only if $e_{\mathrm{HK}}(A) < 2$. When this is the case, $A$ is an $F$-rational hypersurface.*

*Proof.* Since any Cohen–Macaulay local ring of multiplicity 2 is a hypersurface, it suffices to prove the first statement.

We may assume that $A$ is complete. First, suppose that $e_{\mathrm{HK}}(A) < 2$. By Goto–Nakamura theorem ([GN]), we have $2 = e(J) \geq l_A(A/J^*)$. If equality does not hold, then $J^* = \mathfrak{m}$. Thus $e_{\mathrm{HK}}(A) = e_{\mathrm{HK}}(J^*) = e_{\mathrm{HK}}(J) = e(J) = 2$. This is a contradiction. Hence $e(J) = l_A(A/J^*)$. By Goto–Nakamura theorem again, we obtain that $A$ is Cohen–Macaulay, $F$-rational.

Conversely, suppose that $A$ is $F$-rational. Then since $A$ is Cohen–Macaulay and $J^* = J \neq \mathfrak{m}$, we have $e_{\mathrm{HK}}(A) < e_{\mathrm{HK}}(J) = e(J) = 2$ by Length criterion for tight closure. $\square$

In the following, suppose that $A$ is a 3-dimensional complete $F$-rational hypersurface local ring of multiplicity 2. Furthermore, we assume that $k = \overline{k}$ and $\mathrm{char}\, k \neq 2$. Then $A$ can be written as the form $k[[X,Y,Z,W]]/(X^2 - \varphi(Y,Z,W))$.

To study Hilbert-Kunz multiplicities for these rings, we need to improve Lemma 3.2. Namely, we prove the following proposition (see also [WY4]).

**Proposition 3.6.** *Let $A$ be as above, and let $c$ be an integer with $c \geq 3$.*

*Suppose that there exists a function* $\mathrm{ord} : A \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ *which satisfies the following conditions*:

(1) $\mathrm{ord}\,(\alpha) \geq 0$; *and* $\mathrm{ord}\,(\alpha) = \infty \iff \alpha = 0$.
(2) $\mathrm{ord}\,(x) = \mathrm{ord}\, y = \mathrm{ord}\, z = 1/2$, *and* $\mathrm{ord}\, w = 1/c$.
(3) $\mathrm{ord}\,(\varphi) \geq 1$.
(4) $\mathrm{ord}\,(\alpha + \beta) \geq \min\{\mathrm{ord}\,(\alpha), \mathrm{ord}\,(\beta)\}$.
(5) $\mathrm{ord}\,(\alpha\beta) \geq \mathrm{ord}\,(\alpha) + \mathrm{ord}\,(\beta)$.

*Then we have*

$$e_{\mathrm{HK}}(A) \geq \frac{3}{2} - \frac{2}{3c^2} > \frac{4}{3}.$$

*Proof.* First, we define a filtration $\{F_n\}_{n \in \mathbb{Q}}$ as follows: $F_n := \{\alpha \in A \,|\, \mathrm{ord}\,(\alpha) \geq n\}$. Then every $F_n$ is an ideal and $F_m F_n \subseteq F_{m+n}$ holds for all $m$, $n \in \mathbb{Q}$. Using $F_n$ instead of $\mathfrak{m}^n$, we shall estimate $l_A(\mathfrak{m}^{[q]}/J^{[q]})$.

Set $J = (y,z,w)A$ and fix a sufficiently large power $q = p^e$. Put

$$s = 1 + \frac{1}{c}, \qquad N = \frac{1}{2} + \frac{1}{c} (< 1).$$

Since $J$ is a minimal reduction of $\mathfrak{m}$ and $xy^{q-1}z^{q-1}w^{q-1}$ generates the socle of $A/J^{[q]}$, we have $F_{sq} \subseteq J^{[q]}$. Also, since $B = A/J^{[q]}$ is an Artinian Gorenstein local ring, we get

$$F_{\frac{(N+1)q}{2}} B \subseteq 0 :_B F_{\frac{Nq}{2}} B \cong K_{B/F_{\frac{Nq}{2}} B},$$

where $K_C$ denotes a canonical module of a local ring $C$. Hence, by Matlis duality theorem, we get

$$l_A\left(\frac{F_{\frac{(N+1)q}{2}} + J^{[q]}}{J^{[q]}}\right) \leq l_B\left(K_{B/F_{\frac{Nq}{2}} B}\right) = l_B\left(B/F_{\frac{Nq}{2}} B\right).$$

On the other hand, since $x^q \in F_{\frac{q}{2}}$ by the assumption, we have

$$x^q F_{\frac{Nq}{2}} \subseteq F_{\frac{(N+1)q}{2}}.$$

Therefore by the similar argument as in the proof of Theorem 3.2, we get

$$
\begin{aligned}
l_A(\mathfrak{m}^{[q]}/J^{[q]}) &\le l_A\left(\frac{Ax^q + J^{[q]} + F_{\frac{(N+1)q}{2}}}{F_{\frac{(N+1)q}{2}} + J^{[q]}}\right) + l_A\left(\frac{F_{\frac{(N+1)q}{2}} + J^{[q]}}{J^{[q]}}\right) \\
&\le l_A\left(A/(J^{[q]} + F_{\frac{(N+1)q}{2}}) : x^q\right) + l_B\left(B/F_{\frac{Nq}{2}}B\right) \\
&\le 2 \cdot l_A\left(A/J^{[q]} + F_{\frac{N}{2}q}\right).
\end{aligned}
$$

In fact, since

$$
\begin{aligned}
&\lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^3}\, l_A\left(A/J^{[q]} + F_{\frac{Nq}{2}}\right) \\
=\ & e(A) \cdot \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^3} \ \mathrm{vol}\left\{(x,y,z) \in [0,q]^3 \;\middle|\; \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + \frac{w}{c} \le \frac{Nq}{2}\right\} \\
=\ & 2 \cdot \mathrm{vol}\left\{(x,y,z) \in [0,1]^3 \;\middle|\; \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + \frac{w}{c} \le \frac{N}{2}\right\} \\
=\ & 2 \cdot \frac{1}{6}\left\{\frac{c}{2}N^3 - \frac{c}{2}\left(N - \frac{2}{c}\right)^3\right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3c^2},
\end{aligned}
$$

we get

$$
e_{\mathrm{HK}}(A) \ge 2 - 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3c^2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{2}{3c^2},
$$

as required. □

We do not have any example of non-$F$-rational unmixed local rings $A$ with $e_{\mathrm{HK}}(A) < 2$. In fact, in the case of 3-dimensional local rings, we can prove the following proposition using the similar method as above.

**Proposition 3.7.** *Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be a 3-dimensional unmixed local ring of characteristic $p > 0$. If $e_{\mathrm{HK}}(A) < 2$, then $A$ is $F$-rational.*

## 4. Some Examples

**Example 4.1 (Rational normal scrolls).** Let $k$ be a field, and let $A_n$ be the completion of a rational normal scroll: $A_n = k[[x^{-n}T, x^{-n+1}T, \dots, T, xT, yT, xyT]]$, where $x, y, T$ are variables and $n$ is a non-negative integer. Then $A_n$ is a 3-dimensional Cohen–Macaulay $F$-rational local domain with $e(A_n) = n+2$, and

$$
e_{\mathrm{HK}}(A_n) = \frac{e(A_n)}{2} + \frac{e(A_n)}{6(n+1)}.
$$

In particular, $e(A_1) = 3$ and $e_{\mathrm{HK}}(A_1) = \frac{7}{4}$.

**Example 4.2 (Veronese Subrings).** Let $A = k[[X_1^{i_1} \cdots X_d^{i_d} \,|\, i_1, \dots, i_d \ge 0, \sum i_j = r]]$ be the Veronese subring of $k[[X_1, \dots, X_d]]$. Then $e(A) = r^2$ and

$$
e_{\mathrm{HK}}(A) = \frac{1}{r}\binom{d+r-1}{r-1}.
$$

In particular, if $d = 2$, $r = e(A)$, then $e_{\mathrm{HK}}(A) = \frac{e(A)+1}{2}$. Also, if $d = 3$ and $r = 2$, then $e(A) = 4$ and $e_{\mathrm{HK}}(A) = 2$.

If $A$ is not F-rational, then we obtain more strict inequality. For example, in case of $d=2$, if $A$ is not F-rational unmixed local ring with $e(A)=e$, then

$$e_{\mathrm{HK}}(A) \geq \frac{e^2}{2(e-1)}.$$

The following is an interesting example which takes the value of the right-hand side.

**Example 4.3** (**Elliptic curve** by Fakhruddin–Trivedi [FT, Corollary 3.19]). Let $E$ be an elliptic curve over a field $k=\overline{k}$ of characteristic $p>0$, and let $\mathcal{L}$ be a very ample line bundle on $E$ of degree $e \geq 2$. Let $R$ be the homogeneous coordinate ring (the section ring of $\mathcal{L}$) defined by

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(E, \mathcal{L}^{\otimes n}).$$

Also, put $A = R_{\mathfrak{M}}$, where $\mathfrak{M}$ be the unique homogeneous maximal ideal of $R$. Then we have

$$e_{\mathrm{HK}}(A) = \frac{e^2}{2(e-1)}.$$

In higher-dimensional case, there are many open problems. For instance, it seems that the following question is still open.

**Question 4.4.** *Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be a 3-dimensional unmixed* (resp. non-F-rational unmixed) *local ring with multiplicity $e$. What is the smallest value of $e_{\mathrm{HK}}(A)$?*

## 5. Minimal relative Hilbert–Kunz multiplicity of normal toric rings

In the 20th symposium on commutative algebra (1998, Kashikojima), the first author introduced the notion of *minimal Hilbert-Kunz multiplicity* to investigate the difference of Hilbert-Kunz multiplicities between two ideals; see [Wa2]. Also, in the 23th symposium on commutative algebra (1999, Kurashiki), we gave a formula for the minimal Hilbert-Kunz multiplicity of quotient singularities; see [WY5].

