研究集会

第27回可換環論シンポジウム

2005年11月14日～17日

於　インテック大山研修センター

平成17年度科学研究費補助金

基盤研究（B）(2)（代表：吉野雄二）

序

これは第 27 回可換環論シンポジウムの報告集です。このシンポジウムは 2005 年 11 月 14 日から 11 月 17 日にかけてインテック大山研修センター（富山市東黒牧）にて開催されました。約 60 名の参加があり，23 の興味深い講演と活発な議論が行われました。

シンポジウムの開催にあたり、平成 17 年度科学研究費補助金
基盤研究 B(2)（代表：吉野雄二）からの援助を頂きました。ここにあらためて御礼申し上げます。

2006 年 1 月

石川工業高等専門学校　河合秀泰

目次

Polarizations and deformation

Mitsuhiro MIYAZAKI
(Kyoto University of Education)
宮崎 充弘 (京都教育大学)
E-mail: g53448@kyokyo-u.ac.jp

1 Introduction

Let k be a field and $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ be the polynomial ring over k with n variables. By the Hochster-Reisner-Stanley theory, there is a one to one correspondence between the set of square-free monomial ideals in S and abstract simplicial complexes with vertex set contained in $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Suppose that I is a square-free monomial ideal in S and Δ is the corresponding simplicial complex. Hochster (see [Sta]) proved that for $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \boldsymbol{Z}^n$,

$$H^i_{\mathfrak{m}}(S/I)_a \simeq \tilde{H}^{i-|\mathrm{supp} a|-1}(\mathrm{link}_\Delta(\mathrm{supp} a); k)$$

if $a_i \leq 0$ for $i = 1, \ldots, n$ and $\mathrm{supp} a \in \Delta$, where $\mathfrak{m}$ is the irrelevant maximal ideal of S, $\mathrm{supp} a := \{i \in [n] \mid a_i \neq 0\}$ and $\mathrm{link}_\Delta(F) := \{\sigma \in \Delta \mid \sigma \cup F \in \Delta \text{ and } \sigma \cap F = \emptyset\}$, and 0 otherwise. Takayama [Tak] generalized this result to not necessarily square-free monomial ideals and proved that if I is a monomial ideal, then

$$H^i_{\mathfrak{m}}(S/I)_a \simeq \tilde{H}^{i-|\mathrm{supp}\_a|-1}(\Delta_a; k),$$

where $\mathrm{supp}\_a := \{i \in [n] \mid a_i < 0\}$, $\Delta_a := \{F \setminus \mathrm{supp}\_a \mid \forall m \in G(I) \exists j \in [n]; j \notin F \text{ and } a_i < \nu_i(m)\}$, $G(I)$ the set of minimal monomial generators of I and $\nu_i(m)$ is the x_i-degree of m.

Meanwhile, there is a mathematical tool called polarization which relates a general monomial ideal to a square-free monomial ideal in a polynomial ring with more variables. In this note, we study the behavior of local cohomology modules under polarization.

The auther expresses his hearty thanks to professor Yuji Yoshino for pointing out a simpler proof of Theorem 1.

2 Polarization

Let k be an infinite field and $S = k[x_1, \dots, x_n]$ the polynomial ring over k with n variables. We use the term "monomial" to mean a monomial with coefficient 1. For a monomial $m = \prod_{i=1}^{n} x_i^{n_i}$, we set $\nu_i(m) := n_i$.

Let I be a (not necessarily square-free) monomial ideal of S. We denote by $G(I)$ the set of minimal monomial generators of I. The polarization of I is square-free monomial ideal in a polynomial ring with more variables defined as follows.

Set $\rho_i := \max\{\nu_i(m) \mid m \in G(I)\}$, $\rho := \rho_1 + \cdots + \rho_n$ and $S' := k[x_{ij} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le \rho_i]$, the polynomial ring with ρ variables. Then the polarization I' of I is the ideal of S' generated by $\{m' \mid m \in G(I),\ m' := \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{\rho_i} x_{ij}\}$. We sometimes assume that S is a subring of S' by identifying x_i with x_{i1} for $i = 1, \dots, n$.

It is well known that $\{x_{i1} - x_{ij} \mid 1 \le i \le n, 2 \le j \le \rho_i\}$ is an S'/I'-regular sequence in any order. In particular, S/I is Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) if and only if so is S'/I'. Furthermore, $S'/IS' \otimes_k K$ and $S'/I' \otimes_k K$ have the same Hilbert function for any extension field K of k.

3 Flat deformation

In this section, we construct a flat family whose general fiber is isomorphic to S'/I' and a special fiber is isomorphic to S'/IS'.

Let t be a new variable and set

$$X_{ij}(t) := \begin{cases} x_{i1} & (j = 1), \\ x_{i1} + t x_{ij} & (j > 1). \end{cases}$$

Set also $m(t) := \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{\nu_i(m)} X_{ij}(t)$ for a monomial m in S. We define an ideal I_u of S' by $I_u := (m(u) \mid m \in G(I))$ for any $u \in k$. If $u \ne 0$, then by the k-algebra homomorphism defined by $x_{ij} \mapsto X_{ij}(u)$, we get an automorphism of S' which maps I' to I_u. Therefore, $S'/I' \simeq S'/I_u$ for any $u \in k$ with $u \ne 0$. On the other hand, it is straightforward to verify that $I_0 = IS'$. So

Theorem 1 *$\{S'/I_u\}_{u\in k}$ is a flat family whose general fiber is S'/I' and a special fiber is S'/IS'. In prticular,*

$$\begin{array}{rcl}\dim_k H^i_{\mathfrak{m}'}(S'/IS')_a & \geq & \dim_k H^i_{\mathfrak{m}'}(S'/I')_a \\ \dim_k \operatorname{Ext}^i_{S'}(k, S'/IS')_a & \geq & \dim_k \operatorname{Ext}^i_{S'}(k, S'/I')_a \\ \dim_k \operatorname{Tor}^{S'}_i(k, S'/IS')_a & \geq & \dim_k \operatorname{Tor}^{S'}_i(k, S'/I')_a\end{array}$$

for any $a \in \boldsymbol{Z}^n$, where $\mathfrak{m}'$ is the irrelevant maximal ideal of S' and we define the $\boldsymbol{Z}^n$-grading on S' by setting $\deg x_{ij} := \boldsymbol{e}_i$.

proof Let I_t be the ideal of $S'[t]$ generated by $\{m(t) \mid m \in G(I)\}$. If we set $\deg t = 0$, then I_t is a $\boldsymbol{Z}^n$-graded ideal and each graded piece of $S'[t]/I_t$ is a finitely generated $k[t]$-module.

Since $k[t]$ is a PID, by the theorem of elementary divisor, we see that $(S'[t]/I_t)_a$, $a \in \boldsymbol{Z}^n$, is isomorphic to a $k[t]$-module of the following form.

$$k[t]/(f_1) \oplus \cdots \oplus k[t]/(f_r) \oplus k[t]^e, \qquad (f_1) \supset (f_2) \supset \cdots \supset (f_r) \neq (0)$$

Suppose that $r > 0$. Let K be an extension field of k which has a root of f_1. Set $T := K[x_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \rho_i]$, and define I_u for $u \in K$ as above. Then $T/I_u \simeq T/I'T$ for any $u \in K$ with $u \neq 0$ and $T/I_0T = T/IT$. Since $T/I'T$ and T/IT have the same Hilbert function, we see that $\dim_K(T/I_u)_a$ is independent of u. On the other hand, in the case where u is a root of f_1, the K-vector space dimension of

$$\begin{array}{rcl}(T/I_u)_a & \simeq & (T[t]/I_tT[t])_a \otimes_{K[t]} K[t]/(t-u) \\ & \simeq & (k[t]/(f_1) \oplus \cdots \oplus k[t]/(f_r) \oplus k[t]^e) \otimes_{K[t]} K[t]/(t-u)\end{array}$$

is larger than the case where u is not a root of f_1. This is a contradiction.

Therefore, we see that $r = 0$ and $(S'[t]/I_t)_a$ is a free $k[t]$-module for any $a \in \boldsymbol{Z}^n$. So $S'[t]/I_t$ is a free $k[t]$-module and we see the first half of the theorem.

The latter half of the theorem is clear from the first half and upper semi-continuity of homological invariants under flat deformation. ∎

4 Post-mortem

Suppose $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \boldsymbol{Z}^n$ and $a_i \leq \rho_i - 1$ for $i = 1, \ldots, n$. Set $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \boldsymbol{Z}^\rho$ by

$$\beta_i := \begin{cases} (\underbrace{0, \ldots, 0}_{a_i+1}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{\rho_i - a_i - 1}) & (a_i \geq 0), \\ (\underbrace{-1, \ldots, -1}_{\rho_i}) & (a_i < 0). \end{cases}$$

Then the author succeeded in proving that

$$\dim_k H^i_{\mathfrak{m}}(S/I)_a = \dim_k H^{i+\rho-n}_{\mathfrak{m}'}(S'/I')_\beta$$

by reducing the problem to the case where $a = (\rho_1 - 1, \rho_2 - 1, \ldots, \rho_n - 1)$ and using the spectral sequence argument.

References

[Sta] Stanley, R. P.: "Combinatorics and Commutative Algebra", Progress in Math., Vol.41, Birkhäuser, Boston/ Basel/ Stuttgart, 1983

[Tak] Takayama, Y.: *Combinatorial characterizations of generalized Cohen-Macaulay monomial ideals.* preprint

CASTELNUOVO-MUMFORD REGULARITY FOR COMPLEXES AND WEAKLY KOSZUL MODULES

KOHJI YANAGAWA

本稿の内容は, [14] からの抜粋である. また, 準備中の論文 [15] の内容のごく一部を, 紹介した箇所も有る.

Introduction

Let $S = k[x_1, \dots, x_d]$ be a polynomial ring over a field k, and $\operatorname{gr} S$ the category of finitely generated graded S-modules. Recently, P. Jørgensen showed that the Castelnuovo-Mumford regularity of a bounded complex can be naturally defined.

Definition-Theorem. (Jørgensen, [7]) *For a bounded complex $M^\bullet$ in $\operatorname{gr} S$, we have*

$$\operatorname{reg}(M^\bullet) := \max\{\, j - i \mid [\operatorname{Tor}_i^S(k, M^\bullet)]_j \neq 0 \,\} = \max\{\, i + j \mid [H^i_{\mathfrak{m}}(M^\bullet)]_j \neq 0 \,\}.$$

Let $E := \bigwedge \langle y_1, \dots, y_d \rangle$ be the exterior algebra, and $\operatorname{gr} E$ the category of finitely generated graded E-modules. By the *Bernstein-Gel'fand-Gel'fand correspondence* (c.f. [4]), we have the functors $\mathcal{L} : D^b(\operatorname{gr} E) \to D^b(\operatorname{gr} S)$ and $\mathcal{R} : D^b(\operatorname{gr} S) \to D^b(\operatorname{gr} E)$ giving the equivalence $D^b(\operatorname{gr} S) \cong D^b(\operatorname{gr} E)$. Then it is easy to see that

$$\operatorname{reg}(M^\bullet) = \max\{\, i \mid H^i(\mathcal{R}(M^\bullet)) \neq 0 \,\} \quad \text{for } M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S).$$

For $N \in \operatorname{gr} E$ and $i \in \mathbb{Z}$, $N_{\langle i \rangle}$ denotes the submodule of N generated by the degree i component N_i. We say N is *weakly Koszul*, if $N_{\langle i \rangle}$ has a linear projective resolution for all i. Eisenbud et.al. ([4]) proved that the i^{th} syzygy $\Omega_i(N)$ of $N \in \operatorname{gr} E$ is weakly Koszul for $i \gg 0$. According to Herzog et al. ([6, 11]), set $\operatorname{ld}(N) := \min\{\, i \in \mathbb{N} \mid \Omega_i(N) \text{ is weakly Koszul} \,\}$.

For $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$, set $\mathcal{H}(M^\bullet)$ to be a complex such that $\mathcal{H}(M^\bullet)^i = H^i(M)$ for all i and the differential maps are zero. Then we have the following.

Theorem. *Let $N \in \operatorname{gr} E$, and $N' := \underline{\operatorname{Hom}}_E(N, E) \in \operatorname{gr} E$ its dual. Then*

$$\operatorname{ld}(N) = \operatorname{reg}(\, \mathcal{H} \circ \mathcal{L}(N') \,).$$

From this, we have a "Bayer-Mumford like bound" of $\operatorname{ld}(N)$ depending only on $\max\{\, \dim_k N_i \mid i \in \mathbb{Z} \,\}$ and n. (If $d \geq 2$, then $\sup\{\, \operatorname{ld}(N) \mid N \in \operatorname{gr} E \,\} = \infty$.) If J is a monomial ideal of $E = \bigwedge \langle y_1, \dots, y_d \rangle$, $d \geq 3$, then $\operatorname{ld}(E/J) \leq d - 2$. This slightly refines a result of Herzog and Römer.

1. Castelnuovo-Mumford regularity for complexes

Let $S = k[x_1, \dots, x_d]$ be a polynomial ring over a field k. We regard S as a graded ring by $\deg x_i = 1$ for each i. Let $\operatorname{Gr} S$ be the category of graded S-modules, and $\operatorname{gr} S$ its full subcategory consisting of finitely generated modules. (If A is a graded ring, $\operatorname{Gr} A$ and $\operatorname{gr} A$ denote the similar categories for *left* A-modules.)

Let $C^b(\operatorname{Gr} S)$ be the category of bounded cochain complexes in $\operatorname{Gr} S$, and $D^b(\operatorname{Gr} S)$ its derived category. Then there is an equivalence $D^b(\operatorname{gr} S) \cong D^b_{\operatorname{gr} S}(\operatorname{Gr} S)$. So we will freely identify these categories. For $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i \in \operatorname{Gr} S$ and an integer j, $M(j)$ denotes the shifted module with $M(j)_i = M_{i+j}$. For a complex $M^\bullet \in C^b(\operatorname{Gr} S)$, $M^\bullet[j]$ denotes the j^{th} translation of $M^\bullet$, that is, $M^\bullet[j]$ is the complex with $M^\bullet[j]^i = M^{i+j}$. So, if $M \in \operatorname{Gr} S$, then $M[j]$ is the cochain complex $\cdots \to 0 \to M \to 0 \to \cdots$, where M sits in the $(-j)^{\text{th}}$ position.

For $M \in \operatorname{gr} S$, set $\iota(M) := \inf\{\, i \mid M_i \neq 0 \,\} > -\infty$. If $M, N \in \operatorname{Gr} S$, then $\underline{\operatorname{Hom}}_S(M, N) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Gr} S}(M, N(i))$ has a natural graded S-module structure. Similarly, for complexes $M^\bullet, N^\bullet \in C^b(\operatorname{Gr} S)$, we can define $\underline{\operatorname{Hom}}^\bullet_S(M^\bullet, N^\bullet)$, $\underline{\operatorname{Ext}}^i_S(M^\bullet, N^\bullet)$ and $R\underline{\operatorname{Hom}}_S(M^\bullet, N)$.

For $M^\bullet \in C^b(\operatorname{gr} S)$ and $i, j \in \mathbb{Z}$, set $\beta^i_j(M^\bullet) := \dim_k [\underline{\operatorname{Ext}}^{-i}_S(M^\bullet, k)]_{-j}$. Then the minimal free resolution of $M^\bullet$ is of the form

$$\cdots \to \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta^{i-1}_j} \to \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta^i_j} \to \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta^{i+1}_j} \to \cdots.$$

Clearly, $\beta^i_j(M^\bullet)$ is an invariant of isomorphic classes in $D^b(\operatorname{gr} S)$.

Recently, P. Jørgensen showed that the notion of *Castelnuovo-Mumford regularity* of a module $M \in \operatorname{gr} S$ can be generalized to bounded complexes.

Definition 1.1. For $M^\bullet \in C^b(\operatorname{gr} S)$, set

$$\operatorname{reg}(M^\bullet) := \max\{\, i + j \mid \beta^i_j(M^\bullet) \neq 0 \,\}.$$

Theorem 1.2 (Jørgensen, [7]). *For $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$, we have*

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{\, i + j \mid [H^i_{\mathfrak{m}}(M^\bullet)]_j \neq 0 \,\}. \tag{1.1}$$

When $M^\bullet$ is a module, the above theorem is a fundamental result obtained in Eisenbud and Goto [5]. Since Jørgensen [7] worked in much more general situation, his proof is quite technical. But there is a simple proof in our case using the local duality theorem for $D^b(\operatorname{gr} S)$ given by the author [14].

Proof. Set $Q^\bullet := \underline{\operatorname{Hom}}^\bullet_R(P^\bullet, S(-d)[d]\,)$, where $P^\bullet$ is a minimal free resolution of $M^\bullet$. Note that the injective resolution $\omega^\bullet$ of $S(-d)[d]$ in $\operatorname{Gr} S$ is a graded normalized dualizing comples of S. We also remark that $\underline{\operatorname{Hom}}_A(S(-j), S(-d)) \cong S(-d+j)$, and $Q^\bullet$ is a *minimal* free resolution of $R\underline{\operatorname{Hom}}_S(M^\bullet, \omega^\bullet)$. Let s be the right hand side of (1.1), and l the minimal integer with the property that $\beta^l_{s-l}(M^\bullet) \neq 0$. Then $\iota(Q^{-d-l}) = l - s + d$, and $\iota(Q^{-d-l+1}) \geq l - s + d$. Since $Q^\bullet$ is minimal, we have

$$0 \neq H^{-d-l}(Q^\bullet)_{l-s+d} = \underline{\operatorname{Ext}}^{-d-l}_S(M^\bullet, \omega^\bullet)_{l-s+d} = (H^{d+l}_{\mathfrak{m}}(M^\bullet)_{-l+s-d})^\vee.$$

Thus $\operatorname{reg}(M^\bullet) \geq s$. The opposite inequality can be proved similarly and more easily. □

Let $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$ and $l \in \mathbb{Z}$. We say $M^\bullet$ has an *l-linear resolution*, if $\beta^i_j(M^\bullet) \neq 0$ implies $i+j=l$. For a module $M \in \operatorname{gr} S$ and an integer r, set $M_{\geq r} := \bigoplus_{i \geq r} M_i$ to be a submodule of M. If $M^\bullet \in C^b(\operatorname{gr} S)$, then $(M^\bullet)_{\geq r}$ denotes the subcomplex of $M^\bullet$ whose i^{th} term of $(M^i)_{\geq r-i}$. Even if $M^\bullet \cong N^\bullet$ in $D^b(\operatorname{gr} S)$, we have $(M^\bullet)_{\geq r} \not\cong (N^\bullet)_{\geq r}$ in general. But whether $M_{\geq r}$ has an r-linear resolution only depends on isomorphic classes in $D^b(\operatorname{gr} S)$. Moreover, we have the following.

Proposition 1.3. *For a complex $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$ and an integer r, $(M^\bullet)_{\geq r}$ has an r-linear free resolution if and only if $r \geq \operatorname{reg}(M^\bullet)$.*

Let $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ be a (not necessarily commutative) graded k-algebra with $\mathfrak{r} := \bigoplus_{i>0} A_i$. We say A is *Koszul*, if the following conditions are satisfied:

(1) $\dim_k A_i < \infty$ for all i.
(2) A_0 is a semisimple ring.
(3) A left A-module $A_0 = A/\mathfrak{r}$ has a 0-linear projective resolution. That is, $\beta^i_j(A_0) := \dim_k \underline{\operatorname{Ext}}^{-i}_A(A_0, A_0)_{-j} = 0$ for all $i \neq j$.

In the condition (3) of the above definition, we can regard A_0 as a *right* A-module (we get the equivalent definition). If A satisfies the condition (1), then $\beta^i_i(A_0) < \infty$ for all i.

The notion of *Artin-Schelter regular algebra* (AS regular, for short) is very important in non-commutative algebraic geometry. See, for example, [16]. Many AS regular algebras are noetherian and Koszul (the polynomial ring S is a primary example). If A is a noetherian AS regular algebra, then the "local duality theorem" holds for $D^b(\operatorname{gr} A)$ as shown in [16]. So if A is also Koszul and we define $\operatorname{reg}(M^\bullet)$ for $M^\bullet \in C^b(\operatorname{gr} A)$ in the similar way, then we always have $\operatorname{reg}(M^\bullet) < \infty$ and Theorem 1.2 is valid over A (the above proof also works here). On the other hand, if B is just Koszul (but not AS regular), then $\operatorname{reg}(M^\bullet)$ can be ∞. But if once we have $\operatorname{reg}(M^\bullet) < \infty$, then Proposition 1.3 holds.

2. BGG CORRESPONDENCE

The results in this section hold in much wider situation. See [14, 15]. But, for the simplicity, we concentrate in the polynomial ring case here. So all results in this section have been appeared in Eisenbud et al. [4].

For a complex $N^\bullet \in C^b(\operatorname{gr} E)$, set $\mathcal{L}(N^\bullet) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S \otimes_k N^i$ and $\mathcal{L}(N^\bullet)^m = \bigoplus_{i-j=m} S \otimes_k N^i_j$. Here the degree of $z \otimes y \in S_l \otimes_k N^i_j$ is $l-j$. The differential defined by

$$\mathcal{L}(N^\bullet)^m \supset S \otimes_k N^i_j \ni 1 \otimes z \mapsto \sum_{1 \leq l \leq d} x_l \otimes y_l z + (-1)^m (1 \otimes \delta^i(z)) \in \mathcal{L}(N^\bullet)^{m+1}$$

makes $\mathcal{L}(N^\bullet)$ a cochain complex of free S-modules. Here δ^i is the i^{th} differential map of $N^\bullet$. Moreover, $\mathcal{L}$ gives a functor from $D^b(\operatorname{gr} E)$ to $D^b(\operatorname{gr} S)$.

For $M \in \operatorname{gr} S$ and $i \in \mathbb{Z}$, we can define a graded E-module structure on $\operatorname{Hom}_k(E, M_i)$ by $(af)(b) = f(ba)$. Since $\operatorname{Hom}_k(E,k) \cong E(d)$, we have

$$\operatorname{Hom}_k(E, M_i) \cong E(d) \otimes_k M_i \cong E^{\oplus \dim_k M_i}(d+i).$$

(The last isomorphism is just the degree convention we adopt here.) Set $\mathcal{R}(M) = \operatorname{Hom}_k(E, M)$ and $\mathcal{R}^n(M) = \operatorname{Hom}_k(E, M_n)$. The differential defined by

$$\mathcal{R}^n(M) = \operatorname{Hom}_k(E, M_n) \ni f \mapsto [e \mapsto \sum_{1 \leq i \leq d} x_i f(y_i e)] \in \operatorname{Hom}_k(E, M_{n+1}) = \mathcal{R}^{n+1}(M)$$

makes $\mathcal{R}(M)$ a cochain complex of free E-modules. We can also construct $\mathcal{R}(M^\bullet)$ from a complex $M^\bullet$ in natural way. Then $\mathcal{R}$ gives a functor from $D^b(\operatorname{gr} S)$ to $D^b(\operatorname{gr} E)$. See [4] for details. The following is a crucial result.

Theorem 2.1 (BGG correspondence, c.f.[4]). *The functors $\mathcal{L}$ and $\mathcal{R}$ give a category equivalence $D^b(\operatorname{gr} S) \cong D^b(\operatorname{gr} E)$.*

The derived equivalence of the above type holds for a wide class of Koszul algebras after suitable modification (c.f. [2, 9]). This equivalence is called the *Koszul duality*, and the Yoneda algebra $\operatorname{Ext}^\bullet_A(A_0, A_0)$ is the counter part of A (recall that $E \cong \operatorname{Ext}^\bullet_S(k, k)$ and $S \cong \operatorname{Ext}^\bullet_E(k, k)$ as graded rings). So we can develop the theory of this section in much wider context. See [14, 15].

Theorem 2.2 (Eisenbud et al. [4]). *For $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$, we have*

$$\beta^i_j(M^\bullet) = \dim_k H^{i+j}(\mathcal{R}(M^\bullet))_{-j}.$$

Proof. Note that $(-)^\vee := \underline{\operatorname{Hom}}_k(-, k)$ gives an exact duality functor from $\operatorname{gr} E$ to itself. (For graded E-modules, we do not have to distinguish left modules form right ones.) Then the assertion follows from

$$\begin{aligned}
\underline{\operatorname{Ext}}^i_S(M^\bullet, k)_j &\cong \operatorname{Hom}_{D^b(\operatorname{gr} S)}(M^\bullet, k[i](j)) \\
&\cong \operatorname{Hom}_{D^b(\operatorname{gr} E)}(\,\mathcal{R}(M^\bullet),\, \mathcal{R}(k[i](j))\,) \\
&\cong \operatorname{Hom}_{D^b(\operatorname{gr} E)}(\,\mathcal{R}(k[i](j))^\vee,\, \mathcal{R}(M^\bullet)^\vee\,) \\
&\cong \operatorname{Hom}_{D^b(\operatorname{gr} E)}(\,E[-i-j](j),\, \mathcal{R}(M^\bullet)^\vee\,) \\
&\cong (H^{i+j}(\mathcal{R}(M^\bullet))_{-j})^\vee.
\end{aligned}$$

□

Corollary 2.3. *For $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$, we have*

$$\operatorname{reg}(M^\bullet) = \max\{\, i \mid H^i(\mathcal{R}(M^\bullet)) \neq 0\,\}.$$

The *linear strand* of a minimal free resolution is the notion introduced by Eisenbud. Using this, we can refine Theorem 2.2.

Let $P^\bullet$ be a *minimal* free resolution of $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$. Consider the decomposition $P^i := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} P^{i,j}$ such that $P^{i,j} \cong S^{\oplus n}(-j)$ for some n. For an integer l, we define the *l-linear strand* $\operatorname{lin}_l(M^\bullet)$ of the minimal free resolution $P^\bullet$ of $M^\bullet$ as follows: The term $\operatorname{lin}_l(M^\bullet)^i$ of cohomological degree i is $P^{i,l-i}$ and the differential $P^{i,l-i} \to P^{i+1,l-i-1}$ is the corresponding component of the differential $P^i \to P^{i+1}$ of $P^\bullet$. So the differential of $\operatorname{lin}_l(M^\bullet)$ is represented by matrices whose entries are elements in S_1. Set $\operatorname{lin}(M^\bullet) := \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} \operatorname{lin}_l(M^\bullet)$. It is obvious that $\beta^i_j(M^\bullet) = \beta^i_j(\operatorname{lin}(M^\bullet))$ for all i, j. Similarly, we can define the linear strand $\operatorname{lin}(N^\bullet)$ of the minimal projective resolution of $N^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} E)$.

To state the next result, we have to introduce another operation on complexes. For $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$, set $\mathcal{H}(M^\bullet) \in C^b(\operatorname{gr} S)$ to be a complex such that $\mathcal{H}(M^\bullet)^i = H^i(M)$ for all i and the differential maps are zero. Then it is easy to see that $\operatorname{reg}(\mathcal{H}(M^\bullet)) \geq \operatorname{reg}(M^\bullet)$. The difference $\operatorname{reg}(\mathcal{H}(M^\bullet)) - \operatorname{reg}(M^\bullet)$ can be arbitrary large, and the meaning of this difference will be studied in the next section. For $N^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} E)$, we can define $\mathcal{H}(N^\bullet) \in C^b(\operatorname{gr} E)$ in the similar way.

Proposition 2.4 (Eisenbud et al, [4]). *If $M^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} S)$ and $N^\bullet \in D^b(\operatorname{gr} E)$, then we have*

$$\operatorname{lin}(\mathcal{L}(N^\bullet)) = \mathcal{L}(\mathcal{H}(N^\bullet)) \quad \text{and} \quad \operatorname{lin}(\mathcal{R}(M^\bullet)^\vee) = \mathcal{R}(\mathcal{H}(M^\bullet))^\vee,$$

where $(-)^\vee := \operatorname{Hom}_k(-, k)$ is an exact duality functor from $\operatorname{gr} E$ to itself.

Note that $N \in \operatorname{gr} E$ is a free module, if and only if it is a projective module, if and only if it is an injective module. In halfway of the proof of Proposition 2.4, we see that $\mathcal{R}(\mathcal{H}(M^\bullet))$ is the linear strand of the minimal *injective* resolution of $\mathcal{R}(M^\bullet) \in D^b(\operatorname{gr} E)$. But $(-)^\vee$ interchanges (the linear strand of) injective resolution with (that of) projective resolution, so we get the second equality of Proposition 2.4.

3. Weakly Koszul Modules

Let A be a (not necessarily commutative) Koszul algebra with the graded Jacobson radical $\mathfrak{r} := \bigoplus_{i>0} A_i$. For $M \in \operatorname{gr} A$ and $i \in \mathbb{Z}$, $M_{\langle i \rangle}$ denotes the submodule of M generated by its degree i component M_i. The next result naturally appears in the study of Koszul algebras, and might be a folk-theorem.

Proposition 3.1 (c.f. [14, Proposition 4.1]). *In the above situation, the following are equivalent.*

1. *$M_{\langle i \rangle}$ has an i-linear resolution for all i.*
2. *$H^i(\operatorname{lin}(M)) = 0$ for all $i \neq 0$.*
3. *The associated graded module $\operatorname{gr}_{\mathfrak{r}} M := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{r}^i M / \mathfrak{r}^{i+1} M$ of M has a 0-linear resolution as a $\operatorname{gr}_{\mathfrak{r}} A \,(\cong A)$-modules.*

Note that if $M \in \operatorname{gr} A$ has an l-linear resolution for some l, then it is weakly Koszul. Assume that $\operatorname{reg}(M) < \infty$ (if A is commutative, then all $M \in \operatorname{gr} A$ satisfies this condition by [1]). Then $M_{\geq r}$ has an r-linear resolution for all $r \geq \operatorname{reg}(M)$, in particular, $M_{\geq r}$ is weakly Koszul for $r \gg 0$.

If M is weakly Koszul, then the i^{th} syzygy $\Omega_i(M)$ is also for all $i \geq 1$. According to Herzog et al. [6, 11], we set

$$\operatorname{ld}(M) := \inf\{\, i \in \mathbb{N} \mid \Omega_i(M) \text{ is weakly Koszul} \,\}$$

for $M \in \operatorname{gr} A$. Even if A is commutative, $\operatorname{ld}(M)$ can be ∞. In fact, as shown in [6, Proposition 1.8], if A is a commutative Koszul ring with $A_0 = k$, and $\operatorname{ld}(M) < \infty$, then the Poincaré series $P_M(\lambda) := \sum_{i=0}^{\infty} \dim_k(\operatorname{Ext}^i_R(M, k)) \cdot \lambda^i$ is a rational function. But it is known that the commutative Koszul ring $R := k[x_1, x_2, x_3]/(x_1, x_2, x_3)^2 \otimes_k k[y_1, y_2, y_3]/(y_1, y_2, y_3)^2$ has a module $M \in \operatorname{gr} R$ such that $P_M(\lambda)$ is irrational. Clearly, $\operatorname{ld}(M) = \infty$. (This observation was given in the introduction of [6]).

Theorem 3.2 (Eisenbud et al. [4]). *Let $E = \bigwedge\langle y_1, \dots, y_d\rangle$ be the exterior algebra. If $N \in \operatorname{gr} E$, then we have*

$$\operatorname{ld}(N) = \operatorname{reg}_S(\operatorname{Ext}^\bullet_E(N, k)).$$

Here S is the Yoneda algebra $\operatorname{Ext}^\bullet_E(k,k)$, which is isomorphic to the polynomial ring $k[x_1, \dots, x_d]$, and we regard $\operatorname{Ext}^\bullet_E(N,k)$ as a graded S-module by the Yoneda product. Moreover, $\operatorname{Ext}^\bullet_E(N,k)$ is finitely generated as an S-module for all $N \in \operatorname{gr} E$, hence we have $\operatorname{ld} N < \infty$.

The equality $\operatorname{ld}(M) = \operatorname{reg}_{E(A)}(\operatorname{Ext}^\bullet_A(M, A_0))$ holds for a general Koszul algebra A and $M \in \operatorname{gr} A$, where $E(A)$ is the Yoneda algebra $\operatorname{Ext}^\bullet_A(A/\mathfrak{r}, A/\mathfrak{r})$. See [8, 6]. Hence, as shown in [8], if $E(A)$ is (left) noetherian and has finite global dimension, we have $\operatorname{ld} M < \infty$ for all $M \in \operatorname{gr} A$.

The next result gives the second description of $\operatorname{ld}(N)$ which might be more useful and informative than that of Theorem 3.2. Using the Koszul duality, a similar result holds for a general Koszul algebra.

Theorem 3.3. *Let $N \in \operatorname{gr} E$, and $N' := \underline{\operatorname{Hom}}_E(N, E) \in \operatorname{gr} E$ its dual. Then we have*

$$\operatorname{ld}(N) = \operatorname{reg}_S(\mathcal{H} \circ \mathcal{L}(N')).$$

Proof. If we take $M^\bullet := \mathcal{L}(N')$ in Proposition 2.4, then we have $\operatorname{lin}(N') = \mathcal{R} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{L}(N')$. So the assertion follows from Corollary 2.3 and the second characterization of weakly Koszul modules given in its definition. $\square$

If $d \geq 2$, then $\sup\{\operatorname{ld}(N) \mid N \in \operatorname{gr} E\} = \infty$. In fact, $N := E/\operatorname{soc}(E)$ satisfies $\operatorname{ld}(N) \geq 1$. And the i^{th} *cosyzygy* $\Omega_{-i}(N)$ of N (since E is selfinjective, we can consider cosyzygies) satisfies $\operatorname{ld}(\Omega_{-i}(N)) > i$. But we have an upper bound of $\operatorname{ld}(N)$ depending only on $\max\{\dim_k N_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ and d. Before stating this, we recall a result on a upper bound of $\operatorname{reg}(M)$ for $M \in \operatorname{gr} S$.

Theorem 3.4 (Brodmann and Lashgari, [3]). *Let $S = k[x_1, \dots, x_d]$ be a polynomial ring. Assume that a graded submodule $M \subset S^{\oplus n}$ is generated by elements whose degrees are at most δ. Then we have $\operatorname{reg}(M) \leq n^{d!}(2\delta)^{(d-1)!}$.*

When $n = 1$ (i.e., when M is an ideal), the above bound is given by Bayer and Mumford, and sharper than it seems. For our study on $\operatorname{ld}(N)$, the case when $\delta = 1$ (but n is general) is essential. When $n = \delta = 1$, we have $\operatorname{reg}(M) = 1$. So the bound should be largely improved when $\delta = 1$.

Proposition 3.5. *Let $E = \bigwedge\langle y_1, \dots, y_d\rangle$ be an exterior algebra, and $N \in \operatorname{gr} E$. Set $n := \max\{\dim_k N_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Then $\operatorname{ld}(N) \leq n^{d!}2^{(d-1)!}$.*

Proof. Set $T := \underline{\operatorname{Hom}}_E(N, E)$. By Theorem 3.3, it suffices to prove $\operatorname{reg}(H^i(\mathcal{L}(T))) + i \leq n^{d!}2^{(d-1)!}$ for each i. We may assume that $i = 0$. Note that $H^0(\mathcal{L}(T))$ is the cohomology of the sequence

$$S \otimes_k T_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} S \otimes_k T_0 \xrightarrow{\partial_0} S \otimes_k T_1.$$

Since $\mathrm{im}(\partial_0)(-1)$ is a submodule of $S^{\oplus \dim_k T_1}$ generated by elements of degree 1, we have $\mathrm{reg}(\mathrm{im}(\partial_0)) < n^{d!}2^{(d-1)!}$ by Theorem 3.4. Consider the short exact sequence $0 \to \ker(\partial_0) \to S \otimes_k T_0 \to \mathrm{im}(\partial_0) \to 0$. Since $\mathrm{reg}(S \otimes_k T_0) = 0$, we have $\mathrm{reg}(\ker(\partial_0)) \leq n^{d!}2^{(d-1)!}$. Similarly, we have $\mathrm{reg}(\mathrm{im}(\partial_{-1})) \leq n^{d!}2^{(d-1)!}$ by Theorem 3.4. By the short exact sequence $0 \to \mathrm{im}(\partial_{-1}) \to \ker(\partial_0) \to H^0(\mathcal{L}(T)) \to 0$, we have $\mathrm{reg}(H^0(\mathcal{L}(T))) \leq n^{d!}2^{(d-1)!}$. $\square$

In a special case, there is a much more reasonable bound for $\mathrm{ld}(N)$. In the sequel, we regard $S = k[x_1, \dots, x_d]$ as an $\mathbb{N}^d$-graded ring with $\deg x_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ where 1 is at the i^{th} position. Similarly, the exterior algebra $E = \bigwedge \langle y_1, \dots, y_d \rangle$ is also an $\mathbb{N}^d$-graded ring. Let $^*\mathrm{gr}\, S$ be the category of finitely generated $\mathbb{Z}^d$-graded S-modules. We have a similar category $^*\mathrm{gr}\, E$ for E. If $M \in {}^*\mathrm{gr}\, S$, then $\underline{\mathrm{Hom}}_S(-, M) := \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{Hom}_{^*\mathrm{gr}\, S}(-, M(\mathbf{a}))$ gives a contravariant functor from $^*\mathrm{gr}\, S$ to itself. Since E is selfinjective, $\underline{\mathrm{Hom}}_E(-, E) := \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{Hom}_{^*\mathrm{gr}\, E}(-, E(\mathbf{a}))$ gives an exact duality functor from $^*\mathrm{gr}\, E$ to itself. Since $\mathbb{Z}^d$-graded modules can be regarded as $\mathbb{Z}$-graded modules in the natural way, we can discuss "reg" and "ld" for $\mathbb{Z}^d$-graded modules.

For $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$, set $\mathrm{supp}(\mathbf{a}) := \{i \mid a_i > 0\} \subset [d] := \{1, \dots, d\}$. We say $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$ is *squarefree* if $a_i = 0, 1$ for all $i \in [d]$. When $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$ is squarefree, we sometimes identify $\mathbf{a}$ with $\mathrm{supp}(\mathbf{a})$. For example, if $F \subset [d]$, then $S(-F)$ means the free module $S(-\mathbf{a})$, where $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^d$ is the squarefree vector with $\mathrm{supp}(\mathbf{a}) = F$.

Definition 3.6 ([13]). We say $M \in {}^*\mathrm{gr}\, S$ is *squarefree*, if M has a presentation of the form

$$\bigoplus_{F \subset [d]} S(-F)^{m_F} \to \bigoplus_{F \subset [d]} S(-F)^{n_F} \to M \to 0$$

for some $m_F, n_F \in \mathbb{N}$.

Stanley-Reisner rings (that is, the quotient rings of S by squarefree monomial ideals) and many modules related to them are squarefree. Let Sq_S be the full subcategory of $^*\mathrm{gr}\, S$ consisting of squarefree modules. Then Sq_S is closed under kernels, cokernels, and extensions in $^*\mathrm{gr}\, S$. Thus Sq_S is an abelian category. Moreover, we have $D^b(\mathrm{Sq}_S) \cong D^b_{\mathrm{Sq}_S}(^*\mathrm{gr}\, S)$.

Definition 3.7 (Römer [10]). We say $N \in {}^*\mathrm{gr}\, E$ is *squarefree*, if $N = \bigoplus_{F \subset [d]} N_F$ (i.e., if $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$ is not squarefree, then $N_{\mathbf{a}} = 0$).

A monomial ideal of E is always a squarefree E-module. Let Sq_E be the full subcategory of $^*\mathrm{gr}\, E$ consisting of squarefree modules. Then Sq_E is an abelian category with $D^b(\mathrm{Sq}_E) \cong D^b_{\mathrm{Sq}_E}(^*\mathrm{gr}\, E)$. If N is a squarefree E-module, then so is $\underline{\mathrm{Hom}}_E(N, E)$. We have functors $\mathcal{S} : \mathrm{Sq}_E \to \mathrm{Sq}_S$ and $\mathcal{E} : \mathrm{Sq}_S \to \mathrm{Sq}_E$ giving an equivalence $\mathrm{Sq}_S \cong \mathrm{Sq}_E$. Here $\mathcal{S}(N)_F = N_F$ for $N \in \mathrm{Sq}_E$ and $F \subset [d]$, and the multiplication map $\mathcal{S}(N)_F \ni z \mapsto x_i z \in \mathcal{S}(N)_{F \cup \{i\}}$ for $i \notin F$ is given by $\mathcal{S}(N)_F = N_F \ni z \mapsto (-1)^{\alpha(i,F)} y_i z \in N_{F \cup \{i\}} = \mathcal{S}(N)_{F \cup \{i\}}$, where $\alpha(i, F) = \#\{j \in F \mid j < i\}$. See [10, 14] for detail. Since a free module $E(\mathbf{a})$ is *not* squarefree unless $\mathbf{a} = 0$, the syzygies of a squarefree E-module are *not* squarefree.

Proposition 3.8 (Herzog-Römer, [11]). *If N is a squarefree E-module (e.g., $N = E/J$ for a monomial ideal J), then we have*

$$\mathrm{ld}(N) \leq \mathrm{proj.\,dim}_S \mathcal{S}(N) \quad \textit{and} \quad \mathrm{ld}(N) \leq d-1.$$

While the former inequality is very useful, the difference $\mathrm{ld}(N) - \mathrm{proj.\,dim}_S \mathcal{S}(N)$ can be d (e.g., take $N = k$). So the next *equality* is important.

Proposition 3.9. *Let $N \in \mathrm{Sq}_E$ and set $N' := \underline{\mathrm{Hom}}_E(N, E)$. Then we have*

$$\mathrm{ld}(N) = \max\{\, i - \mathrm{depth}_S(\,\mathrm{Ext}_S^{d-i}(\mathcal{S}(N'), S)\,) \mid 0 \leq i \leq d\,\}. \tag{3.1}$$

Here we set the depth of the 0 module to be $+\infty$.

If $M := \mathrm{Ext}_S^{d-i}(\mathcal{S}(N'), S) \neq 0$, then $\mathrm{depth}_S M \leq \dim_S M \leq i$. Therefore all members in the set of the right side of (3.1) are non-negative or $-\infty$. We also remark that since $\mathrm{depth}_S(\,\mathrm{Hom}_S(\mathcal{S}(N'), S)\,) > 0$, the right side of the equality (3.1) is at most $d-1$. The right side of the equality (3.1) is 0 if and only if $\mathcal{S}(N')$ is *sequentially Cohen-Macaulay* by [12, III. Theorem 2.11]. Thus $\mathrm{ld}(N)$ is something like "sequentially Cohen-Macaulay defect" of $\mathcal{S}(N')$.

Idea of proof of Proposition 3.9. Let us recall results from [14]. The functors $\mathcal{L}$ and $\mathcal{R}$ for BGG correspondence give the $\mathbb{Z}^d$-graded functors between $D^b({}^*\mathrm{gr}\, S)$ and $D^b({}^*\mathrm{gr}\, E)$, which are also denoted by $\mathcal{L}$ and $\mathcal{R}$. Then we have the $\mathbb{Z}^d$-graded BGG correspondence $D^b({}^*\mathrm{gr}\, S) \cong D^b({}^*\mathrm{gr}\, E)$. If we restrict this equivalence to the subcategories $D^b(\mathrm{Sq}_S) \subset D^b({}^*\mathrm{gr}\, S)$ and $D^b(\mathrm{Sq}_E) \subset D^b({}^*\mathrm{gr}\, E)$, then we get $D^b(\mathrm{Sq}_S) \cong D^b(\mathrm{Sq}_E)$. For $N \in \mathrm{Sq}_E$, we have $\mathcal{L}(N) \cong \mathbf{A}(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_S(N, S(-\mathbf{1})[d]))(\mathbf{1})$. Here $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^d$, and $\mathbf{A} := \mathcal{S} \circ \mathrm{Hom}_E(-, E) \circ \mathcal{E}$ is an exact duality functor from Sq_S to itself (called the *Alexander duality functor*). By [10], $\mathrm{reg}(M) = \mathrm{proj.\,dim}(\mathbf{A}(M))$ for a squarefree S-module M. So the assertion follows from Theorem 3.3. ☐

Example 3.10. For an integer i with $1 \leq i \leq d-1$, there is a squarefree E-module N such that $\mathrm{ld}\, N = \mathrm{proj.\,dim}_S \mathcal{S}(N) = i$. Thus the inequalities of Proposition 3.8 is optimal. In fact, if M is the $\mathbb{Z}^d$-graded i^{th} syzygy of $k = S/\mathfrak{m}$, then M is squarefree, and the computation using the equality (3.1) shows that $N := \underline{\mathrm{Hom}}_E(\mathcal{E}(M), E) \in \mathrm{Sq}_E$ satisfies the expected condition. But, for a monomial ideal $J \subset E$, the inequalities of Proposition 3.8 is not sharp as the next result shows.

Corollary 3.11. *If $d \geq 3$ and $J \subset E$ is a monomial ideal, then $\mathrm{ld}(E/J) \leq d-2$.*

Idea of proof. Let $\Delta \subset 2^{[d]}$ be a simplicial complex (i.e., $F \in \Delta$ and $G \subset F$ imply $G \in \Delta$). It is easy to see that the *Alexander dual* $\Delta^\vee := \{\, F \subset [d] \mid [d] \setminus F \notin \Delta\,\}$ of Δ is a simplicial complex again. Set $J_\Delta = (\,\prod_{i \in F} y_i \mid F \subset [d], F \notin \Delta\,)$ to be a monomial ideal of E. Any monomial ideal of E is given in this way. Similarly, set $I_{\Delta^\vee} := (\,\prod_{i \in F} x_i \mid F \subset [d], F \notin \Delta^\vee\,) \subset S$. If $J = J_\Delta$, then $\mathcal{S}(J') \cong I_{\Delta^\vee}$. Since $I_{\Delta^\vee}$ is a radical ideal, the depth of the module $\mathrm{Ext}_S^{d-i}(I_{\Delta^\vee}, S)$ is relatively high. ☐

Example 3.12. For each $d \geq 3$, there is a monomial ideal $J \subset E$ with $\mathrm{ld}(E/J) = d-2$. In fact, if Δ is a simplicial complex with d vertices whose geometric realization is a (1-dimensional) circle, then the monomial ideal J_Δ defined in the proof of Corollary 3.11 satisfies this equality.

References

[1] L. Avramov and D. Eisenbud, *Regularity of modules over a Koszul algebra,* J. Algebra **153** (1992), 85–90.

[2] A. Beilinson, V. Ginzburg and W. Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 473–527.

[3] M. Brodmann and A.F. Lashgari, *A diagonal bound for cohomological postulation numbers of projective schemes*, J. Algebra **265** (2003), 631–650.

[4] D. Eisenbud, G. Fløystad and F.-O. Schreyer, *Sheaf cohomology and free resolutions over exterior algebra,* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4397-4426.

[5] D. Eisenbud and S. Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicity*, J. Algebra **88** (1984), 89–133.

[6] J. Herzog and S. Iyengar, *Koszul modules*, J. Pure Appl. Algebra. **201** (2005) 154-188.

[7] P. Jørgensen, *Linear free resolutions over non-commutative algebras,* Compos. Math. **140** (2004), 1053–1058.

[8] R. Martinez-Villa and D. Zacharia, *Approximations with modules having linear resolutions*, J. Algebra **266** (2003), 671–697.

[9] I. Mori, *Rationality of the Poincare series for Koszul algebras,* J. Algebra **276** (2004), 602–624.

[10] T. Römer, *Generalized Alexander duality and applications,* Osaka J. Math. **38** (2001), 469–485.

[11] T. Römer, On minimal graded free resolutions, Thesis, University of Essen, 2001.

[12] R. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, 2nd ed. Progress in Math., **41**. Birkhäuser 1996.

[13] K. Yanagawa, *Derived category of squarefree modules and local cohomology with monomial ideal support*, J. Math. Soc. Japan. **56** (2004) 289–308.

[14] K. Yanagawa, *Castelnuovo-Mumford regularity for complexes and weakly Koszul modules*, J. Pure Appl. Algebra, in press.

[15] K. Yanagawa, *Koszul duality and linearity defect*, in preparation.

[16] A. Yekutieli, *Dualizing complexes over noncommutative graded algebras*, J. Algebra **153** (1992), 41–84.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

E-mail address: yanagawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

A class of modules of reduction number one

早坂　太
(明治大学理工学部)

Katz-Kodiyalam は，論文 [6] において，2 次元正則局所環上の整閉な加群はいつも reduction number が高々1 であって，その Rees 環は Cohen-Macaulay であることを示している．本報告では、2 次元 Cohen-Macaulay 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の加群で，整閉とは限らないが reduction number が高々1 であるような加群を構成する．

1　序

以下, $(A, \mathfrak{m})$ は可換な Noether 局所環とし，d で環 A の次元を表す．$F = A^r$ は rank $r > 0$ の自由加群とし，$M \subseteq F$ をその部分加群で rank を持つものとする．このとき，加群 M の Rees 環とは, 次で定義される環 A 上の多項式環の部分代数である．

$$\mathcal{R}(M) := \mathrm{Im}(\mathrm{Sym}_A(M) \to \mathrm{Sym}_A(F)) \subseteq S := \mathrm{Sym}_A(F).$$

多項式環 S の部分代数 $\mathcal{R}(M)$ の n 次斉次成分を M^n と書き，M の n 乗と呼ぶ．同様に F の部分加群 $N, M \subseteq F$ に対して，その積 NM を $\mathcal{R}(N)$ の 1 次斉次成分と $\mathcal{R}(M)$ の 1 次斉次成分との積（この積は多項式環 S の中での積のことである）で生成される S_2 の A-部分加群と定める．すなわち，加群の積や冪はすべて多項式環 S の中で考えるものとする．M の部分加群 $N \subseteq M$ が M の reduction であるとは，ある整数 $n \geq 0$ が存在して，等式 $M^{n+1} = NM^n$ が成り立つときをいう．$N \subseteq M$ が reduction であることと環拡大 $\mathcal{R}(N) \subseteq \mathcal{R}(M)$ が整であることは同値である．reduction の中で包含関係について極小なもののことを極小 reduction と呼ぶ．また，$\lambda(M) = \dim(\mathcal{R}(M) \otimes A/\mathfrak{m})$ とおき M の analytic spread と呼ぶ．剰余体が無限体のときは，$N \subseteq M$ が極小 reduction であることと $\lambda(M) = \mu_A(N)$ ($= N$ の極小生成元の個数) であることは同値である．また，$\ell_A(F/M) < \infty$ のとき，$\lambda(M) = d + r - 1$ である．これらの記号の下，Katz-Kodiyalam は 2 次元 Cohen-Macaulay 局所環上の加群に関する Rees 環の Cohen-Macaulay 性に関して次を示している．

定理 1.1 (Katz-Kodiyalam [6]). $(A,\mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環で $d=2$ とし，剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限体とする．$F=A^r$ を rank $r>0$ の自由加群とし，$M \subseteq F$ はその部分加群で $\ell_A(F/M)<\infty$ なるものとする．このとき，次が正しい．

(1) 次は同値である．

  (i) $\mathcal{R}(M)$ は，Cohen-Macaulay 環である．

  (ii) 等式 $M^2=NM$ を満たす M の極小 reduction N が存在する．

(2) 局所環 A が正則で，かつ加群 M が整閉ならば，その Rees 環 $\mathcal{R}(M)$ は Cohen-Macaulay である．

本報告では，Rees 環が Cohen-Macaulay となる加群で整閉とは限らない加群のクラスを与えたい．次が主結果である．

定理 1.2. $(A,\mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環で $d=2$ とし，$N \subseteq F=A^r$ を自由加群 F のパラメータ加群とする．すなわち，$\ell_A(F/N)<\infty$ であって，$\mu_A(N)=r+1$ なるものとする．$M:=N:_F\mathfrak{m}$ とおく．このとき，次が同値である．

(1) $M^2\neq NM$.

(2) A は正則局所環であって，$r=1$，かつ N は整閉なパラメータイデアルである．

定理 1.2 の直接の系として，次を得る．

系 1.3. $(A,\mathfrak{m})$ は 2 次元 Cohen-Macaulay 局所環で，$N \subseteq F=A^r$ はパラメータ加群とする．$M:=N:_F\mathfrak{m}$ とおく．このとき，(i) $r\geq 2$ であるか，又は，(ii) A が正則局所環でない，ならば等式 $M^2=NM$ が成り立つ．故に，Rees 環 $\mathcal{R}(M)$ は Cohen-Macaulay である．

注意 1.4. (1) 定理 1.2 は，$r=1$ のときには既に Corso, Huneke, Vasconcelos や後藤らによって ($d\geq 3$ の場合でも) 知られている結果である ([2, 3, 1, 4])．従って，特に示さなければならない部分は「$M^2\neq NM \Rightarrow r=1$」の部分である．

(2) Simis-Ulrich-Vasconcelos たちは，我々とは異なる方法で，パラメータ加群の socle 加群の Rees 環は，Cohen-Macaulay 環であることを示している ([8, Theorem 5.14]).

$r = 1$ のとき，パラメータ加群とは，環 A のパラメータイデアルに他ならない．従って，環 A が Cohen-Macaulay ならば正則列で生成されている．そこで，はじめに次節において，Cohen-Macaulay 局所環上のパラメータ加群も正則列で生成されたイデアルと同様の性質を持っていることを確認する．このことを使って第 3 節で，reduction number が 1 となる加群のクラスを二つ与える．そして，最後にこれらを用いて第 4 節において定理 1.2 の証明を行う．

2 Perfect matrix

以下, A は Noether 環, $n \geq r > 0$ は整数とする．$F = A^r$ は rank r の自由加群とし，その自由基底を $\{t_1, \ldots, t_r\}$ とする．F の部分加群 $N = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle \subseteq F$ に対し，N の生成元 c_j を最初に固定した F の自由基底 $\{t_1, \ldots, t_r\}$ を使って,

$$c_j = c_{1j}t_1 + \cdots + c_{rj}t_r, \quad (c_{ij} \in A)$$

と書いたとき，係数 c_{ij} から作られる行列を $\widetilde{N} = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{r \times n}(A)$ と書くことにする．

定義 2.1. $r \times n$ 型の環 A 上の行列 $\varphi \in \mathrm{Mat}_{r \times n}(A)$ が,

(1) $\mathrm{I}_r(\varphi) \subsetneq A$ であって，かつ

(2) $\operatorname{grade} \mathrm{I}_r(\varphi) = n - r + 1$

を満たすとき，行列 φ は perfect であると呼ぶことにする．但し，$\mathrm{I}_r(\varphi)$ で行列 φ の r 次の小行列式で生成される環 A のイデアルを表す.

これは,（ある意味で）正則列の概念の行列版であると考えられる.

例 2.2. 次は，perfect な行列である.

(1) generic な行列 (X_{ij}).

(2) Cohen-Macaulay 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上のパラメータ加群 $N \subseteq F = A^r$ (すなわち，$\ell_A(F/N) < \infty$ であって，かつ $\mu_A(N) = d + r - 1$ なるもの) から作られる行列 $\widetilde{N}$.

(3) $a_1, \ldots, a_\ell$ を正則列としたときの行列 $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_\ell & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & \cdots & a_\ell & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & \cdots & a_\ell \end{pmatrix}$.

perfect な行列 $\widetilde{N}$ を持つ加群 N は，正則列で生成されたイデアルと同様に次の性質を持っている．

命題 2.3. $N = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle \subseteq F$ を F の部分加群とし，$\widetilde{N}$ は perfect，かつ $n > r$ と仮定する．$S = \mathrm{Sym}_A(F) = A[t_1, \ldots, t_r]$ とおく．このとき，S の 1 次斉次式 $h_1, \ldots, h_n \in S_1$ が，等式

$$h_1c_1 + \cdots + h_nc_n = 0 \quad \text{in} \quad S_2$$

を満たすならば，各 h_i について，

$$h_i \in (c_1, \ldots, \widehat{c_i}, \ldots, c_n) \quad \text{for all} \quad 1 \leq i \leq n$$

が成り立つ．

Proof. $n > r$ で，$\mathrm{grade}\, \mathrm{I}_r(\widetilde{N}) = n - r + 1$ だから行列 $\widetilde{N}$ と整数 2 に付随した (D. Kirby による) 一般化された Koszul 複体 $K_\bullet(\widetilde{N}; 2)$ は acyclic である ([7])．よって特に，$\mathrm{H}_1(K_\bullet(\widetilde{N}; 2)) = (0)$．この一般化された Koszul 複体 $K_\bullet(\widetilde{N}; 2)$ の構成法から $\mathrm{H}_1(K_\bullet(\widetilde{N}; 2)) \cong \mathrm{H}_1(K_\bullet(c_1, \ldots, c_n; S))_2$ である（ここで，$K_\bullet(c_1, \ldots, c_n; S)$ は S の 1 次式 $c_1, \ldots, c_n$ に関する Koszul 複体を表す）．従って，$K_\bullet(c_1, \ldots, c_n; S)$ の次数が 2 の部分を抜き出して，完全列

$$\Lambda_2 \otimes S_0 \xrightarrow{d_2} \Lambda_1 \otimes S_1 \xrightarrow{d_1} \Lambda_0 \otimes S_2$$

を得る．但し，Λ は rank n の自由加群 A^n の外積代数を表す．$\{e_1, \ldots, e_n\}$ を A^n の自由基底とすると，

Claim 1 $d_1\left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes h_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_ic_i$ である．

仮定より $\sum_{i=1}^{n} h_ic_i = 0$ だから，元 $\xi \in \Lambda_2 \otimes S_0$ が存在して，$d_2(\xi) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes h_i$ を満たす．ここで，$\xi = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(e_i \wedge e_j)$, (但し，$a_{ij} \in A$) と書くと，

Claim 2 $d_2(\xi) = \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes \left(\sum_{1 \le i < k \le n} a_{ik} c_i - \sum_{1 \le k < j \le n} a_{kj} c_j \right)$ である.

従って,

$$\begin{aligned} d_2(\xi) &= \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes h_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes \left(\sum_{1 \le i < k \le n} a_{ik} c_i - \sum_{1 \le k < j \le n} a_{kj} c_j \right) \end{aligned}$$

となり, 各 e_i の係数を比較して,

$$h_i \in (c_1, \ldots, \widehat{c_i}, \ldots, c_n) \quad \text{for all} \quad 1 \le i \le n$$

を得る. □

この系として次を得る.

系 2.4. $N = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle \subseteq F$ を F の部分加群とし, $\widetilde{N}$ は perfect, かつ $n > r$ と仮定する. このとき, A-線型写像

$$(F/N)^{\oplus n} \xrightarrow{[c_1, \ldots, c_n]} NF/N^2$$

は同型である.

Proof. $h_i \in F$ で, $\sum_{i=1}^n h_i c_i \in N^2$ とすると, 元 $g_i \in N$ が存在して $\sum_{i=1}^n h_i c_i = \sum_{i=1}^n g_i c_i$ と書ける. 故に, $\sum_{i=1}^n (h_i - g_i) c_i = 0$. $\widetilde{N}$ は perfect だから命題 2.3 より各 c_i の係数 $h_i - g_i \in N$ である. 故に $h_i \in N$ となり, 上の射は単射である. 全射なのは明らかなので同型である. □

3 Modules of reduction number one

この節では, 第 2 節で確認した命題を用いて, reduction number が 1 以下の加群のクラスを構成する. 以下, $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環, $N = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle \subseteq F$ は, 自由加群 $F = A^r$ の部分加群とする. 但し, $n = \mu_A(N)$ とし, $n > r$ と仮定する. N の socle 加群を $M := N :_F \mathfrak{m}$ とおく.