In [WY4], we have changed the name of *the minimal Hilbert-Kunz multiplicity* to *the minimal relative Hilbert-Kunz multiplicity* by the advice of the referee. Also, Yao [Ya] recently proved that the notion of minimal relative Hilbert-Kunz multiplicities coincides with that of *F-signature* which was introduced by Huneke–Leuschke in [HuL] from the different viewpoint.

**Definition 5.1** ([WY4]). Let $z$ be a generator of the socle $\operatorname{Soc}(E_A) := \{x \in E_A \,|\, \mathfrak{m}x = 0\}$ of $E_A$. Then we put

$$m_{\mathrm{HK}}(A) := \liminf_{e \to \infty} \frac{l_A(A/\operatorname{ann}_A(z^{p^e}))}{p^{ed}},$$

where $z^{p^e} = \mathbb{F}_A^e(z) \in \mathbb{F}_A^e(E_A)$. We call $m_{\mathrm{HK}}(A)$ **the minimal relative Hilbert-Kunz multiplicity** of $A$.

In this section, we give a general formula for $m_{\mathrm{HK}}(A)$ of a normal toric ring $A$. For simplicity, we write the minimal relative Hilbert-Kunz multiplicity of the local ring at the unique graded maximal ideal simply by $m_{\mathrm{HK}}(A)$. To formulate our result, let us fix our notation.

Let $M$, $N \cong \mathbb{Z}^d$ be dual lattices, and denote the duality pairing of $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ with $N_{\mathbb{Z}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ by $\langle\ \ ,\ \ \rangle \colon M_{\mathbb{R}} \otimes N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. Let $\sigma$ be a strongly convex rational polyhedral cone, and denote $\sigma^\vee = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n\rangle \geq 0 \text{ for all } n \in \sigma\}$. Let $A = k[\sigma^\vee \cap M]$ be a normal toric ring, and let $n_1, \dots, n_s$ be primitive generators of $\sigma$. Then $A = k[x^m \mid \langle m, n_i\rangle \geq 0 \quad \text{for all } i]$.

**Theorem 5.2** (cf. [WY4]). *Let $k$ be a field of characteristic $p > 0$, and let $A = k[\sigma^\vee \cap M]$ be a normal toric ring. Under the above notation, we have*

$$m_{\mathrm{HK}}(A) = \mathrm{vol}\,\{m \in M_{\mathbb{R}} \mid 0 \leq \langle m, n_i\rangle \leq 1 \quad \textit{for all } i\},$$

$\mathrm{vol}\,(W)$ *denotes the relative volume of an integral polytope $W \in M_{\mathbb{R}}$* (see [St, pp.239]).

*Proof.* By [HaY, Section 4], we have

$$E_A = H^d_{\mathfrak{m}}(K_A) \cong \bigoplus_{\langle m, n_i\rangle \leq 0\,(\forall i)} kx^m,$$

where the socle is generated by $z = 1$ and

$$E_A \otimes {}^eA \cong H^d_{\mathfrak{m}}(K_A^{(q)}) \cong \bigoplus_{\langle m, n_i\rangle \leq q-1\,(\forall i)} kx^m.$$

Since the Frobenius action is given by $F^e : E_A \to F^e_A(E_A), x^m \mapsto x^{mq}$, the annihilator of $z^q = 1$ is given by

$$\bigoplus_{0 \leq \langle m, n_i\rangle \leq q-1,\, m \neq 0} kx^m.$$

whose length is $\sharp\{m \in M \mid 0 \leq \langle m, n_i\rangle \leq q-1\,(\forall i), m \neq 0\}$. We get the desired result dividing by $q^d$ and tends $q$ to $\infty$. $\square$

**Remark 5.3.** *In* [Wal], *the first author gave a formula for Hilbert-Kunz multiplicities of normal toric rings.*

**Example 5.4.** Let $k$ be a field and $A_n = k[x^{-n}T, x^{-n+1}T, \dots, T, xT, yT, xyT]$, where $x, y, T$ are variables and $n$ is a non-negative integer. Then the generators of $\sigma$ and $\sigma^\vee$ are given respectively by

$$\begin{aligned} \sigma &= \langle (0,1,0), (-1,0,1), (0,-1,1), (1,-n,n)\rangle, \\ \sigma^\vee &= \langle (-n,0,1), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\rangle. \end{aligned}$$

Since the volume of the region given by

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq y \leq 1, x \leq z \leq x+1, y \leq z \leq y+1, ny \leq x + nz \leq ny + 1\}$$

is $\frac{5}{6(n+1)}$, we have $m_{\mathrm{HK}}(A_n) = \frac{5}{6(n+1)}$.

## References


[BC] R. O. Buchweitz and Q. Chen, *Hilbert-Kunz Functions of Cubic Curves and Surfaces*, J. Algebra **197** (1997), 246–267.

[BCP] R. O. Buchweitz, Q. Chen and K. Pardue, *Hilbert-Kunz Functions*, Preprint.

[BE] M. Blickle and F. Enescu, *On rings with small Hilbert-Kunz multiplicity*, Preprint.

[FT] N. Fakhruddin and V. Trivedi, *Hilbert-Kunz Functions and Multiplicities for Full Flag Varieties and Elliptic Curves*, J. Pure and Applied Algebra **181** (2003), 23–52.

[GN] S. Goto and Y. Nakamura, *Multiplicity and tight closures of parameters*, J. Algebra **244** (2001), 302–311.

[HM] C. Han and P. Monsky, *Some surprising Hilbert-Kunz functions*, Math. Z. **214** (1993), 119–135.

[HaY] N. Hara and K. Yoshida, *A generalization of tight closure and multiplier ideals*, Trans. A.M.S. **355** (2003), 3143–3174.

[HH1] M. Hochster and C. Huneke, *Tight Closure, invariant theory, and Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31–116.

[HH2] M. Hochster and C. Huneke, *F-regularity, test elements, and smooth base change*, Trans. of Amer. Math. Soc. **346** (1994), 1–62.

[Hu] C. Huneke, *Tight Closure and Its Applications*, American Mathematical Society, 1996.

[HuL] C. Huneke and G. Leuschke, *Two theorems about maximal Cohen–Macaulay modules*, Math. Ann. **324** (2002), 391–404.

[Ku1] E. Kunz, *Characterizations of regular local rings of characteristic p*, Amer. J. Math. **41** (1969), 772–784.

[Ku2] E. Kunz, *On Noetherian rings of characteristic p*, Amer. J. Math. **88** (1976), 999–1013.

[Mo1] P. Monsky, *The Hilbert-Kunz function*, Math. Ann. **263** (1983), 43–49.

[Mo2] P. Monsky, *A personal letter from Monsky to K.-i. Watanabe.*

[St] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics I* Cambridge studies in Advanced Mathematics 49 Cambridge University Press, Cambridge, New York (1997).

[Wa1] K. -i. Watanabe, *Hilbert-Kunz multiplicity of Toric rings*, Proc. Inst. Nat. Sci. (Nihon Univ.), **35** (2000), 173–177.

[Wa2] K. -i. Watanabe, *Hilbert-Kunz multiplicity–Many questions and very few answers*, Proceedings in the 20th symposium on commutative algebra (at 賢島研修センター in Japan) (1998), 73–80.

[WY1] K.-i. Watanabe and K. Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity and an inequality between multiplicity and colength*, J. Algebra. **230** (2000), 295–317.

[WY2] K.-i. Watanabe and K. Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity of two-dimensional local rings*, Nagoya Math. J. **162** (2001), 87–110.

[WY3] K.-i. Watanabe and K. Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity of three-dimensional local rings*, submitted.

[WY4] K.-i. Watanabe and K. Yoshida, *Minimal relative Hilbert-Kunz multiplicity* (to appear in Illinois J. Math.)

[WY5] K.-i. Watanabe and K. Yoshida, *商特異点の minimal Hilbert-Kunz multiplicity* (in Japanese), Proceedings in the 23th symposium on commutative algebra (at サンピア倉敷 in Japan) (2001), 99–108.

[Ya] Y. Yao, Observations on the $F$-signature of local rings of characteristic $p$ (Preliminary Version) which is available from `http://www.math.ukans.edu/ yyao/eprint/f-sig.pdf`.

KEI-ICHI WATANABE, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, COLLEGE OF HUMANITIES AND SCIENCES, NIHON UNIVERSITY, SETAGAYA-KU, TOKYO 156–0045, JAPAN

*E-mail address*: `watanabe@math.chs.nihon-u.ac.jp`

KEN-ICHI YOSHIDA, GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY, NAGOYA 464–8602, JAPAN

*E-mail address*: `yoshida@math.nagoya-u.ac.jp`

Morphisms represented by monomorphisms

Kiriko Kato
Department of Applied Mathematics, Osaka Women's University
Sakai, Osaka 590-0035, JAPAN
e-mail: kiriko@appmath.osaka-wu.ac.jp

# 1 Introduction

For any homomorphism $f : A \to B$ of $R$-modules, $(\, f \quad \rho_B\,) : A \oplus P_B \to B$ is surjective with a projective cover $\rho_B : P_B \to B$. Thus every morphism can be embedded into an epimorphism with adding some projective modules. And the short exact sequence where $f$ is embedded into the epimorphism is unique up to projective modules. The kernel of $(\, f \quad \rho_B\,)$ is called the pseudo-kernel of $\underline{f}$ and denoted by $\underline{\mathrm{Ker} f}$, which is determined by a stable equivalence class of $f$. (See Lemma 2.4).

On the other hand, embedding into some monomorphism is not always possible. Dually to the pseudo-kernel, the pseudo-cokernel $\underline{\mathrm{Cok} f}$ of $\underline{f}$ is determined. But $\underline{\mathrm{Cok} f}$ is not always a cokernel of a monomorphism, while $\underline{\mathrm{Ker} f}$ is a kernel of an epimorphism.

Finding a condition of a given map to be embedded into some monomorphism is the problem posed by Auslander and Bridger. Treating the problem again in this paper, we focused on the fact that $\underline{\mathrm{mod}\, R}$ is categorically equivalent to some subcategory of the homotopy category $\mathsf{K}(\mathrm{mod}\, R)$ of $R$-complexes [[6] Theorem 2.6]. Due to this method, we describe the obstruction of being embedded into monomorphisms by a homology of a complex associated to the given map. And we get Theorem 4.10 :

> If a ring $R$ is Gorenstein, A morphism $f$ can be embedded into monomorphisms if and only if $\mathrm{Ker}\, f$ is torsionless.

Our standpoint is that "embedding into monomorphisms" problem is closely related to the theory of "perfect exact sequences" exact sequences whose $R$-dual are also exact.

To sum up; every morphism cannnot be embedded into monomorphisms. Even if a given morphism can be embedded into some monomorphism, there are various embeddings. But in this case there uniquely exists a "perfect" exact sequence where a given map is embedded into the monomorphism. ( See Theorem 3.9.)

# 2 Preliminaries

We shall fix the notations and give some review on the correspondence between stable module category and homotopy class category of complexes. All the contents in this section are included in [6].

Throughout the paper, $R$ is a complete semiperfect ring, equivalently a finite direct sum of local rings; that is, each finite module has a projective cover ( see [7] for semiperfect rings). The category of finitely generated $R$-modules is denoted by $\mathrm{mod}\, R$, and the category of finite projective $R$-modules is denoted by $\mathrm{proj}\, R$. By an $R$-module we mean "a finitely generated $R$-module". For an $R$-module $M$, $\rho_M : P_M \to M$ denotes a projective cover of $M$. For an abelian category $\mathcal{A}$, $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ stands for the homotopy category of complexes where a complex is denoted as

$$F^\bullet : \cdots \to F^{n-1} \overset{d_F{}^{n-1}}{\to} F^n \overset{d_F{}^n}{\to} F^{n+1} \to \cdots .$$

A morphism in $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ is a homotopy equivalence class of chain maps. $\tau_{\leq n}F^\bullet$, $\tau_{\geq n}F^\bullet$ are truncations;

$$\tau_{\leq n}F^\bullet : \to F^{n-2} \to F^{n-1} \to F^n \to 0 \to 0 \to \cdots,$$

$$\tau_{\geq n}F^\bullet : \cdots \to 0 \to 0 \to F^n \to F^{n+1} \to F^{n+2} \to \cdots,$$

and $F_\bullet^*$ is the cocomplex such as $F_n^* = (F_n)^*$, $d_n^{F^*} = (d_F{}^{n-1})^*$ where $^*$ means $\mathrm{Hom}_\mathrm{R}(\ \ ,R)$. The projective stabilization $\underline{\mathrm{mod}\,R}$ is defined as follows.

- Each object of $\underline{\mathrm{mod}\,R}$ is an object of *mod R*.
- For $A, B \in \underline{\mathrm{mod}}\,R$, a set of morphisms from $A$ to $B$ is $\mathrm{Hom}_\mathrm{R}(A,B)/\mathcal{P}(A,B)$ where $\mathcal{P}(A,B) := \{f \in \mathrm{Hom}_\mathrm{R}(A,B) \mid f$ factors through some projective module$\}$. Each element is denoted as $\underline{f} = f \mod \mathcal{P}(A,B)$. A morphism $f : A \to B$ in $\mathrm{mod}\,R$ is called a stable isomorphism if $\underline{f}$ is an isomorphism in $\underline{\mathrm{mod}\,R}$ and we write $A \overset{st}{\cong} B$.

For an $R$-module $M$, define a transpose $\mathrm{Tr}\,M$ of $M$ to be $\mathrm{Cok}\,\delta^*$ where $P \xrightarrow{\delta} Q \to M \to 0$ is a projective presentation of $M$. The transpose of $M$ is uniquely determined as an object of $\underline{\mathrm{mod}\,R}$. If $\underline{f} \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)$, then $f$ induces a map $\mathrm{Tr}\,N \to \mathrm{Tr}\,M$, which represents a morphism $\mathrm{Tr}\,\underline{f} \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(\mathrm{Tr}\,N, \mathrm{Tr}\,M)$.

Let $\mathcal{L}$ be a full subcategory of $\mathsf{K}(\mathrm{mod}\,R)$ defined as

$$\mathcal{L} = \{F^\bullet \in \mathsf{K}(\mathrm{proj}\,R) \mid \mathrm{H}^i(F^\bullet) = 0\ (i < 0),\quad \mathrm{H}_j(F^*{}_\bullet) = 0\ (j \geq 0)\}.$$

**Lemma 2.1 ( [6] Proposition 2.3, Proposition 2.4 )** *1) For $A \in \underline{\mathrm{mod}\,R}$, there exists ${F_A}^\bullet \in \mathcal{L}$ that satisfies*

$$\mathrm{H}^0(\tau_{\leq 0}{F_A}^\bullet) \overset{st}{\cong} A.$$

*Such an ${F_A}^\bullet$ is uniquely determined by $A$ up to isomorphisms. We fix the notation ${F_A}^\bullet$ and call this a standard resolution of $A$.*

*2) For $\underline{f} \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(A,B)$, there exists $f^\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathrm{mod}\,\mathrm{R})}({F_A}^\bullet, {F_B}^\bullet)$ that satisfies*

$$\underline{\mathrm{H}^0(\tau_{\leq 0}f^\bullet)} = \underline{f}.$$

*Such an $f^\bullet$ is uniquely determined by $\underline{f}$ up to isomorphisms, so we use the notation $f^\bullet$ to describe a chain map with this property for given $\underline{f}$.*

**Theorem 2.2 ( [6] Theorem 2.6)** *The mapping $A \mapsto {F_A}^\bullet$ gives a functor from $\underline{\mathrm{mod}\,R}$ to $\mathsf{K}(\mathrm{mod}\,R)$, and this gives a category equivalence between $\underline{\mathrm{mod}\,R}$ and $\mathcal{L}$.*

For $A, B \in \mathrm{mod}\,R$, put $A^\bullet = {F_A}^\bullet$, $B^\bullet = {F_B}^\bullet$. For $f \in \mathrm{Hom}_\mathrm{R}(A,B)$, consider the chain map $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ with $\underline{\mathrm{H}^0(\tau_{\leq 0}f^\bullet)} = \underline{f}$. Putting $C^\bullet = C(f^\bullet)^\bullet$, we get a triangle

$$T^{-1}C^\bullet \xrightarrow{n^\bullet} A^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{c^\bullet} C^\bullet. \tag{2.1}$$

In general, $C^\bullet$ does not belong to $\mathcal{L}$ any more but it satisfies the following:

$$\mathrm{H}^i(C^\bullet) = 0\ (i < -1),\quad \mathrm{H}_j(C^*{}_\bullet) = 0\ (j > -1).$$

**Definition and Lemma 2.3** ([6], **Definition and Lemma 3.1**) *As objects of* $\underline{\mathrm{mod}\,R}$, $\underline{\mathrm{Ker}}\ \underline{f} := \mathrm{H}^{-1}(\tau_{\leq -1}C^\bullet)$ *and* $\underline{\mathrm{Cok}}\ \underline{f} := \mathrm{H}^{0}(\tau_{\leq 0}C^\bullet)$ *are uniquely determined by* $\underline{f}$, *up to isomorphisms. We call these the pseudo-kernel and the pseudo-cokernel of* $\underline{f}$. *And we have*

$$\underline{\mathrm{Cok}}\ \underline{f} = \mathrm{Tr}\ \underline{\mathrm{Ker}}\ \mathrm{Tr}\underline{f}.$$

From (2.1), we have an exact sequence

$$0 \to \underline{\mathrm{Ker}}\ \underline{f} \to A \oplus P \stackrel{(f\ p)}{\to} B \to 0$$

with some projective module $P$. This characterizes the pseudo-kernel.

**Lemma 2.4** *For a given morphism* $f : A \to B$, *suppose both* $A \oplus P \stackrel{(f\ p)}{\to} B$ *and* $A \oplus P' \stackrel{(f\ p')}{\to} B$ *are epimorphisms where* $P$ *and* $P'$ *are projective. Then there are homomorphisms* $j : B \to P'$ *and* $l : P \to P'$ *such that* $fj + p'l = p$. *And these maps induce stable isomorphism* $\kappa : \mathrm{Ker}\,(f\ p) \to \mathrm{Ker}\,(f\ p)$*:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Ker}\,(f\ p) & \to & A \oplus P & \stackrel{(f\ p)}{\to} & B & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\kappa} & & \downarrow{\scriptstyle\left(\begin{smallmatrix} 1 & j \\ 0 & l \end{smallmatrix}\right)} & & \| & & \\ 0 & \to & \mathrm{Ker}\,(f\ p') & \to & A \oplus P' & \stackrel{(f\ p')}{\to} & B & \to & 0 \end{array}$$

**Lemma 2.5** ([6] **Lemma 3.6**) *1) There is an exact sequence* $0 \to \mathrm{Ker}\,f \to \underline{\mathrm{Ker}}\ f \to \Omega^1_R(\mathrm{Cok}\ f) \to 0$.
*2) There is an exact sequence* $0 \to L \to \underline{\mathrm{Cok}}\ \underline{f} \to \mathrm{Cok}\ f \to 0$ *such that* $\Omega^1_R(L)$ *is the surjective image of* $\mathrm{Ker}\,f$.

**Lemma 2.6** *A morphism* $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$ *satisfies* $\underline{\mathrm{Ker}f} \stackrel{st}{\cong} 0$ *if and only if then* $\Omega^1_R(f)$ *is a stable isomorphism.*

# 3 Representation by monomorphisms and perfect exact sequences

**Definition 3.1** *A morphism* $f : A \to B$ *in* $\mathrm{mod}\,R$ *is said to be* represented by monomorphisms *if some monomorphism* $f' : A' \to B'$ *in* $\mathrm{mod}\,R$ *is stably equivalent to* $f$, *that is, there exist stable isomorphisms* $\alpha : A \to A'$ *and* $\beta : B \to B'$ *such that* $\underline{\beta \circ f} = \underline{f' \circ \alpha}$.