補題 3.1. 次を仮定する.

(1) 行列 $\widetilde{N}$ は perfect.

(2) $M \subseteq \mathfrak{m}F$.

(3) $\mathfrak{m}M = \mathfrak{m}N$.

このとき, 等式 $M^2 = NM$ が成り立つ.

Proof. 仮定 (2) より, $M^2 \subseteq \mathfrak{m}MF \subseteq NF$ である. $x \in M^2$ をとり, $x = \sum_{i=1}^{n} h_i c_i$, (但し, $h_i \in F$) と書く. ここで, 任意に $\alpha \in \mathfrak{m}$ をとると, 仮定 (3) より

$$\alpha x = \sum_{i=1}^{n} (\alpha h_i) c_i \in \mathfrak{m}M^2 = \mathfrak{m}N^2 \subseteq N^2$$

である. よって, 系 2.4 より各 c_i の係数 $\alpha h_i \in N$ である. $\alpha \in \mathfrak{m}$ は任意だったから, $h_i \in N :_F \mathfrak{m} = M$. 従って, $x \in NM$ となり等式 $M^2 = NM$ を得る. □

定理 3.2. 次を仮定する.

(1) 行列 $\widetilde{N}$ は perfect.

(2) $N \subseteq \mathfrak{m}F$.

(3) $\operatorname{depth} A > 0$.

このとき, A が正則局所環でないならば, 等式 $M^2 = NM$ が成り立つ.

Proof. まず, 仮定 (1) より加群 N の射影次元は有限である. よって, 環 A の非正則性と仮定 (3) から等式 $\mathfrak{m}N = \mathfrak{m}M$ が成り立つ ([5, 定理 1.1]). 従って, 補題 3.1 より等式 $M^2 = NM$ を示すためには, $M \subseteq \mathfrak{m}F$ を示せばよい. $M \not\subseteq \mathfrak{m}F$ と仮定し, $t \in M \backslash \mathfrak{m}F$ をとる. t は F の自由基底の一部だから, $\mathfrak{m}t \hookrightarrow \mathfrak{m}F$ は分裂している. $\mathfrak{m}t \subseteq N \subseteq \mathfrak{m}F$ より $\mathfrak{m}t \hookrightarrow N$ も分裂する. よって, 環 A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が射影次元有限な加群 N の直和因子となってしまい, これは環 A が正則でないことに反する. 故に, $M \subseteq \mathfrak{m}F$ である. □

もう一つの reduction number が 1 以下の加群のクラスとしては, 次がある（証明は省略する）.

定理 3.3. 次を仮定する.

(1) $N \subseteq \mathfrak{m}F$.

(2) $\ell_A(F/N) < \infty$.

(3) $\dim_k(\mathrm{Soc}_A(F/N)) = 1$.

このとき, $\mu_A(\mathfrak{m}F/N) \geq 2$ ならば, 等式 $M^2 = NM$ が成り立つ.

4 Proof of Theorem 1.2

以上の準備の下, この節では定理 1.2 の証明を行う. 以下, $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元 Cohen-Macaulay 局所環とし, $F = A^r$ は rank r の自由加群で $N \subseteq F$ をそのパラメータ加群とする. すなわち, $\ell_A(F/N) < \infty$ であって, $\mu_A(N) = d + r - 1 = r + 1$ なるものとする. $N \subseteq \mathfrak{m}F$ と仮定し, $M := N :_F \mathfrak{m}$ とおく. このとき, 示したいことは次である.

定理 4.1. $M^2 \neq NM$ ならば $r = 1$ である.

Proof. $M^2 \neq NM$ とする. N は Cohen-Macaulay 局所環上のパラメータ加群だからその行列 $\widetilde{N}$ は perfect である. よって, 定理 3.2 より A は正則局所環である. 今, $d = 2$ より $\dim_k(\mathrm{Soc}_A(F/N)) = 1$ がわかるので, 定理 3.3 より $\mu_A(\mathfrak{m}F/N) \leq 1$ である. よって,

$$\mu_A(\mathfrak{m}F) = 2r \leq \mu_A(N) + 1 = (r+1) + 1 = r + 2.$$

故に, $r \leq 2$ である. ここで, $r = 2$ と仮定すると,

Claim 次が成り立つ.

(1) $M \subseteq \mathfrak{m}F$.

(2) $\mathfrak{m}M = \mathfrak{m}N$.

Proof of Claim. (1) $M \nsubseteq \mathfrak{m}F$ とすると, 定理 3.2 の証明と同様にして $\mathfrak{m}$ は加群 N の直和因子となる. $\mu_A(N) = 3$ より N の生成元を取り替えて,

$$\widetilde{N} = \begin{pmatrix} x & y & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (\text{但し}, \mathfrak{m} = (x, y),\ \alpha,\ \beta \in \mathfrak{m})$$

としてよい．よって，$\mathrm{I}_2(\widetilde{N}) = \mathfrak{m}\beta \subseteq (\beta)$ となり矛盾．従って，$M \subseteq \mathfrak{m}F$ である．

(2) $r = 2$ より

$$\mu_A(\mathfrak{m}F) = \mu_A(N) + 1 = 4$$

である．よって，N の極小生成系は $\mathfrak{m}F$ の極小生成系の一部になる．故に，等式 $N \cap \mathfrak{m}^2F = \mathfrak{m}N$ が成り立つ．よって，Claim (1) より $\mathfrak{m}M \subseteq \mathfrak{m}^2F \cap N = \mathfrak{m}N$．故に，$\mathfrak{m}M = \mathfrak{m}N$ である． □

従って，補題 3.1 から $M^2 = NM$ となり，これは仮定に反する．故に $r = 1$ である． □

例 4.2. $(A, \mathfrak{m})$ は，2 次元正則局所環とし，I は環 A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする．$n = \mu_A(I)$ とおく．ここで，A/I の極小自由分解

$$F_\bullet : 0 \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{\varphi} A^n \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

を考え，この分解の A-dual をとって，完全列

$$F_\bullet^* : 0 \longrightarrow A \longrightarrow A^n \xrightarrow{\varphi^*} A^{n-1} \longrightarrow \omega_{A/I} \longrightarrow 0$$

を得る．$N := \operatorname{Im}\varphi^*$, $F := A^{n-1}$ とおき，$M := N :_F \mathfrak{m}$ とする．このとき，$n \geq 3$ ならば，等式 $M^2 = NM$ が成り立つ．よって，Rees 環 $\mathcal{R}(M)$ は Cohen-Macaulay である．

参考文献

[1] A. Corso, C. Huneke and W. V. Vasconcelos, On the integral closure of ideals, Manuscripta Math. 95 (1998), 331–347

[2] A. Corso, C. Polini and W. V. Vasconcelos, Links of prime ideals, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 115 (1994), 431–436

[3] A. Corso and C. Polini, Links of prime ideals and their Rees algebras, J. Algebra 178 (1995), 224–238

[4] S. Goto, Integral closedness of complete-intersection ideals, J. Algebra 108 (1987), 151–160

[5] 早坂太，射影次元有限な加群による環の正則性の判定について，第23回可換環論シンポジウム報告集 (2002)，54–57

[6] D. Katz and V. Kodiyalam, Symmetric powers of complete modules over a two-dimensional regular local ring, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 747–762

[7] D. Kirby, A sequence of complexes associated with a matrix, J. London Math. Soc. 7 (1974), 523–530

[8] A. Simis, B. Ulrich and W. V. Vasconcelos, Rees algebras of modules, Proc. London Math. Soc. 87 (2003), 610–646

〒214-8571 川崎市多摩区東三田 1-1-1
明治大学理工学部
E-mail : ee68048@math.meiji.ac.jp

On the reduction number of the powers of ideals

西田 康二 (千葉大学自然科学研究科)

$(A, \mathfrak{m})$ は剰余体が無限体の局所環とし I は A の真のイデアルとする．この報告では，I の随伴次数環 $\mathrm{G}(I) = \oplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ の a-invariant が I の充分大きなべき乗の reduction number を決めることを示す．

以下 $G = \mathrm{G}(I)$ とおく．さらに $0 < k \in \mathbb{Z}$ とし $T = \mathrm{G}(I^k)$ とおく．t を不定元とし $R' = A[It, t^{-1}]$, $S' = A[I^k t^k, t^{-k}]$ とすると $S' = R'^{(k)}$ で $R'/t^{-1}R' = G$, $S'/t^{-k}S' = T$ とみなせる (S' の中では t^{-k} の degree は -1 とみる)．そこで $\mathfrak{A} = G_+ \cap R'$, $\mathfrak{B} = T_+ \cap S'$ とおく．良く知られているように，任意の i, j に対して $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{B}}(S')_j = \mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_{kj}$ が成り立つ．

補題 1 $i, n \in \mathbb{Z}$ とする．$kn \leq j < kn + k$ をみたす任意の j に対して $\mathrm{H}^i_{G_+}(G)_j = 0$ ならば $\mathrm{H}^i_{T_+}(T)_n = 0$ である．

証明 完全列 $0 \longrightarrow R'(1) \xrightarrow{t^{-1}} R' \longrightarrow G \longrightarrow 0$ より導かれる局所コホモロジーの完全列

$$(*) \quad \mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_{j+1} \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_j \longrightarrow \mathrm{H}^i_{G_+}(G)_j \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{A}}(R')_{j+1} \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{A}}(R')_j$$

を考える．仮定より $kn \leq j < kn + k$ をみたす任意の j に対して

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_{j+1} \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_j$$

は全射で

$$\mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{A}}(R')_{j+1} \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{A}}(R')_j$$

は単射となる．一方，完全列 $0 \longrightarrow S'(1) \xrightarrow{t^{-k}} S' \longrightarrow T \longrightarrow 0$ より

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{H}^i_{\mathfrak{B}}(S')_{n+1} & \xrightarrow{t^{-k}} & \mathrm{H}^i_{\mathfrak{B}}(S')_n & \longrightarrow & \mathrm{H}^i_{T_+}(T)_n & \longrightarrow & \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{B}}(S')_{n+1} & \xrightarrow{t^{-k}} & \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{B}}(S')_n \\
\| & & \| & & & & \| & & \| \\
\mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_{kn+k} & & \mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_{kn} & & & & \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{A}}(R')_{kn+k} & & \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{A}}(R')_{kn}
\end{array}$$

なる完全列が導かれる．

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_{kn+k} \xrightarrow{t^{-k}} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_{kn}$$

は k 個の全射

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_{kn+k} \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_{kn+k-1} \xrightarrow{t^{-1}} \cdots \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_{kn+1} \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{A}}(R')_{kn}$$

の合成なので全射である．さらに

$$\mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{kn+k} \xrightarrow{t^{-k}} \mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{kn}$$

は k 個の単射

$$\mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{kn+k} \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{kn+k-1} \xrightarrow{t^{-1}} \cdots \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{kn+1} \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{kn}$$

の合成なので単射である．従って $\mathrm{H}_{T_+}^{i}(T)_n = 0$ でなければならない．

補題 2 $i, n \in \mathbb{Z}$ とする．$\mathrm{H}_{G_+}^{i}(G)_{kn} \neq 0$ で $kn \leq j < kn+k$ をみたす任意の j に対して $\mathrm{H}_{G_+}^{i+1}(G)_j = 0$ ならば $\mathrm{H}_{T_+}^{i}(T)_n \neq 0$ である．

証明 補題 1 の証明で述べた完全列 $(*)$ で $j = kn$ として次のどちらかが成り立つことが分かる：

Case 1　$\mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i}(R')_{kn+1} \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i}(R')_{kn}$ が全射でない

Case 2　$\mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{kn+1} \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{kn}$ が単射でない

Case 1 の場合には

$$\mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i}(R')_{kn+k} \xrightarrow{t^{-k}} \mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i}(R')_{kn}$$

は全射でない．一方，$kn \leq j < kn+k$ をみたす任意の j に対して

$$\mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{j+1} \xrightarrow{t^{-1}} \mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{j}$$

が全射となっていることに注意すれば，Case 2 の場合には

$$\mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{kn+k} \xrightarrow{t^{-k}} \mathrm{H}_{\mathfrak{A}}^{i+1}(R')_{kn}$$

が単射とならないことが分かる．従って $\mathrm{H}_{T_+}^{i}(T) \neq 0$ でなければならない．

以下，$\ell = \dim G/\mathfrak{m}G$ とおく．これは I の analytic spread と呼ばれる不変量である．

定義 3 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{a}_i^+(G) = \max\{n \mid \mathrm{H}_{G_+}^{i}(G) \neq 0\}$ と定める．特に $\mathrm{a}_\ell^+(G)$ は $\mathrm{a}^+(G)$ と書く．

補題 4 $j \leq \mathrm{a}^+(G)$ ならば $\mathrm{H}_{G_+}^{\ell}(G)_j \neq 0$．

証明 $\ell = 0$ のときは自明なので $\ell > 0$ の場合を考える．I の上表元 a を I の minimal reduction の生成系の一部となるようにとり，$B = A/aA$ とおく．このとき IB の analytic spread は $\ell-1$ となる．一方 $0:_G at$ は finitely graded になるから，任意の $j\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\mathrm{H}^{\ell}_{G_+}(G)_{j-1}\xrightarrow{at}\mathrm{H}^{\ell}_{G_+}(G)_j$$

は全射となる．従って $j\le \mathrm{a}^+(G)$ ならば $\mathrm{H}^{\ell}_{G_+}(G)_j\neq 0$ でなければならない．

定理 5 (後藤)　有理数 α に対して α を超えない最大の整数を $[\alpha]$ と書くと，次が成り立つ：

(1) 任意の $i\in\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{a}_i^+(T)\le[\mathrm{a}_i^+(G)/k]$.

(2) $\mathrm{a}^+(T)=[\mathrm{a}^+(G)/k]$.

証明　(1)　$[\mathrm{a}_i^+(G)/k]<n\in\mathbb{Z}$ とせよ．ガウス記号 $[\cdot]$ の定義より $\mathrm{a}_i^+(G)/k<n$ となるので $\mathrm{a}_i^+(G)<kn$ を得る．すると $kn\le j$ をみたす任意の j に対して $\mathrm{H}^i_{G_+}(G)_j=0$ となる．従って補題1より $\mathrm{H}^i_{T_+}(T)_n=0$ でなければならない．

(2)　$m=[\mathrm{a}^+(G)/k]$ とおく．(1) より $\mathrm{a}^+(T)\le m$ なので $\mathrm{H}^{\ell}_{T_+}(T)_m\neq 0$ を示せば充分である．実際，$km\le \mathrm{a}^+(G)$ であるから補題4より $\mathrm{H}^{\ell}_{G_+}(G)_{km}\neq 0$ となり，従って補題2から $\mathrm{H}^{\ell}_{T_+}(T)_m\neq 0$ となる．

系 6　$k\gg 0$ にとると

(1) 任意の $i\in\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{a}_i^+(T)\le 0$.

(2) $\mathrm{a}^+(G)\ge 0$ ならば $\mathrm{a}^+(T)=0$ となり，$\mathrm{a}^+(G)<0$ ならば $\mathrm{a}^+(T)=-1$ となる．

補題 7 (Trung)　J を I^k の minimal reduction とすると

$$\mathrm{a}^+(T)\ \le\ \mathrm{r}_J(I^k)\ \le\ \max\{\mathrm{a}_i^+(T)+i\}_{0\le i\le\ell}.$$

定理 8　$k\gg 0$ とすると I^k の任意の minimal reduction に対して

$$\mathrm{r}_J(I^k)=\begin{cases}\ell & \mathrm{a}^+(G)\ge 0\ \text{のとき}\\[2ex] \ell-1 & \mathrm{a}^+(G)<0\ \text{のとき}\end{cases}$$

証明　系6と補題7から直ちに導かれる．

ON FALTINGS' ANNIHILATOR THEOREM

川崎健

1. 序

本稿の目的は次の定理を証明することにある.

定理 1.1. A を *Noether* 環で次を満たすとする.

(C1) A は強鎖状
(C2) A の任意の局所化の形式的ファイバーはすべて *Cohen-Macualay*
(C3) 任意の有限型 A 代数 B の *Cohen-Macaulay* 軌跡は $\operatorname{Spec} B$ の開集合

このとき任意の有限生成 A 加群 M, 特殊化で閉じている $\operatorname{Spec} A$ の部分集合 $Z \subset Y$, 正整数 t に対して次が同値:

(1) あるイデアル $\mathfrak{a} \subset A$ があって $V(\mathfrak{a}) \subset Y$ かつ任意の $p < t$ に対して $\mathfrak{a}H^p_Z(M) = 0$;
(2) 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \backslash Y$, $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p}) \cap Z$ に対し $\operatorname{ht} \mathfrak{q}/\mathfrak{p} + \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} \geq t$.

用語の説明をする. 以下 A は Noether 環とする. $Z \subset \operatorname{Spec} A$ が特殊化で閉じているとは $\mathfrak{p} \in Z$ ならば必ず $V(\mathfrak{p}) \subset Z$ となることをいう. Z がこのような集合, M を A 加群とするとき

$$H^0_Z(M) = \{m \in M \mid \operatorname{Supp} Am \subset Z\}$$

とおく. $H^0_Z(-)$ は左完全関手であり, そこで $H^0_Z(-)$ の右導来関手を $H^p_Z(-)$ とおく. $\mathfrak{a} \subset A$ をイデアルとする時 $Z = V(\mathfrak{a})$ は特殊化で閉じており, このとき $H^p_Z(-)$ は通常の局所コホモロジー関手 $H^p_{\mathfrak{a}}(-)$ と一致する.

実は命題 (1)⇒(2) は常に成立している. そして (2)⇒(1) が任意の M, $Z \subset Y$, t について成立するという命題を強零化域定理という. これは定理と呼ばれているが環 A に関する条件である.

1978 年 Faltings [1, Satz 1] は A が双対化複体を持つかまたは正則な環 (Krull 次元が無限でもよい) の準同型像であるとき, 強零化域定理を満たすことを示した. 定理 1.1 は彼の定理の前提を弱めようとするものである.

2. 既知の結果

ここで既知の結果をまとめておく.

任意の M, t と閉集合 $Z \subset Y$ に対して (2)⇒(1) が成立するという命題を弱零化域定理という.

任意の M, t と特殊化で閉じている集合 $Z = Y$ に対して (2)⇒(1) が成立するという命題を強有限性定理という. また任意の M, t と閉集合 $Z = Y$ に対して (2)⇒(1) が成立するという命題を弱有限性定理という.

もちろん強零化域定理(強有限性定理)が成立すれば弱零化域定理(弱有限性定理)が成立する.

有限性定理の名は次の補題から来ている.

補題 2.1 ([1, Lemma 3]). *A を Noether 環, M を有限生成 A 加群, $Z \subset \operatorname{Spec} A$ を特殊化で閉じている集合, t を正整数とするとき次は同値:*

(1) *あるイデアル $\mathfrak{a} \subset A$ があって $V(\mathfrak{a}) \subset Z$ かつ任意の $p < t$ に対し $\mathfrak{a}H^p_Z(M) = 0$;*

(2) *任意の $p < t$ に対し $H^p_Z(M)$ は有限生成 A 加群.*

よって強(弱)零化域定理が成立すれば強(弱)有限性定理も成立する.

定義 2.2 ([5]). Noether 環 A が GB (going between) を満たすとは任意の整拡大 $B \supset A$ と B の素イデアル $P \supset Q$ に対して $\operatorname{ht} P\cap A/Q\cap A > 1$ ならば $\operatorname{ht} P/Q > 1$ が成立することをいう.

これは A が鎖状かどうかと深く関係する概念である.

命題 2.3 ([2, Satz 2]). *A が GB, (C2) を満たせは A は弱有限性定理を満たす.*

A が GB, (C2), (C3) を満たせは A は強有限性定理を満たす.

命題 2.4 ([2, Satz 3]). *A が弱有限性定理を満たせば A は GB.*

任意の本質的に有限型な A 代数が強有限性定理を満たせば A は (C1), (C3) を満たす.

命題 2.5 ([2, Satz 4]). *A を Noether 局所環とする. A が (C1), (C2) を満たせば任意の本質的に有限型な A 代数は強零化域定理を満たす.*

逆に任意の本質的に有限型な A 代数が弱零化域定理を満たせば A は (C1), (C2) を満たす.

Noether 局所環が (C1), (C2) を満たせば (C3) が成立する. よって定理 1.1 は命題 2.5 の拡張になっている.

また最近次が示された.

命題 2.6 ([4]). *A が Gorenstein 環 (Krull 次元は無限でもよい) なら弱零化域定理が成立する.*

3. 定理 1.1 の証明

定理 1.1 の証明の鍵は Cousin 複体である.

定義 3.1. M を有限生成 A 加群とする. M の Cousin 複体 $(M^\bullet, d^\bullet_M)$ を次のように定める.

$M^{-2} = 0$, $M^{-1} = M$, $d^{-2}_M \colon M^{-2} \to M^{-1}$ は零射.

$p \geq 0$ で $d^{p-2}_M \colon M^{p-2} \to M^{p-1}$ が定義されているとする. このとき

$$M^p = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Supp} M, \dim M_\mathfrak{p} = p} (\operatorname{coker} d^{p-2}_M)_\mathfrak{p}$$

とおく. $x \in M^{p-1}$, $\bar{x}$ をその $\operatorname{coker} d^{p-2}_M$ における像とする. $d^{p-1}_M(x) \in M^p$ を, その $(\operatorname{coker} d^{p-2}_M)_\mathfrak{p}$ 成分が $\bar{x}/1$ となるように定義する.

Cousin 複体のコホモロジーに対して次がわかっている．

補題 3.2. $\bigcup \operatorname{Supp} H^p(M^\bullet)$ は M の非 *Cohen-Macaulay* 軌跡に等しい．

補題 3.3 ([3])**.** *A が (C1)–(C3) を満たし,*

(QU) $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Supp} M$ に対し $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ ならば $\dim M_{\mathfrak{p}} = \operatorname{ht} \mathfrak{p}/\mathfrak{q} + \dim M_{\mathfrak{q}}$

が成立するなら任意の p に対して $H^p(M^\bullet)$ は有限生成かつ十分大きな p に対して $H^p(M^\bullet) = 0$.

さらに次が成立する．

補題 3.4. M を有限生成 A 加群, $Z \subset \operatorname{Spec} A$ を特殊化で閉じている集合, t を正整数,

$$\mathfrak{a}' = \prod_{p=-1}^{t-2} \operatorname{ann} H^p(M^\bullet)$$

とおく．もし任意の $\mathfrak{p} \in Z \cap \operatorname{Supp} M$ に対して $\dim M_{\mathfrak{p}} \geq t$ ならば任意の $p < t$ に対して $\mathfrak{a}' H_Z^p(M) = 0$.

Proof. 定義から

$$H_Z^p(M) = \varinjlim_{\mathfrak{b} \subset A:\text{イデアル},\ V(\mathfrak{b}) \subset Z} H_{\mathfrak{b}}^p(M)$$

が言えるので $\mathfrak{b} = (a_1, \ldots, a_n)$ をイデアルとして $Z = V(\mathfrak{b})$ としてよい．$K^\bullet = K^\bullet(a_1, \ldots, a_n; A)$ を Koszul 複体とする．

二重複体 $K^\bullet \otimes M^\bullet$ は二つのスペクトル系列

$$'E_2^{pq} = H^p(H^q(\boldsymbol{a}^m; M^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(K^\bullet \otimes M^\bullet),$$
$$''E_2^{pq} = H^q(\boldsymbol{a}^m; H^q(M^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(K^\bullet \otimes M^\bullet)$$

を与える．$0 \leq p < t$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$, $\dim M_{\mathfrak{p}} = p$ のとき仮定から $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{p}$. よって $K^\bullet \otimes M^p = K^\bullet \otimes (\bigoplus_{\dim M_{\mathfrak{p}}=p} (\operatorname{coker} d_M^{p-2})_{\mathfrak{p}})$ は完全．この範囲で $'E_2^{pq} = 0$ であって $H^{p-1}(K^\bullet \otimes M^\bullet) = H^p(\boldsymbol{a}^m; M)$. 一方もう一つのスペクトル系列により $0 \leq p < t$ のとき

$$\mathfrak{a}' H^p(\boldsymbol{a}^m; M) = \mathfrak{a}' H^{p-1}(K^\bullet \otimes M^\bullet) = 0.$$

直極限をとって $\mathfrak{a}' H_{\mathfrak{b}}^p(M) = 0$. □

定理 1.1 の証明を始める．

まず既知のことではあるが (1) を仮定して (2) を示す．局所化を通して A は局所環, $\mathfrak{q}$ はその極大イデアルとしてよい．また $\hat{A}$ を A の完備化, $P \in \operatorname{Assh} \hat{A}/\mathfrak{p}\hat{A}$ とすると $\operatorname{ht} \mathfrak{q}/\mathfrak{p} = \operatorname{ht} \mathfrak{q}\hat{A}/P$,

$$\begin{aligned}\operatorname{depth} \hat{M}_P &= \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \operatorname{depth} \hat{A}_P/\mathfrak{p}\hat{A}_P \\ &= \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}}.\end{aligned}$$

ゆえに完備化を通して A は Gorenstein 環としてよい．

$d = \dim A$ とする．スペクトル系列

$$E_2^{pq} = H_{\mathfrak{q}}^p H_Z^q(M) \Rightarrow H_{\mathfrak{q}}^{p+q}(M)$$

があるから $p<t$ のとき $\mathfrak{a}^{p+1}H^p_{\mathfrak{q}}(M)=0$. 局所双対定理から $p<t$ のとき $\mathfrak{a}^{p+1}\operatorname{Ext}^{d-p}_A(M,A)=0$. $s=\dim A/\mathfrak{p}$ とおくと $p<t-s$ のとき $\operatorname{Ext}^{(d-s)-p}(M,A)_{\mathfrak{p}}=0$. よって $\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}}\geq t-s$. つまり $\dim A/\mathfrak{p}+\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}}\geq t$.

次に逆を示す. A は (C1), (C2), (C3) を満たし M, $Z\subset Y$, t は (2) を満たすとする. t についての帰納法で (1) を証明する.

$H^0_Y(M)$ は M の部分加群だから有限生成. $\mathfrak{a}=\operatorname{ann} H^0_Y(M)$ とすると $V(\mathfrak{a})\subset Y$ であって $H^0_Z(M)\subset H^0_Y(M)$ ゆえ $\mathfrak{a}H^0_Z(M)=0$. よって $t=1$ のとき (1) が成立.

$t>1$ のとき, $\operatorname{Ass} M\cap Y=\emptyset$ の時とそうでないときに場合わけする. $\operatorname{Ass} M\cap Y=\emptyset$ のとき, さらに $\#\operatorname{Ass} M$ についての帰納法で証明する.

$\#\operatorname{Ass} M=1$ のとき $\{\mathfrak{p}\}=\operatorname{Ass} M$ とおく. このとき補題 3.1 が使えて M の Cousin 複体のコホモロジーはすべて有限生成で有限個をのぞいて 0. よって $\mathfrak{b}=\prod \operatorname{ann} H^p(M^\bullet)$ とおくと $V(\mathfrak{b})=\bigcup \operatorname{Supp} H^p(M^\bullet)$ は M の非 Cohen-Macaulay 軌跡に等しい. $M_{\mathfrak{p}}$ は 0 次元 Cohen-Macaulay 加群だから $\mathfrak{p}\notin V(\mathfrak{b})$. $x\in\mathfrak{b}\setminus\mathfrak{p}$ としよう. すると x は M 正則である. 任意の $\mathfrak{q}\in Z\cap\operatorname{Supp} M$ に対して $\mathfrak{p}\notin Y$, $\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{p})\cap Z$ ゆえ $\dim M_{\mathfrak{q}}=\operatorname{ht}\mathfrak{q}/\mathfrak{p}=\operatorname{ht}\mathfrak{q}/\mathfrak{p}+\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}}\geq t$. 補題 3.4 から $p<t$ に対して $xH^p_Z(M)=0$. $\mathfrak{p}'\notin Y$, $\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{p}')\cap Z$ としよう. $x\notin\mathfrak{p}'$ なら $(M/xM)_{\mathfrak{p}'}=0$. よって $\operatorname{ht}\mathfrak{q}/\mathfrak{p}'+\operatorname{depth}(M/xM)_{\mathfrak{p}'}=\infty\geq t-1$. $x\in\mathfrak{p}'$ なら x は M 正則ゆえ $\operatorname{ht}\mathfrak{q}/\mathfrak{p}'+\operatorname{depth}(M/xM)_{\mathfrak{p}'}=\operatorname{ht}\mathfrak{q}/\mathfrak{p}'+\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}'}-1\geq t-1$. 帰納法の仮定からあるイデアル $\mathfrak{a}\subset A$ があって $V(\mathfrak{a})\subset Y$ かつ任意の $p<t-1$ に対して $\mathfrak{a}H^p_Z(M/xM)=0$. $p<t$ のとき $xH^p_Z(M)=0$ だから

$$H^{p-1}_Z(M/xM)\to H^p_Z(M)\to 0$$

が完全. よって $0<p<t$ のとき $\mathfrak{a}H^p_Z(M)=0$. $\operatorname{Ass} M\cap Y=\emptyset$ だから $H^0_Z(M)\subset H^0_Y(M)=0$. これで $\#\operatorname{Ass} M=1$ の時証明が終わった.

つぎに $\#\operatorname{Ass} M>1$ とする. このとき $\mathfrak{p}$ を $\operatorname{Ass} M$ の中で極大なものとし, 完全列

$$0\to L\to M\to N\to 0$$

で $\operatorname{Ass} L=\operatorname{Ass} M\setminus\{\mathfrak{p}\}$, $\operatorname{Ass} N=\{\mathfrak{p}\}$ を満たすものをとる. すると N の Cousin 複体のコホモロジーはすべて有限生成で有限個をのぞいて 0. $\mathfrak{b}=\prod \operatorname{ann} H^p(N^\bullet)$ とおくと $\mathfrak{p}\subsetneq\mathfrak{b}$. よって M 正則な元 $x''\in\mathfrak{b}$ がある. 先程と同様にして $p<t$ の時 $x''H^p_Z(N)=0$ である.

$\mathfrak{p}'\notin Y\cup V(x''A)$, $\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{p}')\cap Z$ とする. $\mathfrak{p}'\notin Y$ ゆえ $\operatorname{ht}\mathfrak{q}/\mathfrak{p}'+\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}'}\geq t$. また $\mathfrak{p}'\notin V(x''A)$ ゆえ $N_{\mathfrak{p}'}$ は Cohen-Macaulay,

$$\begin{aligned}\operatorname{ht}\mathfrak{q}/\mathfrak{p}'+\operatorname{depth} N_{\mathfrak{p}'}&=\operatorname{ht}\mathfrak{q}/\mathfrak{p}'+\dim N_{\mathfrak{p}'}\\&=\dim N_{\mathfrak{q}}\\&=\operatorname{ht}\mathfrak{q}/\mathfrak{p}+\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}}\geq t.\end{aligned}$$

depth lemma を用いて $\operatorname{ht}\mathfrak{q}/\mathfrak{p}'+\operatorname{depth} L_{\mathfrak{p}'}\geq t$. L に帰納法の仮定を使ってイデアル $\mathfrak{a}'\subset A$ で $V(\mathfrak{a}')\subset Y\cup V(x''A)$, $p<t$ のとき $\mathfrak{a}'H^p_Z(L)=0$ を満たすものが見つかる.

$\operatorname{Ass} M \cap Y = \emptyset$ かつ x'' が M 正則だから $\operatorname{Ass} M \cap (Y \cup V(x''A)) = \emptyset$. $V(\mathfrak{a}') \subset Y \cup V(x''A)$ ゆえ $\mathfrak{a}'$ は M 正則な元 x' を含む. $x = x'x''$ とおくと $p < t$ のとき $x''H_Z^p(N) = 0$, $x'H_Z^p(L) = 0$ ゆえ $xH_Z^p(M) = 0$.

先程と同様にしてイデアル $\mathfrak{a} \subset A$ で $V(\mathfrak{a}) \subset Y$, $p < t-1$ に対して $\mathfrak{a}H_Z^p(M/xM) = 0$ を満たすものがある. $0 < p < t$ のとき

$$H_Z^{p-1}(M/xM) \to H_Z^p(M) \to 0$$

が完全ゆえ $0 < p < t$ のとき $\mathfrak{a}H_Z^p(M) = 0$. 一方 $H_Z^0(M) = 0$ ゆえ $\operatorname{Ass} M \cap Y = \emptyset$ の時証明が終わった.

$\operatorname{Ass} M \cap Y \neq \emptyset$ としよう. $L = H_Z^0(M)$, $N = M/L$ とおくと L は有限生成ゆえあるイデアル $\mathfrak{a}' \subset A$ があって $V(\mathfrak{a}') \subset Y$, $\mathfrak{a}'L = 0$. 一方 $\mathfrak{p} \notin Y$ の時 $L_\mathfrak{p} = 0$, $M_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p}$. ゆえ N に $\operatorname{Ass} M \cap Y = \emptyset$ の場合を適用して $V(\mathfrak{a}'') \subset Y$, $p < t$ のとき $\mathfrak{a}''H_Z^p(N) = 0$ を満たすイデアル $\mathfrak{a}'' \subset A$ が得られる. $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'\mathfrak{a}''$ とすれば $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}') \cup V(\mathfrak{a}'') \subset Y$ かつ $p < t$ のとき $\mathfrak{a}H_Z^p(M) = 0$ である.

これで定理 1.1 の証明がすべて終わった.

References

[1] Gerd Faltings, *Über die Annulatoren lokaler Kohomologiegruppen*, Arch. Math. (Basel) **30** (1978), no. 5, 473–476. MR 58 #22058

[2] ———, *Der Endlichkeitssatz in der lokalen Kohomologie*, Math. Ann. **255** (1981), no. 1, 45–56. MR **82f:**13003

[3] Takesi Kawasaki, *Finiteness of Cousin cohomologies*, in preparation.

[4] K. Khashyarmanesh and Sh. Salarian, *Faltings' theorem for the annihilation of local cohomology modules over a Gorenstein ring*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 8, 2215–2220 (electronic). MR **MR2052396 (2005f:**13021)

[5] L. J. Ratliff, Jr., *Going-between rings and contractions of saturated chains of prime ideals*, Rocky Mountain J. Math. **7** (1977), no. 4, 777–787. MR 56 #5522

197-0397 東京都八王子市南大沢 1-1 首都大学東京都市教養学部数理科学コース

E-mail address: `kawasaki@comp.metro-u.ac.jp`

URL: `http://www.comp.metro-u.ac.jp/~kawasaki/`

The leading form ideal of a complete intersection of height 2

後藤四郎（明大・理工）

1　はじめに

本稿の目的は，W. Heinzer と M.-k. Kim との共同研究 [1] の概要を報告することにある。さて，問題は何かということを説明するため，まず記号を用意したい。以下 $(S, \mathfrak{n})$ は Noether 局所環とし，$I = (f, g)$ を環 S のイデアルで，長さ 2 の正則列 $\{f, g\}$ で生成されていると仮定し，$R = S/I$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}/I$ とおく。すると，随伴次数環の間に自然な全射

$$\varphi : \mathrm{G}(\mathfrak{n}) = \oplus_{i \geq 0} \mathfrak{n}^i/\mathfrak{n}^{i+1} \to \mathrm{G}(\mathfrak{m}) = \oplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$$

が導かれるので，$I^* = \mathrm{Ker}\ \varphi$ とおき，これをイデアル I の the leading form ideal という。本報告で取り扱う問題は単純で，下記のように述べることができる。

問題 1.1. イデアル I^* の構造を解明せよ。

普段使い慣れている記法に従いたいので，随伴次数環 $\mathrm{G}(\mathfrak{n})$ は，不定元 t を用いて，$\mathcal{R}' = \mathcal{R}'(\mathfrak{n}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{n}^i t^i \subseteq S[t, t^{-1}]$, $\mathrm{G}(\mathfrak{n}) = \mathcal{R}'/t^{-1}\mathcal{R}'$ と定めることにしたい。標準射 $S \to R, a \mapsto \overline{a}$ によって，射 $S[t, t^{-1}] \to R[t, t^{-1}]$ が得られ，拡大 Rees 代数の間に射 $\mathcal{R}'(\mathfrak{n}) \to \mathcal{R}'(\mathfrak{m})$ が導かれ，随伴次数環の射 $\varphi : \mathrm{G}(\mathfrak{n}) = \mathcal{R}'/t^{-1}\mathcal{R}' \to \mathrm{G}(\mathfrak{m}) = \mathcal{R}'(\mathfrak{m})/t^{-1}\mathcal{R}'(\mathfrak{m})$ が得られる。射 φ は次数を保つような全射であって，イデアル I^* の各斉次成分は，等式 $[I^*]_i = \{\overline{at^i} \mid a \in I \cap \mathfrak{n}^i\}$ $(i \in \mathbb{Z})$ によって与えられる。

各元 $f \in S$ に対し，$\mathrm{o}(f) = \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid f \in \mathfrak{n}^i\}$ とおき

$$f^* = \begin{cases} \overline{ft^n} & (f \neq 0,\ \mathrm{o}(f) = n) \\ 0 & (f = 0) \end{cases}$$

と定め，元 f の the initial form と呼ぶ。従って，I^* はイデアル I の元の initial form 達で生成されたイデアルに他ならない。環 $G = \mathrm{G}(\mathfrak{n})$ は，完備化しても変わらず，体 $k = S/\mathfrak{n}$ を膨らませても影響のない議論を展開する予定なので，以下，S は完備であって，その剰余体 $S/\mathfrak{n}$ は無限体と仮定する。

この問題を考える切っ掛けとなったのは，下記の二つの定理である。一つは S. C. Kothari [3] の結果であって，次のように纏めることができる。

定理 1.2 ([3]). S は正則局所環で，$\dim S = 2$ とする。このとき $I = (f, g)$ となる $f, g \in S$ を $a = \mathrm{o}(f) \leq b = \mathrm{o}(g)$ であってかつ $f^* \nmid g^*$ となるように選び直すと

(1) $0 \leq \dim_k [G(\mathfrak{m})]_i - \dim_k [G(\mathfrak{m})]_{i+1} \leq 1$ $(\forall i \geq a = \mathrm{o}(I))$ が成り立つ。

(2) $\ell_S(S/(f, g)) \geq ab$ である。等号が成り立つための必要十分条件は，$\{f^*, g^*\}$ が環 G 内で互いに素，即ち，f, g が super − regular sequence をなすことである。

Kothari のこの結果は，Abyhanker が与えた問題に対する解として得られたものらしく，特に (2) は，二つの代数曲線 $C_1 : f = 0$ と $C_2 : g = 0$ の交叉重複度が，C_1, C_2 の原点での重複度の積 ab よりは小さくないという，古典的な結果である。私達の研究の動機の一つは，この Kothari の結果がなぜ成り立つのか，証明ではなく，その理由を知りたいということにあった。

もう一つの結果は，L. Robbiano-G. Valla と J. Herzog の結果であって，次のように述べることができる。

定理 1.3 ([2, 4]). 体 k 上の半群環 $R = k[[t^{n_1}, t^{n_2}, t^{n_3}]]$ $(0 < n_1 < n_2 < n_3,\ (n_1, n_2, n_3) = 1)$ を考え，環 R は完全交叉と仮定し，$R \cong S/(f, g)$ と記述する。但し，$S = k[[X_1, X_2, X_3]]$ は冪級数環であって，射 $\phi : S \to R, \phi(X_i) = t^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ を考えている。このとき，次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ は Cohen − Macaulay 環である。

(2) $\mu_{\mathrm{G}}(I^*) \leq 3$ である。

イデアル I^* の生成元の個数 $\mu_{\mathrm{G}}(I^*)$ は，一般にはいくらでも大きくなるようであるが，環 $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ が Cohen-Macaulay になるものは，$\mu_{\mathrm{G}}(I^*) \leq 3$ であるものに限るという理由を知りたい。

このような問題意識から出発して，得られた結果を下に報告しようと思う。

2 最も一般的な枠組み

はじめに報告する結果は，定理 1.3 の中で (2) $\Rightarrow$ (1) はいつも正しいということである。すなわち

定理 2.1. 環 $G = \mathrm{G}(\mathfrak{n})$ は一意分解整域 (UFD) であると仮定する。このとき，$\mu_{\mathrm{G}}(I^*) \leq 3$ ならば，イデアル I^* は完全 (perfect) である。従って，環 G が Cohen − Macaulay なら，環 $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ も Cohen − Macaulay となる。

ここで S は単に Noether 局所環であって，$I = (f, g)$ は長さ 2 の正則列 f, g で生成されていると仮定している。

証明. 定理 2.1 の証明の粗筋を述べよう。$a = \mathrm{o}(f)$, $b = \mathrm{o}(g)$ とし，$a \leq b$ とする。もしも $f^* \mid g^*$ ならば，g を取り替えて，環 S の元 $g_1 \in S$ を $\mathrm{o}(g_1) > b$, $I = (f, g_1)$, $f^* \nmid g_1^*$ を満たすように選ぶことができるので，一般性を失わずに $f^* \nmid g^*$ と仮定してよい。この条件は，f^*, g^* がイデアル I^* の斉次極小生成系の一部をなすことと同値である。さて，$\mathrm{ht}_{\mathrm{G}}(f^*, g^*) > 1$ (あるいは $\mu_{\mathrm{G}}(I^*) = 2$) ならば，$f, g$ は super-regular sequence となり，必ず等式 $I^* = (f^*, g^*)$ が成り立つので，以下, $\mathrm{ht}_{\mathrm{G}}(f^*, g^*) = 1$ と仮定する。$D = \mathrm{GCD}(f^*, g^*)$ とし，$d = \deg D$ とおき, $f^* = D\xi$, $\deg \xi = a - d$, $g^* = D\eta$, $\deg \eta = b - d$ と書く。故に，$b \geq a > d > 0$ である。もちろん，ξ, η は環 G 内で正則列をなす。

補題 2.2. $\alpha, \beta \in S$ とし，$h = \alpha f + \beta g$ と定めたとき，$h^* \notin (f^*, g^*)$ となっていると仮定する。このとき，次の主張が正しい。

(1) $\mathrm{o}(\alpha f) = \mathrm{o}(\beta g) < \mathrm{o}(h)$ である。

(2) $\mathrm{o}(\alpha) + (a - d) = \mathrm{o}(\beta) + (b - d)$, $\mathrm{o}(\alpha) \geq b - d$, $\mathrm{o}(\beta \geq a - d$ である。

(3) $\alpha^*\xi + \beta^*\eta = 0$ である。

証明. $h^* \notin (f^*, g^*)$ より，$\mathrm{o}(\alpha f) = \mathrm{o}(\beta g) < \mathrm{o}(h)$ である。よって，$\alpha^* f^* + \beta^* g^* = 0$ となる。故に $\alpha^*\xi + \beta^*\eta = 0$ である。ξ, η は互いに素であるから，$\alpha^* = c\eta$, $\beta^* = -c\xi$ $(c \in G)$ となる。故に $\mathrm{o}(\alpha) \geq b - d$, $\mathrm{o}(\beta) \geq a - d$, $\mathrm{o}(\alpha) + (a - d) = \mathrm{o}(\beta) + (b - d)$ を得る。 □

補題 2.3. $h = \alpha f + \beta g$ とおくと，$h^* \notin (f^*, g^*)$ であってかつ $\mathrm{o}(\alpha) = b - d$, $\mathrm{o}(\beta) = a - d$ であるような，$\alpha, \beta \in S$ が存在する。

命題 2.4. $h = \alpha f + \beta g$ を上の補題 2.3 のように選ぶ。$\sigma, \tau \in S$ とし $q = \sigma f + \tau g$ おく。このとき，次の主張が正しい。

(1) $q^* \notin (f^*, g^*)$ ならば，$\mathrm{o}(q) \geq \mathrm{o}(h) + [\mathrm{o}(\sigma) - (b - d)]$ である。

(2) $q^* \notin (f^*, g^*, h^*)$ ならば，$\mathrm{o}(q) > \mathrm{o}(h) + [\mathrm{o}(\sigma) - (b - d)]$ である。

(3) $q^* \notin (f^*, g^*)$, $\mathrm{o}(\sigma) = b - d$ ならば，$\mathrm{o}(q) = \mathrm{o}(h)$ であって，イデアルの等式 $(f^*, g^*, h^*) = (f^*, g^*, q^*)$ が成り立つ。

(4) $n = \mu_{\mathrm{G}}(I^*)$ とおくと，$n \geq 3$ であり，等式 $I^* = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)$ を満たすような斉次元 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in G$ を選んで

$$\xi_1 = f^*,\ \xi_2 = g^*,\ \xi_3 = h^*,\ \deg \xi_i \geq \mathrm{o}(h) + 2 \quad (4 \leq \forall i \leq n)$$

が成り立つようにすることができる。

さて，これだけ準備すると，定理2.1の証明が得られる。まず，$n=3$としてよい。故に$I^*=(f^*,g^*,h^*)=(D\xi,D\eta,h^*)$である。よって，$\xi=\beta^*$, $\eta=-\alpha^*$（定数位の違いはある）が正則列をなし，$h\in(\alpha,\beta)$であるから，$h^*\in(\alpha^*,\beta^*)=(\xi,\eta)$である。$h^*=\xi\varphi+\eta\psi$と書くと

$$I^*=I_2\begin{pmatrix}\psi & -\varphi & D\\ \xi & \eta & 0\end{pmatrix}$$

となる。$\mathrm{ht}_{\mathrm{G}}\,I^*=2$であるので，イデアル$I^*$は完全である。故に，環$G$がCohen-Macaulayなら，環$\mathrm{G}(\mathfrak{m})$もCohen-Macaulayとなる。 □

この証明から予想されることは，イデアルI^*は，一般に，かなり特殊な生成系を持つということである。このことを念頭におきながら，$\dim S=2$の場合を見直してみることにしたい。

3 $\dim S=2$の場合 (Kothariの定理の精密化)

$(S,\mathfrak{n})$は正則局所環で$\dim S = 2$とする。Sは完備で，その剰余体は無限体と仮定する。$I=(f,g)$は環Sの巴系イデアル（つまり，$\{f,g\}$はS-正則列をなす）と仮定しよう。$a=\mathrm{o}(f)$, $b=\mathrm{o}(g)$, $I^*=\mathrm{Ker}\ (G=\mathrm{G}(\mathfrak{n})\to\mathrm{G}(\mathfrak{m}))$とおく。$\mathrm{o}(I)=\sup\{i\in\mathbb{Z}\mid I\subseteq\mathfrak{n}^i\}$とする。以下，$a\le b$, $f^*\nmid g^*$ in Gと仮定する。（故に$a=\mathrm{o}(I)$である。）このとき，次の主張が正しい。

定理 3.1. $n=\mu_{\mathrm{G}}(I^*)$とせよ。すると，環Gの斉次元$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$が存在して，次の4条件を満たす：

(1) $I^*=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$である。

(2) $\xi_1=f^*$, $\xi_2=g^*$である。

(3) $\deg\xi_i+2\le\deg\xi_{i+1}\quad(2\le\forall i\le n-1)$である。

(4) $\mathrm{ht}_G(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})=1$である。

イデアル$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i)G\ (1\le i\le n)$は，このような生成系$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$のとり方にはよらない。$D_i=\mathrm{GCD}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i)\ (1\le i\le n)$とおく。

命題 3.2. 任意の$1\le i\le n-1$に対して，次が成り立つ。

(1) $\deg D_i>\deg D_{i+1}$である。

(2) $\frac{\xi_{i+1}}{D_{i+1}}\in(\frac{\xi_1}{D_i},\ldots,\frac{\xi_i}{D_i})G$である。

この2つの結果の証明の概略を記録したい。補題を2つ用意する。最初の一つはよく知られている。

補題 3.3. $\mathfrak{n} = (x, y)$ とし, $X = \overline{xt}, h \in S$ とする。このとき, $X \nmid h^*$ ならば, 単元 $\varepsilon \in \mathrm{U}(S)$ と元 $\varphi \in \mathfrak{n}^{n-1}$ が存在して, 等式 $h = \varepsilon y^n + x\varphi$ が成り立つ。但し, $n = \mathrm{o}(h)$ とする。

補題 3.4. 元 $x, y, g_1 \in S$ と単元 $u \in \mathrm{U}(S)$ が存在し, 次の条件を満たす。

(1) $\mathfrak{n} = (x, y)$ である。

(2) $X \nmid f^*$ (但し, $X = \overline{xt}$ とする。)

(3) $g = \varepsilon y^{b-a} f + x g_1$ である。

(4) $\mathrm{o}(g_1) = b - 1$ である。

証明. $Y = \overline{yt}$ とすると, (k は無限体なので) $Z = X + cY$ $(c \in k)$ で $Z \nmid f^*$, $Z \nmid g^*$ となるものがある。$c = \overline{s}$ $(s \in S)$ と書いて $z = x + sy$ とおくと, $\mathfrak{n} = (z, y)$ である。補題 3.3 により

$$\begin{aligned} f &= \varepsilon y^a + z\xi \quad (\xi \in \mathfrak{n}^{a-1}), \\ g &= \tau y^b + z\eta \quad (\eta \in \mathfrak{n}^{b-1}) \end{aligned}$$

と表すことができる。但し $\varepsilon, \tau \in \mathrm{U}(S)$ である。故に, $g - (\tau\varepsilon^{-1}) y^{b-a} f = z(\eta - \tau\varepsilon^{-1} y^{b-a}\xi)$ となる。$g_1 = \eta - \tau\varepsilon^{-1} y^{b-a}\xi \in \mathfrak{n}^{b-1}$ とおく。$g = u y^{b-a} f + z g_1$ で $f^* \nmid g^*$ なので, $\mathrm{o}(g_1) = b - 1$ である。$x = z$ と取り直すとよい。 □

さてそこで

Claim $I_1 = (f, g_1)$ とおくと, 次が正しい。

(1) $I = (f, g) = (f, x g_1) \subseteq I_1$ である。

(2) $(f^*, g^*) = (f^*, X g_1^*)$ である。

(3) $b = 1$ ならば, $I = \mathfrak{n}$ である。

(4) $b > 1$ ならば, イデアル I_1 は環 S の巴系イデアルであって, 等式 $I^* = (f^*) + X \cdot I_1^*$ が成り立つ。

(4) の等式こそ, 論文 [3] 中で explicit には述べられていないが, Kothari の議論の heart であったと考えられる。というのも, イデアル $I_1 = (f, g_1)$ に対しては, 等式 $\mathrm{o}(g_1) = b - 1$ が成り立つが, もしも $a < b$ ならば ($f^* \nmid g_1^*$ であるので) b の値が下がるし, $a = b$ のときは, $g_1^* \mid f^*$ であったとしても a の値が下がっているので, 様々な主張が a と b の値についての帰納法によって証明されるからである。上に述べた 2 つの命題, 定理 3.1 と補題 3.2 も, a と b の値についての帰納法で証明される。

命題 3.2 は $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ の Hilbert series (実際は「多項式」である) を計算するために使う。

系 3.5.

$$\mathrm{H}(\mathrm{G}(\mathfrak{m}),\lambda)=\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda^{d_i}(1-\lambda^{d_{i-1}-d_i})(1-\lambda^{c_i-d_i})}{(1-\lambda)^2}.$$

但し，$d_i=\deg D_i$，$c_i=\deg\xi_i$ $(1\leq i\leq n)$ である。

証明. 証明の粗筋は下記の通りである。$D=D_{n-1}$，$K=(\frac{\xi_1}{D},\cdots,\frac{\xi_{n-1}}{D})$ とおくと，$D_n=1$ であるから，$\xi_n\in K$ であって，完全列

$$0\to(D,\xi_n)/I^*\to G/I^*\to G/(D,\xi_n)\to 0$$

を得る。一方で

$$\begin{aligned}(D,\xi_n)/I^* &= (D,\xi_n)/[DK+(\xi_n)]\\ &\cong (D)/[DK+(D\xi_n)] \quad ((D)\cap(\xi_n)=(D\xi_n)\text{ より})\\ &= (D)/DK\\ &\cong (G/K)(-\deg D)\end{aligned}$$

である。イデアル K は，I^* と同じ仮定を満たす生成系 $(\frac{\xi_1}{D},\cdots,\frac{\xi_{n-1}}{D})$ を持つので，n についての帰納法により，等式

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(\mathrm{G}(\mathfrak{m}),\lambda) &= \frac{(1-\lambda^{\deg D})(1-\lambda^{\deg\xi_n})}{(1-\lambda)^2}+\mathrm{H}(G/K,\lambda)\cdot\lambda^{\deg D}\\ &= \frac{(1-\lambda^{\deg D})(1-\lambda^{\deg\xi_n})}{(1-\lambda)^2}\\ &\quad+\left(\frac{\sum_{i=2}^{n-1}\lambda^{\deg\frac{D_i}{D}}(1-\lambda^{\deg\frac{D_{i-1}}{D}-\deg\frac{D_i}{D}})(1-\lambda^{\deg\frac{\xi_i}{D}-\deg\frac{D_i}{D}})}{(1-\lambda)^2}\right)\cdot\lambda^{\deg D}\end{aligned}$$

が得られる。 □

長さ $\ell_S(S/I)$ は，この多項式に $\lambda=1$ を代入して得られる。

系 3.6.

$$\begin{aligned}\ell_S(S/I) &= \sum_{i=2}^{n}(d_{i-1}-d_i)(c_i-d_i)\\ &= ab+\sum_{i=2}^{n-1}[(c_{i+1}-c_i)-(d_{i-1}-d_i)]\end{aligned}$$

である。

なお，$(c_{i+1}-c_i)-(d_{i-1}-d_i)>0$ $(2\leq\forall i\leq n-1)$ となっている。もちろん，$\ell_S(S/(f,g))\geq ab$ であり，等号は $n=2$ のときに限る。

4 $\dim S \geq 2$ の場合

環 S が正則局所環で $\dim S \geq 2$ のときは，$\dim S = 2$ の場合に帰着させる形で，次が得られる。

定理 4.1. $\mathrm{ht}_G(f^*, g^*) = 1$ で $\mathrm{ht}_G(f^*, g^*, h^*) = 2$ とする。$\alpha, \beta \in S$ を，$h = \alpha f + \beta g$ としたとき，$h^* \notin (f^*, g^*)$，$\mathrm{o}(\alpha) = b - d$ が成り立つように取っておく。このとき，$I^* = (f^*, g^*, h^*)$ であって，環 $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ は Cohen – Macaulay であり，重複度に関する等式

$$\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(R) = (a-d)(b-d) + cd$$

が得られる。但し $c = \mathrm{o}(h)$ である。また

$$\mathrm{H}(\mathrm{G}(\mathfrak{m}), \lambda) = \frac{(1-\lambda^c)(1-\lambda^d) + \lambda^d(1-\lambda^{a-d})(1-\lambda^{b-d})}{(1-\lambda)^{\dim S}}$$

である。

定理 4.2. 環 $\mathrm{G}(\mathfrak{m})$ が Cohen – Macaulay であれば，イデアル I^* は，定理3.1 の条件を満たす生成系をもち，その構造は $\dim S = 2$ の場合に帰着される。例えば，等式

$$\mathrm{H}(\mathrm{G}(\mathfrak{m}), \lambda) = \frac{\sum_{i=2}^{n} \lambda^{d_i}(1-\lambda^{d_{i-1}-d_i})(1-\lambda^{c_i-d_i})}{(1-\lambda)^{\dim S}}$$

が成り立つ。

参考文献

[1] S. Goto, W. Heinzer, and M.-k. Kim, *The leading form ideal of a complete intersection of height* 2, to appear in J. Algebra.

[2] J. Herzog, *When is a regular sequence super regular?*, Nagoya. Math. J., **83** (1981), 183-195.

[3] S. C. Kotahtri, *The local Hilbert function of a pair of plane curves*, Proc. Amer. Math. Soc., **72** (1978), 439-442.

[4] L. Robbiano and G. Valla, *On the equations defining tangent cones*, Math, Proc. Camb. Phil. Soc., **88** (1980), 281-297.

Department of Mathematics, School of Science and Technology, Meiji University, 214-8571 JAPAN

E-mail address: goto@math.meiji.ac.jp

2次元正則局所環上のアジョイントイデアル

中村幸男

明治大学理工学部

1 Introduction

これは E.Hyry, L. Ojala との共同研究によるものである.

$(A, \mathfrak{m})$ を 2 次元正則局所環, I を A のイデアルとする. $X \to \operatorname{Spec} A$ を I の log resolution, すなわち 双有理な固有射で X は正則, $\mathcal{O}_X$ は可逆層となるものとする. (ここで例外集合の正規交叉性は要求しない.) このとき I のアジョイントとは大域切断 $\mathcal{J}(I) = \Gamma(X, I\omega_X)$ で与えられるものである. 但し ω_X は X の標準層のこととする.

Lipman は 1993 年にアジョイントの定義を与えたが, 今ではこれは Multiplier イデアルの特殊ケースとして知られている. 実際 $I\mathcal{O}_X = \mathcal{O}(-F)$ となる有効因子 F をとり, $\omega_X = \mathcal{O}(K_X)$ とおけば, $c \in Q_+$ に対して multiplier イデアルは $\mathcal{J}(cI) = \Gamma(X, K_X - [cF])$ で与えられ, $c = 1$ の場合はアジョイントを意味する. しかしながら, 本稿では初めに定義した Lipman の用語に従い $c = 1$ における Multiplier ideal をアジョイントと呼ぶこととする.

さて、Multiplier イデアルはいつも I を含む A のイデアルで整閉イデアルとなるのだが, Lipman と渡辺先生は次のことを示した.

Theorem 1.1 (Lipman-渡辺). (1) J が整閉な $\mathfrak{m}$ ー準素イデアルならば, ある $c \in Q_+$ とあるイデアル I が存在して, $J = \mathcal{J}(cI)$ となる.

(2) J が単純整閉な $\mathfrak{m}$ ー準素イデアルならば次は同値である.

(a) $J = \mathcal{J}(I)$ *for some ideal* I.

(b) J の位数は 1 .

イデアルが何かのアジョイントとなるとき、アジョイントイデアルと呼ぶことにする. そこで,「与えられた整閉イデアルは, いつアジョイントイデアルとなるか?」という問題を考えてみたいと思う. この問題はイデアル $\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合に帰着されるので, 以後整閉 $\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合を考える.

2 主定理

主定理について述べるために, いくつかの用語を準備する.

以下 $(A,\mathfrak{m})$ は2次元正則局所環で商体 K をもつとし, 商体が K となるような2次元正則局所環を point と呼ぶ. Point B, C,... に対し, その極大イデアルを $\mathfrak{m}_B$, $\mathfrak{m}_C$,... で書くことにする. $x\in\mathfrak{m}\setminus\mathfrak{m}^2$ を取り, M を $A[\mathfrak{m}/x]$ の極大イデアルで x を含むものと取る. そのとき局所環 $A[\mathfrak{m}/x]_M$ は A の quadratic transform と呼ばれ, quadratic transform は point となる. 2つの point B, C を $B\subseteq C$ と取る. このとき quadratic transform の列:

$$B=:B_0\subset B_1\subset\ldots\subset B_n:=C\quad(n\geq 0)$$

が一意的に取れる (ここで B_{i+1} は B_i の quadratid transform). また、$\mathfrak{m}_C$ は常に $\mathfrak{m}_B$ を含んでおり, 有限次体拡大 $B/\mathfrak{m}_B\to C/\mathfrak{m}_C$ の拡大次数を $[C:B]$ で表す.