Each morphism is not always represented by monomorphisms.

**Example 3.2** *Let* $R$ *be a Gorenstein local ring of dimension* $n \geq 3$, $N$ *an* $R$*-module with* $\mathrm{pd}\,N = n$, *and* $\varphi_N : N \to N^{**}$ *the natural map. Then any map* $N \oplus P \to N^{**} \oplus Q$ *of the form* $\left(\begin{smallmatrix} \varphi_N & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$ *with projective modules* $P$ *and* $Q$, *is never be monomorphic.*

It was Aulander and Bridger that were first conscious about "represented by monomorphisms" property.

**Theorem 3.3 (Auslander-Bridger)** *The following are equivalent for a morphism $f : A \to B$ in $\operatorname{mod} R$.*

1) *There exists a monomorphism $f' : A \to B \oplus P$ with a projective module $P$ such that $f = sf'$ via some split epimorphism $s : B \oplus P \to B$.*

2) *There exists a monomorphism $f' : A \to B \oplus P$ with a projective module $P$ such that $f = sf'$ via some split epimorphism $s : B \oplus P \to B$, and $f'^*$ is an epimorphism.*

3) $\underline{\mathrm{Hom}}_R(B, I) \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(A, I)$ *is surjective if $I$ is an injective module.*

**Lemma 3.4** *For a morphism $f : A \to B$ in $\operatorname{mod} R$, $f$ is represented by monomorphisms if and only if there exists a monomorphism $f' : A \to B \oplus P$ with a projective module $P$ such that $f = sf'$ via the split epimorphism $s : B \oplus P \to B$.*

For a morphism $f : A \to B$, $A \oplus P_B \xrightarrow{(f\ \rho_B)} B$ is an epimorphism with a projective cover $\rho_B : P_B \to B$. Thus each morphism is represented by epimorphisms. And the choice of the representing epimorphism is unique up to direct sum of projective modules, as we have seen in Lemma 2.4.

On the other hand, we already know an example of a morphism that is not represented by monomorphisms. And moreover, even if a given map is represented by a monomorphism, there would be another representing monomorphism. We see it in the next example.

**Example 3.5** *Let $k$ be a field and $R = k[[X, Y, Z]]/(X^2 - YZ)$. Let $M$ be an $R$-module defined as Let $M$ be an $R$-module defined as $M = R/(XY, Y^2, YZ)$. The minimal Cohen-Macaulay approximation of $k$, $0 \to Y_k \xrightarrow{f} X_k \to k \to 0$ is perfectly exact since $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(k, R) = 0$. On the other hand, the minimal Cohen-Macaulay approximation of $M$, $0 \to Y_M \xrightarrow{g} X_M \to M \to 0$ is not perfect since $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(M, R) \neq 0$. The map $g$ is decomposed as $Y_M \cong Y_k \oplus R$, $X_M \cong X_k \oplus R$ and $g = \left(\begin{smallmatrix} f & q \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right)$.*

The most remarkable point in Auslander-Bridger's Theorem is that being represented by monomorphisms is equivalent to being represented by "perfect monomorphisms" whose $R$-dual is an epimorphism.

**Definition 3.6** *An exact sequence* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *of $R$-modules is called* a perfect exact sequence *or to be* perfectly exact *if its $R$-dual* $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(C, R) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(B, R) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(A, R) \to 0$ *is also exact.*

**Proposition 3.7 ( [6] Lemma 2.7)** *The following are equivalent for an exact sequence*

$$\theta : 0 \to A \xrightarrow{f} B \to C \to 0.$$

1) $\theta$ *is perfectly exact.*

2) $0 \to F_A{}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} F_B{}^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} F_C{}^\bullet \to 0$ *is exact.*

3) $F_C{}^{\bullet-1} \to F_A{}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} F_B{}^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} F_C{}^\bullet$ *is a distinguished triangle in* $\mathsf{K}(\mathrm{mod}\ R)$.

4) $F_A{}^\bullet \cong C(g)^{\bullet-1}$ *in* $\mathsf{K}(\mathrm{proj}\, R)$.

*If these conditions are satisfied, we have the following.*

5) $C \overset{st}{\cong} \underline{\mathrm{Cok} f}$.

6) $F_C{}^\bullet \cong C(f)^\bullet$ *in* $\mathsf{K}(\mathrm{proj}\, R)$.

For given exact sequence of modules $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, we have a diagram of triangles

$$\begin{tikzcd}
F_A{}^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "\alpha^\bullet"] & F_B{}^\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & C(f)^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^\bullet"] & F_A{}^\bullet \arrow[d, "\alpha^{\bullet-1}"] \\
C(g)^{\bullet-1} \arrow[r] & F_B{}^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] & F_C{}^\bullet \arrow[r] & C(g)^\bullet
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

which induces a diagram with exact rows

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet) \arrow[r] & A \arrow[r, "\binom{f}{\epsilon}"] \arrow[d, "\alpha"] & B \oplus F_A{}^1 \arrow[r, "(c_f\ \pi)"] \arrow[d, "\beta"] & \underline{\mathrm{Cok} f} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Ker} g} \arrow[r] & B \oplus P_C \arrow[r, "(g\ \rho_C)"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

We observe some facts below.

**Lemma 3.8** *With the notations above, the following holds.*

1) $\beta$ *is a stable isomorphism.*

2) $C(\alpha)^{\bullet+1} \cong C(\gamma)^\bullet$.

3) $\alpha$ *is the composite of natural maps* $A \to \mathrm{Im}\ f$ *and* $\mathrm{Ker}\ g \to \underline{\mathrm{Ker} g}$. *So if* $f$ *is injective and* $g$ *is surjective, then* $\alpha$ *is a stable isomorphism,* $\tau_{\leq -1} C(\alpha)^\bullet = 0$, *and* $\tau_{\leq -2} C(\gamma)^\bullet = 0$.

4) *If* $\mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet) = 0$, *then the upper row of (3.3) is the short exact sequence*

$$\theta_f : 0 \to A \xrightarrow{\binom{f}{\epsilon}} B \oplus P \xrightarrow{(c_f\ \pi)} \underline{\mathrm{Cok} f} \to 0$$

*which is a perfect exact sequence.*

**Theorem 3.9** *Let* $f : A \to B$ *be a homomorphism in* $\mathrm{mod}\ R$. *Then* $f$ *is represented by monomorphisms if and only if* $\mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet)$ *is zero. If this is the case, we have the following:*

1) *We have a perfect exact sequence*

$$\theta_f : 0 \to A \xrightarrow{\binom{f}{\epsilon}} B \oplus P \xrightarrow{(c_f\ \pi)} \underline{\mathrm{Cok} f} \to 0.$$

2) *For any exact sequence of the form*

$$\sigma : 0 \to A \xrightarrow{\binom{f}{q}} B \oplus P' \xrightarrow{(g\ p)} C' \to 0$$

*with some projective module $P'$, there is a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd}
\theta_f : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\binom{f}{\epsilon}"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] & B \oplus F_A{}^1 \arrow[r, "(c_f\ \pi)"] \arrow[d, "\tilde{\beta}"] & \underline{\mathrm{Cok} f} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\gamma}"] & 0 \\
\sigma : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\binom{f}{q}"] & B \oplus P' \arrow[r, "(g\ p)"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*where $\tilde{\alpha}$ and $\tilde{\beta}$ are stable isomorphisms.*

3) *There is an exact sequence with some projective module $Q$ and $Q'$*

$$0 \to Q' \to \underline{\mathrm{Cok} f} \oplus Q \xrightarrow{(\tilde{\gamma}\ *)} C \to 0.$$

4) *If $\sigma$ is also perfectly exact, then $\sigma$ is isomorphic to $\theta_f$ up to direct sum of trivial complexes.*

**proof.** Suppose that $f$ is represented by monomorphisms; there is an exact sequence

$$0 \to A \xrightarrow{\binom{f}{q}} B \oplus P' \xrightarrow{(g\ p)} C' \to 0.$$

Apply Lemma 3.8 3) to this sequence, and we get $\tau_{\leq -2}C(\gamma)^\bullet = 0$ as for $\gamma^\bullet : C(f)^\bullet \to F_C{}^\bullet$. From the long exact sequence of homology groups $\to \mathrm{H}^{-2}(C(\gamma)^\bullet) \to \mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet) \to \mathrm{H}^{-2}(F_C{}^\bullet) \to \cdots$, we get $\mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet) = 0$. Conversely, suppose that $\mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet) = 0$. Then Lemma 3.9 4) shows that $\theta_f$ is perfectly exact. Now it remains to prove 2) - 4) in the case $\mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet) = 0$.

2) Applying the argument of Lemma3.8 to the sequence $\sigma$, we get a similar diagram as (3.3 )

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} f \\ q \\ \epsilon \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\alpha"] & B \oplus P' \oplus F_A{}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \underline{\mathrm{Cok}\binom{f}{q}} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Ker}(g\ p)} \arrow[r] & B \oplus P' \oplus P_C \arrow[r, "(g\ p\ \rho_C)"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

The upper row is the direct sum of $\theta_f$ and a trivial complex, and the lower row is that of $\sigma$ and a trivial complex. Hence we get a desired diagram.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\binom{f}{\epsilon}"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] & B \oplus F_A{}^1 \arrow[r, "(c_f\ \pi)"] \arrow[d, "\tilde{\beta}"] & \underline{\mathrm{Cok} f} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\gamma}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\binom{f}{q}"] & B \oplus P \arrow[r, "(g\ p)"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Notice that $\tilde{\beta}$ is a stable isomorphism. From Lemma 3.8 3), $\tilde{\alpha}$ is also a stable isomorphism.

3) Consider the exact sequence of complex $0 \to C(\gamma)^{\bullet-1} \to \widetilde{C(f)}^{\bullet} \xrightarrow{\gamma^{\bullet}} F_C{}^{\bullet} \to 0$, where $\widetilde{C(f)}^{\bullet} \cong C(f)^{\bullet}$ in $\mathsf{K}(projR)$. Applying the truncation $\tau_{\leq 0}$, we get

$$0 \to (\tau_{\leq -1}C(\gamma))^{\bullet-1} \to \tau_{\leq 0}\tilde{C(f)}^{\bullet} \to \tau_{\leq 0}F_C{}^{\bullet} \to 0,$$

which induces an exact sequence of homology $0 \to Q' \to \underline{\mathrm{Cok} f} \oplus Q \to C \to 0$ with projective modules $Q' = C(\gamma)^{-1}$ and $Q$.

4) Suppose $\sigma$ is perfect. From Proposition 3.7, $F_C{}^{\bullet-1} \to F_A{}^{\bullet} \xrightarrow{f^{\bullet}} F_B{}^{\bullet} \xrightarrow{g^{\bullet}} F_C{}^{\bullet}$ is a distinguished triangle, hence the induced sequence $\theta_f$ is isomorphic to $\sigma$. (q.e.d.)

An exact sequence $\theta : 0 \to A \to B \to C \to 0$ is perfectly exact if $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(C, R) = 0$. But the vanishing of $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(C, R)$ is not the sufficient condition for $\theta$ to be perfectly exact. Notice that the dual of a perfect exact sequence is not always perfect.

# 4 Representation by monomorphisms and torsionless modules.

In the previous section, we see that a given map $f$ is represented by monomorphisms if and only if $\mathrm{H}^{-1}(C(f)^{\bullet}) = 0$. If this is the case, $\underline{\mathrm{Ker} f} = \mathrm{Cok}\, d_{C(f)}{}^{-1}$ is a first syzygy of $\underline{\mathrm{Cok} f} = \mathrm{Cok}\, d_{C(f)}{}^{0}$. So it is natural to ask the converse: is a given map $f$ represented by monomorphisms if $\underline{\mathrm{Ker} f}$ is a first sygyzy? This section treats the problem. As a conclusion, the answer is yes if the ring is Gorenstein. We begin with seeing the equivalent condition for a module to be a first syzygy.

**Definition 4.1** *An $R$-module $M$ is said to be torsionless* [1] *if the natural map $\phi : M \to M^{**}$ is a monomorphism.*

**Lemma 4.2** **([1], [4])** *The following are equivalent for an $R$-module $M$.*

1) *$M$ is torsionless.*

2) $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(\mathrm{Tr}\, M, R) = 0$

3) *$M$ is a first syzygy; there exists some monomorphism from $M$ to a projective module.*

We begin with investigation of maps whose pseudokernels are projective. There is a typical map that plays a key-role to solve our problem. For $M \in \mathrm{mod}\ R$, consider a module $J^2M = \mathrm{Tr}\,\Omega^1_R\,\mathrm{Tr}\,\Omega^1_R M$. The identity map on $\mathrm{Tr}\,\Omega^1_R M$ induces a chain map $(F_M)^* \to (F_{J^2M})^*$ and then a chain map $\psi_M{}^{\bullet} : F_{J^2M} \to F_M$. The map $\psi_M : J^2M \to M$ has the property $\Omega^1_R(\psi_M) = id$, in other words, $\underline{\mathrm{Ker}\psi_M}$ is projective and $\tau_{\leq -2}C(\psi_M) = 0$.

[1] In [?, ?, ABr] Auslander and Bridger use the term "1-torsion free" for "torsionless". Usually a module $M$ is called torsion-free if the natural map $M \to M \otimes Q$ is injective where $Q$ denotes the total ring of fractions of $R$.

**Lemma 4.3** *Let $R$ be a Gorenstein ring and $f : A \to B$ be a morphism in* mod $R$. *If $\underline{\mathrm{Ker} f}$ is projective, then $f$ is represented by monomorphisms.*

**proof.** The assumption says $\tau_{\leq -2}C(f) = 0$. From Theorem 3.9, $f$ is represented by monomorphisms if and only if $\mathrm{H}^{-1}(C(f)^{*}) = 0$, which means that ${d_{C(f)}}^{-1}$ is injective. So we have only to show $\mathrm{Ker}\, {d_{C(f)}}^{-1} = (\mathrm{Cok}\,({d_{C(f)}}^{-1})^{*})^{*} = 0$. A triangle ${F_A}^{\bullet} \to {F_B}^{\bullet} \to C(f)^{\bullet} \to {F_A}^{\bullet+1}$ induces an exact sequence

$$0 \to H_{-1}(C(f)^{*}) \to H_{-1}({F_B}^{*}) \to H_{-1}({F_A}^{*}) \to 0.$$

Note that $\mathrm{Cok}\,({d_{C(f)}}^{-1})^{*} \cong H_{-1}(C(f)^{*})$ and $H_{-1}({F_B}^{*}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(B, R)$. If $\mathrm{p}$ is any minimal prime ideal, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(B, R)_{\mathrm{p}} = 0$ since $R$ is Gorenstein. Hence ${\mathrm{Cok}\,({d_{C(f)}}^{-1})^{*}}_{\mathrm{p}} = 0$, which implies $(\mathrm{Cok}\,({d_{C(f)}}^{-1})^{*})^{*} = 0$. (q.e.d.)

**Corollary 4.4** *If an $R$-module $M$ has $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(M, R)^{*} = 0$, $\psi_M : J^2M \to M$ is represented by monomorphisms.*

**proof.** Apply the argument in Lemma 4.3 for $f = \psi_M$. Since $H_{-1}(F^{*}_{J^2M}) = 0$, we have $\mathrm{Cok}\,({d_{C(\psi_M)}}^{-1})^{*} \cong H_{-1}(C(\psi_M)^{*}) \cong H_{-1}((F_M)^{*}) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(M, R)$. From assumption, we get $(\mathrm{Cok}\,({d_{-1}}^{C(\psi_M)})^{*})^{*} \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(M, R)^{*} = 0$. (q.e.d.)

For given morphism of $R$-modules $f : A \to B$, adding a projective cover ofB to $f$, we get an exact sequence

$$0 \to \underline{\mathrm{Ker} f} \overset{\binom{n}{*}}{\to} A \oplus P_B \overset{(f\ \rho_B)}{\to} B \to 0.$$

Due to Theorem 3.9, we also have a perfect exact sequence $\theta_n$, because $n$ is represented by monomorphisms:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\theta_n : & 0 & \to & \underline{\mathrm{Ker} f} & \overset{\binom{n}{*}}{\to} & A \oplus F & \to & \underline{\mathrm{Cok}\ n} & \to & 0 \\
& & & \downarrow{\scriptstyle st}\,\cong & & \downarrow{\scriptstyle st}\,\cong & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
& 0 & \to & \underline{\mathrm{Ker} f} & \overset{\binom{n}{\circ}}{\to} & A \oplus P_B & \overset{(f\ \rho_B)}{\to} & B & \to & 0
\end{array}$$

**Lemma 4.5** *With notation as above, suppose $(\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{R}}(\underline{\mathrm{Cok} f}, R))^{*} = 0$. Then the following conditions are equivalent.*

1) *$f$ is represented by monomorphisms.*

2) *$\underline{\mathrm{Ker} f}$ is torsionless and $\gamma : \underline{\mathrm{Cok}\ n} \to B$ is represented by monomorphisms.*

**proof.** On the diagram of triangles

$$\begin{array}{ccccccc}
{F_{\underline{\mathrm{Ker} f}}}^{\bullet} & \overset{n^{\bullet}}{\to} & {F_A}^{\bullet} & \to & C(n)^{\bullet} & \to & {F_{\underline{\mathrm{Ker} f}}}^{\bullet+1} \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha^{\bullet}} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \gamma^{\bullet}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\bullet+1}} \\
C(f)^{\bullet-1} & \to & {F_A}^{\bullet} & \overset{f^{\bullet}}{\to} & {F_B}^{\bullet} & \to & C(f)^{\bullet},
\end{array}$$

We observe $C(\alpha)^{\bullet+1} \cong C(\gamma)^\bullet$ and $\mathrm{H}^{-1}(C(n)^\bullet) = 0$ because $n$ is represented by monomorphisms. And there is an exact sequence

$$\mathrm{H}^0(F_{\underline{\mathrm{Ker}f}}{}^\bullet) \to \mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet) \to \mathrm{H}^{-1}(C(\gamma)^\bullet).$$

2) $\Rightarrow$ 1). Since $\underline{\mathrm{Ker}f}$ is torsionless, $\mathrm{H}^0(F_{\underline{\mathrm{Ker}f}}{}^\bullet) = 0$. And $\mathrm{H}^{-1}(C(\gamma)^\bullet) = 0$ because $\gamma$ is represented by monomorphisms. From the above exact sequence, we have $\mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet) = 0$.

1) $\Rightarrow$ 2). From the assumption, $\mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet) = 0$ which implies $\underline{\mathrm{Ker}f} \overset{st}{\cong} \Omega^1_R(\underline{\mathrm{Cok}f})$. We are now to show that $\mathrm{H}^{-1}(C(\gamma)^\bullet) = \mathrm{H}^0(C(\alpha)^\bullet)$ vanishes. The equation $\underline{\mathrm{Ker}f} \overset{st}{\cong} \Omega^1_R(\underline{\mathrm{Cok}f})$ implies $F_{\underline{\mathrm{Ker}f}}{}^{\bullet+1} \cong F^\bullet_{J^2(\underline{\mathrm{Cok}f})}$. On the other hand, $C(f) \cong F_{\underline{\mathrm{Cok}f}}{}^\bullet$. Via these isomorphisms, $\alpha^\bullet$ is regarded as $\psi^\bullet_{\underline{\mathrm{Cok}f}}$. Hence $\mathrm{H}^0(C(\alpha)^\bullet) \cong \mathrm{H}^{-1}(C(\psi_{\underline{\mathrm{Cok}f}})^\bullet) \cong (\mathrm{Ext}^1_R(\underline{\mathrm{Cok}f}, R))^* = 0$. (q.e.d.)