I を A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. B が A を含む point であるとき I の B における transform I^B は次のように定義される. $I^A=I$. $A\neq B$ のときは, quadratic transform の列 $A=:A_0\subset A_1\subset\ldots\subset A_n:=B$ を取り, I^{A_i} が定義されたとき, $I^{A_{i+1}}=I^{A_i}\cdot(\mathfrak{m}_{A_i}A_{i+1})^{-\operatorname{ord}_{A_i}(I^{A_i})}$ と定める. ここで point C のイデアル J に対し $\operatorname{ord}_C(J)=\max\{n|J\subseteq\mathfrak{m}_C^n\}$ とおいた. I^B は B のイデアルであり, I が整閉なら, I^B もそうであり, I が $\mathfrak{m}$-準素イデアルなら, I^B も真イデアルであれば $\mathfrak{m}_B$-準素となる. $r_B(I)=\operatorname{ord}_B(I^B)$ とおく. I のサポートとは, $\operatorname{Supp}I=\{B\mid r_B(I)>0\}$ のこととする. $\operatorname{Supp}I$ は常に有限集合となることが知られている.

B と C を point とする. C が B を真に含み, かつ C が ord_B で定まる附値環に含まれるとき, 「C は B を proximate する」といい $B\prec C$ で表す. C が B の quadratic transform のときは常に $B\prec C$ である. $(r_B)_{B\supset A}$ を非負整数の族で 有限個の B を除いて $r_B=0$ となるものとする. このとき, Lipman は次を示した: A の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I ですべての $B\supseteq A$ に対し $r_B(I)=r_B$ を満たすものが存在する必要十分条件は不等式 $r_B\geq\sum_{B\prec C}[C:B]r_C$ がすべての $B\supseteq A$ について成り立つことである. この不等式は Proximity Inequality と呼ばれる. I を A の整閉 $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. Point $B\supseteq A$ に対し,

$$\operatorname{Excess}_B(I):=r_B(I)-\sum_{B\prec C}[C:B]r_C(I).$$

とおく. Proximity Inequality により $\operatorname{Excess}_B(I)$ は常に非負である.

さてここで, 主定理を述べる.

Theorem 2.1. J は整閉 $\mathfrak{m}$-準素イデアルとし $n>0$ を整数とする. このとき次は同値である.

(1) $J^n=\mathcal{J}(I)$ *for some ideal* I *in* A.

(2) $J^{n+1}=\mathcal{J}(J)I$ *for some ideal* I *in* A.

(3) $n\operatorname{Excess}_B(I)+1\geq\sum_{B\prec C,C\in\operatorname{Supp}J}[C:B]$ *for all* $B\supseteq A$.

定理から次のことが直ちに従う.

(1) J^n がアジョイントイデアルなら, J^k $(k\geq n)$ もアジョイント.

（2）J^n がアジョイントイデアルで, J が単純イデアルのとき, $J^{n+1} = \mathcal{J}(J)I$ となるが, J が単純なので, 整閉イデアルの単純イデアルによる一意分解性により, $\mathcal{J}(J) = J^k$ $(k \geq 0)$ とかける. すると $\mathrm{ord}_A(\mathcal{J}(J)) = k\,\mathrm{ord}_A(J)$, 一方, $\mathrm{ord}_A(\mathcal{J}(J)) = \mathrm{ord}_A(J) - 1$ となることが Lipman により示されており, このことから, $(1-k)\,\mathrm{ord}_A J = 1$. よって $\mathrm{ord}_A J = 1$ を得る. これは Lipman-渡辺の結果の別証明を与えている.

3 応用

以下, 主定理の応用を挙げていく. まずはブローアップの Gorenstein 性との関連から述べる.

Theorem 3.1. J は整閉 $\mathfrak{m}$-準素イデアルとし $n > 0$ を整数とする. $Y = \mathrm{Proj}\,\mathrm{R}(J)$ とおくと次は同値.

(1) Y は *Gorenstein* で $J^n\omega_Y^{-1}$ は大域切断で生成される.

(2) J^n はアジョイントイデアル.

(1) $\Rightarrow$ (2) の矢印は高次元でも成り立つ.

Proposition 3.2. $(A, \mathfrak{m})$ は等標数で標数ゼロのエクセレント正則局所環, J は整閉 $\mathfrak{m}$-準素イデアルで $Y = \mathrm{Proj}\,\mathrm{R}(J)$ は *Gorenstein* かつ有理特異点のみをもち, $J^n\omega_Y^{-1}$ は大域切断で生成されるとする. このとき J^n はアジョイントイデアル.

3 次元以上ではこの命題の逆は成り立たない.

Example 3.3. $A = k[x,y,z]_{(x,y,z)}$ は多項式環を (x,y,z) で局所化した 3 次元正則局所環. $I = \overline{(x, y^3, z^3)}$ とする. このとき $J = \mathcal{J}(I^2)$ とおくと, $J = \overline{(x, y^2, z^2)}$ となることが確かめられる. このとき J はアジョイントイデアルであるが, $\mathrm{Proj}\,\mathrm{R}(J)$ は *Gorenstein* ではない. 実際, $(\mathrm{R}(J)[1/xt])_0 = k[y^2/x, yz/x, z^2/x]$ となり, これは *Gorenstein* ではない. また, Y は有理特異点のみを持つスキームである.

単純イデアルがアジョイントとなる条件については Lipman-渡辺によって明らかにされた. では 2 つの単純イデアルの積がアジョイントとなる条件はどうであろうか？以下, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は閉体と仮定する. I, J はそれぞれ単純整閉 $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする.

Lemma 3.4. IJ がアジョイントなら, $\mathrm{Supp}\,I \subseteq \mathrm{Supp}\,J$ または $\mathrm{Supp}\,I \supseteq \mathrm{Supp}\,I$.

従って, IJ がアジョイントのときは, $\mathrm{Supp}\,I$ と $\mathrm{Supp}\,J$ の間にある包含関係を指定して話を進めてよいことになる.

Theorem 3.5. 次は同値

(1) IJ がアジョイントで $\mathrm{Supp}\,I \subseteq \mathrm{Supp}\,J$.

(2) $\mathrm{ord}_A I = 1$ であり, $k = ord_A J$ とおくと, $k \leq 2$, $J \subseteq I^k$, かつ $e(J) = \ell_A(A/I^{k-1}) + \ell_A(A/J)$.

この特徴づけからアジョイントと minimal multiplicity との関係を見出すことができる. ここで, I が minimal multiplicity を持つとは, $e(I) = \mu_A(I) - \dim A + \ell_A(A/I)$ が成り立つことをいう.

Corollary 3.6. 次は同値

(1) I が *minimal multiplicity* をもつ.

(2) $\mathrm{ord}_A I \leq 2$ で $\mathfrak{m}I$ がアジョイントイデアル.

IJ がアジョイントで $\mathrm{Supp}\, I \subseteq \mathrm{Supp}\, J$ の場合, $\mathrm{ord}_A I = 1$ であり, このとき A の正則パラメーター x, y をうまく取れば $I = (x, y^s)$ という形をしていることがいえる. では, J についてはどんな制限が加わるであろうか? 上の定理より $\mathrm{ord}_A J \leq 2$ となるが, $\mathrm{ord}_A J = 2$ のときが興味の対象となる.

Theorem 3.7. IJ はアジョイント, $\mathrm{ord}_A I = 1$, $\mathrm{ord}_A J = 2$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) $e(J) \geq 4s + 2$. ただし $s = \#\mathrm{Supp}\, I$ とおいた.

(2) $e(J) = 4s + 2$ のとき, A の正則パラメータ x, y をうまく取ると $I = (x, y^s)$, $J = \overline{(x^2, y^{2s+1})}$ とかける.

参考文献

[1] C. Favre and M. Jonsson, *Valuations and multiplier ideals*, preprint

[2] E. Hyry, Y Nakamura and L. Ojala, *Adjoint ideals and Gorenstein blowups in two-dimensional regular local ring*, preprint.

[3] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry*, vol 2. Springer Verlag,Berlin-Heidelberg, 2004.

[4] J. Lipman, *Adjoint and polars of simple complete ideals in two-dimensional regular local rings*, Bull. Soc. Math. Belg., **45** (1993), 224-244.

[5] J. Lipman, *Adjoint of ideals in regular local rings*, Math. Res. Lett., **1** (1994), 739-755.

[6] J. Lipman and K. Watanabe, *Integrally closed ideals in two-dimensional regular local rings are multiplier ideals* Math. Res. Lett., **10** (2003), 423-434.

Locally nilpotent derivations of maximal rank having infinitely generated kernels

京都大学数理解析研究所
黒田　茂

1　序

自然数 n に対し，$K[X]=K[X_1,\ldots,X_n]$ を標数零の体 K 上の n 変数多項式環とする．K 線形写像 $D:K[X]\to K[X]$ は，任意の $f,g\in K[X]$ に対し $D(fg)=D(f)g+fD(g)$ が成り立つとき，$K[X]$ における微分という．微分 D の核 $K[X]^D:=\{f\in K[X]\mid D(f)=0\}$ は $K[X]$ の K 部分代数となるが，その有限生成性の問題はヒルベルトの第 14 問題の特別な場合にあたり，一般に大変難しい．ザリスキ [10] より，$n\leq 3$ ならば $K[X]^D$ は常に有限生成である．一方，ダークセン [3] がヒルベルトの第 14 問題に対する永田の反例 [9] を微分の核として記述したのを発端に，核が有限生成でない微分の例は様々な数学者により与えられてきた．微分の核の有限生成性の問題は，筆者 [6] が $n=4$ の場合に有限生成でない例を与えることで，最終的に全ての n に関して決着した．

ところで，微分 D は任意の $f\in K[X]$ に対し $D^m(f)=0$ となる $m\in\mathbf{N}$ が存在するとき，局所冪零であるという．また，各 i に対し $D(X_i)$ が $K[X_1,\ldots,X_{i-1}]$ に含まれるとき，D は三角であるという．D は三角ならば局所冪零である．デイグルとフロイデバーグは，[1] において $n\geq 5$ ならば核が有限生成でない三角微分が存在することを，また [2] において $n\leq 4$ ならば三角微分の核は常に有限生成であることをそれぞれ示した．このことから，

特に $n \geq 5$ では局所冪零微分の核は有限生成とは限らない．しかし，一般の局所冪零微分に対して $n=4$ の場合は未解決であり，世界中の多くの数学者がこの問題に関心を持っている．

核の有限生成性

	一般の微分	一般の局所冪零微分	三角微分
$n \geq 5$	有限生成とは限らない	有限生成とは限らない	有限生成とは限らない
$n = 4$	有限生成とは限らない	**未解決**	有限生成
$n \leq 3$	有限生成	有限生成	有限生成

我々はこの問題の解決に向け，最大階数の局所冪零微分の核の有限生成性について研究した．ここで，$K[X]$ における微分 D に対し，$K[f_1,\ldots,f_n]=K[X]$ および $D(f_i)=0$ $(i=1,\ldots,n-r)$ を満たす $f_1,\ldots,f_n \in K[X]$ が存在するような最小の非負整数 r を D の**階数**（rank）という．これはフロイデンバーグが導入した概念である．定義より $K[X]$ における微分の階数は n のときが最大である．また，一般に $n \geq 2$ ならば三角微分の階数は n 未満となる．実際 $D(X_1)=0$ なら D の階数は n 未満だが，D が三角のとき $D(X_1) \neq 0$ ならば $X_1/D(X_1)$ は $K[X]$ に含まれるので，

$$f_i := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k(X_{i+1})}{k!} \left(-\frac{X_1}{D(X_1)} \right)^k \quad (i=1,\ldots,n-1)$$

は $K[X]$ の元となる．このとき $K[f_1,\ldots,f_{n-1},X_1]=K[X]$ かつ $D(f_i)=0$ $(i=1,\ldots,n-1)$ となることが簡単な議論から従う．

微分が三角であるという条件は $K[X]$ の変数変換によって変わり得るが，微分の階数の概念は $K[X]$ の変数変換に対して不変である．従って $n \geq 2$ のとき，$K[X]$ における階数 n の局所冪零微分の核は，どのような変数変換を施しても $K[X]$ の三角微分の核と等しくならない．三角微分の核の有限生成性の問題は決着済みなので，一般の局所冪零微分の核の有限生成性の研究では，階数 n の局所冪零微分の考察は極めて重要である（先日フロイデンバーグ氏

に会った際，さらに $n=4$ の場合には階数が4未満の局所冪零微分の核は常に有限生成となることが，[2] と同様の議論から従うと指摘された）．

$K[X]$ における階数 n の局所冪零微分の例は，フロイデンバーグ [5] により初めて与えられた．しかし，こうした微分の構成は非常に難しいため，それらの核の有限生成性の研究はこれまで行われてこなかった．今回，我々は $n \geq 5$ の場合に，有限生成でない核を持つ階数 n の局所冪零微分の構成に初めて成功した．

2　主結果

一般に $K[X]^{n-1}$ の元 $f=(f_1,\ldots,f_{n-1})$ に対し，$K[X]$ の微分 Δ_f が $h \in K[X]$ を $J(f_1,\ldots,f_{n-1},h)$ に写すことにより定まる．ここで，n 個の多項式 $g_1,\ldots,g_n \in K[X]$ に対し，$n \times n$ 行列 $(\partial g_i/\partial X_j)_{i,j}$ の行列式を $J(g_1,\ldots,g_n)$ で表すことにする．各 i に対し $J(f_1,\ldots,f_{n-1},f_i)=0$ が成り立つので，$f_1,\ldots,f_{n-1}$ はこの微分の核に含まれる．

さて，以下では $n \geq 5$ とする．非負整数 p_1' と l_1 に対し，

$$
\begin{aligned}
F &= X_1X_3 + X_2^2 \\
G &= X_1^{p_1} - 2F^{l_1}X_1^{p_1'}X_2 - F^{2l_1}X_3 \\
R &= X_1^{p_1'+1} - F^{l_1}X_2
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

とおく．ただし，$p_1 = 2p_1'+1$ とする．自然数 l_i, p_i $(i=2,3)$, q_i $(i=6,\ldots,n)$ および非負整数 l_0 を，$p_i - p_1 - 1$ $(i=2,3)$ が非負となるようにとる．$K[X_1,X_2,X_3]$ における微分 $\Delta_{(F,G)}$ を利用し，$K[X]$ の微分 Δ を

$$
\begin{aligned}
\Delta(X_i) &= F^{l'-2l_1}G^{l_0}\Delta_{(F,G)}(X_i) \quad (i=1,2,3) \\
\Delta(X_4) &= \frac{2(p_1-p_2)}{p_1}F^{l'-l_2}X_1^{p_2-p_1-1}(F^{l_1}X_3 + 2X_1^{p_1'}X_2)R \\
\Delta(X_5) &= \frac{2(p_1-p_3)}{p_1}F^{l'-l_3}G^{l_0}X_1^{p_3-p_1-1}(F^{l_1}X_3 + 2X_1^{p_1'}X_2)R \\
\Delta(X_i) &= 2F^{l'-2l_1}G^{l_0}X_{i-1}^{q_i}R \quad (i=6,\ldots,n)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

から定める．ただし，l' は $\max\{2l_1, l_2, l_3\}$ 以上の整数とする．$i = 4, \ldots, n-2$ に対し，

$$p_i = \sum_{j=6}^{i+2} \prod_{k=j+1}^{i+2} q_k + p_3 \prod_{k=6}^{i+2} q_k \tag{2.3}$$

とおく．

上の様に定義した $K[X]$ の微分 Δ に対し，次が成り立つ．

定理 2.1 $n \geq 5$ とする．このとき Δ は局所冪零である．さらに，以下の条件の下で Δ の階数は n であり，その核 $K[X]^{\Delta}$ は有限生成でない：

(a) p_2 は p_1 と p_3 の最大公約数で割り切れる．

(b) p_2 は，p_1 および $p_3, \ldots, p_{n-2}$ が生成する $\mathbf{N}$ の部分半群に含まれない．

(c) p_1 と p_3 の最小公倍数は $p_2 l_2^{-1} \min\{2l_1, l_3\}$ 以下である．

例えば，

$$p_1' = 2,\ p_2 = 18,\ p_3 = 7,\ l_0 = 3,\ l_1 = l_2 = 1,\ l_3 = l' = 3$$

および $q_i = 2\ (i = 6, \ldots, n)$ に対し，条件 (a), (b), (c) は成り立つ．従って定理 2.1 より，これらの値から定まる Δ は階数 n の局所冪零微分で，その核 $K[X]^{\Delta}$ は有限生成でない．さらにこのとき，$\Delta(X_1), \ldots, \Delta(X_n)$ は全て次数 22 の斉次式となる．実際，

$$p_1 = 4l_1 + 1,\ p_2 = l_0(4l_1 + 1) + 2l_2 + 1,\ p_3 = 2l_3 + 1$$

および $q_i = 2l_1\ (i = 6, \ldots, n)$ が成り立つとき，$\Delta(X_1), \ldots, \Delta(X_n)$ は全て次数が $2l' + (l_0 + 1)(4l_1 + 1)$ の斉次式になる．

ところで $n \leq 5$ のとき，$K[X]$ における局所冪零微分 D の核 $K[X]^D$ の有限生成性の問題は，は $D(X_1), \ldots, D(X_n)$ が全て同じ次数の斉次式である場合には未解決だった．我々が与えた局所冪零微分は，この問題に対する答えが否定的であることを示す最初の例である．一方，次の問題は未解決のままである．

問題　$n = 5$ のとき，$K[X]$ における三角微分 D の核は，$D(X_1), \ldots, D(X_5)$ が全て同じ次数の斉次式ならば常に有限生成か．

3 三角微分

$K[X]$ の三角微分 $\hat{\Delta}$ を，$\hat{\Delta}(X_1)=0$ および

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}(X_2) &= X_1^{l'-l_1} \\
\hat{\Delta}(X_3) &= p_1 X_1^{l'-2l_1} X_2^{p_1-1} \\
\hat{\Delta}(X_i) &= \frac{(p_1-p_{i-2})p_{i-2}}{p_1} X_1^{l'-l_{i-2}} X_2^{p_{i-2}-p_1-1} X_3 \quad (i=4,5) \\
\hat{\Delta}(X_i) &= X_1^{l'-2l_1} X_{i-1}^{q_i} \quad (i=6,\ldots,n)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

から定める．

このとき，筆者の結果 [7] を使うことで次の定理が得られる．

定理 3.1 条件 (a), (b), (c) が成り立つとき，$\hat{\Delta}$ の核 $K[X]^{\hat{\Delta}}$ は有限生成でない．さらに，単項式 X_2 および $X_4,\ldots,X_n$ は，$K[X]^{\hat{\Delta}}$ のいずれの元にも零でない係数で現れない．

次に，準同型 $\sigma: K[X]\to K[X]$ を

$$
\begin{aligned}
\sigma(X_1) &= F \\
\sigma(X_2) &= X_1 \\
\sigma(X_3) &= F^{l_1}X_3 + 2X_1^{p_1'}X_2 \\
\sigma(X_4) &= G^{l_0}X_4 \\
\sigma(X_i) &= X_i \quad (i=5,\ldots,n)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

から定める．定理 2.1 の証明は，本質的に次の定理の証明に帰着する．

定理 3.2 $\sigma: K[X]^{\hat{\Delta}} \to K[X]^{\Delta}$ は同型である．

ここで，$\sigma: K[X]\to K[X]$ 自体は同型でないことに注意する．実際 Δ の階数は n なので，上で述べたように $\phi: K[X]\to K[X]$ が同型ならばどのような三角微分 D に対しても，$\phi(K[X]^D)$ は $K[X]^{\Delta}$ と等しくならない．

定理 3.1 の前半と定理 3.2 から，$K[X]^{\Delta}$ が有限生成でないことは直ちに従う．Δ の階数が n であることは，定理 3.1 の後半と定理 3.2，および次の補題を使って示す．

補題 3.3 D を $K[X]$ の微分とする．各 $i \in \{1,\dots,n\}$ に対し，任意の $f \in K[X]^D$ に単項式 X_i が零でない係数で現れないならば D の階数は n である．

証明 仮に D の階数が n 未満とすれば，$K[f_1,\dots,f_n]=K[X]$ かつ $D(f_1)=0$ を満たす $f_1,\dots,f_n \in K[X]$ が存在する．このとき $f_1 \in K[X]^D$ なので，仮定より全ての i に対し単項式 X_i は f_1 に零でない係数で現れない．よって，$\partial f_1/\partial X_i$ は $\sum_{i=1}^n X_iK[X]$ に含まれる．従って $J(f_1,\dots,f_n)$ も $\sum_{i=1}^n X_iK[X]$ に含まれる．しかし，$K[f_1,\dots,f_n]=K[X]$ であることから $J(f_1,\dots,f_n)$ は $K\setminus\{0\}$ の元でなければならず，矛盾が生じる． □

4 $K[X_1,X_2,X_3]$ の局所冪零微分

現時点では，$n=4$ において同様の例は構成できていない．そもそも，最大階数の局所冪零微分の構成は難しく，三角微分のように簡単に与えることができない．今回の我々の結果でも，$\Delta_{(F,G)}$ の構成はフロイデンバーグ [5] による．このような局所冪零微分の組織的な構成法の開発は，局所冪零微分の核の有限生成性の研究において非常に重要である．

可換環論シンポジウムでは，これに関連し $F'=X_1X_3+X_2^3$ に対して $\Delta_{(F',G')}$ が $K[X_1,X_2,X_3]$ の局所冪零微分となるような $G' \in K[X_1,X_2,X_3]$ の構成法についての考察を与えた．後日，このことについてフロイデンバーグ氏に話した所，彼が [4] で与えた “Local slice construction” という方法によって，実際に $\Delta_{(F',G')}$ が局所冪零微分となるような G' が構成できることを教えられた．この方法を使うと，既にある局所冪零微分を使って，様々な新たな局所冪零微分を構成できる．しかし，この方法は $n=3$ の場合にのみ機能するもので，高次元における一般化は新たな課題である．

最後に，$\Delta_{(F',G')}$ が $K[X_1,X_2,X_3]$ の局所冪零微分となるような G' をどのように与えればよいか述べる．より一般に，自然数 t に対し $F_t=X_1X_3+X_2^t$ とおく．このとき，実は $\Delta_{(F_t,G')}$ が局所冪零微分になる様な $G' \in K[X_1,X_2,X_3]$ はたくさん存在する．ここでは，(2.1) の自然な一般化となるようなものを与

える．自然数 p と l に対し，$R_t^{p,l} = X_1^p - F^l X_2$ とおく．すると，イデアル (X_1) を法として F^{lt+1} と $(-R_t^{p,l})^t$ は共に $X_2^{lt^2+t^2}$ と合同である．よって，

$$G_t^{p,l} = \frac{F^{lt+1} - (-R_t^{p,l})^t}{X_1}$$

は $K[X_1, X_2, X_3]$ の元となる．このとき，$K[X_1, X_2, X_3]$ の微分 $\Delta_{(F_t, G_t^{p,l})}$ は局所冪零となる．(2.1) における G は，$t = 2$, $p = p_1' + 1$, $l = l_1$ の場合の $G_t^{p,l}$ と等しい．

参考文献

[1] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension 5, J. Algebra **221** (1999), 528–535.

[2] ———, Triangular derivations of $\mathbf{k}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, J. Algebra **241** (2001), 328–339.

[3] H. Derksen, The kernel of a derivation, J. Pure Appl. Algebra **84** (1993), 13–16.

[4] G. Freudenburg, Local slice constructions in $k[X, Y, Z]$, Osaka J. Math. **34** (1997), 757–767.

[5] ———, Actions of $\mathbf{G}_a$ on $\mathbf{A}^3$ defined by homogeneous derivations, J. Pure Appl. Algebra **126** (1998), 169–181.

[6] S. Kuroda, Fields defined by locally nilpotent derivations and monomials, J. Algebra **293** (2005), 395–406.

[7] ———, Triangular derivations having infinitely generated kernels, preprint.

[8] ———, Locally nilpotent derivations of maximal rank having infinitely generated kernels, preprint.

[9] M. Nagata, On the fourteenth problem of Hilbert, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1960, 459–462.

[10] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math. **78** (1954), 155–168.

〒 606-8502

京都市左京区北白川追分町

京都大学数理解析研究所

E-mail address: `kuroda@kurims.kyoto-u.ac.jp`

On the decomposition of Tensor products of Jordan canonical forms

飯間　圭一郎
岡山大学大学院　自然科学研究科　数理物理科学専攻
iima@math.okayama-u.ac.jp

吉野　雄二
岡山大学大学院　自然科学研究科
yoshino@math.okayama-u.ac.jp

本稿はシンポジウムでの講演の記録である．ここでの目的は, [MV] 等によって古くから知られた標数 0 の結果を, 正標数の場合に拡張することである．

問題 1 k を代数閉体とし, V , W を k 上有限次元ベクトル空間とする．このとき, $f \in \mathrm{End}_k(V)$, $g \in \mathrm{End}_k(W)$ に対して, f, g が既約な Jordan 標準形をもつとき, $f \otimes g$ を Jordan 分解せよ．

定理 2 ([MV]Theorem 2, 他)
固有値が α で, サイズが m の既約 Jordan 標準形を $J_m(\alpha)$ と表わす．
k の標数が 0 のとき, $J_m(\alpha)$, $J_n(\beta)$, $(m \leq n)$ に対して, 次のことが成り立つ．

(1) $\alpha = 0 = \beta$
$$J_m(0) \otimes J_n(0) = J_m(0)^{\oplus n-m+1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{2m-2} J_{m-\lceil i/2 \rceil}(0),$$
(2) $\alpha = 0 \neq \beta$
$$J_m(0) \otimes J_n(\beta) = J_m(0)^{\oplus n},$$
(3) $\alpha \neq 0 \neq \beta$
$$J_m(\alpha) \otimes J_n(\beta) = \bigoplus_{i=1}^{m} J_{m+n+1-2i}(\alpha\beta).$$

(1),(2) の場合はこの結果は, 正標数のときも正しい．しかし, (3) の場合には上で揚げた等式は正標数では一般には正しくない．

主結果：標数に依らず分解を与える手続き (アルゴリズム) が存在する．

(以下にその手続きを紹介したい.)
$J_m(\alpha)$ は $k[X]$-加群として $k[X]/(X-\alpha)^m$ 上の X の作用を表わし, $J_n(\beta)$ は $k[Y]$-加群として $k[Y]/(Y-\beta)^n$ 上の Y の作用を表わしているので, $J_m(\alpha) \otimes J_n(\beta)$ は $R := k[X]/(X -$

$\alpha)^m \otimes_k k[Y]/(Y-\beta)^n$ 上の $X\otimes Y$ の作用, 自然な同型で $R \cong k[X,Y]/((X-\alpha)^m,(Y-\beta)^n)$ 上の XY の作用を考えればよい.
以下では $k[Z] \xrightarrow{\varphi} R\ ;\ Z \longmapsto XY$ により R を $k[Z]$-加群であるとみなす. R は $k[Z]$ 上有限生成であり, $J_m(\alpha)\otimes J_n(\beta)$ の固有値はすべて $\alpha\beta$ であるから,

$$R \cong_{k[Z]} \bigoplus_{i=1}^r k[Z]/(Z-\alpha\beta)^{c_i},\ 但し\ (c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_r)$$

が得られる. このことは, $J_m(\alpha)\otimes J_n(\beta) = \bigoplus_{i=1}^r J_{c_i}(\alpha\beta)$ を意味しているので, 問題は数列 $\{c_i\}_{i=1}^r$ を求めることに帰着する.
$w := Z-\alpha\beta$ とおく. $\{c_i\}_{i=1}^r$ を分割と見なし, その共役な分割を $\{b_i\}_{i=1}^{m+n-1}$ とおく. i.e. $b_i = |\{j | c_j \geq i\}|$. $\{c_i\}_{i=1}^r$ の定義から, $b_i = \dim_k(w^{i-1}R/w^iR)$ に注意する. よって, $a_i := \dim_k(R/w^iR)$ を求めると, $b_i = a_i - a_{i-1}$ により, $\{c_i\}_{i=1}^r$ が決まる. 以下では, 各場合に分けて a_i を計算する.
$x := X-\alpha$, $y := Y-\beta$ と変数変換する.

(1) $\alpha = 0 = \beta$ のとき
$R/w^iR = k[x,y]/(x^m, y^n, (xy)^i)$ であるから, a_i を計算することは容易である. $(x^m, y^n, (xy)^i)$ は単項式イデアルであるから a_i の値は, 体 k の標数に依らずに決まる. よって $J_m(0)\otimes J_n(0) = J_m(0)^{\oplus n-m+1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{2m-2} J_{m-\lceil i/2 \rceil}(0)$ が成り立つ.

(2) $\alpha = 0 \neq \beta$ のとき
$R/w^iR = k[x,y]/(x^m, y^n, x^i)$ であるから, a_i を計算することは容易である. (x^m, y^n, x^i) は単項式イデアルであるから a_i の値は, 体 k の標数に依らずに決まる. よって $J_m(0)\otimes J_n(\beta) = J_m(0)^{\oplus n}$ が成り立つ.

(3) $\alpha \neq 0 \neq \beta$ のとき
自己同型で変形して $R/w^iR \cong k[x,y]/(x^m, y^n, (x+y)^i)$ となる. ここでは, $(x+y)^i$ を展開したときに現われる二項係数が 0 であるか, 0 でないかは, 体 k の標数によって異なるので, a_i の値も体 k の標数によって異なる. 例えば, 次のようになる.

$$J_4(\alpha)\otimes J_9(\beta) = \begin{cases} J_{12}(\alpha\beta)\oplus J_8(\alpha\beta)^{\oplus 3} & (\mathrm{char}(k)=2) \\ J_9(\alpha\beta)^{\oplus 4} & (\mathrm{char}(k)=3) \\ J_{10}(\alpha\beta)^{\oplus 3}\oplus J_6(\alpha\beta) & (\mathrm{char}(k)=5) \\ J_{12}(\alpha\beta)\oplus J_{10}(\alpha\beta)\oplus J_7(\alpha\beta)^{\oplus 2} & (\mathrm{char}(k)=7) \\ J_{11}(\alpha\beta)^{\oplus 2}\oplus J_8(\alpha\beta)\oplus J_6(\alpha\beta) & (\mathrm{char}(k)=11) \\ J_{12}(\alpha\beta)\oplus J_{10}(\alpha\beta)\oplus J_8(\alpha\beta)\oplus J_6(\alpha\beta) & (\text{その他}) \end{cases}$$

以下, $S := k[x,y]$, $R := k[x,y]/(x^m,y^n)$, $A^{(l)} := R/(x+y)^lR$ とおく.
$T := k[x,y,z]/(x^m,y^n,z^l)$ とすると, $A^{(l)} \cong T/(x+y+z)T$ である. このことから求める

a_i の値は m, n, l に関して対称な値をとるので, $m \le n \le l$ としてよい.
S は大域次元 2 だから, 次の形の $A^{(l)}$ の次数付き S-加群としての自由分解がある.

$$0 \to S(-a) \oplus S(-b) \xrightarrow{\psi} S(-m) \oplus S(-n) \oplus S(-l) \xrightarrow{(x^m, y^n, (x+y)^l)} S \to A^{(l)} \to 0.$$

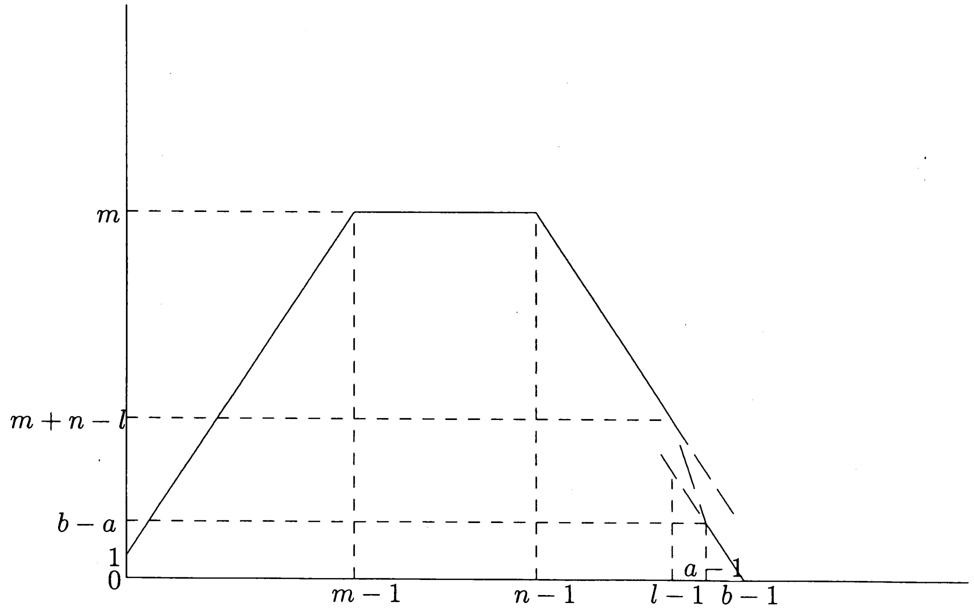
但し, $1 < m \le n \le l \le a \le b$ であり, かつ,

$$\psi = \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \\ f_3 & g_3 \end{pmatrix}$$

ここで, $\deg(f_1) = a - m$, $\deg(f_2) = a - n$, $\deg(f_3) = a - l$, $\deg(g_1) = b - m$, $\deg(g_2) = b - n$, $\deg(g_3) = b - l$ となる. Hilbert-Burch の定理により, $I_2(\psi) = (x^m, y^n, (x+y)^l)$ が成り立つので, $a + b = m + n + l$ を充たす.

$$H_{A^{(l)}}(t) = (1 - t^m - t^n - t^l + t^a + t^b)/(1-t)^2$$

であるから, $\dim_k(A^{(l)}) = mn + lm + ln - ab$ が成り立つ. $A^{(l)}$ の Hilbert 関数を考えることにより, a, b が求まる (下の図) ので $\dim_k(A^{(l)})$ の値が決定する.



$m \le n \le l \le m + n - 1$ となる l について, $(x+y)^l \equiv \binom{l}{m-1} x^{m-1} y^{l-m+1} + \binom{l}{m-2} x^{m-2} y^{l-m+2} + \cdots + \binom{l}{l-n+1} x^{l-n+1} y^{n-1} \ (mod\ (x^m, y^n))$.

$q_1 := \binom{l}{m-1}$, $q_2 := \binom{l}{m-2}$, $\cdots$, $q_r := \binom{l}{l-n+1}$ $(r = m+n-1-l)$ とおく.

$$H_i = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_{r-i+1} \\ q_2 & q_3 & \cdots & q_{r-i+2} \\ q_3 & q_4 & \cdots & q_{r-i+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{i-1} & q_i & \cdots & q_{r-1} \\ q_i & q_{i+1} & \cdots & q_r \end{pmatrix}$$

H_i は, $i \times (r-i+1)$ 行列である. 各 H_i は整数係数行列であるから, $I_i(H_i) :=$ 「H_i の i 次小行列式で生成される $\mathbb{Z}$ のイデアル」(但し, $1 \le i \le \lceil r/2 \rceil$) を考え, $I_i(H_i) = \delta_i \mathbb{Z}$ によって $\delta_i \ge 0$ と定める. 渡辺純三氏の SLP によると標数が 0 のときには $x+y$ が SLP を充たす, すなわち $I_i(H_i) \otimes_{\mathbb{Z}} k \ne 0$ であるから, 特に $\delta_i \ne 0$ である. $i_0 = \min\{i | \delta_i \equiv 0 \pmod p\}$ とおく. $x^m f_1 + y^n f_2 + (x+y)^l f_3 = 0$, $a = \deg(x^m f_1 + y^n f_2 + (x+y)^l f_3)$ である. H_{i_0} の成分は $l-1+i_0$ 次の単項式の係数であるから, $l-1+i_0 = a$ を充たす. $a+b = m+n+l$ に代入すれば $b = m+n+1-i_0$ が得られる. 以上により, $\dim_k(A^{(l)})$ の値が定まるので, 正標数の場合も含めて $J_m(\alpha) \otimes J_n(\beta)$ の既約分解が決定する.

□

参考文献

[HW] T. Harima and J. Watanabe. *The Finite Free Extension of Artinian K-Algebras with the Strong Lefschetz Property.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **110** (2003), 119-146.

[MV] A. Martsinkovsky and A. Vlassov. *The representation rings of* $k[x]$. preprint.(http://www.math.neu.edu/ martsinkovsky/mathindex.html)

[H] M. Herschend. *Solution to the Clebsch-Gordon problem for representations of quivers of type* $\tilde{\mathbb{A}}_n$.
preprint.(http://www.math.uu.se/research/pub/Herschend2.pdf)

F-thresholds and multiplicities

高木 俊輔（九州大学数理学研究院）
渡辺 敬一（日本大学文理学部）

この小文では F-threshold という正標数の特異点の不変量と重複度の関係についてご報告したいと思います．

1 F-thresholds

Mustaţă は F-pure threshold (F-pure threshold については [8] を参照して下さい) の概念を拡張して，F-threshold という正標数の環の不変量を定義しました．

定義 1.1 ([7, Section 1])**.** $(R,\mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ の F-純（つまり，$R \hookrightarrow R^{1/p}$ が R-加群として純）被約局所環とし，$\mathfrak{a}$, J を $\sqrt{0} \subsetneq \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{J} \subseteq \mathfrak{m}$ を満たす R のイデアルとする．ここで任意の自然数 e に対し，$\nu_{\mathfrak{a}}^{J}(p^e) := \max\{r \mid \mathfrak{a}^r \not\subseteq J^{[p^e]}\}$ とおく．ただし $J^{[p^e]} := (x^{p^e} \mid x \in J) \subset R$ とする．このとき $\mathfrak{a}$ の J に関する **F-threshold** $c^J(\mathfrak{a})$ を次のように定義する．

$$c^J(\mathfrak{a}) := \lim_{e\to\infty} \frac{\nu_{\mathfrak{a}}^{J}(p^e)}{p^e}$$

注意 1.2. (1) $c^J(\mathfrak{a})$ は必ず収束する．実際 $x \notin J$ ならば $x^{p^e} \notin J^{[p^e]}$ ($\because R$ は F-純) なので，任意の $q=p^e$ に対し $\nu_{\mathfrak{a}}^{J}(pq) \geq p \cdot \nu_{\mathfrak{a}}^{J}(q)$. よって $c^J(\mathfrak{a}) = \sup_e \frac{\nu_{\mathfrak{a}}^{J}(p^e)}{p^e}$ となる．

(2) $c^J(\mathfrak{a})$ は常に有限の値をとる．実際 $\mathfrak{a}$ が r 個の元で生成されているとし，$\mathfrak{a}^N \subseteq J$ とすると，$\mathfrak{a}^{N(r(p^e-1)+1)} \subseteq (\mathfrak{a}^N)^{[p^e]} \subseteq J^{[p^e]}$ となるので，$\nu_{\mathfrak{a}}^{J}(p^e) \leq N(r(p^e-1)+1)-1$. 特に $c^J(\mathfrak{a}) \leq Nr$ となる．

(3) 一般に $c^J(\mathfrak{a})$ が有理数になるかどうかは分かっていない．$R = F_q[[X,Y]]$ が有限体上の 2 次元完備正則局所環で $\mathfrak{a}=(f)$ が単項イデアルの場合には，原-Monsky [4] によって $c^J(\mathfrak{a})$ が有理数になることが証明されている．

(4) R が完全交差環ならば，イデアル $\mathfrak{a}$ の F-pure threshold $c(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する F-threshold $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$ と一致する．

F-threshold の定義から，直ちに次のようなことが分かります．

命題 1.3 ([7, Propositions 1.7, 1.8])**.** $(R,\mathfrak{m})$ を 標数 $p>0$ の *F*-純被約局所環とする．

(i) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, J$ を，$\sqrt{0} \subsetneq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \sqrt{J} \subseteq \mathfrak{m}$ を満たす R のイデアルとする．このとき $c^J(\mathfrak{a}) \le c^J(\mathfrak{b})$. さらに $\mathfrak{b} \subseteq \overline{\mathfrak{a}}$ ならば，$c^J(\mathfrak{a}) = c^J(\mathfrak{b})$ が成り立つ．

(ii) $\mathfrak{a}, J_1, J_2$ を，$\sqrt{0} \subsetneq \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{J_1} \cap \sqrt{J_2} \subseteq \mathfrak{m}$ を満たす R のイデアルとする．もし $J_1 \subseteq J_2$ ならば，$c^{J_1}(\mathfrak{a}) \ge c^{J_2}(\mathfrak{a})$. ゆえに $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の F-threshold の中で最小である．しかし $J_1 \subset J_2 \subset \overline{J_1}$ でも $c^{J_1}(\mathfrak{a}) = c^{J_2}(\mathfrak{a})$ が成り立つとは限らない（例 1.4(2)）．

ここで F-threshold の簡単な例を見てみましょう．

例 1.4. (1) イデアル J が R の正則列 $x_1, \ldots, x_r$ で生成されているならば，任意の自然数 e に対し $\nu_J^J(p^e) = r(p^e - 1)$. 従って $c^J(J) = r$.

(2) $R = k[[X_1, \ldots, X_d]]$ を標数 $p > 0$ の完備正則局所環とし，$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする．$J_1 = (X_1^{n_1}, \ldots, X_d^{n_d})$, $J_2 = \mathfrak{m}^n$ とおくと，$c^{J_1}(\mathfrak{m}) = n_1 + \cdots + n_d$, $c^{J_2}(\mathfrak{m}) = n + d - 1$.

例 1.4 (2) は F-threshold の定義から簡単に確かめられますが，一般に正則局所環の極大イデアルの F-threshold は次のように計算できます．

補題 1.5. $(R, \mathfrak{m})$ を 標数 $p > 0$ の d 次元正則局所環とし，$J \subset R$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする．このとき $c^J(\mathfrak{m}) = \max\{r \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \mid \mathfrak{m}^r \not\subset J\} + d$. 特に $c^J(\mathfrak{m})$ は d 以上の整数になる．

証明. $r := \max\{r \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \mid \mathfrak{m}^r \not\subset J\}$ とおく．r の定義より，$x \notin J$ となる $\mathfrak{m}^r$ の元 x が存在する．$(J : x) \subseteq \mathfrak{m}$ より，任意の $q = p^e$ に対し $\mathfrak{m}^{d(q-1)} \not\subset (J : x)^{[q]} = (J^{[q]} : x^q)$ となる．従って $\mathfrak{m}^{rq+d(q-1)} \not\subset J^{[q]}$ となり，これは $\nu_{\mathfrak{m}}^J(q) \ge rq + d(q-1)$ を意味する．ゆえに $c^J(\mathfrak{m}) \ge r + d$.

また $\mathfrak{m}$ が d 個の元で生成されることに注意すると，$\mathfrak{m}^{(r+d)q} \subseteq (\mathfrak{m}^{r+1})^{[q]} \subseteq J^{[q]}$ が任意の $q = p^e$ に対して成り立つ．これより $\nu_{\mathfrak{m}}^J(q) \le (r+d)q - 1$ となり，$c^J(\mathfrak{m}) \le r + d$ を得る． □

我々は F-threshold が環の特異性を測る 1 つの尺度になりうると予想しています．その根拠の 1 つが次の定理です．

定理 1.6. R は Cohen-Macaulay であると仮定し，巴系イデアル $J \subset R$ を 1 つ固定する．このとき任意の J を真に含むイデアル $I \supsetneq J$ に対し $d = c^J(J) > c^I(J)$ となることと，R が F-有理環（すなわち $J = J^*$, ここで J^* は J の密着閉包を表す）であることは同値である．

密着閉包，F-有理環についてはここでは詳しく述べません．[6] を参照して下さい．

2 判定イデアルとの関係

この節では R が正則局所環の場合のみ考えます．この場合 F-threshold $c^J(\mathfrak{a})$ は判定イデアルの一般化 $\tau(\mathfrak{a}^t)$ の跳躍数になっています．これを説明する前に $\tau(\mathfrak{a}^t)$ の定義を復習しましょう．

定義 2.1 ([5]). $(R, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の正則局所環とし，$E := E_R(R/\mathfrak{m}) \cong H^d_{\mathfrak{m}}(R)$ を剰余体 $R/\mathfrak{m}$ の入射包絡とする．$x_1, \ldots, x_d$ を R の正則巴系とすると，E には次のように Frobenius 射が作用する．

$$F_E : E \to E \quad [u/(x_1 \ldots x_d)^n] \mapsto [u^p/(x_1 \ldots x_d)^{pn}].$$

また $\mathfrak{a}$ を R の非零イデアルとし，$t \geq 0$ を非負実数とする．

(1) E における零加群の $\mathfrak{a}^t$-密着閉包 $0^{\mathfrak{a}^t}_E \subseteq E$ を次のように定義する: $z \in 0^{\mathfrak{a}^t}_E$ とは，任意の $q = p^e > 0$ に対し $\mathfrak{a}^{\lceil tq \rceil} F^e_E(z) = 0$ となること．

(2) 指数 t の $\mathfrak{a}$ の判定イデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ を次のように定義する．

$$\tau(\mathfrak{a}^t) := \mathrm{Ann}_R(0^{\mathfrak{a}^t}_E) \subseteq R.$$

命題 2.2 ([7, Proposition 2.7]). $(R, \mathfrak{m})$ を 標数 $p > 0$ の正則局所環とし，R の非零イデアル $\mathfrak{a}$ を 1 つ固定する．

(1) $c \mapsto \tau(\mathfrak{a}^c)$, $J \mapsto c^J(\mathfrak{a})$ という写像は，$\mathfrak{a}$ の F-threshold の集合と $\mathfrak{a}$ の判定イデアルの集合の間の 1 対 1 対応を与える．

(2) c を $\mathfrak{a}$ の F-threshold とする．このとき $c = c^J(\mathfrak{a})$ となる 最小のイデアル J が存在し，$J = \tau(\mathfrak{a}^c)$ となる．

(3) $c^J(\mathfrak{a}) = \min\{c \mid \tau(\mathfrak{a}^c) \subseteq J\}$.

注意 2.3. 原-吉田は，イデアル $\mathfrak{a}$ と実数 $t \geq 0$ に付随する乗数イデアル $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ を十分大きい標数 $p \gg 0$ に還元すると，判定イデアル $\tau(\mathfrak{a}^t)$ と一致することを証明した ([5, Theorem 6.8])．この対応により，F-threshold は乗数イデアルの跳躍数の正標数版と見なすことができる（乗数イデアルの跳躍数については [3] を参照のこと）．

3 重複度との関係

de Fernex-Ein-Mustaţă [2] は，標数零の正則局所環 $(R, \mathfrak{m})$ の $\mathfrak{m}$-準素イデアル $\mathfrak{a}$ について, log canonical threshold $\mathrm{lc}(\mathfrak{a})$ という不変量と重複度 $e(\mathfrak{a})$ の間の不等式を証明しました．log canonical threshold $\mathrm{lc}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の乗数イデアルの跳躍数の中で最小のものであり，F-threshold $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$ と対応しています（命題 1.3 (2) 及び注意 2.3 参照）．我々は de Fernex-Ein-Mustaţă の証明をなぞることによって，標数 $p > 0$ の正則局所環 $(R, \mathfrak{m})$ の $\mathfrak{m}$-準素イデアル $\mathfrak{a}$ について, $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$ と $e(\mathfrak{a})$ の間の不等式を証明しました．

定理 3.1 ([8, Proposition 4.5], cf. [2]). $(R,\mathfrak{m})$ を 標数 $p>0$ の d 次元正則局所環とし，$\mathfrak{a}$ を R の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする．このとき

$$e(\mathfrak{a}) \geq \left(\frac{d}{c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})}\right)^d.$$

さらに渡辺は，定理 3.1 の自然な拡張として，次のような予想を立てました．

予想 3.2. $(R,\mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ の d 次元 F-純被約局所環とし，$\mathfrak{a}$ を R の $\mathfrak{m}$-準素イデアル，J を R の巴系イデアルとする．このとき

$$e(\mathfrak{a}) \geq \left(\frac{d}{c^{J}(\mathfrak{a})}\right)^d e(J).$$

上の予想は次の命題に基づいてます．

命題 3.3. $(R,\mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ の d 次元正則局所環とし，$x_1,\ldots,x_d$ を R の正則巴系とする．$J=(x_1^{a_1},\ldots,x_d^{a_d})$ （$a_1,\ldots,a_d$ は自然数）と書けるとき，予想 3.2 は正しい．

残念ながら予想 3.2 は命題 3.3 というごく特殊な場合にしか解けていません．また J が巴系イデアルでない $\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合には，上の予想は反例が沢山あります．最も簡単な例として $\mathfrak{a}, J$ が極大イデアル $\mathfrak{m}$ のベキの場合を見てみましょう．

例 3.4. $(R,\mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ の d 次元正則局所環とし，$\mathfrak{a}=\mathfrak{m}^k$, $J=\mathfrak{m}^l$ （k,l は自然数）とする．このとき $c^J(\mathfrak{a})=(d+l-1)/k$ であることに注意すると，

$$e(\mathfrak{a})=k^d, \quad \left(\frac{d}{c^{J}(\mathfrak{a})}\right)^d \cdot e(J) = \left(\frac{dkl}{d+l-1}\right)^d$$

となる．従って $d\geq 2$ ならば，$e(\mathfrak{a}) \not\geq (d/c^J(\mathfrak{a}))^d e(J)$.

では J が巴系イデアルとは限らない $\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合には，定理 3.1 の拡張としてどのようなものが考えられるのでしょうか？de Fernex は J が極大イデアル $\mathfrak{m}$ のベキの場合に，次のような拡張を与えました．

定理 3.5 ([1, Theorem 5.5]). $(R,\mathfrak{m})$ を 標数 $p>0$ の d 次元正則局所環とし，$J=\mathfrak{m}^l$ （l は自然数）とする．このとき任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル $\mathfrak{a}$ に対し，

$$e(\mathfrak{a}) \geq \left(\frac{d+l-1}{c^{J}(\mathfrak{a})}\right)^d.$$

これに対し，我々は次のような定理 3.1 の拡張を考えました．J が極大イデアル $\mathfrak{m}$ のベキの場合は de Fernex の結果の方が良い評価になっていますが，我々の不等式は任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル J について成り立ちます．つまり $\mathfrak{a}$ の全ての F-threshold を評価することができます．

定理 3.6. $(R,\mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ の d 次元正則局所環とし，$\mathfrak{a}, J$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとすると，次の不等式が成り立つ．

$$e(\mathfrak{a}) \geq \left(\frac{d}{c^J(\mathfrak{a})}\right)^d (c^J(\mathfrak{m}) - d + 1).$$

証明. $e(\mathfrak{a}) = \lim_{n\to\infty} d! l_R(R/\mathfrak{a}^n)/n^d$ より，任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル $\mathfrak{a} \subset R$ に対し

$$l_R(R/\mathfrak{a}) \geq \frac{1}{d!}\left(\frac{d}{c^J(\mathfrak{a})}\right)^d (c^J(\mathfrak{m}) - d + 1)$$

を示せば良い．完備化を経由することにより，$R = k[X_1, \ldots, X_d]_{(X_1,\ldots,X_d)}$ として良いことに注意する．$\mathbb{R}^d$ の可測部分集合 S の 容積 を $\mathrm{Vol}(S)$，R の単項式イデアル $\mathfrak{b}$ の Newton 図形を $P(\mathfrak{b})$ と記す．ここで R に適当な局所順序 λ を入れると，次が成り立つ．

- $l_R(R/\mathfrak{a}) = l_R(R/\mathrm{in}_\lambda(\mathfrak{a})) \geq \mathrm{Vol}(\mathbb{R}^d_{\geq 0} \setminus P(\mathrm{in}_\lambda(\mathfrak{a})))$.
- $c^J(\mathfrak{a}) \geq c^{\mathrm{in}_\lambda(J)}(\mathrm{in}_\lambda(\mathfrak{a}))$ （$\because$ [1, Proposition 5.3] より，$\tau(\mathrm{in}_\lambda(\mathfrak{a})^c) \subseteq \mathrm{in}_\lambda(\tau(\mathfrak{a}^c))$).
- $c^J(\mathfrak{m}) - d = \max\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \mathfrak{m}^r \not\subset J\} = c^{\mathrm{in}_\lambda(J)}(\mathfrak{m}) - d$ （補題 1.5 参照）．

これより 次の主張を証明すれば良い．

主張. $a, J \subset R$ を $\mathfrak{m}$-準素単項式イデアルとすると，

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^d_{\geq 0} \setminus P(\mathfrak{a})) \geq \frac{1}{d!}\left(\frac{d}{c^J(\mathfrak{a})}\right)^d (\max\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \mathfrak{m}^r \not\subset J\} + 1).$$

主張の証明. $r := \max\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \mathfrak{m}^r \not\subset J\}$ とおく．r の定義より，$x \notin J$ となる全次数 r の単項式 $x = x_1^{r_1} \ldots x_d^{r_d} \in \mathfrak{m}^r$ が存在する $(x_1, \ldots, x_d$ は $X_1, \ldots, X_d$ の R における像)．$c = c^J(\mathfrak{a})$ とおくと，$\tau(\mathfrak{a}^c) \subseteq J$ より $x \notin \tau(\mathfrak{a}^c)$. ここで 単項式イデアルに付随した判定イデアルの特徴付け [5, Theorem 4.8] ($x_1^{\nu_1} \ldots x_d^{\nu_d} \in \tau(\mathfrak{a}^t)$ $(\nu_1, \ldots, \nu_d$ は自然数) となるのは，$(1+\nu_1, \ldots, 1+\nu_d) \in \mathrm{Int}(t \cdot P(\mathfrak{a}))$ ときに限られる) より，次の 2 条件を満たす $\mathbb{R}^d$ の超平面 $H : (u_1/a_1) + \cdots + (u_d/a_d) = 1$ が存在する:

$$(1)\ H^+ := \left\{(u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d_{\geq 0} \mid \frac{u_1}{a_1} + \ldots \frac{u_d}{a_d} \geq 1\right\} \supseteq P(\mathfrak{a}),$$

$$(2)\ cH^- := \left\{(u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d_{\geq 0} \mid \frac{u_1}{a_1} + \ldots \frac{u_d}{a_d} \leq c\right\} \ni (1 + r_1, \ldots, 1 + r_d).$$

(2) より $c \geq (1 + r_1)/a_1 + \cdots + (1 + r_d)/a_d$ となる．これを d 乗して 相加相乗平均の公式を適用すると，

$$c^d \geq \left(\frac{1+r_1}{a_1} + \cdots + \frac{1+r_d}{a_d}\right)^d \geq d^d \frac{(1+r_1)\ldots(1+r_d)}{a_1 \ldots a_d} \geq d^d \frac{1+r}{a_1 \ldots a_d}.$$

さらに (1) より $\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^d_{\geq 0} \setminus P(\mathfrak{a})) \geq (1/d!)a_1 \dots a_d$ であることに注意すると,

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^d_{\geq 0} \setminus P(\mathfrak{a})) \geq \frac{1}{d!}a_1 \dots a_d = \frac{1}{d!}\frac{d^d}{d^d \frac{1+r}{a_1 \dots a_d}}(1+r) \geq \frac{1}{d!}\left(\frac{d}{c}\right)^d (r+1)$$

を得る. これが示したい不等式であった. □

□

注意 3.7. 定理 3.6 と同様に, 定理 3.1, 3.5 及び 命題 3.3 は適当な局所順序を固定して単項式イデアルの場合に帰着することによって証明される. 予想 3.2 の解決のためにも, 単項式イデアルの場合に帰着しない, より直接的な証明を与えたい. 例えば交差理論的な方法で証明できないだろうか?

参考文献

[1] de Fernex, T., *Length, multiplicity, and multiplier ideals*, Trans. Amer. Math. Soc, to appear.

[2] de Fernex, T., Ein, L. and Mustaţă, M., *Multiplicities and log canonical threshold*, J. Algebraic Geom. **13** (2004), 603–615.

[3] Ein, L., Lazarsfeld, R., Smith, K. and Varolin, D., *Jumping coefficients of multiplier ideals*, Duke Math. J.**123** (2004), 469–506.

[4] Hara, N., *An approach to problems on F-jumping coefficients via p-fractals*, with an Appendix by P. Monsky, preprint.

[5] Hara, N. and Yoshida, K., *A generalization of tight closure and multiplier ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3143–3174.

[6] Huneke, C., *Tight closure and its applications*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **88**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[7] Mustaţă, M., Takagi, S. and Watanabe, K.-i., *F-thresholds and Bernstein-Sato polynomials*, in A. Laptev (ed.), European congress of mathematics (ECM), Stockolm, Sweden, June 27-July 2, 2004, Zurich, European Mathematical Society, 2005, 341–364.

[8] Takagi, S. and K.-i. Watanabe, *On F-pure thresholds*, J. Algebra **282** (2004), no.1, 278–297.

九州大学大学院数理学研究院
〒812-8581 福岡市東区箱崎６－１０－１
E-mail address: stakagi@math.kyushu-u.ac.jp

日本大学文理学部数学科
〒156-8550 東京都世田谷区桜上水３－２５－４０
E-mail address: watanabe@math.chs.nihon-u.ac.jp

On Stanley–Reisner rings $k[\Delta]$ with $\operatorname{indeg} k[\Delta] = \dim k[\Delta]$ [1]

寺井直樹 (佐賀大・文化教育), 吉田健一 (名古屋大・多元数理)

1. 準備と背景

この報告を通じて, Δ は $V=[n]:=\{1,2,\ldots,n\}$ 上の単体的複体 (simplicial complex), すなわち, $\Delta\subseteq 2^V$ で, (ア) 任意の $i\in V$ に対して $\{i\}\in\Delta$, (イ) $F\in\Delta, G\subseteq F \Longrightarrow G\in\Delta$ を満たすものとする. Δ の元を face と言う. $\dim F=|F|-1$ を F の次元 (dimension) と言う. i 次元の face F を i-face と言う. さらに, $\dim\Delta=\max\{\dim F : F\in\Delta\}$ を単体的複体 Δ の次元 (dimension) と言う.

Δ の facet (すなわち, 包含関係に関して極大な face) の次元がすべて $\dim\Delta$ に等しいとき, Δ は pure であると言う. $\Delta_{\mathrm{pure}}=\{G\in\Delta : \exists F\supseteq G, \dim F=\dim\Delta\}$ を Δ の purification と呼ぶ. また, Δ の ith skeleton を $\Delta^{(i)}=\{F\in\Delta : \dim F\le i\}$ として定める. Δ の任意の face F と $W\subseteq V$ に対して, Δ の部分複体をいくつか定義しておく:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{lk}_\Delta F &= \{G\in\Delta : F\cup G\in\Delta, F\cap G=\emptyset\},\\
\mathrm{star}_\Delta F &= \{G\in\Delta : F\cup G\in\Delta\},\\
\Delta_W &= \{G\in\Delta : G\subseteq W\}.
\end{aligned}
$$

これらはそれぞれ Δ における F の link, Δ における F の star, Δ の W への制限と呼ばれている.

k を任意標数の体とし, $S=k[X_1,\ldots,X_n]$ ($\deg X_i=1$) を k 上の多項式環とする.

$$I_\Delta=(X_{i_1}\cdots X_{i_p} : 1\le i_1<\cdots<i_p\le n, \{i_1,\ldots,i_p\}\notin\Delta)S, \qquad k[\Delta]=S/I_\Delta$$

をそれぞれ Δ の Stanley–Reisner イデアル, Stanley–Reisner 環と言う. この報告の目的は, このような環の「重複度 (multiplicity) が十分大きければ Cohen–Macaulay である」ことを証明することである.