**Proposition 4.6** *Suppose $R$ is Gorenstein. A morphism $f$ of $R$-modules is represented by monomorphisms if and only if $\underline{\mathrm{Ker}f}$ is torsionless.*

**Example 4.7** *In the case $R = k[[X,Y,Z]]/(XY,X^2)$ with any filed $k$, consider the map $\psi_k : k \to J^2k$. We know $\underline{\mathrm{Ker}\psi_k}$ is projective because ${\psi_k}^i = id$ $(i \leq -1)$. We see that $\psi_k$ is not represented by monomorphisms; that is, $\mathrm{H}^{-1}(C(\psi_k)^\bullet)$ does not vanish.*

**Corollary 4.8** *Suppose $R$ is Gorenstein. Let the sequence of $R$-modules $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ be exact. If $A$ and $C$ are torsionless, then so is $B$.*

**proof.** From Proposition 4.6, $g$ is represented by monomorphisms; there exists an exact sequence

$$0 \to B \xrightarrow{\binom{g}{q}} C \oplus Q \to \underline{\mathrm{Cok}g} \to 0$$

with some projective module $Q$ and a map $q : B \to Q$. Since $B$ is a submodule of some projective module, so is $B$. (q.e.d.)

**Corollary 4.9** *Suppose $R$ is Gorenstein. For a given morphism $f$,* $\mathrm{Ker}\,f$ *is torsionless if and only if* $\underline{\mathrm{Ker}f}$ *is torsionless.*

**proof.** From Lemma 2.5, there is an exact sequence $0 \to \mathrm{Ker}\,f \to \underline{\mathrm{Ker}}\,f \to \Omega^1_R(\mathrm{Cok}\ f) \to 0$. So the "if" part is obvious, and the "only if" part comes from Corollary 4.8. (q.e.d.)

**Theorem 4.10** *Suppose $R$ is Gorenstein. The following are equivalent for a morphism $f : A \to B$ in* $\mathrm{mod}\,R$.

1) *$f$ is represented by monomorphisms.*

2) $\mathrm{Ker}\,f$ *is torsionless.*

3) $\underline{\mathrm{Ker}f}$ *is torsionless.*

4) $\mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet) = 0$.

5) $\Omega_R^1(\underline{\mathrm{Cok}f}) \overset{st}{\cong} \underline{\mathrm{Ker}f}$ .

6) *There exists $f'$ such that $f' \overset{st}{\cong} f$ and* $\mathrm{Ker}\, f'$ *is torsionless.*

7) *For any $f'$ with the property that $f' \overset{st}{\cong} f$,* $\mathrm{Ker}\, f'$ *is torsionless.*

**proof.** We already showed 1) $\Leftrightarrow$ 4) in Theorem 3.9, 1) $\Leftrightarrow$ 3) in Proposition 4.6, and 3)$\Leftrightarrow$ 2) in Corollary 4.9.

4) $\Rightarrow$ 5). It is obvious since $\mathrm{Cok}\, {d_{C(f)}}^0 = \underline{\mathrm{Ker}f}$ and $\mathrm{Cok}\, {d_{C(f)}}^{-1} = \underline{\mathrm{Cok}f}$.

5) $\Rightarrow$ 3). It is trivial.

3) $\Rightarrow$ 7) . From Lemma 2.5, we have an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f' \to \underline{\mathrm{Ker}f'} \to \Omega_R^1(\mathrm{Cok}\, f') \to 0.$$

Hypothesis says $\underline{\mathrm{Ker}f'} \overset{st}{\cong} \underline{\mathrm{Ker}f}$ is a first syzygy, hence so is $\mathrm{Ker}\, f'$.

7) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 6) are obvious.

6) $\Rightarrow$ 3). Consider the exact sequence as in Lemma 2.5:

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f' \to \underline{\mathrm{Ker}f'} \to \Omega_R^1(\mathrm{Cok}\, f') \to 0$$

If $\mathrm{Ker}\, f'$ is torsionless, so is $\underline{\mathrm{Ker}f'} \cong \underline{\mathrm{Ker}f}$ because of Corollary 4.8. (q.e.d.)

**Acknowledgement.** I thank Kazuhiko Kurano who gave me an essential suggestion that conditions for represented by monomorphisms should be given in terms of Ker not by $\underline{\mathrm{Ker}}$.

# References

[1] M.Auslander and M.Bridger, " The stable module theory," Memoirs of AMS. 94., 1969.

[2] M.Auslander and R.O.Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations,* Soc. Math. de France, Mem **38**(1989), 5-37.

[3] M.Amasaki, *Homogeneous prime ideals and graded modules fitting into long Bourbaki sequences,* Preprint, 1999.

[4] E.G.Evans and P.Griffith, "Syzygies," LMS Lecture Note Series. 106, 1985.

[5] K.Kato, *Morphisms represented by monomorphisms,* preprint, 2004.

[6] K.Kato, *Stable Module Theory with Kernels,* Math. J. Okayama Univ., **43** (2001), 31-41.

[7] J.Miyachi, *Derived categories with applications to representations of algebras,* Seminar Note, 2000.

[8] Y.Yoshino, *Maximal Buchsbaum modules of finite projective dimension,* J. Algebra, **159** (1993) , 240-264.

# THE NUMBER OF ISOMORPHISM CLASSES OF INDECOMPOSABLE MODULES OF G-DIMENSION ZERO

RYO TAKAHASHI

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL SCIENCE AND TECHNOLOGY, OKAYAMA UNIVERSITY, OKAYAMA 700-8530, JAPAN
takahasi@math.okayama-u.ac.jp

## 1. INTRODUCTION

We assume in this note that all rings are commutative noetherian rings and that all modules are finitely generated modules.

Auslander [1] has introduced a homological invariant for modules which is called G-dimension. The finiteness of this invariant characterizes the Gorensteinness of the base ring: any module over a Gorenstein local ring has finite G-dimension, and a local ring whose residue class field has finite G-dimension is Gorenstein.

A Cohen-Macaulay local ring is called to be of finite Cohen-Macaulay type if it has only finitely many non-isomorphic indecomposable maximal Cohen-Macaulay modules. Under a few assumptions, Gorenstein local rings of finite Cohen-Macaulay type have been classified completely, and it is known that all non-isomorphic indecomposable maximal Cohen-Macaulay modules over them can be described concretely; see [14] for the details.

Over a Gorenstein local ring, a module has G-dimension zero if and only if it is a maximal Cohen-Macaulay module. Thus we are interested in non-Gorenstein local rings which have only finitely many non-isomorphic indecomposable modules of G-dimension zero, especially interested in determining all non-isomorphic indecomposable modules of G-dimension zero over such rings.

Now, we form the following conjecture:

**Conjecture 1.1.** Let $R$ be a non-Gorenstein local ring. Suppose that there exists a non-free $R$-module of G-dimension zero. Then there exist infinitely many non-isomorphic indecomposable $R$-modules of G-dimension zero.

For a local ring $R$, we denote by $\mathrm{mod}R$ the category of finitely generated $R$-modules, and by $\mathcal{G}(R)$ the full subcategory of $\mathrm{mod}R$ consisting of all $R$-modules of G-dimension zero.

The main result of this note is the following theorem:

**Theorem 1.2.** *Let $R$ be a henselian non-Gorenstein local ring of depth at most two. Suppose that there exists a non-free $R$-module in $\mathcal{G}(R)$. Then the category $\mathcal{G}(R)$ is not contravariantly finite in* mod$R$.

This theorem especially says that Conjecture 1.1 is true if $R$ is a henselian local ring of depth at most two.

## 2. On proving Theorem 1.2

Throughout this section, let $(R, \mathfrak{m}, k)$ be a commutative noetherian local ring. All $R$-modules in this section are assumed to be finitely generated.

First of all, we recall the definition of G-dimension. Put $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ for an $R$-module $M$.

**Definition 2.1.** Let $M$ be an $R$-module.

(1) If the following conditions hold, then we say that $M$ has *G-dimension zero*, and write $\text{G-dim}_R M = 0$.
  i) The natural homomorphism $M \to M^{**}$ is an isomorphism.
  ii) $\mathrm{Ext}_R^i(M, R) = 0$ for every $i > 0$.
  iii) $\mathrm{Ext}_R^i(M^*, R) = 0$ for every $i > 0$.

(2) If $n$ is a non-negative integer such that there is an exact sequence
$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$$
of $R$-modules with $\text{G-dim}_R G_i = 0$ for every $i$, $0 \le i \le n$, then we say that $M$ has *G-dimension at most $n$*, and write $\text{G-dim}_R M \le n$. If such an integer $n$ does not exist, then we say that $M$ has *infinite G-dimension*, and write $\text{G-dim}_R M = \infty$.

For an $R$-module $M$, we denote by $\Omega^n M$ the $n$th syzygy module of $M$, and set $\Omega M = \Omega^1 M$. G-dimension is a homological invariant for modules sharing a lot of properties with projective dimension. We state here just the properties that will be used later.

**Proposition 2.2.** (1) *The following conditions are equivalent.*
  i) *$R$ is Gorenstein.*
  ii) $\text{G-dim}_R M < \infty$ *for any $R$-module $M$.*
  iii) $\text{G-dim}_R k < \infty$.

(2) *Let $M$ be a non-zero $R$-module with* $\text{G-dim}_R M < \infty$. *Then* $\text{G-dim}_R M = \mathrm{depth} R - \mathrm{depth}_R M$.

(3) *Let $0 \to L \to M \to N \to 0$ be a short exact sequence of $R$-modules. If two of $L, M, N$ have finite G-dimension, then so does the third.*

(4) *Let $M$ be an $R$-module. Then* $\text{G-dim}_R(\Omega^n M) = \sup\{\text{G-dim}_R M - n, 0\}$ *for any $n \geq 0$.*
(5) *Let $M, N$ be $R$-modules. Then* $\text{G-dim}_R(M \oplus N) = \sup\{\text{G-dim}_R M, \text{G-dim}_R N\}$.

The proof of this proposition and other properties of G-dimension are stated in detail in [2, Chapter 3,4] and [6, Chapter 1].

We denote by mod$R$ the category of finitely generated $R$-modules, and by $\mathcal{G}(R)$ the full subcategory of mod$R$ consisting of all $R$-modules of G-dimension zero. Let $F_1 \xrightarrow{\partial} F_0 \to M \to 0$ be the minimal free presentation of an $R$-module $M$. Then we denote by tr$M$ the cokernel of the dual homomorphism $\partial^* : F_0^* \to F_1^*$. The following result follows directly from Proposition 2.2.

**Corollary 2.3.** *Let $M$ be an $R$-module. The category $\mathcal{G}(R)$ has the following properties.*

(1) *If $M$ belongs to $\mathcal{G}(R)$, then so do $M^*$, $\Omega M$, tr$M$, and any direct summand of $M$.*
(2) *Let $0 \to L \to M \to N \to 0$ be an exact sequence of $R$-modules. If $L$ and $N$ belong to $\mathcal{G}(R)$, then so does $M$.*

Now we introduce the notion of a cover of a module.

**Definition 2.4.** Let $\mathcal{X}$ be a full subcategory of mod$R$.

(1) Let $\phi : X \to M$ be a homomorphism from $X \in \mathcal{X}$ to $M \in$ mod$R$.
  i) We call $\phi$ an *$\mathcal{X}$-precover* of $M$ if for any homomorphism $\phi' : X' \to M$ with $X' \in \mathcal{X}$ there exists a homomorphism $f : X' \to X$ such that $\phi' = \phi f$.
  ii) Assume that $\phi$ is an $\mathcal{X}$-precover of $M$. We call $\phi$ an *$\mathcal{X}$-cover* of $M$ if any endomorphism $f$ of $X$ with $\phi = \phi f$ is an automorphism.
(2) The category $\mathcal{X}$ is said to be *contravariantly finite* if every $M \in$ mod$R$ has an $\mathcal{X}$-precover.

An $\mathcal{X}$-precover (resp. an $\mathcal{X}$-cover) is often called a right $\mathcal{X}$-approximation (resp. a right minimal $\mathcal{X}$-approximation).

**Proposition 2.5.** [9, Remark 2.6] *Let $\mathcal{X}$ be a full subcategory of* mod$R$ *which is closed under direct summands, and let*

$$0 \to N \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\phi} M$$

*be an exact sequence of $R$-modules where $\phi$ is an $\mathcal{X}$-precover of $M$. Suppose that $R$ is henselian. Then there exists a direct summand $L$ of $N$ satisfying the following conditions:*

i) $\psi(L)$ *is a direct summand of* $X$.
ii) *Let* $N'$ *(resp.* $X'$*) be the complement of* $L$ *(resp.* $\psi(L)$*) in* $N$ *(resp.* $X$*), and let*

$$0 \to N' \xrightarrow{\psi'} X' \xrightarrow{\phi'} M$$

*be the induced exact sequence. Then* $\phi'$ *is an* $\mathcal{X}$*-cover of* $M$.

Now, let us observe our theorem. Due to lack of space, we shall state the outline of the proof of our theorem only in the depth two case. For the details, see [8, Theorem 1.2], [9, Theorem 2.8], and [10, Theorem 1.4].

Let $(R, \mathfrak{m}, k)$ be a henselian non-Gorenstein local ring of depth two. Then, since $\mathrm{Ext}_R^1(\mathfrak{m}, R) \cong \mathrm{Ext}_R^2(k, R) \neq 0$, we have a non-split exact sequence

$$(1) \qquad \sigma : 0 \to R \to M \to \mathfrak{m} \to 0.$$

Dualizing this, we obtain an exact sequence

$$0 \to \mathfrak{m}^* \to M^* \to R^* \xrightarrow{\eta} \mathrm{Ext}_R^1(\mathfrak{m}, R).$$

Note from definition that the connecting homomorphism $\eta$ sends $\mathrm{id}_R \in R^*$ to the element $s \in \mathrm{Ext}_R^1(\mathfrak{m}, R)$ corresponding to the exact sequence $\sigma$. Since $\sigma$ does not split, $s$ is a non-zero element of $\mathrm{Ext}_R^1(\mathfrak{m}, R)$. Hence $\eta$ is a non-zero map. Noting that $\mathrm{Ext}_R^1(\mathfrak{m}, R) \cong \mathrm{Ext}_R^2(k, R)$, we see that the image of $\eta$ is annihilated by $\mathfrak{m}$. Also noting that $\mathfrak{m}^* \cong R^* \cong R$, we get an exact sequence

$$(2) \qquad 0 \to R \to M^* \to \mathfrak{m} \to 0.$$

Using the exact sequences (1), (2), and Corollary 2.3.2, we can show the following claim.

**Claim 1.** *The modules* $\mathrm{Hom}_R(G, M)$ *and* $\mathrm{Hom}_R(G, M^*)$ *belong to* $\mathcal{G}(R)$ *for every non-free indecomposable module* $G \in \mathcal{G}(R)$.

We shall prove that the module $M$ can not have a $\mathcal{G}(R)$-precover. Suppose that $M$ has a $\mathcal{G}(R)$-precover. Then $M$ has a $\mathcal{G}(R)$-cover $\pi : X \to M$ by Proposition 2.5. Since $R \in \mathcal{G}(R)$, any homomorphism from $R$ to $M$ factors through $\pi$. Hence $\pi$ is a surjective homomorphism. Setting $N = \mathrm{Ker}\,\pi$, we get an exact sequence

$$(3) \qquad 0 \to N \xrightarrow{\theta} X \xrightarrow{\pi} M \to 0,$$

where $\theta$ is the natural embedding. We see from Corollary 2.3 and Wakamatsu's Lemma [12, Lemma 2.1.1] that $\mathrm{Ext}_R^i(G, N) = 0$ for any

$G \in \mathcal{G}(R)$ and any $i > 0$. Dualizing the exact sequence (3), we obtain an exact sequence

$$0 \to M^* \xrightarrow{\pi^*} X^* \xrightarrow{\theta^*} N^*.$$

Put $C = \mathrm{Im}(\theta^*)$ and let $\mu : X^* \to C$ be the surjection induced by $\theta^*$. Using Corollary 2.3.1 and Claim 1, we can show the following claim.

**Claim 2.** *The homomorphism $\mu$ is a $\mathcal{G}(R)$-precover of $C$.*

According to Claim 2 and Proposition 2.5, we have direct sum decompositions $M^* = Y \oplus L$, $X^* = \pi^*(Y) \oplus Z$, and an exact sequence

$$0 \to L \to Z \xrightarrow{\nu} C \to 0$$

where $\nu$ is a $\mathcal{G}(R)$-cover of $C$. Since $Y$ is isomorphic to the direct summand $\pi^*(Y)$ of $X^*$, Corollary 2.3.1 implies that $Y \in \mathcal{G}(R)$. Wakamatsu's Lemma yields $\mathrm{Ext}^1_R(G, L) = 0$ for any $G \in \mathcal{G}(R)$. Using Claim 1 and Corollary 2.3.1, we can show the following claim.

**Claim 3.** *The module $\mathrm{Hom}_R(G, Y)$ belongs to $\mathcal{G}(R)$ for any $G \in \mathcal{G}(R)$.*

Here, by the assumption of the theorem, we have a non-free indecomposable module $W \in \mathcal{G}(R)$. There is an exact sequence

$$0 \to \Omega W \to F \to W \to 0$$

such that $F$ is a free module. Applying the functor $\mathrm{Hom}_R(-, Y)$ to this exact sequence, we get an exact sequence

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(W, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\Omega W, Y) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(W, Y) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Since $\mathrm{Hom}_R(W, Y)$, $\mathrm{Hom}_R(F, Y)$, and $\mathrm{Hom}_R(\Omega W, Y)$ belong to $\mathcal{G}(R)$ by Claim 3, the $R$-module $\mathrm{Ext}^1_R(W, Y)$ has G-dimension at most two, especially it has finite G-dimension.

We can prove that $\mathrm{Ext}^1_R(W, Y)$ is a non-zero $k$-vector space. Therefore Proposition 2.2.1 and 2.2.5 says that $R$ is Gorenstein, contrary to the assumption of our theorem. This contradiction proves that the $R$-module $M$ does not have a $\mathcal{G}(R)$-precover, which establishes our theorem.

## References


[1] M. AUSLANDER, *Anneaux de Gorenstein, et torsion en algèbre commutative*, Séminaire d'algèbre commutative dirigé par P. Samuel, Secrétariat mathématique, Paris, 1967.

[2] ——— and M. BRIDGER, *Stable module theory*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 94, 1969.

[3] M. Auslander and R. -O. Buchweitz, The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations, *Mem. Soc. Math. France (N.S.)* No. 38 (1989), 5–37.

[4] M. Auslander and S. O. Smalø, Preprojective modules over Artin algebras, *J. Algebra* **66** (1980), no. 1, 61–122.

[5] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings, revised version*, Cambridge University Press, 1998.

[6] L. W. Christensen, *Gorenstein dimensions*, Lecture Notes in Mathematics 1747, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[7] V. Maşek, Gorenstein dimension and torsion of modules over commutative noetherian rings, *Comm. Algebra* **28** (2000), no. 12, 5783–5811.

[8] R. Takahashi, On the category of modules of Gorenstein dimension zero, preprint.

[9] ———, On the category of modules of Gorenstein dimension zero II, *J. Algebra*, to appear.

[10] ———, Modules of G-dimension zero over local rings of depth two, preprint.

[11] T. Wakamatsu, Stable equivalence for self-injective algebras and a generalization of tilting modules, *J. Algebra* **134** (1990), no. 2, 298–325.