$d=\dim k[\Delta]$, $c=\operatorname{codim} k[\Delta]$, $e=e(k[\Delta])$ によりそれぞれ $k[\Delta]$ の (Krull) 次元 (dimension), 余次元 (codimension), 重複度を表そう. このとき, $c=n-d$, $\dim\Delta=d-1$ であり, e は Δ の $(d-1)$-facet の個数に等しい. 実際, $\dim\Delta=d-1$ とし, f_i により Δ の i-faces の総数を表せば, $k[\Delta]$ の Hilbert 級数 $F(k[\Delta],t)$ は $\mathbb{Z}[[t]]$ において,

$$
\begin{aligned}
F(k[\Delta],t) &= \sum_{i\ge 0}\dim_k k[\Delta]_i\, t^i\\
&= f_{-1}+\frac{f_0t}{1-t}+\frac{f_1t^2}{(1-t)^2}+\cdots+\frac{f_{d-1}t^d}{(1-t)^d}\\
&= \frac{f_{-1}(1-t)^d+f_0t(1-t)^{d-1}+\cdots+f_{d-1}t^d}{(1-t)^d}
\end{aligned}
$$

のように書ける. この級数の $t=1$ における極 (pole) の位数を考えて, $\dim k[\Delta]=d$ を得る. また, 分子において $t=1$ を代入すれば, $e(k[\Delta])=f_{d-1}\le\binom{n}{d}$ を得る. この報告において, $e(k[\Delta])$ が十分大きいとは, その値が $\binom{n}{d}$ に十分近いことを意味する.

[1] Nov.15, 2005 ; 第 27 回可換環論シンポジウム ; 於 : 富山県インテック大山研修センター

一般に, $A=S/I$ を斉次 k 代数 (homogeneous k-algebra) とし, その S 上の次数付き極小自由分解 (graded minimal free resolution) を考える:

$$0 \to \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{p,j}(A)} \xrightarrow{\varphi_p} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{1,j}(A)} \xrightarrow{\varphi_1} S \to A \to 0.$$

このとき,

$$\begin{aligned} \operatorname{indeg} I &= \min\{j\in\mathbb{Z} : \beta_{0,j}(I)\neq 0\} = \min\{j\in\mathbb{Z} : \beta_{1,j}(A)\neq 0\}, \\ \operatorname{rt}(I) &= \max\{j\in\mathbb{Z} : \beta_{0,j}(I)\neq 0\} = \max\{j\in\mathbb{Z} : \beta_{1,j}(A)\neq 0\} \end{aligned}$$

はそれぞれ I の initial degree, relation type と呼ばれる不変量である. $I=I_\Delta$ が Stanley–Reisner イデアルのときは

$$\operatorname{indeg} I = \min\{|F| : F\subseteq V,\ F\notin\Delta\} \le \operatorname{rt}(I) \le d+1$$

であることが知られている.

$$\operatorname{reg} A = \max\{j-i\in\mathbb{Z} : \beta_{i,j}(A)\neq 0\}$$

は A の (Castelnuovo–Mumford) regularity と呼ばれる不変量であり, 古くから研究されている. 定義から明らかなように, $\operatorname{reg} A \ge \operatorname{indeg} I - 1$ が成立し, 等号が成立するときに, A (または I) は linear resolution を持つと言う. 特に, A が Cohen-Macaulay で 2-linear resolution を持つ場合は, maximal embedding dimension, または, minimal multiplicity と呼ばれ, その構造については詳しく調べられている. 一方, Eagon–Reiner の定理 (定理 2.4 参照) により, Stanley–Reisner 理論における linear resolution の重要性は増している.

この報告においては, linear resolution の概念を一般化した次の概念も重要である. $q=\operatorname{indeg} I$ とおく. ある非負整数 r に対して, I の S 上の次数付き極小自由分解が

$$\cdots S(-q-r+1)^{\beta_{r-1,q+r-1}} \cdots \longrightarrow \cdots S(-q-1)^{\beta_{1,q+1}(I)} \longrightarrow S(-q)^{\beta_{0,q}(I)} \longrightarrow I \to 0$$

の形をしているとき, I は $(N_{q,r})$ をみたすと言う. また, ある q に対して $(N_{q,r})$ をみたすとき, $(N_{*,r})$ をみたすと言う.

$r \ge \operatorname{pd}_S A = \operatorname{pd}_S I + 1$ に対して I が $(N_{*,r})$ をみたすことと, I が linear resolution を持つこととは同値である.

また, 「Betti 数に関する Hochster の公式」はしばしば用いられる:

$$\beta_{i,j}(k[\Delta]) = \sum_{W\subseteq V,\,|W|=j} \dim_k \widetilde{H}_{j-i-1}(\Delta_W;k).$$

ここで, $\widetilde{H}_i(\Delta;k)$ は Δ の k 係数の ith reduced homology group である. しばしば k を固定して, $\widetilde{H}_i(\Delta)$ のように書く.

さて, 考えたいのは次の問題である:

問題 1.1. $e(k[\Delta])$ が十分大きい (すなわち, $\binom{n}{d}$ に近い) ような Δ もしくは $k[\Delta]$ の性質を調べよ.

$e(k[\Delta])=\binom{n}{d}$ をみたすようなイデアルの構造は容易に決定できる.

命題 1.2. 次の条件は同値である:

(1) $\operatorname{indeg} I_\Delta = d+1$.
(2) $e(k[\Delta])=\binom{n}{d}$.
(3) Δ は $(n-1)$-simplex の $(d-1)$th skeleton である.

このとき, $k[\Delta]$ は Cohen–Macaulay である.

Proof. 証明は易しい. 例えば, [9, Proposition 1.2] を見よ. □

我々は, 問題 1.1 に対する最初の答として, 次の定理を昨年度の可換環論シンポジウムにおいて紹介した.

定理 1.3 (寺井・吉田 [10]). $k[\Delta]$ を d 次元の Stanley–Reisner 環とする. このとき,

(1) $e(k[\Delta]) \geq \binom{n}{d} - (n-d)$ ならば, $k[\Delta]$ は Cohen–Macaulay である.

(2) Δ は pure であると仮定する. もし, $e(k[\Delta]) \geq \binom{n}{d} - 2(n-d)+1$ ならば, $k[\Delta]$ は Cohen–Macaulay である.

本論に入る前に, 上の定理の (2) において purity をはずしたら, 結論はどうなるかについて報告しておこう. そのために Stanley によって導入された sequentially Cohen–Macaulay の概念を思い出しておく.

定義 1.4 (Stanley). $A = S/I$ を斉次 k 代数とする. 有限生成 A 加群 M に対して, M の次数付き部分加群からなる長さ有限の filtration

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$$

が存在して, M_i/M_{i-1} が Cohen–Macaulay で, かつ, $\dim M_0/M_1 < \dim M_1/M_2 < \cdots < \dim M_r/M_{r-1}$ とできるとき, M は (A 加群として) sequentially Cohen–Macaulay であると言う. A 自身が A 加群として sequentially Cohen–Macaulay であるとき, A は環として sequentially Cohen–Macaulay であると言う.

次の言い換えを用いると便利である.

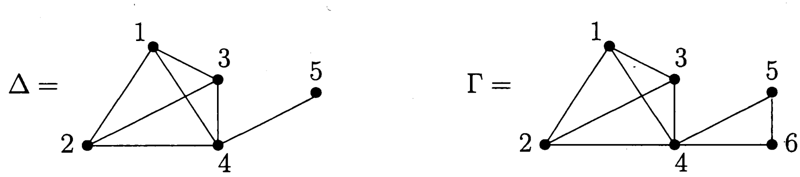
補題 1.5 (Duval). $k[\Delta]$ が sequentially Cohen–Macaulay になるための必要十分条件は, 任意の非負整数 i に対して $(\Delta^{(i)})_{\mathrm{pure}}$ が Cohen–Macaulay になることである.

Cohen–Macaulay 複体の skeleton も常に Cohen–Macaulay なので, 次を得る.

系 1.6. Δ が pure で sequentially Cohen–Macaulay ならば, Cohen–Macaulay である.

例 1.7. 中身のつまった四面体 (3 次元の複体) $\{1,2,3,4\}$ の 1 頂点に辺を 1 本加えた $\Delta = \mathrm{Span}\,\{\{1,2,3,4\}, \{4,5\}\}$ は sequentially Cohen–Macaulay になるが, 1 頂点に三角形 (内部を含む) を加えた $\Gamma = \mathrm{Span}\,\{\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}\}$ は sequentially Cohen–Macaulay でない (下図参照).

ただし, $\mathrm{Span}\,\{F_1, \ldots, F_r\}$ は $F_1, \ldots, F_r$ を face に持つような最小の単体的複体を表すものとする.



定理 1.3(2) の主張は次のように拡張することができる (※ただし, 証明には, 定理 1.3 を用いる.).

定理 1.8 ([7]). $e(k[\Delta]) \geq \binom{n}{d} - 2(n-d)+1$ ならば, $k[\Delta]$ は sequentially Cohen–Macaulay である.

2. 主結果

さて, この講演の主目的は, 昨年の結果の続きとして次の定理を与えることである.

定理 2.1. $k[\Delta]$ は Serre 条件 (S_2) を満たす d 次元の Stanley–Reisner 環とする. もし, $e(k[\Delta]) \geq \binom{n}{d} - 3(n-d) + 2$ ならば, $k[\Delta]$ は Cohen–Macaulay である.

注意 2.2. Serre 条件 (S_2) について, 以下のことが知られている.

(1) 次の 2 条件は同値である:
  (a) $k[\Delta]$ が (S_2) をみたす.
  (b) Δ は pure で, $\dim F \leq \dim \Delta - 2$ なる任意の face F について $\mathrm{lk}_\Delta F$ は connected in codimension 1 である.
(2) (1) から分かるように, $k[\Delta]$ が (S_2) をみたすという条件は体 k の標数によらない.

定理 2.1 の証明において, $c \geq 2$ と仮定してよい. このとき, Δ の Alexander dual 複体

$$\Delta^* = \{F \in 2^V : V \setminus F \notin \Delta\}$$

は (Δ と同じ頂点集合) V 上の単体的複体である. Δ の face $F = \{i_1, \ldots, i_p\}$ に対して, $V \setminus F = \{j_1, \ldots, j_{n-p}\}$ とおくとき,

$$P_F = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_p})S, \qquad X^{V \setminus F} = X_{j_1} \cdots X_{j_{n-p}}$$

と定める. このとき, 次のことが知られている.

命題 2.3 ([6] 参照). Δ^* を Δ の Alexander dual とする.

$$I_\Delta = \bigcap_{F:\Delta \text{ の facet}} P_F \quad (\text{無駄のない準素分解})$$

とすると, $I_{\Delta^*} = (X^{V \setminus F} : F \text{ は } \Delta \text{ の facet})$ である. 特に,

(1) $\mathrm{indeg}\, I_{\Delta^*} = \mathrm{height}\, I_\Delta$.
(2) $\beta_{0,q^*} = e(k[\Delta])$. ここに, $q^* = \mathrm{indeg}\, I_{\Delta^*}$.

さらに, 次の定理は基本的である. この定理をベースにしてさまざまな拡張が証明された. そのうち, この報告に関連するものを追加しておこう.

定理 2.4 (Eagon–Reiner [3]). Δ^* を Δ の Alexander dual とする. $k[\Delta]$ が Cohen–Macaulay であることと I_{Δ^*} が linear resolution を持つこととは同値である.

命題 2.5. Δ^* を Δ の Alexander dual とする.

(1) (寺井・柳川 [11]) $k[\Delta]$ は (S_2) をみたす $\Longleftrightarrow$ I_{Δ^*} は $(N_{*,2})$ をみたす.
(2) (Herzog–日比 [5]) $k[\Delta]$ は sequentially Cohen–Macaulay である
  $\Longleftrightarrow$ I_{Δ^*} は componentwise linear である; すなわち, 各 $t \in \mathbb{Z}$ に対して, I_{Δ^*} の t 次の元で生成された斉次イデアルは linear resolution を持つ.

定理 1.3(2) の証明と同様に, Δ の代わりに Δ^* を考えれば, 定理 2.1 の Alexander dual 版が得られる.

定理 2.6. Δ を $V=[n]$ 上の $(d-1)$ 次元の単体的複体 $(d \geq 2)$ とし, $q = \operatorname{indeg} I_\Delta$ とおく. I_Δ が $(N_{q,2})$ をみたし, $\beta_{0,q}(I_\Delta) \geq \binom{n}{q} - 3q + 2$ ならば, I_Δ は linear resolution を持つ.

Δ が定理の条件をみたすとき, $q = \operatorname{indeg} I_\Delta \geq d-1$ をみたすことが分かる. 以下では, 定理の証明において本質的な「$\operatorname{indeg} I_\Delta = \dim k[\Delta] (= d)$」の場合のみに限定して, 定理の証明を与えよう. このとき, I_Δ が linear resolution を持つことと, $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta) = 0$ であることとは同値になる. また, I_Δ が $(N_{d,2})$ をみたすとき, $\operatorname{rt}(I_\Delta) = \operatorname{indeg} I_\Delta = d$, すなわち, I_Δ は d 次の単項式 (monomial) で生成されるので, $\beta_{0,d}(I_\Delta) = \binom{n}{d} - e(k[\Delta])$ である. したがって, 上の定理の後半の条件は $e(k[\Delta]) \leq 3d-2$ と同値である. 一方, $(N_{d,2})$ ならば $\beta_{2,d+i}(k[\Delta]) = 0$ $(i \neq 1)$ であるから, 数学的帰納法がワークしやすいように少し仮定を弱めて, 次の定理を証明する.

定理 2.7. $d \geq 2$ とする. Δ を $(d-1)$ 次元の単体的複体とする. $e(k[\Delta]) \leq 3d-2$, $\beta_{2,d+2}(k[\Delta]) = 0$ ならば, $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta) = 0$; すなわち, $\operatorname{reg} k[\Delta] \leq d-1$ である.

以下では, 定理 2.7 の証明のスケッチを与える. まず, $d = \dim \Delta + 1$ に関する数学的帰納法を用いる.

補題 2.8. $d = 2$ のとき, 定理 2.7 の主張は正しい.

(証明). 仮定と Hochster の公式により,

$$0 = \beta_{2,4}(k[\Delta]) = \sum_{W \subseteq V, |W|=4} \dim_k \widetilde{H}_1(\Delta_W)$$

だから, $|W| \leq 4$ の $W \subseteq V$ に対して, $\widetilde{H}_1(\Delta_W) = 0$ である. 特に, Δ は長さが 4 以下の辺からなる cycle を含まない. 一方, $e(k[\Delta]) \leq 4$ により, Δ は高々 4 本の辺しか含まないので, Δ 自身 cycle を含まない. 言い換えれば, $\widetilde{H}_1(\Delta) = 0$ を得る. □

そこで, $d \geq 3$ とし, $\dim \Delta' < d-1$ なる Δ' については定理 2.7 の主張が正しいと仮定し, $\dim \Delta = d-1$, $\beta_{2,d+2}(k[\Delta]) = 0$, $e(k[\Delta]) \leq 3d-2$ を満たす単体的複体 Δ で, $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta) \neq 0$ をみたすものが存在すると仮定して, 矛盾を導こう. Δ をそのようなもののうちで, $e(k[\Delta])$ が最小になるように選んでおく.

補題 2.9. Δ は pure で, $e(k[\Delta]) \geq 2$ と仮定してよい.

(証明). $e(k[\Delta]) = e(k[\Delta_{\mathrm{pure}}])$, $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta_{\mathrm{pure}}) \cong \widetilde{H}_{d-1}(\Delta) \neq 0$ である. さらに, Hochster の公式により,

$$\begin{aligned}
\beta_{2,d+2}(k[\Delta_{\mathrm{pure}}]) &= \sum_{W \subseteq V, |W|=d+2} \dim_k \widetilde{H}_{d-1}((\Delta_{\mathrm{pure}})_W) \\
&\leq \sum_{W \subseteq V, |W|=d+2} \dim_k \widetilde{H}_{d-1}(\Delta_W) \\
&= \beta_{2,d+2}(k[\Delta]) = 0
\end{aligned}$$

だから, $\beta_{2,d+2}(k[\Delta_{\mathrm{pure}}]) = 0$ である[2]. よって, 必要ならば, Δ を Δ_{pure} で置き換えることにより, Δ は pure であると仮定してよい. また, Δ の選び方により, Δ は simplex ではないので, $e(k[\Delta]) \geq 2$ である. □

---

[2] 一般に, $\Gamma \subseteq \Delta$ で, $\dim \Delta = d-1$ ならば, $\widetilde{H}_{d-1}(\Gamma) \subseteq \widetilde{H}_{d-1}(\Delta)$ が成り立つ.

補題 2.10. Δ は free face を持たない. すなわち, Δ の facet 以外の任意の face は少なくとも 2 つ以上の facet に含まれる.

(証明). Δ が free face G を持つと仮定する. すなわち, G を含むただ 1 つの facet F が存在する. 必要ならば, G を含み, F に含まれる subfacet (facet 以外で極大な face) を改めて G とすることにより, G は subfacet としてよい. $\Delta' = \Delta \setminus \{G, F\}$ とおくと, Δ' は Δ の部分複体で, Δ とホモトピー同値だから, $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta') \cong \widetilde{H}_{d-1}(\Delta) \neq 0$ である.

一方, 補題 2.9 の証明と同様にして, 仮定と Hochster の公式により $\beta_{2,d+2}(k[\Delta']) = 0$ を得るので, Δ' も定理の仮定をみたすが, これは $e(k[\Delta])$ の最小性に矛盾する. □

補題 2.11. $\mathrm{rt}\,(I_\Delta) \leq d$ である.

(証明). 仮定と Hochster の公式により, V の $d+2$ 個の元からなる任意の部分集合 W に対して $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta_W) = 0$ を得る. また, $\dim \Delta = d-1$ だから, $|W| \leq d+2$ をみたす $W \subseteq V$ に対しても同様の結論が成り立つ. 特に, $|W| = d+1$ の場合にそれを適用すれば, 再び Hochster の公式により $\beta_{1,d+1}(k[\Delta]) = 0$ を得る. 一方, 常に $\beta_{1,j}(k[\Delta]) = 0$ $(j \geq d+2)$ だから, $\mathrm{rt}\,(I_\Delta) \leq d$ でなければならない. □

これからは $\mathrm{rt}\,(I_\Delta) = d$ の場合と $\mathrm{rt}\,(I_\Delta) < d$ の場合に分けて議論する. それぞれの場合の鍵となる次の 2 つの命題を仮定して定理を証明しよう.

命題 2.12. Δ を $(d-1)$ 次元の pure な単体的複体で, 次をみたすものと仮定する:

(1) $\mathrm{rt}\,(I_\Delta) = d$;
(2) Δ は free face を持たない ;
(3) $\beta_{2,d+2}(k[\Delta]) = 0$.

このとき, $e(k[\Delta]) \geq 3d-1$ である.

命題 2.13. $d \geq 3$, $c \geq 3$ とし, Δ を $(d-1)$ 次元の pure な単体的複体とする. また, 次の条件を仮定する:

(1) $\mathrm{rt}\,(I_\Delta) \leq d-1$;
(2) Δ は free face を持たない ;
(3) ある $y \in V$ に対して, $\beta_{2,d+1}(k[\mathrm{lk}_\Delta\{y\}]) \neq 0$.
(4) 任意の $x \in V$ に対して $\widetilde{H}_{d-2}(\mathrm{lk}_\Delta\{x\}) \neq 0$.

このとき, $e(k[\Delta]) \geq 3d-1$ である.

また, 次の補題は [10] における主結果の 1 つであるが, 定理 1.3 の証明において本質的である.

補題 2.14 ([10, Theorem 3.4]). $(d-1)$ 次元の単体的複体 Δ に対して, $\mathrm{rt}\,(I_\Delta) \leq d$ かつ $e(k[\Delta]) \leq 2d-1$ ならば, $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta) = 0$ である.

(**定理 2.7 の証明**). 我々の状況では, Δ は $(d-1)$ 次元 $(d \geq 3)$ の単体的複体で, $e(k[\Delta]) \leq 3d-2$, $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta) \neq 0$ であり, そのようなもののうちで, $e(k[\Delta])$ は最小である. さらに, Δ は pure で free face を持たず, $\mathrm{rt}\,(I_\Delta) \leq d$ である.

Case 1. $\mathrm{rt}\,(I_\Delta) = d$ **のとき:** 命題 2.12 により直ちに矛盾が導かれる.

Case 2. $\mathrm{rt}\,(I_\Delta) < d$ **のとき:** もし $c \leq 2$ ならば, $\beta_{2,d+2}(k[\Delta]) = 0$ は $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta) = 0$ を導くから, $c \geq 3$ である. このとき, 命題 2.13 の仮定を充たすことを見ておこう.

主張 1. <u>任意の $x \in V$ に対して, $\widetilde{H}_{d-2}(\mathrm{lk}_\Delta\{x\}) \neq 0$ である.</u>

実際, Δ は pure ゆえ, 任意の $x \in V$ に対して, $\dim k[\Delta_{V\setminus\{x\}}] = d-1$ かつ $e(k[\Delta_{V\setminus\{x\}}]) < e(k[\Delta])$ である. 一方, $\beta_{2,d+2}(k[\Delta_{V\setminus\{x\}}]) \le \beta_{2,d+2}(k[\Delta]) = 0$ により, $\beta_{2,d+2}(k[\Delta_{V\setminus\{x\}}]) = 0$ である. よって, $e(k[\Delta])$ の最小性より, $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta_{V\setminus\{x\}}) = 0$ を得る. また, $\Delta = \mathrm{star}_\Delta\{x\} \cup \Delta_{V\setminus\{x\}}$ に Mayer–Vietoris 列を適用すると,

$$0 = \widetilde{H}_{d-1}(\mathrm{star}_\Delta\{x\}) \oplus \widetilde{H}_{d-1}(\Delta_{V\setminus\{x\}}) \to \widetilde{H}_{d-1}(\Delta) \to \widetilde{H}_{d-2}(\mathrm{lk}_\Delta\{x\})$$

を得る. これより求める主張を得る.

次に, 命題 2.13 の (3) の条件をチェックするために, 次の主張を示す.

主張 2. <u>$e(k[\Delta_{V\setminus\{y\}}]) \ge 3$ となるような点 $y \in V$ が取れる.</u>

実際, 任意の $x \in V$ に対して, $e(k[\Delta_{V\setminus\{x\}}]) \le 2$ と仮定すると, Δ の facet のうち少なくとも $(e(k[\Delta]) - 2)$ 個は x を含む. そこで, facet に現れる頂点の数を重複を許して数えると, $ed = e(k[\Delta]) \times d \ge n(e(k[\Delta]) - 2) = (c+d)(e-2)$ である. 一方, 補題 2.14 から, $e \ge 2d$ であるので, $2(c+d) \ge ce \ge 2cd$ すなわち, $(c-1)(d-1) \le 1$ を得る. これは, $c \ge 3$, $d \ge 3$ に矛盾する.

上の主張 2 のような y について,

$$e(k[\Gamma]) = e(k[\mathrm{star}_\Delta\{y\}]) = e(k[\Delta]) - e(k[\Delta_{V\setminus\{y\}}]) \le (3d-2) - 3 = 3(d-1) - 2$$

となるので, $\Gamma = \mathrm{lk}_\Delta\{y\}$ が $\beta_{2,d+1}(k[\Gamma]) = 0$ をみたすならば, d に関する帰納法の仮定から $\widetilde{H}_{d-2}(\Gamma) = 0$ を得る. これは主張 1 に矛盾するので, (3) の条件 $\beta_{2,d+1}(k[\Gamma]) \ne 0$ が示された. このとき, 命題 2.13 から $e(k[\Delta]) \ge 3d-1$ を得るが, これは矛盾である. 結局, 背理法により定理は証明された. □

3. 命題 2.12, 2.13 の証明

ここでは先に証明を保留した 2 つの命題を証明する. 以下では, Δ は $(d-1)$ 次元の pure な単体的複体で, free face を持たないものとする.

先に, 命題 2.12 を証明するために, $\mathrm{rt}(I_\Delta) = d$ の場合を考える. $X_1 \cdots X_d$ を I_Δ の generator (正確には単項式からなる極小生成系の 1 つ) に持つとして一般性は失われない. また, <u>$F := \{1, 2, \ldots, d\} \in 2^V \setminus \Delta$</u> とおく.

補題 3.1. $2^F \setminus \{F\}$ の facet は d 個ある : $G_i = \{1, 2, \ldots, \widehat{i}, \ldots, d\}$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$. このとき, $G_i \cup \{j\}$ $(j \in V \setminus F)$ の形をしている facet が少なくとも $2d$ 個存在する. また,

$$U := \{j \in V \setminus F \ : \ \exists G \subseteq F \text{ s.t. } |G| = d-1,\ G \cup \{j\} \in \Delta\}$$

とおくと, $|U| \ge 2$ である.

(証明). $2^F \setminus \{F\}$ の facet $G_j = \{1, 2, \ldots, \widehat{j}, \ldots, d\}$ は Δ の subfacet である. これらは free face ではないので, 各々少なくとも 2 個ずつの Δ の facet に含まれる. そのような facet は相異なるので, 求める主張を得る. □

補題 3.2. 次の条件をみたす $\{j_1, j_2\} \subseteq U$ $(j_1 \ne j_2)$ は存在しない.
「$2^F \setminus \{F\}$ の任意の facet G に対して, $G \cup \{j_1\}$, $G \cup \{j_2\}$ が Δ の facet になる.」

(証明). 補題が正しくないと仮定して, 上の条件をみたすような $\{j_1, j_2\} \subseteq U$ が取れたと仮定する. $W = F \cup \{j_1, j_2\}$ とおくと, $|W| = d+2$ だから, 仮定 $\beta_{2,d+2}(k[\Delta]) = 0$ により, $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta_W) = 0$ である.

$\Delta_1 = (2^F \setminus \{F\}) * (2^{\{j_1,j_2\}} \setminus \{j_1, j_2\})$ を $H \cup \{j_1\}$, $H \cup \{j_2\}$ $(H \in 2^F \setminus \{F\})$ により生成された部分複体とし, $\{j_1, j_2\}$ を含む Δ_W の facet によって生成される Δ_W の部分複体

を Δ_2 とすれば, $\Delta_W = \Delta_1 \cup \Delta_2$ で, Δ_1 と Δ_2 は Δ_W の $(d-1)$-facet を共有しないので, $\dim(\Delta_1 \cap \Delta_2) \leq d-2$ である. ここで, Mayer–Vietoris 列を考えると,

$$0 = \widetilde{H}_{d-1}(\Delta_1 \cap \Delta_2) \to \widetilde{H}_{d-1}(\Delta_1) \oplus \widetilde{H}_{d-1}(\Delta_2) \to \widetilde{H}_{d-1}(\Delta_W) \to \widetilde{H}_{d-2}(\Delta_1 \cap \Delta_2)$$

であるが, 懸垂同型により,

$$\widetilde{H}_{d-1}(\Delta_1) \cong \widetilde{H}_{d-2}(2^F \setminus \{F\}) \cong \widetilde{H}_{d-2}(\mathbf{S}^{d-2}) \cong k \neq 0$$

だから[3], $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta_W) \neq 0$ を得る. これは最初の仮定に矛盾する. □

(**命題 2.12 の証明**). 上の 2 つの補題により, ある $j \in U$ $(d+1 \leq n)$ とある番号 $\ell(1 \leq \ell \leq d-1)$ が存在して,

$$\begin{aligned} F_p &:= \{1, 2, \ldots, \widehat{p}, \ldots, \ell, \ldots, d, j\} \in \Delta \quad (p = 1, 2, \ldots, \ell) \\ Q_q &:= \{1, 2, \ldots, \ell, \ldots, \widehat{q}, \ldots, d, j\} \notin \Delta \quad (q = \ell+1, \ldots, d) \end{aligned}$$

としてよい. ここで, Δ の subfacet

$$H_{p,q} := \{1, \ldots, \widehat{p}, \ldots, \ell, \ell+1, \ldots, \widehat{q}, \ldots, d, j\} \quad (1 \leq p \leq \ell,\ \ell+1 \leq q \leq d)$$

を考える. Δ は free face を含まないので, $H_{p,q}$ は 2 つ以上の facet に含まれる. そのようなもののうち 1 つは $G \cup \{j\}$ $(G \subseteq F)$ の形をしているが, 少なくとも 1 つは $G \cup \{j\}$ $(G \subseteq F)$ の形をしていない. 従って, Δ の facet の個数を数えて

$$e(k[\Delta]) \geq 2d + \ell(d-\ell) \geq 2d + (d-1) = 3d-1$$

を得る. □

次に命題 2.13 を証明する.

(**命題 2.13 の証明**). 仮定 (3) の $y \in V$ を固定し, $\Gamma = \mathrm{lk}_\Delta\{y\}$ とおくと, Hochster の公式により, $|U| = d+1$, $\widetilde{H}_{d-2}(\Gamma_U) \neq 0$ となるような $U \subseteq V \setminus \{y\}$ が存在する. このような U を 1 つ固定する. このとき, $\dim \Gamma_U = d-2$ であり, $\widetilde{H}_{d-2}(\Gamma) \neq 0$ である. $R = k[\Gamma]$ に $a(R) + \dim R \leq e(R) - 1$ を適用すると, $[H_\mathfrak{m}^{d-1}(R)]_0 = \widetilde{H}_{d-2}(\Gamma) \neq 0$ より $a(R) = 0$ だから, $e(k[\Gamma_U]) \geq \dim k[\Gamma_U] + 1 = d$ を得る. $\dim k[\Gamma_U] = \dim k[\Gamma] = d-1$ に注意すると,

$$\begin{aligned} e(k[\Gamma_U]) &= \#\{G : G \text{ は } \Gamma \text{ の } (d-2)\text{-facet で}, G \subseteq U\} \\ &= \#\{F : F \text{ は } \Delta \text{ の facet で}, y \in F \subseteq U \cup \{y\}\} \end{aligned}$$

である. すると, 任意の $x \in V \setminus (U \cup \{y\})$ に対して,

$$\#\{F : F \text{ は } \Delta \text{ の facet で}, y \in F \not\ni x\} \geq e(k[\Gamma_U]) \geq d$$

である. さて, $\mathrm{rt}\,(I_{\mathrm{lk}_\Delta\{x\}}) \leq \mathrm{rt}\,(I_\Delta) \leq d-1$ であり, 仮定 (4) により, $\widetilde{H}_{d-2}(\mathrm{lk}_\Delta\{x\}) \neq 0$ である. 従って, 補題 2.14 により,

$$e(k[\mathrm{star}_\Delta\{x\}]) = e(k[\mathrm{lk}_\Delta\{x\}]) \geq 2(d-1)$$

である. 従って,

$$\begin{aligned} e(k[\Delta]) &\geq e(k[\mathrm{star}_\Delta\{x\}]) + \#\{F : F \text{ は } \Delta \text{ の facet で}, y \in F \not\ni x\} \\ &\geq 2d - 2 + e(k[\Gamma_U])\ (\geq 3d-2) \end{aligned}$$

[3] $R = k[\Delta_1] \cong k[X_1, \ldots, X_d, Y_1, Y_2]/(X_1 \cdots X_d, Y_1Y_2)$ は $a(R) = 0$ の Gorenstein 環であり, $\widetilde{H}_{d-1}(\Delta_1) \cong [H_\mathfrak{m}^d(R)]_0 \cong k$ である.

である．$e(k[\Gamma_U]) \geq d+1$ ならば求める主張 $e(k[\Delta]) \geq 3d-1$ を得るので，$\underline{e(k[\Gamma_U]) = d}$ と仮定してよい．

Case 1. $n \geq d+4$ **のとき**：

$V \setminus (U \cup \{y\})$ から異なる 2 点 x_1, x_2 を選ぶと，

$$e(k[\mathrm{lk}_\Delta\{x_1\}]) \geq 2d-2, \qquad e(k[\mathrm{lk}_\Delta\{x_2\}]) \geq 2d-2$$

である．もし，x_1 を含むが x_2 を含まない (Δ の) facet があれば，

$$e(k[\Delta]) \geq e(k[\mathrm{star}_\Delta\{x_2\}]) + e(k[\Gamma_U]) + 1 \geq (2d-2) + d + 1 = 3d-1$$

を得る．よって，上記の x_1, x_2 と任意の facet F に対して $x_1 \in F \iff x_2 \in F$ としてよい．以下，x_1, x_2, y いずれも含まない Δ の facet を見つけよう．

y を含み，U の丁度 $(d-1)$ 個の頂点を含む facet の 1 つを F とする．$\{1,2,\ldots,d-1\} \subseteq U$, $F = \{1,2,\ldots,d-1,y\}$ としてよい．さて，$\{1,2,\ldots,d-1\} \in \Delta$ は free face ではないので，Δ の F 以外の facet F' に含まれる：$F' = \{1,2,\ldots,d-1,z\}$．もし $z \notin U$ ならば，$z \neq y$ であり，F' は x_1 と x_2 のどちらか一方は含まない．これは先の仮定に反するので，$z \in U$ である．このとき，F' は x_1, x_2, y のいずれも含まないので，上記にあげた $3d-2$ 個のいずれとも異なり，$e(k[\Delta]) \geq 3d-1$ を得る．

Case 2. $n = d+3$ **のとき**：

$V = U \cup \{x, y\}$ と書ける．

主張. $\underline{\Gamma_U \text{ は pure である.}}$

Γ_U が pure でないと仮定すると，Γ_U の facet G で $G \subseteq U$ かつ $|G| < d-1$ となるものが存在する．Δ は pure だから，Δ のある $(d-1)$-facet F が存在して，$G \cup \{y\} \subseteq F$ である．もし，$F \setminus G$ が U の頂点 u を含めば，$G \cup \{u,y\} \in \Delta$ であり，$G \cup \{u\} \in \Gamma_U$ となり，G の取り方に矛盾するので，$F \setminus G \subseteq \{x,y\}$ である．よって，$|G| = d-2$, $F = G \cup \{x,y\}$ でなければならない．このとき，$G \cup \{y\} \in \Delta$ は free face ではないので，F 以外の $(d-1)$-facet F' に含まれる．ところが，上と同様の議論でこれは G の取り方に矛盾するので，主張が言えた．

以下，U 上の pure な複体 Γ_U に注目して，$|U| = d+1$, $\dim k[\Gamma_U] = d-1$, $e(k[\Gamma_U]) = d$ と仮定して矛盾を導こう．Γ_U は pure だから，その Alexander dual を Γ_U^* と表すとき，$I_{\Gamma_U^*}$ は次数 2 の単項式で生成され，$\mu(I_{\Gamma_U^*}) = e(k[\Gamma_U]) = d$ である．

Γ_U に U の $(d-2)$ 個以下の元からなる部分集合全部を添加して得られる複体を Σ とし，その Alexander dual を Σ^* と表そう．このとき，

$$\widetilde{H}_{d-2}(\Sigma) \cong \widetilde{H}_{d-2}(\Gamma_U), \quad \operatorname{indeg} k[\Sigma] = \dim k[\Sigma] = d-1$$

だから，$\dim k[\Sigma^*] = \operatorname{indeg} k[\Sigma^*] = \operatorname{codim} k[\Sigma] = |U| - (d-1) = 2$ で，I_{Σ^*} は $I_{\Gamma_U^*}$ の元と 3 次以上の単項式で生成されるので，

$$e(k[\Sigma^*]) = \binom{|U|}{2} - \mu(I_{\Gamma_U^*}) = \binom{d+1}{2} - d = \binom{d}{2}$$

である．他方，Alexander duality と仮定から，

$$\dim_k \widetilde{H}_0(\Sigma^*) = \dim_k \widetilde{H}_{d-2}(\Sigma) = \dim_k \widetilde{H}_{d-2}(\Gamma_U) \neq 0$$

であり，Σ^* は非連結な単純グラフとみなせる．このグラフの辺の数は $e(k[\Sigma^*]) = \binom{d}{2}$ だから，Σ^* は d 個の頂点をもつ完全グラフと 1 点の disjoint union でなければならない．ところが，このとき，ある i に対して $I_{\Gamma_U^*} \subseteq x_i S$, すなわち，$\{x_i\} \notin \Gamma_U$ となり矛盾する．

以上で命題の証明が終わり, 定理の証明も完成する. □

4. 例

次の例は, 定理 2.7 において条件 "$e(k[\Delta]) \leq 3d-2$" は最適であることを示している.

例 4.1. Δ_0 を $n=d+3$ 個の頂点を持つ d 次元の stacked polytope ([1] 参照) の境界複体 (boundary complex) とする. このとき, $k[\Delta_0]$ の Hilbert 級数は

$$F(k[\Delta_0],t)=\frac{1+3t+3t^2+\cdots+3t^{d-1}+t^d}{(1-t)^d}.$$

と書ける. 特に, $e(k[\Delta_0])=3d-1$ である. 他方, $k[\Delta_0]$ の S 上の次数付き極小自由分解は次の形をしていることが知られている ([8]):

$$\begin{aligned} 0 \quad\to\quad & S(-d-3) \to S(-3)^{\beta_{2,3}} \oplus S(-d-1)^{\beta_{2,d+1}} \\ & \to S(-2)^{\beta_{1,2}} \oplus S(-d)^{\beta_{1,d}} \to S \to k[\Delta_0] \to 0. \end{aligned}$$

これより, $k[\Delta_0]$ は $\beta_{2,d+2}(k[\Delta_0])=0$ を満たすが, $\operatorname{reg} k[\Delta_0]=d$ であり, $\operatorname{reg} k[\Delta_0] \leq d-1$ を満たさないことが分かる.

注意 4.2. 上記の Δ_0 は $(N_{*,2})$ を満たさないが, Δ_0 に次元の低い face をすべて付け加えた複体 Δ を考えることにより, $(N_{*,2})$ を満たすが, $e(k[\Delta])=3d-1$ で linear resolution を持たない例を構成することもできる.

References

[1] A. Brøndsted, "An Introduction to Convex Polytopes," Graduate Texts in Math. Vol **90**, Springer–Verlag, Berlin/New York/Tokyo, 1983.

[2] A. M. Duval, *Algebraic shifting and sequentially Cohen–Macaulay simplicial complexes*, Electric J. Combin. **3** (1996) (electronic).

[3] J. A. Eagon and V. Reiner, *Resolutions of Stanley–Reisner rings and Alexander duality*, J. Pure and Applied Algebra **130** (1998), 265–275.

[4] D. Eisenbud and S. Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicity*, J. Algebra **88** (1984), 89–133.

[5] J. Herzog and T. Hibi, *Componentwise linear ideals*, Nagoya Math. J. **153** (1999), 141–153.

[6] E. Miller and B. Sturmfels, "Combinatorial commutative algebra," Graduate Texts in Math. Vol **227**, Springer–Verlag, Berlin/New York/Tokyo, 2004.

[7] N. Terai, *Alexander duality in Stanley–Reisner rings*, preprint, 2005.

[8] N. Terai and T. Hibi, *Computation of Betti numbers of monomial ideals associated with stacked polytpoes*, manuscripta. math. **92** (1997), 447–453.

[9] N. Terai and K. Yoshida, *Buchsbaum Stanley–Reisner rings with minimal multiplicity*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 55–65.

[10] N. Terai and K. Yoshida, *Stanley–Reisner rings with large multiplicities are Cohen–Macaulay*, (to appear in J. Algebra).

[11] K. Yanagawa, *Alexander duality for Stanley–Reisner rings and squarefree $\mathbb{N}^n$-graded modules*, J. Algebra **225** (2000), 630–645.

寺井直樹, 〒 840-8502 佐賀市本庄町 1 番地, 佐賀大学文化教育学部,
Naoki Terai, `terai@cc.saga-u.ac.jp`;

吉田健一, 〒 464-8602 名古屋市千種区不老町, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科,
Ken-ichi Yoshida, `yoshida@math.nagoya-u.ac.jp`

Set-theoretic complete intersection monomial curves

日本工大　　衛藤和文

アフィン代数曲線がその埋め込まれた空間の次元より 1 つ少ない多項式で定義できるか? という問題は, その由来を Kronecker までさかのぼることができる古典的な問題である. ここでは, monomial curve の場合を考察する. 次の notation を用いる.

$N > 2$: a natural number,
$n_1, \ldots, n_N$: natural numbers s.t. $\gcd(n_1, \ldots, n_N) = 1$,
k : a field,
$A = k[X_1, \ldots, X_N]$.

Definition 1. 曲線

$$\{(t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_N}) : t \in k\}$$

をアフィン N 次元空間の $(n_1, n_2, \ldots, n_N$ で定義された) monomial curve という. また, 環準同型写像

$$A \longrightarrow k[t], \qquad X_i \longmapsto t^{n_i} \quad \text{for each } i$$

の kernel を monomial curve の定義イデアルという.

Definition 2. 環 R のイデアル I について,

$$\exists f_1, \ldots, f_r \in I \text{ s.t. } \sqrt{I} = \sqrt{(f_1, \ldots, f_r)}, \quad r = \operatorname{ht} I$$

が成り立つとき, I は set-theoretic complete intersection であるという.

Question 1. アフィン N 次元空間の monomial curve は set-theoretic complete intersection か? すなわち, I をその定義イデアルとすると,

$$\exists f_1, \ldots, f_{N-1} \in I \text{ s.t. } \sqrt{I} = \sqrt{(f_1, \ldots, f_{N-1})},$$

が成り立つか?

Note 1. $\mathrm{char}\, k > 0$ のときは, 正しい. さらに, $f_1, \ldots, f_{N-1}$ をすべて binomial で選ぶことができる (Moh [12]).

ここで, binomial とは, 2 つの monomial の差であらわされた多項式である.

以下, $\mathrm{char}\, k = 0$ と仮定する.

- **$N = 3$ のとき**

この場合は問題は正しい (Bresinsky [1], Herzog [11], Valla [16]).

Example 1. $(n_1, n_2, n_3) = (3, 4, 5)$

$$I = \sqrt{(f_1 = X_3^2 - X_1^2 X_2, f_2 = X_1^4 - 2X_1X_2X_3 + X_2^3)}$$

ちなみに

$$\begin{gathered} I = (f_1, X_1^3 - X_2X_3, X_1X_3 - X_2^2), \\ (X_1^3 - X_2X_3)^2 \equiv X_1^2 f_2 \mod f_1 \\ (X_1X_3 - X_2)^2 \equiv X_2 f_2 \mod f_1 \end{gathered}$$

- **$N = 4$, Gorenstein のとき**

問題は正しい (Bresinsky [2]).

Example 2. $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (5, 6, 7, 8)$

$$\begin{gathered} f_1 = X_2^2 - X_1X_3, f_2 = X_4^2 - X_1^2 X_2, \\ f_3 = X_1^7 - 4X_1^4 X_3 X_4 + 6X_1 X_3^2 X_4^2 - 4X_2 X_3^3 X_4 + X_3^5 \\ I = \sqrt{(f_1, f_2, f_3)} \end{gathered}$$

ちなみに

$$\begin{gathered} I = (f_1, f_2, X_1^3 - X_3X_4, X_2X_4 - X_3^2, X_1X_4 - X_2X_3), \\ I = \sqrt{(f_1, f_2, X_1^3 - X_3X_4, X_2X_4 - X_3^2)}, \\ (X_1^3 - X_3X_4)^4 \equiv X_1^5 f_3 \mod f_1, f_2 \\ (X_2X_4 - X_3^2)^4 \equiv X_3^3 f_3 \mod f_1, f_2 \end{gathered}$$

- **その他の結果**

次の場合も, 問題は正しい.

- $(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ が等差数列のとき (Patil [13])
- 定義イデアルが almost complete intersection のとき ([4, 5])
- Thoma の結果 ([14])

ほかにも, Eliahou ([3]), Katsabekis ([10]) などが研究している.

ここまでの結果は, $f_1, \ldots, f_{N-1}$ のうち $N-2$ 個が binomial で残りの 1 個が多項式の場合, およびその重ねあわせによって, えられる場合である.

up to radical に生成するかどうかの判定は次の命題を用いる.

Proposition 1. I を monomial curve の定義イデアル, $J \subset I$ をイデアルとする. このとき, $\sqrt{J} = I$ が成り立つための必要十分条件は, 次の 2 条件が成立することである.

(1) $\sqrt{J + (X_i)} = (X_l)_{l=1,\ldots,N}$: the maximal ideal for each i,

(2) $\sqrt{JB} = IB$, where $B = k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_N^{\pm 1}]$ the Laurent ring.

Theorem 2 ([15]). I を monomial curve の定義イデアルとする. このとき,

$$\exists \text{ binomials } f_1, \ldots, f_{N-1} \ s.t. \ I = \sqrt{(f_1, \ldots, f_{N-1})}$$

ならば, I は complete intersection である.

この定理より, I が set-theoretic complete intersection で, complete intersection でなければ, 必ず $f_1, \ldots, f_{N-1}$ の中に binomial でない多項式があらわれる.

Theorem 3 ([6]). I を monomial curve の定義イデアルとする.

$$\exists \text{ binomials } f_1, \ldots, f_{N-2}, \exists f_{N-1} \ s.t. \ I = \sqrt{(f_1, \ldots, f_{N-1})}$$

となるための必要十分条件は, 以下の条件をすべてみたすことである.

(1) イデアル $(f_1, \ldots, f_{N-2})$ は complete intersection lattice ideal である.

(2) $\exists$ binomials $g_1, g_2 \in I$ s.t.

(a) $I = \sqrt{(f_1, \ldots, f_{N-2}, g_1, g_2)}$

(b) $\exists$ monomials $M_1, M_2 \in A$ s.t. $M_1 g_1 + M_2 g_2 \in (f_1, \ldots, f_{N-2})$.

Note 2. 一般に, monomial curve の定義イデアルは up to radical に N 個の binomial で生成される ([15]).

Note 3. Theorem 2 より, I が $N-2$ 個の binomial と 1 つの多項式で, up to radical に生成できるかは判定可能である ([6]).

Note 4. Theorem 2 より, $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (17, 19, 25, 27)$ の場合, その定義イデアルは 2 個の binomial と 1 つの多項式で, up to radical に生成できないことが示される ([6]).

Theorem 4 ([7]). $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (17, 19, 25, 27)$ で定義される monomial curve は set-theoretic complete intersection.

次が up to radical の生成系である.

$$
\begin{aligned}
f_1 &= X_1X_4 - X_2X_3 \\
f_2 &= (X_1^{27} - 3X_1^{18}X_2^4X_3^2X_4 + 3X_1^9X_2^8X_3^4X_4^2 - X_2^{12}X_3^6X_4^3)^2 \\
&\quad - 2(X_1^{21}X_3^3X_4 - 3X_1^{12}X_2^4X_3^5X_4^2 + 3X_1^3X_2^8X_3^7X_4^3 - X_2^6X_3^3X_4^{10})^2 \\
&\quad + (X_1^{15}X_3^6X_4^2 - 3X_1^6X_2^4X_3^8X_4^3 + 3X_2^5X_3^7X_4^7 - X_4^{17})^2 \\
f_3 &= X_2^{50} - 20X_1^3X_2^{46}X_3 + 184X_1^6X_2^{42}X_3^2 - 1047X_1^9X_2^{38}X_3^3 \\
&\quad + 4162X_1^{12}X_2^{34}X_3^4 - 12343X_1^{15}X_2^{30}X_3^5 + 28419X_1^{18}X_2^{26}X_3^6 \\
&\quad - 52104X_1^{21}X_2^{22}X_3^7 + 77298X_1^{24}X_2^{18}X_3^8 - 93665X_1^{27}X_2^{14}X_3^9 \\
&\quad + 93093X_1^{30}X_2^{10}X_3^{10} - 75868X_1^{33}X_2^6X_3^{11} + 50466X_1^{36}X_2^2X_3^{12} \\
&\quad + 6X_2^{43}X_3X_4^4 - 93X_2^{42}X_3^5X_4 + 683X_1^3X_2^{38}X_3^6X_4 - 3161X_1^6X_2^{34}X_3^7X_4 \\
&\quad + 10341X_1^9X_2^{30}X_3^8X_4 - 25416X_1^{12}X_2^{26}X_3^9X_4 + 48672X_1^{15}X_2^{22}X_3^{10}X_4 \\
&\quad - 74295X_1^{18}X_2^{18}X_3^{11}X_4 + 91663X_1^{21}X_2^{14}X_3^{12}X_4 - 92092X_1^{24}X_2^{10}X_3^{13}X_4 \\
&\quad + 75504X_1^{28}X_2^6X_3^{14}X_4 - 77520X_1^{32}X_2^2X_3^{15}X_4 + 38760X_1^{26}X_2^2X_3^{18}X_4^2 \\
&\quad - 15504X_1^{20}X_2^2X_3^{21}X_4^3 + 4845X_1^{14}X_2^2X_3^{24}X_4^4 - 1140X_1^8X_2^2X_3^{27}X_4^5 \\
&\quad + 184X_1^2X_2^2X_3^{30}X_4^6 + 6X_1^6X_2X_3^{31}X_4^2 - 6X_2X_3^{34}X_4^3 + X_3^{38}
\end{aligned}
$$

Definition 3. $N=4$ とする. $n_1+n_4=n_2+n_3$, $\gcd(n_1,n_2,n_3,n_4)=1$ が成り立つとき, (それに対応する semigroup を) balanced という ([9]).

各 i について, $d_i=\gcd(n_j)_{j\neq i}$ とおく. $d_1n_1+d_4n_4=d_2n_2+d_3n_3$, $\gcd(n_1,n_2,n_3,n_4)=1$ が成り立つとき, (それに対応する semigroup を) extended balanced という.

Theorem 5 ([8]). (n_1,n_2,n_3,n_4) が extended balanced のとき, それに対応する monomial curve の定義イデアルは set-theoretic complete intersection である.

それぞれ, 以下の f_1,f_2,f_3 が up to radical な generators である.

Example 3 ([8]). $(27,29,35,37)$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= X_1X_4-X_2X_3\\
f_2 &= X_1^8X_3-X_1^5X_2^4-X_3^4X_4^3+X_2X_4^6\\
f_3 &= X_1^{\gamma_1}+X_2^{\gamma_2}+X_3^{\gamma_3}+X_4^{\gamma_4}+\cdots.
\end{aligned}
$$

Example 4 ([8]). $(29,47,64,82)$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= X_1X_4-X_2X_3\\
f_2 &= X_4^{\gamma_4}\pm X_1^{\mu_{11}}X_2^{\mu_{12}}\pm X_1^{\mu_{21}}X_3^{\mu_{22}}+\cdots\\
f_3 &= X_1^{\gamma_1}+X_2^{\gamma_2}+X_3^{\gamma_3}+\cdots.
\end{aligned}
$$

Question 2 (今後の問題).

- monomial curve は set-theoretic complete intersection (s.t.c.i.) か? (original question)
- 定義イデアルが s.t.c.i. のとき, up to radical な生成系の中に最大何個の binomial を含むことができるか?
  また, 1 つも binomial を含まないような up to radical な生成系しかもたない monomial curve は存在するのか?
- 定義イデアルが, $N-2$ 個の binomial を含む up to radical な生成系をもつとき, その環論的性質は (あるのか)?

参考文献

[1] H. Bresinsky, Monomial space curves in $\mathbf{A}^3$ as set-theoretic complete intersections, *Proc. Amer. Math. Soc.* **75** (1979), 23–24.

[2] H. Bresinsky, Monomial Gorenstein curves in $\mathbf{A}^4$ as set-theoretic complete intersections, *Manuscripta Math.* **27** (1979), 353–358.

[3] S. Eliahou, Idéaux de définition des courbes monomiales, in *"Complete Intersections"*, Lecture Notes in Math. vol. **1092**, Springer-Verlag, 1984, pp.229–240.

[4] K. Eto, Almost complete intersection monomial curves in A^4, *Comm. in Algebra* **22** (1994), 5325-5342.

[5] K. Eto, Almost complete intersection lattice ideals, *Rep. Res. NIT* **35** (2005), 237-248.

[6] K. Eto, Set-theoretic complete intersection lattice ideals in monoid rings, to appear in J. Algebra.

[7] K. Eto, An example of set-theoretic complete intersection lattice ideal, to appear in Tokyo J. Math..

[8] K. Eto, The monomial curves associated with balanced semigroups, (submitted)

[9] K. Herzinger, S. Wilson, N. Sieben, J. Rushall, Perfect pairs of ideals and duals in numerical semigroups, arXiv:math.AG/0508631.

[10] A. Katsabekis, Projections of cones and the arithmetical rank of toric varieties, *J. Pure Appl. Algebra* **199** (2005), 133–147.

[11] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[12] T. T. Moh, Set-theoretic complete intersections, *Proc. Amer. Math. Soc.* **94** (1985), 217–220.

[13] D. P. Patil, Certain monomial curves are set-theoretic complete intersections, *Manuscripta Math.* **68** (1990), 399–404.

[14] A. Thoma, On the set-theoretic complete intersection problem for monomial curves in A^n and P^n, *J. Pure and Appl. Algebra* **104** (1995), 333–344.

[15] A. Thoma, On the binomial arithmetical rank, *Arch. Math.* **74** (2000), 22-25.

[16] G. Valla, On determinantal ideals which are set-theoretic complete intersections, *Compositio Math.* **42** (1981), 3–11.

Auslander-Reiten conjecture on AB rings

荒谷　督司　（奈良教育大学　非常勤講師）

この講演を通して $(R, \mathfrak{m}, k)$ をネーター局所環とする。

Auslander と Reiten は、[4] において中山予想と関連した以下のことを予想している。

Conjecture (Auslander-Reiten 予想). M を有限生成 R-加群とする。

$$\mathrm{Ext}_R^n(M \oplus R, M \oplus R) = 0 \ (\forall n > 0) \text{ ならば } M \text{ は projective である。}$$

本公演では、この Auslander-Reiten 予想について考察する。

Definition 1. 零でない有限生成 R-加群 M, N に対し、$\mathrm{P}_R(M, N)$ を以下のように定義する。

$$\mathrm{P}_R(M, N) := \sup\{ \ n \mid \mathrm{Ext}_R^n(M, N) \neq 0 \ \}$$

この記号を用いることにより、 Auslander-Reiten 予想は次のように書きかえることができる。

$$\mathrm{P}_R(M, M) = \mathrm{P}_R(M, R) = 0 \text{ ならば } M \text{ は projective である。} \qquad \mathbf{(AR)}$$

Definition 2. R が AB-環とは、以下の条件をみたす整数 d が存在することである。

$$\mathrm{P}_R(M, N) < \infty \Rightarrow \mathrm{P}_R(M, N) < d \quad (M, N \in \mathrm{mod} R)$$

AB-環は Huneke と Jorgensen によって [5] で定義された環であり、この環はホモロジー代数を扱う上で非常にいい性質を持っている。本公演の最初の結果として、AB-環上で Auslander-Reiten 予想が正しいことを示す。

Theorem 3. R が AB-環ならば Auslander-Reiten 予想は正しい。

この定理を証明するために補題をひとつ用意しておく。

Lemma 4. M の射影次元が有限ならば $\mathrm{P}_R(M,N) = \mathrm{pd}_R M$ ($\forall N \in \mathrm{mod}R$) である。

Proof of Theorem 3. M を $\mathrm{P}_R(M,M) = \mathrm{P}_R(M,R) = 0$ をみたす有限生成 R-加群とする。このとき全ての整数 n に対し、$\mathrm{P}_R(M,\Omega^n M) < \infty$ であることを n に関する帰納法で示すことができる。ここで R が AB-環より、$\mathrm{P}_R(M,\Omega^n M) < d$ ($\forall n$) をみたす正の整数 d をとることができる。特に $\mathrm{P}_R(M,\Omega^d M) < d$ であるので、$\mathrm{Ext}_R^d(M,\Omega^d M) = 0$ である。したがって、 M の自由分解

$$0 \to \Omega^d M \to F_{d-1} \to F_{d-2} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

は、スプリットする。よって $\Omega^d M$ は自由加群となるので $\mathrm{pd}_R M < \infty$ である。このとき、 Lemma 4 より $\mathrm{pd}_R M = \mathrm{P}_R(M,M) = 0$ である。したがって M は projective である。 □

Proposition 5. [2, Theorem 4.2] M の CI-次元が有限であり $\mathrm{P}_R(M,N)$ も有限ならば $\mathrm{P}_R(M,N) = \text{CI-dim}_R M$ である。

R が Complete Intersection のときに AR-予想が正しいことは Auslander-Ding-Solberg によって既に示されているが (c.f.[3])、この Proposition 5 より Complete Intersection は AB-環であることがわかるので、Theorem 3 と合わせることで同様の結果を容易に得ることができる。

Corollary 6. R が Complete Intersection ならば Auslander-Reiten 予想は正しい。

また、R が Cohen-Macaulay with minimal multiplicity のときも AB-環であるので (c.f. [1, 定理 2.3])、次の corollary も成立する。

Corollary 7. R が Cohen-Macaulay with minimal multiplicity ならば Auslander-Reiten 予想は正しい。

また、最近以下の場合でも Auslander-Reiten 予想が正しいことがわかった。

Theorem 8. R が Gorenstein 環で、$\mathrm{ht}p \leq 1$ なる任意の素イデアル p に対し R_p 上で Auslander-Reiten 予想は正しいならば R 上でも正しい。

Proof. R 上で Auslander-Reiten 予想が正しくないと仮定し、矛盾を導く。まず次のような素イデアルの集合 $\mathcal{P}$ を考える。

$$\mathcal{P} = \{\, p \in \mathrm{Spec}R \mid R_p\text{上で Auslander-Reiten 予想が正しくない。}\}$$

$\mathfrak{m} \in \mathcal{P}$ より $\mathcal{P}$ は空集合ではない。 R を $\mathcal{P}$ の極小元で局所化することにより、次の場合に帰着することができる。

$(R, \mathfrak{m})$ は Gorenstein 環で、$\dim R = d \geq 2$ である。 R 上で Auslander-Reiten 予想は正しくないが、$\mathfrak{m}$ と異なる任意の素イデアル p に対し R_p 上で Auslander-Reiten 予想は正しい。

R 上で Auslander-Reiten 予想が正しくないので、$\mathrm{P}_R(M,M) = \mathrm{P}_R(M,R) = 0$ だが projective ではない直既約 R-加群 M が存在する。R が Gorenstein であり $\mathrm{P}_R(M,R) = 0$ より M は極大 Cohen-Macaulay 加群である。また、任意の $p \neq \mathfrak{m}$ に対し、$\mathrm{Ext}^n_{R_p}(M_p, M_p) = \mathrm{Ext}^n_R(M,M)_p$, $\mathrm{Ext}^n_{R_p}(M_p, R_p) = \mathrm{Ext}^n_R(M,R)_p$ より $\mathrm{P}_{R_p}(M_p, M_p) = \mathrm{P}_{R_p}(M_p, R_p) = 0$ である。よって仮定より M_p は自由 R_p-加群であるので、 M は vector bundle である。したがって M で終わる Auslander-Reiten 列 : $0 \to \tau M \to E \to M \to 0$ が存在する。したがって $\mathrm{Ext}^1_R(M, \tau M) \neq 0$ である。

一方、$(-)^\vee$, $(-)^*$ をそれぞれ、canonical dual, R-dual とすると、 R が Gorenstein より $\tau M = (\Omega^d \mathrm{tr} M)^\vee = (\Omega^d \mathrm{tr} M)^*$ である。M の complete resolusion

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & F_{-1} \arrow[r] & F_{-2} \arrow[r] & \cdots \\
 & & & M \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

より、$\tau M \cong \Omega^{-d+2} M$ であることがわかる。したがって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1(M, \tau M) &\cong \mathrm{Ext}^1(M, \Omega^{-d+2} M) \\
&\cong \mathrm{Ext}^{1-(-d+2)}(M, M) \\
&= \mathrm{Ext}^{d-1}(M, M) = 0 \quad (\because \mathrm{P}_R(M,M) = 0)
\end{aligned}$$

であり、これは $\mathrm{Ext}^1(M, \tau M) \neq 0$ に反する。したがって R 上でも Auslander-Reiten 予想は正しい。 □

正則環ならば AB-環なので、Seere の (R_1) 条件をみたす Gorenstein 環では Auslander-Reiten 予想が正しいことがわかる。したがって次の系が成立する。なお、この結果は Huneke と Leuschke によって [6] でも紹介されている。

Corollary 9. *R* が Gorenstein normal ならば Auslander-Reiten 予想は正しい。

参考文献

[1] T. Araya, *Some remarks on Cohen-Macaulay AB rings*, 第15回可換環論セミナー報告集, 59-62.

[2] T. Araya and Y. Yoshino, *Remarks on a depth formula, a grade inequality and a conjecture of Auslander*, Comm. Algebra 26 (1998), no. 11, 3793-3806.

[3] M. Auslander, S. Ding and Ø. Solberg, *Liftings and Weak Liftings of Modules*, J. Alg. 156 (1993), 273-397.

[4] M. Auslander and I. Reiten, *On a generalized version of the Nakayama Conjecture*, Proc. Amer. MAth. Soc. 52 (1975), 69-74

[5] C. Huneke and D. Jorgensen, *Symmetry in the vanishing of Ext over Gorenstein rings*, Math. Scand. 93 (2003), 161-184

[6] C. Huneke and G. Leuschke, *On a conjecture of Auslander and Reiten* J. Algebra 275 (2004), 781–790

[7] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay Modules over Cohen-Macaulay Rings*, London Math. Soc., Lecture Note Series vol.146, Cambridge U.P.(1990)

The Rees algebras of ideals in two dimensional regular local rings

後藤四郎 (明治大学理工学部)
松岡直之 (明治大学理工学研究科)

1 はじめに

$(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環とし，I を環 A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。$R = \mathcal{R}(I) = A[It] \subseteq A[t]$ をイデアル I の Rees 代数，$R' = \mathcal{R}'(I) = \mathcal{R}(I)[t^{-1}] \subseteq A[t, t^{-1}]$ をイデアル I の拡大 Rees 代数，$G = \mathrm{G}(I) = \mathcal{R}'(I)/t^{-1}\mathcal{R}'(I)$ をイデアル I の随伴次数環とする。

Rees 代数に対しては様々な研究が行われ，特に Cohen-Macaulay 性に対しては J. Lipman によって次の事実が知られている。

事実 1.1 (J. Lipman, 1994). 次は同値である。

(1) R は *Cohen-Macaulay* 環である。

(2) R' は *Cohen-Macaulay* 環である。

(3) G は *Cohen-Macaulay* 環である。

これに対し，Cohen-Macaulay 性の自然な一般化の概念である Buchsbaum 性に関しての研究はさほど行われていない。そこで，Rees 代数の Buchsbaum 性の解析研究を進め，得られた結果が本稿の主定理である。この結果は，Lipman の定理の 2 次元のケースでの Buchsbaum 版と言えるものであり，次の通りである。

定理 1.2. $(A, \mathfrak{m})$ を 2 次元正則局所環で，剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限体であるとする。このとき次は同値である。

(1) R は *Buchsbaum* 環である。

(2) R' は *Buchsbaum* 環である。

(3) G は *Buchsubam* 環である。

このとき，$I^3 = QI^2$ であって，$\mathbb{I}(R) = \mathbb{I}(R') = \mathbb{I}(G) = \ell_A(I^2/QI)$ である。但し，$\mathbb{I}(*)$ によって *Buchsbaum* 不変量を表す。

この定理は，ただ単に Rees 代数の Buchsbaum 性を随伴次数環の言葉で表したものであるだけでなく，2 次元においては Lipman の定理を含む結果となっている。

2 Rees 代数の Buchsbaum 性の判定法

以下，特に断らない限り $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環とし，I は環 A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。$\overline{I}$ によってイデアル I の整閉包を表し，$\widetilde{I} = \bigcup_{n \geq 0} [I^{n+1} : I^n]$ をイデアル I の Ratliff-Rush 閉包とする。もちろんこれらは環 A のイデアルであって，次が知られている。

事実 2.1 (cf. [M]). A は *Noether* 環とし，I は環 A のイデアルとする。このとき，イデアル I が非零因子を少なくともひとつは含むと仮定すると次が正しい。

(1) $I \subseteq \widetilde{I} \subseteq \overline{I}$ が成り立つ。

(2) 十分大きい整数 n に対して，等式 $\widetilde{I^n} = I^n$ が成り立つ。

(3) 等式 $\widetilde{\widetilde{I}} = \widetilde{I}$ が成り立つ。

また，M によって Rees 代数 $R = \mathcal{R}(I)$ の斉次極大イデアルを表し，N によって拡大 Rees 代数 $R' = \mathcal{R}'(I)$ の斉次極大イデアルを表すこととする。この記号の元で，次の Rees 代数の Buchsbaum 性に関する判定法が得られた。

定理 2.2. 次は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ は *Buchsbaum* 環であって，任意の素イデアル $M \neq P \in \operatorname{Spec} R$ に対して R_P は正規である。

(2) $\mathcal{R}(I)$ は *Buchsbaum* 環であって，$\overline{I} = \widetilde{I}$ が成り立つ。

(3) $\mathfrak{m}\overline{I} \subseteq I$ であって，等式 $I\overline{I} = I^2$ が成り立つ。

もしも $Q = (a, b)$ がイデアル I の *minimal reduction* ならば，さらに次の条件も同値である。

(4) $\mathfrak{m}\overline{I} \subseteq I$ であって，$Q\overline{I} \subseteq I^2$ が成り立つ。

このとき $R' = \mathcal{R}'(I)$, $G = \mathrm{G}(I)$, $F = \mathrm{F}(I)$ は *Buchsbaum* 環であって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}^1_M(R) &= [\mathrm{H}^1_M(R)]_1 = \overline{I}/I \\
\mathrm{H}^2_M(R) &= (0) \\
\mathrm{H}^1_N(R') &= [\mathrm{H}^1_N(R')]_1 = \overline{I}/I \\
\mathrm{H}^2_N(R') &= (0) \\
\mathrm{H}^0_N(G) &= [\mathrm{H}^0_N(G)]_0 = \overline{I}/I \\
\mathrm{H}^1_N(G) &= [\mathrm{H}^1_N(G)]_1 = \overline{I}/I \\
\mathrm{H}^0_M(F) &= [\mathrm{H}^0_M(F)]_1 = \mathfrak{m}\overline{I}/\mathfrak{m}I \\
\mathrm{H}^1_M(F) &= [\mathrm{H}^1_M(F)]_1 = \overline{I}/I
\end{aligned}
$$

である。よって $\mathbb{I}(R) = \mathbb{I}(R') = \mathbb{I}(G) = 2\ell_A(\overline{I}/I)$ と $\mathbb{I}(F) = \ell_A(\mathfrak{m}\overline{I}/\mathfrak{m}I) + \ell_A(\overline{I}/I)$ が従う。また，$a(G) < 0$，$a(F) < 0$ である。但し，$a(*) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^d_M(*)]_n \neq (0)\}$ によって a-不変量を表す。

さらに

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = \begin{cases} \ell_A(A/I) & (n=0) \\ \mathrm{e}_0(I)\binom{n+2}{2} - \mathrm{e}_1(I)\binom{n+1}{1} + \mathrm{e}_2(I) & (n>0) \end{cases}$$

が成り立つ。但し，$\mathrm{e}_1(I) = \mathrm{e}_0(I) - \ell_A(A/\overline{I}), \mathrm{e}_2(I) = 0$ である。

この判定法は，イデアル I が整閉であれば Rees 代数 R は Cohen-Macaulay であるという事実を系として含んでいる。実際，$I = \overline{I}$ ならば，$\mathrm{H}^1_M(R) = (0)$ であるので Rees 代数 R は Cohen-Macaulay であるし，逆に R が Cohen-Macaulay ならば $\mathrm{H}^1_M(R) = \overline{I}/I = (0)$ であるので $I = \overline{I}$ が従う。

3 単項式イデアルの例

今節では，定理 2.2 を用い，そのようなイデアルの存在性を保証する結果を紹介する。$A = k[X, Y]$ を体 k 上の 2 変数多項式環とし，$\mathfrak{m} = (X, Y)$ とおく。また，$0 < a \leq b$ を整数とし，$Q = (X^a, Y^b)$ とする。I は単項式イデアルであって，単項式イデアル Q を reduction として含んでいるとする。このとき，3 条件 $(*)$: $\overline{I} = \widetilde{I}$, $Q\overline{I} \subseteq I^2$, $\mathfrak{m}\overline{I} \subseteq I$ を満たすようなものについて考える。これはつまり，定理 2.2 によって Rees 代数 $\mathcal{R}(IA_\mathfrak{m})$ が Buchsbaum 環であることに他ならない。このような単項式イデアル I に関する存在定理として次がある。

定理 3.1. 次が正しい。

(1) $a \leq 3$ のときは，等式 $I = \widetilde{I}$ が成り立つ。よって特に $\overline{I} = \widetilde{I}$ ならば $\overline{I} = I$ である。

(2) $b \equiv 1$ もしくは $a-1 \mod a$ のとき，$\overline{I} = \widetilde{I}$ を満たすとすると，$\overline{I} = I$ である。

(3) $a = 4$ のとき，$M\overline{I} \subseteq I$ と $I\overline{I} = I^2$ を満たしかつ $\overline{I} \neq I$ とすると，$b \equiv 0 \mod a$ であって，I は次のいずれかである。

 (i) (X^4, X^3Y, XY^3, Y^4)

 (ii) $(X^4, X^3Y^q, X^2Y^{2q+1}, XY^{3q}, Y^{4q})$ $(q > 1)$

(4) $a \geq 5$ のとき，$M\overline{I} \subseteq I$ と $I\overline{I} = I^2$ を満たしかつ $\overline{I} \neq I$ なるものを構成することができることと，$b \not\equiv 1, a-1 \mod a$ であることは同値である。

この定理は，(1) と (2) のときは上の 3 条件 $(*)$ が満たされるとすると Rees 代数 $\mathcal{R}(IA_{\mathfrak{m}})$ は Cohen-Macaulay 環であることを示しており，$a \geq 5$ のときは Buchsbaum であるが Cohen-Macaulay でないような Rees 代数を持つイデアルが非常に多様に存在していることを主張する命題である。

4 定理 1.2 の証明

今節では，定理 1.2 の (1) と (3) の同値性を証明する。以下，$(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環とし，剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限体とする。I は $\mathfrak{m}$-準素イデアルとし,，$Q = (a, b)$ は I の minimal reduction とする。$R = \mathcal{R}(I) \subseteq A[t]$，$T = \mathcal{R}(\mathcal{F})$ をそれぞれイデアル I と filtration$\mathcal{F} = \{\widetilde{I^n}_{n \in \mathbb{Z}}\}$ の Rees 代数とする。また，$M = \mathfrak{m}R + R_+$ と $N = \mathfrak{m}T + T_+$ をそれぞれ R と T の斉次極大イデアルとする。また，$G = \mathrm{G}(I)$ をイデアル I の随伴次数環とおく。

補題 4.1. 次が正しい。

(1) T は R 上有限生成であって，十分大きい整数 $n \gg 0$ に対して $[T/R]_n = (0)$ である。

(2) $\mathrm{H}^1_M(T) = (0)$ である。

(3) $\mathrm{H}^1_M(R) \cong T/R$ であって，$\mathrm{H}^0_M(G) \cong T/R(1)$ である。

証明. (1) 整数 n を十分大きく取れば $\widetilde{I^n} = \widetilde{I}^n = I^n$ である。また，完全列

$$0 \to R \to T \to T/R \to 0$$

を見るに，$\ell_A(T/R) < \infty$ であるから，T は R 上有限生成加群である。

(2) $B = A[t]$ を A 上 1 変数多項式環とする。完全列

$$0 \to T \to B \to B/T \to 0$$

を見るに，局所コホモロジーの完全列

$$0 \to \mathrm{H}^0_M(B/T) \to \mathrm{H}^1_M(T) \to \mathrm{H}^1_M(B) \to \cdots$$

を得るが，$\mathrm{H}^0_M(B/T) = (0)$, $\mathrm{H}^1_M(B) = (0)$ であるから，$\mathrm{H}^1_M(T) = (0)$ である。

(3) 完全列

$$0 \to R \to T \to T/R \to 0$$

を見るに

$$0 \to \mathrm{H}^0_M(T/R) \to \mathrm{H}^1_M(R) \to \mathrm{H}^1_M(T) \to \cdots$$

を得る。(2) より $\mathrm{H}^1_M(T) = (0)$ であり，(1) より $\mathrm{H}^0_M(T/R) = T/R$ であるから，$\mathrm{H}^1_M(R) \cong T/R$ を得る。

次に G の局所コホモロジーを見よう。まず，任意の整数 $\ell \geq 0$ について $\overline{I}^{\ell+1} = I^\ell\overline{I}$ であるから，$\widetilde{I^{n+1}} \subseteq \overline{I^{n+1}} \subseteq I^n$ が任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ で成立する。一方で，$\overline{xt^n} \in [\mathrm{H}^0_M(G)]_n$ $(x \in I^n)$ を取る。するとある整数 $\ell \geq 0$ で $M^\ell\overline{xt^n} = 0$ である。よって，$\alpha \in I^\ell$ を取れば $\alpha x \in I^{\ell+n+1}$ である。故に $x \in I^{\ell+n+1} : I^\ell$ であって，$x \in \widetilde{I^{n+1}} \subseteq I^n$ が従う。よって，等式

$$[\mathrm{H}^0_M(G)]_n = \{\overline{xt^n} \mid x \in \widetilde{I^{n+1}}\} \cong \widetilde{I^{n+1}}/I^{n+1}$$

を得る。ここで，完全列

$$0 \to R_+ \to R \to A \to 0$$

より $\mathrm{H}^1_M(R_+) \cong \mathrm{H}^1_M(R) \cong T/R$ がわかり，完全列

$$0 \to R_+(1) \to R \to G \to 0$$

より完全列

$$0 \to \mathrm{H}^0_M(G) \to \mathrm{H}^1_M(L)(1) \to \mathrm{H}^1_M(R)$$

を得るが，$[H^1_M(L)(1)]_n = [(T/R)(1)]_n = \widetilde{I^{n+1}}/I^{n+1} = [\mathrm{H}^0_M(G)]_n$ であるから $\mathrm{H}^0_M(G) \cong \mathrm{H}^1_M(L)(1) = (T/R)(1)$ が従う。 □

次の補題が定理 1.2 の証明における鍵となる補題である。

補題 4.2 (Key Lemma). 完全列 $0 \to R_+ \to R \to A \to 0$ から導かれる局所コホモロジーの完全列

$$\cdots \to \mathrm{H}^2_M(R) \xrightarrow{\eta_I} \mathrm{H}^2_{\mathfrak{m}}(A) \to \mathrm{H}^3_M(R_+) \to \mathrm{H}^3_M(R) \to 0$$

において，η_I は 0 射である。

証明. 可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{R}(\overline{I})_+ \arrow[r] & \mathcal{R}(\overline{I}) \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_+ \arrow[r] \arrow[u] & R \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

より，$\mathcal{R}(\overline{I})$ は Cohen-Macaulay であるので

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^2_{\mathfrak{m}}(A) \arrow[r] & \mathrm{H}^3_M(\mathcal{R}(\overline{I})_+) \arrow[r] & \mathrm{H}^3_M(\mathcal{R}(\overline{I})) \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{H}^2_M(R) \arrow[r, "\eta_I"'] & \mathrm{H}^2_{\mathfrak{m}}(A) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathrm{H}^3_M(R_+) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{H}^3_M(R) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る。よって $\eta_I = 0$ である。 □

補題 4.3. $I^3 = QI^2$ とすると，このとき $T = \mathcal{R}(\widetilde{I})$ である。

補題 4.4. $I^3 = QI^2$ かつ $MT \subseteq R$ とする。このとき $T/R = [T/R]_1 \cong \widetilde{I}/I$ である。

以下，$f = at, g = bt \in R$ とおく。次の 1 次元の場合の命題が局所コホモロジーの計算において重要な役割を果たすので触れておきたい。

命題 4.5. $(A, \mathfrak{m})$ は *Cohen-Macaulay* 局所環で $\dim A = 1$ とする。I は環 A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとして，$a \in I$ はイデアル I の *reduction* とする。このとき $I^3 = QI^2$ ならば $\mathrm{H}^0_M(G) = [\mathrm{H}^0_M(G)]_0 \cong \widetilde{I}/I$ が成り立つ。

以下の補題における局所コホモロジーの計算は，$\mathrm{G}(\widetilde{I})$ と $\mathrm{G}(\widetilde{I}/(a))$ の比較を行い，さらに R と T の比較や G と $\mathrm{G}(\widetilde{I})$ の比較によって精密に行う。

補題 4.6. f, g が G 内で *USD*-列を成しているとする。このとき $I^3 = QI^2$ である。

補題 4.7. $I^3 = QI^2$ かつ G は *quasi-Buchsbaum* 環であるとする。このとき $\mathrm{H}^2_M(R) = [\mathrm{H}^2_M(R)]_0$ と $\mathrm{H}^1_M(G) = [\mathrm{H}^1_M(G)]_1 + [\mathrm{H}^1_M(G)]_{-1}$ が成り立つ。

これらの補題が，G が Buchsbaum 環ならば R も Buchsbaum 環である証明に必要となる事実である。また，逆の証明に用いる命題は次の 3 つである。

命題 4.8 (下田保博). R_M が *Buchsbaum* 環ならば $I^3 = QI^2$, $MT \subseteq R$, $\mathfrak{m}[(I^2+(a)) : b] \subseteq I$ が成り立つ。

補題 4.9. $I^3 = QI^2$ とする。このとき R が *quasi-Buchsbaum* 環であるならば G も *quasi-Buchsbaum* 環である。

補題 4.10. $\ell = \mu_A(I)$ とおき，$I = (a_1, a_2, \cdots, a_\ell)$ かつ任意の整数 $1 \leq i \neq j \leq \ell$ に対して (a_i, a_j) はイデアル I の *reduction* であるとする。$I^3 = QI^2$ であってかつ G は *quasi-Buchsbaum* 環であるとすると，このときもし任意の整数 $1 \leq i \neq j \leq \ell$ に対して $\mathfrak{m}[(I^2 + (a_i)) : a_j] \subseteq I$ が成り立つならば G は *Buchsbaum* 環である。

証明. 完全列

$$0 \to W = \mathrm{H}^0_M(G) \to G \to G/W \to 0$$

より，

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1_M(G) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{H}^1_M(G/W) & & \\
\mathrm{H}^1(M, G) \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon"] & \mathrm{H}^1(M, G/W) \arrow[r] \arrow[u, "\tau"'] & \mathrm{H}^2(M, W) \arrow[r, "\xi"] & \mathrm{H}^2(M, G)
\end{tikzcd}$$

を得る。G/W は Buchsbaum 環であるので τ は全射であり，また，$\mathrm{H}^1_M(G) = [\mathrm{H}^1_M(G)]_{-1} + [\mathrm{H}^1_M(G)]_1$ である。そこで，$[\ker \xi]_{-1} = [\ker \xi]_1 = (0)$ を示すことによって，ε は全射となり G は Buchsbaum 環であることがわかる。 □

定理 1.2 (1) と (3) の同値性の証明. (3) $\Rightarrow$ (1) G が Buchsbaum 環であるならば R も Buchsbaum 環であることを示す。

まず，$\mathrm{H}^0_M(G) \cong \mathrm{H}^1_M(R)$ である。よって，以下では Koszul コホモロジーから局所コホモロジーへの射 $\mathrm{H}^2(M,R) \to \mathrm{H}^2_M(R)$ が全射であることを示す。

G が Buchsbaum 環であるので，$f = at, g = bt$ は G 内で USD-列を成す。よって補題 4.6 より $I^3 = QI^2$ が成り立つ。一方で，$\mathrm{H}^0_M(G) \cong T/R(1)$ であったので $MT \subseteq R$ である。そこで次の 2 つの完全列

$$0 \to L = R_+ \to R \to A \to 0 \tag{1}$$
$$0 \to L(1) \to R \to G \to 0 \tag{2}$$

を考える。まず，完全列 (1) と補題 4.1 から $\mathrm{H}^1_M(L) \cong \mathrm{H}^1_M(R) \cong T/R$ を得る。また，補題 4.2 と補題 4.7 から $\mathrm{H}^2_M(L) \cong \mathrm{H}^2_M(R) = [\mathrm{H}^2_M(R)]_0$ を得る。

一方，完全列 (2) から得られる局所コホモロジーの完全列

$$\cdots \to \mathrm{H}^1_M(R) \to \mathrm{H}^1_M(G) \to \mathrm{H}^2_M(L)(1) \xrightarrow{\xi} \mathrm{H}^2_M(R) \to \cdots$$

を見ると，$\mathrm{H}^2_M(L) \cong \mathrm{H}^2_M(R) = [\mathrm{H}^2_M(R)]_0$ であったことから $\xi = 0$ を得る。

よって，

$$\begin{tikzcd}
0 & & \\
\mathrm{H}^1_M(G) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{H}^2_M(L)(1) \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{H}^1(M,G) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{H}^2(M,L)(1) \arrow[u, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

を見るに ψ は全射である。また，

$$\begin{tikzcd}
0 & \\
\mathrm{H}^2_M(L) \arrow[u] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{H}^2_M(R) \\
\mathrm{H}^2(M,L) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{H}^2(M,R) \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

より φ は全射であり，R は Buchsbaum 環であることを得る。

(1) $\Rightarrow$ (3) イデアル I の生成元 $a_1, a_2, \cdots, a_\ell$ を，任意の整数 $1 \leq i \neq j \leq \ell$ に対して (a_i, a_j) がイデアル I の reduction となるよう取る。すると，命題 4.8 により，$I^3 = QI^2$, $MT \subseteq R$ であり，任意の整数 $1 \leq i \neq j \leq \ell$ に対して $\mathfrak{m}[(I^2 + (a_i)) : a_j] \subseteq I$ が成り立つ。$I^3 = QI^2$ だから，補題 4.9 より G は quasi-Buchsbaum 環である。よって補題 4.10 により G は Buchsbaum 環であることが導かれる。 $\square$

5 $\mathrm{H}^2_M(R) \neq (0)$ の例

今節では，$\mathrm{H}^2_M(R) \neq (0)$ となるイデアルの例について触れておく。まず，このような例にどういう意味があるかを示す結果をまず紹介する。

定理 5.1. $I^3 = QI^2$ とする。このとき次が正しい。

(1) $a(G) \leq 0$ である。

(2) $a(G) < 0$ となることの必要十分条件は $\mathrm{H}^2_M(R) = (0)$ である。

定理 2.2 によって得られる例は全て $\mathrm{H}^2_M(R) = (0)$ であり，$\mathrm{H}^2_M(R) \neq (0)$ となるものはほとんど見つかっていない。実際，次の結果はそのような例の構成が非常に困難であることを示している。

命題 5.2. $A = k[X,Y]$ を無限体 k 上 2 変数多項式環とし，$\mathfrak{m} = (X,Y)$ とする。整数 $a, b > 0$ を取って $Q = (X^a, Y^b)$ とおく。I は多項式環 A の単項式イデアルで，Q を *reduction* として含むと仮定する。このとき，$R = \mathcal{R}(IA_\mathfrak{m})$ が *Buchsbaum* 環であるならば，$\mathrm{H}^2_M(R) = (0)$ である。

最後に，$\mathrm{H}^2_M(R) \neq (0)$ となる例を 1 つ紹介する。

例 5.3. $A = k[X,Y]$ を体 k 上 2 変数多項式環とし，$\mathfrak{m} = (X,Y)$, $I = (X^3, X^2Y + XY^2, Y^3)$, $J = (X^3, X^2 + XY + Y^2)$ とする。$K = IJ$ とおくと，*Rees* 代数 $R = \mathcal{R}(KA_\mathfrak{m})$ は *Buchsbaum* 環であってかつ $\mathrm{H}^2_M(R) \neq (0)$ である。但し，$M = (X,Y)R + R_+$ とする。また，$K = \widetilde{K}$ であって，よって $\operatorname{depth} \mathrm{G}(KA_\mathfrak{m}) = 1$ かつ $\operatorname{depth} R = 2$ である。

参考文献

[GS] S. Goto and Y. Shimoda, *On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings*, Commutative algebra (Fairfax, Va., 1979), 201–231, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 68, Dekker, New York, 1982.

[GW] S. Goto and K. Watanabe, *On graded rings I*, J. Math. Soc. Japan, **30**(1978), 179–213.

[H] C. Huneke, *Complete ideals in two-dimensional regular local rings*, Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987), 325-338, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **15**, Springer, New York, 1989

[HS] C. Huneke and J. D. Sally, *Birational extensions in dimension two and integrally closed ideals*, J. Algebra, **115** (1988), 481–500

[M] S. McAdam, *Asymptotic Prime Divisors*, Lecture Notes in Math. **1023**, Springer-Verlag, Berlin·Heidelberg·New York·Tokyo, 1983

[SV] J. Stückrad and W. Vogel, *Buchsbaum rings and applications*, Springer-Verlag, 1968

Shiro Goto
Department of Mathematics, School of Science and Technology, Meiji University, 214–8571 JAPAN
E-mail address: **goto@math.meiji.ac.jp**

Naoyuki Matsuoka
Department of Mathematics, School of Science and Technology, Meiji University, 214–8571 JAPAN
E-mail address: **ee98062@math.meiji.ac.jp**

Torsionfree modules and Cohen-Macaulay approximations

RYO TAKAHASHI

Department of Mathematics, School of Science and Technology, Meiji University, Kawasaki 214-8571, Japan

E-mail address: `takahasi@math.meiji.ac.jp`

1. INTRODUCTION

In the late 1960s, Auslander and Bridger [2] constructed the notion of a certain approximation, which we call in this paper a spherical approximation. This notion says that any module whose nth syzygy is n-torsionfree is described by using an n-spherical module and a module of projective dimension less than n. On the other hand, about two decades later, the notion of a Cohen-Macaulay approximation was introduced and developed by Auslander and Buchweitz [3]. This notion says that over a Cohen-Macaulay local ring with a canonical module, the category of finitely generated modules is obtained by glueing together the subcategory of maximal Cohen-Macaulay modules and the subcategory of modules of finite injective dimension. In this paper, we set our sight on these two notions. More precisely, we shall consider and generalize the following two theorems.

Theorem 1.1 (Auslander-Bridger). *The following are equivalent for a finitely generated module M over a commutative noetherian ring R:*

(1) *$\Omega^n M$ is n-torsionfree;*
(2) *There exists an exact sequence $0 \to Y \to X \to M \to 0$ of finitely generated R-modules such that $\mathrm{Ext}_R^i(X, R) = 0$ for $1 \leq i \leq n$ and $\operatorname{pd} Y < n$.*

Theorem 1.2 (Auslander-Buchweitz). *Let R be a Cohen-Macaulay local ring with a canonical module. Then for every finitely generated R-module M there exists an exact sequence $0 \to Y \to X \to M \to 0$ of finitely generated R-modules such that X is maximal Cohen-Macaulay and $\operatorname{id} Y < \infty$.*

2. THE EXISTENCE OF n-C-SPHERICAL APPROXIMATIONS

Throughout the present paper, R is always a commutative noetherian ring, and all R-modules are finitely generated. For a projective presentation $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to M \to 0$ of an R-module M, we define $\mathrm{Tr}M$, the *(Auslander) transpose* of M, to be the cokernel of the R-dual map $f^* : P_0^* \to P_1^*$. Auslander and Bridger [2] introduced the notion of an n-torsionfree module.

Definition 2.1. Let n be an integer. An R-module M is called *n-torsionfree* if $\mathrm{Ext}_R^i(\mathrm{Tr}M, R) = 0$ for $1 \leq i \leq n$.

In this paper, unless otherwise specified, we always denote by n a positive integer, by C an R-module, by $(-)^\dagger$ the C-dual functor $\mathrm{Hom}_R(-, C)$ and by λ_M the natural homomorphism $M \to M^{\dagger\dagger}$ for an R-module M. Note that λ_R can be identified with the homothety map $R \to \mathrm{Hom}_R(C, C)$. We can generalize the notion of an n-torsionfree module as follows.

Definition 2.2. Let M be an R-module. We say that M is *1-C-torsionfree* if λ_M is a monomorphism. We say that M is *n-C-torsionfree*, where $n \geq 2$, if λ_M is an isomorphism and $\mathrm{Ext}^i_R(M^\dagger, C) = 0$ for all $1 \leq i \leq n-2$.

We denote by $\mathrm{mod}\, R$ the category of finitely generated R-modules. For an R-module X, we denote by $\mathrm{add}\, X$ the full subcategory of $\mathrm{mod}\, R$ consisting of all direct summands of finite direct sums of copies of X. To develop the notion of an n-C-torsionfree module to the utmost extent, we establish the following definition.

Definition 2.3. We say that C is *1-semidualizing* if λ_R is a monomorphism and $\mathrm{Ext}^1_R(C, C) = 0$. We say that C is *n-semidualizing*, where $n \geq 2$, if λ_R is an isomorphism and $\mathrm{Ext}^i(C, C) = 0$ for all $1 \leq i \leq n$.

The following proposition says that there are a lot of n-semidualizing modules. The proof is due to Shiro Goto, which is based on that of [6, Proposition 2.5.1].

Proposition 2.4. *Let R be a Cohen-Macaulay local ring of dimension $d \geq 2$ with an isolated singularity. Let I be an ideal of R which is a maximal Cohen-Macaulay R-module. Then λ_R is an isomorphism and $\mathrm{Ext}^i_R(I, I) = 0$ for every $1 \leq i \leq d-2$. Hence R is d-I-torsionfree, and I is $(d-2)$-semidualizing.*

Proof. First of all, note that R is a normal domain. We denote by K the quotient field of R. Since the R-module I has rank one, there is an isomorphism $I \otimes_R K \cong K$. Each element f of $\mathrm{End}_R(I)$ can be lifted to a K-linear map $\tilde{f} : K \to K$. We easily see that $\tilde{f}(1)$ is an element of $(I :_K I) = \{ \alpha \in K \mid I\alpha \subseteq I \}$, and get a map

$$\phi : \mathrm{End}_R(I) \to (I :_K I)$$

which is given by $f \mapsto \tilde{f}(1)$. It is easy to check that ϕ is an isomorphism of R-algebras. Let $\theta : (I :_K I) \to K$ be the inclusion map. Then the composite map $\theta \cdot \phi \cdot \lambda_R$ coincides with the inclusion map $R \to K$, which shows that $\mathrm{End}_R(I)$ is an intermediate ring between R and K. Since λ_R is a module-finite monomorphism, $\mathrm{End}_R(I)$ is integral over R. Noting that R is normal, we conclude that λ_R is an isomorphism.

Next, let us prove that $\mathrm{Ext}^i_R(I, I) = 0$ for $1 \leq i \leq d-2$. Set $r = \sup\{ n \mid \mathrm{Ext}^i_R(I, I) = 0 \text{ for } 1 \leq i \leq n \}$. We want to show that $r \geq d-2$. Suppose that $r < d-2$. Take a free resolution $F_\bullet$ of the R-module I. Dualizing $F_\bullet$ by I, we obtain an exact sequence

$$0 \to R \to \mathrm{Hom}_R(F_0, I) \xrightarrow{\delta_r} \cdots \xrightarrow{\delta_2} \mathrm{Hom}_R(F_{r-1}, I) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Hom}_R(F_r, I)$$
$$\xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Hom}_R(\Omega^{r+1} I, I) \to \mathrm{Ext}^{r+1}_R(I, I) \to 0$$

Put $N_i = \mathrm{Im}\, \delta_i$ for $0 \leq i \leq r$. The definition of r implies that $\mathrm{Ext}^{r+1}_R(I, I) \neq 0$. Since R has an isolated singularity and I is maximal Cohen-Macaulay, the R-module $\mathrm{Ext}^{r+1}_R(I, I)$ has finite length. Hence we have $\mathrm{depth}_R \mathrm{Ext}^{r+1}_R(I, I) = 0$. As $\mathrm{depth}_R \mathrm{Hom}_R(\Omega^{r+1} I, I) \geq \min\{ 2, \mathrm{depth}_R I \} = 2 > 0$, we obtain $\mathrm{depth}_R N_0 = 1$ by the depth lemma. Noting that each $\mathrm{Hom}_R(F_i, I)$ is a maximal Cohen-Macaulay R-module, by the depth lemma, we get $\mathrm{depth}_R N_i = i+1$ for $0 \leq i \leq r$, and $d = \mathrm{depth}\, R = r+2 < d$. This is a contradiction, which shows that $r \geq d-2$ and the proof is completed. $\square$

For an R-module M, we denote by $C\mathrm{dim}_R M$ the infimum of nonnegative integers n such that there exists an exact sequence $0 \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_0 \to M \to 0$

with each C_i being in $\operatorname{add} C$. Note that $R\dim_R M = \operatorname{pd}_R M$ for any R-module M. We make the following definition.

Definition 2.5. Let M be an R-module.
(1) We say that M is *n-spherical* if $\operatorname{Ext}^i(M,R) = 0$ for all $1 \le i \le n$. We call an exact sequence $0 \to Y \to X \to M \to 0$ of R-modules an *n-spherical approximation* if X is n-spherical and $\operatorname{pd} Y < n$.
(2) We say that M is *n-C-spherical* if $\operatorname{Ext}^i(M,C) = 0$ for all $1 \le i \le n$. We call an exact sequence $0 \to Y \to X \to M \to 0$ of R-modules an *n-C-spherical approximation* if X is n-C-spherical and $C\dim Y < n$.

Lemma 2.6. *Suppose that* $\operatorname{Ext}^1(C,C) = 0$. *An R-module M is 1-C-torsionfree if and only if there is an exact sequence $0 \to M \to C_0 \to N \to 0$ such that $C_0 \in \operatorname{add} C$ and* $\operatorname{Ext}^1(N,C) = 0$.

Now, we can state and prove the main result of this section.

Theorem 2.7. *Let C be an n-semidualizing R-module. The following are equivalent for an R-module M:*

(1) *$\Omega^n M$ is n-C-torsionfree;*
(2) *M admits an n-C-spherical approximation.*

Proof. Let $P_\bullet$ be a projective resolution of M.

(1) $\Rightarrow$ (2): We have an exact sequence $0 \to \Omega^{i+1}M \to P_i \to \Omega^i M \to 0$ for each i. Set $X_0 = \Omega^n M$. Note that X_0 is n-C-torsionfree. Lemma 2.6 implies that there exists an exact sequence $0 \to X_0 \to C_0 \to Z_1 \to 0$ such that $C_0 \in \operatorname{add} C$ and $\operatorname{Ext}^1(Z_1,C) = 0$. We make the pushout diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & C_0 \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \arrow[r] & 0 \\
 & \Omega^{n-1}M \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega^{n-1}M \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Since $\operatorname{Ext}^1(Z_1,C) = 0 = \operatorname{Ext}^1(P_{n-1},C)$, we have $\operatorname{Ext}^1(X_1,C) = 0$. If $n = 1$, then the middle column is a desired exact sequence.

Let $n \ge 2$. We can easily check that Z_1 is $(n-1)$-C-torsionfree, and that so is X_1. According to Lemma 2.6, there is an exact sequence $0 \to X_1 \to C_1 \to Z_2 \to 0$

with $C_1 \in \operatorname{add} C$ and $\operatorname{Ext}^1(Z_2, C) = 0$. We make the pushout diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & C_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & C_0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & Z_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^{n-1}M \arrow[r] \arrow[d] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z_2 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Using the bottom row of the above diagram, we make the pushout diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^{n-1}M \arrow[r] \arrow[d] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z_2 \arrow[r] & 0 \\
 & \Omega^{n-2}M \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega^{n-2}M \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

From the first diagram, we immediately get $C\dim Y_2 < 2$, and $\operatorname{Ext}^2(Z_2, C) = 0$ because $\operatorname{Ext}^1(X_1, C) = 0 = \operatorname{Ext}^2(C_1, C)$. Hence $\operatorname{Ext}^i(Z_2, C) = 0$ for $i = 1, 2$, and we see from the middle row of the second diagram that $\operatorname{Ext}^i(X_2, C) = 0$ for $i = 1, 2$. Thus, if $n = 2$, then the middle column of the second diagram is a desired exact sequence.

Let $n \geq 3$. Then similar arguments to the above claims show that both Z_2 and X_2 are $(n-2)$-C-torsionfree, and Lemma 2.6 yields an exact sequence $0 \to X_2 \to C_2 \to Z_3 \to 0$ such that $\operatorname{Ext}^1(Z_3, C) = 0$. Similarly to the above, we make two pushout diagrams:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Y_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y_2 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^{n-2}M \arrow[r] \arrow[d] & Y_3 \arrow[r] \arrow[d] & Z_3 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

and

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^{n-2}M \arrow[r] \arrow[d] & Y_3 \arrow[r] \arrow[d] & Z_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{n-3} \arrow[r] \arrow[d] & X_3 \arrow[r] \arrow[d] & Z_3 \arrow[r] & 0 \\
 & \Omega^{n-3}M \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega^{n-3}M \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

If $n = 3$, then the middle column of the second diagram is a desired exact sequence. If $n \geq 4$, then iterating this procedure, we eventually obtain an exact sequence $0 \to Y_n \to X_n \to M \to 0$ such that $\mathrm{Ext}^i(X_n, C) = 0$ for $1 \leq i \leq n$ and $C\dim Y_n < n$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Let $0 \to Y \to X \to M \to 0$ be an n-C-spherical approximation of M. Since $C\dim Y < n$, there exists an exact sequence $0 \to C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} Y \to 0$. Put $Y_i = \mathrm{Im}\, d_i$ for each i. We have exact sequences $0 \to Y_{i+1} \to C_i \to Y_i \to 0$ and $0 \to \Omega^{i+1}M \to P_i \to \Omega^i M \to 0$ for each i. The following

pullback diagram is obtained:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \Omega M \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega M \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & L \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

The projectivity of P_0 shows that the middle row splits; we have an isomorphism $L \cong Y \oplus P_0$. Adding P_0 to the exact sequence $0 \to Y_1 \to C_0 \to Y \to 0$, we get an exact sequence $0 \to Y_1 \to C_0 \oplus P_0 \to Y \oplus P_0 \to 0$. Thus the following pullback diagram is obtained:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Y_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_0 \oplus P_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega M \arrow[r] \arrow[d] & Y \oplus P_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Applying a similar argument to the left column of the above diagram, we get exact sequences $0 \to X_{i+1} \to C_i \oplus P_i \to X_i \to 0$ for $0 \le i \le n-1$, where $X_0 = X$ and $X_n = \Omega^n M$. The assumption yields $\operatorname{Ext}^i(X_0, C) = 0 = \operatorname{Ext}^i(C_0 \oplus P_0, C)$ for $1 \le i \le n$, hence we have an exact sequence $0 \to X_0^\dagger \to (C_0 \oplus P_0)^\dagger \to X_1^\dagger \to 0$ and $\operatorname{Ext}^1(X_1, C) = 0$ for $1 \le i \le n-1$. Inductively, for each $0 \le i \le n-1$ an exact sequence $0 \to X_i^\dagger \to (C_i \oplus P_i)^\dagger \to X_{i+1}^\dagger \to 0$ is obtained and $\operatorname{Ext}^j(X_i, C) = 0$ for $1 \le j \le n-i$. We have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{X_1}"'] & C_0 \oplus P_0 \arrow[d, "\lambda_{C_0 \oplus P_0}"'] \\
0 \arrow[r] & X_1^{\dagger\dagger} \arrow[r] & (C_0 \oplus P_0)^{\dagger\dagger}
\end{tikzcd}$$

with exact rows. The assumption says that λ_R is injective, and we see that $\lambda_C = \lambda_{R^\dagger}$ is injective. Hence the map $\lambda_{C_0 \oplus P_0}$ is injective, and so is λ_{X_1}. Therefore X_1

is 1-C-torsionfree. If $n \geq 2$, then λ_R is an isomorphism, and so is λ_C. There is a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{X_2}"'] & C_1 \oplus P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{C_1 \oplus P_1}"'] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{X_1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2^{\dagger\dagger} \arrow[r] & (C_1 \oplus P_1)^{\dagger\dagger} \arrow[r] \arrow[d] & X_1^{\dagger\dagger} & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

with exact rows and columns, and λ_{X_2} is an isomorphism by the snake lemma. Hence X_2 is 2-C-torsionfree. If $n \geq 3$, then we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{X_3}"'] & C_2 \oplus P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{C_2 \oplus P_2}"', "\cong"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{X_2}"', "\cong"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & X_3^{\dagger\dagger} \arrow[r] & (C_2 \oplus P_2)^{\dagger\dagger} \arrow[r] & X_2^{\dagger\dagger} \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(X_3^{\dagger}, C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

with exact rows. From this diagram it follows that λ_{X_3} is an isomorphism and $\operatorname{Ext}^1(X_3^{\dagger}, C) = 0$, which means that X_3 is 3-C-torsionfree. Repeating a similar argument, we see that X_i is i-C-torsionfree for every $1 \leq i \leq n$. Therefore $\Omega^n M = X_n$ is n-C-torsionfree, and the proof of the theorem is completed. $\square$

Theorem 1.1 is a direct corollary of Theorem 2.7. Theorem 1.2 is also a corollary of Theorem 2.7:

Proof of Theorem 1.2. If $d = 0$, then $0 \to 0 \to M \xrightarrow{=} M \to 0$ is a desired exact sequence. Let $d \geq 1$. Then ω is d-semidualizing, and $\Omega^d M$ is d-ω-torsionfree. Hence Theorem 2.7 guarantees the existence of an exact sequence $0 \to Y \to X \to M \to 0$ such that X is d-ω-spherical and $\omega\dim Y < d$. Therefore X is maximal Cohen-Macaulay. On the other hand, noting that ω is an indecomposable R-module, we have an exact sequence $0 \to \omega^{l_{d-1}} \to \omega^{l_{d-2}} \to \cdots \to \omega^{l_0} \to Y \to 0$. Decomposing this into short exact sequences and noting that ω has finite injective dimension, one sees that Y also has finite injective dimension. $\square$

3. Modules whose nth syzygies are n-C-torsionfree

We begin with stating the following lemma.

Lemma 3.1. *Let M be an R-module.*

(1) *If R is 1-C-torsionfree, then so is ΩM.*
(2) *If R is 2-C-torsionfree, then for each $n \geq 2$ the map $\lambda_{\Omega^n M}$ is a split monomorphism and the cokernel is isomorphic to $\operatorname{Ext}^n(M, C)^{\dagger}$.*

For R-modules M, N, we define grade(M, N) by the infimum of integers i such that $\operatorname{Ext}^i(M, N) \neq 0$. One has $\operatorname{grade}(M, N) = \inf\{\operatorname{depth} N_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M\}$. We state a criterion for $\Omega^i M$ to be n-C-torsionfree for $1 \leq i \leq n$ in terms of grade, which can be shown by Lemma 3.1 and induction on n.

Proposition 3.2. *Let C be an R-module such that R is $(n-1)$-C-torsionfree.*

(1) *If* $\Omega^i M$ *is* i-C*-torsionfree for every* $1 \le i \le n$*, then* $\operatorname{grade}(\operatorname{Ext}^i(M,C),C) \ge i-1$ *for every* $1 \le i \le n$*.*

(2) *The converse also holds if* R *is* n-C*-torsionfree.*

Now we want to consider the difference between this condition and the condition that $\Omega^n M$ is n-C-torsionfree.

Lemma 3.3. *Let* C *be an* R*-module such that* λ_R *is an isomorphism and* $\operatorname{Ext}^i(C,C) = 0$ *for* $1 \le i \le n$*. If* M *is an* R*-module with* $C\dim M < \infty$*, then* $\operatorname{grade}(\operatorname{Ext}^i(M,C),C) \ge i$ *for any* $1 \le i \le n$*.*

Using this lemma, we can show that under the assumption that C is n-semidualizing, $\Omega^i M$ is i-C-torsionfree for $1 \le i \le n$ if and only if $\Omega^n M$ is n-C-torsionfree.

Proposition 3.4. *Let* C *be an* n*-semidualizing* R*-module. The following are equivalent for an* R*-module* M*:*

(1) $\Omega^n M$ *is* n-C*-torsionfree;*

(2) $\Omega^i M$ *is* i-C*-torsionfree for every* $1 \le i \le n$*.*

Our next aim is to prove the main result of this section. For this, we introduce the following lemma, which will often be used later.

Lemma 3.5. *Let* R *be a local ring and* r *a positive integer. Suppose that* λ_R *is an isomorphism and* $\operatorname{Ext}^i(C,C) = 0$ *for all* $1 \le i < r$*. Then the following hold.*

(1) $\operatorname{depth} R \ge r$ *if and only if* $\operatorname{depth} C \ge r$*.*

(2) *Let* R *be a Cohen-Macaulay local ring with* $\dim R < r$*. Then* C *is a maximal Cohen-Macaulay* R*-module.*

Now we can prove the main result of this section.

Theorem 3.6. *Suppose that* R *is* n-C*-torsionfree. Then the following are equivalent:*

(1) $\operatorname{id}_{R_\mathfrak{p}} C_\mathfrak{p} < \infty$ *for any* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ *with* $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \le n-2$*;*

(2) $\Omega^n M$ *is* n-C*-torsionfree for any* R*-module* M*.*

Proof. When $n = 1$, the assertion (1) holds because there is no prime ideal $\mathfrak{p}$ of R satisfying $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \le n-2$, and the assertion (2) holds by Lemma 3.1(1). In the following, we consider the case where $n \ge 2$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Fix an R-module M. Induction hypothesis shows that $\Omega^i M$ is i-C-torsionfree for $1 \le i \le n-1$. By Proposition 3.2, we have $\operatorname{grade}(\operatorname{Ext}^i(M,C),C) \ge i-1$ for $1 \le i \le n-1$, and it suffices to prove that the inequality $\operatorname{grade}(\operatorname{Ext}^n(M,C),C) \ge n-1$ holds. Let $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. If $\operatorname{depth} C_\mathfrak{p} \le n-2$, then $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \le n-2$ by Lemma 3.5(1). The assumption says that $\operatorname{id}_{R_\mathfrak{p}} C_\mathfrak{p} < \infty$, and $\operatorname{id}_{R_\mathfrak{p}} C_\mathfrak{p} = \operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \le n-2$. Therefore $\operatorname{Ext}^n_R(M,C)_\mathfrak{p} \cong \operatorname{Ext}^n_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, C_\mathfrak{p}) = 0$. Thus we see that $\operatorname{grade}(\operatorname{Ext}^n(M,C),C) \ge n-1$, as desired.

(2) $\Rightarrow$ (1): When $n = 2$, Lemma 3.1(2) implies that $\operatorname{Ext}^2_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, C_\mathfrak{p}) = 0$ for all R-modules M and $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} C$, because $\operatorname{Ass}(\operatorname{Ext}^2_R(M,C)^\dagger) = \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^2_R(M,C) \cap \operatorname{Ass} C$. The isomorphism $\lambda_R : R \to \operatorname{Hom}(C,C)$ shows that $\operatorname{Ass} C$ coincides with $\operatorname{Ass} R$. Hence, setting $M = \Omega^i_R(R/\mathfrak{p})$, one has $\operatorname{Ext}^{i+2}_{R_\mathfrak{p}}(\kappa(\mathfrak{p}), C_\mathfrak{p}) \cong \operatorname{Ext}^2_{R_\mathfrak{p}}((\Omega^i_R(R/\mathfrak{p}))_\mathfrak{p}, C_\mathfrak{p}) = 0$ for any $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$ and any $i > 0$. Therefore $\operatorname{id}_{R_\mathfrak{p}} C_\mathfrak{p} < \infty$ for $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ with $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} = 0$.

Let $n \geq 3$. Fix an R-module M. We have an exact sequence $0 \to \Omega^{n+1}M \to P \to \Omega^n M \to 0$ such that P is a projective R-module. From this we get another exact sequence $0 \to (\Omega^n M)^\dagger \to P^\dagger \to (\Omega^{n+1}M)^\dagger \to \mathrm{Ext}^{n+1}(M,C) \to 0$. Decompose this into short exact sequences:

$$(3.6.1) \qquad \begin{cases} 0 \to (\Omega^n M)^\dagger \to P^\dagger \to N \to 0, \\ 0 \to N \to (\Omega^{n+1}M)^\dagger \to \mathrm{Ext}^{n+1}(M,C) \to 0. \end{cases}$$

Note from the assumption that both $\Omega^n M$ and $\Omega^{n+1}M = \Omega^n(\Omega M)$ are n-C-torsionfree. Since R is n-C-torsionfree, we see from the first sequence in (3.6.1) that there is a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^{n+1}M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \Omega^n M & \longrightarrow & 0 & & \\ & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\lambda_P}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\lambda_{\Omega^n M}}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & N^\dagger & \longrightarrow & P^{\dagger\dagger} & \longrightarrow & (\Omega^n M)^{\dagger\dagger} & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(N,C) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

with exact rows, and $\mathrm{Ext}^i(N,C) = 0$ for $2 \leq i \leq n-2$. This diagram shows that α is an isomorphism and $\mathrm{Ext}^1(N,C) = 0$. The second sequence in (3.6.1) gives an exact sequence $0 \to \mathrm{Ext}^{n+1}(M,C)^\dagger \to (\Omega^{n+1}M)^{\dagger\dagger} \xrightarrow{\beta} N^\dagger \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Ext}^{n+1}(M,C),C) \to 0$ and $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{Ext}^{n+1}(M,C),C) = 0$ for $2 \leq i \leq n-2$. Since the diagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n M & = & \Omega^n M \\ {\scriptstyle\lambda_{\Omega^n M}}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow{\scriptstyle\cong} \\ (\Omega^n M)^{\dagger\dagger} & \xrightarrow{\beta} & N^\dagger \end{array}$$

commutes, the map β is an isomorphism, and $\mathrm{Ext}^{n+1}(M,C)^\dagger = 0 = \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Ext}^{n+1}(M,C),C)$. Thus we have $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{Ext}^{n+1}(M,C),C) = 0$ for every $i \leq n-2$, which means that the inequality $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^{n+1}(M,C),C) \geq n-1$ holds. Therefore, if $\mathfrak{p}$ is a prime ideal of R with $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \leq n-2$, then $\operatorname{depth} C_\mathfrak{p} \leq n-2$ by Lemma 3.5(1), and it follows that $\mathfrak{p}$ does not belong to $\operatorname{Supp}\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,C)$, i.e., $\mathrm{Ext}_{R_\mathfrak{p}}^{n+1}(M_\mathfrak{p},C_\mathfrak{p}) = 0$. Putting $M = \Omega_R^i(R/\mathfrak{p})$, we obtain $\mathrm{Ext}_{R_\mathfrak{p}}^{n+1+i}(\kappa(\mathfrak{p}),C_\mathfrak{p}) \cong \mathrm{Ext}_{R_\mathfrak{p}}^{n+1}((\Omega_R^i(R/\mathfrak{p}))_\mathfrak{p},C_\mathfrak{p}) = 0$ for any $i > 0$. This implies that $\mathrm{id}_{R_\mathfrak{p}} C_\mathfrak{p} < \infty$, and the proof is completed. $\square$

The lemma below says that over a Gorenstein local ring of dimension $d \geq 2$, any n-semidualizing module is free for $n \geq d$.

Lemma 3.7. *Let $(R,\mathfrak{m},k)$ be a d-dimensional Gorenstein local ring. If λ_R is an isomorphism and $\mathrm{Ext}^i(C,C) = 0$ for $1 \leq i \leq d$, then $C \cong R$.*

Applying the above lemma, we can get a sufficient condition for R and C to satisfy Theorem 3.6(1).

Proposition 3.8. *Suppose that R is n-C-torsionfree and that $R_\mathfrak{p}$ is Gorenstein for any $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ with $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \leq n-2$. Then $\mathrm{id}_{R_\mathfrak{p}} C_\mathfrak{p} < \infty$ for any $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ with $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \leq n-2$. (Hence $\Omega^n M$ is n-C-torsionfree for any R-module M.)*

We have studied the case where the nth syzygies of all R-modules are n-C-torsionfree. As the last result of this paper, we give a result concerning when the nth syzygy of a given module is n-C-torsionfree.

Proposition 3.9. *Let M be an R-module, and let C be an R-module such that R is n-C-torsionfree. Suppose that* $\mathrm{pd}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} < \infty$ *for any* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ *with* $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \leq n-2$. *Then $\Omega^n M$ is n-C-torsionfree.*

This proposition can be proved by induction on n. Apply Proposition 3.2, Lemmas 3.1(1) and 3.5(1).

REFERENCES

[1] ARAYA, T.; TAKAHASHI, R.; YOSHINO, Y. Homological invariants associated to semi-dualizing bimodules. *J. Math. Kyoto Univ.*, to appear.

[2] AUSLANDER, M.; BRIDGER, M. Stable module theory. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 94 *American Mathematical Society, Providence, R.I.* 1969.

[3] AUSLANDER, M.; BUCHWEITZ, R.-O. The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations. *Mem. Soc. Math. France (N.S.)* No. 38 (1989), 5–37.

[4] AUSLANDER, M.; REITEN, I. Applications of contravariantly finite subcategories. *Adv. Math.* **86** (1991), no. 1, 111–152.

[5] EVANS, E. G.; GRIFFITH, P. Syzygies. London Mathematical Society Lecture Note Series, 106. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1985.

[6] IYAMA, O. Higher dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories. preprint (2004), `arXiv:math.RT/0407052`.

[7] TAKAHASHI, R. A common generalization of spherical approximations and Cohen-Macaulay approximations. Preprint (2005).