[12] J. Xu, *Flat covers of modules*, Lecture Notes in Mathematics 1634, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[13] S. Yassemi, G-dimension, *Math. Scand.* **77** (1995), no. 2, 161–174.

[14] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 146, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[15] ———, Cohen-Macaulay approximations, *Proceedings of the 4th Symposium on Representation Theory of Algebras, Izu, Japan*, 1993, 119–138.

[16] ———, Modules of G-dimension zero over local rings with the cube of maximal ideal being zero, *Commutative Algebra, Singularities and Computer Algebra*, 255–273, NATO Sci. Ser. I Math. Phys. Chem., 115, *Kluwer Acad. Publ., Dordrecht*, 2003.

# Degenerations of modules and openness of the G-dimension zero property

Yuji Yoshino (Okayama University)

本報告は，加群の退化とG次元に関する著者の最近の結果 [4], [5] の survey である。詳しくは元の論文を参考にしてください。

## 1 Degenerations of modules

この節では，$k$ はいつも体を表し，$R$ は $k$ 上の結合代数を表す。$R$ は必ずしも可換環あるいはネーター環である必要はない。

**Definition 1.1** 有限生成な左 $R$-加群 $M$ と $N$ に対して，$M$ が $N$ に離散付値環 (DVR) に沿って退化するとは次の条件を満たすときである。

離散付値環 $(V, tV, k)$ (但し $V$ は $k$-代数で，$t$ はその素元を表す) と有限生成左 $R\otimes_k V$-加群 $Q$ が存在して，

(1) $Q$ は平坦な $V$-加群である。

(2) 左 $R$-加群としての同型 $Q/tQ \cong N$ がある。

(3) 左 $R\otimes_k V[\frac{1}{t}]$-加群としての同型 $Q[\frac{1}{t}] \cong M \otimes_k V[\frac{1}{t}]$ がある。

先の論文 [3] においては，おもに Cohen-Macaulay 局所環上の極大 Cohen-Macaulay 加群に対して別の種類の退化を考えた。それを上で与えた退化と区別するために次のような定義をしよう。

**Definition 1.2** この定義では，$k$ とその上のアフィン直線を同一視するために，$k$ は代数閉体を表すことにする。 但し，$R$ は上述のごとく一般の $k$-algebra である。有限生成左 $R$-加群 $M$ と $N$ に対して，$M$ が $N$ にアフィン直線に沿って退化するとは次の条件を満たすときである。

次の各条件を満たす有限生成左 $R\otimes_k k[t]$-加群 $Q$ が存在する。

(1) $Q$ は平坦な $k[t]$-加群である。

(2) 任意の $c \in k$ に対して，$Q_c := Q/(t-c)Q$ と定義する。これは有限生成左 $R$-加群である。このとき，左 $R$-加群としての同型 $Q_0 \cong N$ がある。

(3) $\mathbb{A}^1_k \cong k$ の空でない Zariski 開集合 $U$ が存在して，$c \in U$ ならば左 $R$-加群としての同型 $Q_c \cong M$ がある。

次の定理が [5] における主定理である。

**Theorem 1.3** 有限生成左 $R$-加群 $M$ と $N$ に対する次の 2 条件は同値である。

(1) $M$ は $N$ に DVR に沿って退化する。

(2) 有限生成左 $R$-加群の短完全列：

$$0 \to Z \xrightarrow{\binom{\phi}{\psi}} M \oplus Z \to N \to 0$$

が存在して，$Z$ 上の自己準同型 $\psi$ は冪零，*i.e.* $\psi^n = 0$ $(n \gg 1)$ である。

**Remark 1.4** G.Zwara は論文 [6] の中で，もし $R$ が有限次元 $k$-代数のときには，次の条件が同値であることを示している。

(1) $M$ は $N$ に DVR に沿って退化する。

(2′) 有限生成左 $R$-加群の短完全列：

$$0 \to Z \xrightarrow{\binom{\phi}{\psi}} M \oplus Z \to N \to 0$$

が存在する。

ここでは，$\psi$ の冪零条件は必要でない。実際 Fitting の定理によって，もし $R$ がアルティン環のときには，条件 (2′) と条件 (2) は同値であることが簡単に示すことができるからである。したがって我々の定理は Zwara の定理を含んでいることがわかる。定理の証明に関しては，我々の定理の中の $Z$ は，Zwara のそれとは若干異なったとり方をする。これによって一般の結合代数でも Zwara 型の定理が成立することを示したのである。

定理の中の (2) $\Rightarrow$ (1) の証明の系として次のことがわかる。

**Corollary 1.5** $M$ が $N$ に DVR に沿って退化すると仮定する。このとき，その DVR $V$ としていつも $k[t]_{(t)}$ を取ることができる。

**Remark 1.6** 有限生成左 $R$-加群の完全列

$$0 \to N' \xrightarrow{p} M \xrightarrow{q} N'' \to 0$$

があるとき，$M$ が $N$ に DVR に沿って退化することを容易に示すことができる。実際，次の完全列ができる。

$$0 \to N' \xrightarrow{\binom{p}{0}} M \oplus N' \xrightarrow{\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} N'' \oplus N' \to 0$$

ここで，写像 $\psi : N' \to N'$ は零写像であるから，特に冪零，したがって定理より $M$ が $N$ に DVR に沿って退化する。

最初に定義した二つの退化の間には次の定理で示すような包含関係がある。但し，Remark 2.2 で見るように逆の包含関係は必ずしも成立しないから注意してほしい。

**Theorem 1.7** $k$ を代数閉体，$R$ を $k$ 上のネーター代数とする。有限生成左 $R$-加群 $M$ と $N$ について，$M$ が $N$ に DVR に沿って退化するならば，$M$ は $N$ にアフィン直線に沿って退化する。

# 2 Remarks for commutative Noetherian algebras

以下では，常に $k$ は一般の体，$R$ は可換なネーター $k$-代数であるとする。この場合には，Theorem 1.3 の直接の系として次の結果が得られる。

**Corollary 2.1** $M$ と $N$ は長さが有限な $R$-加群であるとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $M$ が $N$ に DVR に沿って退化する。

(2) 長さ有限の加群からなる次の型の完全列が存在する。

$$0 \to Z \xrightarrow{\binom{\phi}{\psi}} M \oplus Z \to N \to 0$$

とくに，$M$ が $N$ に DVR に沿って退化するならば，長さの等式 $\ell_R(M) = \ell_R(N)$ が成立する。

**Remark 2.2** Theorem 1.7 の逆の包含関係が成立しないような例がある。

例えば，$R = k[[x]]$ を代数閉体 $k$ 上の形式的冪級数環，さらにその上の加群 $M = R/(x)$ と $N = R/(x^2)$ を考える。$M$ と $N$ は $R$-加群としての長さが異なるので，Corollary 2.1 によって，$M$ が $N$ に DVR に沿って退化することはありえない。

しかし, $R[t]$-加群 $Q=R[t]/(x^2-tx)$ を考えてみよう。$\mathrm{Ass}_{R[t]}Q=\{(x),(x-t)\}$ であるから, $k[t]$ の 0 でない任意の元は $Q$ 上では非零因子である。これは, $Q$ が $k[t]$ 上で平坦であることを示している。さらに, $c\in k$ に対して $Q_c\cong R/(x(x-c))$ であることに注意すれば,

$$Q_c\cong\begin{cases}R/(x^2) & (c=0)\\ R/(x) & (c\neq 0)\end{cases}$$

したがって定義より, $M$ が $N$ にアフィン直線に沿って退化することになる。この例の場合には, 次の完全列があることに注意しよう。

$$0\to R\xrightarrow{\binom{1}{x}} R/(x)\oplus R\xrightarrow{(x,-1)} R/(x^2)\to 0$$

但し, 自己準同型 $R\xrightarrow{x}R$ は決して冪零でない。

# 3 Openness of the G-dimension zero property

この節でも前節同様, $R$ は可換なネーター環を表す。有限生成 $R$-加群 $M$ に対して, $\text{G-dim}_R M$ と書き表される「G次元」というものがある。これは, Auslander-Bridger [1] によって与えられたもので, これに関する基本的事項の詳しい説明は本報告集の中の高橋亮氏の報告に委ねることとする。退化とG次元の関係については, [4] の中で考察し, もっとも一般的な形では次の結果を得た。

**Theorem 3.1** 有限生成 $R$-加群の完全列

$$0\to Z\to M\oplus Z\to N\to 0$$

があるとき, G次元の不等式 $\text{G-dim}_R M\leqq\text{G-dim}_R N$ が成立する。

これと Theorem 1.3 を合わせれば, 次の系が得られる。

**Corollary 3.2** $R$ を体 $k$ 上のネーター可換代数, $M$ と $N$ を有限生成 $R$-加群とする。もし, $M$ が $N$ に DVR に沿って退化すると仮定するならば, G次元に関する不等式 $\text{G-dim}_R M\leqq\text{G-dim}_R N$ が成立する。

特にこの場合, $N$ がG次元 0 の加群とすると, $M$ もまたG次元 0 である。この性質によって, 加群に対する「G次元 0 を持つ」という性質は,「開」的性質 (open property) であることがわかる。これは, よく知られた結果:

> Gorenstein 局所環上の加群の「極大 Cohen-Macaulay である」という性質が「開」である

ということの素直な拡張になっている。

# References

[1] M.Auslander and M.Bridger, *"Stable module theory"*, Mem. Amer. Math. Soc. 94 (1969).

[2] Y.Yoshino, *"Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings"*, Lecture Note Series **146**, Cambridge University Press, 1990.

[3] Y.Yoshino, *On degenerations of Cohen-Macaulay modules*, Journal of Algebra **248**, 272–290 (2002).

[4] Y.Yoshino, *Degeneration and G-dimension of modules*, Lecture at Lisbon Conference of Commutative Algebra, June, 2003.

[5] Y.Yoshino, *On degenerations of modules*, to appear in Journal of Algebra.

[6] G.Zwara, *Degenerations of finite dimensional modules are given by extensions*, Composito Mathematica **121**, 205–218 (2000).