A note on a^*-invariant formulas

居相真一郎（北海道教育大学）

1 序

以下，$(A, \mathfrak{m})$ はNoether局所環でその剰余体は無限体とする．I $(\subsetneq A)$ をAのイデアルとし，そのRees代数$\mathrm{R}(I) := A[It]$ $(\subseteq A[t])$ を考察する．ここでtはA上の不定元を表す．Rees代数がGorensteinであるからといって基礎環AもGorensteinになるとは限らないが，本稿では如何なる時に基礎環がGorensteinになるかという問いを考えてみたい．結果を述べるためにいくつかの記号を用意する．$\ell = \lambda(I) := \dim \mathrm{R}(I)/\mathfrak{m}\mathrm{R}(I)$ とおき，Iのanalytic spreadと呼ぶ．AのイデアルJをIのminimal reductionとし，Jに関するIのreduction number $\mathrm{r}_J(I)$ を簡単のためにrで表す．このとき本稿で述べたい主結果は次の通りである．

定理 1.1. $\mathrm{grade}\, I \geq 2$ であって $\mathrm{R}(I)$ が *Gorenstein*環ならば次の条件は同値である．

(1) Aは*Gorenstein*環である．

(2) Aが*Serre*の条件 (S_ℓ) を満たし，$r \leq \ell - 2$ である．

一般に$\ell \leq \dim A$であって，もしRees代数$\mathrm{R}(I)$がCohen-Macaulayならば$r \leq \ell - 1$となっている．従って上の定理は，もちろん$\ell = \dim A$のときは意味をなさないが，基礎環がGorensteinでない場合に，次元とanalytic spreadとの差が"うまい具合に大きい"イデアルについてreduction numberが最大値$\ell - 1$に達しないとき，そのRees代数はGorensteinにならないと解釈することが出来る．

定理の証明は表題にあるようなa^*-invariant formulaを考察することによって得られる．多くの人々がa^*-（もしくはa-）invariant formulaを研究しているが，本稿の第2節に於いて，この定理を導くような新しいa^*-invariant formulaを紹介したい．定理の証明も第2節で与えられる．

定理の中の条件$r \leq \ell - 2$は必要である．実は[V], 4.1に於いてこの条件を除いて上の結果が報告されているが反例が構成できる．すなわちSerreの条件(S_2)を満たすある3次元non-Gorenstein環の中でRees代数がGorensteinであり$\ell = 2$となっているイデアルが存在する．このときreduction numberはもちろん最大値$\ell - 1 = 1$となっている．この反例を次に述べて第1節を閉じよう．

例 1.2. 標数2の体k上の7変数べき級数環$k[[X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4]]$を$X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3, Y_1Y_2-X_3Y_4, Y_2Y_3-X_1Y_4, Y_1Y_3-X_2Y_4, Y_1^2, Y_2^2, Y_3^2, Y_4^2, Y_1Y_4, Y_2Y_4, Y_3Y_4$で生成されるイデアルで割った剰余環$A$を考える．[I]に於いてこの局所環$A$は極大イデアルの*Rees*代数が*Gorenstein*になることが示されている．さて，Aのイデアル$I=(X_2,X_3,Y_1)A$を見付けてくると，この*Rees*代数$\mathrm{R}(I)$は*Gorenstein*である．しかしながら基礎環Aは*Cohen-Macaulay*ではなく，さらに$\ell=2$でAは*Serre*の条件(S_2)を満たしている．

2 a^*-invariant formulaについての注意

この節の目的は定理の証明を行うことである．そのためにa^*-invariantに関するある等式を紹介する．まずは記号を準備したい．以下この節では，$S=\bigoplus_{i\geq 0}S_i$をNoether次数環でS_0-代数としてS_1で生成されるものとし，$(S_0,\mathfrak{n})$は局所環でその剰余体は無限体であると仮定する．$\mathfrak{M}=\mathfrak{n}S+S_+$，$\ell=\ell(S):=\dim S/\mathfrak{n}S$とおく．ただし$S_+=\bigoplus_{i>0}S_i$である．$S$のイデアル$Z$を1次の元で生成される$S_+$のminimal reductionとし，$r=\mathrm{r}_Z(S_+)$とおく．さらに$\mathrm{r}(S):=\min\{\mathrm{r}_L(S_+)\mid L$は1次の元で生成される$S_+$のminimal reduction$\}$と定める．$S$の斉次イデアル$N$に対して$[\mathrm{H}_N^i(*)]_j$によって$N$に関する$i$番目の次数付きlocal cohomology functorのj次の斉次部分を表す．$i\in\mathbb{Z}$に対してa_i-invariantとa^*-invariantを

$$
\begin{aligned}
&a_i(S):=\max\{n\in\mathbb{Z}\mid[\mathrm{H}_{\mathfrak{M}}^i(S)]_n\neq(0)\},\\
&a^*(S):=\max\{a_i(S)\mid i\in\mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

と定義する．また$a(S)$によって通常のa-invariantを表す．つまり$a(S)=a_{\dim S}(S)$となっている．最後に$\mathcal{A}=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}S_0\mid\ell(S_\mathfrak{p})=\dim S_\mathfrak{p}\}$とおく．これら記号の下に本節での主結果が次のように記述される．

命題 2.1. 任意のS_0の素イデアル$\mathfrak{p}$に対して$\operatorname{depth}S_\mathfrak{p}\geq\min\{\dim S_\mathfrak{p},\ell\}$が成り立つならば等式

$$
\begin{aligned}
a^*(S)&=\max\{\mathrm{r}(S_\mathfrak{p})-\ell(S_\mathfrak{p})\mid\mathfrak{p}\in\mathcal{A},\dim S_\mathfrak{p}<\ell\}\cup\{r-\ell\}\\
&=\max\{\mathrm{r}(S_\mathfrak{p})-\ell(S_\mathfrak{p})\mid\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}S_0,\dim S_\mathfrak{p}<\ell\}\cup\{r-\ell\}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．さらにSが*quasi-unmixed*であれば等式

$$a^*(S)=\max\{a(S),r-\ell\}$$

が成り立つ．

上の命題の証明の前にこれを使って先に定理1.1の証明をしよう．使用するのは最後の等式のみである．ここでSが$\mathrm{R}(I)$や$\mathrm{G}(I):=\mathrm{R}(I)/I\mathrm{R}(I)$の時には，$Z=(Jt)S$とおくと$Z$は$S_+$のminimal reductionになっていて$\mathrm{r}_J(I)=\mathrm{r}_Z(S_+)$で$\lambda(I)=\ell(S)$であることに注意してほしい．

定理 1.1 の証明. $S = \mathrm{G}(I)$ とおく．まず A が Serre の条件 (S_ℓ) を満たし，$r \leq \ell - 2$ であるとせよ．Rees 代数 $\mathrm{R}(I)$ は Cohen-Macaulay であるから S は quasi-unmixed である（例えば [HIO] の 18.23 と 18.24 を見よ）．I を含む A の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ を取る．$\mathrm{R}(I_\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay 環なので [TI] によると $i < \dim A_\mathfrak{p}$ ならば $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{p}\mathrm{G}(I_\mathfrak{p})+\mathrm{G}(I_\mathfrak{p})_+}(\mathrm{G}(I_\mathfrak{p})) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p})$ が成り立つ．よって $\operatorname{depth} \mathrm{G}(I_\mathfrak{p}) = \operatorname{depth} A_\mathfrak{p}$ である．さらに A は Serre の条件 (S_ℓ) を満たすので $\operatorname{depth} A_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim A_\mathfrak{p}, \ell\}$ が成り立つ．よって $S_\mathfrak{p} = \mathrm{G}(I_\mathfrak{p})$ で $\dim S_\mathfrak{p} = \dim A_\mathfrak{p}$ であることに注意すれば $\operatorname{depth} S_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim S_\mathfrak{p}, \ell\}$ がわかる．このとき命題 2.1 により $a^*(S) = \max\{a(S), r - \ell\}$ を得るが，$\mathrm{R}(I)$ は Gorenstein 環なので [I] によると $a(S) = -2$ であって，また仮定により $r \leq \ell - 2$ であるから結局 $a^*(S) = -2$ となる．ところが [TI] により $i < \dim A$ とすると $a_i(S) = -1$ かもしくは $-\infty$ なので $a_i(S) = -\infty$ でなくてはならない．よって S は Cohen-Macaulay 環である．このとき A は Cohen-Macaulay 環であるが [I] によると qusai-Gorenstein でもあるので，A は Gorenstein 環となる．逆に A は Gorenstein 環とすると S は Gorenstein 環であり $r - \ell \leq a(S) = -2$ が成り立っている． □

命題 2.1 を証明するためにもう一つ記号を用意したい．$i \in \mathbb{Z}$ に対して $\underline{a}_i(S) := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^i_{S_+}(S)]_n \neq (0)\}$ と定め $\underline{a}_i$-invariant と呼ぶ．次の補題が証明の鍵となっている．

補題 2.2. 整数 j は $j > \underline{a}_\ell(S)$ なるものとする．任意の S_0 の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $\operatorname{depth} S_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim S_\mathfrak{p}, \ell\}$ が成り立つと仮定する．このとき，任意の S_0 の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $[\mathrm{H}^{\dim S_\mathfrak{p}}_{[S_\mathfrak{p}]_+}(S_\mathfrak{p})]_j = (0)$ であるならば，任意の整数 i で $i \geq \ell$ なるものと任意の S のイデアル N で S_+ を含むものに対して $[\mathrm{H}^i_N(S)]_j = (0)$ が成り立つ．

証明. 整数 j は $j > \underline{a}_\ell(S)$ なるものとし，任意の S_0 の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $\operatorname{depth} S_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim S_\mathfrak{p}, \ell\}$ であってかつ $[\mathrm{H}^{\dim S_\mathfrak{p}}_{[S_\mathfrak{p}]_+}(S_\mathfrak{p})]_j = (0)$ であると仮定せよ．先ずは次の主張から示そう．

主張 2.3. 任意の S_0 の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $j > \underline{a}_{\ell(S_\mathfrak{p})}(S_\mathfrak{p})$ が成り立つ．

主張の証明. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S_0$ とする．$[\mathrm{H}^{\ell(S_\mathfrak{p})}_{[S_\mathfrak{p}]_+}(S_\mathfrak{p})]_j = (0)$ を示したい．さて，$\ell \geq \ell(I_\mathfrak{p})$ となることに注意してほしい．まず $\ell = \ell(S_\mathfrak{p})$ のときは local cohomology を取る操作と局所化することは可換であるということに注意すれば明らかである．$\ell > \ell(I_\mathfrak{p})$ とせよ．[JK], 2.1 (i) によれば任意の $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S_0$ で $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ なるものに対して $[\mathrm{H}^{\ell(S_\mathfrak{q})}_{\mathfrak{q}S_\mathfrak{q}+[S_\mathfrak{q}]_+}(S_\mathfrak{q})]_j = (0)$ を示せば十分である．$\dim S_\mathfrak{q} \geq \ell$ の場合は深さの仮定から $\operatorname{depth} S_\mathfrak{q} \geq \ell$ であって $\ell > \ell(I_\mathfrak{p}) \geq \ell(I_\mathfrak{q})$ なので正しい．$\dim S_\mathfrak{q} < \ell$ の場合は深さの仮定により $S_\mathfrak{q}$ は Cohen-Macaulay 環なので $\ell(S_\mathfrak{q}) = \dim S_\mathfrak{q}$ としてよい．すると [JK], 2.1 (iii) が使えて $[\mathrm{H}^{\ell(S_\mathfrak{q})}_{\mathfrak{q}S_\mathfrak{q}+[S_\mathfrak{q}]_+}(S_\mathfrak{q})]_j = (0)$ を得る．よって主張が示された． □

さて，$N_0 = N \cap S_0$ とおく．N_0 の極小生成系の個数 $\mu(N_0)$ についての帰納法で $[\mathrm{H}^i_N(S)]_j = (0)$ が成り立つことを示そう．$\alpha = \mu(N_0)$ とおく．$\alpha = 0$ のときは $N = S_+$ であって $i = \ell$ の場合だけ考えればよく，$j > \underline{a}_\ell(S)$ であるから成り立つことがわかる．$\alpha > 0$ として $\alpha - 1$ まで正しいとする．もし $\sqrt{N} = \sqrt{S_+}$ ならば $\alpha = 0$ のときとして証明されているので，N_0 はべき零ではないとしてよい．よって $c \in N_0$ を $c \notin \sqrt{(0)} \cup \mathfrak{n}N_0$ となるように取れる．そして S_0 のイデアル X を $N_0 = X + cS_0$ で $\mu(X) < \alpha$ となるように選び，$L = XS + S_+$ とおく．すると [B], 3.9 により，

$$\cdots \to [\mathrm{H}^{i-1}_{L_c}(S_c)]_j \to [\mathrm{H}^i_N(S)]_j \to [\mathrm{H}^i_L(S)]_j \to \cdots$$

という完全列が存在する．整数 i で $i \geq \ell$ なるものを固定せよ．帰納法の仮定により $[\mathrm{H}^i_L(S)]_j = (0)$ であるので，$[\mathrm{H}^{i-1}_{L_c}(S_c)]_j = (0)$ を示せば十分である．これは任意の S_0 の素イデアル $\mathfrak{p}$ で $c \notin \mathfrak{p}$ なるものに対して $[\mathrm{H}^{i-1}_{L_\mathfrak{p}}(S_\mathfrak{p})]_j = (0)$ が成り立つことを示せばよいが，主張 2.3 と $\mu(X_\mathfrak{p}) < \alpha$ であることから，もし $i-1 \geq \ell$ のときは帰納法の仮定により成り立つ．従って $[\mathrm{H}^{\ell-1}_{L_\mathfrak{p}}(S_\mathfrak{p})]_j = (0)$ を証明しなければならない．これは [JK], 2.1 (i) によると任意の $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S_0$ で $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ なるものに対して $[\mathrm{H}^{\ell-1}_{\mathfrak{q}S_\mathfrak{q}+[S_\mathfrak{q}]_+}(S_\mathfrak{q})]_j = (0)$ を示せば十分である．$\dim S_\mathfrak{q} \geq \ell$ の場合は深さの仮定から $\operatorname{depth} S_\mathfrak{q} \geq \ell$ なのでいうことなし．$\dim S_\mathfrak{q} < \ell$ の場合は深さの仮定により $S_\mathfrak{q}$ は Cohen-Macaulay 環なので $\ell - 1 = \dim S_\mathfrak{q}$ としてよい．このときには [JK], 2.1 (iii) が使えて証明が終了する．□

命題 2.1 の証明． 補題 2.2 がいっていることは不等式

$$a^*(S) \leq \max\{\underline{a}_{\ell(S_\mathfrak{p})}(S_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{A}\} \cup \{\underline{a}_\ell(S)\}$$

が成り立つということである．$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S_0$ とする．local cohomology を取るという操作と局所化することは可換であるので $\underline{a}_\ell(S_\mathfrak{p}) \leq \underline{a}_\ell(S)$ であって，[T1], 3.2 によると $\underline{a}_\ell(S) \leq \mathrm{r}(S) - \ell(S)$ である．このことにより不等式

$$\begin{aligned}
&\max\{\underline{a}_{\ell(S_\mathfrak{p})}(S_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{A}\} \cup \{\underline{a}_\ell(S)\} \\
&\qquad \leq \ \max\{\mathrm{r}(S_\mathfrak{p}) - \ell(S_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{A}, \dim S_\mathfrak{p} < \ell\} \cup \{r - \ell\} \\
&\qquad \leq \ \max\{\mathrm{r}(S_\mathfrak{p}) - \ell(S_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S_0, \dim S_\mathfrak{p} < \ell\} \cup \{r - \ell\}
\end{aligned}$$

を得る．[T2], 2.2 によると $\mathrm{r}(S) - \ell(S) \leq a^*(S)$ であり，また一般に $a^*(S_\mathfrak{p}) \leq a^*(S)$ が成り立つので，不等式

$$\max\{\mathrm{r}(S_\mathfrak{p}) - \ell(S_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S_0, \dim S_\mathfrak{p} < \ell\} \cup \{r - \ell\} \leq a^*(S)$$

が成り立つことがわかる．これらの不等式から命題の中の 1 番目と 2 番目の等式が得られる．最後の等式を証明しよう．$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S_0$ とする．$\dim S_\mathfrak{p} <$

ℓ のときには深さについての仮定により $S_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay 環であるので $\mathrm{r}(S_{\mathfrak{p}}) - \ell(S_{\mathfrak{p}}) \leq a(S_{\mathfrak{p}})$ が成り立つ．よって不等式

$$\begin{aligned} &\max\{\mathrm{r}(S_{\mathfrak{p}}) - \ell(S_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S_0, \dim S_{\mathfrak{p}} < \ell\} \cup \{r - \ell\} \\ &\qquad \leq \max\{a(S_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S_0, \dim S_{\mathfrak{p}} < \ell\} \cup \{r - \ell\} \end{aligned}$$

を得る．いま S は quasi-unmixed なので [HHK], 2.3 によると $a(S_{\mathfrak{p}}) \leq a(S)$ が成り立つ．従って

$$\max\{a(S_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S_0, \dim S_{\mathfrak{p}} < \ell\} \cup \{r - \ell\} \leq \max\{a(S), r - \ell\}$$

である．[T2], 2.2 によると $r - \ell \leq a^*(S)$ であるから $\max\{a(S), r - \ell\} \leq a^*(S)$ となっている．これらの不等式から最後の等式が得られる． $\square$

参考文献

[B] M. Brodmann, Einige Ergebnisse aus der lokalen Kohomologietheorie und ihre Anwedung, Osnabüecker Schriften zur Mathematik 5, 1983.

[HHK] M. Herrmann, E. Hyry, T. Korb, On a-invariant formulas, J. Algebra 227 (2000), 254-267.

[HIO] M. Herrmann, S. Ikeda, and U. Orbanz, Equimultiplicity and blowing up (with an appendix by B. Moonen), Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[I] S. Ikeda, On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings, Nagoya Math. J. 102 (1986), 135-154.

[JK] B. Johnston and D. Katz, Castelnuvo regularity and graded rings associated to an ideal, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), 727-734.

[T1] N. V. Trung, Reduction exponent and degree bounds for the defining equations of graded rings, Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987), 229-236.

[T2] N. V. Trung, The largest non-vanishing degree of graded local cohomology modules, J. Algebra 215 (1999), 481-499.

[TI] N. V. Trung and S. Ikeda, When is the Rees algebra Cohen-Macaulay?, Comm. Algebra 17 (1989), 2893-2922.

[V] D. Q. Viêt, A note on local reduction numbers and a^*-invariants of graded rings, Tokyo J. Math. 27 (2004), 113-124.

On a lower bound of the Cohen-Macaulay type and the Cohen-Macaulay property of modules

櫻井 秀人（明治大学大学院理工学研究科）

1 序文

以下，$(A,\mathfrak{m})$ によって極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ Noether 局所環を表し，$k = A/\mathfrak{m}$ とする．また, M を有限生成 A-加群とし, $d = \dim_A M$ とする．各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\mathrm{s}_i(M) = \dim_k((0) :_{\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M)} \mathfrak{m})$$

と定める．但し, $\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M)$ は極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する A-加群 M の局所コホモロジー加群を表し, $\dim_k(*)$ で k-ベクトル空間としての次元を表す．$\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M)$ は Artinian であるから, $0 \leq \mathrm{s}_i(M) \in \mathbb{Z}$ であり, $\mathrm{s}_i(M) = 0$ である必要十分条件は, $\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M) = (0)$ である．また, $\mathrm{s}_0(M) = \dim_k((0) :_M \mathfrak{m})$ である．ここで,

$$\mathrm{r}(M) = \sup \mathrm{s}_0(M/QM)$$

と定め, M の **Cohen-Macaulay 型**と呼ぶ (*cf.* [GSu])．但し, Q は M の巴系イデアル全てを動く．本報告の目的は, 一般の加群 M に関する Cohen-Macaulay 型 $\mathrm{r}(M)$ に対し, ある下限を与え, 併せて加群 M の Cohen-Macaulay 性について考察することにある．

この Cohen-Macaulay 型 $\mathrm{r}(M)$ については, 論文 [GSu] において詳しく研究されており, 特に A-加群 M が FLC を持つとき，即ち局所コホモロジー加群 $\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M)$ $(i \neq d)$ がすべて有限生成 A-加群であるとき, $\mathrm{r}(M)$ について次の評価が与えられている．

定理 1.1 ([GSu] Theorem (2.1), (2.3), (2.5)). *M は FLC を持つとする．このとき, 次の不等式が成り立つ.*

$$\mathrm{s}(M) := \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \mathrm{s}_i(M) \leq \mathrm{r}(M) \leq \mathrm{t}(M) := \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} \ell_A(\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M)) + \mathrm{s}_d(M).$$

もしも M が quasi-Buchsbaum 即ち，$\mathfrak{m}\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M) = (0)$ $(i \neq d)$ なら，等式 $\mathrm{r}(M) = \mathrm{s}(M) = \mathrm{t}(M)$ が成り立つ.

しかし, 一般の加群の場合には, 不変量 $\mathrm{s}(M) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \mathrm{s}_i(M)$ は必ずしも Cohen-Macaulay 型 $\mathrm{r}(M)$ 以下であるとは限らない．

例 1.2. kを体とし, $d \geq 2$, $e > 0$を整数とする. $R = k[[X_1, X_2, \ldots, X_d, Y]]$を$k$上の$d{+}1$変数形式的べき級数環とし, $A = R/(X_1, X_2, \ldots, X_d) \cap (Y^e)$とすると, $\dim A = d$かつ, $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(A) = e$である. また, $\mathrm{s}_0(A) = 0$, $\mathrm{s}_1(A) = 1$であり, $\mathrm{s}_i(A) = 0$ $(2 \leq i \leq d-1)$であって, $\mathrm{s}_d(A) = 1$である. したがって, $\mathrm{s}(A) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \mathrm{s}_i(A) = d+1$である. さらに, この環$A$に対しては, $\mathrm{r}(A) = 2 < \mathrm{s}(A) = d+1$であることが確かめられる. また, この例では$\sum_{i=0}^{d} \mathrm{s}_i(A) = 2 = \mathrm{r}(A)$である.

では一般の加群Mの場合には, Cohen-Macaulay 型$\mathrm{r}(M)$に対して, どのような下限が与えられるのであろうか. 本報告の主結果は次の定理1.3である.

定理 1.3. Mを有限生成A-加群とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\sum_{i=0}^{d} \mathrm{s}_i(M) \leq \mathrm{r}(M).$$

この下限は, MがFLCを持つときと比べるとかなり小さい値を与えているように見えるが, 上の例1.2は今回の主定理1.3の下限がbest possibleであることを示している. また, この主定理1.3の系として, MのCohen-Macaulay性に関する次の結果が得られる.

系 1.4. Mを有限生成A-加群とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 任意の整数$0 \leq i \leq d-1$に対し, $\mathrm{s}_i(M) < \mathrm{r}(M)$である.

(2) $\mathrm{s}_d(M) \leq \mathrm{r}(M)$であって, 等号が成り立つ必要十分条件は, Mが*Cohen-Macaulay*であることである.

(3) ([*NR*]) $\mathrm{r}(M) = 1$ならば, Mは*Cohen-Macaulay*である.

(4) $d > 0$とし, $\mathrm{Ass}_{\widehat{A}} \widehat{M} \subseteq \mathrm{Assh}_{\widehat{A}} \widehat{M} \cup \{\mathfrak{m}\widehat{A}\}$とする. 但し, $\widehat{*}$は$\mathfrak{m}$-進完備化を表す. このとき, 次が成り立つ.

$$\mathrm{s}_0(M) + \sum_{i=1}^{d-1} 2\,\mathrm{s}_i(M) + \mathrm{s}_d(M) \leq \mathrm{r}(M).$$

(5) ([*K*]) $d > 0$とし, $\mathrm{Ass}_{\widehat{A}} \widehat{M} \subseteq \mathrm{Assh}_{\widehat{A}} \widehat{M} \cup \{\mathfrak{m}\widehat{A}\}$とする. このとき, もし$\mathrm{r}(M) = 2$ならば, $M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)$は*Cohen-Macaulay*である.

一般に, Cohen-Macaulayとは限らない加群Mに対するCohen-Macaulay型というものの定義はいくつかの候補がある. 例えば, $\mathrm{s}_d(M)$が挙げられる. また, $u = \mathrm{depth}_A M$としたとき, $\mathrm{s}_u(M)$のことをCohen-Macaulay型と呼ぶ人もいるであろう. 上の系1.4の(1)及び(2)は, それらの量と本報告でのCohen-Macaulay型$\mathrm{r}(M)$との大小関係を示すものであり, それらの量と$\mathrm{r}(M)$が一致するのはMがCohen-Macaulayのときに限るということを示すものである. また, 系1.4の(3)及び(5)は, Cohen-Macaulay型$\mathrm{r}(M)$が小さいときに知られている結果が, 本報告の主定理1.3から容易に導かれることを示すものである.

以下, 第2節において本報告の主結果である定理1.3の証明を述べる. また, 第3節において系1.4の証明を述べることにする.

2 定理 1.3 の証明

本節では, 定理 1.3 の証明を述べる.

以下, $(A,\mathfrak{m})$ によって極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ Noether 局所環を表し, M を有限生成 A-加群とし, $d = \dim_A M$ とする. 証明の鍵となるのは次の二つの補題である.

補題 2.1. ある整数 $c > 0$ が存在し, M の任意の巴系イデアル $Q \subseteq \mathfrak{m}^c$ に対し,

$$\mathrm{s}_0(M/QM) = \mathrm{s}_0(M) + \mathrm{s}_0(M/(QM + \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)))$$

が成り立つ.

補題 2.2. $\mathrm{depth}_A M > 0$ とする. このとき, ある整数 $\ell > 0$ が存在し, 任意の M-正則元 $a \in \mathfrak{m}^\ell$ に対し, 次のような長完全列が存在する.

$$\cdots \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \xrightarrow{\widehat{a}} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/aM) \xrightarrow{f_i} \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M) \xrightarrow{\widehat{a}} \cdots \qquad (exact)$$

であって, かつ任意の整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対し, 写像 $f_i : \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/aM) \to \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)$ から導かれる *socle* の間の写像が全射である. したがって, 特に

$$\mathrm{s}_i(M/aM) \geq \mathrm{s}_{i+1}(M) \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ.

この二つの補題は定理 1.3 の証明において鍵となるものであるが, ページ数の都合上, 本報告ではその証明を割愛させて頂く. 詳しくは, 論文 [GSa] を参照して頂きたい.

では, 定理 1.3 の証明をしたいと思うが, ここでは定理 1.3 を次の主張にまで拡張した形で証明しよう.

定理 2.3. ある整数 $k > 0$ が存在し, 任意の整数 $n \geq k$ に対し, M のある巴系イデアル $Q \subseteq \mathfrak{m}^n$ が存在し,

$$\mathrm{s}_0(M/QM) \geq \sum_{i=0}^{d} \mathrm{s}_i(M)$$

が成り立つ. よって, 特に

$$\mathrm{r}(M) \geq \sum_{i=0}^{d} \mathrm{s}_i(M)$$

である.

定理 2.3 の証明. $d = \dim M > 0$ としてよい. $d > 0$ に関する帰納法で証明する. $d = 1$ のとき, 補題 2.1 の $c > 0$ が求める整数である. 実際, 任意の整数 $n \geq c$ をとる. $a \in \mathfrak{m}^n$ を M の巴系とすると, 補題 2.1 より

$$\mathrm{s}_0(M/aM) = \mathrm{s}_0(M) + \mathrm{s}_0(M/(aM + \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M))) \tag{1}$$

が成り立つ．ここで, $d=1$ より $M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)$ は Cohen-Macaulay であって, かつ a は $M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)$ の巴系でもあるから,

$$\mathrm{s}_0(M/(aM+\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)))=\mathrm{r}(M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M))=\mathrm{s}_1(M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M))=\mathrm{s}_1(M) \tag{2}$$

が成り立つ．したがって, 等式 (1) 及び (2) より

$$\mathrm{s}_0(M/aM)=\mathrm{s}_0(M)+\mathrm{s}_0(M/(aM+\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)))=\mathrm{s}_0(M)+\mathrm{s}_1(M)$$

である．よって, $d=1$ のとき主張が正しい．

$d\geq 2$ として, $d-1$ まで主張が正しいと仮定する．

Case 1 $\operatorname{depth}_A M>0$ の場合：このとき, 補題 2.2 の $\ell>0$ が求める整数である．実際, 任意の整数 $n\geq\ell$ をとる．$a\in\mathfrak{m}^n$ を M-正則元とすると, 補題 2.2 より

$$\mathrm{s}_i(M/aM)\geq\mathrm{s}_{i+1}(M) \qquad (i\in\mathbb{Z}) \tag{3}$$

が成り立つ．ここで, 帰納法の仮定より有限生成 A-加群 M/aM に対し, 定理 2.3 の主張を満たす整数 $k'>0$ が存在する．つまり, $n'=\max\{n,k'\}$ とすると, M/aM のある巴系イデアル $Q'=(b_1,\ldots,b_{d-1})\subseteq\mathfrak{m}^{n'}\subseteq\mathfrak{m}^n$ が存在し,

$$\mathrm{s}_0(M/(aM+Q'M))\geq\sum_{i=0}^{d-1}\mathrm{s}_i(M/aM) \tag{4}$$

が成り立つ．したがって, M の巴系イデアル $Q=(a,b_1,\ldots,b_{d-1})\subseteq\mathfrak{m}^n$ に対し, 不等式 (3) 及び (4) より,

$$\begin{aligned}\mathrm{s}_0(M/QM) &= \mathrm{s}_0(M/(aM+Q'M))\\ &\geq \sum_{i=0}^{d-1}\mathrm{s}_i(M/aM)\\ &\geq \sum_{i=0}^{d-1}\mathrm{s}_{i+1}(M)\\ &= \sum_{i=1}^{d}\mathrm{s}_i(M)\end{aligned}$$

が成り立つ．

Case 2 一般の場合：Case 1 より有限生成 A-加群 $M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)$ に対し, 定理 2.3 の主張を満たす整数 $k'>0$ が存在する．さらに, M に対して, 補題 2.1 を満たす整数 $c>0$ が存在する．このとき, $k=\max\{k',c\}$ が求める整数である．実際, 任意の整数 $n\geq k$ をとる．このとき, k' のとり方より, $M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)$ の巴系イデアル $Q\subseteq\mathfrak{m}^n$ が存在し,

$$\mathrm{s}_0(M/(QM+\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)))\geq\sum_{i=0}^{d}\mathrm{s}_i(M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)) \tag{5}$$

が成り立つ．ここで, Q は M の巴系イデアルでもあって $Q\subseteq\mathfrak{m}^c$ であるから, c のとり方（補題 2.1）より

$$\mathrm{s}_0(M/QM)=\mathrm{s}_0(M)+\mathrm{s}_0(M/(QM+\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M))) \tag{6}$$

が成り立つ. したがって, 不等式 (5) 及び等式 (6) より,

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}_0(M/QM) &= \mathrm{s}_0(M)+\mathrm{s}_0(M/(QM+\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M))) \\
&\geq \mathrm{s}_0(M)+\sum_{i=0}^{d}\mathrm{s}_i(M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)) \\
&= \mathrm{s}_0(M)+\sum_{i=1}^{d}\mathrm{s}_i(M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)) \\
&= \mathrm{s}_0(M)+\sum_{i=1}^{d}\mathrm{s}_i(M)
\end{aligned}$$

を得る. □

3 系 1.4 の証明

本節では, 系 1.4 の証明を述べる.

以下, $(A,\mathfrak{m})$ によって極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ Noether 局所環を表し, M を有限生成 A-加群とし, $d=\dim_A M$ とする. 系 1.4 の証明のためには, $d>0$ と仮定してよい.

系 1.4 の証明. (1) $\mathrm{s}_d(M)>0$ であるから, 定理 1.3 より, 任意の整数 $0\leq i\leq d-1$ に対し

$$\mathrm{s}_i(M)<\sum_{i=0}^{d}\mathrm{s}_i(M)\leq \mathrm{r}(M)$$

である.

(2) 定理 1.3 より, $s_d(M)\leq\sum_{i=0}^{d}\mathrm{s}_i(M)\leq\mathrm{r}(M)$ である. M が Cohen-Macaulay のとき, $\mathrm{r}(M)=\mathrm{s}_d(M)$ であることはよい. 逆に, $\mathrm{r}(M)=\mathrm{s}_d(M)$ とすると,

$$\mathrm{s}_d(M)\leq\sum_{i=0}^{d}\mathrm{s}_i(M)\leq\mathrm{r}(M)=\mathrm{s}_d(M)$$

であるから, $\sum_{i=0}^{d-1}\mathrm{s}_i(M)=0$ である. よって, $\mathrm{s}_i(M)=0$ $(0\leq i\leq d-1)$ であり, 即ち $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)=(0)$ $(0\leq i\leq d-1)$ であるから, M は Cohen-Macaulay である.

(3) $\mathrm{r}(M)=1$ とする. このとき, 定理 1.3 より

$$0<\mathrm{s}_d(M)\leq\sum_{i=0}^{d}\mathrm{s}_i(M)\leq\mathrm{r}(M)=1$$

であるから, $\mathrm{s}_d(M)=1=\mathrm{r}(M)$ かつ $\sum_{i=0}^{d-1}\mathrm{s}_i(M)=0$ である. よって, M は Cohen-Macaulay である.

(4) $\mathrm{Ass}_{\widehat{A}}\widehat{M}\subseteq\mathrm{Assh}_{\widehat{A}}\widehat{M}\cup\{\mathfrak{m}\widehat{A}\}$ とする. 但し, $\widehat{*}$ は $\mathfrak{m}$-進完備化を表す. ここで, $\widehat{A}$ を通して, A は完備であると仮定してよい. このとき, $\mathrm{Ass}_A M\subseteq\mathrm{Assh}_A M\cup\{\mathfrak{m}\}$ であるから, $N=M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)$ とおくと, $\mathrm{Ass}_A N=\mathrm{Assh}_A N$ である. したがって, あ

る N-正則元 $b \in \mathfrak{m}$ が存在し, $b\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N) = (0)$ $(0 \le i \le d-1)$ を満たす (e.g. [BH, Theorem 8.1.1] 環の場合にしか示していないが, 加群に対しても同様である). さて, N に対して, 補題 2.2 を満たす整数 $\ell > 0$ をとる. さらに, M に対して, 補題 2.1 を満たす整数 $c > 0$ をとる. ここで, $n = \max\{\ell, c\}$ とおき, $a = b^n$ とする. すると, ℓ のとり方 (補題 2.2) より, ある長完全列

$$\cdots \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N) \xrightarrow{\widehat{a}} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N) \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N/aN) \xrightarrow{f_i} \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(N) \xrightarrow{\widehat{a}} \cdots \tag{7}$$

が存在して, 任意の整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対し, 写像 $f_i : \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N/aN) \to \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(N)$ から導かれる socle の間の写像が全射である. ところで, いま $a\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N) = (0)$ $(0 \le i \le d-1)$ であるから, 上の完全列 (7) より, 任意の整数 $0 \le i \le d-1$ に対し, 完全列

$$0 \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N) \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N/aN) \xrightarrow{f_i} \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(N)$$

を得る. よって, いま写像 $f_i : \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(N/aN) \to \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(N)$ は socle の上で全射であるから,

$$\mathrm{s}_i(N/aN) = \mathrm{s}_i(N) + \mathrm{s}_{i+1}(N) \qquad (0 \le i \le d-1) \tag{8}$$

である. ここで, 定理 2.3 より, N/aN の巴系イデアル $Q' = (b_1, \ldots, b_{d-1}) \subseteq \mathfrak{m}^n$ が存在し,

$$\mathrm{s}_0(N/(aN + Q'N)) \ge \sum_{i=0}^{d-1} \mathrm{s}_i(N/aN) \tag{9}$$

を満たす. したがって, N の巴系イデアル $Q = (a, b_1, \ldots, b_{d-1}) \subseteq \mathfrak{m}^n$ に対し, 等式 (8) 及び不等式 (9) より,

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}_0(M/(QM + \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M))) &= \mathrm{s}_0(N/QN) = \mathrm{s}_0(N/(aN + Q'N)) \\
&\ge \sum_{i=0}^{d-1} \mathrm{s}_i(N/aN) \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} (\mathrm{s}_i(N) + \mathrm{s}_{i+1}(N)) \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \mathrm{s}_i(N) + \sum_{i=0}^{d-1} \mathrm{s}_{i+1}(N) \\
&= \sum_{i=1}^{d-1} \mathrm{s}_i(N) + \sum_{i=1}^{d} \mathrm{s}_i(N) \\
&= \sum_{i=1}^{d-1} 2\,\mathrm{s}_i(N) + \mathrm{s}_d(N) \\
&= \sum_{i=1}^{d-1} 2\,\mathrm{s}_i(M) + \mathrm{s}_d(M)
\end{aligned} \tag{10}$$

を得る. 一方で, Q は M の巴系イデアルでもあって $Q \subseteq \mathfrak{m}^c$ であるから, c のとり方 (補題 2.1) より,

$$\mathrm{s}_0(M/QM) = \mathrm{s}_0(M) + \mathrm{s}_0(M/(QM + \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)))$$

である. したがって, 不等式 (10) より,

$$\begin{aligned} \mathrm{s}_0(M/QM) &= \mathrm{s}_0(M) + \mathrm{s}_0(M/(QM + \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M))) \\ &\geq \mathrm{s}_0(M) + \sum_{i=1}^{d-1} 2\,\mathrm{s}_i(M) + \mathrm{s}_d(M) \end{aligned}$$

を得る. よって,

$$\mathrm{s}_0(M) + \sum_{i=1}^{d-1} 2\,\mathrm{s}_i(M) + \mathrm{s}_d(M) \leq \mathrm{r}(M)$$

が成り立つ.

(5) $\mathrm{Ass}_{\widehat{A}}\, \widehat{M} \subseteq \mathrm{Assh}_{\widehat{A}}\, \widehat{M} \cup \{\mathfrak{m}\widehat{A}\}$ とする. このとき, もし $\mathrm{r}(M) = 2$ ならば, (4) より,

$$\mathrm{s}_0(M) + \sum_{i=1}^{d-1} 2\,\mathrm{s}_i(M) + \mathrm{s}_d(M) \leq \mathrm{r}(M) = 2$$

である. ここで, $\mathrm{s}_d(M) > 0$ であるから, $\mathrm{s}_i(M) = 0$ $(1 \leq i \leq d-1)$ でなければならず, 即ち $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ $(1 \leq i \leq d-1)$ であるから, $M/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M)$ は Cohen-Macaulay である. $\square$

参考文献

[BH] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge studies in advanace mathematics, vol 39, Cambridge · New York· Port Chester · Sydney, 1993.

[GSa] S. Goto and H. Sakurai, *Index of reducibility of parameter ideals for modules possessing finite local cohomology modules*, Preprint 2005.

[GSu] S. Goto and N. Suzuki, *Index of reducibility of parameter ideals in a local ring*, J. Alg., **87** (1984), 53–88.

[K] T. Kawasaki, *On the index of reducibility of parameter ideals and Cohen-Macaulayness in a local ring*, J. Math. Kyoto Univ., **34-1** (1994), 219–226.

[NR] D. G. Northcott and D. Rees, *Principal systems*, Quart. J. Math. Oxford **8-2** (1957), 119–127.

Department of Mathematics, School of Science and Technology, Meiji University, 214-8571 Japan

E-mail address: `ee78052@math.meiji.ac.jp`

ON SALLY MODULES OF $\mathfrak{m}$-PRIMARY IDEALS IN BUCHSBAUM RINGS

KIKUMICHI YAMAGISHI

The purpose of this note is to discuss several basic results concerning the Sally modules of $\mathfrak{m}$-primary ideals in Buchsbaum rings.

Let $(A, \mathfrak{m})$ be a Noetherian local ring of dimension $d > 0$ with infinite residue field and I an $\mathfrak{m}$-primary ideal of A. We denote by $R(I)$ the Rees algebra of I; i.e., $R(I) := \bigoplus_{n\geq 0} I^n$. W. V. Vasconcelos [V] introduced the new notion the *Sally module* $S_{\mathfrak{q}}(I)$ of I with respect to a minimal reduction $\mathfrak{q}$ as follows:

$$S_{\mathfrak{q}}(I) := IR(I)/IR(\mathfrak{q}) = \bigoplus_{n\geq 0} I^{n+1}/I\mathfrak{q}^n.$$

Using this new notion, he and other peoples [V][CPP] etc. reconstructed well-known results [No][Na] etc. on the Hilbert coefficients of I in the case where A is Cohen-Macaulay. Also, A. Corso [C] extended these results into the case where A is Buchsbaum.

Under the assumption that A is Buchsbaum the author would like to discuss several results about the generalized Northcott's inequality [No] given by S. Goto and K. Nishida [GN] and also the positivity of the second Hilbert coefficient of I given by M. Narita [Na].

1. HILBERT COEFFICIENTS OF SALLY MODULES

Let us calculate the length of homogeneous componets of the Sally modules. Since $I\mathfrak{q}^n$ is contained in $\mathfrak{q}^n$ too, we have

$$l_A(I^{n+1}/I\mathfrak{q}^n) = l_A(A/\mathfrak{q}^n) + l_A(\mathfrak{q}^n/I\mathfrak{q}^n) - l_A(A/I^{n+1}).$$

It is well known that for $n \gg 0$ all three functions appeared on the right hand side, $l_A(A/\mathfrak{q}^n), l_A(\mathfrak{q}^n/I\mathfrak{q}^n)$ and $l_A(A/I^{n+1})$, are polynomials in n. Hence $l_A(I^{n+1}/\mathfrak{q}I^n)$ can be written as a polynomial in n of degree at most $d-1$ in the form

$$l_A(I^{n+1}/I\mathfrak{q}^n) = s_0\binom{n+d-1}{d-1} - s_1\binom{n+d-2}{d-2} + \cdots + (-1)^{d-1}s_{d-1}$$

where $s_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 0, 1, \ldots, d-1)$ and $s_0 \geq 0$. Note that $\dim_A S_{\mathfrak{q}}(I) \leq d$ and the equality is not necessarily true in general. But, in a temporary terminology, we may call these integers $s_0, s_1, \ldots, s_{d-1}$ as the Hilbert coefficients of the Sally module $S_{\mathfrak{q}}(I)$.

Now, let us evaluate the Hilbert coefficients of the Sally module more precisely. Recall that for $n \gg 0$ the functions $l_A(A/I^{n+1})$ and $l_A(A/\mathfrak{q}^n)$ have the following expressions

$$l_A(A/I^{n+1}) = e_0(I)\binom{n+d}{d} - e_1(I)\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d(I), \qquad (\sharp 1)$$

$$l_A(A/\mathfrak{q}^n) = e_0(\mathfrak{q})\binom{n+d-1}{d} - e_1(\mathfrak{q})\binom{n+d-2}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d(\mathfrak{q}), \qquad (\sharp 2)$$

where $e_i(I)$ and $e_i(\mathfrak{q})$ are the Hilbert coefficients of I and $\mathfrak{q}$ respectively. For simplicity, we usually write e_i instead of $e_i(I)$, namely $e_i := e_i(I)$ for all i.

We denote by $G(\mathfrak{q})$ the associated graded ring of $\mathfrak{q}$; i.e., $G(\mathfrak{q}) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$. Consider $A/I \otimes G(\mathfrak{q})$, a graded ring of dimension d. Let $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_{d-1}$ the Hilbert coefficients of such graded ring $A/I \otimes G(\mathfrak{q})$. Hence the function $l_A(\mathfrak{q}^n/I\mathfrak{q}^n)$ is the polynomial in n for $n \gg 0$ as follows:

$$l_A(\mathfrak{q}^n/I\mathfrak{q}^n) = \hat{e}_0\binom{n+d-1}{d-1} - \hat{e}_1\binom{n+d-2}{d-2} + \cdots + (-1)^{d-1}\hat{e}_{d-1}. \qquad (\sharp 3)$$

Using these expressions ($\sharp$1), ($\sharp$2) and ($\sharp$3), we have the following proposition.

Proposition 1. *$s_i = e_{i+1} - e_{i+1}(\mathfrak{q}) - e_i(\mathfrak{q}) + \hat{e}_i$ holds for $0 \leq i \leq d-1$. In particular, $s_0 = e_1 - e_1(\mathfrak{q}) - e_0 + \hat{e}_0 \geq 0$.*

The next proposition is very important fact about Sally modules.

Proposition 2. *Let A be a Buchsbaum ring (or it is enough to assume that $\mathfrak{q}$ is a standard parameter ideal of A). Assume that* $\operatorname{depth} A > 0$ *and the graded ring $A/I \otimes G(\mathfrak{q})$ satisfies the first Serre's condition* (S_1). *Then the following four conditions are equivalent.*

(1) $S_\mathfrak{q}(I) = (0)$.
(2) $I^2 = \mathfrak{q}I$.
(3) $s_i = 0$ *for all* $0 \leq i \leq d-1$.
(4) $s_0 = 0$.

Proof. The assertions (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) are obvious.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Assume that $S_\mathfrak{q}(I) \neq (0)$. We claim the next.

Claim. $\operatorname{Ass}_{R(\mathfrak{q})} S_\mathfrak{q}(I) = \{\mathfrak{m}R(\mathfrak{q})\}$.

Proof of Claim. In fact, choose a homogeneous prime ideal $Q \in \operatorname{Supp}_{R(\mathfrak{q})} S_\mathfrak{q}(I)$ such that $Q \neq \mathfrak{m}R(\mathfrak{q})$. Since $\mathfrak{q}$ is a reduction of I, there is an integer r such that $I^{r+1} = \mathfrak{q}I^r$. Hence $I^r S_\mathfrak{q}(I) = (0)$ clearly. Thus Q contains $\mathfrak{m}$, namely $Q \supsetneq \mathfrak{m}R(\mathfrak{q})$. Hence $\operatorname{ht} Q \geq 2$. Now look for the following exact sequences:

$$0 \longrightarrow IR(\mathfrak{q})_Q \longrightarrow R(\mathfrak{q})_Q \longrightarrow (A/I \otimes G(\mathfrak{q}))_Q \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow IR(\mathfrak{q})_Q \longrightarrow IR(I)_Q \longrightarrow (S_\mathfrak{q}(I))_Q \longrightarrow 0.$$

Since A is Buchsbaum (more precisely $\mathfrak{q}$ is standard) and $\operatorname{depth} A > 0$, we know $\operatorname{depth} R(\mathfrak{q})_Q \geq 2$. Hence we see $\operatorname{depth} IR(\mathfrak{q})_Q \geq 2$ too by the assumption that $A/I \otimes G(\mathfrak{q})$ satisfies the first Serre's condition (S_1). Moreover $\operatorname{depth} IR(I)_Q > 0$ clearly because of $\operatorname{depth} A > 0$ again. Thus we conclude that $\operatorname{depth}(S_\mathfrak{q}(I))_Q > 0$. This means $Q \notin \operatorname{Ass}_{R(\mathfrak{q})} S_\mathfrak{q}(I)$.

By this claim we see $\dim_{R(\mathfrak{q})} S_\mathfrak{q}(I) = d$ immediately, hence it implies that $s_0 > 0$. Thus we get the assertion.

2. Buchsbaum version of classical results on Hilberts coefficients — Northcott's inequlity

From now on, let us assume that A is a Buchsbaum ring (more precisely, it is enough to assume that $\mathfrak{q}$ is a standard parameter ideal of A).

At first we shall discuss the generalization of the Northcott's inequality [No], which was established by S. Goto and K. Nishida [GN].

We set one more useful notation. Let $\mathfrak{q} := (a_1, a_2, \ldots, a_d)$. Then we put

$$\Sigma(\mathfrak{q}) := \sum_{i=1}^{d} [(a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_d) : a_i] + \mathfrak{q}.$$

Note that this ideal $\Sigma(\mathfrak{q})$ is uniquely determined by $\mathfrak{q}$ itself not depending on a particular choice of a system of parameters $a_1, a_2, \ldots, a_d$ such that $\mathfrak{q} := (a_1, a_2, \ldots, a_d)$. With this notation we can describe the following.

Theorem 3 (Generalization of Northcott's inequality [GN]).

(1) $e_1 - e_0 - e_1(\mathfrak{q}) + l_A(A/I) \geq 0$ *holds.*

(2) *the equality appeared in the assertion* (1) *holds if and only if the following two conditions are satisfied:* (*i*) $I^2 \subseteq \mathfrak{q}I + \mathrm{H}^0_\mathfrak{m}(A)$*; and* (*ii*) $I \supseteq \Sigma(\mathfrak{q})$.

Let $A[t]$ denote a polynomial ring over A with an indeterminate t. Recall that the Rees algebra $R(\mathfrak{q})$ is regarded as a A-subalgebra of $A[t]$ as follows:

$$R(\mathfrak{q}) \cong A[a_1 t, a_2 t, \ldots, a_d t] \subseteq A[t].$$

Since $A/I \otimes G(\mathfrak{q}) \cong R(\mathfrak{q})/IR(\mathfrak{q})$ obviously, we have a ring epimorphism such that

$$\varphi : A/I[X_1, X_2, \ldots, X_d] \longrightarrow R(\mathfrak{q})/IR(\mathfrak{q}) \cong A/I \otimes G(\mathfrak{q}),$$

defined by $\varphi(X_i) = a_i t \bmod IR(\mathfrak{q})$, where $A/I[X_1, X_2, \ldots, X_d]$ denotes a polynomial ring over A/I with indeterminates $X_1, X_2, \ldots, X_d$. Then the next assertion plays a key rule to show Theorem 3 above.

Proposition 4 (Cf., [KY, Lemma 3 in Appendix]). *The following four conditions are equivalent.*

(1) $\hat{e}_0 = l_A(A/I)$.

(2) *The ring epimorphism* φ *defined above*

$$\varphi : A/I[X_1, X_2, \dots, X_d] \longrightarrow A/I \otimes G(\mathfrak{q})$$

is an isomorphism.

(3) $l_A(\mathfrak{q}/I\mathfrak{q}) = d \cdot l_A(A/I)$.

(4) $I \supseteq \Sigma(\mathfrak{q})$.

Proof of Theorem 3. By φ it is obvious that $l_A(A/I) \geq \hat{e}_0$. Hence we know

$$e_1 - e_0 - e_1(\mathfrak{q}) + l_A(A/I) \geq e_1 - e_0 - e_1(\mathfrak{q}) + \hat{e}_0 = s_0 \geq 0 \qquad (\sharp 4)$$

by Proposition 1. From ($\sharp$4) it is easy to see that the equality $e_1 - e_0 - e_1(\mathfrak{q}) + l_A(A/I) = 0$ holds if and only if $s_0 = 0$ and $\hat{e}_0 = l_A(A/I)$. The assertion (2) immediately follows from Proposition 2 and Proposition 4.

3. Buchsbaum version of classical results on Hilberts coefficients — Positivity by M. Narita

Let us still keep the same notation as in the preceding section. Here we discuss the positivity of the second Hilbert coefficient of I given by M. Narita [Na], and let try to generalize it to the case where A is Buchsbaum.

We denote by h^i the length of the local cohomology module of A, i.e., $h^i := l_A(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)$ for each i. Then we begin with the following.

Theorem 5. *Suppose that* $d = 2$.

(1) $e_2 + h^1 \geq 0$ *holds.*

(2) *The following three statements are equivalent.*

(i) *The equlity* $e_2 + h^1 = 0$ *holds.*

(ii) *There exists an integer* $t \gg 0$ *such that* $I^{2t} = (a_1^t, a_2^t)I$ *and* $I^t \supseteq \Sigma(a_1^t, a_2^t)$.

(iii) *For any integer* $t \gg 0$ *and any minimal reduction* $\mathfrak{q}'$ *of* I^t, *it holds that* $I^{2t} = \mathfrak{q}'I$ *and* $I^t \supseteq \Sigma(\mathfrak{q}')$.

When this is the case one also has $\operatorname{depth} A > 0$.

Outline of the Proof. For any $t > 0$ enoughly large, we have

$$l_A(A/I^t) = e_0(I^t) - e_1(I^t) + e_2(I^t).$$

This implies

$$e_2 = e_2(I^t) = e_1(I^t) - e_0(I^t) + l_A(A/I^t).$$

Hence we get

$$\begin{aligned} e_2 - e_1((a_1^t, a_2^t)) &= e_1(I^t) - e_0(I^t) - e_1((a_1^t, a_2^t)) + l_A(A/I^t) \\ &\geq s_0(S_{(a_1^t, a_2^t)}(I^t)) \geq 0. \end{aligned}$$

Since A is Buchsbaum, we already known that $e_1((x_1, x_2)) = -h^1$ for any parameter ideal (x_1, x_2) of A, see [SV]. Thus our assertion follows immediately.

Example. There is an example of Buchsbaum rings A such that $e_2 < 0$. Let $k[[X, Y, Z, W]]$ be a formal power series ring over an infinite field k. Put

$$A := k[[X, Y, Z, W]]/(X, Y) \cap (Z, W) \quad \text{and} \quad \mathfrak{m} := (X, Y, Z, W)A.$$

Then $(A, \mathfrak{m})$ is a Buchsbaum local ring of dimension 2. Moreover we get

$$l_A(A/\mathfrak{m}^{n+1}) = 2\binom{n+2}{2} - 1$$

for all $n \geq 0$. This means that $e_0 = 2, e_1 = 0$ and $e_2 = -1$.

Theorem 6. *Suppose that $d \geq 3$. Then*

$$e_2 + h^1(A/\mathfrak{q}_{d-2}) + h^0(A/\mathfrak{q}_{d-3}) \geq 0$$

holds, where we put $\mathfrak{q}_i := (a_1, a_2, \ldots, a_i)$ for $i = d-3, d-2$ respectively.

References

[C] A. Corso, *Sally modules of* $\mathfrak{m}$*-primary ideals in local rings*, preprint 2003 in arXiv:math.AC/0309027.

[CPP] A. Corso, C. Polini and M. V. Pinto, *Sally modules and associated graded rings*, Comm. Algebra **26** (1998), 2689–2708.

[GN] S. Goto and K. Nishida, *Hilbert coefficients and Buchsbaumness of associated graded rings*, J. Pure and Appl. Algebra **181** (2003), 61–74.

[KY] K. Kurano with an appendix by K. Yamagishi, *On Macaulayfication obtained by a blow-up whose center is an equi-multiple ideal;* Appendix, *Unconditioned strong d-sequences and local cohomology of Rees and associated graded modules*, J. Algebra **190** (1997), 405–434.

[Na] M. Narita, *A note on the coefficients of Hilbert characteristic functions in semi-regular local rings*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **59** (1963), 269–275.

[No] D. G. Northcott, *A note on the coefficients of the abstract Hilbert function*, J. London Math. Soc. **35** (1960), 209–214.

[SV] J. Stückrad and W. Vogel, *Buchsbaum rings and applications*, Springer-Verlag, Berlin, New York, Tokyo, 1986.

[V] W. V. Vasconcelos, *Hilbert functions, analytic spread, and Koszul homology*, Contemporary Mathematics **159** (1994), 401–422.

Faculty of Econoinformatics, Himeji Dokkyo University, Kamiono 7-2-1, Himeji, Hyogo 670-8524, Japan

E-mail address: yamagisi@himeji-du.ac.jp

Buchsbaum rings with minimal multiplicity [1]

後藤四郎 (明治大・理工), 吉田健一 (名古屋大・多元数理)

1. 準備と背景

この報告を通じて, k を無限体とし, $S = k[X_1, \ldots, X_v]$ は k 上 v 変数の多項式環, I を S の斉次イデアルとする. 特に断らない限り, $I \subseteq (X_1, \ldots, X_v)^2$ と仮定しておく.

一般に, 斉次 k 代数 (homogeneous k-algebra) $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n = S/I$ に対して, その S 上の次数付き極小自由分解 (graded minimal free resolution) を考える:

$$0 \to \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{p,j}(A)} \xrightarrow{\varphi_p} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{1,j}(A)} \xrightarrow{\varphi_1} S \to A \to 0.$$

このとき,

$$\begin{aligned} \operatorname{indeg} I &= \min\{j \in \mathbb{Z} : \beta_{0,j}(I) \neq 0\} = \min\{j \in \mathbb{Z} : \beta_{1,j}(A) \neq 0\}, \\ \operatorname{rt}(I) &= \max\{j \in \mathbb{Z} : \beta_{0,j}(I) \neq 0\} = \max\{j \in \mathbb{Z} : \beta_{1,j}(A) \neq 0\} \end{aligned}$$

はそれぞれ I の initial degree, relation type と呼ばれる不変量である. ここでは, $\operatorname{indeg} I$ の代りに $\operatorname{indeg} A$ のように書く. ただし, A が多項式環の場合は, $\operatorname{indeg} A = 1$ と思うことにする.

$$\operatorname{reg} A = \max\{j - i \in \mathbb{Z} : \beta_{i,j}(A) \neq 0\}$$

は A の (Castelnuovo–Mumford) regularity と呼ばれる不変量であり, 古くから研究されている. $\operatorname{reg} A$ は局所コホモロジーを用いて計算することができる:

$$\operatorname{reg} A = \min\{n \in \mathbb{Z} : [H^i_{\mathfrak{M}}(A)]_j = 0 \ (i + j > n)\}$$

関連する不変量として, 後藤・渡辺による a-invariant の定義を思い出しておく:

$$a(A) = \max\{n \in \mathbb{Z} : [H^{\dim A}_{\mathfrak{M}}(A)]_n \neq 0\}.$$

このとき, $a(A) + \dim A \leq \operatorname{reg} A$ である. また, 定義から, $\operatorname{reg} A \geq \operatorname{indeg} A - 1$ が成立するが, 等号が成立する場合に, I は (または A が) linear resolution を持つと言う. 特に, $q = \operatorname{indeg} I (\geq 2)$ のとき, I (または A) は q-linear resolution を持つと言う:

$$A \text{ は } q\text{-linear resolution を持つ} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \operatorname{reg} A = \operatorname{indeg} A - 1.$$

(注意) A は多項式環 (に同型) の場合に限り, 1-linear resolution を持つ.

以下では, A の Krull 次元を $\dim A = d$, 余次元 (codimension) を $\operatorname{codim} A = n - d = c$ とおく. $\mathfrak{M} = A_+ = \sum_{n \geq 1} A_n$ を A のただ1つの斉次極大イデアル (homogeneous maximal ideal) を表すものとする.

$$F(A, t) = \sum_{n \geq 0} (\dim_k A_n) t^n = \frac{h_0 + h_1 t + \cdots + h_s t^s}{(1 - t)^d}$$

を A の Hilbert 級数とするとき, $e(A) = \sum_{i=0}^{s} h_i$ を A の重複度 (multiplicity) と呼ぶ. 一般に, A の $\mathfrak{M}$-準素イデアル I に対して, I の重複度は $e(I) = \lim_{n \to \infty} \frac{d!}{n^d} l_A(A/I^n)$ で与えられる.

[1] Nov.16, 2005; 第 27 回可換環論シンポジウム (於：富山県インテック大山研修センター)

$(A, \mathfrak{m}, k)$ が局所環のとき, A に付随する次数付き環

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$$

は自然に斉次 k 代数になる. A が斉次 k 代数のとき, 自然な次数付き環としての同型 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{M}}(A) \cong A$ が得られる.

Cohen–Macaulay 性については既知として, Buchsbaum 性について簡単に復習しておこう. A の斉次巴系 $x_1, \ldots, x_d$ に対して, $Q = (x_1, \ldots, x_d)$ とおくとき, $l_A(A/Q) - e(Q)$ が巴系の取り方によらない定数を取るとき, A は Buchsbaum 環であると言い, その定数を $I(A)$ と書く. このとき, A の局所コホモロジー $H^i_{\mathfrak{M}}(A)$ $(i \neq d)$ は k 上の有限次元ベクトル空間であり, その次元を $h^i(A) = \dim_k H^i_{\mathfrak{M}}(A)$ $(i \neq d)$ とおくと,

$$I(A) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} h^i(A)$$

が成り立つ.

さて, 本稿の目的は, initial degree に注目して, **minimal multiplicity を持つ Buchsbaum 局所環**の概念を拡張することである. オリジナルの minimal multiplicity の概念は後藤 [5] により与えられたものである (下記の解説参照). 吉田は, 一昨年度の可換環論シンポジウムにおける寺井氏との共同講演において, Buchbaum Stanley–Reisnser 環に対して広義の minimal multiplicity の概念を与えた. 今回の拡張は, そこでの議論を一般の Buchsbaum 斉次 k 代数に押し拡げたものである (例 4.1 参照). ところで, "minimal multiplicity" という用語はしばしば異なる意味で用いられることがある. 誤解がないように, この点について少し言及しておく.

Sally は Cohen–Macaulay 局所環に対して次の不等式を証明した ([11]):

$$\mathrm{embdim}\,(A) \leq e(A) + \dim A - 1, \qquad \text{すなわち}, \quad e(A) \geq \mathrm{codim}\, A + 1.$$

さらに, 等号が成立するときに, A は maximal embedding dimension を持つと定めた ([12] 参照). この不等式は A が Cohen–Macaulay 斉次 k 代数の場合にも勿論成立する. 一方, A が代数的閉体 k 上の斉次整域の場合にも同じ不等式が成立することが Abhyankar によって示されている ([1]). また, 後藤 [4] は, Sally の不等式は Buchsbaum 局所環の場合にも次のように拡張できることを指摘した:

$$e(A) \geq \mathrm{codim}\, A + 1 - I(A).$$

ここで等号が成立するとき A は maximal embedding dimension を持つ Buchsbaum 環であると言う ([4]). これは Cohen–Macaulay 局所環 (もしくは斉次 k 代数) の場合の自然な拡張になっている. A が Buchsbaum (Cohen–Macaulay) 局所環のとき, A が maximal embedding dimension をもつことと, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ が 2-linear resolution を持つこととは同値である ([12, 4] 参照). Cohen–Macaulay 環もしくは代数的閉体上の斉次 k 代数 A に対して, e(A) (または, 対応する代数多様体の次数) が最小であるという意味で, この概念を minimal multiplicity と呼ぶ人々もいる. しかしながら, Buchsbaum 環のクラスにおいては, さらに小さな値の重複度を取りうる. 実際, 後藤は [5] において, Buchsbaum 局所環 (もしくは, 斉次 k 代数) に対する重複度の下限を与え, そのようなクラスにおいて minimal multiplicity の概念を導入した:

$$(A, \mathfrak{m})\text{: Buchsbaum 局所環} \implies e(A) \geq 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} h^i(A)$$

等号が成立するとき, A は minimal multiplicity を持つ Buchsbaum 環であると言う. このとき, A は maximal embedding dimension を持ち, $gr_{\mathfrak{m}}(A)$ は 2-linear resolution を持つことが知られている ([5]). (A が正則の場合を除いて) A がこの意味で minimal multiplicity を持つときは Cohen–Macaulay にはならないことに注意する.

この報告では, 後者の概念を「minimal multiplicity を持つ Buchsbaum 環」と呼び, その拡張について考える.

2. Buchsbaum 斉次 k 代数の重複度の下限

この節においては, A は斉次 k 代数と仮定し, $\dim A = d \geq 2$, $c = \operatorname{codim} A \geq 1$, $q = \operatorname{indeg} A \geq 2$ とおく. この節の目的は A が Buchsbaum のときに, d, c, q の言葉で重複度 $e(A)$ の下限を与え, minimal multiplicity of degree q の概念を与えることである.

以下では, $x_1, \ldots, x_d \in A_1$ を A の巴系として固定し, 正の整数 ℓ に対して,

$$Q = (x_1, \ldots, x_d)A, \quad \Sigma(\underline{x}^{\ell}) = \sum_{i=1}^{d} (x_1^{\ell}, \ldots, \widehat{x_i^{\ell}}, \ldots, x_d^{\ell}) : x_i^{\ell} + Q$$

とおく. さらに, $\Sigma(Q) = \Sigma(\underline{x})$ とおく. 主結果を述べる前に, Cohen–Macaulay 斉次 k 代数の場合の結果について触れておこう.

命題 2.1. A は *Cohen–Macaulay* と仮定する. このとき,

(1) $e(A) \geq \binom{c+q-1}{q-1}$ が成立する.
(2) $a(A = \operatorname{reg} A - d \geq q - 1 - d$ が成立する.
(3) また, 次は互いに同値である:
 (a) $e(A) = \binom{c+q-1}{q-1}$.
 (b) $a(A) = q - d - 1$.
 (c) A は *q-linear resolution* を持つ.
 このとき, $A/Q \cong k[Y_1, \ldots, Y_c]/(Y_1, \ldots, Y_c)^q$ である.

さて, 次の定理は我々の理論の出発点であり, この節の主結果である.

定理 2.2. A は *Buchsbaum* と仮定する. このとき,

(1) 次の不等式[2] が成立する:

$$e(A) \geq \binom{c+q-2}{q-2} + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} h^i(A).$$

(2) $\Sigma(Q) \subseteq \mathfrak{M}^{q-1} + Q$.
(3) $a(A) \geq q - d - 2$.
(4) $[H^i_{\mathfrak{M}}(A)]_j = 0$ $(i < d,\ j \leq q - 2 - i)$.

重複度に関する上の不等式から次の定義をすることが可能になる.

定義 2.3. Buchsbaum 斉次 k 代数 A が等式

$$e(A) = \binom{c+q-2}{q-2} + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} h^i(A)$$

[2]なお, この不等式は寺井直樹氏 (佐賀大学) によって最初に予想されたものである.

をみたすとき, A は minimal multiplicity of degree q を持つと言う. ただし, A が多項式環 (に同型) のときは, $\operatorname{indeg} A = 1$ で minimal multiplicity of degree 1 を持つと解釈する.

注意 2.4. 定理 2.2 は Buchsbaum 局所環に対しても証明することができる. 特に, $q = 2$ の場合は, 後藤 [5] により導入された minimal multiplicity を持つ Buchsbaum 局所環の概念と一致する.

Buchsbaum 局所環に対して minimal multiplicity の定義を与えたとき, 当然ながら, そのような環の $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ がやはりこの性質を持つことを示すことが望まれるが, [6] の議論からも分かるようにその証明には少々困難が伴うかも知れない. そのため, 今回は局所環についての議論は述べないが, 解決すべき課題である.

定理 2.2 の証明をはじめる前に次の結果を思い出しておこう.

定理 2.5 (Hoa–Miyazaki [9, Corollary 2.8]). *A は Buchsbaum と仮定する. このとき,*

$$\operatorname{reg} A \leq a(A) + d + 1.$$

注意 2.6. 一般に, $\operatorname{reg} A$ の定義より, $a(A)+d \leq \operatorname{reg} A$ である. 特に, A が Cohen–Macaulay の場合には等号が成立する. また, Hoa–Miyazaki の定理によれば, A が Buchsbaum の場合は, $\operatorname{reg} A = a(A) + d$ または $\operatorname{reg} A = a(A) + d + 1$ であることが分かる.

(定理 2.2 の証明).

Claim 1: $a(A) \geq q - 2 - d$.

Hoa–Miyazaki の不等式により, $q - 1 = \operatorname{indeg} A - 1 \leq \operatorname{reg} A \leq a(A) + d + 1$. ゆえに, $a(A) \geq q - 2 - d$ を得る.

Claim 2: $[\Sigma(Q)]_n = [Q]_n$ $(n \leq q-2)$ が成り立つ. 特に, $\Sigma(Q) \subseteq \mathfrak{M}^{q-1} + Q$ である.

実際, $1 \leq i \leq d$ を固定して, $B = A/(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_d)$ とおくと, B は 1 次元斉次 Buchsbaum k 代数で

$$B = T/I_B, \quad H^0_{\mathfrak{M}}(B) = J/I_B, \qquad T \cong k[Y_1, \ldots, Y_{c+1}]$$

と書くことができる. このとき, $\operatorname{indeg} I_B \geq \operatorname{indeg} I = q$ で, $\mathfrak{M}J \subseteq I_B$ だから, $\operatorname{indeg} J \geq q - 1$ である. 特に, $n \leq q-2$ ならば,

$$\left[\frac{(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_d) \colon x_i}{(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_d)}\right]_n = \left[H^0_{\mathfrak{M}}(B)\right]_n = 0.$$

すなわち, $[(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_d) \colon x_i]_n = [(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_d)]_n \subseteq [Q]_n$ である. i について和を取って, $[\Sigma(Q)]_n \subseteq [Q]_n$ $(n \leq q-2)$ を得る. 残りの主張はこれから直ちに従う.

Claim 3: $e(A) \geq \binom{c+q-2}{q-2} + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} h^i(A)$. さらに, 等号は $[\Sigma(Q)]_n = A_n$ $(n \geq q-1)$ のときに限られる.

次の補題 2.7 により, $l_A(A/\Sigma(Q)) \geq \binom{c+q-2}{q-2}$ を言えばよい.

補題 2.7 (後藤 [5, Theorem 4.1]).

$$e(A) = e(Q) = l_A(A/\Sigma(Q)) + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} h^i(A).$$

さて, Claim 2 により,

$$l_A(A/\Sigma(Q)) \geq \sum_{n=0}^{q-2} \dim_k [A/\Sigma(Q)]_n = \sum_{n=0}^{q-2} \dim_k [A/Q]_n$$

であるが, $\operatorname{indeg} A/Q \geq \operatorname{indeg} A = q$ ゆえ,

$$\sum_{n=0}^{q-2} \dim_k [A/Q]_n = \sum_{n=0}^{q-2} \binom{c+n-1}{n} = \binom{c+q-2}{q-2}.$$

よって, 前半の主張を得る. 上の証明で不等号は1箇所だけである. Claim の後半の主張については, その不等式で等号が成立する条件を書き直せば得られる.

Claim 4: $[H^i_{\mathfrak{M}}(A)]_j = 0$ $(i < d,\ j \leq q-2-i)$.

$\operatorname{reg} A \geq q-1$ と $\operatorname{reg} A$ を局所コホモロジーで表現した式から容易に得られる. □

系 2.8. A は *Buchsbaum* と仮定する.

(1) $\operatorname{indeg} A = q > q' \geq 2$ ならば,

$$e(A) > \binom{c+q'-2}{q'-2} + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} h^i(A).$$

(2) A が *Cohen–Macaulay* で, $q \geq 2$ ならば, A は *minimal multiplicity* を持たない.

(証明). いずれの主張も $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}$ $\left(x \mapsto \binom{c+x}{c}\right)$ が x について狭義単調増加であることから従う. □

この節の終わりに, 次の結果についてコメントしておく.

定理 2.9 (Kamoi–Vogel [10]). A は *Buchsbaum* と仮定する. このとき,

$$\sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(A) \leq \binom{\operatorname{reg} A + c - 1}{c-1}$$

が成り立つ.

3. MINIMAL MULTIPLICITY を持つ BUCHSBAUM 斉次 k 代数の特徴付け

前節では, initial degree q の Buchsbaum 斉次 k 代数について, minimal multiplicity の概念を導入した. この概念は様々な境界条件をみたす. この節の目的はその環の特徴付けを与えることである.

以下では, 前節と同様に, A は $\mathfrak{M}$ をただ1つの斉次極大イデアルに持つ斉次 k 代数で $\dim A = d \geq 2$, $\operatorname{codim} A = c \geq 1$, $\operatorname{indeg} A = q \geq 2$ と仮定する. また, $x_1, \ldots, x_d \in A_1$ は A の巴系とし, $Q = (x_1, \ldots, x_d)$, $\Sigma(Q) = \Sigma(\underline{x})$ とおく.

定理 3.1. A が *Buchsbaum* のとき, 上の記号の下で, 次は同値である.

(1) A は *minimal multiplicity of degree* q を持つ. すなわち,

$$e(A) = \binom{c+q-2}{q-2} + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} h^i(A).$$

(2) $a(A) = q-d-2$.

(3) $H^i_{\mathfrak{M}}(A) = [H^i_{\mathfrak{M}}(A)]_{q-1-i}$ $(i < d)$ 及び $[H^d_{\mathfrak{M}}(A)]_n = 0$ $(n \geq q-d-1)$ が成立する.

(4) A は *q-linear resolution* を持ち, さらに次が成立する:

$$\sum_{i=0}^{d-1}\binom{d}{i}h^i(A)=\binom{\operatorname{reg}A+c-1}{c-1}.$$

(5) $\Sigma(Q)=\mathfrak{M}^{q-1}+Q$.
(6) $[\Sigma(Q)]_n=A_n$ $(n\ge q-1)$.

さらに, このとき, $\operatorname{reg}A=q-1$, $\operatorname{Soc}(H^d_{\mathfrak{M}}(A))=\left[H^d_{\mathfrak{M}}(A)\right]_{q-d-2}$ である. 特に, $q\ge 2$ ならば, A は *Cohen–Macaulay* でない.

注意 3.2.
(1) は定理 2.2 で見た下限を取ることを意味する.
(2) において一般には $\ge$ が成り立つ (Hoa–Miyazaki [9]).
(3) において, A が q-linear resolution を持てば, 前半は成立し, $a(A)\le q-d-1$ である (Eisenbud–Goto [2]).
(4) において一般には $\le$ が成り立つ (Kamoi–Vogel [10]).
(5) において一般には $\subseteq$ が成り立つ (定理 2.2 より).

先に, A が (オリジナルの意味で) minimal multiplicity を持つ Buchsbaum 環ならば, 2-linear resolution を持つことを述べた. これは拡張された minimal multiplicity においても保存される. 実際, 上の定理の (1) $\Longrightarrow$ (4) により, A が minimal multiplicity of degree q を持つならば, A は q-linear resolution を持つことがわかる. 言い換えれば, "minimal multiplicity を持つ" 環のクラスは "linear resolution を持つ" 環のクラスの中で特定の性質を持つものとして特徴づけられる. このような理由から, Buchsbaum 斉次 k 代数が linear resolution を持つための判定法を与える, 次の結果は定理 3.1 の証明において重要な役割を演ずる.

定理 3.3 (Eisenbud–Goto [2]). *A が Buchsbaum と仮定するとき, 次は同値である:*
(1) *A は q-linear resolution を持つ.*
(2) $H^i_{\mathfrak{M}}(A)=[H^i_{\mathfrak{M}}(A)]_{q-1-i}$ $(i<d)$, 及び, $[H^d_{\mathfrak{M}}(A)]_n=0$ $(n\ge q-d)$ が成立する.
(3) $\mathfrak{M}^q=Q\mathfrak{M}^{q-1}$.

このとき, $A/Q\cong k[Y_1,\dots,Y_c]/(Y_1,\dots,Y_c)^q$ である. 特に, $l_A(A/Q)=\binom{c+q-1}{q-1}$.

以下, 定理 3.1 を証明する. 定理 2.2 の証明から既に (1) と (6) の同値性が得られている. そこで,

$$(6)\Longleftrightarrow(5)\Longrightarrow(4)\Longrightarrow(3)\Longrightarrow(2)\Longrightarrow(6)$$

を示せばよい.

(定理 3.1 の証明).
(6) $\Longrightarrow$ (5) : $[\Sigma(Q)]_n=A_n$ $(n\ge q-1)$ と仮定すると, $\Sigma(Q)\supseteq\mathfrak{M}^{q-1}$ である. また, $\Sigma(Q)$ は Q を含むので, $\Sigma(Q)\supseteq\mathfrak{M}^{q-1}+Q$ を得る. Theorem 2.2(2) より, 逆向きの包含関係が得られているので, 等式 $\Sigma(Q)=\mathfrak{M}^{q-1}+Q$ を得る.
逆に, $\Sigma(Q)=\mathfrak{M}^{q-1}+Q$ を仮定すると, $[\Sigma(Q)]_n=A_n$ $(n\ge q-1)$ が直ちに導かれる.

(5) $\Longrightarrow$ (4) : $\mathfrak{M}^{q-1}\subseteq\Sigma(Q)$ より, $\mathfrak{M}^q\subseteq\mathfrak{M}\Sigma(Q)\subseteq Q$ を得る. A は斉次 k 代数だから, $\mathfrak{M}^q=Q\cap\mathfrak{M}^{q-1}=Q\mathfrak{M}^{q-1}$ である. 従って, Eisenbud–Goto の定理から, A は q-linear

resolution を持ち,

$$e(A) = l_A(A/Q) - I(A) = \binom{c+q-1}{q-1} - \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} h^i(A) \tag{3.1}$$

を得る. 一方, (5) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (1) が成立しているので,

$$e(A) = \binom{c+q-2}{q-2} + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} h^i(A) \tag{3.2}$$

である. 2 つの式を比較すると,

$$\sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(A) = \binom{c+q-2}{c-1} = \binom{\operatorname{reg} A + c - 1}{c-1}$$

を得る.

(4) $\Longrightarrow$ (3) : Eisenbud–Goto の定理 (定理 3.3) により, $H^i_{\mathfrak{M}}(A) = [H^i_{\mathfrak{M}}(A)]_{q-1-i}$ $(i < d)$ が分かる. 後は, $a(A) \le q-d-2$ を示したい. また, $a(A) \le \operatorname{reg} A - d = q-1-d$ である. そこで, $[H^d_{\mathfrak{M}}(A)]_{q-1-d} = 0$ を言えばよい. A は q-linear だから, 等式 (3.1) が成立し, 仮定と合わせて (1) の等式を得る. 特に, (6) を経て, $[\Sigma(Q)]_{q-1} = A_{q-1}$ が成立する. よって, 次の補題を証明することに帰着する.

補題 3.4. 定理 3.1 の仮定の下で, $\mathfrak{M}^q = Q\mathfrak{M}^{q-1}$ ならば, $[A/\Sigma(Q)]_{q-1} \cong [H^d_{\mathfrak{M}}(A)]_{q-d-1}$ である.

(証明). A は斉次 Buchsbaum k 代数だから, 次のような帰納系が存在する:

$$(A/\Sigma(\underline{x}))(d) \longrightarrow \left(A/\Sigma(\underline{x}^2)\right)(2d) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(A/\Sigma(\underline{x}^\ell)\right)(\ell d) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^d_{\mathfrak{M}}(A),$$

ここに, $1 \le k < \ell$ に対して, 写像 $\left(A/\Sigma(\underline{x}^k)\right)(kd) \longrightarrow \left(A/\Sigma(\underline{x}^\ell)\right)(\ell d)$ は $(x_1 \cdots x_d)^{\ell-k}$ 倍で与えられる. ここで, 自然な射 φ_ℓ: $\left(A/\Sigma(\underline{x}^\ell)\right)(\ell d) \longrightarrow H^d_{\mathfrak{M}}(A)$ は単射であり,

$$\varinjlim \left(A/\Sigma(\underline{x}^\ell)\right)(\ell d) = H^d_{\mathfrak{M}}(A)$$

が成立する (例えば, [14, Lemma 1.3] を参照せよ). このとき, 補題は次の Claim から従う.

Claim. $A_{q-1+(\ell-1)d} \subseteq (x_1 \cdots x_d)^{(\ell-1)d}\mathfrak{M}^{q-1} + \Sigma(\underline{x}^\ell)$.

実際,

$$\mathfrak{M}^{q-1+(\ell-1)d} = Q^{(\ell-1)d}\mathfrak{M}^{q-1} \subseteq (x_1^\ell, \ldots, x_d^\ell)\mathfrak{M}^{q-1+(\ell-1)d-\ell} + (x_1 \cdots x_d)^{\ell-1}\mathfrak{M}^{q-1}$$

である. □

定理の証明に戻ろう. 補題 3.4 と $a(A) \le q-d-1$ から, $H^d_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ $(n \ge q-1-d)$ が得られる.

(2) $\Longrightarrow$ (6) : $a(A) = q-d-2$ と仮定すると, 任意の $n \ge q-1$ に対して,

$$[A/\Sigma(Q)]_n \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} [H^d_{\mathfrak{M}}(A)]_{n-d} = 0$$

だから, 求める式が得られる.

最後に, $a(A)=q-d-2$ の下で, $\mathrm{Soc}\,(H_{\mathfrak{M}}^d(A))=[H_{\mathfrak{M}}^d(A)]_{q-d-2}$ を証明しよう. そのためには, 任意の $n\le q-d-3$ に対して, $[\mathrm{Soc}\,(H_{\mathfrak{M}}^d(A))]_n=0$ を言えば充分である. 上記に述べた帰納系を考える:

$$[A/\Sigma(Q)]_{n+d}\xrightarrow{x_1\cdots x_d}[A/\Sigma(\underline{x}^2)]_{n+2d}\xrightarrow{x_1\cdots x_d}\cdots\longrightarrow[H_{\mathfrak{M}}^d(A)]_n.$$

[14, Proposition 3.8] により, 我々は

$$\mathrm{Soc}\,(H_{\mathfrak{M}}^d(A))\subseteq \mathrm{Hom}_A(A/Q,H_{\mathfrak{M}}^d(A))=\varphi_2\left(\frac{\sum_{i=1}^d x_1\cdots\widehat{x_i}\cdots x_d\Sigma(Q)+\Sigma(\underline{x}^2)}{\Sigma(\underline{x}^2)}\right)$$

を知っている. $\Sigma(Q)=\mathfrak{M}^{q-1}+Q$ であることに注意すると, $j\le q+d-3$ のとき,

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^d x_1\cdots\widehat{x_i}\cdots x_d\Sigma(Q)+\Sigma(\underline{x}^2)\right]_j &= \sum_{i=1}^d x_1\cdots\widehat{x_i}\cdots x_d[Q]_{j-d+1}+[\Sigma(\underline{x}^2)]_j\\ &\subseteq x_1\cdots x_dA_{j-d}+[\Sigma(\underline{x}^2)]_j\end{aligned}$$

である. ゆえに, $[\mathrm{Soc}\,(H_{\mathfrak{M}}^d(A))]_n\cong\left[\frac{\Sigma(Q):\mathfrak{M}}{\Sigma(Q)}\right]_{n+d}$ $(n\le q-d-3)$ である. そこで, 次の Claim を示せば良い.

Claim: $[\Sigma(Q):\mathfrak{M}]_j\subseteq[\Sigma(Q)]_j$ $(j\le q-3)$.

$j\le q-3$ を固定する. 任意の $\xi\in[\Sigma(Q):\mathfrak{M}]_j$ に対して, $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}\xi)\subseteq\mathfrak{M}\Sigma(Q)\subseteq Q$ である. $\mathrm{Soc}\,(A/Q)$ は次数 $q-1$ の所に集中しているので, $a\in A_1$ に対して, $a\xi\in[\mathfrak{M}\xi]_{j+1}\subseteq[Q:\mathfrak{M}]_{j+1}=[Q]_{j+1}$ である. 従って, $\mathfrak{M}\xi\subseteq Q$. すなわち, $\xi\in[Q:\mathfrak{M}]_j=[Q]_j\subseteq[\Sigma(Q)]_j$ となり, Claim が得られる.

以上で, 定理 3.1 の証明を終える. □

注意 3.5. A を q-linear resolution をもつ Buchsbaum 斉次 k 代数とし, $x\in A_1$ を正則元とすれば A/xA は再び q-linear resolution を持つが, A が minimal multiplicity of degree q を持っても, $d\ge 2$ で A が多項式環でなければ, A/xA は minimal multiplicity を持たない.

4. いくつかの例

この節では, minimal multiplicity を持つ Buchsbaum 環の例をいくつか述べよう. 最初に, この概念を導入するきっかけになった Stanley–Reisner 環の場合について述べておく. 我々の概念は, Stanley–Reisner 環の場合には, [13] により導入された概念と一致する. 実際, どちらも $a(A)=\mathrm{indeg}\,A-\dim A-2$ で特徴づけることができる.

例 4.1 (Terai–Yoshida [13, Theorem 2.3] 参照). $A=k[\Delta]$ を $V=\{1,2,\dots,n\}$ 上の Buchsbaum 単体的複体 Δ に付随する d 次元の Stanley–Reisner 環とする:

$$k[\Delta]=k[X_1,\dots,X_n]/(X_{i_1}\cdots X_{i_p}\,:\,1\le i_1<\cdots<i_p\le n,\ \{i_1,\dots,i_p\}\notin\Delta).$$

このとき, $c=\mathrm{codim}\,A$, $q=\mathrm{indeg}\,A$ とおくと, $e(A)\ge\frac{c+d}{d}\binom{c+q-2}{q-2}$ であり, 次の条件は互いに同値である:

(1) A は Buchsbaum Stanley–Reisner 環で, minimal multiplicity of degree q を持つ. すなわち, $e(A)=\frac{c+d}{d}\binom{c+q-2}{q-2}$ が成り立つ.
(2) $a(A)=q-d-2$.

(3) A は Buchsbaum 斉次 k 代数として, minimal multiplicity of degree q を持つ.
(4) A は q-linear resolution を持ち, $\dim_k \widetilde{H}_{q-2}(\Delta; k) = h_{c,d,q}$ が成り立つ. ただし,

$$h_{c,d,q} = \frac{c(c+1)\cdots(c+q-2)}{d(d-1)\cdots(d-q+2)}.$$

(5) Δ の h 列は次のように書ける : $h = h_{c,d,q}$ として,

$$\left(1,\, c,\, \cdots,\, \binom{c+q-2}{q-1},\, -\binom{d}{q}h,\, \binom{d}{q+1}h, \cdots, (-1)^{d-q+1}\binom{d}{d}h\right).$$

(6) $a(k[\mathrm{lk}_\Delta\{x_i\}]) = q-d-1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が成り立つ. ここで,

$$\mathrm{lk}_\Delta\{x\} = \{G \in \Delta : G \cup \{x\} \in \Delta,\, G \cap \{x\} = \emptyset\}$$

は Δ の $\{x\}$ に関する link を表す.

$2 \le q \le d$, $c \ge 2$ とする. [13] において, $h_{c,d,q} = 1$, すなわち, $c(c+1)\cdots(c+q-2) = d(d-1)\cdots(d-q+2)$ の場合には, Δ を巡回凸多面体の境界複体の Alexander dual 複体に取れば, $k[\Delta]$ は minimal multiplicity of degree q の Buchsbaum Stanley–Reisner 環になることを示した. さらに, $d=3$ の場合には [8] により構成された単体的複体が minimal mutiplicity of degree 3 の例を与えることが分かっている ([13] 参照). Stanley–Reisner 環は被約 (reduced) だから, 次を得る.

系 4.2. $2 \le q \le d$, $c \ge 2$ とする. $h_{c,d,q} = 1$ または $d \le 3$ のときは被約な d 次元 *Buchsbaum* 斉次 k 代数で *minimal multiplicity of degree* q を持つ環の例が具体的に構成できる.

上で構成したような被約な例はもちろん $\operatorname{depth} A > 0$ の例である. 以下のように, $\operatorname{depth} A = 0$ の例は 1 つ小さい initial degree の linear resolution を持つ Cohen–Macaulay 斉次代数から自然に構成することができる.

命題 4.3. $q \ge 2$ とし, $A/H^0_{\mathfrak{M}}(A)$ が *Cohen–Macaulay* となる d 次元斉次 k 代数 A ($c = \operatorname{codim} A$) を考える. このとき, A は *Buchsbaum* であり, 次の条件は同値である :
(1) A は *minimal multiplicity of degree* q を持つ. すなわち, $e(A) = \binom{c+q-2}{q-2}$.
(2) A は q-*linear resolution* を持ち, $h^0(A) = \binom{c+q-2}{q-1}$.
(3) $a(A) = q-d-2$.
(4) $A/H^0_{\mathfrak{M}}(A)$ は $(q-1)$-*linear resolution* を持つ.

特に, S/J が *Cohen–Macaulay* 斉次 k 代数で $(q-1)$-*linear resolution* を持つと仮定すると, $A = S/\mathfrak{M}J$ は *Buchsbaum* 斉次 k 代数 で, *minimal multiplicity of degree* q を持ち, $h^0(A) = \mu_S(J)$ が成り立つ. ここで, $\mu_S(J)$ は J の S 上の極小生成系に等しい.

上の方法で構成されない $\operatorname{depth} A = 0$ の例も存在する.

例 4.4. $S = k[x, y, z, w]$ を体 k 上の 4 変数の多項式環とする.
(1) $I = (x, y, z, w)(xw - yz, y^2 - xz, z^2 - xw)$, $A = S/I$ とおくと, $A/H^0_{\mathfrak{M}}(A) \cong k[s^3, s^2t, st^2, t^3]$ は Cohen–Macaulay で 2-linear resolution を持つので, 先の命題により, A は 2 次元 Buchsbaum で minimal multiplicity of degree 3 を持つ. また,

$$H^0_{\mathfrak{M}}(A) = k(-2), \quad H^1_{\mathfrak{M}}(A) = 0; \quad e(A) = 3.$$

(2) $I = ((x,y,z,w)(xw-yz), z^3-yw^2, y^3-x^2z, xz^2-y^2w)$ とおくと,

$$H^0_{\mathfrak{M}}(A) = k(-2), \quad H^1_{\mathfrak{M}}(A) = k(-1); \quad e(A) = 4$$

ゆえ, $A = S/I$ は minimal multiplicity of degree 3 を持つ Buchsbaum 斉次 k 代数であるが, $A/H^0_{\mathfrak{M}}(A) \cong k[s^4, s^3t, st^3, t^4]$ は Cohen–Macaulay ではない.

$e(A) = 2$ の Buchsbaum 斉次 k 代数で, $\operatorname{depth} A > 0$ ならば, minimal multiplicity (of degree 2) を持つ ([3]). しかし, $e(A) = 2$ でも, $\operatorname{depth} A = 0$ のときは, 例えば, $A = k[x,y,z]/(xz^2, yz^2, z^3)$ は狭義の minimal multiplicity は持たない. しかし, このような例でも広義の minimal multiplicity は持つことを示すことができる.

例 4.5. $e(A) = 2$ の Buchsbaum 斉次 k 代数は, minimal multiplicity of degree 2 または degree 3 を持つ.

整域の場合の minimal multiplicity を持つ Buchsbaum 環の存在は, $q = 2$ か $q \geq 3$ かはややデリケートである. ここでは, 次の結果を述べるだけに留めておく.

例 4.6. k を代数的閉体と仮定する. $q \leq 2$ のとき, 多項式環以外には k 上の Buchsbaum 斉次整域で minimal multiplicity of degree q を持つものは存在しない. 一方, $q \geq 3$ のときには, この主張は成り立たない.

References

[1] S. S. Abhyankar, *Local rings of high embedding dimension*, Amer. J. Math. **89** (1967), 1073–1077.

[2] D. Eisenbud and S. Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicity*, J. Algebra **88** (1984), 89–133.

[3] S. Goto, *Buchsbaum rings with multiplicity* 2, J. Algebra **74** (1982), 494–508.

[4] S. Goto, *Buchsbaum rings of maximal embedding dimension*, J. Algebra **76** (1982), 383–399.

[5] S. Goto, *On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings*, J. Algebra **85** (1983), 490–534.

[6] S. Goto, *Noetherian local rings with Buchsbaum associated graded rings*, J. Algebra **86** (1984), 336–384.

[7] S. Goto and K. Yoshida, *Buchsbaum rings with minimal multiplicity*, in preparation.

[8] K. Hanano, *Construction of two-dimensional Buchsbaum simplicial complexes*, Europ. J. Combinatorics **22** (2001), 171–178.

[9] L. T. Hoa and C. Miyazaki, *Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for generalized Cohen–Macaulay graded rings*, Math. Ann. **301** (1995), 587–598.

[10] Y. Kamoi and W. Vogel, *On Buchsbaum Algebras*, J. Pure Appl. Algebra **122** (1997), 251–263.

[11] J. D. Sally, *On the associated graded rings of a local Cohen–Macaulay ring*, J. Math. Kyoto Univ. **17** (1977), 19–21.

[12] J. D. Sally, *Cohen-Macaulay local rings of maximal embedding dimension*, J. Algebra **56** (1979), 168–183.

[13] N. Terai and K. Yoshida, *Buchsbaum Stanley–Reisner rings with minimal multiplicity*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 55–65.

[14] K. Yamagishi, *Idealizations of maximal Buchsbaum modules over a Buchsbaum ring*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **104** (1988), 451–478.

後藤四郎, 〒 214–8571 川崎市多摩区東三田１－１－１, 明治大学理工学部数学教室,
Shiro Goto, goto@math.meiji.ac.jp

吉田健一, 〒 464–8602 名古屋市千種区不老町, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科,
Ken-ichi Yoshida, yoshida@math.nagoya-u.ac.jp

Base change of an invariant subring

橋本 光靖

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
hasimoto@math.nagoya-u.ac.jp

Abstract

R は Dedekind 整域, G はアフィン平坦 R 群スキーム, B は G の作用する平坦 R 代数とする. $A \to B^G$ は R 代数の準同型とする. A はネーターと仮定する. もし任意の R 代数である代数的閉体 K に対して, 誘導される射 $K \otimes A \to (K \otimes B)^{K \otimes G}$ が同型になるならば, 任意の R 代数 S に対して $S \otimes A \to (S \otimes B)^{S \otimes G}$ が同型であることを証明する.

1. 序

この報告では, 次を証明する.

定理 1. R が Dedekind 整域, G はアフィン平坦 R 群スキーム, M は R 平坦 G 加群とする. A はネーター R 代数とし, V は有限生成 A 加群とする. $\varphi\colon V \to M^G$ は R 線型写像とする. もし任意の R 代数である代数的閉体 K に対して誘導される射 $\varphi_K\colon K \otimes V \to (K \otimes M)^{K \otimes G}$ が同型ならば, 任意の R 代数 S に対して自然な射 $\varphi_S\colon S \otimes V \to (S \otimes M)^{S \otimes G}$ は同型である.

系として, 次が成立する.

系 2. R は Dedekind 整域, G はアフィン平坦 R 群スキーム, B は G の作用する平坦 R 代数とする. A はネーター R 代数とし, $\varphi\colon A \to B^G$ は R 代数の準同型とする. 任意の R 代数である代数的閉体 K に対して誘導される準同型 $\varphi_K\colon K \otimes A \to (K \otimes B)^{K \otimes G}$ が同型であるなら, 任意の R 代数 S に対して自然な射 $\varphi_S\colon S \otimes A \to (S \otimes B)^{S \otimes G}$ は同型である.

もし作用と不変式環の生成元と関係式の候補が Dedekind 整域 (例えば $\mathbb{Z}$) の上で与えられ, 問題となる群スキームがその Dedekind 整域上平坦であれば, 一般の可換環上の代りに代数的閉体の上で議論をすれば良いことになる.

与えられた Dedekind 整域上の群スキーム G が平坦かどうかも, ある場合には体上の議論で判定できる. 次の補題により, 例えば symplectic 群は $\mathbb{Z}$ 上平坦であることが確かめられる.

補題 3. R は $\mathbb{Z}$ または体上有限生成で, 体ではない Dedekind 整域, G は有限型な R スキームで, 構造射 $\pi\colon G \to \operatorname{Spec} R$ は切断 $\sigma\colon \operatorname{Spec} R \to G$ を持つとする. また, ある非負整数 d が存在して, 任意の R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $R/\mathfrak{m} \otimes G$ は既約被約で d 次元とする. このとき G は R 平坦で既約被約 $d+1$ 次元である.

証明. まず, $f\colon X \to \operatorname{Spec} R$ が有限型の時に, $x \in X$ が閉点ならば, $f(x)$ も閉点で, $\kappa(x)/\kappa(f(x))$ は代数拡大である. これは, R 上有限型な体は R が $\mathbb{Z}$ 上有限生成のときは有限体, 体 k 上有限生成のときは k の有限次代数拡大体であることから容易である.

次に, R の極大イデアルの全体 $\operatorname{Max}(R)$ は無限集合である. そうでないとすると, ある $a \in R \setminus \{0\}$ が存在して $R[a^{-1}]$ が体になるが, 前段により, R が体になって仮定に反して矛盾である.

[9, Theorem 31.7] により, R は強鎖状である. A が R 上有限生成整域とすると, 次元公式 [9, Theorem 15.6] によって, A の極大イデアル $\mathfrak{M}$ に対して,

$$\begin{aligned}\operatorname{ht}\mathfrak{M} = \operatorname{ht}(\mathfrak{M} \cap R) + \operatorname{trans.deg}_{Q(R/P)} Q(A) - \operatorname{trans.deg}_{R/(\mathfrak{M}\cap R)} A/\mathfrak{M} \\ = \operatorname{trans.deg}_{Q(R/P)} Q(A) + 1\end{aligned}$$

でこれは $\mathfrak{M}$ によらないから $\dim A_{\mathfrak{M}} = \dim A$. ここに P は $R \to A$ の核である. よって, X が既約な R スキームならば, X の任意の閉点 x について, $\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$ であることに注意する.

まず, G の既約成分でその π による像が $\operatorname{Spec} R$ の生成点を含むものがただひとつ存在することを示す. π は切断 σ を持つから全射で, そのような既約成分は存在する. そのような既約成分 G_0, G_1 ($G_0 \neq G_1$) が 2 つあったとせよ. G_0 から, G_0 と他の既約成分との交わりを除いた G の開集合を U, G_1 から, G_1 と他の既約成分との交わりを除いた G の開集合を V とする. $\pi(U)$, $\pi(V)$ は $\operatorname{Spec} R$ 内で稠密な可構集合だから, $\operatorname{Spec}(R)$ から有限個の閉点を除いたものである. $\operatorname{Max}(R)$ は無限集合なので, ある $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R) \cap \pi(U) \cap \pi(V)$ が存在する. $R/\mathfrak{m} \otimes G$ は既約で, $R/\mathfrak{m} \otimes U$, $R/\mathfrak{m} \otimes V$ はその空でない開集合で, 互いに交わらないから矛盾. G の既約成分で構造射 $\pi\colon G \to \operatorname{Spec} R$ による像が $\operatorname{Spec} R$ の生成点を含むものがただひとつなので, それを G° で表す. G° の生成点を η で表す.

G の open subset U に対して, $\Gamma(\mathcal{I}, U) := \Gamma(\mathcal{O}_G, U)_{\mathrm{tor}}$ と定義して, $\mathcal{I}$ は G の連接イデアル層である. ここに, R 加群 M に対して M_{tor} は M の torsion part $\{m \in M \mid \exists a \in R \setminus \{0\}\ am = 0\}$ である. $\mathcal{I}$ を定義イデアルとする G の閉部分スキームを $\bar{G}$ とする. 定義により $\bar{G}$ は R 平坦である. Going-down theorem により, $x \in \bar{G}$ ならば, x の一般化 ξ で $\pi(\xi)$ が $\operatorname{Spec} R$ の生成点であるものがある. よって集合論的に $\bar{G} \subset G^\circ$ である. また, $Q(R) \otimes \bar{G} = Q(R) \otimes G \ni \eta$ なので, $\eta \in \bar{G}$. ゆえに集合論的に $G^\circ \subset \bar{G}$. 以上により, 集合論的に $\bar{G} = G^\circ$ であり, $\bar{G}$ は既約.

切断 $\sigma\colon \operatorname{Spec} R \subset G$ (π が分離射と仮定していないので, 一般には閉埋入とは限らない埋入である) のスキーム論的像 E は R 平坦である. 実際, $U = \operatorname{Spec} A$ が G のアフィン開集合とすると, $E \cap U = \operatorname{Spec} B$, ここに, B は $A \to \Gamma(\sigma^{-1}(U), \operatorname{Spec} R)$ の像である. $\Gamma(\sigma^{-1}(U), \operatorname{Spec} R)$ が R-torsion free なので, B もそうである.

H が R 平坦な G の閉部分スキームならば, H は $\bar{G}$ に含まれる. 特に E は $\bar{G}$ の閉部分スキームであり, σ は $\bar{G}$ を経由する. 従って $\pi(\bar{G}) = \operatorname{Spec} R$.

$Z = \operatorname{Supp}\mathcal{I}$ とおくと, Z は G の closed subset であり, $\pi(Z) \subset \operatorname{Spec} R$ は可構集合で生成点を含まない. よって $\pi(Z)$ は有限個の閉点のみからなる集合. ところが $\operatorname{Max}(R)$ は無限集合なので, ある $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max}(R) \setminus \pi(Z)$ がとれ, $R/\mathfrak{n} \otimes \bar{G} \cong R/\mathfrak{n} \otimes G$ は d 次元. 閉点 $y \in R/\mathfrak{n} \otimes \bar{G}$ をとる. $\bar{G}$ の既約性と最初の注意と $\bar{G}$ の平坦性を利用して,

$$\dim \bar{G} = \dim \mathcal{O}_{\bar{G},y} = \dim \mathcal{O}_{R/\mathfrak{n}\otimes\bar{G},y} + \dim R_{\pi(y)} = \dim R/\mathfrak{n} \otimes \bar{G} + \dim R = d + 1.$$

今, $\pi(Z)$ が仮に空でないとして, $\mathfrak{m} \in \pi(Z)$ とする. 列

$$0 \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \otimes_{\mathcal{O}_G} \mathcal{I} \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \otimes_{\mathcal{O}_G} \mathcal{O}_{\bar{G}} \to 0 \tag{1}$$

は完全である: これは, 任意の G のアフィン開集合 $U = \operatorname{Spec} A$ に対して, $I := \Gamma(U, \mathcal{I}) = A_{\mathrm{tor}}$ とおくとき,

$$0 \to A/\mathfrak{m}A \otimes_A I \to A/\mathfrak{m}A \to A/\mathfrak{m}A \otimes_A A/I \to 0$$

が完全であることと同じだが, $A/\mathfrak{m}A\otimes_A$ は $R/\mathfrak{m}\otimes_R$ と同じで, A/I が R-flat だからこの列は完全である. $\mathfrak{m}$ の選び方と中山の補題により, $\mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \otimes \mathcal{I} \neq 0$. $R/\mathfrak{m} \otimes G$ は d 次元既約被約だから, $R/\mathfrak{m} \otimes \bar{G}$ は d 次元未満で, ($\pi(\bar{G}) = \operatorname{Spec} R$ だから) 空ではない. $x \in R/\mathfrak{m} \otimes \bar{G}$ を閉点とする. $\bar{G}$ の既約性と最初の注意, また $\bar{G}$ の平坦性により,

$$\dim \bar{G} = \mathcal{O}_{\bar{G},x} = \dim O_{R/\mathfrak{m}\otimes G,x} + \dim R_{\pi(x)} < d+1.$$

これは矛盾である.

以上により, $\pi(Z) = \emptyset$, つまり, $G = \bar{G}$ が示された. つまり G は平坦既約で $d+1$ 次元である.

A が R 平坦代数で $a \in A$, $r \in R \setminus \{0\}$, ra がベキ零とすると, ある n に対し $r^n a^n = 0$ だから $a^n = 0$. つまり, a はベキ零. これは A_{red} が R 平坦であることを示す. このことから, G_{red} も R 平坦である. $G \neq G_{\mathrm{red}}$ とせよ. $\mathcal{J}$ を G_{red} の G における定義イデアルとし, $\mathfrak{m} \in \pi(\operatorname{Supp}(\mathcal{J}))$ とすると, 上と同様の議論で,

$$0 \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \otimes_{\mathcal{O}_G} \mathcal{J} \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G_{\mathrm{red}}} \to 0$$

は完全で, $\mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \otimes_{\mathcal{O}_G} \mathcal{J} \neq 0$. これは $R/\mathfrak{m} \otimes G$ が被約であることに反して矛盾である. 従って $\mathcal{J} = 0$ で G は被約である. □

De Concini と Procesi [3] は任意の可換環上, いくつかの重要な群スキームの作用について, その不変式環を計算している. [6] では一般線型群とシンプレクティック群の作用について, 体上での幾何的な議論を利用した簡単な証明を与えている. 一般の基礎環の場合を体上の場合に帰着させるため, [6] では良いフィルター付けの知識が利用されているが, 一般線型群とシンプレクティック群は $\mathbb{Z}$ 上平坦だと分かっているので, これは全くの一般論であったということが分かる.

2 節では上記定理を証明する. 3 節では, 応用例を与える.

2. 主定理の証明

R は可換環, G は R 平坦 R 群スキームとする. C は G の座標環 $R[G]$ を表すものとする. これは R 平坦な可換 R ホップ代数となる. G 加群とは, 右 C 余加群に他ならない. [7, Chapter 2] を参照. G 加群 M に対し, $M^G = \{m \in M \mid \omega(m) = m \otimes 1\}$ とおく, ここに $\omega\colon M \to M \otimes C$ は余作用である. 自然な埋め込み $\operatorname{Hom}_G(R, M) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_R(R, M) = M$ により, R 加群 $\operatorname{Hom}_G(R, M)$ は M^G と同一視される. ここに R は自明な G 加群としての構造を与えられている.

一般に, R 加群 V は自明な G 加群であると見なされる. 従って, G 加群 M と R 加群 V に対して, $V \otimes M$ は余作用が

$$1_V \otimes \omega_M \colon V \otimes M \to V \otimes M \otimes C$$

で与えられる G 加群である. ここに ω_M は M の余作用.

G 加群の圏は abelian で, 十分多くの単射的対象を持つ ([5, Lemma I.3.3.3] および [5, Lemma I.3.5.9]). G 加群 M と R 代数 S に対し, $S \otimes M$ の右 $S \otimes C$ 余加群としての構造は合成

$$S \otimes M \xrightarrow{1_S \otimes \omega} S \otimes M \otimes C \xrightarrow{\alpha} (S \otimes M) \otimes_S (S \otimes C),$$

で与えられる．ここに α は $\alpha(s\otimes m\otimes c)=(s\otimes m)\otimes(1\otimes c)$ で与えられる同型である．特に，$(S\otimes M)^{S\otimes G}=(S\otimes M)^G$ である．従って $(S\otimes M)^G$ は S 加群である．

$\varphi\colon V\to M^G$ は R 線型写像とする．このとき，$\varphi_S\colon S\otimes V\to(S\otimes M)^G$ を $\varphi_S(s\otimes v)=s\otimes\varphi(v)$ で定義する．R 代数の射 $S\to S'$ に対し，$\rho_{S',S}\colon S'\otimes_S(S\otimes M)^G\to(S'\otimes M)^G$ を

$$\rho_{S'S}(s'\otimes(\sum_i s_i\otimes m_i))=\sum_i s's_i\otimes m_i$$

で定義する．$\rho_{S,R}\colon S\otimes M^G\to(S\otimes M)^G$ は ρ_S で表す．従って $s\in S$ および $m\in M^G$ に対して $\rho_S(s\otimes m)=s\otimes m$ である．φ_S は合成

$$S\otimes V\xrightarrow{1\otimes\varphi}S\otimes M^G\xrightarrow{\rho_S}(S\otimes M)^G$$

であることに注意する．

G 加群 M に対し，$\mathrm{Ext}^i_G(R,M)$ を $H^i(G,M)$ で表し，M の i 番目の G コホモロジーと呼ぶ．特に，$H^0(G,M)=M^G$ である．

M は G 加群とする．すると [5, Lemma I.3.6.16] により，$H^i(G,M)\cong H^i(\mathrm{Cobar}_C(M,R))$ である．ここに $\mathbb{F}(M):=\mathrm{Cobar}_C(M,R)$ は複体

$$M\xrightarrow{\delta^0}M\otimes C\xrightarrow{\delta^1}M\otimes C\otimes C\xrightarrow{\delta^2}\cdots$$

であって，その boundary map が

$$\delta^n=(-1)^{n+1}\omega_M\otimes 1_{C^{\otimes n}}+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}1_M\otimes 1_{C^{\otimes i}}\otimes\Delta_C\otimes 1_{C^{\otimes n-i-1}}+1_M\otimes 1_{C^{\otimes n}}\otimes u$$

で与えられるものである．ここに，$\Delta_C\colon C\to C\otimes C$ は余積，$u\colon R\to C$ は unit map である．定義により，R 加群 V に対し，$\mathbb{F}(V\otimes M)\cong V\otimes\mathbb{F}(M)$ である．もし M が R 平坦ならば，$\mathbb{F}(M)$ は R 平坦複体である．従って，普遍係数定理 [5, Lemma III.2.1.2] とその証明により，次が成立する．

補題 4. R が Dedekind 整域で M が R 平坦 G 加群とすると，完全列

$$0\to S\otimes M^G\xrightarrow{\rho_S}(S\otimes M)^G\to\mathrm{Tor}_1^R(S,H^1(G,M))\to 0$$

が存在する．

定理 1 の証明．R, G, A, V, および M は定理の通りとする．

まず，定理を S が体の場合に証明する．K を S の代数的閉包とする．$\varphi_S\colon S\otimes V\to(S\otimes M)^G$ と K との S 上のテンサー積をとって，$1\otimes\varphi_S\colon K\otimes V\to K\otimes_S(S\otimes M)^G$ を得る．K は S 上忠実平坦なので，この写像が同型ならば良い．合成

$$K\otimes V\xrightarrow{1\otimes\varphi_S}K\otimes_S(S\otimes M)^G\xrightarrow{\rho_{K,S}}(K\otimes M)^G$$

は φ_K であり，定理の仮定により同型である．K は S 平坦なので，$\rho_{K,S}$ は補題 4 により同型である．従って $1\otimes\varphi_S$ は望み通り同型となり，定理は S が体の場合正しい．

次に $H^1(G,M)$ が R 平坦であることを示す．R がネーターなので，すべての R の素イデアル P に対し，$\mathrm{Tor}_1^R(R/P,H^1(G,M))=0$ であることをいえば良い．R が 1

次元整域なので, R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, H^1(G,M))=0$ であることをいえば良い. 一方, 合成

$$R/\mathfrak{m}\otimes V \xrightarrow{1\otimes\varphi} R/\mathfrak{m}\otimes M^G \xrightarrow{\rho_{R/\mathfrak{m}}} (R/\mathfrak{m}\otimes M)^G,$$

であるところの $\varphi_{R/\mathfrak{m}}$ は, 前段により, 同型である. 従って $\rho_{R/\mathfrak{m}}$ は全射である. 補題 4 により, $\mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, H^1(G,M))=0$ である. 従って $H^1(G,M)$ は望み通り R 平坦である.

$H^1(G,M)$ が R 平坦なので, 任意の R 代数 S に対して

$$\rho_S\colon S\otimes M^G\to(S\otimes M)^G$$

は補題 4 によって同型である. 任意の R 代数である体 K に対して合成

$$K\otimes V\xrightarrow{1\otimes\varphi} K\otimes M^G \xrightarrow{\rho_K} (K\otimes M)^G,$$

は φ_K と一致し, これは同型で, ρ_K も同型であるから, $1\otimes\varphi\colon K\otimes V\to K\otimes M^G$ も同型である.

次に V が R 平坦であることを示す. まず, R が DVR の場合に示す. t は R の極大イデアルの生成元とする. V がネーター A 加群なので, R 加群としての捻じれ部分 $V_{\mathrm{tor}}=\bigcup_{r\geq 0}(0:_V t^r)$ は ある r に対して $(0:_V t^r)$ に一致する. $V_{\mathrm{tor}}\neq 0$ であるとせよ. すると $r\geq 1$ である. r を出来るだけ小さくとる. すると $a\in(0:t^r)\setminus(0:t^{r-1})$ がとれる. もし $a\in tV$ と仮定すると, $a=ta'$, $a'\in V$ とかける. すると $a'\in V_{\mathrm{tor}}=(0:t^r)$ だから, $t^{r-1}a=t^ra'=0$. これは a の取り方に反して矛盾. 従って $a\notin tV$. よって $1\otimes a\in R/tR\otimes_R V$ は 0 でない. $1\otimes\varphi\colon R/tR\otimes_R V\to R/tR\otimes M^G$ は同型なので, $1\otimes\varphi(a)\in R/tR\otimes M^G$ は 0 でない. これは M^G において $\varphi(a)\neq 0$ であることを示す. M^G は捻じれのない R 加群なので, $\varphi(t^ra)=t^r\varphi(a)$ も 0 でない. これは仮定 $t^ra=0$ に反して矛盾. 従って V は R 加群として捻じれがない. R は DVR なので, V は R 平坦である. 一般の場合を考える. $\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする. 上の議論を $R'=R_\mathfrak{m}$, $A'=R'\otimes A$, $V'=R'\otimes V$ および $M'=R'\otimes M$ に適用して, 任意の $\mathfrak{m}$ に対して $V_\mathfrak{m}$ が $R_\mathfrak{m}$ 平坦である. これは V が R 平坦であることを示す.

[5, Lemma I.2.1.4] により, $\varphi\colon V\to M^G$ は単射であり, $C:=\mathrm{Coker}\,\varphi$ は R 平坦である. R 代数である体 K に対して $K\otimes C=0$ なので, [5, Corollary I.2.1.6] により $C=0$ である. これは φ が同型であることを示す.

S が R 代数とする. 合成

$$S\otimes V\xrightarrow{1\otimes\varphi} S\otimes M^G\xrightarrow{\rho_S}(S\otimes M)^G$$

は $1\otimes\varphi$ と ρ_S が同型だから同型である. これが示すべきことであった. □

3. 応用

R は可換環とする. R スキーム Z に対し, $\Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)$ を $R[Z]$ で表す. $v\geq 0$ と有限生成 R 自由加群 F と G に対し, rank 高々 v の線型写像からなる $\mathrm{Hom}_R(F,G)$ の閉部分スキームを $Y_v(F,G)$ で表す. 写像 $R[\mathrm{Hom}_R(F,G)]\to R[Y_v(F,G)]$ の核を $I_{v+1}(F,G)$ で表す. もし F と G がそれぞれ rank f と g ならば, $R[\mathrm{Hom}_R(F,G)]$ は fg 変数多項式環 $R[x_{ij}]_{1\leq i\leq g,\,1\leq j\leq f}$ に同一視され, $I_{v+1}(F,G)$ は行列 (x_{ij}) のすべての $v+1$ 次の小行列式全部で生成される $R[x_{ij}]$ のイデアルと同一視される. もし $v\geq\min(f,g)$ ならば $Y_v(F,G)=\mathrm{Hom}_R(F,G)$ であり, $I_{v+1}(F,G)=0$ である.

$m, n, r, s, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $s \leq m, r$ であり, $t \leq n, r$ とする. $u := \min(s,t)$ とおく. $V := R^n$, $W := R^m$, $E := R^r$, $X := Y_s(E,W) \times Y_t(V,E)$, $Y := Y_u(V,W)$ とおく. $\pi \colon X \to Y$ を $\pi(\varphi,\psi) = \varphi \circ \psi$ により定義する. $G := GL(E)$ とし, $G' := GL(W) \times GL(V)$ とする. すると $G \times G'$ は X に $g \in G$, $g_1 \in GL(W)$, $g_2 \in GL(V)$ $\varphi \in Y_s(E,W)$, $\psi \in Y_t(V,E)$ について $(g,(g_1,g_2)) \cdot (\varphi,\psi) = (g_1 \varphi g^{-1}, g \psi g_2^{-1})$ によって作用する. $G \times G'$ を Y に $g \in G$, $g_1 \in GL(W)$, $g_2 \in GL(V)$, $\rho \in Y$ に対して $(g,(g_1,g_2)) \cdot \rho = g_1 \rho g_2^{-1}$ で作用させることにより, 射 π は $G \times G'$ 同変である. G は Y に自明に作用することに注意する.

定理 1 の応用として, 次を証明する.

定理 5. 射 $\pi \colon X \to Y$ は同型 $\pi^{\#} \colon R[Y] \to R[X]^G$ を誘導する.

証明. 定理 1 により, $R = K$ は代数的閉体として良い.

次の表現論からの基本的な事実を思い出す. G 加群 M が良いフィルター付けを持つとは, 任意の支配的ウエイト λ に対して $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta_G(\lambda), M) = 0$ となることをいう. ここに, $\Delta_G(\lambda)$ は最高ウエイト λ の Weyl 加群 [7, (II.4.16)] である.

分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ で $\lambda_1 \leq r$ であるものに対し, Schur 加群 [1] $L_\lambda E^*$ は双対 Weyl 加群である. 実際, $L_\lambda E^* \cong (\bigwedge^r E^*)^{\otimes k} \otimes L_\mu E$ である. ここに $\mu = (r - \lambda_k, \ldots, r - \lambda_1)$. Cauchy の公式 [1] により, $K[\mathrm{Hom}(E,W)] \cong \mathrm{Sym}(E \otimes W^*)$, $I_{s+1}(E,W)$, $K[Y_s(E,W)]$, $K[\mathrm{Hom}(V,E)] \cong \mathrm{Sym}(V \otimes E^*)$, $I_{t+1}(V,E)$ および $K[Y_t(V,E)]$ は G 加群として良いフィルター付けを持つ. 良いフィルター付けを持つ加群はテンサー積で閉じており [10], [4], [8], 拡大でも閉じているから, 自然な全射

$$\rho \colon K[\mathrm{Hom}(E,W) \times \mathrm{Hom}(V,E)] \to K[Y_s(E,W) \times Y_t(V,E)]$$

の核 I は良いフィルター付けを持つ. これは完全列

$$0 \to I_{s+1}(E,W) \otimes K[\mathrm{Hom}(V,E)] \to I \to K[Y_s(E,W)] \otimes I_{t+1}(V,E) \to 0$$

から分かる. 従って $H^1(G,I) = 0$ である. よって ρ は全射

$$\rho^G \colon K[\mathrm{Hom}(E,W) \times \mathrm{Hom}(V,E)]^G \to K[Y_s(E,W) \times Y_t(V,E)]^G = K[X]^G$$

を誘導する. 次の De Concini と Procesi の定理 [3] により, $\pi^{\#} \colon K[Y] \to K[X]^G$ は全射である.

定理 6. 合成

$$\mathrm{Hom}(E,W) \times \mathrm{Hom}(V,E) \to Y_r(V,W) \qquad ((\varphi,\psi) \mapsto \varphi\psi)$$

は同型 $K[Y_r(V,W)] \to K[\mathrm{Hom}(E,W) \times \mathrm{Hom}(V,E)]^G$ を誘導する.

あとは $\pi^{\#} \colon K[Y] \to K[X]^G$ が単射であることを示せば良い. $K[Y]$ は整域 (例えば [2, (6.3)] を見よ) なので, π は支配射であることをいえば良い. 線形代数により, $0 \leq i \leq u$ である任意の i に対し, rank i の線型写像 $V \to W$ の集合は 1 個の G' 軌道をなす. さらに, rank u の線型写像のなす G'-orbit は Y で稠密である. π が G' 同変なので, $\pi(X)$ が rank u の線型写像を少なくともひとつ含むことをいえば良い. しかしこれは自明である. □

References

[1] K. Akin, D. A. Buchsbaum and J. Weyman, Schur functors and Schur complexes, *Adv. Math.* **44** (1982), 207–278.

[2] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal Rings*, Lecture Notes in Math. **1327**, Springer (1988).

[3] C. De Concini and C. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory, *Adv. Math.* **21** (1976), 330–354.

[4] S. Donkin, *Rational Representations of Algebraic Groups*, Lecture Notes in Math. **1140**, Springer (1985).

[5] M. Hashimoto, *Auslander-Buchweitz Approximations of Equivariant Modules*, Cambridge (2000).

[6] M. Hashimoto, Another proof of theorems of De Concini and Procesi, to appear in *J. Math. Kyoto Univ.*

[7] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, 2nd edition, AMS (2003).

[8] O. Mathieu, Filtrations of G-modules, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **23** (1990), 625–644.

[9] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, first paperback edition, Cambridge (1989).

[10] J. Wang, Sheaf cohomology on G/B and tensor products of Weyl modules, *J. Algebra* **77** (1982), 162–185.

On the basic sequences of integral curves in $\mathbf{P}^3$. II

Mutsumi AMASAKI

Graduate School of Education, Hiroshima University,
1-1-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 739-8524, Japan
E-mail: amasaki@hiroshima-u.ac.jp

January 9, 2006

§1. Main results

Let X be a curve in $\mathbf{P}^3 := \mathbf{P}^3_k$, namely, a locally Cohen-Macaulay equidimensional closed subscheme of $\mathbf{P}^3$ of dimension one, and let I denote the saturated homogeneous ideal of X in a polynomial ring $R := k[x_1, x_2, x_3, x_4]$, where k is an infinite field and the linear forms x_1, x_2, x_3, x_4 are chosen sufficiently generally. Let further $B_R(I) := (a; n_1, \ldots, n_a; n_{a+1}, \ldots, n_{a+b})$ be the basic sequence of I or X.

Several results was presented in [8] on the subject of characterizing basic sequences of integral curves in $\mathbf{P}^3$. Since then, we have made some progress, though small, in the treatment of this subject. The aim of this talk is to show our updated results and an outline of our proof. Our main results are Theorem 5.7, Corollary 5.8, Propositions 5.11, 5.12, and Theorem 6.4 of [10]. They can be summarized together with our related earlier results in the following manner.

Theorem 1. *Assume that X is contained in an irreducible surface of degree $a \geq 2$ and that $b \geq 1$. Let $n'_1, \ldots, n'_\omega$ $(\omega \geq 1)$ be a strictly increasing sequence of integers such that $\{n'_1, \ldots, n'_\omega\} = \{ n_i \mid 1 \leq i \leq a \}$ and let $t_l := \#\{ i \mid n_i = n'_l,\ 1 \leq i \leq a \}$. Then, the following inequalities hold, where an additional assumption* $\mathrm{char}(k) = 0$ *is needed in our proofs of* (ii) – (iv).

(i) *We have $n_i \leq n_{i+1} \leq n_i + 1$ for all $1 \leq i \leq a-1$.*

(ii) *Suppose that $\omega > 1$. Let m be an integer with $1 \leq m < \omega$, $t := \sum_{l=1}^{m} t_l$, and a' be an integer with $t+1 \leq a' \leq a$. If $n_i = n_t + i - t$ for all $t \leq i \leq a'$ and $n_{a+1} < n_{a'}$, then $t(t-1)/2 > p$, where $p := \max\{ i \mid n_{a+i} < n_{a'},\ 1 \leq i \leq b \}$.*

(iii) *Let a' be an integer with $2 \leq a' \leq a$. If $n_i = n_1 + i - 1$ for all $1 \leq i \leq a'$, then $n_{a+1} \geq n_{a'}$.*

(iv) *Let a' be an integer with $3 \leq a' \leq a$. If $n_i = n_1 + i - 2$ for all $2 \leq i \leq a'$, then $n_{a+1} \geq n_{a'}$.*

(v) *If* $n_i = n_1 + i - 1$ *for all* $1 \le i \le a$, *then* $b > 2$ *and* $n_{a+j} \ne n_{a+1} + j - 1$ *for some* $1 \le j \le b$. *If further there is an integer* b_0 *with* $0 < b_0 < b$ *such that* $n_{a+b_0} + 1 < n_{a+b_0+1}$, *then* $b_0 > 2$ *and* $n_{a+j} \ne n_{a+1} + j - 1$ *for some* $1 \le j \le b_0$.

(vi) *Suppose that* $b = 1$ *and that* X *does not contain any line as an irreducible component. Delete the terms* $n'_2, \ldots, n'_\omega$ *from the sequence* $(a, n_1, \ldots, n_a, n_{a+1})$ *and then rearrange the remaining terms so that they make a nondecreasing sequence. Let* $(n''_1, \ldots, n''_{a+3-\omega})$ *denote the resulting sequence. Then*

$$n_{a+1} \le a - 2 + \sum_{j=1}^{a} n_j - \sum_{\gamma=2}^{\omega} n'_\gamma - \sum_{i=1}^{a-\omega} n''_i.$$

Remark 2. See [14] and [3] for (i). The assertion (ii) is our new main result. Two assertions (iii) and (iv) are now corollaries of (ii) and have been improved from their former versions. The assertion (v) has not been improved yet. Special case of (vi) was treated in [1].

In fact, the assertion (ii) of Theorem 1 is equivalent to the following corollary.

Corollary 3. *Assume* $\mathrm{char}(k) = 0$. *Suppose that* X *is contained in an irreducible surface of degree* $a \ge 2$ *and that* $b \ge 1$. *Let* t, a' *be integers with* $t \ge 1$, $t + 1 \le a' \le a$. *If* $n_i = n_t + i - t$ *for all* $t \le i \le a'$ *and* $n_{a+1} < n_{a'}$, *then* $t(t-1)/2 > p := \max\{\, i \mid n_{a+i} < n_{a'},\ 1 \le i \le b \,\}$.

For a sequence $Bseq = (a; n_1, \ldots, n_a; n_{a+1}, \ldots, n_{a+b})$ satisfying $0 < a \le n_1 \le \cdots \le n_a$ and $n_1 \le n_{a+1} \le \cdots \le n_{a+b}$ with $b \ge 0$, put

$$D(Bseq) := \sum_{l=1}^{a} n_l - \frac{1}{2}a(a-1) - b,$$

$$G(Bseq) := 1 + \sum_{l=1}^{a} \frac{1}{2} n_l(n_l - 3) - \sum_{l=1}^{b} n_{a+l} + b - \frac{1}{6}a(a-1)(a-5).$$

Denoting the degree and the arithmetic genus of X by $d(X)$ and $g(X)$ respectively, we have $d(X) = D(B_R(I))$ and $g(X) = G(B_R(I))$ (see [3, Remark 1.9]).

Remark 4. When X is integral, its basic sequence have all the properties stated in the above theorem. Let d, g be a pair of nonnegative integers. If the number of sequences $Bseq = (a; n_1, \ldots, n_a; n_{a+1}, \ldots, n_{a+b})$ with $d = D(Bseq)$ and $g = G(Bseq)$ satisfying all the conditions stated there are small, we can make an effective classification of integral curves in $\mathbf{P}^3$ of degree d and arithmetic genus g.

Here is a table of the number of *Bseq*'s with $d = D(Bseq)$ and $g = G(Bseq)$ satisfying the conditions stated in Theorem 1 and those stated in our old versions. The numbers of *Bseq*'s satisfying Cook's assertions are also listed. It shows to which extent our new results have made improvement in the direction mentioned in the above remark.

		New		Old	
(d,g)	C	A	both	A	both
(9,0)	48	28	27	34	30
(10,0)	111	69	68	98	86
(11,0)	250	142	137	225	187
(12,0)	570	348	311	500	400
(13,0)	1380	804	731	1173	920

C : Cook's assertions which have not been proved completely yet. See [12], [13, Remark 4.4] and [9].

A: Amasaki's conditions.

both: Amasaki's conditions and Cook's assertions simultaneously.

§2. Outline of the proof of (ii) – (iv)

One can verify easily that the assertions (iii) and (iv) are corollaries of (ii).

Proof of (iii) *and* (iv). Suppose that $n_{a+1} < n_{a'}$. We use (ii) with $m = 1$. Then $t = t_1$ and $p \geq 1$. If $2 \leq a' \leq a$ and $n_i = n_1 + i - 1$ for all $1 \leq i \leq a'$, then $t_1 = 1$ and $0 = t_1(t_1 - 1)/2 > p \geq 1$ by (ii). Likewise if $3 \leq a' \leq a$ and $n_i = n_1 + i - 2$ for all $2 \leq i \leq a'$, then $t_1 = 2$ and $1 = t_1(t_1 - 1)/2 > p \geq 1$. Thus we are led to a contadiction. $\square$

It is enough to prove (ii). What we show is this.

- If $\omega > 1$, $1 \leq m < \omega$, $t := \sum_{l=1}^{m} t_l$, $t + 1 \leq a' \leq a$, $n_i = n_t + i - t$ for all $t \leq i \leq a'$, $n_{a+1} < n_{a'}$, and $t(t-1)/2 \leq p := \max\{\, i \mid n_{a+i} < n_{a'},\ 1 \leq i \leq b \,\}$,

  $\Longrightarrow l_R(\mathrm{Ext}^3_R(R/I, R)) = \infty$.

  Contradiction!

Let's begin with an explanation of the elements of Weierstrass bases and basic sequences in the the case of saturated homogeneous ideals of curves in $\mathbf{P}^3$. As the details are available in [2, Section 1], [5, Section 1], [6, Sections 1 and 2], [7] and [10, Section 1], we only itemize necessary parts.

- Let $\{ e_l^i \mid 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq l \leq m_i \}$ be a Weierstrass basis of I with respect to x_1, x_2, x_3, x_4. It is a system of homogeneous generators of I which satisfies the conditions described below.

- Let $I^{\langle 1\rangle} := \bigoplus_{l=1}^{m_1} Re_l^1$, $I^{\langle 2\rangle} := \bigoplus_{l=1}^{m_2} k[x_2, x_3, x_4]e_l^2$ and $I^{\langle 3\rangle} := \bigoplus_{l=1}^{m_3} k[x_3, x_4]e_l^3$.

- Let $I'^{\langle 1\rangle} := \bigoplus_{l=1}^{m_1} k[x_2, x_3, x_4]e_l^1$ and $I'^{\langle 2\rangle} := \bigoplus_{l=1}^{m_2} k[x_3, x_4]e_l^2$.

- $I = I^{\langle 1\rangle} \oplus I^{\langle 2\rangle} \oplus I^{\langle 3\rangle}$ as module over $k[x_3, x_4]$.

- Let $I^{[1]} := I$, $I^{[2]} := I^{\langle 2\rangle} \oplus I^{\langle 3\rangle}$ and $I^{[3]} := I^{\langle 3\rangle}$. Then $I^{[1]} = I^{\langle 1\rangle} \oplus I^{[2]}$ as module over $k[x_2, x_3, x_4]$ and $I^{[2]} = I^{\langle 2\rangle} \oplus I^{[3]}$ as module over $k[x_3, x_4]$.

- The multiplications of $I^{[2]}$ and $I^{[3]}$ by x_1 and x_2 have the following properties.

$$
\begin{aligned}
&x_1 I^{[2]} \subset (x_2, x_3, x_4)I'^{\langle 1\rangle} \oplus I^{[2]},\\
&x_2 I^{[3]} \subset (x_3, x_4)I'^{\langle 2\rangle} \oplus I^{[3]},\\
&x_1 I^{[3]} \subset (x_3, x_4)I'^{\langle 1\rangle} \oplus (x_3, x_4)I^{\langle 2\rangle} \oplus I^{[3]}.
\end{aligned}
$$

- $I^{[i]}$ is a finitely generated graded submodule of I over $k[x_i, \ldots, x_4]$ for each $1 \leq i \leq 3$.

- $m_1 = 1$.

- Let $a := \min\{ l \mid [I]_l \neq 0 \}$. Then $\deg(e_1^1) = m_2 = a$.

- Let $b := m_3$, $n_l := \deg(e_l^2)$ $(1 \leq l \leq a)$ and $n_{a+l} := \deg(e_l^3)$ $(1 \leq l \leq b)$. We call $B_R(I) := (a; n_1, \ldots, n_a; n_{a+1}, \ldots, n_{a+b})$ the basic sequence of I or X. We may assume that $n_1 \leq \cdots \leq n_a$ and that $n_{a+1} \leq \cdots \leq n_{a+b}$.

- In general, $a \leq n_1 \leq n_{a+1}$.

- X is projectively Cohen-Macaulay if and only if $b = 0$ (i.e. the subsequence $(n_{a+1}, \ldots, n_{a+b})$ is vacuous).

Remark 5. Let $\mathrm{in}^x(I) \subset R$ be the generic initial ideal of I, namely, the ideal generated by

$$\{ \mathrm{in}^x(f) \mid \text{homogeneous } f \in I \},$$

where $\mathrm{in}^x(f)$ is the initial term of f with respect to revlex associated with x_1, x_2, x_3, x_4.

(1) When $\mathrm{char}(k) = 0$, we can obtain a Weierstrass basis $\{e_1^1, e_1^2, \ldots, e_a^2, e_1^3, \ldots, e_b^3\}$ of I with respect to x_1, x_2, x_3, x_4, taking the reduced and minimal Gröbner basis of I with respect to revlex in such a way that

$$\begin{aligned}
&\mathrm{in}^x(e_1^1) = x_1^a, \\
&\mathrm{in}^x(e_l^2) = x_1^{a-l} x_2^{\beta_{a-l}} \ (1 \le l \le a), \\
&\mathrm{in}^x(e_l^3) = x_1^{t_l} x_2^{u_l} x_3^{\beta_{t_l u_l}} \ (1 \le l \le b),
\end{aligned}$$

where $1 \le \beta_{a-1} < \beta_{a-2} < \cdots < \beta_0$, $t_l < a$, $u_l < \beta_{t_l}$, $\beta_{t_l u_l} > 0$ for $1 \le l \le b$, and $(t_l, u_l) \neq (t_{l'}, u_{l'})$ for l, l' with $l \neq l'$, by strong Borel fixedness.

(2) Then $\mathrm{in}^x(I)$ is minimally generated by

$$x_1^a, \quad x_1^{a-1} x_2^{\beta_{a-1}}, \ldots, x_1 x_2^{\beta_1}, x_2^{\beta_0}, \quad \text{and} \quad x_1^{t_l} x_2^{u_l} x_3^{\beta_{t_l u_l}} \ (1 \le l \le b).$$

(3) We have

$$\begin{aligned}
&a = \deg(x_1^a), \\
&n_l^2 = \deg(x_1^{a-l} x_2^{\beta_{a-l}}) \ (1 \le l \le a), \\
&n_l^3 = \deg(x_1^{t_l} x_2^{u_l} x_3^{\beta_{t_l u_l}}) \ (1 \le l \le b).
\end{aligned}$$

In order to estimate the length of $\mathrm{Ext}_R^3(R/I, R)$, we make use of the standard free resolution of I starting with a Weierstrass basis $\{e_1^1, e_1^2, \ldots, e_a^2, e_1^3, \ldots, e_b^3\}$. See [1, Sections 1 and 2], [5, Section 3] and [10, Section 1] for the detail.

- Forgetting degrees, the standard free resolution is of the form

$$0 \longrightarrow R^b \xrightarrow{\lambda_3} R^{a+2b} \xrightarrow{\lambda_2} R^{a+b+1} \xrightarrow{\lambda_1} I \longrightarrow 0,$$

  where $\lambda_1 := (e_1^1, e_1^2, \ldots, e_a^2, e_1^3, \ldots, e_b^3)$.

- $R^{a+2b} = \bigoplus_{l=1}^a R(-n_l - 1) \oplus \bigoplus_{l=1}^b R(-n_{a+l} - 1) \oplus \bigoplus_{l=1}^b R(-n_{a+l} - 1)$.

- $R^b = \bigoplus_{l=1}^b R(-n_{a+l} - 2)$.

- The matrices λ_2 and λ_3 of course satisfies $\lambda_2 \lambda_3 = 0$ and they are of the the forms

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} U_{01} & U_{02} & 0 \\ U_1 & U_2 & U_4 \\ U_{21} & U_3 & U_5 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} -U_4 \\ -U_5 \\ U_3 \end{bmatrix}.$$

- The size of U_1 is $a \times a$. U_3 and U_5 are of the same size $b \times b$ and U_4 is of size $a \times b$. The size of U_{01} is $1 \times a$.

- $\mathrm{Ext}_R^3(R/I, R) \cong \mathrm{Coker}^R({}^t\lambda_3)$.

- The entries of $\mathring{U}_3 := x_1 1_b - U_3$ and $\mathring{U}_5 := x_2 1_b - U_5$ lie in $k[x_3, x_4]$. The entries of U_4 lie in $(x_3, x_4)k[x_3, x_4]$. Here 1_b denotes the $b \times b$ identity matrix.

We want to cosider $\mathrm{Coker}^R({}^t\lambda_3)$ as a module over $k[x_3, x_4]$. Since the entries of $\mathring{U}_3$ and $\mathring{U}_5$ lie in $k[x_3, x_4]$, we have

Lemma 6. *Let $\mathrm{Im}^{k[x_2,x_3,x_4]}({}^tU_5)$ (resp. $\mathrm{Im}^R({}^tU_3)$) denotes the image of the linear map ${}^tU_5$ over $k[x_2, x_3, x_4]$ (resp. ${}^tU_3$ over R). Then,*

$$R^b = \mathrm{Im}^R({}^tU_3) \oplus \mathrm{Im}^{k[x_2,x_3,x_4]}({}^tU_5) \oplus k[x_3, x_4]^b.$$

Moreover,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}^R({}^t\lambda_3) &= \mathrm{Im}^R({}^tU_3, {}^tU_5, {}^tU_4)\\ &= \mathrm{Im}^R({}^tU_3) \oplus \mathrm{Im}^{k[x_2,x_3,x_4]}({}^tU_5) \oplus (\mathrm{Im}^R({}^t\lambda_3) \cap k[x_3, x_4]^b).\end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^3_R(R/I, R) \cong \mathrm{Coker}^R({}^t\lambda_3) = \mathrm{Coker}^R({}^tU_3, {}^tU_5, {}^tU_4)\\ &\cong \frac{k[x_3, x_4]^b}{\mathrm{Im}^R({}^t\lambda_3) \cap k[x_3, x_4]^b} \quad .\end{aligned}$$

Let $v \in k[x_3, x_4]^b$ be a vector. Since $x_2 v = x_2 1_b v = ({}^tU_5 + {}^t\mathring{U}_5)v = {}^tU_5 v + {}^t\mathring{U}_5 v$, we have $x_2 v \equiv {}^t\mathring{U}_5 v \pmod{\mathrm{Im}^{k[x_2,x_3,x_4]}({}^tU_5)}$. Let $v = x_3 v' + x_4 v'' \in (x_3, x_4)k[x_3, x_4]^b$. In this case, since $x_2 v = x_2 1_b v = ({}^tU_5 + {}^t\mathring{U}_5)v = x_3 {}^tU_5 v' + x_4 {}^tU_5 v'' + {}^t\mathring{U}_5 v$, we have $x_2 v \equiv {}^t\mathring{U}_5 v \pmod{(x_3, x_4)\,\mathrm{Im}^{k[x_2,x_3,x_4]}({}^tU_5)}$. In the same manner, $x_1 v \equiv {}^t\mathring{U}_3 v \pmod{\mathrm{Im}^R({}^tU_3)}$ for $v \in k[x_3, x_4]^b$ and $x_1 v \equiv {}^t\mathring{U}_3 v \pmod{(x_3, x_4)\,\mathrm{Im}^R({}^tU_3)}$ for $v \in (x_3, x_4)k[x_3, x_4]^b$. When considered as a module over $k[x_3, x_4]$, the actions of x_1 and x_2 on $\mathrm{Coker}^R({}^t\lambda_3)$ are threrfore represented by ${}^t\mathring{U}_3$ and ${}^t\mathring{U}_5$ respectively. Our argument is concentrated on the behaviors of these two matrices and the column vectors of ${}^tU_4$. See [10, Sections 3 and 4] for the detail.

We make use of the transposed form of the relation $\lambda_2\lambda_3 = 0$ to get informations on ${}^t\lambda_3$, analyzing the properties of the entries of λ_2 (see [10, Section 2]). First, since the entries of $x_1 1_a - U_1$ lie in $k[x_2, x_3, x_4]$, we can show the following

Lemma 7.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}^R({}^t\lambda_3) \cap k[x_3, x_4]^b &= \sum_{\rho=0}^{b-1} \mathrm{Im}^{k[x_3,x_4]}(({}^t\mathring{U}_5)^\rho \cdot {}^tU_4)\\ &= \big((x_3, x_4)\,\mathrm{Im}^R({}^tU_3, {}^tU_5) + \mathrm{Im}^R({}^tU_4)\big) \cap k[x_3, x_4]^b.\end{aligned}$$

Suppose that $\omega > 1$, $1 \le m < \omega$, $t := \sum_{l=1}^m t_l$, $t + 1 \le a' \le a$, $n_i = n_t + i - t$ for all $t \le i \le a'$, and that $n_{a+1} < n_{a'}$. Now we can estimate $l_R(\mathrm{Ext}^3_R(R/I, R))$ in the following manner. See [10, Section 5] for the detail.

- Let $(v_1, \dots, v_a) := {}^tU_4$. Note that the components of the vectors $v_1, \dots, v_a$ lie in $(x_3, x_4)k[x_3, x_4]$. Since X is contained in an irreducible surface of degree a, certain components of U_1 must be units. This together with the relation $\lambda_2\lambda_3 = 0$ yields that there is a p $t'' < t$ such that

$$\begin{aligned}&(x_3, x_4)\operatorname{Im}^R({}^tU_3, {}^tU_5) + \operatorname{Im}^R({}^tU_4)\\ =&(x_3, x_4)\operatorname{Im}^R({}^tU_3, {}^tU_5) + \operatorname{Im}^R(v_{a'}, \dots, v_a) + \operatorname{Im}^{k[x_2,x_3,x_4]}(v_1, \dots, v_{t''}).\end{aligned}$$

- Very roughly speaking, let $\pi_{i,\rho'}$ be an element of $(x_3, x_4)k[x_3, x_4]^b$ such that

$$x_2^\rho v_i \equiv \pi_{i,\rho'} \pmod{(x_3, x_4)\operatorname{Im}^{k[x_2,x_3,x_4]}({}^tU_5)}$$

for $1 \le i \le t''$, $0 \le \rho' < t'' + 1 - i$.

Lemma 8. *Let P_0 (resp. P) be the $k[x_3, x_4]$-module generated by all the $\pi_{i,\rho'}$ (resp. $v_{a'}, \dots, v_a$). Then*

$$\operatorname{Im}^R({}^t\lambda_3) \cap k[x_3, x_4]^b = P_0 + \sum_{m\ge0,\ n\ge0} L_{m,n}P$$

with

$$L_{m,n} := \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_{m+n}) \text{ such that}\\ \#\{i|p_i=3\}=m \text{ and } \#\{i|p_i=5\}=n}} \left(\prod_{j=1}^{m+n} {}^t\mathring{U}_{p_j}\right).$$

- Since $B_R(I)$ is invariant under a small change of variables x_1, x_2, x_3, x_4, the number and the degrees of the minimal generators of $\operatorname{Ext}^3_R(R/I, R)$ over $k[x_3, x_4]$ are also invariant. Let $p := \max\{\, i \mid n_{a+i} < n_{a'},\ 1 \le i \le b \,\}$. Since $n_{a+p} < n_{a'}$, the upper p components of $v_{a'}, \dots, v_a$ must be zero for reasons of degree. Starting with it, we can prove by the invariance mentioned jusu now that

$$\sum_{m\ge0,\ n\ge0} L_{m,n}P \subset \begin{pmatrix} 0^p \\ k[x_3, x_4]^{b-p}\end{pmatrix} \subset k[x_3, x_4]^b. \qquad (1)$$

The proof of this part is very delicate. See [10, Section 3].

- P_0 is generated by

$$1 + 2 + \dots + t'' = t''(t'' + 1)/2 \le t(t-1)/2$$

elements $\pi_{i,\rho'}$ over $k[x_3, x_4]$.

- Let $\mathrm{pr} : k[x_3, x_4]^b \longrightarrow k[x_3, x_4]^p$ denote the natural projection to the first p components. Suppose $t(t-1)/2 \leq p$. Then $t''(t''+1)/2 \leq p$. We find therefore by Lemmas 6, 8 and (1) that

$$\begin{aligned}
&l_R(\mathrm{Ext}^3_R(R/I, R)) \\
&= l_{k[x_3,x_4]}\left(\frac{k[x_3, x_4]^b}{\mathrm{Im}^R({}^t\lambda_3) \cap k[x_3, x_4]^b}\right) \\
&\geq l_{k[x_3,x_4]}\left(\frac{k[x_3, x_4]^p}{\mathrm{pr}(\mathrm{Im}^R({}^t\lambda_3) \cap k[x_3, x_4]^b)}\right) \\
&\geq l_{k[x_3,x_4]}\left(\frac{k[x_3, x_4]^p}{\mathrm{pr}(P_0)}\right) \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

since the elements of $\mathrm{pr}(P_0)$ are contained in $(x_3, x_4)k[x_3, x_4]^p$. Contradiction!

- Hence $t(t-1)/2 > p$.

References

[1] M. Amasaki, *Preparatory structure theorem for ideals defining space curves*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983), 493 – 518.

[2] M. Amasaki, *On the structure of arithmetically Buchsbaum curves in* $\mathbf{P}^3_k$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **20** (1984), 793 – 837.

[3] M. Amasaki, *Examples of nonsingular irreducible curves which give reducible singular points of* $\mathrm{red}(\mathrm{H}_{d,g})$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **21** (1985), 761 – 786.

[4] M. Amasaki, *Integral arithmetically Buchsbaum curves in* $\mathbf{P}^3$, J. Math. Soc. Japan **41**, No. 1 (1989), 1 – 8.

[5] M. Amasaki, *Application of the generalized Weierstrass preparation theorem to the study of homogeneous ideals*, Trans. AMS **317** (1990), 1 – 43.

[6] M. Amasaki, *Generators of graded modules associated with linear filter-regular sequences*, J. Pure Appl. Algebra **114** (1996), 1 – 23.

[7] M. Amasaki, *Generic Gröbner bases and Weierstrass bases of homogeneous submodules of graded free modules*, J. Pure Appl. Algebra **152** (2000), 3 – 16.

[8] M. Amasaki, *On the basic sequences of integeral curve in* $\mathbf{P}^3$, Proc. 23th Sympos. Commutative Algebra, Kurashiki, November 19 – 22, 2001, pp. 58 – 67.

[9] M. Amasaki, *Verification of the connectedness of space curve invariants for a special case*, Comm. Alg. **32**, No. 10 (2004), 3739 – 3744.

[10] M. Amasaki, *Inequalities satisfied by the basic sequence of an integral curve in* $\mathbf{P}^3$, arXiv.org e-Print archive, math.AC/0504131, April 2005.

[11] D. Bayer and M. Stillman, *A criterion for detecting m-regularity*, Invent. math. **87** (1987), 1 – 11.

[12] M. Cook, *The connectedness of space curves invariants*, Compositio Math. **111** (1998), 221 – 244.

[13] W. Decker and F.-O. Schreyer, *Non-general type surfaces in* $\mathbf{P}^4$*: Some remarks on bounds and constructions*, J. Symb. Comp. **29** (2000), 545 – 583.

[14] L. Gruson et C. Peskine, *Genre des courbes de l'éspace projectif*, in "Algebraic Geometry", Lecture Notes in Math. **687**, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1978, pp. 31 – 59.

Rigid Cohen-Macaulay modules

吉野　雄二 (Yuji Yoshino)
Math. Department, Faculty of Science
Okayama University, Okayama 700-8530, Japan
yoshino@math.okayama-u.ac.jp

1　伊山の問題

発端は2004年可換環論シンポジウム（倉敷）において伊山氏が提出した問題 [1] に始まる。それを説明するために，先ず次の GL(3, $\mathbb{C}$) の元を考える。

$$\sigma = \begin{pmatrix} \zeta & & \\ & \zeta & \\ & & \zeta \end{pmatrix}$$

ただし ζ は1の原始3乗根である。また， G をこの σ で生成される位数が3の巡回群とする。G は自然に（線型に）形式的冪級数環 $S = k[[x, y, z]]$ に作用する。そのとき，この作用による S の不変部分環を R と表すことにする。今の場合には，この R は3次 Veronese 部分環である：

$$R = k[[\{\text{monomials of degree three in } x, y, z, \}]]$$

群 G の作用は S 上に G-graded ring としての構造を与え，$S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2$ と表すことが出来ると言っても良い。ここで，各 S_j は半不変式の成す R-加群 $S_j = \{f \in S \mid f^{\sigma} = \zeta^j f\}$ である。$S_0 = R$ である。各 S_j ($j \in G$) は R 上の maximal Cohen-Macaulay module （以下 MCM と略す）であり，かつ R 加群として直既約である。

一般に rigid な加群とは、どのような非自明な変形も許さない加群のことである。正確には次のように定義される。

定義 1.1 有限生成 R-加群 M は $\mathrm{Ext}^1_R(M, M) = 0$ を満足するときに，rigid であると呼ばれる。

伊山氏が提出した問題は次の通りである。

問題 1.2 [1] 上記の状況の下で， R 上の直既約な rigid MCM 加群は $\{\Omega^i_R S_j \mid i \in \mathbb{Z},\ j = 0, 1, 2, \}$ に限るか？

この問題に対して肯定的に答えたのが次の私の定理である。

定理 1.3 上記の状況下において，$\mathcal{S}$ を次のような直既約な rigid MCM 加群からなる列とする：

$$\mathcal{S} = (\cdots, \Omega^{-2}S_1,\ \Omega^{-2}S_2,\ \Omega^{-1}S_1,\ \Omega^{-1}S_2,\ S_1,\ S_2,\ \Omega^1 S_1,\ \Omega^1 S_2,\ \Omega^2 S_1,\ \Omega^2 S_2, \cdots).$$

このとき，任意の rigid MCM R-加群は次の形をしている。

$$P^a \oplus Q^b \oplus R^c,$$

ただし，a, b, c は非負整数で $\{P, Q\}$ は上の列 $\mathcal{S}$ の中に現れる連続する二つの加群である。

この結果は Rudakov 達 [3] による $\mathbb{P}^2$ 上の rigid vector bundle の分類を含むと伊山氏は考えているようである。本稿の目的はこの定理の証明のアウトラインを与え，実はこの結果が Ringel（または Kac) によるワイルドキバーの次元ベクトルの分類に帰するということを示すことにある。

まずは，定理の証明のためにいくつかの準備をする。一般に $(R, \mathfrak{m}, k)$ を d 次元 Gorenstein 局所環とし，M, N を R 上の MCM 加群とする。このとき，任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して i 次の Tate cohomology が次のように定義される。

$$\check{\mathrm{Ext}}^i_R(M, N) = \mathrm{Ext}^{i+\ell}_R(M, \Omega^\ell N)$$

ただし，ℓ は十分大きな整数である。（$\ell \gg 0$ であるときにはこの右辺はいつも同じである。）$i > 0$ であるときには $\check{\mathrm{Ext}}^i_R(M, N)$ は通常の $\mathrm{Ext}^i_R(M, N)$ と同じである。また $i = 0$ のときには $\check{\mathrm{Ext}}^0_R(M, N) = \underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N)$ である。$i < 0$ のときにも $\check{\mathrm{Ext}}^i_R(M, N)$ はゼロとは限らないことに注意が必要である。

定理 1.4 R が d 次元 Gorenstein 局所環で孤立特異点のみを有すると仮定する。このとき，任意の R 上の MCM 加群 M, N と任意の整数 i について，Tate cohomology に関する Auslander-Reiten-Serre 双対性と呼ばれる次の同型が成立する。

$$\mathrm{Ext}^d_R(\check{\mathrm{Ext}}^i_R(M, N), R) \cong \check{\mathrm{Ext}}^{(d-1)-i}_R(N, M),$$

最近はこの双対性が成立するという事実を，MCM 加群の圏 $\mathrm{CM}(R)$ の安定化圏 $\underline{\mathrm{CM}(R)}$ が「$(d-1)$-Calabi-Yau 圏である」という言い方をするようである。定理 1.3 のときには $d = 3$ だから，$\underline{\mathrm{CM}(R)}$ は 2-Calabi-Yau である。

さて，定理 1.3 の証明のアウトラインを述べよう。まず定理の状況下では，$S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2$ という R-加群としての分解が与えられていた。任意の $M \in \mathrm{CM}(R)$ に対して，次のような Tate cohomology の次元を考える。

$$e^i_j(M) := \dim_k \check{\mathrm{Ext}}^i_R(S_j, M) \quad (j = 1, 2)$$

さて R 上の rigid MCM 加群の同型類の集合を $\mathcal{C}$ とおいて，集合 $\mathcal{C}$ から平面上の整数点の集合への次のような写像を考える。

$$\underline{e} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$$

ただし，

$$\underline{e}(M) := (e_1^1(M),\ e_2^0(M))$$

である。

[証明の第１段階]　写像 $\underline{e}$ は $\mathcal{C}$ のいくつかの例外を除いて「ほぼ単射」である。

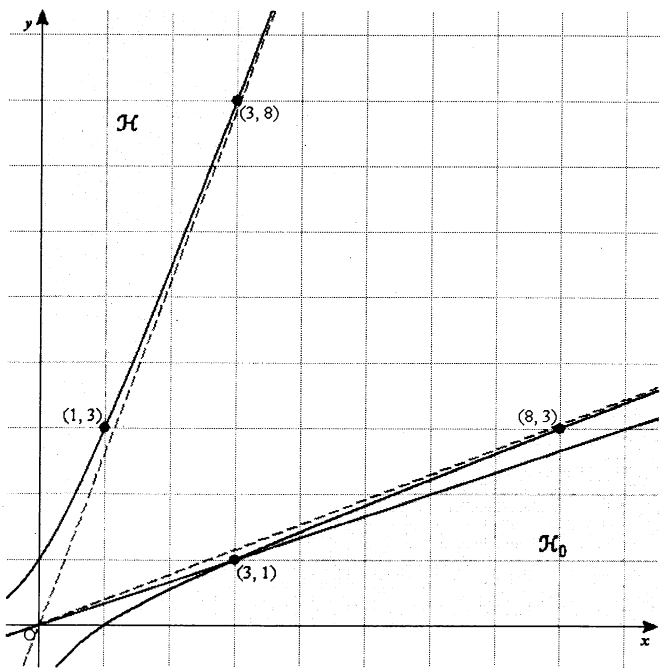
これは $\mathcal{C}$ に属する加群が全て rigid であることから，容易に想像されることであるが，実際に証明することができる。ただし,「ほぼ単射」とは， $M, N \in \mathcal{C}$ がともに S_1 と $\Omega^1 S_2$ を直和因子に含まないときには，$\underline{e}(M) = \underline{e}(N)$ から $M \cong N$ が従うということである。

[証明の第２段階]　次のような平面上の整数点の集合を考える。

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} \mid x^2 - 3xy + y^2 \geq 1\}$$

このとき，写像 $\underline{e}$ の像は $\mathcal{H}$ に含まれる。

これは，先に述べた $\underline{\mathrm{CM}(R)}$ の 2-Calbi-Yau 性を使って示される。下に示した領域に含まれる整数点の集合が $\mathcal{H}$ である。



[証明の第３段階]　写像 $\underline{e}$ の像は丁度 $\mathcal{H}$ に一致する。

これは第２段階が示されれば，ほぼ計算のみで示すことが出来る。実際，

$$\mathcal{H}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} \mid x^2 - 3xy + y^2 \geq 1,\ x \geq 3y\}$$

を基本領域として，$\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ 上の一次変換

$$w = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって、

$$\mathcal{H} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_0 \cdot w^i \ \cup \ \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_0 \cdot r \cdot w^{-i}$$

と表せることと、実は基本領域 $\mathcal{H}_0$ は半群として

$$\mathcal{H}_0 = \mathbb{Z}_{\geq 0}(1,0) + \mathbb{Z}_{\geq 0}(3,1)$$

と表されることを使えばよい。たとえば、

$$\begin{array}{lll} \underline{e}(\Omega^{-1}S_1) = (1,0), & \underline{e}(\Omega^{-2}S_2) = (3,1), & \underline{e}(\Omega^{-2}S_1) = (8,3), \\ \underline{e}(\Omega^{-3}S_2) = (21,8), & \underline{e}(\Omega^{-3}S_1) = (55,21), & \underline{e}(\Omega^{-4}S_2) = (144,55), \cdots \end{array}$$

これらの計算の結果として最終的に定理のような結果を得ることができる。□

この証明を振り返って、本質的部分は第２段階であり、$\underline{e}$ の像が入る領域 $\mathcal{H}$ を決めること、あるいは, それを与える二次形式 $x^2 - 3xy + y^2$ を得ることであった。この二次形式は一体何を表しているのだろうか。それに対して答えるのが次の節の主題である。

2　有限次元代数への帰着

最初の問題を若干一般化して考えてみたい。

G を $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ の small な有限部分群とする。G は自然に（線型に）形式的冪級数環 $S = k[[x,y,z]]$ に作用する。そのとき、この作用による S の不変部分環を以前と同様に R と表すことにする。次の仮定を G に課することにする。

(i) 単位元でない G のどの元も固有値として１を持たない。

(ii) G は $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ に含まれる。

この条件は，R が孤立特異点しかもたない Gorenstein 環となるための必要十分条件であることは良く知られている。そして、この条件は R 上の MCM 加群の圏 $\mathrm{CM}(R)$ の安定化圏 $\underline{\mathrm{CM}(R)}$ が 2-Calabi-Yau であるための十分条件であった。この条件のもとで議論を進めたい。

このとき，S 上の G の歪群環を Λ という記号で表すことにする。すなわち，$\Lambda = \sum_{\sigma \in G} S\sigma$ であり，積は $(s\sigma)(t\tau) = s\sigma(t)\sigma\tau$ $(s, t \in S, \sigma, \tau \in G)$ によって定義される。さて Λ の冪等元 ρ を $\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G} \sigma$ と置き，剰余環 $\overline{\Lambda} = \Lambda/\Lambda\rho\Lambda$ を考える。$\overline{\Lambda}$ は有限 R-代数であるようなアルティン環である。$\overline{\Lambda}$-mod で有限生成左 $\overline{\Lambda}$-modules の圏を表すことにする。次の定理が前節の最後に述べた疑問に答えるものである。

Theorem 2.1 次の二つの圏の間の圏同値を与えるような関手 ϕ が存在する。

$$\phi \ : \ \mathrm{CM}(R)/[S] \ \longrightarrow \ \overline{\Lambda} - \mathrm{mod}$$

さらに、この ϕ は rigidity を保存する。すなわち、M が R 上の rigid MCM 加群ならば、 $\phi(M)$ は rigid な $\overline{\Lambda}$-加群である。

前節の場合の G については、$\overline{\Lambda}$-mod は次のクロネッカー型の wild quiver の表現の圏そのものである。

$$Q = \left(\bullet \ \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow} \ \bullet \right)$$

したがって、圏 CM(R) はワイルドな表現型をもつことがわかる。また、関手 ϕ が rigidity を保存することから、R 上の rigid MCM を求める問題は、rigid な $\overline{\Lambda}$-加群を求める問題へと変換される。そして、上記の wild quiver の Cartan 行列に付随した二次形式は、$x^2 - 3xy + y^2$ であることが、前節の証明においてこの二次形式が登場してきた理由である。Ringel [2] は、上記のクロネッカー型の wild quiver の rigid な直既約表現の次元ベクトルを決定していて、それが、Cartan 行列に付随した二次形式によって与えられる positive real root であることを示している。結果として、定理 1.3 はこの Ringel の結果に帰着されるといってよいのである。

References

[1] O. Iyama, *Higher dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories*, 第２６回可換環論シンポジウム報告集 (2005), 158–167.

[2] C. M. Ringel, *Reflection functors for hereditary algebras*, J. London Math. Soc. (2) 21 (1980), no. 3, 465–479.

[3] A. L. Gorodentsev, A. N. Rudakov, *Exceptional vector bundles on projective spaces*, Duke Math. J. 54 (1987), no. 1, 115–130.

[4] Y. Yoshino, *Rigid Cohen-Macaulay modules over a three dimensional Gorenstein ring*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report, no. 6 (2005), 345–347.

Maps to Tate-Vogel cohomologies

大阪府立大学大学院　情報数理科学教室
加藤　希理子
Kiriko Kato
e-mail: kiriko@mi.s.osakafu-u.ac.jp
Department of Mathematics and Information Sciences,
Osaka Prefecture University Daisen
Sakai, Osaka 590-0035, JAPAN

Abstract

Let R be a commutative noetherian ring and M and N be finite R-modules. There is a natural map $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,N) \to \check{\mathrm{Ext}}^0_R(M,N)$ with $f \mapsto \varinjlim \Omega^n_R(f)$ where $\check{Ext}^0_R(M,N)$ denotes 0-th Tate-Vogel cohomology of M and N. We explicitly get the kernel of this map in terms of the pseudo-cokernel of the special map associated to M. In particular, when G-$\dim M$ is finite, $\varinjlim \Omega^n_R(f)$ vanishes if and only if f factors through a module with finite projective dimension. As a corollary, we obtain Buchweitz's characterization of Cohen-Macaulay approximation using stable category.

Definition 1 *Let* C *be an abelian category and* S *be a full subcategory of* C. *A stable category* C_{S} *is defined as follows. (See also [10].)*

- *Each object of* C_{S} *is an object of* C.
- *For objects* A, B *of* C_{S}, *a set of morphisms from* A *to* B *is* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_{\mathsf{S}}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)/\mathcal{S}(A,B)$ *where* $\mathcal{S}(A,B) := \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B) \mid f$ *factors through some object in* $\mathsf{S}\}$.

Definition 2 (Auslander-Bridger [1]) *When we consider a category* $\mathrm{mod}\, R$ *of finite* R*-modules and its subcategory* $\mathrm{proj}\, R$ *of finite projective modules, the stable category* $\mathrm{mod}\, R_{\mathrm{proj}\, R}$ *is called a projective stabilization (stable module category, for simplicity) and denoted as* $\underline{\mathrm{mod}\, R}$. *The set of morphisms* $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{mod}\, \mathrm{R}}}(A,B)$ *is denoted as* $\underline{\mathrm{Hom}}_R(A,B)$. *Each morphism is denoted as* $\underline{f} = f \mod \{g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(A,B) \mid$ *g factors through some projective module*$\}$.

Definition 3 1) (**Auslander-Bridger [1]**) *For an* R*-module* M, *define a transpose* $\mathrm{Tr}\, M$ *of* M *to be* $\mathrm{Cok}\, \delta^*$ *where* $P \xrightarrow{\delta} Q \to M \to 0$ *is a projective presentation of* M. *The transpose of* M *is uniquely* *determined as an object of* $\underline{\mathrm{mod}\,R}$. *If* $\underline{f} \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)$, *then* f *induces a map* $\mathrm{Tr}\,N \to \mathrm{Tr}\,M$, *which represents a morphism* $\mathrm{Tr}\,\underline{f} \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(\mathrm{Tr}\,N, \mathrm{Tr}\,M)$.

2) *A kernel of projective cover of an* R*-module* M *is called the first syzygy module of* M *and denoted as* $\Omega^1_R(M)$. *The first syzygy module of* M *is uniquely determined as an object of* $\underline{\mathrm{mod}\ R}$. *Inductively, we define* $\Omega^n_R(M) = \Omega^1_R(\Omega^{n-1}_R(M))$. *If* $\underline{f} \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)$, *then* f *induces a map* $\Omega^n_R(M) \to \Omega^n_R(N)$, *which represents a morphism* $\underline{\Omega^n_R(f)} \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega^n_R(M), \Omega^n_R(N))$.

Definition 4 ([4], [9]) *For* $M, N \in \mathrm{mod}\ R$, *we define the* 0*-th Tate-Vogel cohomology* $\check{Ext}^0_R(M,N)$ *of* M *with* N *as the limit of the direct system*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{R}}(M,N) \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega^1_R(M), \Omega^1_R(N)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega^2_R(M), \Omega^2_R(N)) \to \cdots$$

Remark

1) $\check{Ext}^0_R(M,N) = 0$ for all $N \in \mathrm{mod}\ R$ if and only if M is of finite projective dimension.

2) Suppose $(R, \mathbf{m}, k)$ is local. The Tate-Vogel cohomology $\check{Ext}^0_R(k,k)$ vanishes if and only if R is regular. When $\check{Ext}^0_R(k,k)$ is finitely generated, that is if and only if R is Gorenstein.

Definition 5 *Let* M *be an* R*-module. Take a projective complex* ${F_M}^\bullet$ *as*

$$\cdots \to {F_M}^{-1} \to {F_M}^0 \to M \to 0$$

is a projective resolution of M, *and*

$$\cdots \to ({F_M}^0)^* \to ({F_M}^{-1})^* \to \mathrm{Tr}\,M \to 0$$

is a projective resolution of $\mathrm{Tr}\,M$.
Such a complex is uniquely determined by $M \in \underline{\mathrm{mod}\,R}$ *as an object of the homotopy category* $\mathcal{K}(\mathrm{proj}\ R)$, *and is called a standard complex of* M.

Theorem 6 (K [6]) *The stable module category* $\underline{\mathrm{mod}\ R}$ *is equivalent to a full subcategory* $\mathcal{L}$ *in* $\mathcal{K}(\mathrm{proj}\ R)$ *via correspondence between each module* M *to its standard complex* ${F_M}^\bullet$.

For $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(A, B)$, there exists a triangle

$$C(f)^{\bullet-1} \xrightarrow{n_f{}^\bullet} F_A{}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} F_B{}^\bullet \xrightarrow{c_f{}^\bullet} C(f)^\bullet. \tag{1}$$

In general, $C(f)^\bullet$ does not belong to $\mathcal{L}$.

Definition and Lemma 7 ([6]) *As objects of* $\underline{\mathrm{mod}}\, R$*,* $\underline{\mathrm{Ker}}\ \underline{f} := \mathrm{Cok}\, d_{F_M}{}^{-2}$ *and* $\underline{\mathrm{Cok}}\ \underline{f} := \mathrm{Cok}\, d_{F_M}{}^{-1}$ *are uniquely determined by* $\underline{f}$*, up to isomorphisms. We call these the pseudo-kernel and the pseudo-cokernel of* $\underline{f}$*.*

The triangle (1) induces two sequences

$$\Omega^1_R(B) \to \underline{\mathrm{Ker}}\ \underline{f} \to A \xrightarrow{f} B,$$

$$A \xrightarrow{f} B \to \underline{\mathrm{Cok}}\ \underline{f} \to \mathrm{Tr}\,\Omega^1_R(\mathrm{Tr})M.$$

Each composite of two consecutive morphisms is zero in $\underline{\mathrm{mod}}\, R$. These sequences are not triangle in general. What makes the sequences triangles, is the "represented by monomorphisms (rbm for short)" property.

Linear maps $f : A \to B$ and $f' : A' \to B'$ of finite R-modules are said to be projective-stably equivalent (pse for short) if the following diagram is commutative

$$\begin{tikzcd}
A \oplus P' \arrow[r, "\begin{pmatrix} f & s \\ t & u \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\cong"] & B \oplus Q' \arrow[d, "\cong"] \\
A' \oplus P \arrow[r, "\begin{pmatrix} f' & s' \\ t' & u' \end{pmatrix}"] & B' \oplus Q
\end{tikzcd}$$

with some projective modules P, Q, P', Q' and R-linear maps s, t, u, s', t', u'. We say a morphism f is represented by monomorphisms ("rbm" for short) if there exists a monomorphism that is pse to f.

Theorem 8 (K [7]) *The stable module category* $\underline{\mathrm{mod}}\, R$ *is triangulated if and only if each morphisms in* $\mathrm{mod}\, R$ *are represented by monomorphisms.*

proof. We easily see that $\underline{\mathrm{mod}}\, R$ is triangulated if and only if $C(f)^\bullet \in \mathcal{L}$ for each morphism f, that is, the triangle (1) is a triangle in $\mathcal{L}$. The complex $C(f)^\bullet$ has

$$\mathrm{H}^i(C(f)^\bullet) = 0\ (i < -1), \quad \mathrm{H}_j(C(f)^*_\bullet) = 0\ (j > -1).$$

Hence the condition for $C(f)^\bullet \in \mathcal{L}$ is $\mathrm{H}^{-1}(C(f)^\bullet) = 0$, which equivalently says that f is represented by monomorphisms from Theoorem 3.9 of [7]. (q.e.d.)

To solve our problem, the special kind of maps is a key. Let r be a non-negative integer. The functor $J_r^2 = \mathrm{Tr}\,\Omega_R^r$ is an endofunctor on $\underline{\mathrm{mod}\,R}$. For $M \in \mathrm{mod}\ R$, consider a module $J_r^2 M = \mathrm{Tr}\,\Omega_R^r\,\mathrm{Tr}\,\Omega_R^r M$. The identity map on $\mathrm{Tr}\,\Omega_R^r M$ induces chain maps $p_{rM}{}^\bullet : F_{\Omega_R^r(M)}{}^{\bullet+r} \to F_M{}^\bullet$ with $p_{rM}{}^i = id$ for $i \leq -r$, and $\delta_{rM}{}^\bullet : F_{\Omega_R^r(M)}{}^{\bullet+r} \to F_{J_r^2 M}{}^\bullet$ with $\delta_{rM}{}^i = id$ for $i \geq -1$. The chain map $p_{rM}{}^\bullet$ induces a morphism $\psi_r^M : J_r^2 M \to M$ in $\underline{\mathrm{mod}}\ R$, which again induces a chain map $\psi_r^{M\bullet} : F_{J_r^2 M}{}^\bullet \to F_M{}^\bullet$. Obviously, $p_{rM}{}^\bullet = \psi_{rM}{}^\bullet \circ \delta_{rM}{}^\bullet$.

Theorem 9 *Let r be a non-negative integer. For a morphism $f : A \to B$ in $\underline{\mathrm{mod}}$ R, the following are equivalent.*

1) $\underline{\Omega_R^r(f)} = 0$.

2) $\underline{f}$ *factors through* $\underline{\mathrm{Cok}\psi_r^A}$.

3) $\underline{J_r^2 f} = 0$.

4) $\underline{f \circ \psi_r^M} = 0$.

proof. 1) $\Rightarrow$ 3). If $\underline{\Omega_R^r(f)} = 0$, then $\underline{J_r^2 f} = \mathrm{Tr}\,\Omega_R^r\,\mathrm{Tr}(\underline{\Omega_R^r f}) = 0$.

3) $\Rightarrow$ 1). (2.20) of [2] says the composite of natural transformations $J_r \to J_R^3 \to J_r$ is identity, which induces a diagram

$$\begin{array}{ccccc} J_r A & \to & J_r^3 A & \to & J_r A \\ \downarrow{\scriptstyle J_r f} & & \downarrow{\scriptstyle J_r^3 f} & & \downarrow{\scriptstyle J_r f} \\ J_r B & \to & J_r^3 B & \to & J_r B. \end{array}$$

Since $\underline{J_r f}$ factors through $\underline{J_r^3 f} = J_r(\underline{J_r^2 f}) = 0$, $\underline{J_r f} = 0$.

2) $\Rightarrow$ 4). The condition 2) says that a chain map $f^\bullet$ factors through $F_{\underline{\mathrm{Cok}\psi_r^A}}{}^\bullet$ in $\mathsf{K}(\mathrm{proj}R)$, from Theorem 6. It follows $f^\bullet \circ \psi_r^{A\bullet} = 0$ since the diagram

$$\begin{array}{ccc} F_M{}^\bullet & \longrightarrow & C(\psi_r^A)^\bullet \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & F_{\underline{\mathrm{Cok}\psi_r^A}}{}^\bullet & \end{array}$$

is commutative. Again from Theorem 6, $f^\bullet \circ \psi_r^{A\bullet} = 0$ equivalently means 4).

4) $\Rightarrow$ 2). The condition $f^\bullet \circ \psi_r^{A^\bullet} = 0$ implies $f^\bullet$ factors through $C(\psi_r^A)^\bullet$ hence $\underline{f}$ factors through $\underline{\mathrm{Cok}\psi_r^A}$.

3) $\Rightarrow$ 4). It is obvious because $f^\bullet \circ \psi_r^{A^\bullet} = \psi_r^{B^\bullet} \circ J_r^2 f^\bullet$. (See the diagram below.)

$$\begin{array}{ccccc} F_{\Omega_R^r(A)}{}^{\bullet+r} & \overset{\delta_{rA}{}^\bullet}{\to} & F_{J_r^2 A}{}^\bullet & \overset{\psi_{rA}{}^\bullet}{\to} & F_A{}^\bullet \\ \downarrow{\scriptstyle \Omega_R^r(f)^{\bullet+r}} & & \downarrow{\scriptstyle J_r^2 f^\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle f^\bullet} \\ F_{\Omega_R^r(B)}{}^{\bullet+r} & \overset{\delta_{rB}{}^\bullet}{\to} & F_{J_r^2 B}{}^\bullet & \overset{\psi_{rB}{}^\bullet}{\to} & F_B{}^\bullet \end{array}$$

4) $\Rightarrow$ 1). Since $p_{rA}{}^\bullet = \psi_r^{A^\bullet} \circ \delta_{rA}{}^\bullet$, $f^\bullet \circ p_{rA}{}^\bullet = 0$, which implies $p_{rB}{}^\bullet \circ (\Omega_R^r(f))^{\bullet+r} = 0$. With $p_{rB}^i = \mathrm{id}$ $(i \leq -r)$, we know that $\Omega_R^r(f)^{\bullet+r}$ is homotopic to a map $g^{\bullet+r} = 0$ $(i \leq 0)$. Thus $\underline{\Omega_R^r(f)} = \underline{\mathrm{H}^0(\tau_{\leq 0}\Omega_R^r(f)^\bullet)} = \underline{\mathrm{H}^0(\tau_{\leq 0} g^\bullet)}$. (q.e.d.)

For $A, B \in \mathrm{mod}\, R$, natural map $M \to \underline{\mathrm{Cok}\psi_A^r}$ induces a group homomorphism $\underline{\mathrm{Hom}}_R(A,B) \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(\underline{\mathrm{Cok}\psi_A^r}, B)$. Inverse systems

$$\cdots \to J_2^2 A \to J_1^2 A \to A$$

and

$$\cdots \to \underline{\mathrm{Cok}\psi_2^A} \to \underline{\mathrm{Cok}\psi_1^A} \to A$$

induce a direct system

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(\underline{\mathrm{Cok}\psi_1^A}, B) \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(\underline{\mathrm{Cok}\psi_2^A}, B) \to \cdots.$$

Now the following is an immediate corollary to Theorem 9.

Theorem 10 *For objects A, B in $\underline{\mathrm{mod}}$ R, we have an exact sequence of abelian groups:*

$$\varinjlim \underline{\mathrm{Hom}}_R(\underline{\mathrm{Cok}\psi_r^A}, B) \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(A,B) \to \check{Ext}_R^0(A,B)$$

When a module has a finite G-dimension, Tate-Vogel cohomology is quite easy to understand via Cohen-Macaulay approximation. If A is of finite G-dimension equal or less than r, $\Omega_R^r(A)$ and $J_r^2 A$ are of G-dimension zero. In other words, $F_{J_r^2 A}{}^\bullet$ is acyclic. the triangle

$$F_{J_r^2 A}{}^\bullet \overset{\psi_r^{A^\bullet}}{\to} F_A{}^\bullet \to C(\psi_r^A)^\bullet \to F_{J_r^2 A}{}^{\bullet-1} \tag{2}$$

implies $\mathrm{H}^i(C(\psi_r^A)^\bullet) \cong \mathrm{H}^i(F_M{}^\bullet)$ $(i \in \mathbf{Z})$, $C(\psi_r^A)^\bullet = F_{\underline{\mathrm{Cok}\psi_r^A}}{}^\bullet$ in particular.

Also we have $F_{\Omega_R^r(A)}{}^{\bullet+r} = F_{J_r^2A}{}^{\bullet}$ and $\delta_{rA}{}^{\bullet} = \psi_r^{A\bullet}$. Since $\delta_{rA}{}^{i} = \mathrm{id}$ for $i \leq -r$, $C(\delta_{rA})^{\bullet}$ is homotopic to a complex whose higher terms are zero; $\mathrm{pd}\, \underline{\mathrm{Ker}\delta_{rA}}$ is finite.

Since $\mathrm{H}^{-1}(C(\psi_r^A)^{\bullet}) = 0$ from above, we have $\underline{\mathrm{Ker}\delta_{rA}} \cong \Omega_R^1(\underline{\mathrm{Cok}\delta_{rA}}) = \Omega_R^1(\underline{\mathrm{Cok}\psi_r^A})$, hence $\mathrm{pd}\, \underline{\mathrm{Cok}\psi_r^A}$ is finite.

Therefore the exact sequence

$$0 \to \underline{\mathrm{Ker}\psi_r^A} \to J_r^2A \oplus P_A \to A \to 0,$$

is a Cohen-Macaulay approximation [1] of A.

For $n \geq r$ and $\underline{f} \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(A, B)$. Since $\mathrm{Tr}\,\Omega^{n-r}\,\mathrm{Tr}\,\Omega n A = J_{n-r}^2 \Omega^r A = \Omega_R^r(A)$, $\mathrm{Tr}\,\Omega^{n-r}\,\mathrm{Tr}\,\underline{f} \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega_R^r(A), J_{n-r}^2\Omega_R^r(B))$ makes a composite map $f' = \Psi^{\Omega_R^r(B)} n - r \circ \mathrm{Tr}\,\Omega^{n-r}\,\mathrm{Tr}\, f \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega_R^r(A), \Omega_R^r(B))$, which has $\underline{\Omega_R^{n-r}(f')} = \underline{f}$. Thus we show the following.

Lemma 11 (Yoshino [11], Jorgensen [5]) *Let A, B be objects in $\underline{\mathrm{mod}}\, R$ and suppose G-$\mathrm{dim}\, A = r$ is finite. Then we have*

$$\check{Ext}_R^0(A, B) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega_R^r(A), \Omega_R^r(B)) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_R(J_r^2A, B).$$

We define a quotient category of $\mathrm{mod}\, R$ analogously to triangulated category case.

Definition 12 *Let $\underline{\mathcal{F}(R)}$ denote a full subcategory of $\mathrm{mod}\, R$ consisting of modules with finite projective dimension. Define a quotient category $\underline{\mathrm{mod}\, R}/\underline{\mathcal{F}(R)}$ as follows:*

- *Each object of $\underline{\mathrm{mod}\, R}/\underline{\mathcal{F}(R)}$ is an object of $\mathrm{mod}\, R$.*
- *A morphism from M to N is a pair f/s determined by $\underline{s} \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(M', M)$ with $\underline{\mathrm{Ker} s} \in \underline{\mathcal{F}(R)}$ and $\underline{f} \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(M', N)$. Two morphisms f/s and f'/s' are equal when there are linear maps h and h' such that $\underline{s} \circ \underline{h} = \underline{s'} \circ \underline{h'}$, $\underline{f} \circ \underline{h} = \underline{f'} \circ \underline{h'}$ and $\underline{\mathrm{Ker}}\ \underline{s}, \underline{\mathrm{Ker}}\ \underline{s'} \in \underline{\mathcal{F}(R)}$.*

This is intrinsically the same construction as Buchweitz's whose statement is given in the terminology of derived category.

[1] Precisely, we use the word "Cohen-Macaulay approximation" only for modules over Gorenstein local rings. In non-Gorenstein case, for a module A with finite G-dimension, you can similarly get an exact sequence $0 \to Y_A \to X_A \to A \to 0$ with Y_A of finite projective dimension and X_A of G-dimension zero. If the ring is local Gorenstein, G-dimension zero means maximal Cohen-Macaulay.

Theorem 13 (Buchweitz [3]) *Let R be a Gorenstein ring. Then we have an equivalence of categories*

$$\mathrm{mod}\, R/\mathcal{F}(R) \cong \underline{\mathcal{CM}}(R)$$

where $\mathcal{F}(R)$ denotes a category of modules with finite projective dimension and $\mathcal{CM}(R)$ does that of maximal Cohen-Macaulay modules.

Proposition 14 *If R is Gorenstein, the functor*

$$\mathrm{mod}\, R_{\mathcal{F}(R)} \to \mathrm{mod}\, R/\mathcal{F}(R)$$

is well-defined.

The proof is obtained by the following corollaries to Theorem 9.

Corollary 15 *Let $f : A \to B$ be a morphism in* $\mathrm{mod}\, R$ *and suppose G-*$\dim A$ *is finite. Then the following are equivalent.*

1) $\underline{\Omega^r_R(f)} = 0$ *for sufficiently large $r > 0$.*

2) *f factors through a module with finite projective dimension.*

proof. It suffices to show 1) $\Rightarrow$ 2). We may assume r to be larger than G-dimension of A. Let $\eta_A : A \to \underline{\mathrm{Cok}\psi^r_A}$ be the natural map, and $\rho_B : P_B \to B$ a projective cover of B. By Theorem 9, $\underline{f}$ factors through $\underline{\mathrm{Cok}\psi^A_r}$; there exists an R-linear map $h : \underline{\mathrm{Cok}\psi^A_r} \to B$ such that $\underline{f} = \underline{h} \circ \eta_A$. This means the existence of an R-linear map $q : A \to P_B$ such that $f = \rho_B \circ q + h \circ \eta_A$. Therefore f factors through $\underline{\mathrm{Cok}\psi^A_r} \oplus P_B$ which is of finite projective dimension from the argument above. (q.e.d.)

Corollary 16 *Let A, B be objects in* $\underline{\mathrm{mod}}$ *R and suppose G-*$\dim A$ *is finite. We have a well-defined map*

$$\mathrm{Hom_R}(A, B)/\mathcal{F}(A, B) \to \check{\mathrm{Ext}}^0_R(A, B).$$

where $\mathcal{F}(A, B)$ is a subgroup of $\mathrm{Hom_R}(A, B)$ *consisting of a map that factors through some module with finite projective dimension.*

References

[1] M.Auslander and M.Bridger, " The stable module theory," Mem. Amer. Math. Soc. **94**, 1969.

[2] M.Auslander and R.O.Buchweitz, The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations, Soc. Math. de France, Mem **38**(1989), 5-37.

[3] R.O.Buchweitz, "Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings".

[4] F.Goichot, Homologie de Tate-Vogel équivariante, J. Pure and Appl. Algebra **82**, 39-64.

[5] P.Jorgensen, Spectra of Modules, J. Algebra, **244** ,(2001), 744-784.

[6] K.Kato, Stable Module Theory with Kernels, Math. J. Okayama Univ., **43** (2001), 31-41.

[7] K.Kato, Morphisms represented by mononorphisms, to appear in J. Pure and Appl. Algebra.

[8] P.H.Kropholler, Hierarchical decompositions, generalized Tate cohomology, and groups of type $(\mathrm{FP})_\infty$, Combinatorial and Geometric Group Theory (Edinburgh, 1993), London Math.Soc.Lecture Notes Ser.204, Univ.Press, Cambridge, 1995; 190-216.

[9] G.Mislin, Tate cohomology for arbitrary groups via satellites, Topology Appl. **56** (1994), 293-300.

[10] J.Miyachi, Derived categories with applications to representations of algebras, Seminar Note, 2000.

[11] Y.Yoshino, Tate-Vogel completions of half exact functors, Algebras and Representation Theory, **4** (2001), 171-200.